Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

FUNZIONI SPECIALI E APPLICAZIONI

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Angelo Favini

Presentata da:
Sara Giannuzzi

II Sessione
Anno Accademico 2012/2013

Introduzione

La teoria delle funzioni speciali trattata da Gauss, Eulero, Laplace, Jacobi e Riemann è da lungo tempo uno degli argomenti profondamente radicato nell'analisi matematica, nella teoria delle funzioni di una variabile complessa e nella teoria della rappresentazione dei gruppi.
Queste funzioni hanno una notevole importanza non solo nella risoluzione di molti problemi della fisica teorica e matematica ma anche nelle applicazioni computazionali.
Scopo di questa trattazione è studiare l'apparato matematico di queste funzioni e vedere quali possono essere le loro applicazioni.
Nel primo capitolo analizzeremo il metodo di Frobenius, che ci permetterà di ottenere queste funzioni come soluzioni di equazioni differenziali singolari.
Le equazioni che studieremo in dettaglio sono l'equazione ipergeometrica e l'equazione di Legendre, che sono entrambe equazioni differenziali del secondo ordine con tre punti singolari.
Costruiremo le soluzioni di queste due equazioni intorno ai punti singolari e cercheremo un sistema fondamentale di soluzioni intorno a ciascun punto.
Nel primo capitolo, dedicato allo studio dell'equazione ipergeometrica, studieremo anche le soluzioni dell'equazioni nei casi eccezionali, ovvero i casi in cui i paramentri assumono dei valori particolari, e vedremo come passare da un sistema fondamentale di soluzioni in un punto singolare ad un altro; infine daremo una rappresentazione integrale delle funzioni ipergeometriche, che ci permetterà di prolungare analiticamente il dominio di definizione di questa funzione.
Il secondo capitolo è dedicato allo studio dell'equazione di Legendre, che vedremo non essere altro che un caso particolare di equazione ipergeomentrica.
Studieremo le soluzioni di quest'equazione e ci soffermeremo su un caso particolare, ovvero quando le soluzioni dell'equazione sono dei polinomi della variabile complessa z di grado n, meglio noti come polinomi di Legendre; in seguito approfondiremo le proprietà di questi polinomi, in particolare la proprietà di ortogonalità.
Arriveremo infine a dimostre che un sistema di polinomi di Legendre è completo in $L_2(-1, 1)$.
Le due equazioni studiate si ritrovano, come ricordato sopra, in molte applicazioni; infatti l'appendice spiega in modo generale i campi di utilizzo di queste particolari

funzioni.
Analizzeremo più da vicino come l'equazione e i polinomi di Legendre vengono utilizzati in problemi ai limiti per equazioni a derivate parziali, originati da problemi della fisica e della fisica matematica.

Indice

Capitolo 1

Funzioni speciali

1.1 Soluzioni intorno a punti singolari e metodo di Frobenius

Iniziamo dando la definizione di punto singolare.

Definizione 1.1. Sia data l'equazione differenziale del secondo ordine omogenea:

$$B_0(z)w'' + B_1(z)w' + B_2(z)w = 0 \tag{1.1}$$

supponiamo che $B_0(z) \neq 0$ e riscriviamo la (1.1) nella forma:

$$w'' + P(z)w' + Q(z)w = 0 \tag{1.2}$$

con $P(z) = \dfrac{B_1(z)}{B_0(z)}$ e $Q(z) = \dfrac{B_2(z)}{B_0(z)}$.
Allora:

- Se $P(z)$ e $Q(z)$ sono funzioni sviluppabili in serie di Taylor intorno al punto $z_0 \Rightarrow z_0$ è detto *punto ordinario*;
- Se z_0 è al più un polo semplice per $P(z)$ e un polo al più di molteplicità doppia per $Q(z) \Rightarrow z_0$ è detto *punto singolare regolare*;
- Se $P(z)$ e $Q(z)$ hanno una singolarità in z_0, ma z_0 non è un punto singolare regolare $\Rightarrow z_0$ è detto *punto singolare irregolare*.

Consideriamo l'equazione differenziale (1.1) con $B_k(z)$, $k = 0, 1, 2$ funzione olomorfa in un dominio aperto D e $B_0(z) \neq 0$ $\forall z \in D$.
L'equazione $\forall z_0 \in D$ ha 2 soluzioni linearmente indipendenti w_1 e w_2, che sono olomorfe

in un intorno di z_0; ma in questo stesso intorno le due soluzioni sono anche analitiche, allora potremo scriverle nella forma:

$$w_k(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{k,i}(z - z_0)^i, \quad k = 1, 2. \tag{1.3}$$

dove $a_{k,i} \in \mathbb{C}$.
Allora assegnando all'equazione i valori iniziali $w(z_0) = w_{k,1}, w'(z_0) = w_{k,2}$, con $w_{k,1}$ e $w_{k,2}$ vettori linearmente indipendenti si potranno trovare i coefficienti $a_{k,i}$ di $w_k(z)$. Basterà,infatti, sostituire le incognite della (1.1) con la serie formale $\sum_{i=0}^{\infty} a_{k,i}(z - z_0)^i$ e con le sue derivate formali.
Tuttavia, osserviamo che se una delle $B_k(z)$, $k = 0, 1, 2$ non è olomorfa intorno a z_0 questo metodo non è più utilizzabile.
Cerchiamo, quindi, un metodo alternativo che sia utilizzabile anche in quest'ultimo caso e consideriamo per comodità il caso in cui $z_0 = 0$.

A tal proposito descriviamo il **metodo di Frobenius** che consiste in una espansione in serie della soluzione dell'equazione differenziale, e che si può sempre applicare a patto che l'espansione sia fatta attorno ad un punto singolare regolare.
Quindi consideriamo il caso in cui $z_0 = 0$ sia un punto singolare regolare; ovvero nel caso in cui il metodo sopra descritto non si può utilizzare.
Sia data un'equazione differenziale del secondo ordine della forma:

$$z^2 w'' + zP(z)w' + Q(z)w = 0 \tag{1.4}$$

Cerchiamo una soluzione della forma:

$$w(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^{i+\alpha} \quad \textit{con} \quad c_0 \neq 0 \tag{1.5}$$

Osserviamo che:

$$zP(z) = \sum_{r=0}^{\infty} p_r z^r \tag{1.6}$$

e

$$z^2 Q(z) = \sum_{r=0}^{\infty} q_r z^r \tag{1.7}$$

Infatti per quanto visto nella definizione (1.1) $zP(z)$ e $z^2Q(z)$ sono funzioni analitiche e pertanto possono essere espresse, grazie ad un importante teorema, in serie di potenze. Deriviamo ora la (1.5) e otteniamo:

$$w'(z) = \sum_{i=1}^{\infty}(\alpha+i)c_i z^{i+\alpha-1} \qquad w''(z) = \sum_{i=2}^{\infty}(\alpha+i)(\alpha+i-1)c_i z^{i+\alpha-2}$$

Così sostituendo le derivate trovate nella (1.2), moltiplicando per z^2 ed usando la definizione di serie prodotto otteniamo:

$$\sum_{i=0}^{\infty}[(\alpha+i)(\alpha+i-1)c_i + \sum_{s=0}^{i}(p_{i-s}(s+\alpha)+q_{i-s})]z^{i+\alpha} = 0$$

$$\Rightarrow (\alpha+i)(\alpha+i-1)c_i + \sum_{s=0}^{i}(p_{i-s}(s+\alpha)+q_{i-s})]z^{i+\alpha} = 0 \quad \forall i = 0,1,..$$

Abbiamo quindi trovato una relazione di ricorrenza per i c_i.
Consideriamo $i = 0$
$\Rightarrow \alpha(\alpha-1)c_0 + (p_0\alpha+q_0)c_0 = 0 \Rightarrow (\alpha(\alpha-1)+(p_0\alpha+q_0))c_0 = 0$
Definiamo $F(\alpha) = (\alpha(\alpha-1)+(p_0\alpha+q_0)) \Rightarrow F(\alpha)c_0 = 0$
Ma per ipotesi $c_0 \neq 0$ (altimenti per la relazione di ricorrenza tutti i termini si annullerebbero)

$$\Rightarrow F(\alpha) = 0 \tag{1.8}$$

La (1.8) è detta **equazione indiciale**.
Supponendo, quindi, $c_0 = 1$ gli altri coefficienti si possono trovare sfruttando la relazione trovata in precedenza,ovvero:

$$((\alpha+i)(\alpha+i-1)+p_0(\alpha+i)+q_0)c_i = -\sum_{s=0}^{i-1}(p_{i-s}(s+\alpha)+q_{i-s})c_s \quad \forall i = 1,2..$$

Distinguiamo, ora, a seconda di come sono fatte le due radici α_1,α_2 dell'equazione indiciale tre casi:

1. $\alpha_1 - \alpha_2 \notin \mathbb{Z}$;
2. $\alpha_1 = \alpha_2$;
3. $\alpha_1 - \alpha_2 \in \mathbb{Z}$.

In questo ambito ci soffermeremo solo sull caso in cui $\alpha_1 - \alpha_2 \notin \mathbb{Z}$ e per cui vale il seguente teorema.

Teorema 1.1.1. *Se le radici* α_1 *e* α_2 *dell'equazione indiciale sono tali che* $\alpha_1 - \alpha_2 \notin \mathbb{Z}$, *allora l'equazione* (1.4) *ha* 2 *soluzioni linearmente indipendenti* $w_k(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{k,i} z^{i+\alpha_k}$ *con* $k = 1, 2$,*olomorfe in ogni intorno di* $z = 0$ *in cui siano olomorfe le serie* (1.6) *e* (1.7).

Dimostrazione. Per una dimostrazione dettagliata consultare *l'Appendice B* del testo [1].

In realtà è possibile trovare con il metodo di Frobenius soluzioni che siano linearmente indipendenti anche negli altri due casi. Tuttavia in questa trattazione ci soffermeremo sul caso enunciato nel teorema.
Vedremo ora alcune applicazioni del *metodo di Frobenius*; utilizzeremo questo metodo per trovare soluzioni di eqauzioni defferenziali sceglieremo α come radice dell'equazione indiciale con la parte reale più grande, e troveremo altre soluzioni linearmente indipendenti sfruttando la particolare struttura dell'equazione considerata.

Studieremo i punti singolari delle equazioni prese in esame e studieremo anche il punto singolare $z = \infty$, facendo prima un cambiamento di variabile che a z associa $\frac{1}{z}$ e poi studiando l'equazione ottenuta nel punto $z = 0$

1.2 Equazione ipergeometrica

L'equazione ipergeometrica è un'equazione differenziale del secondo ordine omogenea della forma:

$$z(1-z)w'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)z]w' - \alpha\beta w = 0 \tag{1.9}$$

dove i tre parametri α,β e γ sono numeri complessi arbitrari.
Osserviamo subito che l'equazione ha tre punti singolari: 0,1 e ∞.

1.2.1 Equazione indiciale e soluzioni dell'equazione ipergeometrica

Vogliamo ora applicare il metodo di Frobenius; studiamo, quindi, caso per caso l'equazione indiciale relativa ad ogni punto singolare z_0.
Ricordiamo che l'equazione indiciale è della forma:

$$(s^2 + s(p_0 - 1) + q_0)) = 0$$

dove:

$$p_0 = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)P(z) \qquad \text{e} \qquad q_0 = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)^2 Q(z).$$

1. caso $z_0 = 0$
   $p_0 = \lim_{z\to 0} \dfrac{z[\gamma - (\alpha+\beta+1)z]}{z(z-1)} = \gamma \qquad q_0 = \lim_{z\to 0} \dfrac{z^2\alpha\beta}{z(1-z)} = 0$
   $$\Rightarrow (s^2 + s(\gamma - 1)) = 0$$
   $$\Rightarrow s_1 = 0 \text{ e } s_2 = \gamma$$

2. caso $z_0 = 1$
   $p_0 = \lim_{z\to 1} \dfrac{(z-1)[\gamma - (\alpha+\beta+1)z]}{z(z-1)} = \alpha+\beta-\gamma+1 \qquad q_0 = \lim_{z\to 1} \dfrac{(z-1)^2\alpha\beta}{z(1-z)} = 0$
   $$\Rightarrow (s^2 + s(\alpha+\beta-\gamma)) = 0$$
   $$\Rightarrow s_1 = 0 \text{ e } s_2 = \alpha+\beta-\gamma$$

3. caso $z_0 = \infty$
   In questo caso sostituiamo z con $\dfrac{1}{z}$ e studiamo il punto singolare $z_0 = 0$.
   $p_0 = \lim_{z\to 0} \dfrac{1}{z}[\dfrac{z^2\gamma - z(\alpha+\beta+1)}{(z-1)}] = \alpha+\beta+1 \qquad q_0 = \lim_{z\to 0} \dfrac{1}{z^2}\dfrac{-z^2\alpha\beta}{(1-z)} = \alpha\beta$
   $$\Rightarrow (s^2 + s(\alpha+\beta) + \alpha\beta) = 0$$

$$\Rightarrow s_1 = \alpha \text{ e } s_2 = \beta$$

Quindi esprimiamo la soluzione in termini del *simbolo P di Rieman* :

$$w = P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha & z \\ 1-\gamma & \alpha+\beta-\gamma & \beta & \end{Bmatrix}$$

dove nella prima riga compaiono i punti singolari, nella seconda e nella terza i rispettivi esponenti delle soluzioni (determinati dalle radici dell'equazione indiciale relativa) e nell'ultima colonna compare la variabile considerata indipendente.
Cerchiamo ora una soluzione dell'equazione (1.9) lasciando da parte in un primo momento i casi eccezionali, ossia:

- in $z_0 = 0$ se $\gamma \ \in \mathbb{Z}$;
- in $z_0 = 1$ se $\alpha + \beta - \gamma \ \in \mathbb{Z}$ e
- in $z_0 = \infty$ se $\alpha - \beta \ \in \mathbb{Z}$.

Consideriamo $z_0 = 0$ e $s = 0$. Assumiamo inoltre che γ sia diverso da zero e non sia un intero negativo, allora utilizziando il metodo di Frobenius cerchiamo una soluzione della forma:

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Deriviamo:

$$w'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

e

$$w''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2}$$

e sostituiamo il risultato ottenuto nella (1.9)

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} [n(n+1)a_{n+1} - n(n-1)a_{n+1} - (\alpha+\beta+1)na_n - \alpha\beta a_n] z^n = 0 \quad \forall z \text{ vicino a } 0$$

$$\Rightarrow a_{n+1}[n(n+1) + \gamma(n+1)] + a_n[-n(n-1) - (\alpha+\beta+1)n - \alpha\beta] = 0$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = \frac{[n(n-1) + (\alpha+\beta+1)n + \alpha\beta]}{n(n+1) + \gamma(n+1)} a_n$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = \frac{(n+\alpha)(n+\beta)}{(n+1)(n+\gamma)} a_n \quad \forall n \geq 0$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{(n+\alpha-1)(n+\beta-1)}{n(n+\gamma-1)} a_{n-1} \quad \forall n \geq 1$$

Introduciamo il simbolo di Pochammer: $(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1)$

$$\Rightarrow a_n = \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(1)_n(\gamma)_n} \quad \forall n \geq 1$$

Quindi scegliendo $a_0 = 1$ si trova la soluzione:

$$w(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(1)_n(\gamma)_n} z^n, \tag{1.10}$$

che è olomorfa in $z = 0$.
La (1.10) si conosce come serie ipergeometrica e si denota con $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$.
La serie ha raggio di convergenza $\rho = 1$ e converge $\forall \quad |z| < 1$; la soluzione tuttavia esiste anche al di fuori del disco unitario, come vedremo in seguito.
Osserviamo, inoltre, che per l'arbitrarietà dei valori di γ, il problema di trovare una soluzione per (1.9) che sia olomorfa in $z = 0$ e che qui assuma il valore 1, ha un'unica soluzione $w_{01}(z)$. Questa osservazione è meglio nota come *principio di Kummer.*
Quindi

$$w_{01}(z) = F(\alpha, \beta, \gamma, z)$$

è soluzione dell'equazione, ed è anche detta *funzione ipergeometrica*; in quanto essendo la serie convergente è possibile prolungarla analiticamente, come vedremo nei prossimi paragrafi.

1.2.2 Sistemi fondamentali di soluzioni intorno ai punti singolari

Cerchiamo ora un sistema fondamentale di soluzioni della nostra equazione,sfruttando la particolare struttura dell'equazione, intorno ai punti singolari considerati.
Per trovarli utilizzeremo delle trasformazioni della variabile dipendente che l'equazione ipergeometrica ammette e che la trasformano in un'equazione simile con nuovi parametri.
I casi eccezionali elencati in precedenza, in cui un cambiamento di variabile non basta per trovare un sistema fondamentale di soluzioni verranno trattati singolarmente più avanti.
Consideriamo la trasformazione: $w = z^{1-\gamma}u$.
L'equazione per u diventa:

$$z(1-z)u'' + [(2-\gamma) - (\alpha+\beta-2\gamma+3)z]u' - (\alpha-\gamma+1)(\beta-\gamma+1)u = 0 \tag{1.11}$$

Ponendo $a = \alpha-\gamma+1$ $b = \beta-\gamma+1$ e $c = 2-\gamma$, la (1.11) è un'equazione ipergeometrica di parametri a,b,c

$$\Rightarrow F(a, b, c; z) \text{ è soluzione di (1.11) intorno a } z = 0.$$
$$\Rightarrow w_{02}(z) = z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma; z)$$

è soluzione di (1.9) se γ non è un intero positivo.
Quindi:

- se $\gamma = 1 \Rightarrow w_{01}(z) = w_{02}(z)$;
- se $\gamma \notin \mathbb{Z} \Rightarrow w_{01}(z)$ e $w_{02}(z)$ sono due soluzioni linearmente indipendenti.

Abbiamo così trovato un *sistema fondamentale di soluzioni intorno a* $z = 0$.

Vogliamo ora trovare un sistema fondamentale di soluzioni intorno a $z = 1$.
Operiamo il cambiamento di variabile che a $z \to (1 - z)$ e otteniamo:

$$z(1 - z)w'' - [-\gamma + (\alpha + \beta + 1) - (\alpha + \beta + 1)z]w' - \alpha\beta w = 0$$

che è ancora un'equazione ipergeometrica di parametri: α,β,$\alpha + \beta + 1 - \gamma$.
Allora utilizzando lo stesso procedimento visto nel caso di $z = 0$ troviamo che:

$$w_{11}(z) = F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma; 1 - z)$$

soluzione dell'equazione (1.9).
Cambiando,poi, la variabile dipendente con la traformazione:

$$w = z^{\gamma - \alpha - \beta} u$$

otteniamo ancora un'ipergeometrica di parametri $\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma + 1 - \alpha - \beta$

$$\Rightarrow w_{12}(z) = z^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma + 1 - \alpha - \beta; 1 - z)$$

è ancora soluzione dell'equazione (1.9).
Quindi queste due soluzioni esistono per $|z - 1| < 1$ e quando $\alpha + \beta - \gamma \notin \mathbb{Z}$ w_{11} e w_{12} sono soluzioni linearmente indipendenti e costituiscono un *sistema fondamentale di soluzioni in* $z = 1$.

Per trovare un sistema fondamentale di soluzioni intorno al punto $z = \infty$ combiniamo una trasformazione della variabile indipendente con un cambiamento della variabile dipendente della forma:

$$w = z^{\delta}(1 - z)^{\epsilon} u.$$

Grazie a questa combinazione sarà possibile trovare non solo un sistema di soluzioni intorno a $z = \infty$, ma anche altre soluzioni intorno agli altri punti singolari. È possibile,infatti, scegliere δ ed ϵ in modo tale che per u si ottenga ancora un'equazione

ipergeometrica.
A seconda della trasformazione e del cambiamento di variabile considerati otterremo soluzioni con domini di convergenza diversi.
Consideriamo tre casi:

- $z \to \frac{1}{z}$, $\delta = -\alpha$ e $\varepsilon = 0$
  $\Rightarrow$otteniamo un'equazione ipergeometrica di parametri$\alpha, \alpha - \gamma + 1$ e $\alpha - \beta + 1$.
  Perciò: $w_{\infty 1}(z) = z^{-\alpha} F(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1; \frac{1}{z})$ è una soluzione dell'equazione ipergeometrica, che converge per $|z| > 1$.
  Osserviamo che l'equazione non si modifica se scambiamo α e β
  $\Rightarrow w_{\infty 2}(z) = z^{-\beta} F(\beta, \beta - \gamma + 1, \beta - \alpha + 1; \frac{1}{z})$ è ancora una soluzione.
  Quindi queste due soluzioni esistono a meno che $\alpha - \beta \notin \mathbb{Z}$ e formano un sistema fondamentale di soluzioni intorno al punto $z = \infty$.

- $z \to \frac{1}{1-z}$, $\delta = 0$ e $\varepsilon = -\alpha$
  $\Rightarrow$otteniamo un'equazione ipergeometrica di parametri $\alpha, \gamma - \beta, \alpha - \beta + 1$.
  Perciò: $w_{\infty 3}(z) = (z-1)^{-\alpha} F(\alpha, \gamma - \beta, \alpha - \beta + 1; \frac{1}{1-z})$ è una soluzione dell'equazione ipergeometrica, che converge per $|z - 1| > 1$.
  Anche in questo caso l'equazione non si modifica se scambiamo α e β
  $\Rightarrow w_{\infty 4}(z) = (z-1)^{-\beta} F(\beta, \gamma - \alpha, \beta - \alpha + 1; \frac{1}{1-z})$ è una soluzione.
  Quindi $w_{\infty 3}(z)$ e $w_{\infty 4}(z)$ esistono a meno che $\alpha - \beta \notin \mathbb{Z}$ e formano un sistema fondamentale di soluzioni intorno al punto $z = \infty$.

  Consideriamo, ora, altri casi in altri diversi singolari, che ci permetteranno di trovare altri sistemi fondametali di soluzioni e in seguito chiariremo quali sono le connessioni tra questi.

- $z \to \frac{z}{1-z}$, $\delta = 0$ e $\varepsilon = -\alpha$
  $\Rightarrow$otteniamo un'equazione ipergeometrica di parametri $\alpha, \gamma - \beta, \gamma$.
  La soluzione corrispondente è:

  $$w_{03}(z) = (1-z)^{-\alpha} F(\alpha, \gamma - \beta, \gamma; \frac{z}{1-z}).$$

  Scambiando poi α e β otteniamo un'altra soluzione:

  $$w_{05}(z) = (1-z)^{-\beta} F(\beta, \gamma - \alpha, \gamma; \frac{z}{1-z}).$$

Per trovare ancora due soluzioni osserviamo che:

$$s(1-s)u'' + [c-(a+b+1)s]u' - abu = 0$$

è soddisfatta da:

$$s^{1-c}F(a-c+1, b-c+1, 2-c; s),$$

che non è altro che la seconda soluzione trovata attorno al punto $z = 0$.
Sostituendo a, b e c con $\alpha, \gamma-\beta, \gamma$ o $\beta, \gamma-\alpha, \gamma$ e
s con $\frac{z}{z-1}$ otteniamo altre due soluzioni, ossia:

$$w_{04}(z) = z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-1}F(\alpha-\gamma+1, 1-\beta, 2-\gamma; \frac{z}{1-z})$$

$$w_{06}(z) = z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma-\beta-1}F(\beta-\gamma+1, 1-\alpha, 2-\gamma; \frac{z}{1-z})$$

Così le quattro soluzioni trovate w_{0k} con $k = 3, 4, 5, 6$ esistono quando $\gamma \notin \mathbb{Z}$ e $\Re(z) < \frac{1}{2}$

- $z \to \frac{z-1}{z}$, $\delta = -\alpha$ e $\varepsilon = 0$
  $\Rightarrow$ otteniamo ancora una volta una ipergeomerica di parametri α, $\alpha-\gamma+1$ e $\alpha+\beta-\gamma+1$.
  E ancora una volta, come abbiamo fatto in precedenza, otteniamo quattro soluzioni:

$$w_{13}(z) = z^{-\alpha}F(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha+\beta-\gamma+1; \frac{z-1}{z})$$

$$w_{15}(z) = z^{-\beta}F(\beta, \beta-\gamma+1, \alpha+\beta-\gamma+1; \frac{z-1}{z})$$

e

$$w_{14}(z) = z^{\beta-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\beta, 1+\gamma-\alpha-\beta; \frac{z-1}{z})$$

$$w_{16}(z) = z^{\beta-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha, 1+\gamma-\alpha-\beta; \frac{z-1}{z})$$

che esistono quando $\Re(z) > \frac{1}{2}$

Con questo potente metodo delle trasformazioni abbiamo trovato sedici soluzioni ognuna delle quali ha un proprio dominio di convergenza.
Ma sappiamo che ogni tre soluzioni di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine sono linearmente indipendenti, allora ognuna delle sedici soluzioni trovate potrà essere espressa in termini di un sistema fondamentale di soluzioni. Ricordiamo,ora, le soluzioni trovate date da serie infinite e i loro domini di convergenza:

w_{01} e w_{02} che convergono $\forall z$ t.c. $|z| < 1$

w_{11} e w_{12} che convergono $\forall z$ t.c. $|z-1| < 1$

$w_{\infty 1}$ e $w_{\infty 2}$ che convergono $\forall z$ t.c. $|z| > 1$

$w_{\infty 3}$ e $w_{\infty 4}$ che convergono $\forall z$ t.c. $|z-1| > 1$

w_{03},w_{04}, w_{05} e w_{06} che convergono $\forall z$ t.c. $\Re(z) < \frac{1}{2}$

w_{13},w_{14}, w_{15} e w_{16} che convergono $\forall z$ t.c. $\Re(z) > \frac{1}{2}$

Osserviamo, tuttavia, che valgono le seguenti identità :

$$\begin{array}{rl} w_{01} = w_{03} = w_{05} & \quad w_{02} = w_{04} = w_{06} \\ w_{11} = w_{13} = w_{15} & \quad w_{12} = w_{14} = w_{16} \\ w_{\infty 1} = w_{\infty 3} & \quad w_{\infty 2} = w_{\infty 4} \end{array}$$

Infatti:
La prima identità segue poiché $w_{01}(z)$,$w_{03}(z)$ e $w_{05}(z)$ sono funzioni olomorfe in un intorno dell'origine e tutte assumono qui il valore 1; ma avevamo osservato in precedenza che esiste una sola funzione con queste proprietà che è $w_{01}(z)$, dunque segue l'uguaglianza.
La seconda invece segue poiché le tre soluzioni sono tutte della forma $z^{1-\gamma}$ per una funzione che è olomorfa intorno all'origine e che in questo intorno assume il valore 1.
Allo stesso modo si ottengono le altre uguaglianze, considerando però un intorno di $z = 1$ e di $z = \infty$.

1.2.3 Soluzioni nei casi eccezionali

Studiamo ora singolarmente i casi eccezionali, che nei paragrafi precedenti avevamo elencato ma non approfondito
Lavoriamo in un intorno di $z = 0$ e consideriamo il caso in cui $\gamma = p$, con p intero. Si può subito vedere che con questa scelta di γ, $w_{01}(z)$ è ancora una soluzione, mentre $w_{02}(z)$ non lo è più.
Useremo quindi un argomento di continuità per cercare una seconda soluzione significativa.
Osserviamo inoltre che gli altri casi si potranno studiare in maniera del tutto analoga o si potranno riportare allo studio del caso $\gamma = p > 0$ con un cambiamento di variabile, perciò mostreremo come trovare una soluzione valida solo nel caso sopra citato.
Fissiamo il valore di z, α,β, e definiamo una funzione meromorfa di γ:

$$w_{02}(z) = z^{1-\gamma} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha-\gamma+1)_n(\beta-\gamma+1)_n}{(1)_n(2-\gamma)_n} z^{n-\gamma+1} \equiv G(\gamma)$$

che ha in $\gamma = p$ un polo semplice.
Con un calcolo diretto si può trovare il residuo di $G(\gamma)$ in $\gamma = p$, che è:

$$(-1)^{p-1}\frac{(\alpha-p+1)_{p-1}(\beta-p+1)_{p-1}}{(p-2)!(p-1)!}F(\alpha,\beta,p;z) \equiv f_{-1}(z)$$

Assumendo che $p > 1$ e che $\alpha, \beta \neq 1, 2, ..p-1$, si vede facilmente che $f_{-1}(z)$ è soluzione di (1.9) in $\gamma = p$.
Per $\alpha, \beta = 1, 2, ..p-1$, invece, $\gamma = p$ non è un polo di $G(\gamma)$ e

$$\lim_{\gamma \to p} G(\gamma)$$

esiste finito ed è la seconda soluzione cercata.
Continuiamo la ricerca della seconda soluzione nel caso in cui $\alpha, \beta \neq 1, 2, ..p-1$ e poniamo :

$$C_p(\alpha,\beta) = (-1)^{p-1}\frac{(\alpha-p+1)_{p-1}(\beta-p+1)_{p-1}}{(p-2)!(p-1)!}$$

e osserviamo che

$$\Delta \equiv G(\gamma) - C_p(\alpha,\beta)\frac{1}{\gamma-p}F(\alpha,\beta,\gamma;z) \tag{1.12}$$

è una soluzione per $0 < |\gamma - p| < 1$ di (1.9).
Quindi se esistesse il limite per $\gamma \to p$ di (1.12), avremmo trovato una soluzione di (1.9) in $\gamma = p$.
Ma sappiamo che $G(\gamma)$ possiamo espanderlo in serie nella forma:

$$G(\gamma) = \frac{1}{\gamma-p}f_{-1}(z) + f_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)(\gamma-p)^n$$

convergente per $0 < |\gamma - p| < 1$ e dove $f_0(z) = \frac{\partial}{\partial\gamma}[(\gamma-p)G(\gamma)]_{\gamma=p}$.
Allora segue che:

$$\Delta = -C_p(\alpha,\beta)\frac{1}{\gamma-p}[F(\alpha,\beta,\gamma;z) - F(\alpha,\beta,p;z)] + f_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)(\gamma-p)^n$$

e il limite per $\gamma \to p$ è

$$-C_p(\alpha,\beta)\frac{\partial}{\partial\gamma}F(\alpha,\beta,p;z) + f_0(z)$$

ovvero:

$$-C_p(\alpha,\beta)\frac{\partial}{\partial\gamma}F(\alpha,\beta,p;z) + \frac{\partial}{\partial\gamma}[(\gamma-p)G(\gamma)]_{\gamma=p}$$

Quindi il imite esiste e per trovare la soluzione basterà svolgere i calcoli.
Avremo quindi un'espressione della forma:

$$-C_pF(\alpha,\beta,p;z)\log z+F_1(\alpha,\beta,p;z), \tag{1.13}$$

dove

$$F_1(\alpha,\beta,p;z)=kF(\alpha,\beta,p;z)+z^{1-p}+\sum_{n=1}^{p-1}\frac{(\alpha-p+1)_n(\beta-p+1)_n}{(1)_n(2-\gamma)_n}z^{n-p+1}$$
$$-C_p(\alpha,\beta)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_m(\beta)_m}{(1)_m(p)_m}\sum_{j=0}^{m-1}\left(\frac{1}{\alpha+j}+\frac{1}{\beta+j}-\frac{1}{1+j}-\frac{1}{p+j}\right)z^m,$$

dove k è una costante.
Così (1.13) è un soluzione di (1.9) per $\gamma=p$, linearmente indipendente da $w_{01}(z)$.
Studiamo ora singolarmente il caso in cui $\gamma=p=1$, ovvero il caso in cui $w_{01}(z)$ e $w_{02}(z)$ coincidono. In questo caso vale:

$$\lim_{\gamma\to1}\frac{1}{\gamma-1}[F(\alpha,\beta,\gamma;z)-z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma;z)]=$$

$$-F(\alpha,\beta,1;z)\log z+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_m(\beta)_m}{(1)_m(p)_m}\sum_{j=0}^{m-1}\left(\frac{1}{\alpha+j}+\frac{1}{\beta+j}-\frac{1}{1+j}\right)z^m. \tag{1.14}$$

La (1.14) è quindi una soluzione di (1.9). Chiaramente non essendo una costante moltiplicata per $F(\alpha,\beta,1;z)$ è linearmente indipendente dalla prima soluzione trovata.
Il caso in cui γ sia un intero negativo si può studiare nello stesso modo, osservando che in questo caso $w_{02}(z)$ rimane una soluzione valida, mentre $w_{01}(z)$ diventa infinita e non può più essere usata come seconda soluzione.
Tuttavia questo caso si può ricondurre con un cabiamento di variabile al caso in cui γ è un intero positivo.

1.2.4 Passagio tra sistemi fondamentali di soluzioni

Affrontiamo ora il problema di determinare le giuste sostituzioni che ci permetteranno di esprimere un sistema fondamentale in termini di un altro.
Iniziamo a cercare una sostituzione che ci permetta di esprimere un sistema fondametale di soluzioni intorno alpunto $z=0$ in temini di uno intorno al punto $z=1$; Cioè vogliamo determinare A,B,C e D t.c. :

$$w_{01}(z)=Aw_{11}(z)+Bw_{12}(z) \tag{1.15}$$

$$w_{02}(z)=Cw_{11}(z)+Dw_{12}(z) \tag{1.16}$$

Osserviamo che queste quattro soluzioni hanno un dominio comune di definizione e che l'intervallo $(0,1)$ appartiene a quest'ultimo.
La formula coinvolge le potenze di $z^{1-\gamma}$ e $z^{\gamma-\alpha-\beta}$; assumiamo che le loro determinazioni principali siamo in $(0,1)$ e che per un certo valore di z e per $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ le potenze di z sono numeri reali positivi. Assumiamo inoltre che α,β e γ non assumano i valori eccezionali in modo tale che le soluzioni possano essere espresse tutte in termini di serie ipergeometriche.
Differenziamo ora la (1.15) e la (1.16) rispetto a z e otteniamo così altre due equazioni lineari per A,B,C e D; da queste otteniamo:

$$A=\frac{w_{01}(z)w'_{12}(z)-w'_{01}(z)w_{12}(z)}{w_{11}(z)w'_{12}(z)-w'_{11}(z)w_{12}(z)}\qquad B=\frac{w'_{01}(z)w_{11}(z)-w'_{11}(z)w_{01}(z)}{w_{11}(z)w'_{12}(z)-w'_{11}(z)w_{12}(z)}$$

$$C=\frac{w_{12}(z)w'_{02}(z)-w'_{12}(z)w_{02}(z)}{w'_{11}(z)w_{12}(z)-w_{11}(z)w'_{12}(z)}\qquad D=\frac{w'_{02}(z)w_{11}(z)-w'_{11}(z)w_{02}(z)}{w_{11}(z)w'_{12}(z)-w'_{11}(z)w_{12}(z)}$$

Osserviamo subito che A,B,C e D sono funzioni meromorfe di α,β e γ poiché quoziente di due funzioni meromorfe. Questo significa che se noi possiamo determinare A,B,C e D come funzioni di α,β e γ, facendo su queste ultime delle opportune restrizioni, poi l'espressione che otteremo sarà valida per tutti i punti in cui queste definiscono funzioni olomorfe di α,β e γ senza tener conto delle restizioni iniziali.
Esprimeremo ora le quantità A,B,C e D in termini della funzione gamma di Eulero e della serie ipergeometrica. Ricordiamo allora alcune proprietà della funzione gamma:

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$$

$$\frac{x^a\Gamma(x)}{\Gamma(x+a)}=1+O\left(\frac{1}{x}\right),$$

dove a è fissato, e x è t.c. $|x|\to\infty$ e $|\arg x|<\pi-\varepsilon$.
Da queste otteniamo che:

$$(-1)^n\binom{a}{n}=\frac{1}{\Gamma(-a)}n^{-1-a}+O[n^{-2-\Re(a)}]$$

$$(-1)^n\binom{a}{n}=\frac{\Gamma(n-a)}{\Gamma(-a)\Gamma(n+1)}$$

Ma sappiamo che:

$$\frac{(a)_n(b)_n}{(1)_n(c)_n}=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+c)}$$

$$\Rightarrow \frac{(a)_n(b)_n}{(1)_n(c)_n} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} n^{a+b-c-1} + O(n^{-\delta-2}),$$

dove $\delta = \Re(c-a-b)$ e a, b e c sono assunti diversi da zero e interi negativi. Enunciamo ora un *Teorema* fondamentale ai fini dello studio di queste equazioni:

Teorema 1.2.1. *La serie ipergeometrica è :*

- *assolutamente convergente in* $|z| = 1$ *se* $\delta > 0$*;*
- *convergente per* $|z| = 1, z \neq 1$ *se* $-1 < \delta \leq 0$*;*
- *divergente in* $|z| = 1$ *se* $\delta \leq -1$

Dimostrazione. Consultare il *Capitolo* 7 del testo [1].

Utilizzando il teorema (1.2.1) e restingendoci al caso in cui $-1 < \delta < 0$,si riescono a scrivere A, B, C e D in termini della funzione gamma di Eulero,ovvero:

$$A = \frac{\Gamma(c-a-b)\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \qquad B = \frac{\Gamma(a+b-c)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$$

$$C = \frac{\Gamma(c-a-b)\Gamma(2-c)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)} \qquad D = \frac{\Gamma(a+b-c)\Gamma(2-c)}{\Gamma(a-c+1)\Gamma(c-b)}$$

e si prova così la (1.15) e la (1.16).
Cercarchiamo, ora, una sostituzione che ci permetta di esprimere un sistema fondametale di soluzioni intorno al punto $z = 0$ in termini di uno intorno al punto $z = \infty$;
In questo caso siamo ostacolati dal fatto che i domini di convergenza delle soluzioni non hanno un'intersezione comune; tuttavia nella precedente sezione avevamo visto che valevano le seguenti uguaglianze:

$$w_{01} = w_{03} = w_{05} \qquad w_{02} = w_{04} = w_{06}$$

grazie a queste possiamo oltrepassare il problema; infatti le soluzioni hanno un dominio comune, ossia ogni z t.c. $\Re(z) < \frac{1}{2}$ e $|z| < 1$. Dopo aver osservato ciò si possono trovare A, B, C e D come abbiamo visto in precedenza.

1.2.5 Rappresentazione integrale della funzione ipergeometrica

Approfondiamo ora il problema della rappresentazione integrale della funzione ipergeometrica; tale rappresentazione ha una notevole importanza, infatti mediante questa è possibile prolungare analiticamente la funzione ipergeometrica, e quindi la soluzione

della nostra equazione differenziale dal dominio di definizione all'intero piano privato della semiretta $[1, \infty)$.
Il punto di partenza è :

la funzione *beta* di Eulero, $$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt,$$

valida per $\Re(x) > 0$ e $\Re(y) > 0$, e

la *serie binomiale*, $$(1-zt)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(1)_n}(zt)^n, \text{ con } |zt| < 1.$$

Combiniamo queste due formule:

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(1-zt)^{-a}dt = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(1)_n}(zt)^n dt$$

Osserviamo che per un valore fissato di z t.c. $|z| < 1$, la serie converge uniformemente in t nell'intervallo $[0, 1]$; allora integrando la serie termine a termine otteniamo:

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(1-zt)^{-a}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n \Gamma(x+n)\Gamma(y)}{(1)_n \Gamma(x+y+n)} z^n.$$

Ora scegliendo $x = b, y = c - b$, troviamo:

$$F(a,b,c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(1-zt)^{-a}dt, \tag{1.17}$$

che è valida per $\Re(b) > 0$ e $\Re(c-b) > 0$.
Data questa rappresentazione della nostra funzione ipergeometrica, vediamo che tagliando il piano delle z lungo l'asse reale positivo da $z = 1$ a $z = \infty$, l'integrale converge ancora e quindi rappresenta la soluzione $w_{01}(z)$ nell'intero piano privato di quella semiretta; abbiamo così esteso il dominio di definizione della nostra soluzione.
Vediamo quali altri risultati possiamo ottenere dalla rappresentazione integrale, poniamo $t = \frac{1}{s}$ e otteniamo un integrale della forma:

$$I(\xi, \eta) = \int_{\xi}^{\eta} s^{a-c}(s-1)^{c-b-1}(s-z)^{-a}ds$$

I valori che ξ e η possono assumere, ovvero gli estremi di integrazione, sono quattro:$0, 1, z, \infty$.
Ci chiediamo se altre combinazioni di estremi danno ancora una soluzione dell'equazione ipergeometrica.

La risposta è sì, anzi tutte e sei le possibili combinazioni danno una soluzione dell'equazione.

Riportiamo i risultati, omettendo i passaggi, che si ottengono cambiando estremi di integrazione:

$$I(1,\infty) = \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)} w_{01}(z) \qquad \text{con } \Re(c-b) > 0, \Re(b) > 0$$

$$I(0,z) = e^{-\pi(c-b+1)} \frac{\Gamma(a-c+1)\Gamma(1-a)}{\Gamma(2-c)} w_{02}(z) \qquad \text{con } \Re(a-c) > -1, \Re(a) < 1$$

$$I(-\infty,0) = e^{-\pi i(a-b+1)} \frac{\Gamma(a-c+1)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b-c+1)} w_{11}(z) \qquad \text{con } \Re(a-c) > -1, \Re(b) < 0$$

$$I(z,1) = e^{-\pi i(c-a-b)} \frac{\Gamma(1-a)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c-a-b+1)} w_{12}(z) \qquad \text{con } \Re(c-b) > 0, \Re(a) < 1$$

$$I(0,1) = e^{-\pi i(c-b+1)} \frac{\Gamma(a-c+1)\Gamma(1-b)}{\Gamma(a-b+1)} w_{\infty 1}(z) \qquad \text{con } \Re(a-c) > -1, \Re(c-b) > 0$$

$$I(z,\infty) = e^{-\pi i a} \frac{\Gamma(1-a)\Gamma(b)}{\Gamma(b-a+1)} w_{\infty 2}(z) \qquad \text{con } \Re(a) < 1, \Re(b) > 0$$

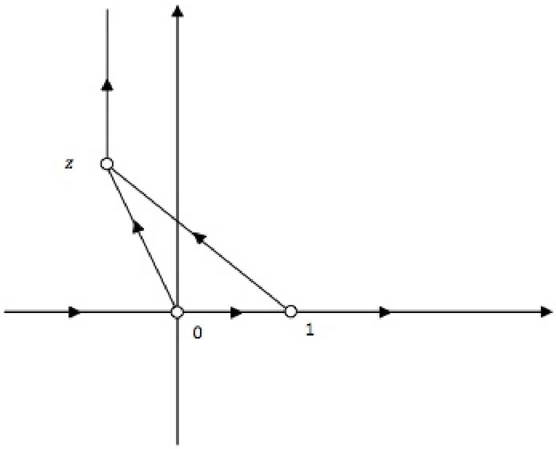

Figura 1.1: linee di integrazione

Osserviamo inoltre che integrare nel piano complesso lungo curve chiuse dà la seguente relazione:

$$I(0,1) + I(1,z) + I(z,0) = 0,$$

che è una relazione lineare tra le tre soluzioni $w_{02}(z), w_{12}(z)$ e $w_{\infty 1}(z)$. In realtà le relazioni sono quattro, tante quante sono i triangoli che si formano congiungendo i sei cammini di integrazione,come si può vedere nella figura(1.1).

Capitolo 2

Equazione di Legendre

L'equazione di Legendre è un'equazione differenziale del secondo ordine omogenea della forma:

$$\frac{d}{dz}\left[(1-z^2)\frac{dw}{dz}\right] + a(a+1)w = 0 \tag{2.1}$$

ossia:

$$(1-z^2)w'' - 2zw' + a(a+1)w = 0 \tag{2.2}$$

Analizzeremo in questo capitolo il caso in cui $a = n \in \mathbb{Z}$, che vedremo essere un caso particolare di equazione ipergeometrica; infatti consideriamo la sostituzione:

$$u = \frac{1}{2}(1-z)$$

otteniamo

$$u(1-u)w'' + (1-2u)w' + a(a+1)w = 0,$$

che è un'equazione iperegometrica di parametri $-a, a+1$ e 1 e che ha tre punti singolari in $z_0 = \pm 1$ e in $z_0 = \infty$.

2.1 Equazione indiciale e sistema fondamentale di soluzioni

Calcoliamo, ora, per ciascun punto singolare regolare le radici dell'equazione indiciale.

1. caso $z_0 = 1$

   $p_0 = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{-2z}{(1-z^2)} = 1 \qquad q_0 = \lim_{z\to 1}(z-1)^2\frac{a(a+1)}{(1-z^2)} = 0$

$$\Rightarrow (s^2 + s - s) = 0$$

$$\Rightarrow s_1 = 0 \text{ e } s_2 = 0$$

2. caso $z_0 = -1$
   $p_0 = \lim_{z\to -1}(z+1)\dfrac{-2z}{(1-z^2)} = 1 \qquad q_0 = \lim_{z\to -1}(z+1)^2\dfrac{a(a+1)}{(1-z^2)} = 0$

$$\Rightarrow (s^2 + s - s) = 0$$

$$\Rightarrow s_1 = 0 \text{ e } s_2 = 0$$

3. caso $z_0 = \infty$
   In questo caso sostituiamo z con $\dfrac{1}{z}$ e studiamo il punto $z_0 = 0$.
   $p_0 = \lim_{z\to 0}\dfrac{1}{z}[\dfrac{-2}{z}\dfrac{z^2}{(z^2-1)}] = 2 \qquad q_0 = \lim_{z\to 0}\dfrac{1}{z^2}[a(a+1)\dfrac{z^2}{(z^{2-1})}] = -a(a+1)$

$$\Rightarrow (s^2 + s - a(a+1)) = 0$$

$$\Rightarrow s_1 = a \text{ e } s_2 = -(a+1)$$

Quindi :

$$w = P\begin{Bmatrix} 1 & -1 & \infty & \\ 0 & 0 & a & z \\ 0 & 0 & -a(a+1) & \end{Bmatrix}$$

Utilizzando anche in questo caso il metodo di Frobenius, troviamo che in $z = 1$, la soluzione olomorfa è:

$$P_a(z) = F(a+1, -a, 1; \tfrac{1}{2}(1-z))$$

e utilizzando lo stesso medoto che ci ha portato a trovare la formula (1.14) troviamo una seconda soluzione linearmente indipendente dalla prima

$$P_{a1}(z) = P_a(z)\log\frac{1}{2}(1-z) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a+1)_n(-a)_n}{(1)_n(1)_n}\sum_{j=0}^{n-1}\left[\frac{1}{a+j+1} + \frac{1}{j-a} - \frac{2}{j+1}\right][\frac{1}{2}(1-z)]^n.$$

Ora osserviamo che se sostituiamo z con $-s$ in (2.2) l'equazione rimene invariata, allora possiamo asserire che:

$$P_a(-z) \qquad \text{e} \qquad P_{a1}(-z)$$

formano un sistema fondamentale di soluzioni intorno al punto $z = -1$.
Invece, intorno al punto $z = \infty$ un sistema fondamentale di soluzioni è dato da:

$$Q_a(-z) \qquad \text{e} \qquad Q_{-a-1}(z),$$

dove

$$Q_\alpha(z) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}\Gamma(\alpha+1))}{\Gamma(\alpha+\frac{3}{2})}(2z)^{-\alpha-1}F(\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\alpha+1,\alpha+\tfrac{3}{2};z^{-2})$$

Osserviamo che sarà sufficiente verificare che $Q_a(-z)$ sia una soluzione, dal momento che l'equazione (2.2) non cambia se cambiamo a con $-(a+1)$.

2.1.1 Polinomi di Legendre

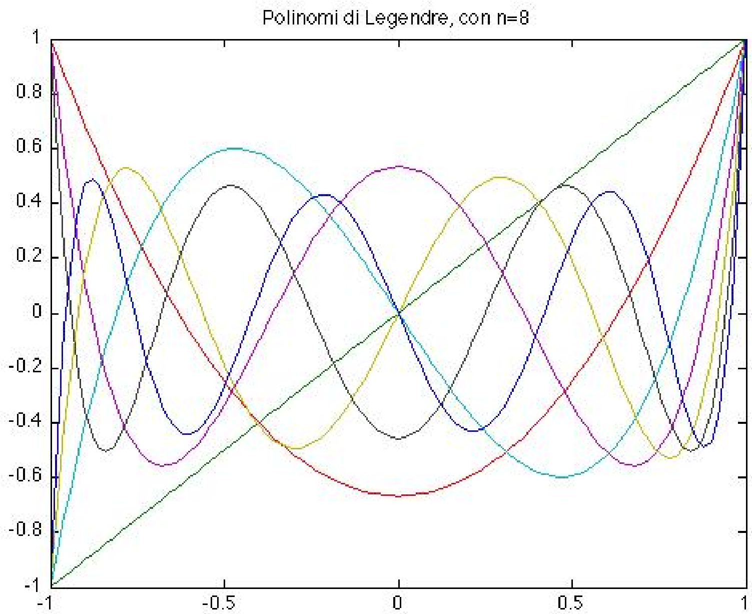

Figura 2.1: Polinomi di Legendre

Andiamo, ora, ad esaminare il caso più importante per le applicazioni di questa equazione, ossia il caso in cui $a = n \in \mathbb{Z}_+$.
In questo caso

$$P_n(z) = F(n+1,-n,1;\frac{1}{2}(1-z))$$

è charamente un polinomio nelle z di grado n; questi sono chiamati *Polinomi di Legendre* e possiamo osservarli fino al grado otto nella figura (2.1).
Questi, al contario delle altre soluzioni, sono serie finite anche nei punti singolari e hanno un vasto numero di proprietà, alcune delle quali le andremo ad esaminare nel

seguito.
Iniziamo esprimendo i polinomi di Legendre mediante la **formula di Rodriguez**:

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n}(z^2 - 1)^n, \tag{2.3}$$

esprimere questi polinomi come la derivata n-esima di un polinomio molto semplice risulterà molto coveniente, ad esempio è molto utile nei problemi di valori al bordo. Utilizzeremo inoltre la (2.3) per mostrare una delle proprietà fondamentali dei polinomi di Legendre, ossia l'ortogonalità. La formula si può facilmente verificare scrivendo

$$(z^2 - 1)^n = (z - 1)^n[(z - 1) + 2]^n,$$

espandendola nelle potenze di $(z - 1)$ e differenziandola n volte rispetto a z.
Osserviamo inoltre che $(z^2-1)^n$ ha uno zero di molteplicità n in $z = 1$ e uno in $z = -1$, quindi dal *teorema di Rolle* sappiamo che $P_n(z)$ ha n zeri nell'intervallo $(-1, 1)$, ovvero tutti i suoi zeri sono reali e stanno in quell'intervallo.

Una delle più importanti proprietà che andremo ad analizzare è che i polinomi $\{P_n(t)\}$ formano un *sistema ortogonale* nell'intervallo $(-1, 1)$, infatti vale :

$$\int_{-1}^{1} P_m(t)P_n(t)dt = \delta_{mn}\frac{2}{2m + 1} \tag{2.4}$$

Proviamo la (2.4) usando la formula di Rodriguez. Supponiamo $m < n$, allora :

$$\int_{-1}^{1} P_m(t)P_n(t)dt = \frac{1}{2^{m+n}m!n!}\int_{-1}^{1} \frac{d^m}{dt^m}(t^2 - 1)^m \frac{d^n}{dt^n}(t^2 - 1)^n dt.$$

Ora integrando m volte per parti , integrando il secondo fattore e derivando il primo, otteniamo:

$$(-1)^m \frac{1}{2^{m+n}m!n!}\int_{-1}^{1} \frac{d^{2m}}{dt^{2m}}(t^2 - 1)^m \frac{d^{n-m}}{dt^{n-m}}(t^2 - 1)^n dt =$$

$$= (-1)^m \frac{1}{2^{m+n}m!n!}\int_{-1}^{1} \frac{d^{n-m}}{dt^{n-m}}(t^2-1)^n dt = \begin{cases} 0, & \text{se } m < n \\ \frac{(2m)!}{(m!)^2}2^{-2m}\int_{-1}^{1}(1 - t^2)^m dt = \frac{2}{2m + 1}, & \text{se } m = n \end{cases}$$

come volevamo dimostrare.
Inoltre sappiamo che:

$$P_n(t) = \sum_{2j\le n} p_{n,j}t^{n-2j} \tag{2.5}$$

e al contario abbiamo :

$$t^n = \sum_{2j\le n} q_{n,j}P_{n-2}(t), \tag{2.6}$$

dove i coefficienti $q_{n,j}$ possono essere trovati utilizzando la (2.3).
Vogliamo ora arrivare ad enunciare alcuni importanti teoremi sui sistemi ortogonali, quindi riportiamo a tal proposito la seguente disuguaglianza senza verificarla:

$$|P_n(t)| < 1 \qquad \forall t \in (-1, 1).$$

Un sistema ortogonale dà luogo a sviluppi in serie di Fourier, infatti se $f(t) \in L_1(-1, 1)$ scriviamo

$$f_n = (n + \frac{1}{2}) \int_{-1}^{1} f(t)P_n(t)$$

gli integrali esistono dato che $P_n(t)$ è continuo e uniformemente limitato. I $P_n(t)$ sono meglio noti come i *coefficienti di Fourier-Legendre* di $f(t)$ e la serie formale

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n(t)$$

è nota come la *serie di Fourier-Legendre* di $f(t)$.

Vogliamo ora arrivare a dimostrare che $\{P_n(t)\}$ è un *sistema ortogonale completo* di $L_2(-1, 1)$,iniziamo dimostrando il seguente teorema.

Teorema 2.1.1. *Sia dato un sistema ortonormale* $\{\omega_n(t)\}$ *nell'intervallo* (a, b)*, allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

i) Se $f_n = \int_a^b f(s)\overline{\omega_n(s)}ds = 0 \qquad \forall n \qquad e \qquad se\ f \in L_2(a, b)$

$$\Rightarrow f(t) = 0 \text{ per quasi ogni } t.$$

ii) Ogni $f \in L_2(-1, 1)$ *può essere approssimata nel senso della norma* L_2 *da un numero finito di combinazioni lineari di* ω_k*.*

iii) $\int_a^b |f(t)|^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty} |f_n|^2 \quad e \quad f_n = \int_a^b f(s)\overline{\omega_n(s)}ds \quad \forall f \in L_2(-1, 1).$

Dimostrazione. Iniziamo ricordando che su $L_2(a, b)$ il prodotto scalare è definito nel modo seguente:

$$< f, g >:= \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt.$$

(iii) $\Rightarrow$ *(ii)*

Sappiamo che $f_k = \int_a^b f(s)\overline{\omega_k(s)}ds =< f, \omega_k >$.

Chiamiamo $S_n := \sum_{k=0}^{n} f_k \omega_k(t)$.

Vale:

$$\int_a^b |f - S_n|^2 dt =< f - S_n, f - S_n >=< f, f > - < f, S_n > - < S_n, f > + < S_n, S_n > .$$

Ora, usando l'ipotesi che gli $\{\omega_n(t)\}$ sono un sistema ortogonale, osserviamo che:

$$< f, S_n >=< f, \sum_{k=0}^{n} f_k \omega_k(t) >= \sum_{k=0}^{n} < f, f_k \omega_k(t) >= \sum_{k=0}^{n} \overline{f_k} < f, \omega_k(t) >= \sum_{k=0}^{n} |f_k|^2$$

e allo stesso modo si può vedere che $< S_n, f >= \sum_{k=0}^{n} |f_k|^2$.

Invece:

$$< S_n, S_n >=< \sum_{k=0}^{n} f_k \omega_k, \sum_{h=0}^{n} f_h \omega_h >= \sum_{k,h=0}^{n} f_k \overline{f_h} < \omega_k, \omega_h >= \sum_{k=0}^{n} |f_k|^2$$

Quindi:

$$\int_a^b |f - S_n|^2 dt =< f, f > - \sum_{k=0}^{n} |f_k|^2 = \int_a^b |f|^2 dt - \sum_{k=0}^{n} |f_k|^2.$$

Allora poiché stiamo supponendo che valga (iii):

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b |f|^2 dt - \sum_{k=0}^{n} |f_k|^2 \right) = \lim_{n\to\infty} ||f - S_n||^2 = 0$$

abbiamo così provato non solo che vale la (ii), ma abbiamo fatto vedere anche quali sono i coefficienti della combinazione lineare.

$(ii) \Rightarrow (i)$

Sia $f \in L_2(a, b)$ t.c. $< f, \omega_n >= 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e supponiamo che valga (ii), allora vale:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \quad t.c. \quad ||f - \sum_{k=0}^{n} a_k \omega_k|| < \epsilon \quad \forall n > n_\epsilon.$$

Chiamiamo $T_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \omega_k$ e consideriamo

$$||f - T_n||^2 =< f - T_n, f - T_n >=< f, f > - < f, T_n > - < T_n, f > + < T_n, T_n >=$$

$$||f||^2 - \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} < f, \omega_k > - \sum_{k=0}^{n} a_k < f, \omega_k > + \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 =$$

$$= ||f||^2 + \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 < \epsilon^2$$

$$\Rightarrow ||f||^2 < \epsilon^2.$$

Quindi per l'arbitrarietà di ϵ, avremo $||f|| = 0$ e quindi $f = 0$, ovvero vale la (i).

$(i) \Rightarrow (iii)$

Sia $f \in L_2(a,b)$ e consideriamo $S_n = \left(\sum_{k=0}^{n} f_k \omega_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_k =< f, \omega_k >$.

Supponiamo che S_n converga $\Rightarrow \quad \exists g \quad \in L_2(a,b)$ t.c. $g = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \omega_k$.

Osserviamo che f e g hanno gli stessi coefficienti di Fourier, infatti:

$$< g, \omega_n >=< \sum_{k=0}^{\infty} f_k \omega_k, \omega_n >= \sum_{k=0}^{\infty} f_k < \omega_k, \omega_n >= f_n =< f, \omega_n > \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Quindi posto $h = g - f$, si ha:

$$< h, \omega_n >= 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ma noi stiamo supponendo valga $(i) \Rightarrow \quad h = 0 \quad f = g$, cioè:

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \omega_k.$$

Allora, usando gli stessi passaggi visti in precedenza:

$$||f - S_n||^2 = ||f||^2 - \sum_{k=0}^{n} |f_k|^2,$$

ma poiché $||f - S_n|| \rightarrow_{n \to \infty} 0$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} |f_k|^2 \rightarrow_{n \to \infty} ||f||^2$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |f_k|^2 = ||f||^2,$$

cioè vale la (iii).
Rimane quindi da dimostrare che S_n converge in norma L_2. Mostriamo quindi che S_n è di Cauchy in L_2.
Supponiamo $n > m$ e abbiamo:

$$||S_n - S_m||^2 = ||\sum_{k=0}^{n} f_k\omega_k - \sum_{k=0}^{m} f_k\omega_k||^2 =$$

$$= ||\sum_{k=m+1}^{n} f_k\omega_k||^2 =< \sum_{k=m+1}^{n} f_k\omega_k, \sum_{h=m+1}^{n} f_h\omega_h >=$$

$$= \sum_{k,h=m+1}^{n} f_k\overline{f_h} < \omega_k, \omega_h >= \sum_{k=m+1}^{n} |f_k|^2.$$

Ma la serie $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k|^2$ è conevregente.Infatti, essendo una serie a termini non negativi, o è convegente o divergente a $+\infty$; allora per dimostare la convergenza è sufficiente provare che è limitata. Riprendiamo i passaggi visti prima:

$$||f - S_n||^2 = ||f||^2 - \sum_{k=0}^{n} |f_k|^2,$$

ma essendo $||f - S_n||^2 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, ottenaimo

$$\sum_{k=0}^{n} |f_k|^2 \leq ||f||^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ciò prova che la successione $\left(\sum_{k=0}^{n} |f_k|^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata e dunque la serie $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k|^2$ convergente.
Allora:

$$\sum_{k=m+1}^{n} |f_k|^2 \to 0 \quad n, m \to +\infty$$

$$\Rightarrow ||S_n - S_m|| \to 0, m, n \to +\infty$$

$$\Rightarrow (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ è di Cauchy.}$$

□

Teorema 2.1.2. *Il sistema* $\{P_n(t)\}$ *è completo in* $L_2(a, b)$.

Dimostrazione. Prima di dimostrare questo teorema, osserviamo che:
le funzioni $\{P_{n(t)}\}$ formano un sistema ortogonale, ma non ortonormale.
Quindi per poter applicare il teorema appena dimostrato al nostro sistema di polinomi dobbiamo renderli un sistema ortonormale.
Allora poniamo: $\omega_n(t) = (n + \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} P_n(t)$, otteniamo così un sistema ortonormale che utilizzeremo in questa dimostrazione.
Per evitare fraintendimenti, denotiamo i coefficienti di Fourier di f rispetto al sistema $\{\omega_n(t)\}$ con f_n^* e osserviamo che per mostrare la completezza sarà sufficiente provare la (i) del teorema (2.1.1).
Supponiamo $f \in L_2(-1,1)$ t.c. $f_n^* =< f, \omega_n >= 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, allora:

$$0 =< f, \omega_n >=< f, (2n+1)^{\frac{1}{2}} P_n >= (2n+1)^{\frac{1}{2}} < f, P_n >$$

$$\Rightarrow < f, P_n >= \int_{-1}^{1} f(t) P_n(t) dt = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Inoltre la (2.6) implica

$$\int_{-1}^{1} f(t) t^k dt = 0 \quad \forall k$$

o, equivalentemente

$$\int_{-1}^{1} f(t)(t-1)^k dt = 0 \quad \forall k.$$

Sia, ora, $F(t) = \displaystyle\int_{-1}^{t} f(s) ds$, allora $\forall k$ si ha:

$$\int_{-1}^{1} f(t)(t-1)^k dt = [F(t)(t-1)^k]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} kF(t)(t-1)^{k-1} dt = -k \int_{-1}^{1} F(t)(t-1)^{k-1} dt = 0.$$

Ma $F(t) \in C[-1,1]$ e per il *teorema di approssimazione di Weierstrass* una funzione continua non può essere ortogonale a tutti i polinomi senza essere identicamente nulla.
Quindi:

$$F(t) \equiv 0 \Rightarrow F'(t) = f(t) = 0$$

e questo prova la (i).
Così il sistema $\{P_n(t)\}$ è completo in $L_2(-1,1)$ e vale:

$$\int_{-1}^{1} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty} |f_n^*|^2 = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|f_n|^2}{2n+1}.$$

□

Per delle dimostrazioni più dettagliate si rimanda al testo [3].

Appendice A

Applicazioni

Dopo aver illustrato l'apparato matematico presente dietro queste funzioni, denominate speciali, vogliamo mostrare quali sono le loro applicazioni.
I polinomi di Legendre grazie alla proprietà di ortogonalità e alla formula di Rodriguez, che permette di definirli in modo ricorsivo sono utilizzati nell'ambito dell'analisi numerica; tali polinomi, infatti, vengono adoperati nelle formule di quadratura (o di integrazione numerica), che sono algoritmi di approssimazione dell'integrale ottenuti con una approssimazione della funzione integranda.
Oltre che in analisi numerica, le equazioni e le relative soluzioni analizzate nei capitoli precedenti si incontrano molto spesso in fisica matematica, in modo particolare quando vengono usati sistemi di coordinate curvilinee ortogonali per risolvere problemi di valori al bordo della teoria del potenziale per tipi diversi di domini, come sfere, tori e sferoidi.
Scegliamo di analizzare in dettaglio un caso in polinomi di Legendre vengono utilizzati per problemi ai limiti per equazioni a derivate parziali nel più semplice dei domini elencati, ossia la sfera. Consideriamo, quindi il Problema di Dirichlet su una sfera.

A.1 Problema di Dirichlet su una sfera

Consideriamo il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace su una sfera tridimensionale, che indicheremo con S.
Sia data una funzione f t.c. $f \in C(\partial S)$, cerchiamo una funzione
$u : S \to \mathbb{R}$, $u \in C^2(S) \bigcap C(\overline{U})$ tale che soddisfi

$$\begin{cases} \Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 & \text{per } x^2 + y^2 + z^2 < r^2 \\ u(x,y,z) = f(x,y,z) & \text{per } x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \end{cases} \tag{A.1}$$

Se volessimo dare un significato fisico all'equazione: u può essere il potenziale (elettrostatico o gravitazionale) all'interno della sfera, fissato il suo valore sul bordo, in

una situazione stazionaria in cui all'interno della sfera non ci sono pozzi o sorgenti del campo (cioè cariche o masse); oppure u può essere la temperatura, in stato stazionario, all'interno della sfera, nota la temperatura al bordo, in assenza di sorgenti o pozzi di calore interni.
Data la geometria sferica, possiamo riscrivere l'operatore differenziale in coordinate sferiche $(\rho, \vartheta, \varphi)$; il laplaciano in coordinate sferiche assume la forma:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \dfrac{2}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho^2 sin\vartheta}\dfrac{\partial}{\partial \vartheta}\left(sin\vartheta \dfrac{\partial u}{\partial \vartheta}\right) + \dfrac{1}{\rho^2 sin^2\vartheta}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi} = 0 & \text{per } 0 < \rho < r \quad 0 < \vartheta < \pi \quad 0 < \varphi < 2\pi \\ u(\rho, \vartheta, \varphi) = f(\vartheta, \varphi) & \text{per } 0 < \vartheta < \pi \quad 0 < \varphi < 2\pi \end{cases} \tag{A.2}$$

Consideriamo ora il caso semplificato in cui il dato al bordo f non dipende dalla longitudine φ ma solo da ϑ; di conseguenza ci aspettiamo che la soluzione u sia dipendente solo da φ.
Allora il problema precedente si riscrive nella seguente forma semplificata

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \dfrac{2}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho^2 sin\vartheta}\dfrac{\partial}{\partial \vartheta}\left(sin\vartheta \dfrac{\partial u}{\partial \vartheta}\right) = 0 & \text{per } 0 < \rho < r \quad 0 < \vartheta < \pi \\ u(\rho, \vartheta) = f(\vartheta) & \text{per } 0 < \vartheta < \pi \end{cases} \tag{A.3}$$

Ci concentreremo per semplicità sulla risoluzione del problema (A.3); il caso generale, quello con dipendenza da φ si potrà trattare con tecniche simili ma più elaborate.
Cerchiamo quindi soluzioni a variabili separate

$$u(\rho, \vartheta) = R(\rho)T(\vartheta)$$

Sostituendo nell'equazione (A.3) si ha:

$$\rho^2 \frac{R''}{R} + 2\rho \frac{R'}{R} = -\frac{1}{T sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}(sin\vartheta T')$$

Ma essendo il primo membro funzione della sola ρ ed il secondo della sola ϑ, necessariamente varrà:

$$\rho^2 \frac{R''}{R} + 2\rho \frac{R'}{R} = \lambda$$

$$\frac{1}{T sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}(sin\vartheta T') = -\lambda$$

per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$ da determinarsi.
Riscrivendo le equazioni otteniamo:

$$\rho^2 R'(\rho)' + 2\rho R'(\rho) - \lambda R(\rho) = 0 \tag{A.4}$$

$$sin\vartheta T''(\vartheta) + cos\vartheta T'(\vartheta) = -\lambda sin\vartheta T(\vartheta), \quad per \quad \vartheta \in [0, \pi] \tag{A.5}$$

Ma la (A.5) si può riscrivere in una forma più familiare facendo il seguente cambio di variabili:

$$T(\vartheta) = P(t), \quad \text{con} \quad t = cos\vartheta$$

Derivando e sostituendo nella (A.5) otteniamo:

$$(1 - t^2)P''(t) - 2tP(t) + \lambda P(t) = 0$$

che altro non è che l'equazione di Legendre su [-1,1], infatti $cos\vartheta \in [-1, 1]$.
Ora osserviamo che $T(\vartheta)$ non deve soddisfare condizioni di periodicità, ma dev'essere regolare su tutto $[0, \pi]$, allora poichè vogliamo soluzioni che siano limitate su tutto $[-1, 1]$ è necessario che:

$$\lambda = n(n + 1), n = 0, 1, 2..$$

e che $P(t) = P_n(t)$, n-esimo polinomio di Legendre.

Quindi abbiamo determinato λ e le soluzioni della (A.5), che sono:

$$T_n(t) = P_n(cos\vartheta)$$

Ora, avendo determinato λ, possiamo risolvere la (A.4), imponendo $R(\rho) = \rho^\alpha$, con α da determinare; escludendo le soluzioni illimitate nell'origine si trova: $R(\rho) = \rho^n$.
Quindi le soluzioni regolari dell'equazione sono:

$$u_n(\rho, \vartheta) = c_n\rho^n P_n(cos\vartheta), \text{ per } n = 0, 1, 2..$$

Ora bisogna formare una soluzione data da una serie infinita di queste soluzioni e imporre il dato sul bordo scegliendo opportunamente i coefficienti; vediamo come:

$$u(\rho, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\rho^n P_n(cos\vartheta)$$

$$\Rightarrow u(r, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n P_n(cos\vartheta) = f(\vartheta), \quad per \quad \vartheta \in [0, \pi]$$

Vogliamo scrivere $f(\vartheta)$ in serie di Legendre, ossia

$$f(\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(cos\vartheta), \quad con \quad \vartheta \in [0, \pi]$$

Per quanto visto nel secondo capitolo sappiamo che il sistema $\{P_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è ortogonale completo in $L_2(-1,1)$; tuttavia osserviamo che, facendo il cambio di varibile $t = cos\vartheta$, vale:

$$\int_{-1}^{1} P_n(t)P_m(t) = \int_{0}^{\pi} P_n(cos\vartheta)P_m(cos\vartheta)sin\vartheta d\vartheta,$$

da cui leggiamo che il sistema $\{P_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è ortogonale completo in $L_2([0,\pi], sin\vartheta d\vartheta)$. Allora:

$$\int_{0}^{\pi} f(\vartheta)P_n(cos\vartheta)sin\vartheta d\vartheta = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \int_{0}^{\pi} P_n(cos\vartheta)P_m(cos\vartheta)sin\vartheta d\vartheta = \frac{2}{2n+1}C_n$$

$$\Rightarrow C_n = \frac{2n+1}{2}\int_{0}^{\pi} f(\vartheta)P_n(cos\vartheta)sin\vartheta d\vartheta$$

$$\Rightarrow f(\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(cos\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n P_n(cos\vartheta), \text{ con } c_n = \frac{C_n}{r^n}$$

Quindi in definitiva la soluzione del problema (A.3) è data da:

$$u(\rho,\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(\frac{\rho}{r}\right)^n P_n(cos\vartheta).$$

Bibliografia

[1] E. Hille, *Lectures on Ordinary Differential Equations*, Addison-Wesley Publishing Company , 1968

[2] N. N. Lebedev, *Special Functions and their applications*, Prentice-Hall, 1965

[3] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 1987

[4] E. Cattani, *Three Lectures on Hypergeometric Functions*,

http://www.math.umass.edu/cattani/hypergeom–lectures.pdf

[5] John Pearson,*Computation of Hypergeometric Functions*,

http://people.maths.ox.ac.uk/porterm/research/pearson–final.pdf