

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA  
SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

# LA STRUTTURA DELLA DOUBLE BUBBLE DI AREA MINIMA

Tesi di Laurea in Analisi Superiore

Relatore:  
Chiar.ma Prof.ssa  
Giovanna Citti

Presentata da:  
Elisa Raspanti

II Sessione  
Anno Accademico 2012/2013



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>iii</b>
<b>1 Correnti</b>	<b>1</b>
1.1 Nozioni introduttive . . . . .	1
1.2 Le correnti . . . . .	6
1.3 Alcuni risultati sulle correnti . . . . .	11
1.4 Sezioni di correnti . . . . .	14
<b>2 Compattezza</b>	<b>19</b>
2.1 Il teorema di compattezza . . . . .	19
2.2 Il teorema di approssimazione . . . . .	24
<b>3 Regolarità</b>	<b>27</b>
3.1 Coni tangenti . . . . .	27
3.2 Risultati di regolarità . . . . .	32
3.3 Equazione delle superfici minime . . . . .	38
<b>4 Prova della congettura della double bubble</b>	<b>41</b>
4.1 Esistenza di soap bubble clusters . . . . .	42
4.2 Simmetria rotazionale della double bubble di area minima . . . . .	47
4.3 Concavità della funzione di area minima . . . . .	55
4.4 Struttura della double bubble di area minima . . . . .	60
4.5 Formule di variazione . . . . .	63
4.6 Ipersuperfici Delaunay . . . . .	71

4.7	Separazione e instabilità . . . . .	77
4.8	Stima del numero di componenti . . . . .	85
4.9	Prova della congettura della double bubble . . . . .	91
	<b>Bibliografia</b>	<b>93</b>

# Introduzione

Questa tesi descriverà la soluzione del problema della double bubble in  $\mathbb{R}^3$ , ovvero la ricerca di una superficie di area minima che racchiude due volumi assegnati.

Il problema è stato notevolmente studiato anche in  $\mathbb{R}^n$  e nel caso di clusters che coinvolgono un numero maggiore di volumi e ha necessitato la messa a punto di strumenti sempre più sofisticati di teoria geometrica della misura, calcolo delle variazioni ed equazioni differenziali non lineari.

Il problema di minimizzazione relativo ad un solo volume è noto con il nome di problema isoperimetrico. La soluzione in  $\mathbb{R}^3$  era nota fin dai tempi di Archimede e Zenodoro (si veda [9]), ma una dimostrazione completa è stata data da Schwarz nel 1884 ( si veda [10]).

Per superfici di area minima che racchiudono due volumi era stata formulata in [11], §3, la congettura che il cluster minimizzante fosse la ben nota double bubble illustrata in figura 1, composta da due calotte sferiche e un disco che si intersecano lungo una curva con un angolo di  $120^\circ$ . Altra possibile soluzione è la double bubble non standard (si veda la figura 2), che consiste di due calotte sferiche separate da una banda toroidale.

In  $\mathbb{R}^2$  la prova di questa congettura è stata fornita nel 1990 dal gruppo *Williams College 'small' undergraduate research Geometry Group* (si veda [12]) con strumenti di geometria differenziale di base. In dimensione più alta il problema ha invece richiesto la messa a punto di strumenti sofisticati. In particolare è stata necessaria una definizione debole di superfici ovvero la nozione di correnti e correnti rettificabili (si veda [6]). Nel 1976 in [13] è sta-

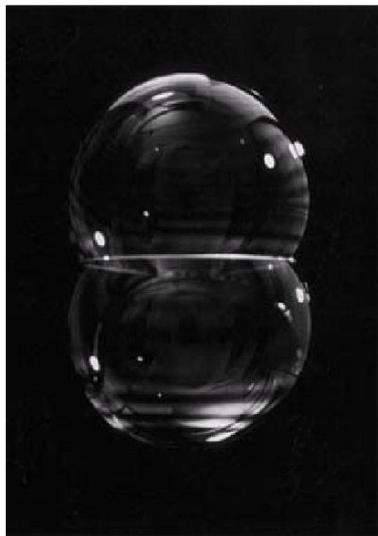


Figura 1: Double bubble standard; foto di Jeremy Ackerman, 1996.

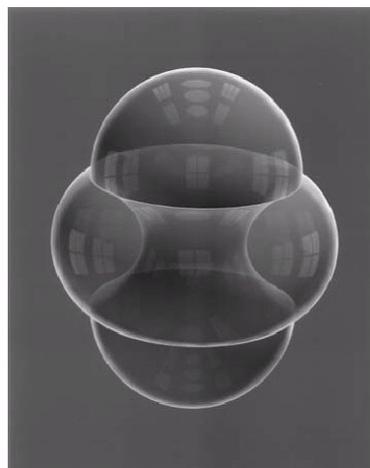


Figura 2: Double bubble non standard generata a computer; computer graphics copyright John M. Sullivan; reperibile una versione a colori sul sito [www.math.uiuc.edu/~jms/Images](http://www.math.uiuc.edu/~jms/Images).

ta dimostrata da Almgren l'esistenza e la regolarità quasi dappertutto di un cluster di area minima con strumenti di teoria geometrica della misura. Le proprietà di simmetria rispetto ad una retta delle double bubbles minimizzanti e di assenza di spazi vuoti al loro interno si devono invece a Hutchings (si veda [2]). Infine la prova in  $\mathbb{R}^3$  della congettura è stata recentemente fornita da Hutchings, Morgan, Ritoré e Ros in [4] con strumenti di calcolo delle variazioni e stabilità.

In questa tesi viene data una presentazione autocontenuta di questi risultati, introducendo la nozione di correnti di Federer e fornendo una scelta dei teoremi e dei risultati di esistenza, regolarità e simmetria che hanno portato alla prova della congettura.

Nel primo capitolo, dopo aver ricordato alcune nozioni come quella di insieme rettificabile, viene data una definizione degli spazi di correnti e correnti rettificabili e vengono mostrate le loro proprietà.

Il secondo capitolo è dedicato al teorema di approssimazione di correnti con catene poliedrali e proprietà di compattezza di correnti con supporto limitato, che permettono di dimostrare l'esistenza di correnti rettificabili di area minima e bordo fissato.

Nel terzo capitolo viene introdotta la nozione di cono tangente per studiare la regolarità di correnti rettificabili di area minima. Si trova inoltre che grafici minimi regolari soddisfano un'equazione differenziale non lineare del secondo ordine.

Infine, nel quarto capitolo, si descrive la prova della congettura della double bubble. Dapprima si mostra il teorema di Almgren dell'esistenza di clusters di area minima (si veda [13]), poi i teoremi di simmetria rotazionale della double bubble di Hutchings (si veda [2]). Si conclude con la prova di [4]: formule di variazione prima e seconda dell'area portano a risultati di stabilità per ipersuperfici di rotazione con curvatura media costante e permettono di escludere il caso di soluzioni diverse dalla standard double bubble.



# Capitolo 1

## Correnti

In questo capitolo, dopo aver ricordato alcune nozioni fondamentali, verranno definiti gli spazi di correnti e verranno mostrati alcuni risultati riguardo a questi spazi, da utilizzare poi nei capitoli successivi; si tratta di risultati classici per i quali si rimanda a [1] e [6].

### 1.1 Nozioni introduttive

Le nozioni che vengono ricordate in questa sezione sono principalmente quelle di insieme rettificabile e di  $m$ -forma differenziale. Per definire un insieme rettificabile è necessario conoscere la definizione di misura di Hausdorff.

**Definizione 1.1.1** (misura di Hausdorff). Dato  $m \in \mathbb{N}$  e un insieme  $A \subset \mathbb{R}^n$ , si definisce la misura di Hausdorff  $m$ -dimensionale di  $A$  come segue

$$\mathcal{H}^m(A) := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\delta^m(A),$$

dove

$$\mathcal{H}_\delta^m(A) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_m \left( \frac{\text{diam}(S_j)}{2} \right)^m \mid A \subset \cup_j S_j, \text{diam}(S_j) \leq \delta \right\},$$

dove

$$\text{diam}(S_j) := \sup \{ |x - y| \mid x, y \in S_j \}.$$

*Nota 1.1.1.* Si preferisce la misura di Hausdorff perché coincide con la misura di Lebesgue per sottovarietà, ma si può definire per tutti i sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^n$ , senza prima conoscerne una parametrizzazione.

**Definizione 1.1.2** (insieme rettificabile). Un insieme  $E \subset \mathbb{R}^n$  è detto  $\mathcal{H}^m$ -rettificabile se  $\mathcal{H}^m(E) < \infty$  e, a meno di insiemi di  $\mathcal{H}^m$ -misura nulla,  $E$  è contenuto nell'unione delle immagini di una quantità numerabile di funzioni di Lipschitz da  $\mathbb{R}^m$  a  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposizione 1.1.1** (criterio di rettificabilità per misure). *Sia  $\mu$  una misura di Radon positiva su un insieme aperto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .*

1. *Se  $\mu = \theta \mathcal{H}^m \llcorner E$ , dove  $E$  è numerabilmente  $\mathcal{H}^m$ -rettificabile, allora  $\mu$  ammette uno spazio tangente approssimato con molteplicità  $\theta(x)$  per  $\mathcal{H}^m$ -quasi ogni  $x \in E$ . In particolare  $\theta(x) = \Theta_m(\mu, x)$  per  $\mathcal{H}^m$ -quasi ogni  $x \in E$ .*
2. *Se  $\mu$  è concentrata in un insieme di Borel  $E$  e ammette uno spazio tangente approssimato con molteplicità  $\theta(x) > 0$  per  $\mu$ -quasi ogni  $x \in E$ , allora  $E$  è numerabilmente  $m$ -rettificabile e  $\mu = \theta \mathcal{H}^m \llcorner E$ . In particolare se  $\exists \text{Tan}^m(\mu, x)$  per  $\mu$ -quasi ogni  $x \in \Omega$ , allora  $\mu$  è  $m$ -rettificabile.*

**Definizione 1.1.3** (spazio tangente approssimato per un insieme numerabilmente  $\mathcal{H}^m$ -rettificabile). Siano dati un insieme  $E$  numerabilmente  $\mathcal{H}^m$ -rettificabile e  $\{S_j\}_j$  una partizione di  $\mathcal{H}^m$ -quasi tutto  $E$  costituita da insiemi  $\mathcal{H}^m$ -rettificabili. Lo spazio tangente approssimato di  $E$  in  $x$ , denotato con  $\text{Tan}^m(E, x)$ , si definisce come lo spazio tangente approssimato a  $\mathcal{H}^m \llcorner S_j$  in  $x$  per ogni  $x \in S_j$ , laddove quest'ultimo è definito.

Per avere una nozione di bordo e per trovare risultati di compattezza, si interpretano gli insiemi rettificabili come correnti (si veda la sezione 1.2), funzionali lineari su forme differenziali; il concetto di corrente è una generalizzazione di quello di distribuzione.

Risulta quindi necessario conoscere lo spazio di particolari forme differenziali (si veda la definizione 1.2.1), per poi passare al suo duale. Dato che le forme

sono applicazioni a valori nello spazio dei covettori, bisogna definire anche quest'ultimo spazio, partendo dal suo duale, lo spazio degli  $m$ -vettori.

**Definizione 1.1.4** (prodotto wedge). Il prodotto wedge è un prodotto tra vettori multilineare e alternante, denotato con il simbolo  $\wedge$ . Per la linearità sarà sufficiente definirlo sugli elementi della base canonica. Sia  $\{e_1, \dots, e_n\}$  base canonica di  $\mathbb{R}^n$ . Si usa la seguente notazione  $e_{i_1 \dots i_m} = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m}$ .

*Esempio 1.1.1.*

$$\begin{aligned} & (e_1 + 2e_2 + 3e_3) \wedge (e_1 + 2e_2 - 3e_3) \wedge e_4 = \\ & = (e_{11} + 2e_{12} - 3e_{13} + 2e_{21} + 4e_{22} - 6e_{23} + 3e_{31} + 6e_{32} - 9e_{33}) \wedge e_4 = \\ & = -6e_{134} - 12e_{234} \end{aligned}$$

**Definizione 1.1.5.** Lo spazio vettoriale degli  $m$ -vettori, che si denota  $\mathbf{\Lambda}_m \mathbb{R}^n$ , è l'insieme delle combinazioni lineari di oggetti del tipo  $\{e_{i_1 \dots i_m} : i_1 < \dots < i_m\}$ .

*Osservazione 1.1.1.* Un  $m$ -vettore  $\xi = v_1 \wedge \dots \wedge v_m$  rappresenta un  $m$ -piano orientato  $P$ , passante per 0, con base orientata  $\{v_1, \dots, v_m\}$ . Scegliendo un'altra base orientata si ottiene un  $m$ -vettore multiplo del precedente. Scegliendo una base ortonormale si ottiene un  $m$ -vettore di lunghezza 1.

*Esempio 1.1.2.* Si consideri il piano

$$\begin{aligned} P & = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 + x_3 = x_3 + x_4 = 0\} = \\ & = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = -(x_2 + x_3), x_4 = -x_3\}. \end{aligned}$$

e si scelga una base generica  $\{u, v\}$  e una ortonormale  $\{w, z\}$ , con

$$\begin{aligned} u & = (-2, 1, 1, -1) & v & = (-1, 1, 0, 0) \\ w & = \left(\frac{2}{\sqrt{15}}, -\frac{3}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, -\frac{1}{\sqrt{15}}\right) & z & = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right). \\ u \wedge v & = (-2e_1 + e_2 + e_3 - e_4) \wedge (-e_1 + e_2) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2e_{11} - 2e_{12} - e_{21} + e_{22} - e_{31} + e_{32} + e_{41} - e_{42} = \\
&\quad = -e_{12} + e_{13} - e_{14} - e_{23} + e_{24} \\
w \wedge z &= \left( \frac{2}{\sqrt{15}}e_1 - \frac{3}{\sqrt{15}}e_2 + \frac{1}{\sqrt{15}}e_3 - \frac{1}{\sqrt{15}}e_4 \right) \wedge \left( -\frac{1}{\sqrt{3}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}e_3 - \frac{1}{\sqrt{3}}e_4 \right) = \\
&= \frac{1}{3\sqrt{5}}(-2e_{11} + 2e_{13} - 2e_{14} + 3e_{21} - 3e_{23} + 3e_{24} - e_{31} + e_{33} - e_{34} + e_{41} - e_{43} + e_{44}) = \\
&\quad = \frac{1}{\sqrt{5}}(-e_{12} + e_{13} - e_{14} - e_{23} + e_{24}).
\end{aligned}$$

Quindi si è trovato  $|w \wedge z| = 1$ ,  $w \wedge z = \frac{1}{\sqrt{5}}u \wedge v$ .

*Osservazione 1.1.2.* Un prodotto  $v_1 \wedge \dots \wedge v_m$  è nullo se e solo se i vettori sono linearmente dipendenti; nel caso  $m = n$  si ha

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_m = \det[v_1, \dots, v_n] \cdot e_{1\dots n}.$$

*Esempio 1.1.3.* Siano  $v_1 = (1, 2, 3)$ ,  $v_2 = (1, 0, -1)$ ,  $v_3 = (0, 1, 1)$ .

$$\begin{aligned}
v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 &= (e_1 + 2e_2 + 3e_3) \wedge (e_1 - e_3) \wedge (e_2 + e_3) = \\
&= (e_{11} - e_{13} + 2e_{21} - 2e_{23} + 3e_{31} - 3e_{33}) \wedge (e_2 + e_3) = \\
&= (-4e_{13} + 2e_{21} - 2e_{23}) \wedge (e_2 + e_3) = \\
&= -4e_{132} - 4e_{133} + 2e_{212} + 2e_{213} - 2e_{232} - 2e_{233} = 2e_{123}.
\end{aligned}$$

Infatti

$$\left| \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

*Osservazione 1.1.3.* Non tutti gli  $m$ -vettori sono semplici, ovvero non tutti si possono scrivere come un singolo prodotto wedge di vettori.

*Esempio 1.1.4.*

$$e_{12} + 2e_{13} + 2e_{23} = (e_1 + e_2) \wedge (e_2 + 2e_3)$$

Ma se per assurdo  $\xi = e_{12} + e_{34}$  fosse semplice si avrebbe  $\xi \wedge \xi = 0$ , invece

$$(e_{12} + e_{34}) \wedge (e_{12} + e_{34}) = e_{1212} + e_{1234} + e_{3412} + e_{3434} = 2e_{1234}.$$

**Definizione 1.1.6** ( $m$ -forma differenziale). Considero il duale di  $\mathbb{R}^n$  con base ortonormale  $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ . Lo spazio duale di  $\Lambda_m \mathbb{R}^n$  è lo spazio, denotato con  $\Lambda^m \mathbb{R}^n$ , dato dalle combinazioni lineari di prodotti wedge di covettori, dette  $m$ -covettori. La base di  $\Lambda^m \mathbb{R}^n$  sarà indicata  $\{e_{i_1 \dots i_m}^* : i_1 < \dots < i_m\}$ . Una  $m$ -forma differenziale  $\varphi$  è un'applicazione  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \Lambda^m \mathbb{R}^n$ . Nel seguito verrà usata anche la notazione  $e_j^* \equiv dx_j$ .

**Definizione 1.1.7.** Si definisce in maniera naturale l'integrale di una  $m$ -forma differenziale  $\varphi$  su un insieme rettificabile  $m$ -dimensionale  $S$ , denotando con  $\vec{S}(x)$  l' $m$ -vettore unitario associato al piano orientato tangente ad  $S$  in  $x$ :

$$\int_S \varphi \equiv \int_S \langle \vec{S}(x), \varphi(x) \rangle d\mathcal{H}^m x.$$

*Esempio 1.1.5.* Si considerino la 2-forma

$$\varphi = x_1 \sin(x_1 x_2) dx_1 dx_2 + e^{x_1 + x_2 + x_3} dx_1 dx_3 + dx_2 dx_3$$

e il quadrato unitario

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1, x_3 = 0\}.$$

Il 2-vettore associato al piano orientato tangente ad  $S$  in  $x$  è  $\vec{S}(x) = e_1 \wedge e_2 \equiv e_{12}$ . Si ha  $\langle e_{12}, \varphi(x) \rangle = x_1 \sin(x_1 x_2)$ , dunque

$$\begin{aligned} \int_S \varphi &= \int_S \langle \vec{S}(x), \varphi(x) \rangle d\mathcal{H}^2 x = \int_0^1 \int_0^1 x_1 \sin(x_1 x_2) dx_1 dx_2 = \\ &= \int_0^1 [\cos(x_1 x_2)]_1^0 = \int_0^1 1 - \cos(x_1) dx_1 = [x_1 - \sin(x_1)]_0^1 = 1 - \sin 1 \end{aligned}$$

**Definizione 1.1.8** (derivata esterna). Data la  $m$ -forma differenziale  $\varphi = \sum f_{i_1 \dots i_m} e_{i_1 \dots i_m}^*$  la sua derivata esterna è la  $(m+1)$ -forma data da

$$d\varphi = \sum df_{i_1 \dots i_m} \wedge e_{i_1 \dots i_m}^*,$$

dove  $df = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)e_1^* + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)e_n^*$ .

*Osservazione 1.1.4.* Siano  $\phi \in \Lambda^l \mathbb{R}^n$ ,  $\omega \in \Lambda^m \mathbb{R}^n$ . Allora  $d(\phi \wedge \omega) = (d\phi) \wedge \omega + (-1)^l \phi \wedge d\omega$ .

**Definizione 1.1.9.** Si considerino  $\varphi \in \Lambda^m \mathbb{R}^n$  e  $\xi \in \Lambda_m \mathbb{R}^n$ . Oltre alla norma euclidea, denotata con  $|\cdot|$ , in  $\Lambda^m \mathbb{R}^n$  e in  $\Lambda_m \mathbb{R}^n$ , si possono definire la norma co-massa, denotata con  $\|\cdot\|^*$ , e la norma massa, denotata con  $\|\cdot\|$ :

$$\|\varphi\|^* = \sup\{|\langle \xi, \varphi \rangle| : \xi \text{ è un } m\text{-vettore semplice unitario}\}$$

$$\|\xi\| = \sup\{|\langle \xi, \varphi \rangle| : \|\varphi\|^* = 1\}.$$

## 1.2 Le correnti

Questa sezione è dedicata alla presentazione dei principali spazi di correnti (si vedano le definizioni 1.2.3 e 1.2.8) e delle norme che saranno utilizzate per gli elementi di questi spazi (si vedano le definizioni 1.2.4 e 1.2.7).

**Definizione 1.2.1.** Prendendo  $\mathbb{R}^n$  come spazio ambiente si definisce

$$\mathcal{D}^m = \{m\text{-forme differenziali } C^\infty \text{ a supporto compatto}\}$$

dove  $\text{supp}\varphi = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) \neq 0\}}$ .

**Definizione 1.2.2** (corrente). Lo spazio delle correnti  $m$ -dimensionali, denotato con  $\mathcal{D}_m$ , è il duale di  $\mathcal{D}^m$ ; sotto la topologia debole su  $\mathcal{D}_m$  si ha  $T_j \rightarrow T$  se e solo se  $T_j(\varphi) \rightarrow T(\varphi)$ ,  $\forall \varphi \in \mathcal{D}^m$ .

Si lavorerà soprattutto con correnti che godono di proprietà particolari, come le correnti rettificabili e quelle integrali.

*Osservazione 1.2.1* (corrente rettificabile). Un insieme rettificabile orientato  $m$ -dimensionale si può vedere come una corrente: preso un insieme  $S$ , rettificabile, orientato,  $m$ -dimensionale, con  $\text{supp}S$  compatto, denotando (quasi per ogni  $x$ ) con  $\vec{S}(x)$  l' $m$ -vettore unitario associato al piano orientato tangente ad  $S$  in  $x$ , data  $\varphi$ , una  $m$ -forma differenziale si consideri

$$S(\varphi) = \int_S \langle \vec{S}(x), \varphi \rangle \mu(x) d\mathcal{H}^m,$$

dove  $\mu(x)$  è la molteplicità associata ad  $S$ , con  $\int_S \mu(x) d\mathcal{H}^m < \infty$ . Una corrente così definita si dice corrente rettificabile.

*Osservazione 1.2.2* (corrente integrale). Le definizioni relative alle correnti sono il duale di quelle relative alle forme. Quindi il bordo di una corrente  $m$ -dimensionale  $T \in \mathcal{D}_m$  è la corrente  $(m-1)$ -dimensionale  $\partial T \in \mathcal{D}_{m-1}$  definita come

$$\partial T(\varphi) = T(d\varphi), \text{ dove } \varphi \in \Lambda^m.$$

Per il teorema di Stokes questo si accorda con l'usuale definizione di bordo, nel caso in cui  $T$  rappresenti l'integrazione su una varietà liscia orientata con bordo. Si noti che un bordo non ha bordo; inoltre il bordo di una corrente rettificabile non è necessariamente una corrente rettificabile, ma se lo è si parla di corrente integrale.

**Definizione 1.2.3.** Oltre a  $\mathcal{D}_m$  si definiscono altri spazi di correnti:

$$\mathcal{E}_m = \{T \in \mathcal{D}_m: \text{supp}T \text{ compatto}\}$$

$\mathcal{R}_m = \{T \in \mathcal{E}_m \text{ associata a un insieme rettificabile, con molteplicità intera, misura totale finita}\}$  dette correnti rettificabili (si veda l'osservazione 1.2.1)

$\mathcal{P}_m =$  sottogruppo addittivo di  $\mathcal{E}_m$  generato da semplici classicamente orientati; dette catene poliedrali integrali

$\mathcal{I}_m = \{T \in \mathcal{R}_m: \partial T \in \mathcal{R}_{m-1}\}$  dette correnti integrali (si veda l'osservazione 1.2.2)

$\mathcal{F}_m = \{T + \partial S: T \in \mathcal{R}_m, S \in \mathcal{R}_{m+1}\}$  dette catene piatte integrali

*Osservazione 1.2.3.* Come già visto, una corrente integrale non è necessariamente rettificabile (si veda l'osservazione 1.2.2). Per costruire un esempio di corrente rettificabile non integrale, cioè per ottenere una corrente rettificabile con bordo non rettificabile, si prende come insieme rettificabile associato un insieme  $E$  con bordo infinito. Si può ad esempio prendere un'unione numerabile di dischi di raggio  $\frac{1}{k}$ :

$$E = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{(x, y, z): x^2 + y^2 \leq k^{-2}, z = k^{-1}\};$$

l'area risulta finita, ma la lunghezza del bordo infinita.

**Definizione 1.2.4.** Nello spazio delle correnti  $\mathcal{D}_m$ , si hanno due norme, la massa  $M$  e la norma piatta  $\mathcal{F}$ , definite come segue, dato  $T \in \mathcal{D}_m$ :

$$M(T) = \sup\{T(\varphi): \sup \|\varphi(x)\|^* \leq 1\},$$

$$\mathcal{F}(T) = \inf\{M(A) + M(B): T = A + \partial B, A \in \mathcal{R}_m, B \in \mathcal{R}_{m+1}\}.$$

Dalla definizione si deduce che la massa di una corrente rettificabile (si veda l'osservazione 1.2.1) debba essere la misura di Hausdorff dell'insieme rettificabile associato, a meno della molteplicità.

*Osservazione 1.2.4.* Grazie al teorema di chiusura (si veda il teorema 2.1.2) si può dire che

$$I_m = \{T \in \mathcal{R}_m: M(\partial T) < \infty\},$$

$$\mathcal{R}_m = \{T \in \mathcal{F}_m: M(T) < \infty\}.$$

**Definizione 1.2.5** (push-forward di una corrente). Sia  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^\nu)$ . Dato un  $m$ -vettore  $\xi = v_1 \wedge \dots \wedge v_m \in \Lambda_m \mathbb{R}^n$  e  $x$  nel dominio di  $f$ , il push-forward di  $\xi$  in  $\Lambda_m \mathbb{R}^\nu$  si definisce in questo modo:

$$[\Lambda_m(Df(x))] (\xi) = (Df(x))(v_1) \wedge \dots \wedge (Df(x))(v_m).$$

Questa applicazione si estende per linearità a tutti gli  $m$ -vettori. Sia una  $m$ -forma differenziale  $\varphi \in \mathcal{D}^m \mathbb{R}^\nu$ , il pull-back di  $\varphi$  su  $\mathbb{R}^n$ ,  $f^\# \varphi$ , viene definito dalla seguente relazione

$$\langle \xi, f^\# \varphi(x) \rangle = \langle [\Lambda_m(Df(x))] (\xi), \varphi(f(x)) \rangle.$$

Infine, data una corrente a supporto compatto  $T \in \mathcal{D}_m \mathbb{R}^n$ , il push-forward di  $T$ ,  $f_\# T \in \mathcal{D}_m \mathbb{R}^\nu$  è

$$(f_\# T) (\varphi) = T(f^\# \varphi).$$

Nel caso in cui  $T$  sia una corrente rettificabile associata a un qualche insieme orientato rettificabile  $E$ , allora  $f_\# T$  è la corrente rettificabile associata all'insieme orientato rettificabile  $f(E)$ , con la molteplicità appropriata. Si ha inoltre  $\partial(f_\# T) = f_\# \partial T$ .

**Definizione 1.2.6** (corrente rappresentabile per integrazione). Una  $T \in \mathcal{D}_m$  è una corrente rappresentabile per integrazione se esiste una misura di Borel regolare  $\|T\|$  su  $\mathbb{R}^n$  finita sui compatti ed esiste una funzione  $\vec{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \Lambda_m \mathbb{R}^n$  con  $\|\vec{T}(x)\| = 1$  per  $\|T\|$ -quasi ogni  $x$  tali che, data  $\varphi \in \Lambda^m$

$$T(\varphi) = \int \langle \vec{T}(x), \varphi(x) \rangle d\|T\|(x).$$

In tal caso si denota  $T = \|T\| \wedge \vec{T}$ .

*Osservazione 1.2.5.* Con le notazioni della definizione precedente (definizione 1.2.6), si osserva che la massa  $M(T)$  coincide con  $\|T\|(\mathbb{R}^n)$ .

*Osservazione 1.2.6.* Ogni corrente rettificabile  $S$  è rappresentabile per integrazione. In particolare se  $E$  è l'insieme a cui è associata con  $l$  funzione molteplicità, allora  $\|S\|$  è la misura  $l(\mathcal{H}^m \llcorner E)$ , mentre  $\vec{S}$  è il campo  $m$ -vettoriale unitario che orienta  $E$ . Dunque  $S = l(\mathcal{H}^m \llcorner E) \wedge \vec{S} = (\mathcal{H}^m \llcorner E) \wedge \eta$ , con  $\eta = l\vec{S}$ . La massa di  $S$  è

$$M(S) = \|S\|(\mathbb{R}^n) = \int_S l d\mathcal{H}^m.$$

*Esempio 1.2.1.* Siano  $f, g, h \in C^\infty$ . Si considera  $T \in \mathcal{R}_1 \mathbb{R}^2$  rappresentabile per integrazione,  $T = \mathcal{H}^1 \llcorner \{(x, 0) : 0 \leq x \leq 1\} \wedge e_1$  (si veda la notazione nella definizione 1.2.6). Allora

$$T(fdx + gdy) = \int_0^1 f(x, 0) dx$$

$$\partial T(h) = T\left[\frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy\right] = \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial x}(x, 0) dx = h(1, 0) - h(0, 0),$$

dunque  $\partial T = \mathcal{H}^0 \llcorner \{(1, 0)\} - \mathcal{H}^0 \llcorner \{(0, 0)\}$ .

*Esempio 1.2.2.* Siano  $f, g, h \in C^\infty$ . Si considera  $T \in \mathcal{R}_1 \mathbb{R}^2$  rappresentabile per integrazione,  $T = \mathcal{H}^1 \llcorner \{(x, x) : 0 \leq x \leq 1\} \wedge 3\sqrt{2}(e_1 + e_2)$ ; si definisce  $E = \{(x, x) : 0 \leq x \leq 1\}$ . Allora

$$\begin{aligned} T(fdx + gdy) &= \int_E 3\sqrt{2}(f(x, x) + g(x, x)) d\mathcal{H}^1 = \\ &= \int_0^1 3\sqrt{2}(f(x, x) + g(x, x)) \sqrt{2} dx = 6 \int_0^1 f(x, x) + g(x, x) dx. \end{aligned}$$

Dunque  $T = 6\mathcal{H}^1 \llcorner E \wedge \frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}}$ . Inoltre

$$\partial T(h) = 6 \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial x_1}(x, x) + \frac{\partial h}{\partial x_2}(x, x) dx = 6(h(1, 1) - h(0, 0)).$$

**Teorema 1.2.1.** *Di seguito sono illustrate due maniere equivalenti di definire una corrente  $T$  rettificabile:*

1. *Data  $\epsilon > 0$ , esiste una catena poliedrale integrale  $P \in \mathcal{P}_m \mathbb{R}^\nu$  e una funzione di Lipschitz  $f : \mathbb{R}^\nu \rightarrow \mathbb{R}^n$  tali che*

$$M(T - f_\# P) < \epsilon \text{ (si veda la definizione 1.2.5)}$$

2. *Esiste un insieme rettificabile  $B$  e un campo  $\eta$   $m$ -vettoriale  $\mathcal{H}^m \llcorner B$ -sommabile tale che  $\eta$  sia semplice,  $|\eta(x)|$  sia intero (gioca il ruolo della molteplicità),  $Tan^m(B, x)$  (si veda la definizione 3.1.5) è associato a  $\eta(x)$  e  $T(\varphi) = \int_B \langle \eta(x), \varphi(x) \rangle d\mathcal{H}^m$ .*

*Dimostrazione.* (1)  $\Rightarrow$  (2) Dato che ogni catena poliedrale è un sottoinsieme di un qualche  $\mathbb{R}^m$ , la sua immagine attraverso  $f$  è rettificabile; dunque  $f_\# P$  è una corrente rettificabile, quindi  $T$  che l'approssima in norma  $M$  è a sua volta una corrente rettificabile.

(2)  $\Rightarrow$  (1) L'insieme  $B$  rettificabile è l'unione di immagini attraverso funzioni di Lipschitz di sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^m$ , quindi si può approssimare con immagini di poliedri. Infatti dato un insieme  $A \subset \mathbb{R}^m$  limitato  $\mathcal{L}^m$ -misurabile (dove  $\mathcal{L}^m$  è la misura di Lebesgue),  $\forall \epsilon > 0$  esiste un insieme disgiunto finito di  $m$ -simplessi che coincidono con  $A$ , a meno di insiemi di misura minore di  $\epsilon$ .

□

**Definizione 1.2.7.** Si definisce una norma che generalizza quella piatta (si veda la definizione 1.2.4) per  $T \in \mathcal{D}_m$ :

$$\begin{aligned} F(T) &= \sup\{T(\varphi) : \varphi \in \mathcal{D}^m, \|\varphi(x)\|^* \leq 1, \|d\varphi(x)\|^* \leq 1, \forall x\} = \\ &= \min\{M(A) + M(B) : T = A + \partial B, A \in \mathcal{E}_m, B \in \mathcal{E}_{m+1}\}. \end{aligned}$$

**Definizione 1.2.8.** Si definiscono i seguenti altri spazi di correnti (continua dalla definizione 1.2.3):

$$\begin{aligned} N_m &= \{T \in \mathcal{E}_m: M(T) + M(\partial T) < \infty\} \\ &= \{T \in \mathcal{E}_m: T \text{ e } \partial T \text{ sono rappresentabili per integrazione}\}, \text{ dette correnti normali} \end{aligned}$$

$F_m = F$ -chiusura di  $N_m$  in  $\mathcal{E}_m$

$$R_m = \{T \in F_m: M(T) < \infty\}$$

$P_m = \{\text{combinazioni lineari reali di elementi di } \mathcal{P}_m\}$

*Osservazione 1.2.7.* In generale una corrente normale non è anche integrale (si vedano le osservazioni 1.2.2 e 1.2.3: una corrente rettificabile non è necessariamente integrale). Ad esempio si considera il quadrato unitario nel piano:

$$A = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\};$$

$S = \sqrt{2}(\mathcal{H}^2 \llcorner A) \wedge e_{12}$  è una corrente normale 2-dimensionale che non è una corrente integrale.

**Definizione 1.2.9** (supporto di una corrente). Il supporto di una corrente  $S$  è il più piccolo insieme chiuso  $C$  tale che  $\forall \varphi \in \mathcal{D}^m$  ( $\text{supp} \varphi \cap C = \emptyset \Rightarrow S(\varphi) = 0$ ).

### 1.3 Alcuni risultati sulle correnti

**Proposizione 1.3.1.** Lo spazio  $R_m$  è la  $M$ -chiusura di  $N_m$  in  $\mathcal{E}_m$

*Dimostrazione.* Dalla definizione degli spazi  $R_m$  e  $F_m$  (si veda la definizione 1.2.8) e della norma  $F$  attraverso la norma  $M$  (si veda la definizione 1.2.7) si trova che  $R_m$  è  $M$ -chiuso in  $\mathcal{E}_m$ . Sia  $T \in R_m$ ; si trova che la sua massa, a meno di un elemento in  $N_m$ , è pari a quella di un elemento di  $\mathcal{E}_m$ . Infatti dato  $\epsilon > 0$ , sia  $S \in N_m$  tale che  $F(T - S) < \epsilon$ ; questo significa, seguendo la definizione della norma  $F$  (si veda la definizione 1.2.7), che esistono  $A \in \mathcal{E}_m$ ,  $B \in \mathcal{E}_{m+1}$  tali che  $T - S = A + \partial B$  e  $M(A) + M(B) < \epsilon$ . Dato che

$M(\partial B) = M(T - S - A) < \infty$ , si ha  $\partial B \in N_m$  e quindi anche  $S + \partial B \in N_m$ , da cui  $M(T - (S - \partial B)) = M(A) < \infty$ .  $\square$

**Definizione 1.3.1** (misura integrale-geometrica). Dato  $B$  insieme di Borel, si definisce

$$I^m(B) := \frac{1}{\beta(n, m)} \int_{p \in O^*(n, m)} \int_{y \in Im(p) \cong \mathbb{R}^m} N(p|B, y) dp,$$

dove  $O^*(n, m)$  è l'insieme delle proiezioni ortogonali  $p$  di  $\mathbb{R}^n$  sui sottospazi  $m$ -dimensionali,  $N(p|A, y)$  denota il numero di punti di  $A \cap p^{-1}(y)$  e

$$\beta(n, m) = \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-m+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)^{-1} \pi^{-\frac{1}{2}}.$$

Dato  $A \subset \mathbb{R}^n$ , si definisce

$$I^m(A) := \inf\{I^m(B) : A \subset B, B \text{ insieme di Borel}\}.$$

**Teorema 1.3.1.** Sia  $T \in F_m \mathbb{R}^n$  tale che  $I^m(\text{supp}T) = 0$ . In tal caso  $T = 0$ .

*Dimostrazione.* • Una corrente normale  $C^\infty$  in  $\mathbb{R}^n$  è della forma  $\mathcal{L}^n \wedge \xi$ , dove  $\xi$  è un campo  $m$ -vettoriale  $C^\infty$  a supporto compatto. Ogni corrente normale può essere approssimata in norma  $F$  da una corrente normale  $C^\infty$  cioè da  $T_\epsilon = \mathcal{L}^n \wedge \xi$ ; infatti basta prendere un'approssimazione  $f$  della  $\delta_0$  e porre  $T_\epsilon = \int_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \cdot \tau_{x\#} T \, d\mathcal{L}^n x$  (dove  $\tau_{x\#}$  è il push-forward della traslazione).

- Si prova che  $T \in F_n \mathbb{R}^n$  è della forma  $\mathcal{L}^n \wedge \xi$  per un qualche  $\xi$ . Infatti, dato che in co-dimensione 0 le norme  $F$  e  $M$  coincidono,  $T$  può essere  $M$ -approssimato da una corrente normale, quindi da una  $C^\infty$  del tipo  $\mathcal{L}^n \wedge \xi_1$ , con  $\xi_1$  campo  $n$ -vettoriale  $C^\infty$  con  $M(T - \mathcal{L}^n \wedge \xi_1) < 2^{-1}$ ; quindi

$$M(\mathcal{L}^n \wedge \xi_1) = \int |\xi_1| \, d\mathcal{L}^n < M(T) + 2^{-1}.$$

Allo stesso modo,  $T - \mathcal{L}^n \wedge \xi_1$  può essere approssimata in norma  $M$  da  $\mathcal{L}^n \wedge \xi_2$  con  $M(T - \mathcal{L}^n \wedge \xi_1 - \mathcal{L}^n \wedge \xi_2) < 2^{-2}$ , quindi

$$M(\mathcal{L}^n \wedge \xi_2) = \int |\xi_2| \, d\mathcal{L}^n < 2^{-1} + 2^{-2},$$

e così via. Si trova quindi

$$\int \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j| < M(T) + 2^{-1} + 2^{-1} + 2^{-2} + \dots = M(T) + 2 < \infty,$$

quindi  $\sum \xi_j \in L^1$  e la  $\xi$  cercata è dunque  $\xi = \sum \xi_j$ . Dunque il teorema è soddisfatto per il caso  $m = n$ .

- Sia ora  $m < n$ . Dato che  $I^m(\text{supp}T) = 0$  si può assumere che  $\text{supp}T$  proietti gli insiemi di misura 0 nelle coordinate piane  $m$ -dimensionali. Per comodità  $m = 1$ , quindi  $T \in F_1\mathbb{R}^n$ . Data  $\varphi = f_1e_1^* + \dots + f_n e_n^*$  una 1-forma,  $T(\varphi) = \sum T(f_j e_j^*)$ ; è quindi sufficiente provare  $T(f_j e_j^*) = 0$ . Sia  $p_j$  proiezione lungo il  $j$ -esimo asse,  $T_{\perp}f$  definita da  $(T_{\perp}f)\varphi = T(f\varphi)$ ,  
 $T(f_j e_j^*) = (T_{\perp}f_j)(e_j^*) = (T_{\perp}f_j)(p_j^{\sharp}e_j^*) = (p_{j\sharp}(T_{\perp}f_j))(e_j^*)$  (si veda la definizione 1.2.5).

Dal punto precedente  $p_{j\sharp}(T_{\perp}f_j) \in F_m\mathbb{R}^m$  è della forma  $I^m \wedge \xi$  e il suo supporto ha misura 0, quindi  $T(f_j e_j^*) = 0$ .

□

**Teorema 1.3.2.** *Sia  $\epsilon > 0$ . Data  $T \in F_m$ , esiste  $P \in P_m$  tale che  $F(T-P) \leq \epsilon$  e  $M(P) < M(T) + \epsilon$ .*

*Dimostrazione.* Non è restrittivo considerare  $T \in N_m$ : infatti dalla definizione 1.2.8 di  $F_m$ , se  $M(T) < \infty$ , per la proposizione 1.3.1,  $T$  appartiene alla  $M$ -chiusura di  $N_m$ . Seguendo la dimostrazione del teorema 1.3.1, si può assumere che  $T$  sia della forma  $T = \mathcal{L}^n \wedge \xi(x)$ , dove  $\xi(x)$  è un campo  $m$ -vettoriale  $C^\infty$  a supporto compatto con  $\int |\xi(x)| d\mathcal{L}^n < \infty$ . Per approssimazione si può supporre che  $T$  sia della forma  $T = \mathcal{L}^n \wedge A \wedge \eta$ , con  $A$  insieme limitato,  $\eta$   $m$ -vettore. Si può assumere  $\eta = e_{1\dots m}$  e  $A = \{0 \leq x \leq 1\} \subset \mathbb{R}^n$ . Dato  $M \in \mathbb{Z}$ , si considerano

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n: 0 \leq x_i \leq 1\} \times \left\{ \frac{1}{M}, \frac{2}{M}, \dots, 1 \right\}^{n-m} \subset \mathbb{R}^n,$$

$$P = M^{-n-m}(\mathcal{H}^m \wedge B) \wedge e_{1\dots m}.$$

Da cui  $M(P) = M(T)$  e per  $M$  abbastanza grande  $F(T - P) < \epsilon$ . □

**Teorema 1.3.3.** *Sia  $B$  una sottovarietà di  $\mathbb{R}^n$  connessa  $m$ -dimensionale, di classe  $C^1$ , con bordo, orientata da  $\zeta$ . Se  $T \in F_m$  è supportata in  $B$  e il suo bordo è supportato nel bordo di  $B$ , esiste  $r \in \mathbb{R}$  tale che  $T = r(\mathcal{H}^m \llcorner B) \wedge \zeta$ . Nota che se  $T \in F_m$ , allora  $r \in \mathbb{Z}$ .*

*Dimostrazione.* Bisogna mostrare che, localmente, se  $\partial T = 0$  allora  $T$  è costante. Si assume che localmente  $B = \mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ , quindi per il teorema 1.3.1,  $T$  è della forma  $T = \mathcal{L}^m \wedge \xi$ , con  $\xi = f \cdot e_{1\dots m}$ . Data  $\varphi = g_1 e_{2\dots m}^* - g_2 e_{1,3\dots m}^* + \dots + g_m e_{1,2\dots m-1}^*$ ,  $(m-1)$ -forma a supporto compatto, data l'ipotesi su  $\partial T$  e la definizione di bordo di una corrente (si veda la definizione 1.2.2) si ha

$$\begin{aligned} 0 = \partial T(\varphi) &= T(d\varphi) = \int \langle \xi, d\varphi \rangle d\mathcal{L}^m = \\ &= \int f \left( \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial g_m}{\partial x_m} \right) d\mathcal{L}^m = \int f(\operatorname{div} g) d\mathcal{L}^m, \end{aligned}$$

quindi  $f$  è costante, come si voleva. Si nota che se  $f \in C^\infty$  integrando per parti si ha  $0 = - \int \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} g_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} g_m \right) d\mathcal{L}^m$ .  $\square$

## 1.4 Sezioni di correnti

Vengono ora introdotte le sezioni di correnti normali, particolarmente legate alla nozione di rettificabilità (si veda il lemma 1.4.1, alla fine di questa sezione). Del resto il legame tra un insieme rettificabile e le sue sezioni è presente anche nella formula di coarea (si veda il teorema 1.4.2).

**Teorema 1.4.1** (formula di area). *Sia  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  funzione di Lipschitz con  $m \leq n$ . Indicando con  $J_m f$  lo jacobiano di  $f$  e con  $N(f|A, y) = \operatorname{card}\{x \in A : f(x) = y\}$ ,*

- se  $A$  è un insieme  $\mathcal{L}^m$ -misurabile, allora

$$\int_A J_m f(x) d\mathcal{L}^m x = \int_{\mathbb{R}^n} N(f|A, y) d\mathcal{H}^m y;$$

- se  $u$  è una funzione  $\mathcal{L}^m$ -integrabile, allora

$$\int_{\mathbb{R}^m} u(x) J_m f(x) d\mathcal{L}^m x = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{x \in f^{-1}\{y\}} u(x) d\mathcal{H}^m y.$$

**Teorema 1.4.2** (formula di coarea). *Sia  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  funzione di Lipschitz con  $m > n$ . Se  $A$  è un insieme  $\mathcal{L}^m$ -misurabile, indicando con  $J_n f$  lo jacobiano di  $f$ , allora*

$$\int_A J_n f(x) d\mathcal{L}^m x = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{m-n}(A \cap f^{-1}(y)) d\mathcal{L}^n y.$$

**Teorema 1.4.3** (formula di area-coarea generale). *Sia  $W$  un insieme rettificabile  $m$ -dimensionale (si veda la definizione 1.1.2), sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$ ,  $Z$  insieme rettificabile  $\mu$ -dimensionale, sottoinsieme di  $\mathbb{R}^\nu$ ,  $1 \leq \mu \leq m$ ,  $f$  funzione di Lipschitz da  $W$  a  $Z$ ,  $g$  funzione su  $W$  ( $\mathcal{H}^m \llcorner W$ )-integrabile, indicando con  $apJ_\mu f$  approssimazione dello jacobiano di  $f$ , allora*

$$\int_W g \cdot apJ_\mu f d\mathcal{H}^m = \int_z \int_{f^{-1}(z)} g d\mathcal{H}^{m-\mu} d\mathcal{H}^\mu z.$$

*Osservazione 1.4.1.* La formula di coarea (si veda il teorema 1.4.2) lega l'area di un insieme rettificabile  $W$  all'area delle sue sezioni.

*Osservazione 1.4.2.* Data una corrente  $T \in \mathcal{D}_m$  e una  $k$ -forma differenziale  $C^\infty$ ,  $\alpha$ , si può definire una corrente  $T \llcorner \alpha \in \mathcal{D}_{m-k}$  in questo modo:  $(T \llcorner \alpha)(\varphi) = T(\alpha \wedge \varphi)$ , con  $\varphi \in \mathcal{D}^{m-k}$ . Questo è vero in particolare con  $k = 0$ , cioè se  $\alpha$  è una funzione.

Dato un insieme  $A \subset \mathbb{R}^n$  si può definire in maniera naturale  $T \llcorner A = T \llcorner \chi_A$ , dove  $\chi_A$  è la funzione caratteristica di  $A$ .

**Definizione 1.4.1** (sezione di una corrente normale). *Data una corrente normale  $T \in N_m \mathbb{R}^n$ ,  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funzione di Lipschitz e  $r \in \mathbb{R}$  si definisce 'sezione' il seguente oggetto*

$$\begin{aligned} \langle T, u, r+ \rangle &= (\partial T) \llcorner \{x: u(x) > r\} - \partial(T \llcorner \{x: u(x) > r\}) \\ &= \partial(T \llcorner \{x: u(x) \leq r\}) - (\partial T) \llcorner \{x: u(x) \leq r\}. \end{aligned}$$

Per quasi ogni valore di  $r$ ,  $\langle T, u, r+ \rangle$  è una corrente normale (come dice più avanti il corollario 1.4.1).

*Osservazione 1.4.3.* Dalla definizione 1.4.1 segue immediatamente che

$$\partial \langle T, u, r+ \rangle = - \langle \partial T, u, r+ \rangle,$$

cioè il bordo della sezione è la sezione del bordo.

**Proposizione 1.4.1.** *Si considerino  $T$  rappresentabile per integrazione con  $T = \|T\| \wedge \vec{T}$ ,  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funzione di Lipschitz, indicando con  $(Lipu)$  la costante di Lipschitz di  $u$ . Vale la seguente disuguaglianza:*

$$M \langle T, u, r+ \rangle \leq (Lipu) \lim_{h \rightarrow 0} \|T\| \frac{\{r < u(x) < r + h\}}{h};$$

in particolare se chiamo  $f(r) = \|T\|B(x, r)$ , allora per quasi ogni  $r$ ,

$$M \langle T, u, r+ \rangle \leq f'(r).$$

*Dimostrazione.* Sia  $\chi$  la funzione caratteristica dell'insieme  $\{x: u(x) > r\}$ ; allora si scrive  $\langle T, u, r+ \rangle = (\partial T) \llcorner \chi - \partial(T \llcorner \chi)$ . Data  $0 < h \ll 1$ , si può approssimare  $\chi$  tramite una funzione  $f \in C^\infty$  tale che  $Lip f \lesssim \frac{Lipu}{h}$  e

$$f = \begin{cases} 0 & \text{se } u(x) \leq r \\ 1 & \text{se } u(x) \geq r + h. \end{cases}$$

In tal caso

$$\begin{aligned} M \langle T, u, r+ \rangle &\approx M((\partial T) \llcorner \partial(T \llcorner f)) = M(T \llcorner df) \leq \\ &\leq (Lip f) \|T\| \{x: r < u(x) < r + h\} \lesssim (Lipu) \|T\| \frac{\{x: r < u(x) < r + h\}}{h} \end{aligned}$$

da cui segue la tesi. □

**Proposizione 1.4.2.** *Con le notazioni della proposizione precedente 1.4.1, si trova la seguente disuguaglianza:*

$$\int_a^b M \langle T, u, r+ \rangle \, d\mathcal{L}^1 r \leq (Lipu) \|T\| \{x: a < u(x) < b\}$$

*Dimostrazione.* Si considera la funzione  $f(r) = \|T\|\{u(x) < r\}$ , monotona crescente; per la monotonia, esiste  $f'(r)$  per quasi ogni  $r$ . Usando questo e la proposizione precedente 1.4.1, si trova:

$$\begin{aligned} (Lipu)\|T\|\{a < u(x) < b\} &= (Lipu)(f(b) - \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)) \geq \\ &\geq (Lipu) \int_a^b f'(r) \, dr \geq \int_a^b M \langle t, u, r+ \rangle \, dr \end{aligned}$$

□

**Corollario 1.4.1.** *Con le notazioni precedenti,*

$$\langle T, u, r+ \rangle \in N_{m-1}, \text{ per quasi ogni } r,$$

*cioè per quasi ogni  $r$  le sezioni di una corrente normale sono correnti normali.*

**Proposizione 1.4.3.** *Con le notazioni precedenti*

$$\int_a^b F[T \llcorner \{u(x) \leq r\}] \, d\mathcal{L}^1 r \leq [b - a + Lipu]F(T).$$

**Lemma 1.4.1** (caratterizzazione degli insiemi rettificabili tramite le sezioni).

*Si considerino le sezioni di una corrente normale  $T$  attraverso la funzione  $u(x) = |x - a|$ , quindi  $\langle T, u, r+ \rangle = \partial(T \llcorner \{x: u(x) \leq r\}) = \partial(T \llcorner B(a, r))$ .*

*Se inoltre  $T$  è senza bordo e per ogni  $a \in \mathbb{R}^n$  il bordo è rettificabile per quasi ogni  $r \in \mathbb{R}$ , allora  $T$  è rettificabile.*

Questo lemma verrà usato nel capitolo successivo, in particolare per il teorema di chiusura 2.1.2. Tramite questo lemma, si ha la proposizione 1.4.4 che assicura che per insiemi rettificabili le due nozioni di sezioni coincidono.

**Proposizione 1.4.4.** *Sia  $W$  un insieme rettificabile  $m$ -dimensionale in  $\mathbb{R}^n$  e sia  $u$  una funzione di Lipschitz da  $W$  a  $\mathbb{R}^\mu$ ; allora per quasi ogni  $z \in \mathbb{R}^\mu$  si trova che  $W \cap u^{-1}(z)$  è rettificabile e la corrente associata è  $\langle T, u, r+ \rangle$ , la sezione della corrente  $T$  associata a  $W$ .*



# Capitolo 2

## Compattezza

In questo capitolo, la sezione principale è certamente la prima, dove viene mostrato il teorema di compattezza; si parlerà poi del teorema di approssimazione per correnti integrali. Anche per questi risultati si rimanda a [1] e [6].

### 2.1 Il teorema di compattezza

In questa sezione si arriverà a un risultato di compattezza (teorema 2.1.3) tramite la totale limitatezza e la completezza; la totale limitatezza si ricava come corollario del teorema di deformazione 2.1.1, mentre la completezza viene assicurata dal teorema di chiusura 2.1.2.

Il teorema di deformazione porta alla dimostrazione della disuguaglianza isoperimetrica (proposizione 2.1.1); mentre il teorema di compattezza permette di ottenere l'esistenza di superfici di area minima (proposizione 2.1.2) e l'esistenza in una varietà di superfici assolutamente o omologicamente minimizzanti (proposizione 2.1.3).

Il teorema di deformazione permette di approssimare una corrente integrale con una catena poliedrale, a meno di un termine di errore. Di seguito

viene richiamato senza dimostrazione l'enunciato (la prova si può trovare sul [6] in corrispondenza del teorema 4.2.9).

**Teorema 2.1.1** (di deformazione). *Data  $T \in I_m$  preso  $\epsilon > 0$ , esistono  $P \in \mathcal{P}_m$ ,  $Q \in I_m$ ,  $S \in I_{m+1}$  tali che siano soddisfatte le seguenti condizioni, con  $\gamma = 2n^{2m+2}$ :*

1.  $T = P + Q + \partial S$ ;
2. **a**  $M(P) \leq \gamma[M(T) + \epsilon M(\partial T)]$   
**b**  $M(\partial P) \leq \gamma M(\partial T)$   
**c**  $M(Q) \leq \epsilon \gamma M(\partial T)$   
**d**  $M(S) \leq \epsilon \gamma M(T)$   
**e** da cui  $\mathcal{F}(T - P) \leq \epsilon \gamma (M(T) + M(\partial T))$ ;
3. *suppP è contenuto in una griglia di lato  $2\epsilon$   $m$ -dimensionale; in altre parole se  $x \in \text{supp}P$ , allora almeno  $n - m$  delle sue coordinate sono multipli pari di  $\epsilon$ . Inoltre  $\text{supp}\partial P$  è contenuto nella griglia di lato  $2\epsilon$   $m$ -dimensionale;*
4.  $\text{supp}P \cup \text{supp}Q \cup \text{supp}S \subset \{x: \text{dist}(x, \text{supp}T) \leq 2n\epsilon\}$

**Proposizione 2.1.1** (disuguaglianza isoperimetrica). *Se  $T \in I_m$  con  $\partial T = 0$ , allora esiste  $S \in I_{m+1}$  con  $\partial S = T$  e*

$$M(S)^{\frac{m}{m+1}} \leq \gamma M(T), \text{ con } \gamma = 2n^{2m+2}.$$

*Dimostrazione.* Si sceglie  $\epsilon$  in modo che  $\gamma M(T) = \epsilon^m$ ; applicando il teorema 2.1.1 si ha

$$T = P + Q + \partial S. \tag{2.1}$$

Dato che per ipotesi  $\partial T = 0$ , dalla 2.c del teorema 2.1.1 si deduce che deve essere  $Q = 0$ . Per la disuguaglianza 2.a del teorema 2.1.1,  $M(P) \leq \gamma M(T) = \epsilon^m$ ; poiché  $P$  sta nella griglia di lato  $2\epsilon$ ,  $M(P)$  è un multiplo di  $(2\epsilon)^m$ , dunque  $M(P) = 0$ , da cui  $P = 0$ . Quindi in (2.1) rimane solo  $T = \partial S$ .

Sfruttando ancora il teorema 2.1.1 (disuguaglianza 2.d) e la scelta di  $\epsilon$  si trova  $M(S) \leq \epsilon \gamma M(T) = \epsilon \epsilon^m = \epsilon^{m+1} = (\epsilon^m)^{\frac{m+1}{m}} = (\gamma M(T))^{\frac{m+1}{m}}$ , da cui segue immediatamente la disuguaglianza della tesi.  $\square$

**Corollario 2.1.1** (totale limitatezza). *L'insieme*

$$\mathcal{I} = \{T \in I_m : \text{supp}T \subset B^n(0, c_1), M(T) \leq c_2, M(\partial T) \leq c_3\}$$

*è totalmente limitato in norma  $\mathcal{F}$  (si veda la definizione 1.2.4).*

*Dimostrazione.* Dal teorema 2.1.1 si ricava che un elemento  $T \in \mathcal{I}$  si può approssimare con una catena poliedrale  $P$  in una griglia di lato  $\epsilon$  con  $M(P) \leq \gamma(c_2 + \epsilon c_3)$  e  $\text{supp}P \subset B^n(0, c_1 + 2n\epsilon)$ . Dato che esiste solo una quantità finita di tali  $P$ ,  $\mathcal{I}$  è totalmente limitato.  $\square$

**Teorema 2.1.2** (di chiusura). *Si dimostrano le seguenti affermazioni:*

1.  $I_m$  è  $F$ -chiuso in  $N_m$
2.  $I_{m+1} = \{T \in \mathcal{R}_{m+1} : M(\partial T) < \infty\}$  (rettificabilità del bordo)
3.  $\mathcal{R}_m = \{T \in \mathcal{F}_m : M(T) < \infty\}$
4.  $\mathcal{I} = \{T \in I_m : \text{supp}T \subset B^n(0, R), M(T) \leq c, M(\partial T) \leq c\}$  è  $\mathcal{F}$ -completo.

*Dimostrazione.* Per i primi tre punti, la prova verrà fatta per induzione: infatti si dimostra (1)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (3); perciò assumendo vere (1), (2), (3) per  $m - 1$ , basta mostrare (1) per il caso  $m$ . Il caso (4) viene dimostrato indipendentemente dagli altri punti.

**(1)  $\Rightarrow$  (2)** Per definizione  $I_{m+1} = \{T \in \mathcal{R}_{m+1} : \partial T \in \mathcal{R}_m\}$ , quindi  $I_{m+1} \subset \{T \in \mathcal{R}_{m+1} : M(\partial T) < \infty\}$ . L'ipotesi (1) garantisce l'inclusione inversa.

**(2)  $\Rightarrow$  (3)** Per definizione vale l'inclusione  $\mathcal{R}_m \subset \{T \in \mathcal{F}_m : M(T) < \infty\}$ ; viceversa, tenendo conto che  $\mathcal{F}_m = \{T + \partial S : T \in \mathcal{R}_m, S \in \mathcal{R}_{m+1}\}$ ,

data  $T \in \mathcal{F}_m$  con  $M(T) < \infty$ , si ha  $T = R + \partial S$ , cioè  $\partial S = T - R$ , con  $M(\partial S) < \infty$ , dunque per (2)  $S \in I_{m+1}$ ; da cui la tesi, dato che le correnti integrali sono quelle rettificabili con bordo rettificabile.

(1) Si assuma che (1), (2), (3) siano soddisfatte per  $m-1$ ; si vuole dimostrare che (1) risulta vera per  $m$ .

Data una successione di  $Q_i \in I_m$  tale che  $Q_i \xrightarrow{F} T \in N_m$ , bisogna mostrare che  $T \in I_m$ . A meno di usare  $T - T_1$  invece di  $T$ , dove  $T_1 \in I_m$  ha lo stesso bordo di  $T$ , si può assumere  $\partial T = 0$ . È sufficiente mostrare che  $\forall p \in \mathbb{R}^n$ , per quasi ogni  $r \in \mathbb{R}^+$   $\partial(T \llcorner B(p, r))$  è rettificabile; infatti, per il lemma 1.4.1, da questo segue che  $T$  è rettificabile. Quindi usando ancora il fatto che  $\partial T = 0$ , si deduce direttamente dalla definizione 1.2.8 di  $N_m$  che  $T \in N_m$ . Si assume  $\sum F(Q_i - T) < \infty$ , dato che  $Q_i \xrightarrow{F} T$ ; per la proposizione 1.4.3, per  $0 < a < b$

$$\int_a^b \sum F[(Q_i - T) \llcorner B(p, r)] dr < \infty;$$

quindi  $Q_i \llcorner B(p, r) \xrightarrow{F} T \llcorner B(p, r)$ ; quindi  $\partial(Q_i \llcorner B(p, r)) \xrightarrow{F} \partial(T \llcorner B(p, r))$  per quasi ogni  $r$ . Per il corollario 1.4.1,  $Q_i \llcorner B(p, r)$ ,  $\partial(Q_i \llcorner B(p, r))$  e anche  $T \llcorner B(p, r)$ ,  $\partial(T \llcorner B(p, r))$  sono correnti normali. Per ipotesi induttiva sul punto (1)  $\partial(T \llcorner B(p, r))$  è integrale, in particolare rettificabile.

(4) Si consideri una successione di Cauchy  $T_j$  in  $\mathcal{I}$ ; per la completezza dell'insieme  $\{T \in \mathcal{F}_m: \text{supp}T \subset B(0, R)\}$ ,  $\exists \lim T_j = T \in \mathcal{F}_m$ ; dalla definizione 1.2.4 della massa  $M$  e della norma piatta  $F$ , si può trovare che  $M$  è inferiormente semicontinua nella norma  $F$  (cioè se  $T_j \xrightarrow{F} T$  in  $\mathcal{D}_m$ , allora  $M(T) \leq \liminf M(T_j)$ ); dunque  $M(T) \leq c$ ,  $M(\partial T) \leq c$ ; infine da (3) si ha  $T \in I_m$ .

□

**Teorema 2.1.3** (di compattezza). *Sia  $K$  una palla chiusa in  $\mathbb{R}^n$ ,  $0 \leq c < \infty$ . Allora*

$$\{T \in I_m \mathbb{R}^n: \text{supp}T \subset K, M(T) \leq c, M(\partial T) \leq c\}$$

è compatto in norma  $\mathcal{F}$ .

*Dimostrazione.* La compattezza in norma  $\mathcal{F}$  è assicurata dalla totale limitatezza (corollario 2.1.1) e dalla completezza (punto (4) del teorema 2.1.2).  $\square$

**Proposizione 2.1.2** (esistenza di superfici di area minima). *Sia  $B$  una corrente rettificabile  $(m - 1)$ -dimensionale in  $\mathbb{R}^n$  con  $\partial B = 0$ . Allora esiste  $S$ , una corrente rettificabile  $m$ -dimensionale di area minima tale che  $\partial S = B$ .*

*Dimostrazione.* Si consideri  $r$  tale che, denotando con  $B(0, r)$  la palla di centro  $0$  e raggio  $r$ , si abbia  $\text{supp}B \subseteq B(0, r)$ . Si consideri inoltre una successione di correnti  $S_j \in \mathcal{R}_m$  con area che decresce verso  $\inf\{M(S) : \partial S = B\}$ . Sia  $f$  la funzione di Lipschitz che fissa la palla  $B(0, r)$  e proietta radialmente i punti dall'esterno al bordo della palla. Attraverso tale  $f$  non aumenta la distanza, quindi neanche l'area. Si studia  $f\#S_j$  invece di  $S_j$ , assumendo  $\text{supp}S_j \subseteq B(0, r)$ . Per il teorema di compattezza (teorema 2.1.3), si può estrarre una sottosuccessione che converge a una  $S \in \mathcal{R}_m$ . Per la continuità di  $\partial$  e per l'inferiore semicontinuità di  $M$  si trova  $\partial S = B$  e  $M(S) = \inf\{M(T) : \partial T = B\}$ , cioè  $S$  è di area minima (ovvero tra quelle con bordo  $B$  fissato, è quella con la norma minima).  $\square$

**Proposizione 2.1.3** (esistenza di correnti di superficie assolutamente o omologicamente minima in una varietà). *Sia  $M$  una varietà riemanniana compatta di classe  $C^1$ ; sia  $T$  una corrente rettificabile in  $M$ . Allora tra tutte le correnti rettificabili  $S$  in  $M$  tali che  $\partial S = \partial T$  (ovvero  $S - T = \partial X$  dove  $X$  è un'opportuna corrente rettificabile in  $M$ ), ne esiste una di area minima.*

*Tale corrente è detta assolutamente o omologicamente di area minima.*

*Dimostrazione.* Il teorema di compattezza (teorema 2.1.3) si può riformulare con, al posto di  $K$ , una sottovarietà compatta  $C^1$  di  $\mathbb{R}^n$ ; in tal caso il teorema vale in ogni varietà  $C^1$  riemanniana compatta. Quindi per ottenere la tesi di questa proposizione bisogna solo mostrare che il limite si trova nella stessa classe di omologia degli elementi della successione.

Per definizione di  $\mathcal{F}$  (si veda la definizione 1.2.4) quando  $\mathcal{F}(S_j - S)$  è molto

piccola, si ha  $S_i - S = A + \partial B$ , con  $A \in \mathcal{R}_m$ ,  $B \in \mathcal{R}_{m+1}$  e  $M(A)$ ,  $M(\partial B)$  molto piccole. Si consideri  $\tilde{Y}$  la corrente di area minima in  $\mathbb{R}^n$  (in generale diversa da quella che minimizza l'area nella varietà  $M$ ) con bordo  $\partial\tilde{Y} = A$ ; dato che  $M(\tilde{Y})$  è piccola, per un corollario del teorema di monotonia (si veda nel capitolo seguente il corollario 3.1.2) si ha che  $\tilde{Y}$  si trova vicino alla varietà  $M$  e quindi può essere ritratto in una  $Y$  in  $M$ . In questo modo  $S_i - S = \partial Y - \partial B$ , cioè il limite coincide con gli elementi della successione a meno di bordi di correnti in  $M$ , come si voleva.  $\square$

## 2.2 Il teorema di approssimazione

Il teorema di approssimazione assicura che una corrente integrale può essere approssimata attraverso un diffeomorfismo da un poliedro. Il teorema di deformazione invece (si veda il teorema 2.1.1) dava un'approssimazione solo in norma piatta; si veda anche la caratterizzazione delle correnti rettificabili (teorema 1.2.1), usata nella dimostrazione seguente.

**Teorema 2.2.1** (di approssimazione). *Data una corrente integrale  $T \in I_m \mathbb{R}^n$  e  $\epsilon > 0$ , esiste una catena poliedrale  $P \in \mathcal{P}_m \mathbb{R}^n$ , supportata in  $\text{supp}T$  a meno di una distanza  $\epsilon$ , ed esiste  $f$ , un diffeomorfismo  $C^1$  di  $\mathbb{R}^n$  tale che*

$$f_* T = P + E$$

con  $M(E) \leq \epsilon$ ,  $M(\partial E) \leq \epsilon$ ,  $\text{Lip}(f^{-1}) \leq 1 + \epsilon$ ,  $|f(x) - x| \leq \epsilon$ ,  $f(x) = x$ ,  $\forall x$  tale che  $\text{dist}(x, \text{supp}T) \geq \epsilon$ .

*Dimostrazione.* • Si considera prima il caso in cui  $\partial T$  sia un poliedro.

Se  $T \in I_m$ , per definizione di  $I_m$ , si ha  $T \in \mathcal{R}_m$ , quindi per definizione di  $\mathcal{R}_m$ , a  $T$  è associato un insieme rettificabile  $B$  con molteplicità  $\zeta$  intera:  $T = (\mathcal{H}^m \llcorner B) \wedge \zeta$ .

Dato che  $B$  è un insieme rettificabile si può dimostrare che sta  $\mathcal{H}^m$ -quasi tutto nell'unione numerabile disgiunta di varietà  $M_i$  immerse  $C^1$  e che per quasi ogni  $x \in B$ , la densità di  $B$  e di  $\cup_i M_i$  è 1. Quindi esiste

un unico  $M_i$  tale che  $B$  e  $M_i$  coincidano in  $x$  a meno di un insieme di densità nulla.

Con un argomento di ricoprimento, si ottiene una collezione finita di palle aperte disgiunte  $U_i \subseteq \mathbb{R}^n - \text{supp} \partial T$  e una collezione finita di sottovarietà  $C^1$  di  $U_i$  quasi piatte,  $N_i$ , tali che  $\cup_i N_i = B$ , a meno di un insieme di  $\|T\|$ -misura piccola.

Deformando leggermente ogni  $U_i$  si ottiene il diffeomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^n$  che spiana quasi tutto  $B$  in piani  $m$ -dimensionali dove  $f_{\#}T$  può essere approssimato in norma  $M$  da un poliedro  $P_1$  (si veda il teorema 1.2.1). Infine si usa il teorema di deformazione (teorema 2.1.1) per assicurarsi che l'errore, oltre ad avere una norma piccola, abbia bordo piccolo. Il teorema 2.1.1 infatti permette di decomporre

$$f_{\#}T - P_1 = P_2 + Q + \partial S;$$

se invece di  $P_1$  si prende  $P = P_1 + P_2 + Q$ , l'errore diventa  $\partial S$  che ha norma piccola e non ha bordo.

- Ci si mette poi nel caso in cui  $\partial T$  non sia un poliedro.

Si approssima  $\partial T$  tramite un diffeomorfismo  $f_1$ :

$$f_{1\#}\partial T = P_1 + \delta \partial S_1,$$

dove  $M(S_1)$  e  $M(\partial S_1)$  sono piccole. Si nota che  $\partial(f_{1\#}T - S_1) = P_1$  cioè  $f_{1\#}T - S_1$  ha bordo poliedrico e si può approssimare tramite

$$f_{2\#}(f_{1\#}T - S_1) = P_2 + \partial S_2,$$

con  $M(\partial S_2)$  piccola. Da cui

$$(f_2 \circ f_1)_{\#}T = P_2 + (f_{2\#}S_1 + \partial S_2),$$

e l'errore e il suo bordo hanno norma piccola.

□



# Capitolo 3

## Regolarità

In questo capitolo verranno mostrati alcuni teoremi di regolarità per correnti rettificabili minimizzanti (si veda la sezione 3.2); per questo sarà necessario introdurre anche il concetto di *mass ratio* e di cono tangente (si veda la sezione 3.1). Questi teoremi permettono di stabilire che le correnti minimizzanti sono superfici regolari; verrà infine dedicata una sezione all'equazione delle superfici minime (sezione 3.3). Anche per i risultati di questo capitolo si rimanda a [1] e [6].

### 3.1 Coni tangenti

Due strumenti base per la teoria della regolarità delle superfici di area minima sono la monotonia della *mass ratio* e l'esistenza di un cono tangente orientato.

**Definizione 3.1.1.** Si generalizzano le definizioni date per insiemi di correnti (si veda la sezione 1.2) per includere superfici non compatte.

$$\mathcal{F}_m^{loc} = \{T \in \mathcal{D}_m : \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^n \text{ esiste } S \in \mathcal{F}_m \text{ con } x \notin \text{supp}(T - S)\}$$

$$I_m^{loc} = \{T \in \mathcal{D}_m : \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^n \text{ esiste } S \in I_m \text{ con } x \notin \text{supp}(T - S)\}$$

$$\mathcal{R}_m^{loc} = \{T \in \mathcal{D}_m : \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^n \text{ esiste } S \in \mathcal{R}_m \text{ con } x \notin \text{supp}(T - S)\}$$

*Osservazione 3.1.1.* Per la topologia piatta locale, un tipico intorno di 0 assume la forma seguente

$$U_\delta = \{T \in \mathcal{F}_m^{loc} : \text{supp}(T - (A + \partial B)) \cap U(0, R) = \emptyset, \\ A \in \mathcal{R}_m, B \in \mathcal{R}_{m+1}, M(A) + M(B) < \delta\},$$

dove  $U(0, R)$  indica l'intorno di raggio  $R$  centrato in 0.

*Osservazione 3.1.2.* Ci sono delle definizioni alternative per  $\mathcal{R}_m^{loc}$ :

$$\mathcal{R}_m^{loc} = \{T \in \mathcal{D}_m : T \llcorner B(0, R) \in \mathcal{R}_m \text{ per ogni } R\} = \\ = \{T \in \mathcal{D}_m : T \llcorner B(a, R) \in \mathcal{R}_m \text{ per ogni } a \text{ e per ogni } R\}.$$

Non ci sono definizioni analoghe per  $I_m^{loc}$ .

**Definizione 3.1.2.** Si dice che  $T \in \mathcal{R}_m^{loc}$  è di area minima se per ogni  $a$  e  $R$  si ha che  $T \llcorner B(a, R)$  è di area minima.

**Definizione 3.1.3** (*mass ratio*). Sia  $T \in \mathcal{R}_m^{loc}$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$

$$\Theta^m(T, a, r) = \frac{M(T \llcorner B(a, r))}{\alpha_m r^m},$$

dove  $\alpha_m$  è la misura della palla unitaria in  $\mathbb{R}^m$ .

**Definizione 3.1.4** (densità di  $T$  in  $a$ ). Nelle notazioni della definizione precedente

$$\Theta^m(T, a) = \lim_{r \rightarrow 0} \Theta^m(T, a, r).$$

**Definizione 3.1.5** (cono tangente di un insieme). Siano  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $E \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\phi$  una misura su  $\mathbb{R}^n$ . Si denota con  $\phi \llcorner E$ , la restrizione di  $\phi$  a  $E$ . Si definiscono le densità m-dimensionali come segue:

$$\Theta^m(\phi, a) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\phi(B(a, r))}{\alpha_m r^m},$$

dove  $B(a, r)$  è la palla di centro  $a$  e raggio  $r$ , mentre  $\alpha_m = \mathcal{L}^m(\overline{B^m(0, 1)})$ , con  $\mathcal{L}^m$  misura di Lebesgue;

$$\Theta^m(E, a) = \Theta^m(\mathcal{H}^m \llcorner E, a) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^m(E \cap B(a, r))}{\alpha_m r^m}.$$

Il cono tangente di  $E$  in  $a$  è dato dai vettori tangenti di  $E$  in  $a$ :

$$\text{Tan}(E, a) = \bigcap_{\epsilon > 0} \overline{\left\{ \frac{x-a}{|x-a|} : x \in E, 0 < |x-a| < \epsilon \right\}}.$$

Quindi nella definizione 3.1.4, a differenza della definizione 3.1.5, si usa come misura  $M$  e invece di un insieme  $E$  si considera una corrente  $T$  localmente rettificabile.

**Teorema 3.1.1** (di monotonia della *mass ratio*). *Sia  $T \in \mathcal{R}_m^{\text{loc}}$  di area minima. Allora per ogni  $r$  tale che  $0 < r < \text{dist}(a, \text{supp}(\partial T))$  si ha  $\Theta(T, a, r) \nearrow$  in  $r$ .*

*In particolare, nel caso in cui la mass ratio sia costante,  $T$  è un cono.*

*Dimostrazione.* Data  $r : 0 < r < \text{dist}(a, \text{supp} \partial T)$ , si consideri  $f(r) := M(T \llcorner B(a, r))$ . Poiché tale funzione è monotona decrescente per quasi ogni  $r$ , ammette derivata. Se nella proposizione 1.4.1 si sceglie come funzione di Lipschitz  $u(x) = |x - a|$  si ottiene

$$M(\partial(T \llcorner B(a, r))) \leq f'(r).$$

Poiché  $T$  è di area minima,  $f(r) = M(T \llcorner B(a, r)) \leq M(C)$ , dove  $C$  è il cono tangente a  $\partial(T \llcorner B(a, r))$  in  $a$ . Si può dimostrare che  $M(C) = \frac{r}{m} M(\partial(T \llcorner B(a, r)))$ .

Quindi

$$f(r) = M(T \llcorner B(a, r)) \leq M(C) = \frac{r}{m} M(\partial(T \llcorner B(a, r))) \leq \frac{r}{m} f'(r).$$

Dunque

$$\frac{r}{m} f'(r) - f(r) \geq 0;$$

ricordando la definizione data per  $f(r)$  e la definizione di *mass ratio* si ottiene la seguente catena di uguaglianze:

$$\frac{d}{dr} \alpha_m \Theta(T, a, r) = \frac{d}{dr} (r^{-m} f(r)) = r^{-m} f'(r) - m r^{-m-1} f(r) = \frac{m}{r^{m+1}} (r f'(r) - f(r));$$

in definitiva  $\frac{d}{dr} \alpha_m \Theta(T, a, r) \geq 0$ , da cui  $\Theta(T, a, r) \nearrow$ . □

Seguono due corollari del teorema di monotonia.

**Corollario 3.1.1.** *Sia  $T \in \mathcal{R}_m^{loc}$  di area minima. Allora  $\Theta^m(T, a)$  esiste per ogni  $a \in \text{supp}T - \text{supp}\partial T$ .*

**Corollario 3.1.2.** *Sia  $T \in \mathcal{R}_m^{loc}$  di area minima e  $a \in \text{supp}T$ . Allora per ogni  $r$  tale che  $0 < r < \text{dist}(a, \text{supp}\partial T)$  si ha*

$$M(T \llcorner B(a, r)) \geq \Theta^m(T, a) \cdot \alpha_m r^m.$$

*Inoltre, se  $T$  è una varietà immersa con bordo 2-dimensionale, allora*

$$M(T \llcorner B(a, r)) \geq \pi r^2.$$

Di seguito viene enunciato e dimostrato un altro corollario del teorema di monotonia.

**Corollario 3.1.3.** *Sia  $T \in \mathcal{R}_m \mathbb{R}^n$  di area minima. Allora per ogni  $a \in \text{supp}T - \text{supp}\partial T$  si ha  $\Theta^m(T, a) \geq 1$ .*

*Dimostrazione.* Dato un insieme rettificabile  $E$   $m$ -dimensionale in  $\mathbb{R}^n$  si può provare che  $\Theta^m(E, a) = 1$  per quasi ogni  $a \in E$ ; quindi esiste una successione di punti  $a_j$  tali che tendono ad  $a$  con  $\Theta^m(T, a_j) \geq 1$ . Si considera  $r$  tale che  $0 < r < \text{dist}(a, \text{supp}\partial T)$  e si definisce  $r_j := \text{dist}(a, a_j)$ , da cui

$$M(T \llcorner B(a, r)) \geq M(T \llcorner B(a_j, r - r_j)) \geq \alpha_m (r - r_j)^m,$$

dove la seconda disuguaglianza è dovuta alla monotonia. Passando al limite

$$M(T \llcorner B(a, r)) \geq \alpha_m r^m$$

e quindi  $\Theta(T, a) \geq 1$ . □

**Definizione 3.1.6** (cono tangente ad una corrente). Una catena  $C$  piatta integrale è un cono se è invariante per contrazione o dilatazione cioè  $\mu_{R_\sharp} C = C$  (si veda la definizione 1.2.5). Se  $T \in F_m^{loc}$ , allora  $C$  è un cono orientato tangente a  $T$  in  $0$  se  $\exists r_j \searrow 0$  tale che  $\mu_{r_j^{-1}\sharp} T \rightarrow C$  nella topologia piatta.

**Teorema 3.1.2** (esistenza cono tangente). *Siano  $T \in \mathcal{R}_m$  di area minima e  $0 \in \text{supp}T - \text{supp}\partial T$ . Allora  $T$  ammette cono tangente orientato  $C$  in  $0$ .*

*Dimostrazione.* Si considera la sequenza  $T_j = \mu_{r_j^{-1}} \# T$  (espansioni omotetiche di  $T$  con  $r_j \rightarrow 0$ ). Prendendo  $r_j \leq r_0$  e  $R > 0$  si ha

$$M(T_j \llcorner B(0, R)) = M(T \llcorner B(0, Rr_j)) r_j^{-m} \leq$$

sfruttando la monotonia

$$\leq M(T \llcorner B(0, Rr_0)) r_0^{-m} =: c.$$

Inoltre per  $j$  sufficientemente grande  $T_j$  non ha bordo in  $B(0, R)$ ; quindi per compattezza si può assumere che  $T_j$  converga a una corrente  $C$  localmente integrale (si veda la definizione 3.1.1); dal teorema 3.1.1 si può concludere che  $C$  è un cono.  $\square$

**Teorema 3.1.3.** *Siano  $T \in \mathcal{R}_m$  di area minima e  $0 \in \text{supp}T - \text{supp}\partial T$ . Sia  $C$  cono orientato tangente a  $T$  in  $0$ . Allora  $\Theta^m(C, 0) = \Theta^m(T, 0)$ .*

*Dimostrazione.* A meno di sostituire  $r_j$  con sue sottosuccessioni, si ha

$$\mu_{r_j^{-1}} \# T \rightarrow C;$$

per ogni  $j$ , vengono scelti  $A_j$  e  $B_j$  tali che

$$\text{supp}(\mu_{r_j^{-1}} \# T) - (A_j + \partial B_j) \cap U(0, 2) = \emptyset$$

e  $M(A_j) + M(B_j) \leq \frac{1}{j^2}$ . Si veda la proposizione 1.4.2 con  $u(x) = |x - a|$ ; si scelga  $1 < s_j < 1 + \frac{1}{j}$  tale che  $M \llcorner B_j, u, s_j + > \leq jM(B_j) \leq \frac{1}{j}$ . Si osserva che

$$\mu_{r_j^{-1}} \# T \llcorner B(0, s_j) = C \llcorner B(0, s_j) + A_j \llcorner B(0, s_j) + \partial(B_j \llcorner B(0, s_j)) - \langle B_j, u, s_j + \rangle.$$

Da cui  $\mu_{r_j^{-1}} \# T \xrightarrow{\mathcal{F}} C \llcorner B(0, 1)$ ; per la semicontinuità inferiore della massa e per la definizione di densità (definizione 3.1.4) si ha

$$M(C \llcorner B(0, 1)) \leq \liminf M(\mu_{r_j^{-1}} \# T \llcorner B(0, s_j))$$

$$\Theta^m(T, a) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{M(T \llcorner B(a, r))}{\alpha_m r^m}$$

quindi  $\Theta(C, 0) \leq \Theta(T, 0)$ . Inoltre

$$\begin{cases} \mu_{r_j^{-1}} T \llcorner B(0, s_j) \text{ è di area minima} \\ \partial(\mu_{r_j^{-1}} T \llcorner B(0, s_j)) = \partial(C \llcorner B(0, s_j) + A_j \llcorner B(0, s_j) - \langle B_j, u, s_j + \rangle) \end{cases}$$

allora  $M(\mu_{r_j^{-1}} T \llcorner B(0, s_j)) \leq M(C \llcorner B(0, s_j)) + \frac{2}{j^2}$ , da cui infine  $\Theta(T, 0) \leq \Theta(C, 0)$ .  $\square$

## 3.2 Risultati di regolarità

**Teorema 3.2.1.** *Sia  $T$  corrente rettificabile di area minima in  $\mathcal{R}_2(\mathbb{R}^2)$ . Allora  $\text{supp}T - \text{supp}\partial T$  è unione di segmenti disgiunti.*

*Dimostrazione.* Basta mostrare che  $\forall a \in \text{supp}T - \text{supp}\partial T \exists U(a, r)$  tale che  $T \cap U(a, r)$  è un segmento.

**caso 1** Si considera il caso in cui  $\partial T$  consiste di due punti (con orientazione opposta). Allora si dimostra che  $T$  è il segmento orientato tra questi due punti.

Si assume che  $\partial T = \delta_{(1,0)} - \delta_{(0,0)}$ . Si chiami  $T_0$  il segmento orientato tra i due punti:  $T_0 = [(0,0), (1,0)] = \mathcal{H}^1 \llcorner \{0 \leq x \leq 1, y = 0\} \wedge \vec{i}$  (si veda la notazione usata per le correnti rappresentabili per integrazione - definizione 1.2.6).

- Si mostra che  $T_0$  minimizza la distanza rispetto alle correnti normali  $N \in N_1 \mathbb{R}^2$  (si veda la definizione 1.2.8) aventi lo stesso bordo  $\partial T_0$ . Infatti

$$M(N) \geq N(dx) = \partial N(x) = 1 = M(T_0).$$

- Supponendo  $M(N) = 1$ , si prova che  $\text{supp}N \subset \{y = 0\}$ . Per assurdo, se non fosse così, si potrebbe assumere l'esistenza di un  $\epsilon > 0$  tale che esiste una funzione  $f \in C^\infty$ ,  $0 \leq f(y) \leq 1$  tale

che  $f(y) = 1$  per  $|y| < \epsilon$  e  $M(N \llcorner f) < 1$ . Inoltre poiché  $\vec{N} = \vec{i}$   $\|N\|$ -quasi ovunque e  $df(i) = 0$  si ha

$$\partial(N \llcorner f) = (\partial N) \llcorner f - N \llcorner df = \partial N - 0 = \partial N = \partial T_0,$$

dove l'ultima uguaglianza è dovuta al fatto che le correnti normali  $N$  considerate hanno tutte lo stesso bordo,  $\partial T_0$ . Dunque poiché per quanto mostrato al punto precedente  $T_0$  è di area minima tra le normali aventi lo stesso bordo  $M(N \llcorner f) \geq M(T_0) = 1$ , ma questo è assurdo, per quanto ipotizzato in precedenza.

- Si mostra infine l'unicità di  $T_0$ .

Confrontando il fatto che  $\partial(N - T_0) = 0$  con il teorema 1.3.3, si ha che  $N - T_0$  debba essere un multiplo di  $E^1 = \mathcal{H}^1 \wedge \vec{i}$ ; questo, unito al fatto che  $N - T_0$  debba avere supporto compatto, dice che  $N - T_0 = 0$ .

**caso 2** Nel caso in cui  $\Theta^1(T, a) = 1$ , allora si dimostra che  $\text{supp}T$  è un segmento per un qualche intorno  $U(a, r)$  di  $a$ .

Per quasi ogni  $s$  compreso tra 0 e  $\text{dist}(a, \text{supp}\partial T)$ ,  $\partial(T \llcorner B(a, s))$  è una corrente rettificabile 0-dimensionale e un bordo, quindi consiste di un numero pari di punti. Non può consistere di 0 punti, altrimenti si avrebbe un oggetto con lo stesso bordo e massa inferiore a  $T \llcorner B(a, s)$ ; perciò  $M(\partial(T \llcorner B(a, s))) \geq 2$ . Per il teorema 1.4.2 e la definizione 3.1.4

$$s^{-1} \int_a^b M(\partial(T \llcorner B(a, r))) dr \leq s^{-1} M(T \llcorner B(a, s)) \xrightarrow{s \rightarrow 0} \alpha_1 \Theta^1(T, a) = 2.$$

Quindi esiste  $r : 0 < r \ll 1$  tale che  $M(\partial(T \llcorner B(a, r))) = 2$  e  $\partial(T \llcorner B(a, r))$  consiste di due punti. Si sfrutta allora il caso 1.

**caso 3** Si considera il seguente lemma:

**Lemma 3.2.1.** *Se  $R \in \mathcal{R}_{n-1} \mathbb{R}^n$  con  $\partial R = 0$ , allora esiste una successione  $(M_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  di insiemi annidati (cioè  $M_i \subset M_{i-1}$ )  $\mathcal{L}^n$ -misurabili tali che*

$$R = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \partial(E^n \llcorner M_i)$$

$$M(R) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} M(\partial(E^n \llcorner M_i)),$$

dove  $E^n = \mathcal{L}^n \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n$  (corrente in  $\mathbb{R}^n$ , unitaria,  $n$ -dimensionale, a coefficienti costanti).

*Idea della prova.* Per la disuguaglianza isoperimetrica (si veda la proposizione 2.1.1), da  $\partial R = 0$  si ha che  $R$  è bordo di una  $T \in I_n \mathbb{R}^n$  della forma  $T = E^n \llcorner f$  con  $f$  funzione misurabile a valori interi con  $M(T) = \int |f|$ . Scegliendo  $M_i := \{x : f(x) \geq i\}$  si trovano degli insiemi annidati  $\mathcal{L}^n$ -misurabili che soddisfano certamente la prima uguaglianza richiesta; vale anche la seconda, perché non ci sono cancellazioni nella somma (l'idea è che, poiché gli  $M_i$  sono annidati, i loro bordi se sovrapposti hanno la stessa orientazione, quindi si aggiunge massa nella somma).  $\square$

Questo lemma fornisce un'idea della dimostrazione del fatto che  $\forall a \in \text{supp}T - \text{supp}\partial T$  si ha che  $\text{supp}T$  è di area minima in un intorno di  $a$ . Sia  $0 < \rho < \text{dist}(a, \text{supp}\partial T)$  tale che  $M(\partial(T \llcorner B(a, \rho))) < +\infty$ . Sia  $\Xi$  una corrente rettificabile tale che  $\text{supp}\Xi \subset S(a, \rho)$  (dove  $S(a, \rho)$  è la sfera di raggio  $\rho$  e centro  $a$ ) e tale che  $\partial\Xi = \partial(T \llcorner B(a, \rho))$ . Si applica allora il lemma 3.2.1 a  $T \llcorner B(a, \rho) - \Xi$  (infatti ha bordo 0) e si trova la successione  $(M_i)$ . Allora

$$T \llcorner U(a, \rho) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} T_i \quad \text{e} \quad M(T \llcorner U(a, \rho)) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} M(T_i),$$

dove  $T_i = \partial(E^2 \llcorner M_i) \llcorner U(a, \rho)$ ; quindi ogni  $T_i$  ha massa minima.

Poiché  $M(T \llcorner U(a, \rho)) < +\infty$ , dalla monotonia (si vedano i corollari 3.1.2 e 3.1.3)  $\text{supp}T_i$  interseca  $U(a, \frac{\rho}{2})$  per un numero finito di  $i$ .

Per la forma con cui si scrive  $T_i$  si può dimostrare (si veda il teorema 5.4.3 del [6]) che il cono orientato tangente a  $T_i$  in un punto qualsiasi di  $\text{supp}T_i \cap U(a, \rho)$  è della forma  $C = \partial(E^2 \llcorner N)$ . Analogamente se  $b \in \text{supp}C - \{0\}$ , un cono orientato tangente a  $C$  in  $b$  è della forma  $D = \partial(E^2 \llcorner P)$ . Poiché  $C$  è un cono,  $D$  è invariante per traslazioni lungo

la direzione  $b$ , cioè  $D$  è un cilindro.

Si può dimostrare (si veda il teorema 4.3.15 del [6]) che un cilindro orientato 1-dimensionale è una linea orientata con molteplicità. Per la forma con cui si scrive  $D$ , tale molteplicità deve essere 1. Quindi

$$\forall b \in \text{supp}C - \{0\} \quad \Theta^1(C, b) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{M(C \llcorner B(b, r))}{\alpha_1 r^1} = \Theta^1(D, 0) = 1.$$

Per il caso 2,  $C$  consiste di raggi che partono da 0. Per la forma che assume,  $C$  non ha bordo, quindi i raggi con orientazione esterna sono pari in numero a quelli con orientazione interna. Poiché  $C$  è di area minima, una coppia di raggi opposti forma un angolo di  $180^\circ$ ; quindi  $C$  è una linea orientata con molteplicità che deve essere 1, per via della forma con cui si scrive  $C$ . Quindi

$$\Theta^1(T_i, a) = \Theta^1(C, 0) = 1.$$

Per il caso 2, esiste  $r_i \in (0, \frac{\rho}{2})$  tale che  $T_i \llcorner U(0, r_i) = (\partial(E^2 \llcorner M_i)) \llcorner U(0, r_i)$  è una linea orientata. Poiché (si veda quanto già detto all'interno di questa dimostrazione) si considera solo un numero finito di  $i$ , ha senso considerare  $r := \min r_i$ ; per via dell'annidamento degli  $M_i$ , le  $T_i \llcorner U(0, r)$  non nulle coincidono.

Quindi  $T \llcorner U(0, r)$  è una linea retta con molteplicità.

□

Verrà ora dimostrato nel teorema 3.2.2 che le ipersuperfici di area minima sono regolari. Per questo risultato sono necessari tre lemmi; dal primo (cioè dal lemma 3.2.2) in particolare segue un principio del massimo per ipersuperfici di area minima (si veda l'osservazione 3.2.1).

**Lemma 3.2.2.** *Sia  $1 \leq m \leq n - 1$  e sia  $T \in \mathcal{R}_m^{\text{loc}} \mathbb{R}^n$  di area minima. Sia  $a \in \text{supp}T - \text{supp}\partial T$  con  $\Theta^m(T, a) = 1$ . Si suppone che un cono orientato tangente a  $T$  in  $a$  sia un piano  $m$ -dimensionale orientato. Allora  $\text{supp}T$  è una varietà liscia in  $a$ .*

*Osservazione 3.2.1* (principio del massimo). Siano  $S_1, S_2 \in \mathcal{R}_{n-1}(\mathbb{R}^n)$  (con  $n \geq 2$ ) di area minima. Siano poi  $M_1 = \text{supp}S_1, M_2 = \text{supp}S_2$ ; si suppone che i due supporti si intersechino in un punto, ovvero  $M_1 \cap M_2 = a$ . Inoltre si suppone che in un intorno di  $a$   $M_1$  e  $M_2$  siano sottovarietà  $C^\infty$  e che  $M_2$  giaccia da un lato di  $M_1$ . Allora in un intorno di  $a$   $M_1 = M_2$ .

*Idea della prova.* In  $a$ ,  $M_1$  e  $M_2$  si possono pensare localmente come grafici di funzioni  $u_1$  e  $u_2$  rispettivamente, che soddisfano l'equazione delle superfici minime (si veda l'osservazione 3.3.1) della forma

$$\text{div} \frac{\nabla u_i}{\sqrt{1 + |\nabla u_i|^2}} = 0, \quad \text{con } u_i : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R} \quad i = 1, 2$$

Per un principio standard del massimo si ha  $u_1 = u_2$ . □

**Lemma 3.2.3.** *Sia  $3 \leq n \leq 7$  e sia  $B$  una sottovarietà liscia orientata compatta  $(n-2)$ -dimensionale della sfera unitaria  $(n-1)$ -dimensionale tale che il cono su  $B$  sia di area minima. Allora  $B$  è una sfera grande.*

**Lemma 3.2.4.** *Sia  $1 \leq m \leq n-1$  e sia  $Q \in \mathcal{R}_m^{\text{loc}}\mathbb{R}^n$ . Allora  $Q$  è di area minima se e solo se  $E^1 \times Q$  è di area minima.*

**Teorema 3.2.2** (regolarità per ipersuperfici di area minima). *Sia  $T$  una corrente rettificabile di area minima in  $\mathcal{R}_{n-1}(\mathbb{R}^n)$  per  $2 \leq n \leq 7$ . Allora  $\text{supp}T - \text{supp}\partial T$  è una varietà immersa  $C^\infty$ .*

*Dimostrazione.* Si prova per induzione. Il caso  $n = 2$  viene dal teorema 3.2.1.

**parte 1** Si prova che se  $S \in \mathcal{R}_{n-1}(\mathbb{R}^n)$  di area minima con  $S = (\partial(E^n \llcorner M)) \llcorner V$ , dove  $M$  insieme misurabile e  $V$  insieme aperto, allora  $\text{supp}S \cap V$  è una varietà immersa  $C^\infty$ .

Si prenda  $a \in \text{supp}S \cap V$  e  $C$  cono orientato tangente a  $S$  in  $a$ . Si può provare (per un risultato usato anche nel caso 3 della dimostrazione del teorema 3.2.1 -si veda il teorema 5.4.3 del [6]) che tale cono debba essere della forma  $C = \partial(E^n \llcorner N)$ . Analogamente dato  $b \in \text{supp}C - \{0\}$  un cono orientato tangente a  $C$  in  $b$  è della forma  $D = \partial(E^n \llcorner P)$ . Poiché

$C$  è un cono orientato,  $D$  deve essere un 'cilindro orientato' (cioè  $D$  è invariante per traslazioni lungo la direzione  $b$ ) e si dimostra (si veda il teorema 4.3.15 del [6]) che debba essere della forma  $D = E^1 \times Q$ , con  $Q \in \mathcal{R}_{n-2}\mathbb{R}^{n-1}$ .

Poiché  $S$  è di area minima, lo sono anche  $C$  e  $D$ . Sfruttando il lemma 3.2.4 e l'induzione,  $Q$  è una varietà immersa liscia orientata, eventualmente con molteplicità; allora lo è anche  $D$ , con molteplicità 1 data la forma che assume.

Quindi ogni cono tangente a  $D$  in  $0$  è un piano  $(n-1)$ -dimensionale orientato; in particolare lo è  $D$ . Per il lemma 3.2.2  $\text{supp}C - \{0\}$  è una varietà immersa liscia. Quindi per il lemma 3.2.3  $\text{supp}C$  interseca la sfera unitaria in una sfera grande. Quindi  $C$  è un piano orientato  $(n-1)$ -dimensionale, con molteplicità 1 per via della forma che assume.

Riapplicando il lemma 3.2.2 si trova che  $\text{supp}S$  è una varietà liscia immersa in  $a$ .

**parte 2** Ora si può completare la prova.

Sia  $a \in \text{supp}T - \text{supp}\partial T$  e sia  $0 < \rho \ll 1$  tale che  $\partial(T \llcorner U(a, \rho))$  è rettificabile. Sia  $\Xi$  una corrente rettificabile con  $\text{supp}\Xi \subset S(a, \rho)$ , dove  $S(a, \rho)$  è una sfera, e  $\partial\Xi = \partial(T \llcorner U(a, \rho))$ . Per il lemma 3.2.1, esiste una successione di insiemi annidati  $M_i$  tali che

$$T \llcorner U(a, \rho) = \sum S_i \quad \text{e} \quad M(T \llcorner U(a, \rho)) = \sum M(S_i),$$

con  $S_i = (\partial(E^n \llcorner M_i)) \llcorner U(a, \rho)$ . Quindi ogni  $S_i$  è di area minima.

Poiché  $M(T \llcorner U(a, \rho)) < +\infty$ , dalla monotonia (si vedano il teorema di monotonia 3.1.1 e il suo corollario 3.1.3) si ha che  $\text{supp}S_i$  interseca  $U(a, \frac{\rho}{2})$  solo per una quantità finita di  $i$ . Per tali  $i$ , per la parte 1,  $\text{supp}S_i$  è una varietà immersa liscia in  $a$ . Poiché gli insiemi  $M_i$  sono annidati, prese due di tali varietà, una si trova da una sola parte dell'altra. Quindi per il principio del massimo (si veda l'osservazione 3.2.1)  $\text{supp}T$  è una varietà immersa liscia in  $a$ .

□

*Nota 3.2.1.* Questo teorema di regolarità non vale per  $n \geq 8$ .

### 3.3 Equazione delle superfici minime

In questa sezione viene mostrato che una superficie minima regolare soddisfa un'equazione differenziale non lineare del secondo ordine.

**Proposizione 3.3.1** (equazione delle superfici minime). *Sia  $f \in C^2(D, \mathbb{R})$  con  $D$  dominio piano, tale che il grafico di  $f$  sia di area minima. Allora  $f$  soddisfa l'equazione delle superfici minime*

$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0. \quad (3.1)$$

*Vale anche il viceversa, cioè se  $f$  soddisfa l'equazione delle superfici minime su un dominio convesso, allora il suo grafico è di area minima.*

*Dimostrazione.* Calcoliamo l'equazione di Eulero-Lagrange del funzionale area.

- Se il grafico di  $f$  è di area minima, allora  $f$  soddisfa l'equazione delle superfici minime.

Infatti se  $f$  è di area minima, significa che minimizza il funzionale

$$A(f) = \int_D (1 + f_x^2 + f_y^2)^{\frac{1}{2}} dx dy;$$

la variazione prima di  $A$  deve essere nulla, quindi

$$0 = \delta A = \int_D \frac{1}{2} (1 + f_x^2 + f_y^2)^{-\frac{1}{2}} (2f_x \delta f_x + 2f_y \delta f_y) dx dy.$$

Integrando per parti si ottiene un'equazione del tipo  $\int_D G(f) \delta f = 0$ , da cui  $G(f) = 0$  dove

$$\begin{aligned} G(f) &= -\frac{\partial}{\partial x} [(1 + f_x^2 + f_y^2)^{-\frac{1}{2}} f_x] - \frac{\partial}{\partial y} [(1 + f_x^2 + f_y^2)^{-\frac{1}{2}} f_y] = \\ &= -(1 + f_x^2 + f_y^2)^{-\frac{3}{2}} [(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy}], \end{aligned}$$

ottenendo proprio

$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0.$$

- Si dimostra che il grafico su un dominio convesso di una soluzione dell'equazione delle superfici minime è di area minima. Si userà una calibrazione (si veda la proposizione 3.3.2), ovvero una forma differenziale chiusa con massimo 1, come funzione sull'insieme dei k-piani unitari; tramite una calibrazione, si può parlare di superficie calibrata se ogni piano tangente orientato è punto di massimo per la calibrazione; si troverà che una superficie calibrata è automaticamente di area minima.

Si considera la 2-forma  $\varphi$  su  $D \times \mathbb{R}$

$$\varphi = \frac{-f_x dydz - f_y dzdx + dx dy}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}};$$

si ha che  $\varphi(\xi) \leq 1$  per ogni  $\xi$  2-vettore unitario, dove l'uguaglianza vale se e solo se  $\xi$  è tangente al grafico di  $f$  in un punto fissato di  $D \times \mathbb{R}$ ; dall'equazione delle superfici minime si ricava  $d\varphi = 0$ . Chiamando  $S$  il grafico di  $f$ , si prende una corrente  $T$  con  $\partial T = \partial S$  (cioè  $S - T = \partial X$  con  $X$  rettificabile). Poiché  $D$  è convesso si può assumere  $\text{supp}T \subset D \times \mathbb{R} = \text{dominio di } \varphi$  (al più si proietta  $T$  su  $D \times \mathbb{R}$ , senza aumentare l'area di  $T$ ). Dunque

$$\text{area}S = \int_S \varphi = \int_T \varphi \leq \text{area}T,$$

dove la prima uguaglianza è dovuta al fatto che  $\varphi(\xi) = 1$  se e solo se  $\xi$  è tangente a  $S$ , la seconda uguaglianza si ricava da  $\int_{S-T} \varphi = \int_{\partial X} \varphi = \int_X d\varphi = 0$ , infine l'ultima disuguaglianza deriva da  $\varphi(\xi) \leq 1$ . È dimostrato così anche questo secondo punto.

□

*Osservazione 3.3.1.* Per una funzione  $C^2$   $f : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ , l'equazione delle superfici minime assume la forma

$$\text{div} \frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} = 0,$$

che, se  $n = 2$ , è equivalente a (3.1).

**Proposizione 3.3.2** (calibrazione). *Sia  $\varphi$  una forma differenziale chiusa di comassa unitaria in  $\mathbb{R}^n$  o una qualsiasi varietà riemanniana  $M$  di classe  $C^\infty$ . Sia  $S$  una corrente integrale tale che  $\langle \vec{S}, \varphi \rangle = 1$  per quasi ogni punto di  $S$ . In  $\mathbb{R}^n$ ,  $S$  è di area minima per il suo bordo. In ogni  $M$ ,  $S$  è di area minima nella sua classe di omologia (con o senza bordo).*

# Capitolo 4

## Prova della congettura della double bubble

Questo capitolo culminerà con la dimostrazione del teorema 4.9.1 che assicura l'esistenza e l'unicità della soluzione per il problema seguente: fissati due volumi in  $\mathbb{R}^3$  qual è la superficie minima che permette di racchiuderli? Per arrivare a questo risultato sarà necessario studiare la struttura della double bubble di area minima.

La prova che verrà ora presentata segue dapprima [1] (si veda la sezione 4.1), poi il paper [2] per il teorema di simmetria, quello di concavità e quello di struttura (si vedano le sezioni 4.2, 4.3 e 4.4). Poi si concluderà con la prova della congettura della double bubble seguendo la recente dimostrazione dell'articolo [4] (si vedano le sezioni dalla 4.5 alla 4.9).

**Definizione 4.0.1** (double bubble). Una double bubble in  $\mathbb{R}^n$  è l'unione di bordi topologici di due regioni distinte di volume fissato.

**Definizione 4.0.2** (double bubble  $C^\infty$ ). Una double bubble  $\Sigma$  è  $C^\infty$  se è una superficie regolare a tratti, costituita da tre ipersuperfici orientate e  $C^\infty$ , date da tre superfici compatte  $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2$  con un bordo  $(n-1)$ -dimensionale comune  $C$  tale che  $\Sigma_1 + \Sigma_0$  (rispettivamente  $\Sigma_2 - \Sigma_0$ ) racchiude la regione  $R_1$  (rispettivamente  $R_2$ ) di volume fissato  $v_1$  (rispettivamente  $v_2$ ).

**Definizione 4.0.3** (standard double bubble). In  $\mathbb{R}^n$  una standard double bubble consiste di due superfici sferiche e una superficie di separazione (che è sferica o piana) che si incontrano in maniera equiangolare lungo una sfera  $(n - 1)$ -dimensionale.

## 4.1 Esistenza di soap bubble clusters

**Definizione 4.1.1** (cluster). Un cluster consiste di  $R_1, R_2 \dots R_m$  regioni distinte (correnti localmente integrali  $n$ -dimensionali di molteplicità 1) con volume rispettivamente  $v_1, v_2 \dots v_m$ . Si indicherà  $R_0$  il complementare del cluster rispetto a  $\mathbb{R}^n$ ; la superficie del cluster sarà

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^m M(\partial R_i).$$

Le regioni  $(R_i)$  non sono necessariamente connesse.

Per provare l'esistenza di soap bubble clusters (ovvero cluster di area minima) sono necessari due lemmi (il lemma 4.1.1 e il lemma 4.1.2). Si richiama dapprima il teorema 4.1.1 della divergenza per correnti.

**Teorema 4.1.1** (di Gauss, Green, De Giorgi, Federer). *Sia  $A$  un sottoinsieme  $\mathcal{L}^n$ -misurabile di  $\mathbb{R}^n$  tale che  $T = \partial(E^n \llcorner A)$  sia rappresentabile per integrazione (questo succede ad esempio se il bordo topologico di  $A$  ha  $\mathcal{H}^{n-1}$ -misura finita). Allora  $\|T\| = \mathcal{H}^{n-1} \llcorner [\text{dominio di } n(A, x)]$  e per ogni campo vettoriale di Lipschitz  $\xi(x)$  a supporto compatto*

$$\int \xi(x) \cdot n(A, x) \, d\mathcal{H}^{n-1}x = \int_A \text{div} \xi(x) \, d\mathcal{L}^n x,$$

dove dato  $b \in A \subset \mathbb{R}^n$   $n = n(A, b)$  normale esterna ad  $A$  in  $b$  dove  $n$  è un vettore unitario tale che

$$\Theta(\{x : (x - b) \cdot n > 0\} \cap A, b) = 0$$

$$\Theta(\{x : (x - b) \cdot n < 0\} - A, b) = 0.$$

**Lemma 4.1.1.** *Dato un cluster di area  $A$  e volume  $v$ , esiste una costante  $C > 0$  tale che si possa ottenere una variazione di volume arbitrariamente piccola mediante bolle e una variazione di area controllata dalla relazione*

$$|\Delta A| \leq C|\Delta v|.$$

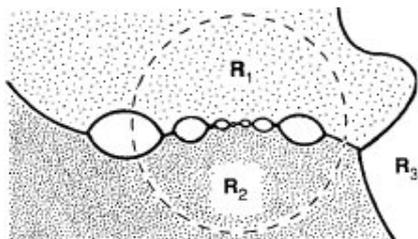


Figura 4.1: Si veda [1], p.127

*Idea della prova.* Per il teorema 4.1.1, per quasi ogni punto del bordo  $\partial R_i$ ,  $R_i$  ha una misura normale esterna (nel senso della teoria geometrica della misura) e il suo cono tangente approssimato è un semispazio; scegliendo ad esempio  $i = 1$ , in quasi ogni punto di  $\partial R_1$  questo semispazio è cono tangente approssimato anche per un altro  $R_i$ , ad esempio  $R_2$ . Si può modificare lievemente il volume tra  $R_1$  e  $R_2$  al costo di una variazione in area pari a  $|\Delta A| \leq C_{12}|\Delta v|$ ; si può ripetere questo ragionamento per tutte le coppie di regioni confinanti, ottenendo un aggiustamento di volume arbitrariamente piccolo.  $\square$

**Lemma 4.1.2.** *Un cluster di area minima è limitato in  $\mathbb{R}^n$ .*

*Dimostrazione.* Nel seguito si userà la notazione  $C_i$  con  $i \in \mathbb{N}$  per costanti che dipendono dalla dimensione dello spazio.

Sia  $v(r)$  il volume del cluster esterno alla palla  $B(0, r)$ . Sia  $A(r)$  l'area del cluster esterna a  $B(0, r)$ . Ragionando sulle sezioni circolari

$$\langle R_i, u, r+ \rangle \quad \text{con } u(x) = |x|,$$

si ha

$$M \langle R_i, u, r+ \rangle \leq |v'(r)| \quad (\text{si veda la proposizione 1.4.1}). \quad (4.1)$$

Si ha  $v(r) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0$ , poiché il cluster ha volume finito; ma potrebbe essere un insieme illimitato. Si stima ora l'area  $A(r)$ :

$$\begin{aligned} A(r) &= \text{area del cluster esterna a } B(0, r) \leq \\ &\leq \text{area di tutto il cluster di area minima} \leq \\ &\leq \text{area di tutto un generico altro cluster} \leq Cv(r) + |v'(r)|, \end{aligned}$$

dove l'ultimo termine ha due addendi: con il primo si controlla la parte all'interno della sfera  $B(0, r)$  (per il lemma 4.1.1) e con il secondo si controlla l'area all'esterno della sfera  $B(0, r)$  (per la disuguaglianza (4.1)). Quindi  $A(r) \leq Cv(r) + |v'(r)|$ .

Dalla disuguaglianza isoperimetrica (si veda la proposizione 2.1.1 con  $m = n - 1$ ) si ha

$$(v(r))^{\frac{n-1}{n}} \leq \frac{1}{C_2} \cdot A(r);$$

quindi  $C_2(v(r))^{\frac{n-1}{n}} \leq A(r)$ . Quindi

$$\begin{aligned} A(r) \leq C_1(v(r)) + |v'(r)| &\Rightarrow |v'(r)| \geq -C_1 \cdot v(r) + A(r) \\ A(r) \geq C_2(v(r))^{\frac{n-1}{n}} &\Rightarrow 0 \geq -A(r) + C_2(v(r))^{\frac{n-1}{n}}. \end{aligned}$$

Sommando termine a termine,

$$|v'(r)| \geq -C_1v(r) + C_2(v(r))^{\frac{n-1}{n}} \geq \frac{C_2}{2}(v(r))^{\frac{n-1}{n}}, \quad (4.2)$$

dove l'ultima disuguaglianza vale se e solo se  $-C_1v(r) \geq -\frac{C_2}{2}(v(r))^{\frac{n-1}{n}} \Leftrightarrow \frac{C_2}{2C_1} \geq v(r)^{1-(1-\frac{1}{n})} \Leftrightarrow v(r)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{C_2}{2C_1}$ ; ma dato che  $v(r) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0$ , almeno da un certo  $r$  in poi si ha  $v(r) \leq (\frac{C_2}{2C_1})^n$ . Quindi la catena di disuguaglianze (4.2) vale per  $r$  abbastanza grande.

Poiché  $v(r)$  decresce all'aumentare di  $r$ ,  $v'(r) \leq 0$ , perciò dalle disuguaglianze (4.2) si trova

$$-v'(r) \geq \frac{C_2}{2}(v(r))^{\frac{n-1}{n}} \Rightarrow v'(r) \cdot (v(r))^{-\frac{n-1}{n}} \leq -\frac{C_2}{2}.$$

Se per assurdo  $v(r) \neq 0 \forall r$ , allora  $n(v(r)^{\frac{1}{n}})' = v(r)^{-\frac{n-1}{n}} v'(r) \leq -\frac{C_2}{2} < 0$  per  $r$  abbastanza grande. Questo implica che  $(v(r)^{\frac{1}{n}})' < 0$  per  $r$  sufficientemente grande, il che è assurdo.  $\square$

**Teorema 4.1.2** (esistenza di soap bubble clusters). *In  $\mathbb{R}^n$  dati i volumi  $v_1, v_2, \dots, v_m > 0$  esiste un cluster di area minima di regioni limitate  $R_i$  ciascuna con volume  $v_i$ .*

*Dimostrazione.* • In questo punto si andrà a dimostrare che è possibile preservare qualche frazione del volume.

Sia  $(\mathcal{C}_\alpha)$  una successione minimizzante di clusters con i volumi  $v_j$  dati. Ora si mostrerà che esistono due costanti  $S, \delta > 0$  tali che se  $\mathbb{R}^n$  è partizionato in cubi  $K_j$  di lato  $S$ , allora per qualche  $j$  si ha

$$vol(R_{1\alpha} \perp K_j) \geq \delta \cdot v_1^n, \quad (4.3)$$

dove  $R_{1\alpha}$  è la prima regione del cluster  $\alpha$ -esimo della successione minimizzante.

Infatti si può scegliere  $S$  grande abbastanza affinché, se  $vol(R_{1\alpha} \perp K_j) \leq v_1^n$ , allora

$$area(\partial R_{1\alpha} \perp K_j) \geq \gamma (vol(R_{1\alpha} \perp K_j))^{\frac{n-1}{n}},$$

applicando la disuguaglianza isoperimetrica (si veda la proposizione 2.1.1) a  $R_{1\alpha} \perp K_j$ . Da questa disuguaglianza si ha che

$$area(\partial R_{1\alpha} \perp K_j) \geq \gamma (vol(R_{1\alpha} \perp K_j))^{\frac{n-1}{n}} = \gamma \frac{vol(R_{1\alpha} \perp K_j)}{(vol(R_{1\alpha} \perp K_j))^{\frac{1}{n}}};$$

inoltre vale che

$$\frac{1}{(vol(R_{1\alpha} \perp K_j))^{\frac{1}{n}}} \geq \frac{1}{\max_i (vol(R_{1\alpha} \perp K_i))^{\frac{1}{n}}}.$$

Quindi

$$area(\partial R_{1\alpha} \perp K_j) \geq \frac{\gamma}{\max_i (vol(R_{1\alpha} \perp K_i))^{\frac{1}{n}}} vol(R_{1\alpha} \perp K_j);$$

sommando su  $j$

$$A \geq \frac{\gamma}{\max_i (\text{vol}(R_{1\alpha} \setminus K_i))^{\frac{1}{n}}} v_1;$$

da cui

$$\max_i (\text{vol}(R_{1\alpha} \setminus K_i)) \geq \left(\frac{\gamma v_1}{A}\right)^n.$$

Sia  $\delta \leq \min \left\{ \left(\frac{\gamma}{A}\right)^n, 1 \right\}$ ; in particolare  $\delta \leq \left(\frac{\gamma}{A}\right)^n$ , da cui

$$\max_i (\text{vol}(R_{1\alpha} \setminus K_i)) \geq \delta \cdot v_1^n;$$

se vale per il massimo, in particolare vale per un qualche  $i$ , mostrando così quanto anticipato in (4.3).

A meno di traslare la successione di clusters  $(\mathcal{C}_\alpha)$  per un certo  $r$  fissato si può assumere

$$\text{vol}(R_{1\alpha} \setminus B(0, r)) \geq \delta \cdot v_1^n. \quad (4.4)$$

Grazie al teorema di compattezza 2.1.3, si può assumere che  $(\mathcal{C}_\alpha)$  converga a un cluster limite  $\mathcal{C}$ , quindi dalla disuguaglianza (4.4)

$$\text{vol}(R_1) \geq \delta \cdot v_1^n.$$

- $\mathcal{C}$  è di area minima per il suo volume.

Se così non fosse, basta utilizzare un miglioramento compatto di  $\mathcal{C}$  per migliorare  $\mathcal{C}_\alpha$  con una piccola distorsione di volume applicando il lemma 4.1.1. Questa distorsione può essere corretta tramite troncamenti e contrazioni e l'aggiunta di sferette (in modo da tornare al volume fissato inizialmente). Se non c'è perdita di volume all'infinito, non c'è niente da aggiungere; altrimenti si ripete il ragionamento. Per il lemma 4.1.2 sono necessarie un numero finito di ripetizioni (a priori invece sarebbe necessaria una quantità numerabile). Quindi si può ottenere la tesi con un numero finito di passi.

□

## 4.2 Simmetria rotazionale della double bubble di area minima

In questa sezione si arriverà a provare che una double bubble di area minima in  $\mathbb{R}^n$  con  $n \geq 3$  è un'ipersuperficie di rivoluzione attorno a una retta; questo ed altri corollari si otterranno a partire dal teorema di simmetria (teorema 4.2.2), che a sua volta richiede la conoscenza del lemma di assemblamento (lemma 4.2.5) e del lemma di simmetria rispetto alle intersezioni (lemma 4.2.3).

*Osservazione 4.2.1.* Per quanto visto al teorema 4.1.2, esiste un cluster  $B$  di area minima che racchiude  $m$  regioni di volume  $v_1, v_2, \dots, v_m$  in  $\mathbb{R}^n$ . Tralasciando alcuni punti,  $B$  è compatto e regolare (ovvero localmente è un'ipersuperficie  $C^\infty$ ) su un sottoinsieme denso  $B_{reg}$  il cui complemento ha area nulla.  $B$  è regolare a meno di un insieme di misura di Hausdorff al più  $n-8$  (si veda il teorema 3.2.2).

Per poter mostrare il lemma di simmetria rispetto alle intersezioni (lemma 4.2.3), sono necessari il lemma dei bisettori ortogonali (lemma 4.2.1) e il lemma che mostra che la simmetria locale implica quella globale (lemma 4.2.2).

**Lemma 4.2.1** (bisettori ortogonali). *Sia  $B$  un cluster di area minima di volumi  $v_1, v_2, \dots, v_m$  in  $\mathbb{R}^n$  e sia  $H \subset \mathbb{R}^n$  un iperpiano. Si suppone che  $H$  intersechi ciascun  $R_i$ . Allora  $H$  e  $B_{reg}$  si intersecano ortogonalmente.*

*Dimostrazione.* Siano  $B_1, B_2$  le metà di  $B$  dalle due parti dell'iperpiano  $H$ . Al posto di  $B_2$  si può prendere il simmetrico di  $B_1$  rispetto ad  $H$ : in questo modo viene individuato un nuovo cluster  $B'$  che racchiude le regioni  $(R'_i)_{i=1, \dots, m}$  di volumi  $vol(R'_i) = v_i$  con  $i = 1, \dots, m$ . Dato che  $B$  è di area minima

$$area(B') \geq area(B), \quad (4.5)$$

inoltre per la simmetria  $area(B') = 2area(B_1)$  e per definizione  $area(B) = area(B_1) + area(B_2)$ , quindi

$$area(B_1) \geq area(B_2).$$

Dato che il ruolo di  $B_1$  e quello di  $B_2$  possono essere invertiti si trova allo stesso modo la disuguaglianza  $area(B_2) \geq area(B_1)$  da cui

$$area(B_1) = area(B_2).$$

Quindi per la disuguaglianza (4.5)

$$area(B') = area(B),$$

in particolare anche  $B'$  è di area minima. Quindi gli spazi tangenti ai punti regolari di  $B \cap H$  sono o ortogonali o paralleli ad  $H$ ; altrimenti  $B'$  potrebbe essere regolarizzato diminuendo l'area.

Per completare la prova si mostra che se  $B$  è tangente ad  $H$  in un punto  $p$  regolare, allora  $B'$  può essere modificato diminuendo l'area.

Ora si identifica  $\mathbb{R}^n$  con  $H \times \mathbb{R}$  (ha senso dato che  $dim H = n - 1$ ). Il cluster  $B$  è regolare in  $D \times [-\epsilon, \epsilon]$  dove  $D$  è una palla in  $H$ , chiusa, di raggio  $r$ , centrata in  $p$ . Dato che  $B$  per ipotesi è tangente ad  $H$  in  $p$ , si può scegliere  $r$  sufficientemente piccolo affinché

$$B \cap \partial(D \times [-\epsilon, \epsilon]) \subseteq (\partial D) \times [-\epsilon, \epsilon], \quad \text{con } \epsilon \ll 1$$

e affinché i punti di  $D \times [-\epsilon, \epsilon]$  e di  $D \times \{-\epsilon\}$  e di  $D \times \{\epsilon\}$  siano nella stessa regione  $R'_i$ . Si nota che immaginando  $H$  come un piano,  $D \times [-\epsilon, \epsilon]$  sarebbe un cilindro dove  $\partial(D \times [-\epsilon, \epsilon])$  è il suo bordo totale,  $(\partial D) \times [-\epsilon, \epsilon]$  il suo bordo laterale,  $D \times \{-\epsilon\}$  e  $D \times \{\epsilon\}$  le due copie di  $D$  ai due lati opposti del cilindro.

In  $B'$  si sostituisce  $B' \cap (D \times [-\epsilon, \epsilon])$  con  $(\partial D) \times [-\epsilon, \epsilon]$ : questo comporta una diminuzione dell'area dell'ordine di  $r^{n-1}$  e quindi i volumi delle regioni  $R'_i$  possono cambiare al più di  $\epsilon r^{n-1}$ . Si può aggiustare il volume, pagando un aumento di area dell'ordine di  $\epsilon r^{n-1}$  (si veda il lemma 4.1.1). Per  $r$  sufficientemente piccolo, questa diminuzione di area è inferiore a quella iniziale.  $\square$

*Osservazione 4.2.2.* Dato  $A \subset \mathbb{R}^n$  un sottospazio affine, è possibile scomporre il fibrato tangente di  $\mathbb{R}^n - A$  nella maniera seguente:

$$T(\mathbb{R}^n - A) = A^{\parallel} \oplus A^{\nu} \oplus A^r,$$

dove  $A^{\parallel}$  è dato dai vettori paralleli ad  $A$ ,  $A^{\nu}$  è il sottofibrato 1-dimensionale generato dai raggi radialmente ortogonali ad  $A$ ,  $A^r$  è dato dalle direzioni di rotazione attorno ad  $A$ . Nel seguito si prenderà in considerazione tale scomposizione nel caso di  $\dim(A) \leq n - 2$ .

**Lemma 4.2.2** (la simmetria locale implica quella globale). *Sia  $B$  un cluster di area minima in  $\mathbb{R}^n$  e sia  $A \subset \mathbb{R}^n$  un sottospazio affine con  $\dim(A) \leq n - 2$ . Si suppone che per quasi ogni punto  $p \in B_{reg} - A$*

$$A^r(p) \subset T_p B.$$

*Allora  $B$  è simmetrico rispetto ad  $A$ , ovvero  $B$  è invariante rispetto a tutte le isometrie di  $\mathbb{R}^n$  che fissano i punti di  $A$ .*

*Dimostrazione.* Per l'assunzione fatta sulla dimensione di  $A$ , l'invarianza per riflessione rispetto ad  $A$  segue dall'invarianza per rotazione rispetto ad  $A$ . Sia  $\varphi$  una rotazione attorno ad  $A$ ; si mostra che  $\varphi_{\#} \partial R_i = \partial R_i \forall i$ . Esiste un gruppo ad un parametro di rotazioni  $\{\varphi_t\}$  di  $A$  con  $\varphi = \varphi_1$  (cioè per  $t = 1$  si riottiene quella fissata); queste inducono un campo vettoriale  $X$  su  $\mathbb{R}^n$ . Sia  $\omega$  una  $(n - 1)$ -forma su  $\mathbb{R}^n$ ; bisogna mostrare che

$$(\partial R_i, \omega) = (\varphi_{\#} \partial R_i, \omega),$$

dove  $(\varphi_{\#} \partial R_i, \omega) = (\partial R_i, \varphi^{\#} \omega)$ . Quindi si vuole

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\partial R_i, \varphi_t^{\#} \omega) = 0,$$

dove (dato che  $\partial R_i$  è un ciclo)  $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\partial R_i, \varphi_t^{\#} \omega) = (\partial R_i, (di_X + i_X d)\omega)$ , dove  $di_X = 0$ . Per la regolarità quasi ovunque, è sufficiente mostrare che  $(i_X d\omega(p), \Lambda^{n-1} T_p B) = 0$  per quasi ogni  $p \in B_{reg} \cap \partial R_i$ . Questo succede se  $X(p) \in T_p(B)$ . In effetti dal fatto che  $X(p) \in A^r(p) \forall p \notin A$  e dal fatto che  $A^r(p) \subseteq T_p(B)$  per quasi ogni  $p \in B_{reg} - A$  si ha proprio  $X(p) \in T_p(B)$ .  $\square$

**Lemma 4.2.3** (simmetria rispetto alle intersezioni). *Sia  $B$  un cluster minimo che racchiude  $m$  volumi in  $\mathbb{R}^n$ . Siano  $k > 1$  e  $H_1, \dots, H_k$  ipersuperfici tra loro ortogonali. Si suppone che  $B$  sia simmetrico rispetto a ciascun  $H_i$ . Allora  $B$  è simmetrico rispetto a  $A = \cap H_i$ .*

*Dimostrazione.*  $B$  è invariante rispetto alla composizione delle riflessioni attraverso gli  $H_i$ , ovvero riflessione attraverso  $A$ . In particolare ogni iperpiano contenente  $A$  taglia in due le regioni  $R_1 \dots R_m$ . Per il lemma di bisezione ortogonale (lemma 4.2.1),  $B_{reg}$  è ortogonale a ciascuno di tali iperpiani; ma le direzioni ortogonali di questi iperpiani coincidono con le direzioni di rotazione attorno ad  $A$ , quindi per il lemma di simmetria globale (lemma 4.2.2),  $B$  è simmetrico rispetto ad  $A$ .  $\square$

Il lemma di assemblamento (lemma 4.2.5) permette di combinare le simmetrie sui sottoinsiemi di un cluster per ottenere simmetrie sul cluster intero; per dimostrarlo si usa un risultato di algebra lineare (lemma 4.2.4) e il lemma dei bisettori ortogonali (lemma 4.2.1).

**Lemma 4.2.4** (di algebra lineare). *Se  $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$  sono sottospazi affini con intersezione non vuota, allora*

$$(A_1 \cap A_2)^r(p) = A_1^r(p) \oplus A_2^r(p),$$

*per ogni  $p \notin \text{span}(A_1, A_2)$ .*

*Dimostrazione.* Poiché ogni rotazione che fissa  $A_1$  o  $A_2$  fissa la loro intersezione si ha immediatamente una delle due inclusioni:

$$A_1^r(p) \oplus A_2^r(p) \subseteq (A_1 \cap A_2)^r(p).$$

Si suppone per assurdo che non valga l'uguaglianza; allora

$$\dim(A_1^r(p) \cap A_2^r(p)) > n - \dim(\text{span}(A_1, A_2)) - 1. \quad (4.6)$$

Dato che  $A_1^r(p) \cap A_2^r(p)$  è il complemento ortogonale di  $A_1^\parallel(p) \oplus A_2^\parallel(p) \oplus A_1^\nu(p) \oplus A_2^\nu(p)$

$$\dim A_1^r(p) \cap A_2^r(p) = n - \dim(A_1^\parallel(p) \oplus A_2^\parallel(p) \oplus A_1^\nu(p) \oplus A_2^\nu(p));$$

quindi per la disuguaglianza (4.6)

$$\dim(\text{span}(A_1, A_2)) \geq \dim(A_1^\parallel(p) \oplus A_2^\parallel(p) \oplus A_1^\nu(p) \oplus A_2^\nu(p))$$

e siccome  $\dim(\text{span}(A_1, A_2)) = \dim(A_1^\parallel(p) \oplus A_2^\parallel(p))$  si ha che

$$A_1^\nu(p) \subset A_1^\parallel(p) \oplus A_2^\parallel(p).$$

Dato che inoltre  $A_1^\nu(p) \perp A_1^\parallel(p)$ , bisogna che  $A_1^\nu(p) \subseteq A_2^\parallel(p)$  e dunque  $p \in \text{span}(A_1, A_2)$ , contraddicendo l'ipotesi.  $\square$

**Lemma 4.2.5** (assemblamento). *Sia  $B$  un cluster di area minima che racchiude  $m$  volumi in  $\mathbb{R}^n$ . Sia  $H \subset \mathbb{R}^n$  un iperpiano e siano  $B_1, B_2$  due simmetrizzazioni di  $B$  rispetto ad  $H$ . Si suppone che  $B_1$  e  $B_2$  minimizzino l'area del volume che racchiudono (questo vale ad esempio se  $H$  taglia a metà  $R_1, \dots, R_m$ ). Siano  $A_1, A_2 \subset H$  sottospazi affini non vuoti di dimensione al più  $n-2$ . Si suppone che ogni  $B_i$  sia simmetrico al rispettivo  $A_i$ . Allora  $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$  e  $B$  è simmetrico rispetto a  $A_1 \cap A_2$ .*

*Dimostrazione.* Tenendo conto che

- $B_1$  e  $B_2$  sono simmetrizzazioni di  $B$  rispetto ad  $H$
- $B_1$  è simmetrico rispetto ad  $A_1$
- $B_2$  è simmetrico rispetto ad  $A_2$

$\Rightarrow B \cap H$  è simmetrico rispetto a  $A_1$  e  $A_2$  in  $H$ . Se per assurdo  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$  allora, dato che  $\dim A_i < n-2$ ,  $B$  non sarebbe compatto (ma questo sarebbe in contraddizione con l'osservazione 4.2.1). Per il lemma di simmetria globale (lemma 4.2.2), per avere la simmetria di  $B$  rispetto ad  $A_1 \cap A_2$ , è sufficiente mostrare che per quasi ogni  $p \in B_{reg} - (A_1 \cap A_2)$

$$(A_1 \cap A_2)^r(p) \subset T_p(B).$$

- In questo punto si dimostrerà che per  $\mathcal{H}^{n-2}$ -quasi ogni  $p \in B \cap H - (A_1 \cup A_2)$   $B, B_1$  e  $B_2$  sono regolari in  $p$  e  $(A_1 \cap A_2)^r(p) \subset T_p(B)$ .

Dato che  $B_i$  è regolare quasi ovunque e simmetrico rispetto ad  $A_i$ , allora quasi ogni punto di  $B_i \cap H - A_i$  è regolare, allora quasi ogni punto di  $B \cap H - (A_1 \cup A_2)$  è un punto regolare di  $B_1$  e  $B_2$ . Prendo  $p$ , uno di tali punti. Per il lemma di bisezione ortogonale (lemma 4.2.1)  $B_1$  e  $B_2$  sono ortogonali rispetto ad  $H$  in  $p$ , dato che  $H$  taglia in due i volumi racchiusi dai  $B_i$ . Quindi una piccola palla attorno a  $p$  incontra solo due delle regioni  $R_i$  di  $B$ ; quindi  $B$  è regolare in questa palla a meno di un insieme di dimensione di Hausdorff al più  $n - 8$  (si nota che già il teorema di regolarità 3.2.2 non valeva per  $n \geq 8$ ).

Allora quasi ogni punto di  $B \cap H - (A_1 \cup A_2)$  è un punto regolare di  $B_1$ ,  $B_2$  e  $B$ .

Sia  $U$  un intorno regolare di tale punto; per l'unicità della continuità analitica  $U \cap B = U \cap B_1 = U \cap B_2$ . Allora  $A_1^r(p), A_2^r(p) \subseteq T_p B \forall p \in U - (A_1 \cup A_2)$ . Per il lemma di algebra lineare (lemma 4.2.4)  $(A_1 \cup A_2)^r(p) \subseteq T_p B \forall p \in U - H$ . Per continuità vale  $\forall p \in U$ .

- Si può ora completare la prova a meno di insiemi  $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2$  definiti in questo modo: sia  $W_i$  il semispazio chiuso determinato da  $H$  dal quale è formato  $B_i$  per simmetria. In  $W_2$ , sia  $\tilde{A}_i$  l'unione delle orbite di rotazione attorno ad  $A_2$  la cui intersezione con  $H$  è contenuta in  $A_1$ ;  $\tilde{A}_2$  è definito in maniera analoga.

Per quanto già visto al punto precedente, per  $\mathcal{H}^{n-1}$ -quasi ogni  $p \in B \cap W_1 - \tilde{A}_2$  esiste una rotazione  $\varphi$  attorno ad  $A_1$  tale che  $\varphi(p) \in H$ ,  $B$  e  $B_1$  siano regolari in  $p$  e tale che  $(A_1 \cap A_2)^r(\varphi(p)) \subset T_{\varphi(p)} B$ . Dato che  $B_1$  è invariante in  $\varphi$  e  $\varphi$  è una rotazione attorno ad  $A_1 \cap A_2$ ,  $B$  è regolare in  $p$  e  $(A_1 \cap A_2)^r(p) \subset T_p B$ . Allo stesso modo questo è vero  $\forall p \in B \cap W_2 - \tilde{A}_1$ .

- Infine si suppone che  $p \in B_{reg} \cap \tilde{A}_i$ .  
Quindi o qualche intorno regolare  $U$  di  $p$  in  $B$  sta in  $\tilde{A}_i$  oppure  $p$  è un limite di punti regolari di  $B$  non in  $\tilde{A}_i$  il cui spazio tangente contiene le direzioni di rotazione rispetto ad  $A_1 \cap A_2$ .

In quest'ultimo caso segue per continuità che  $(A_1 \cap A_2)^r(p) \subset T_p B$ . Nell'altro caso, usando l'invarianza per rotazione di  $B_1$  e  $B_2$ , si trova che i punti in  $\mathbb{R}^n$  in entrambi i lati di  $U$  sono nella stessa regione  $R_i$ ; quindi  $U$  può essere rimosso per diminuire l'area, contraddicendo la minimalità di  $B$ .

□

Per provare il teorema di simmetria (teorema 4.2.2), oltre al lemma di assemblamento (lemma 4.2.5) e quello di simmetria rispetto alle intersezioni (lemma 4.2.3) è necessario anche il seguente teorema (per il quale si rimanda a [7]).

**Teorema 4.2.1** (ham sandwich theorem). *Dati  $n$  sottoinsiemi in uno spazio  $n$ -dimensionale (di forme, dimensioni e posizioni qualsiasi), esiste sempre almeno un iperpiano  $(n - 1)$ -dimensionale in grado di bisecarli tutti simultaneamente.*

**Teorema 4.2.2** (di simmetria). *Sia  $B$  un cluster di area minima che racchiude  $m$  volumi in  $\mathbb{R}^n$ , con  $m \leq n - 1$ . Allora  $B$  è simmetrico rispetto ad un iperpiano  $(m - 1)$ -dimensionale.*

*Dimostrazione.* Dal momento che  $B$  è compatto, si può applicare il teorema 4.2.1 per ottenere un iperpiano  $H_1$  che tagli a metà le regioni  $R_1, \dots, R_m$ . Per il lemma di assemblamento (lemma 4.2.5) è sufficiente mostrare che ogni simmetrizzazione di  $B$  attraverso  $H_1$  sia simmetrica rispetto a un iperpiano  $(m - 1)$ -dimensionale in  $H_1$ .

Sia  $B_1$  una delle due simmetrizzazioni. Per il teorema 4.2.1 esiste un iperpiano  $H_2$  ortogonale ad  $H_1$  che taglia in due  $R_1, \dots, R_m$ . Per il lemma di assemblamento (lemma 4.2.5) è sufficiente mostrare che ognuna delle simmetrizzazioni di  $B_1$  attraverso  $H_2$  sia simmetrica rispetto a un iperpiano  $(m - 1)$ -dimensionale in  $H_1 \cap H_2$ .

Si ripete il processo per l'altra simmetrizzazione  $B_2$ . Alla fine si ottengono  $H_1, H_2, \dots, H_{n-m+1}$  iperpiani ortogonali e un cluster  $B_{n-m+1}$  di area minima

simmetrico rispetto ad ogni  $H_i$ .

Per il lemma di simmetria per intersezioni (lemma 4.2.3)  $B_{n-m+1}$  è simmetrico rispetto all'iperpiano  $(m-1)$ -dimensionale  $A = \bigcap_i H_i$ .  $\square$

Dal teorema di simmetria si ricavano alcuni risultati interessanti, non ultimo il corollario 4.2.2 che permette di dire che una double bubble di area minima in  $\mathbb{R}^n$  è un'ipersuperficie di rivoluzione rispetto a una retta.

**Corollario 4.2.1** (teorema isoperimetrico classico). *L'unico cluster di area minima che racchiude un singolo volume in  $\mathbb{R}^n$  è una sfera.*

*Dimostrazione.* È noto dal teorema 4.1.2 che esiste un cluster di area minima. Per il teorema di simmetria ogni cluster di area minima è unione di sfere concentriche. Per assurdo si suppone che questa unione sia composta di più di una sfera; dato che il cluster ha area finita (infatti un cluster che consiste di una sola sfera è certamente una soluzione possibile) il raggio di tali sfere deve essere finito. Allora si potrebbe muovere una delle sfere violando così la simmetria. In questo modo si ha la tesi.  $\square$

**Corollario 4.2.2** (asse di simmetria). *Se  $n \geq 3$  ogni double bubble di area minima in  $\mathbb{R}^n$  è simmetrica rispetto ad una retta.*

In alcuni casi è possibile dare caratterizzazioni più forti della retta di simmetria, come nella seguente proposizione.

**Proposizione 4.2.1** (asse nell'iperpiano). *Sia  $B$  una double bubble di area minima in  $\mathbb{R}^n$ , con  $n \geq 3$  e sia  $H \subset \mathbb{R}^n$  iperpiano. Si suppone che ogni simmetrizzazione di  $B$  attraverso  $H$  sia di area minima rispetto ai volumi che racchiude. Allora  $B$  è simmetrica rispetto a una retta in  $H$ .*

*Dimostrazione.* Per il lemma di assemblamento (lemma 4.2.5) è sufficiente mostrare che ogni simmetrizzazione è simmetrica rispetto a una retta in  $H$ . Per ogni simmetrizzazione si può ripetere il ragionamento usato per la dimostrazione del teorema di simmetria tenendo conto che in questo caso  $m = 2$ .  $\square$

### 4.3 Concavità della funzione di area minima

Il risultato centrale relativo a questa sezione è il teorema 4.3.1, che assicura la concavità della funzione di area minima; questo teorema si serve di un risultato di continuità (lemma 4.3.1) e di alcuni risultati della sezione precedente (il corollario 4.2.2, la proposizione 4.2.1, il lemma di assemblamento 4.2.5).

**Notazione 4.3.1** (funzione di area minima). Dati  $m$  volumi  $v_1, \dots, v_m$  in  $\mathbb{R}^n$ , la funzione che a questi associa l'area minima del cluster che li racchiude e li separa si denota  $A_n(v_1, \dots, v_m)$ .

**Lemma 4.3.1** (continuità).  $\forall m, n$  la funzione di area minima  $A_n(v_1, \dots, v_m)$  è continua.

*Dimostrazione.* Per semplicità si prova la continuità nella prima variabile con  $v_2, \dots, v_m$  costanti (il caso generico si prova in maniera analoga).

Dato un cluster di volumi  $v_1, \dots, v_m$ , si può aumentare  $v_1$  di un  $\delta$ , con un aumento controllato di area, creando una sfera esterna al cluster di volume  $\delta$  e incorporando questo volume in  $R_1$ . Per diminuire  $v_1$ , si può scalare tutto il cluster in modo che  $R_1$  abbia volume  $v_1 - \delta$ , poi aggiungere sfere in modo che le regioni  $R_2, \dots, R_m$  ritornino ad avere volumi  $v_2, \dots, v_m$  rispettivamente. L'aumento d'area risultante sarà controllato uniformemente da  $v_1$  in un intorno sufficientemente piccolo del valore fissato. È possibile ricoprire la retta dei numeri reali positivi con tali intorni e questo implica continuità in  $v_1$  per  $v_1 > 0$ . Si ha inoltre continuità in  $v_1 = 0$ ; infatti

$$A_n(0, v_2, \dots, v_m) \leq A_n(\delta, v_2, \dots, v_m) \leq A_n(0, v_2, \dots, v_m) + A_n(\delta).$$

□

**Teorema 4.3.1** (concavità). Se  $n \geq 3$ ,  $v, w \in [0, \infty)^2$  sono due paia di volumi non negativi e  $0 < t < 1$ , allora

$$A_n(tv + (1-t)w) > tA_n(v) + (1-t)A_n(w).$$

*Dimostrazione.* Si suppone per assurdo che non sia così.

Per continuità la funzione

$$A_n(tv + (1-t)w) - tA_n(v) - (1-t)A_n(w) \equiv f(t)$$

assume minimo in  $[0,1]$  per un qualche  $t_0$ . Sia  $B$  un cluster di area minima che racchiude i volumi  $t_0v + (1-t_0)w$ . Per il corollario 4.2.2,  $B$  è simmetrica rispetto a una retta  $L$ . Si può parametrizzare l'insieme degli iperpiani orientati di  $\mathbb{R}^n$  tramite  $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ , in modo che ognuno sia determinato da una direzione normale  $x \in S^{n-1}$  e una distanza  $r \in \mathbb{R}$  dall'origine. Sia

$$g : S^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ la mappa volume}$$

$$g : (x, r) \mapsto (\text{vol}(R_1 \cap U), \text{vol}(R_2 \cap U))$$

dove  $U$  è il semipiano superiore determinato dall'iperpiano orientato parametrizzato da  $(x, r)$ . Poiché  $B$  è compatto,  $g$  è continua. Si pone l'origine di  $\mathbb{R}^n$  in  $L$  (la retta di simmetria di  $B$ ). Si sceglie  $x \in S^{n-1}$  ortogonale a  $L$ ; allora l'iperpiano descritto da  $(x, r)$  contiene  $L$  se  $r = 0$ , altrimenti è parallelo a  $L$ . Per la simmetria di  $B$

$$g(x, r) + g(x, -r) = t_0v + (1-t_0)w \quad \forall r \in \mathbb{R}.$$

Si considera il segmento nel piano dei volumi dato da

$$K = \left\{ \frac{tv + (1-t)w}{2} \text{ con } t, 2t_0 - t \in (0, 1) \right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Si possono verificare due casi: o  $g(x, r) \in K$  per un qualche  $r \neq 0$ , oppure per continuità e simmetria  $g(y, \mathbb{R})$  incontra  $K \forall y \in S^{n-1}$  vicino a  $x$ . In entrambi i casi si può trovare un  $t$  e un iperpiano  $H$  che non contiene  $L$  con  $g(H) = \frac{tv + (1-t)w}{2} \in K$ .

Siano  $U, V$  rispettivamente il semispazio superiore e inferiore determinati da  $H$ . Siano  $a_0 = \text{area}(B \cap H)$ ,  $a_1 = \text{area}(B \cap U)$ ,  $a_2 = \text{area}(B \cap V)$ . Considerando la riflessione di  $B \cap U$  attraverso  $H$  invece di  $B \cap V$ , si ottiene per la minimalità di  $A_n$

$$a_0 + 2a_1 \geq A_n(tv + (1-t)w) =$$

per definizione di  $f$

$$= f(t) + tA_n(v) + (1 - t)A_n(w) \geq$$

poiché  $t_0$  è punto di minimo per  $f$

$$\geq f(t_0) + tA_n(v) + (1 - t)A_n(w) =$$

per definizione di  $f$

$$= A_n(t_0v + (1 - t_0)w) + (t - t_0)A_n(v) + (t_0 - t)A_n(w).$$

Simmetrizzando nell'altra direzione si ottiene una disuguaglianza analoga con  $a_2$  al posto di  $a_1$  e  $2t_0 - t$  al posto di  $t$ :

$$a_0 + 2a_2 \geq A_n(t_0v + (1 - t_0)w) + [(2t_0 - t) - t_0]A_n(v) + [t_0 - (2t_0 - t)]A_n(w).$$

Sommando termine a termine si ha

$$2(a_0 + a_1 + a_2) \geq 2A_n(t_0v + (1 - t_0)w).$$

Ma poiché per definizione  $B$  è un cluster di area minima che racchiude i volumi  $t_0v + (1 - t_0)w$ , vale l'uguaglianza in quest'ultima relazione, quindi anche le disuguaglianze precedenti sono in realtà uguaglianze. In particolare ogni simmetrizzazione di  $B$  è di area minima per il volume che racchiude; quindi per la proposizione 4.2.1,  $B$  è simmetrica rispetto a una retta  $L' \subseteq H$ . Dato che  $B$  è compatto,  $L$  e  $L'$  devono intersecarsi, ma non coincidono (infatti si suppone  $L \not\subseteq H$ , mentre  $L' \subseteq H$ ). Per il lemma di assemblamento 4.2.5 applicato a un iperpiano che contiene  $L$  e  $L'$ ,  $B$  è simmetrico rispetto a un punto, quindi è unione di sfere concentriche. Ma  $B$  può contenere solo una sfera, altrimenti si potrebbe muovere una delle sfere, violando così la simmetria provata. Quindi  $B$  racchiude solo un volume e  $v \in \mathbb{R}^2$ ,  $w \in \mathbb{R}^2$  giacciono entrambi in uno degli assi coordinati di  $\mathbb{R}^2$ . Dato che per dilatazione

$$A_n(\lambda v_1, \dots, \lambda v_m) = \lambda^{\frac{n-1}{n}} A_n(v_1, \dots, v_m),$$

$A_n$  è strettamente concava lungo una retta nello spazio dei volumi che attraversa l'origine, contro l'assunzione iniziale.  $\square$

Da questo teorema segue il corollario 4.3.1, dal quale a sua volta si ricava il teorema 4.3.2.

**Corollario 4.3.1** (decrecenza stretta). *Per un  $n$  fissato, la funzione  $A_n(v_1, v_2)$  è strettamente decrescente in ogni  $v_i$ .*

*Dimostrazione.* Si suppone per assurdo che non sia vero, ovvero  $v_2 < v'_2$  e  $A_n(v_1, v_2) \geq A_n(v_1, v'_2)$ . Per ogni  $w > v'_2$  è possibile pensare  $v'_2$  come una combinazione convessa di  $v_1$  e  $w$ , cioè  $v'_2 = tv_1 + (1-t)w$  con  $t = \frac{w-v'_2}{w-v_2} \in (0, 1)$ ; quindi per il teorema di concavità 4.3.1,  $A_n(v_1, v'_2) \geq A_n(v_1, w)$ ; per il teorema isoperimetrico (si veda il corollario 4.2.1)  $A_n(v_1, w) \geq A_n(w)$ , inoltre  $A_n(w) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ . Ma il fatto che esistano cluster che racchiudono i volumi  $v_1$  e  $v'_2$  di area finita porta a contraddizione.  $\square$

**Teorema 4.3.2** (non esistenza di camere vuote). *Una double bubble di area minima in  $\mathbb{R}^n$  non ammette 'camere vuote'.*

*Dimostrazione.* Si suppone per assurdo che una double bubble di area minima contenga una camera vuota; allora si può immaginare che la camera vuota faccia parte di  $R_1$ . Si ottiene allora una bolla in cui  $v_1$  è aumentato, ma l'area totale è la stessa. Ma questo contraddice il corollario precedente 4.3.1.  $\square$

**Teorema 4.3.3** (bilanciamento). *Sia  $n \geq 3$ . Se  $v_1 > 2v_2$ , allora in ogni cluster di area minima che racchiude i volumi  $v_1$  e  $v_2$  in  $\mathbb{R}^n$ ,  $R_1$  è connesso.*

*Dimostrazione.* Dato che  $A_n$  è strettamente concava lungo la retta  $v_1 + v_2 = c$  e  $A_n(v_1, v_2) = A_n(v_2, v_1)$ , nel caso in cui  $v_1 + v_2$  è costante e  $v_1$  e  $v_2$  sono sufficientemente vicini, allora  $A_n$  cresce.

Per assurdo si può supporre che  $R_1$  sia una regione disconnessa in una double bubble di area minima che racchiude i volumi  $v_1$  e  $v_2$ . Si può trovare un'unione  $Q$  non vuota di componenti connesse di  $R_1$  i cui volumi sono al più  $\frac{v_1}{2} < v_1 - v_2$ . Se si costruisce un nuovo cluster, in cui  $Q$  appartiene a  $R_2$  e non a  $R_1$ , si ottiene un cluster con la stessa area e i cui volumi sono più

simili tra loro. Si ha quindi un assurdo, dato che l'area dovrebbe crescere se i volumi più sono simili tra loro.  $\square$

**Teorema 4.3.4** (principio del minimo forte). *Si assume  $m \leq n$ . Sia  $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione lineare e sia  $K \subset \mathbb{R}^m$  un iperpiano. Allora  $A_n + T$  soddisfa il principio del minimo su  $K$ , ovvero per ogni disco piatto  $D \subset [0, \infty)^m$   $(m-1)$ -dimensionale, la restrizione di  $A_n + T$  a  $D$  assume il suo minimo su  $\partial D$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $v$  il punto di  $D$  più lontano dal centro di  $D$ , in cui  $A_n + T$  assume minimo. Si suppone per assurdo che  $v \in \text{int}(D)$ . Sia  $D'$  una palla contenuta in  $D$  centrata in  $v$ . Sia  $B$  un cluster di area minima che racchiude il volume  $v$ . Poiché  $m \leq n$ , per il teorema 4.2.1, si possono trovare  $H_1, \dots, H_{n-m+1}$  iperpiani ortogonali rispetto ai quali  $B$  è simmetrica. Sia  $g : S^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  definita come nella dimostrazione del teorema 4.3.1. Si prova ora che

$$g(H) \in \frac{D'}{2} \Rightarrow g(H) = \frac{v}{2}.$$

Infatti è possibile supporre  $g(H) = \frac{w}{2} \in \frac{D'}{2}$ ; sia  $w' = 2v - w$ . Usando le simmetrizzazioni di  $B$  rispetto ad  $H$  e poiché  $B$  è di area minima, si ha

$$2A_n(v) \geq A_n(w) + A_n(w').$$

Per la linearità di  $T$  e la definizione di  $w'$

$$2T(v) = T(w) + T(w'),$$

quindi sommando questa con la disuguaglianza precedente si ottiene

$$2[A_n + T](v) \geq [A_n + T](w) + [A_n + T](w').$$

Dato che per ipotesi  $A_n + T$  assume minimo in  $v$  su  $D$ , quindi assume lo stesso valore in  $w$  e  $w'$ .

Se  $w \neq w'$ , allora uno dei due è più lontano dal centro di  $D$  rispetto a  $v$ , contraddicendo l'ipotesi relativa alla scelta di  $v$ ; quindi  $w = w'$ .

Se  $x \in S^{n-1}$  è ortogonale rispetto a  $\bigcap H_i$ , allora per la simmetria di  $B$   $g(x, \cdot)$

l'attraversa ed è simmetrica rispetto a  $\frac{v}{2}$ ; per un risultato topologico,  $\forall y \in S^{n-1}$  il percorso  $g(y, \cdot)$  colpisce  $\frac{v}{2}$ , in particolare esiste  $H$  iperpiano ortogonale a  $H_1, \dots, H_{n-m+1}$  che bisechi  $R_1$  e  $R_2$ . Ora si simmetrizza  $B$  rispetto ad  $H$ ; si ripete questo ragionamento fino a che  $B$  non risulta simmetrica rispetto a  $n$  iperpiani ortogonali. Per il lemma di simmetria rispetto alle intersezioni 4.2.3,  $B$  è unione di sfere concentriche; l'unica possibilità è che  $B$  sia una singola sfera (si veda anche la dimostrazione del teorema 4.3.1) e che  $v$  giaccia in uno degli assi coordinati.

Se  $m > 2$  si ha  $v \in \text{int}(D)$ , contraddicendo l'ipotesi iniziale; se  $m = 2$  il ragionamento è analogo a quanto visto nella dimostrazione del teorema 4.3.1.  $\square$

## 4.4 Struttura della double bubble di area minima

Grazie ai risultati di simmetria della sezione 4.2 e all'assenza di camere vuote (teorema 4.3.2), si ha la struttura della double bubble di area minima (si veda [2]).

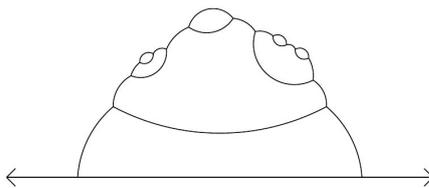


Figura 4.2: Si veda [2], p.4

**Teorema 4.4.1** (di struttura). *Ogni double bubble in  $\mathbb{R}^n$  che non sia la standard double bubble è una superficie di rivoluzione attorno a una retta e consiste di una sfera topologica con un albero di anelli attaccati (si veda la figura 4.2). Le due cupole sono sottoinsiemi di sfere e la radice dell'albero ha solo un ramo.*

*Dimostrazione.* È utile confrontare quanto spiegato nella seguente dimostrazione con la figura 4.3.

Sia  $B$  una double bubble di area minima in  $\mathbb{R}^n$ . Per il corollario 4.2.2,  $B$  è

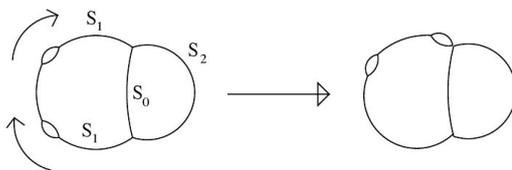


Figura 4.3: Si veda [2], p.19

descritta da un sottoinsieme del semipiano superiore  $H$ .

Si può usare la simmetria per avere regolarità. Infatti area e volume in  $\mathbb{R}^n$  si ottengono dall'area e dal volume in  $H$ , moltiplicati per una funzione densità su  $H$  che varia in maniera liscia e che dipende dalla distanza dall'asse di simmetria. Adattando la teoria delle bolle di sapone alle superfici, si arriva a dire che  $B \cap H$  è formata da curve lisce che si incontrano a gruppi di tre con angoli di  $120^\circ$ .

Per via del fatto che un cluster di area minima che racchiude due volumi in  $\mathbb{R}^n$  separa  $\mathbb{R}^n$  in una quantità finita di componenti (si veda il corollario 4.3 del [2]), non possono esserci singolarità lungo gli assi, dove la densità degenera a zero, permettendo l'accumulazione delle componenti.

Una volta escluse le singolarità, si mostra ora che ogni curva che incontra l'asse deve essere un cerchio o una retta ortogonale all'asse. Questo segue dal fatto che, dato  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  un disco e un numero  $v \in \mathbb{R}$  tale che  $v \geq 0$ , l'ipersuperficie  $S$  di area minima con bordo fissato  $\partial S = \partial D$  tale che l'unione  $D \cup S$  racchiude un volume  $v$  è un pezzo di sfera (o  $D$ , se  $v = 0$ ). Nel caso in cui  $v > 0$ , esiste un sottoinsieme  $S_0$  di una sfera con  $\partial S_0 = \partial D$  tale che l'unione  $S_0 \cup D$  racchiude un volume  $v$ . Sia  $S'$  il resto della sfera di cui  $S_0$  è un sottoinsieme e sia  $v'$  il volume compreso tra  $D$  e  $S'$ . Sia  $S$  tale che l'unione  $S \cup S'$  racchiude un volume  $v + v'$ ; per il teorema isoperimetrico (teorema 4.2.1)  $area(S \cup S') \geq area(S_0 \cup S')$ , quindi  $area(S) \geq area(S_0)$  e l'uguaglianza vale se e solo se  $S = S_0$ .

Si dimostra ora che  $B$  deve intersecare l'asse di simmetria. Se per assurdo così non fosse, si potrebbe contrarre la bolla rispetto all'asse preservando il volume e diminuendo l'area. Per farlo si sceglie  $0 < \epsilon \ll 1$  e per ogni punto invece della distanza  $r$  dagli assi si prende  $(r^{n-1} - \epsilon)^{\frac{1}{n-1}}$ . Le aree delle superfici ortogonali alla direzione dell'asse sono preservate, mentre quelle delle superfici parallele no (diminuiscono in area, mentre  $B$  è di area minima). Ora si può provare che  $B$  è connesso. Se per assurdo così non fosse, si potrebbero far scorrere (si veda la figura 4.3) due componenti lungo l'asse fino a che non si toccano creando una singolarità non ammessa (data dall'incontro di quattro superfici), quindi potrebbe diminuire l'area (ma sarebbe assurdo, dato che  $B$  è di area minima).

Infine si prova che se  $B$  non è una standard double bubble, allora interseca l'asse esattamente due volte. Non può infatti intersecarlo solo una volta, altrimenti la superficie di intersezione con l'asse avrebbe  $R_0$  da entrambi i lati e potrebbe essere rimossa. Si supponga per assurdo che ci siano più di due intersezioni. Dato che  $B$  è connesso e non ha camere vuote (si veda il teorema 4.3.2), una superficie  $S_0$  di  $B$  deve intersecare l'asse con  $R_1$  e  $R_2$  da entrambi i lati. Poiché  $B$  è connesso e racchiude più di una regione,  $S_0$  deve incontrare due superfici  $S_1$  e  $S_2$ . Dato che  $B$  non ha camere vuote, rimuovendo una parte di  $S_1$  o  $S_2$  si disconetterebbe  $B$ ; quindi  $S_1$  e  $S_2$  sono sottoinsiemi di sfere. Dato che per ipotesi  $B$  non è standard, o  $S_1$  o  $S_2$  incontra un'ulteriore superficie; non è restrittivo supporre che sia  $S_1$ . È possibile far scorrere i due sottoinsiemi di  $B - S_1$  attorno alla sfera finché non si incontrano. Si ottiene in questo modo una singolarità inammissibile, perché se le superfici si intersecassero, lungo la curva di intersezione si incontrerebbero quattro superfici. Dato che questo scorrimento non cambia area e volume,  $B$  non potrebbe essere il cluster minimizzante.

Dato che  $B$  non ha camere vuote, si ottiene la tesi.  $\square$

## 4.5 Formule di variazione

**Notazione 4.5.1.** Nelle notazioni usate nelle definizioni 4.0.1, 4.0.2, 4.0.3, il campo vettoriale normale unitario  $N$  lungo  $\Sigma$  viene scelto in modo che  $N$  punti all'interno di  $R_1$  lungo  $\partial R_1$  e all'interno di  $R_2$  lungo  $\Sigma_2$ . Si denota con  $\sigma$  la seconda forma fondamentale di  $\Sigma$  e  $H$  la curvatura media di  $\Sigma$ ; lungo l'insieme  $C$ , il valore di entrambe dipende dal  $\Sigma_i$  che viene usato per calcolarlo. Vengono usate anche le notazioni  $N_i, \sigma_i, H_i$  per indicare le restrizioni di  $N, \sigma, H$  a  $\Sigma_i$ .

**Notazione 4.5.2.** Verrà considerata la famiglia ad un parametro di variazioni  $\{\varphi_t\}_{|t|<\epsilon} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$  della bolla  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ . Questa famiglia assume un unico valore lungo l'insieme singolare  $C$  ed è  $C^\infty$  se ristretta a ciascun pezzo  $\Sigma_i$ . Si denota con  $X = \left. \frac{d\varphi_t}{dt} \right|_{t=0}$  il campo vettoriale associato in  $t = 0$ .

**Lemma 4.5.1** (variazione prima). *Sia  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$  una double bubble che consiste di tre ipersuperfici  $C^\infty$   $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2$  che si incontrano in maniera liscia lungo una sottovarietà  $C$   $(n-1)$ -dimensionale. Allora la derivata prima dell'area lungo la deformazione  $\varphi_t(\Sigma)$  a  $t = 0$ , dove  $\varphi_t$  è la variazione a cui è associato il campo vettoriale  $X$ , è data da*

$$-\sum_{i=0,1,2} \int_{\Sigma_i} nH_i \langle X, N_i \rangle - \int_C \langle X, \nu_0 + \nu_1 + \nu_2 \rangle \quad (4.7)$$

dove  $N_i$  sono i vettori normali alle parti lisce  $\Sigma_i$  di  $\Sigma$  e  $\nu_i$  sono le co-normali interne a  $C$  in  $\Sigma_i$ .

*Dimostrazione.* Secondo la scelta fatta per i vettori normali (si veda la notazione 4.5.1), la derivata del volume della regione  $R_1$  e quella della regione  $R_2$  sono date rispettivamente da

$$-\int_{\Sigma_1} \langle X, N_1 \rangle - \int_{\Sigma_0} \langle X, N_0 \rangle$$

e

$$-\int_{\Sigma_2} \langle X, N_2 \rangle + \int_{\Sigma_0} \langle X, N_0 \rangle .$$

La variazione prima dell'area della bolla è data da

$$\sum_{i=0,1,2} \int_{\Sigma_i} \operatorname{div}_{\Sigma_i} X,$$

dove  $\operatorname{div}_{\Sigma_i}$  è la divergenza di  $\Sigma_i$  di un campo vettoriale in  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Denotando con  $\{e_j\}$  una base ortonormale di  $T\Sigma_i$  e con  $X$  un campo vettoriale in  $\mathbb{R}^{n+1}$ , allora

$$\operatorname{div}_{\Sigma_i} X = \sum_j \langle D_{e_j} X, e_j \rangle$$

(si veda [8]) dove  $D$  è la connessione di Levi-Civita in  $\mathbb{R}^{n+1}$ ; dato che inoltre

$$\operatorname{div}_{\Sigma_i} X = \operatorname{div}_{\Sigma_i} X^T - nH_i \langle X, N_i \rangle$$

dove  $X^T$  è la proiezione di  $X$  su  $T\Sigma_i$ , il teorema della divergenza porta alla tesi.  $\square$

*Osservazione 4.5.1.* Data  $\Sigma$  stazionaria, per ogni variazione che preserva il volume, il lemma 4.5.1 equivale a dire che

- le curvature medie  $H_i$  sono costanti con  $-H_1 + H_2 + H_0 = 0$  (4.8)

- $\nu_0 + \nu_1 + \nu_2 = 0$  lungo  $C$ . (4.9)

**Definizione 4.5.1** (pressione). La curvatura media  $H_1$  (rispettivamente  $H_2$ ) è detta pressione della regione  $R_1$  (rispettivamente  $R_2$ ).

*Osservazione 4.5.2.* Dall'osservazione precedente si ricava che se  $H_0 > 0$ , allora  $R_1$  ha pressione maggiore rispetto a  $R_2$ .

*Osservazione 4.5.3.* Dal lemma 4.5.1, se  $\Sigma$  è stazionaria, per ogni variazione che preserva il volume, denotando con  $u_i = \langle X, N_i \rangle$  si ha

$$\int_{\Sigma_1} u_1 + \int_{\Sigma_0} u_0 = 0 \quad \text{e} \quad \int_{\Sigma_2} u_2 - \int_{\Sigma_0} u_0 = 0 \quad (4.10)$$

e dato che lungo i punti dell'insieme singolare di ha  $-N_1 + N_2 + N_0 = 0$  si ha che

$$-u_1 + u_2 + u_0 = 0 \text{ lungo } C. \quad (4.11)$$

Con il seguente lemma si prova sostanzialmente il viceversa di quanto visto nell'osservazione precedente.

**Lemma 4.5.2.** *Sia  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$  una double bubble stazionaria. Date delle funzioni  $u_i \in C^\infty(\Sigma_i, \mathbb{R})$  tali che valgano le equazioni (4.10) e (4.11), esiste una variazione  $\{\varphi_t\}$  di  $\Sigma$  che preserva il volume delle regioni racchiuse da  $\varphi_t(\Sigma)$  e tali che le componenti normali del campo vettoriale infinitesimale associato  $X$  sono proprio le funzioni  $u_i$ , con  $i = 0, 1, 2$ .*

*Dimostrazione.* La condizione al bordo (4.11) permette di costruire un campo vettoriale  $Z$  su  $C$  tale che  $\langle Z, N_i \rangle = u_i$ ; si può estendere in maniera  $C^\infty$   $Z$  a  $\Sigma_i$  in modo tale che  $\langle Z, N_i \rangle = u_i$ .

Sia  $\{\psi_t\}$  la variazione di  $\Sigma$  associata a  $Z$ ; ad esempio  $\psi_t = \psi + tZ$ .

Siano  $f_i \in C^\infty(\Sigma_i, \mathbb{R})$ ,  $f_i \geq 0$  tali che  $\text{supp} f_i \subseteq \overset{\circ}{\Sigma}_i$  e  $\text{supp} f_i$  compatti; si estendono tali  $f_i$  a 0 su  $\Sigma$ .

Dati tre parametri reali piccoli in modulo,  $t$ ,  $s_1$  e  $s_2$ , si considera la seguente deformazione:  $\psi_t + s_1 f_1 N_1^t + s_2 f_2 N_2^t$ , dove  $N_i^t$  è il vettore normale a  $\psi_t(\Sigma_i)$ . Si considera il volume  $v_i(t, s_1, s_2)$  con  $i = 1, 2$  della regione  $R_i$  dopo la deformazione. Allora

$$\left. \frac{\partial v_i}{\partial s_j} \right|_{(t, s_1, s_2)=0} = \begin{cases} \int_{\Sigma_i} f_j > 0, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Dalla condizione (4.10) segue che  $\frac{\partial v_i}{\partial t}(0, 0, 0) = 0$ . Quindi dal teorema delle funzioni implicite esistono  $s_1(t)$ ,  $s_2(t)$  con  $s_i(0) = 0$  tali che il volume di  $R_i$  è preservato lungo la deformazione  $\psi_t + s_1 f_1 N_1^t + s_2 f_2 N_2^t$ . Sia  $X$  il campo vettoriale associato alla deformazione; dato che la variazione preserva il volume,  $s_i'(0) = 0$  e quindi  $\langle X, N_i \rangle = u_i$ .  $\square$

**Proposizione 4.5.1** (variazione seconda). *Sia  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$  una double bubble stazionaria e sia  $\varphi_t$  una variazione ad un parametro a cui è associato il campo vettoriale  $X$  che preserva il volume di  $R_1$  e  $R_2$ . Allora la derivata seconda dell'area di  $\varphi_t(\Sigma)$  nel punto  $t = 0$  è dato da*

$$- \int_{\Sigma} u(\Delta u + |\sigma|^2 u) - \sum_{i=0,1,2} \int_C u_i \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial \nu_i} + q_i u_i \right\}$$

dove  $u = \langle X, N \rangle$ ,  $u_i = \langle X, N_i \rangle$ ,  $\Delta$  è il laplaciano  $\Sigma$ ,  $|\sigma|^2$  è la norma al quadrato della seconda forma fondamentale,  $\nu_i$  è la normale unitaria interna di  $C$  in  $\Sigma_i$  e le funzioni  $q_i$  sono date da  $q_1 = \frac{(\kappa_0 - \kappa_2)}{\sqrt{3}}$ ,  $q_2 = \frac{(-\kappa_1 - \kappa_0)}{\sqrt{3}}$ ,  $q_0 = \frac{(\kappa_1 + \kappa_2)}{\sqrt{3}}$  con  $\kappa_i = \sigma_i(\nu_i, \nu_i)$ ,  $i = 0, 1, 2$ .

*Dimostrazione.* Si richiama la seguente uguaglianza

$$n \frac{dH}{dt}(0) = \Delta u + |\sigma|^2 u \text{ (si veda [8]).}$$

Si deriva in  $t$  quanto trovato in (4.7), partendo dalla parte degli integrali su  $\Sigma_i$ :

$$\frac{d}{dt} \left( - \sum_{i=0}^2 \int_{\Sigma_i} n H_i u_i \right) = - \int_{\Sigma} u (\Delta u + |\sigma|^2 u) - \sum_{i=0}^2 n H_i \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_{\Sigma_i} \langle X, N_i \rangle .$$

Siano  $a_i := \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_{\Sigma_i} \langle X, N_i \rangle$ . Dato che  $\varphi_t(\Sigma)$  preserva il volume, per le condizioni (4.10) si ha  $a_1 + a_0 = 0$  e  $a_2 - a_0 = 0$ . Inoltre vale (4.8), quindi

$$H_1 a_1 + H_2 a_2 + H_0 a_0 = a_0 (-H_1 + H_2 + H_0) = 0.$$

Da questo si ha che

$$\frac{d}{dt} \left( - \sum_{i=0}^2 \int_{\Sigma_i} n H_i u_i \right) = - \int_{\Sigma} u (\Delta u + |\sigma|^2 u).$$

Inoltre per via di (4.9) si può scrivere così la derivata in  $t$  di quanto trovato in (4.7), prendendo in considerazione ora la parte relativa all'integrale su  $C$ :

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left( \int_C \langle X, \nu_0 + \nu_1 + \nu_2 \rangle \right) = \int_C \langle X, D_X(\nu_0 + \nu_1 + \nu_2) \rangle;$$

per concludere si usa il lemma successivo. □

**Lemma 4.5.3.** *Nelle ipotesi della proposizione precedente si ha*

$$D_X(\nu_0 + \nu_1 + \nu_2) = \sum_i \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial \nu_i} + q_i u_i \right\} N_i = - \left\{ \frac{d\theta_2}{dt}(0) N_2 + \frac{d\theta_0}{dt}(0) N_0 \right\},$$

dove  $\theta_2 = \angle(\nu_1, \nu_2)$ ,  $\theta_0 = \angle(\nu_1, \nu_0)$  sono gli angoli determinati dalle parti di  $\varphi_t(\Sigma)$  lungo l'insieme singolare.

*Dimostrazione.* Sia  $Y = X^C$  la proiezione ortogonale di  $X$  rispetto al fibrato tangente  $TC$ . Per ogni  $i \in \{1, 2, 3\}$  si ha la seguente decomposizione  $X = Y + \langle X, \nu_i \rangle \nu_i + \langle X, N_i \rangle N_i$ . Dato che  $Y$  è tangente a  $C$   $\langle Y, D_X(\sum_i \nu_i) \rangle = 0$ ; poiché  $|\nu_i| = 1$ , allora  $\langle \nu_i, D_X \nu_i \rangle = 0$ . Inoltre

$$\langle D_X \nu_i, N_i \rangle = - \langle \nu_i, D_X N_i \rangle = \sigma_i(\nu_i, X^i) + \frac{\partial u_i}{\partial \nu_i},$$

dove  $X^i$  è la proiezione ortogonale di  $X$  su  $T\Sigma_i$ . Quindi

$$D_X(\nu_0 + \nu_1 + \nu_2) = \sum_i \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial \nu_i} + \sigma_i(\nu_i, \nu_i) \langle X, \nu_i \rangle + \sigma_i(Y, \nu_i) \right\} N_i.$$

Dato che  $Y$  è tangente a  $C$  su cui  $\sum_i \nu_i = 0$ , si osserva che  $\sum_i D_Y \nu_i = D_Y(\sum_i \nu_i) = 0$  e che  $\langle D_X \nu_i, \nu_i \rangle = 0$ ; da queste osservazioni si ricava che  $\sum_i (D_Y \nu_i)^C = (D_Y(\sum_i \nu_i))^C = 0$ . Quindi dalle uguaglianze appena trovate

$$0 = \sum_i D_Y \nu_i =$$

per scomposizione

$$= \sum_i \left\{ (D_Y \nu_i)^C + \langle D_Y \nu_i, \nu_i \rangle \nu_i + \langle D_Y \nu_i, N_i \rangle N_i \right\} =$$

per le uguaglianze appena trovate

$$= \sum_i \langle D_Y \nu_i, N_i \rangle N_i =$$

per definizione di seconda forma fondamentale tramite Levi-Civita

$$= \sum_i \sigma_i(Y, \nu_i) N_i.$$

Quindi  $D_X(\nu_0 + \nu_1 + \nu_2) = \sum_i \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial \nu_i} + \kappa_i \langle X, \nu_i \rangle \right\} N_i$ .

Poiché

$$\nu_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(N_0 - N_2), \quad \nu_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-N_1 - N_0), \quad \nu_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(N_1 + N_2), \quad (4.12)$$

si ottiene  $\langle X, \nu_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(u_0 - u_2)$ ,  $\langle X, \nu_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(-u_1 - u_0)$ ,  $\langle X, \nu_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(u_1 + u_2)$ . Si ha

$$\sqrt{3} \sum_i \kappa_i \langle X, \nu_i \rangle N_i =$$

per quanto ottenuto riguardo a  $\langle X, \nu_i \rangle$

$$= \sqrt{3} \kappa_0 \frac{1}{\sqrt{3}}(u_1 + u_2) N_0 + \sqrt{3} \kappa_1 \frac{1}{\sqrt{3}}(u_0 - u_2) N_1 + \sqrt{3} \kappa_2 \frac{1}{\sqrt{3}}(-u_1 - u_0) N_2 =$$

dato che  $-N_1 + N_2 + N_0 = 0$

$$= \kappa_0(u_1 + u_2)(N_1 - N_2) + \kappa_1(u_0 - u_2)(N_0 + N_2) + \kappa_2(-u_1 - u_0)(N_1 - N_0) =$$

$$= [\kappa_1(u_0 - u_2) + \kappa_2(u_1 + u_0)] N_0 + [\kappa_0(u_1 + u_2) - \kappa_2(u_0 + u_1)] N_1 +$$

$$+ [\kappa_1(u_0 - u_2) - \kappa_0(u_1 + u_2)] N_2 =$$

$$= \sqrt{3} \frac{(\kappa_1 + \kappa_2)}{\sqrt{3}} u_0 N_0 + (\kappa_2 u_1 - \kappa_1 u_2) N_0 + \sqrt{3} \frac{(\kappa_0 - \kappa_2)}{\sqrt{3}} u_1 N_1 + (\kappa_0 u_2 - \kappa_2 u_0) N_1 +$$

$$+ \sqrt{3} \frac{(-\kappa_1 - \kappa_0)}{\sqrt{3}} u_2 N_2 + (\kappa_1 u_0 - \kappa_0 u_1) N_2 =$$

per definizione di  $q_i$

$$= \sqrt{3} \sum_i q_i u_i N_i + \{(\kappa_0 u_2 - \kappa_2 u_0) N_1 + (\kappa_1 u_0 - \kappa_0 u_1) N_2 + (\kappa_2 u_1 - \kappa_1 u_2) N_0\}.$$

La sommatoria all'interno delle parentesi graffe coincide a meno del segno con il determinante della seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} N_1^j & \kappa_1 & u_1 \\ N_2^j & \kappa_2 & u_2 \\ N_0^j & \kappa_0 & u_0 \end{pmatrix}$$

dove  $\forall i \in \{1, 2, 3\} N_i = (N_i^1, \dots, N_i^n)$ . Ma questo determinante è nullo, dato che  $-N_1^j + N_2^j + N_0^j = 0$ ,  $-u_1 + u_2 + u_0 = 0$ ,  $-\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_0 = 0$ ; quest'ultima uguaglianza deriva dal fatto che  $-H_1 + H_2 + H_0 = 0$  e che  $\forall Z, T \in TC$   $\sigma_1(Z, T) + \sigma_2(Z, T) + \sigma_0(Z, T) = 0$ . In questo modo si è mostrata la prima delle uguaglianze della tesi del lemma.

Per provare la seconda, si considera  $\nu_2 = R(\theta_2)\nu_1$ ,  $\nu_0 = R(\theta_0)\nu_1$ , dove  $R(\theta)$  è la rotazione nel piano generato da  $\nu_1$  e  $N_1$  con matrice

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Si ha che  $D_X(\nu_0 + \nu_1 + \nu_2) = (id + R(\theta_2) + R(\theta_0)) \frac{d\nu_1}{dt} + \frac{d\theta_2}{dt}(-N_2) + \frac{d\theta_0}{dt}(-N_0) = -\{\frac{d\theta_2}{dt}N_2 + \frac{d\theta_0}{dt}N_0\}$ .  $\square$

**Definizione 4.5.2** (funzione ammissibile). Data una double bubble stazionaria  $\Sigma$ , si dice che una funzione  $u : \cup \Sigma_i \rightarrow \mathbb{R}$  definita sull'unione disgiunta delle superfici  $\Sigma_i$  è ammissibile se le restrizioni  $u_i$  sulle  $\Sigma_i$  stanno nello spazio di Sobolev  $H^1$  e soddisfano la condizione al bordo

$$u_1 = u_2 + u_0 \text{ lungo l'insieme singolare } C.$$

**Notazione 4.5.3.** Lo spazio delle funzioni ammissibili che soddisfano le condizioni

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_1} u_1 + \int_{\Sigma_0} u_0 &= 0 \\ \int_{\Sigma_2} u_2 - \int_{\Sigma_0} u_0 &= 0 \end{aligned}$$

viene denotato con  $\mathcal{F}(\Sigma)$ . Per quanto visto all'inizio della sezione, le funzioni ammissibili corrispondono a deformazioni di  $\Sigma$ , inoltre  $\mathcal{F}(\Sigma)$  sono le variazioni infinitesime delle deformazioni che preservano il volume delle regioni  $R_1$  e  $R_2$ .

**Definizione 4.5.3.** La forma bilineare nello spazio delle funzioni ammissibili per la variazione seconda dell'area (si veda la proposizione 4.5.1) sarà denotata con  $Q$  ed è data da

$$\begin{aligned} Q(u, v) &:= \int_{\Sigma} \{ \langle \nabla u, \nabla v \rangle - |\sigma|^2 uv \} - \sum_{i=0,1,2} \int_C q_i u_i v_i = \\ &= - \int_{\Sigma} (\Delta u + |\sigma|^2 u) v - \sum_{i=0,1,2} \int_C \{ (\frac{\partial u_i}{\partial v_i} + q_i u_i) v_i \} \end{aligned}$$

dove  $\nu_i$  è la normale interna a  $C$  in  $\Sigma_i$  e  $q_i$  sono le funzioni definite nell'enunciato della proposizione 4.5.1.

**Definizione 4.5.4** (double bubble stabile). Una double bubble  $C^\infty$  è stabile se è stazionaria e  $Q(u, u) \geq 0$  per ogni  $u \in \mathcal{F}(\Sigma)$ . In caso contrario è instabile.

*Osservazione 4.5.4.* Per il lemma 4.5.2 una double bubble di perimetro minimo è stabile.

**Lemma 4.5.4.** *Sia  $\Sigma$  una double bubble stabile e  $u \in \mathcal{F}(\Sigma)$  tale che  $Q(u, u) = 0$ . Allora  $u$  è  $C^\infty$  nell'interno di  $\Sigma_i$ ,  $i = 0, 1, 2$  ed esistono  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  con  $\lambda_1 = \lambda_0 + \lambda_2$  tali che*

$$\Delta u_i + |\sigma|^2 u_i = \lambda_i \text{ con } \Sigma_i.$$

*Dimostrazione.* Poiché  $\Sigma$  è stabile  $Q(u + tv, u + tv) \geq 0$  per ogni  $v \in \mathcal{F}$  e per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Quindi

$$\begin{aligned} 0 &\leq Q(u + tv, u + tv) = Q(u, u) + 2tQ(u, v) + t^2Q(v, v) = \\ &= 2tQ(u, v) + t^2Q(v, v) \quad \forall v \in \mathcal{F} \text{ e } \forall t \in \mathbb{R}; \end{aligned}$$

dato che  $Q(v, v) \geq 0$ , affinché la disuguaglianza  $2tQ(u, v) + t^2Q(v, v) \geq 0$  possa essere verificata per ogni valore di  $t$  reale (negativo o positivo) bisogna che  $Q(u, v) = 0$ . Allora prendendo una qualsiasi funzione con media zero e supporto contenuto in  $\overset{\circ}{\Sigma}_i$  l'equazione da dimostrare vale nel senso delle distribuzioni. Poiché il laplaciano è ipoellittico,  $u$  è  $C^\infty$  in  $\overset{\circ}{\Sigma}_i$ .  $\square$

**Definizione 4.5.5** (funzione di Jacobi). Una funzione ammissibile  $u$  è di Jacobi se corrisponde a una deformazione infinitesimale di  $\Sigma$  che preserva la curvatura media delle superfici  $\Sigma_i$  e il fatto che queste superfici si incontrino in maniera equiangolare lungo l'insieme singolare. Ripercorrendo i primi passi della dimostrazione della proposizione 4.5.1 si trova che una funzione  $u$  è di Jacobi se e solo se

$$\begin{cases} \Delta u + |\sigma|^2 u = 0 \text{ su } \Sigma \\ -(\frac{\partial u_1}{\partial \nu_1} + q_1 u_1) = \frac{\partial u_2}{\partial \nu_2} + q_2 u_2 = \frac{\partial u_0}{\partial \nu_0} + q_0 u_0 \text{ lungo } C \end{cases}$$

**Lemma 4.5.5.** *Sia  $S \subset \Sigma$  un sottodominio con bordo  $C^\infty$  a tratti e  $u$  una funzione di Jacobi su  $\Sigma$  che si annulla su  $\partial S$  (in particolare si assume che tutte le  $u_i$  si annullano su  $\partial S \cap C$ ). Se  $w$  si definisce nel modo seguente*

$$w = \begin{cases} u, & \text{su } S \\ 0, & \text{su } \Sigma - S \end{cases}$$

*allora  $w$  è una funzione ammissibile e  $Q(w, w) = 0$ . Sia  $S' \subset \Sigma$  un secondo sottodominio con le stesse proprietà di  $S$  e con funzione ammissibile associata  $w'$ . Se l'interno di  $S$  e di  $S'$  sono disgiunti, allora  $Q(w, w') = 0$ .*

*Dimostrazione.* Dalla definizione di  $Q$  (definizione 4.5.3) e di funzione di Jacobi (definizione 4.5.5) si ricava che una funzione  $u$  di Jacobi deve soddisfare  $Q(u, v) = 0 \forall v$  funzione ammissibile.

Da questo segue che  $Q(w, w) = Q(u, w) = 0$ .

Sia  $w'$  una funzione ammissibile definita in maniera analoga a  $w$ :

$$w' = \begin{cases} u, & \text{su } S' \\ 0, & \text{su } \Sigma - S' \end{cases}$$

con  $S' \subset \Sigma$  un sottodominio con le stesse proprietà di  $S$ . Si usa ora la prima asserzione del lemma (già provata) con al posto della coppia  $(v, w)$ , la coppia  $(w, w')$ ; quindi  $Q(w, w') = 0$ .  $\square$

## 4.6 Ipersuperfici Delaunay

Dalla sezione precedente con argomenti di simmetria, concavità e decomposizione si trova il seguente teorema.

**Teorema 4.6.1** (double bubbles di area minima). **(a)** *Una double bubble di area minima in  $\mathbb{R}^n$  (con  $n \geq 3$ ) è un'ipersuperficie di rivoluzione rispetto ad una retta  $L$  (si veda il teorema di simmetria 4.2.2 con  $m = 2$ ).*

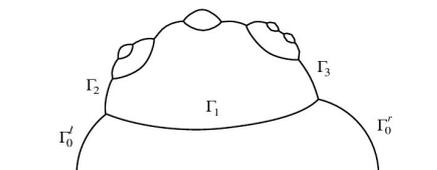


Figura 4.4: Si veda [4], p.471

- (b) *In una double bubble di area minima entrambe le regioni hanno pressione positiva (si veda il corollario 4.3.1).*
- (c) *Una double bubble di area minima o è la standard double bubble oppure consiste di una sfera topologica con un albero finito di anelli attaccati come in figura 4.4. Le due cupole sono sottoinsiemi di sfere e la radice dell'albero ha un unico ramo. Le ipersuperfici di cui è composta una standard double bubble sono ipersuperfici Delaunay  $C^\infty$  che si incontrano in tre con un angolo di 120 gradi lungo sfere  $(n-2)$ -dimensionali (si veda il teorema di struttura 4.4.1).*

**Notazione 4.6.1.** Sia  $\Omega$  una componente connessa delle regioni  $R_1$  e  $R_2$  in una double bubble di area minima non standard. Allora o i sottoinsiemi  $C^\infty$  nel bordo di  $\Omega$  sono anelli o  $\partial\Omega$  è l'unione di due cupole sferiche  $D_1$  e  $D_2$  e un anello  $M_0$ . Nel primo caso si dice che  $\Omega$  è una componente torica, nell'altro una componente sferica.

**Definizione 4.6.1** (ipersuperfici Delaunay). Le ipersuperfici di Delaunay sono ipersuperfici di rivoluzione con curvatura media costante in  $\mathbb{R}^n$ .

**Notazione 4.6.2.** Sia  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$  un'ipersuperficie e si assuma che sia invariante sotto l'azione del gruppo  $O(n)$  delle isometrie di  $\mathbb{R}^n$  che fissano l'asse  $x_1$ . L'ipersuperficie  $\Sigma$  è generata da una curva  $\Gamma$  contenuta nel piano  $x_1x_2$ . Le coordinate  $x_1, x_2$  saranno denotate  $x$  e  $y$  rispettivamente. La curva  $\Gamma = (x, y)$  viene parametrizzata da una lunghezza d'arco  $s$ . Se  $\alpha$  è l'angolo tra la tangente a  $\Gamma$  e la direzione in  $x$  positiva si sceglierà il campo vettoriale normale  $N = (\sin \alpha, -\cos \alpha)$ .

**Lemma 4.6.1.** *Nelle notazioni di cui sopra, la curva generatrice  $\Gamma$  di un'ipersuperficie  $O(n)$ -invariante  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$  con curvatura media  $H$  rispetto al vettore normale  $N = (\sin \alpha, -\cos \alpha)$  soddisfa il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie*

$$\begin{cases} x' = \cos \alpha \\ y' = \sin \alpha \\ \alpha' = -(n-1)H + (n-2)\frac{\cos \alpha}{y}. \end{cases} \quad (4.13)$$

*Inoltre se  $H$  è costante allora il sistema ha integrale primo*

$$y^{n-2} \cos \alpha - Hy^{n-1} = F, \quad (4.14)$$

*dove la costante  $F$  è detta forza della curva  $\Gamma$ .*

**Proposizione 4.6.1.** *Ogni soluzione locale del sistema di cui al lemma precedente è parte di una soluzione completa  $\Gamma$  che genera un'ipersuperficie  $\Sigma$  con curvatura media costante di diversi tipi possibili:*

1. *Se  $FH > 0$ , allora  $\Gamma$  è un grafico periodico lungo l'asse  $x$ . Genera un'onduloide periodica immersa o un cilindro.*
2. *Se  $FH < 0$ , allora  $\Gamma$  è una curva localmente convessa e  $\Sigma$  è una nodoide che ha auto-intersezioni.*
3. *Se  $F = 0$  e  $H \neq 0$ , allora  $\Sigma$  è una sfera.*
4. *Se  $H = 0$  e  $F \neq 0$  si ottiene una catenaria che genera una catenoide immersa  $\Sigma$  con  $F > 0$  se la normale punta in basso e  $F < 0$  se la normale punta in alto.*
5. *Se  $H = 0$  e  $F = 0$ , allora  $\Gamma$  è una linea dritta ortogonale all'asse  $x$  che genera un iperpiano.*
6. *Se  $\Sigma$  è tangente all'asse  $x$ , allora deve essere una sfera o un iperpiano.*
7. *La curva  $\Gamma$  è determinata a meno di traslazioni lungo l'asse delle  $x$  dalla coppia  $(H, F)$ .*

*Nota 4.6.1.* Si usano le seguenti proprietà di curve che generano ipersuperfici Delaunay:

- onduloidi e nodoidi hanno curvatura media positiva rispetto alla normale che punta in basso verso il massimo della coordinata  $y$ ;
- la nodoide è convessa nel senso che il vettore normale ruota monotonicamente. Questo segue dalle equazioni del lemma 4.6.1.

**Lemma 4.6.2** (bilanciamento delle forze). *Si assume che le tre curve generatrici  $\Gamma_i$  con  $i = 0, 1, 2$  di ipersuperfici con curvatura media costante  $H_i$  e forza  $F_i$  si incontrano in uno stesso punto. Se  $-H_1 + H_2 + H_0 = 0$  e  $-N_1 + N_2 + N_0 = 0$  in questo punto, allora  $-F_1 + F_2 + F_0 = 0$ .*

**Lemma 4.6.3.** *Sia  $\Sigma$  una double bubble non standard in  $\mathbb{R}^n$  (si veda la figura 4.4) e sia  $R_1$  la regione di pressione maggiore o di pressione uguale a quella dell'altra regione,  $R_2$ . Si assume che la componente sferica  $\Omega$  sia contenuta in  $R_1$ . Sia  $\Gamma_1$  una curva generatrice di  $M_0 = \Sigma_0 \cap \partial\Omega$  (si veda la notazione 4.6.1). Allora la forza di  $\Gamma_1$  è positiva e  $\Gamma_1$  è un'onduloide o una catenoide e in particolare un grafico.*

*Dimostrazione.* Siano  $\Gamma_0^l$  e  $\Gamma_0^r$  rispettivamente il cerchio sinistro e destro in  $\partial\Omega$ . Si considera la curva immersa  $\Gamma$  ottenuta da  $\Gamma_0^r$ ,  $\Gamma_0^l$  e  $\Gamma_1$ . Sia  $\Gamma_2$  la terza curva generatrice che incontra  $\Gamma_0^l \cap \Gamma_1$  e sia  $\Gamma_3$  quella che incontra  $\Gamma_0^r \cap \Gamma_1$ .

**Caso 1: la forza di  $\Gamma_1$  è negativa** In questo caso  $\Gamma_1$  è una nodoide (si veda il lemma 4.6.1) con curvatura positiva dato che  $H_0 = H_1 - H_2 \geq 0$ . Il grafico di  $\Gamma$  è convesso; dato che  $\Gamma$  (curva che genera  $\Sigma$ ) incontra ortogonalmente  $L$  (linea di simmetria di  $\Sigma$ ), la curvatura totale di  $\Gamma$  è  $\pi$ . Per ciascuno dei vertici  $\Gamma_0^r \cap \Gamma_1$  e  $\Gamma_0^l \cap \Gamma_1$  l'angolo interno di  $\Gamma$  è  $\frac{\pi}{3}$ . Per il lemma 4.6.2,  $\Gamma_2$  e  $\Gamma_3$  hanno forza positiva e sono onduloidi (si veda il lemma 4.6.1). Dato che  $R_2$  ha pressione positiva (si veda la definizione 4.5.1) sia  $\Gamma_2$  che  $\Gamma_3$  sono grafici interni a  $\Gamma_1$  (cioè la regione esterna giace sopra  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ ). Quindi i due archi circolari  $\Gamma_0^l$  e  $\Gamma_0^r$  hanno misura angolare maggiore di  $\frac{\pi}{3}$ ; allora la curvatura totale di  $\Gamma$  dovrebbe

essere maggiore di  $\frac{4\pi}{3}$ . Questo però è assurdo, dato che la curvatura totale di  $\Gamma$  è  $\pi$ .

**Caso 2: la forza di  $\Gamma_1$  è nulla** In questo caso  $\Gamma_1$  è un pezzo di cerchio o una linea ortogonale all'asse di rivoluzione (ogni curva che incontra l'asse deve essere un cerchio o una retta ortogonale all'asse - si veda la dimostrazione del teorema di struttura 4.4.1): la prima possibilità è esclusa con la stessa argomentazione usata per le nodoidi nel caso precedente; la seconda invece è impossibile.

**Caso 3: la forza di  $\Gamma_1$  è positiva** In tal caso  $\Gamma_1$  è un'onduloide o una catenoide e in particolare un grafico (si veda il lemma 4.6.1).

□

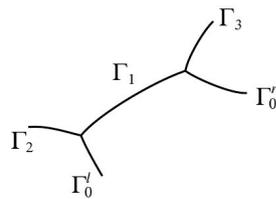


Figura 4.5: Si veda [4], p.474

**Lemma 4.6.4.** *Sia  $\Sigma$  una double bubble di rivoluzione tale che entrambe le regioni abbiano pressione positiva. Allora non è possibile che  $\Sigma$  contenga sottoinsiemi sferici  $\Gamma_0^l, \Gamma_0^r, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  come in figura 4.5 con  $\Gamma_1 \subset \Sigma_1$ .*

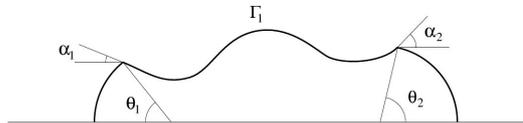


Figura 4.6: Si veda [4], p.474

**Lemma 4.6.5.** *Sia  $\Sigma$  una double bubble non standard di area minima in  $\mathbb{R}^3$ . Sia  $\theta_i$  l'angolo sotteso dalla cupola sferica  $D_i$  come in figura 4.6.*

1. Se  $\theta_1, \theta_2 \leq \frac{\pi}{6}$ , allora  $\theta_1 = \theta_2$  e  $M_0$  è simmetrica rispetto ad un piano ortogonale all'asse di rivoluzione.
2. Se  $\theta_1 \leq \frac{\pi}{6} < \theta_2 \leq \frac{\pi}{3}$ , allora  $\theta_2 > \frac{\pi}{3} - \theta_1$ .

*Dimostrazione.* Si assume, senza perdita di generalità, che la componente sferica  $\Omega$  sia contenuta in  $R_1$ ; normalizzando si può considerare  $H_1 = 1$ . Sia  $\Gamma_1$  la curva che genera  $M_0$ , parametrizzata da sinistra a destra. Dall'equazione (4.14) con  $n = 2$  e con  $\alpha_i = \theta_i - \frac{\pi}{6}$  si ha che la forza  $F_0$  di  $\Gamma_1$  è data da  $g(\theta_1) = g(\theta_2)$  dove

$$g(\theta) := \left(\frac{1}{2} - H_0\right) \sin^2(\theta) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\theta) \sin(\theta).$$

Dato che, per la proposizione 4.6.1.b,  $H_0 = 1 - H_2 < 1$ , allora  $\frac{1}{2} - H_0 > -\frac{1}{2}$  e quindi

$$g'(\theta) \geq -\frac{1}{2} 2 \sin(\theta) \cos(\theta) + \frac{\sqrt{3}}{2} (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) = -\frac{1}{2} \sin(2\theta) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(2\theta) > 0$$

e quindi  $g \nearrow s.$  su  $[0, \frac{\pi}{6}]$ . Dunque se  $\theta_1, \theta_2 \leq \frac{\pi}{6}$  (ipotesi del punto 1.), allora  $\theta_1 = \theta_2$ . Inoltre i punti estremi di  $\Gamma_1$  hanno la stessa altezza  $y_i$  e lo stesso angolo  $\alpha_i$ . In questo modo, per l'unicità delle soluzioni del sistema (4.13) rispetto alle condizioni iniziali, si è dimostrato il primo punto.

Sia

$$\begin{aligned} h(\theta) &:= -\frac{1}{2} \sin^2(\theta) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\theta) \cos(\theta) = \\ &= \left(\frac{1}{2} - H_0 - 1 + H_0\right) \sin^2(\theta) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\theta) \sin(\theta) = g(\theta) - (1 - H_0) \sin^2(\theta). \end{aligned}$$

È possibile mostrare che  $h$  è simmetrica rispetto a  $\frac{\pi}{6}$  (cioè  $h(\frac{\pi}{6} + \theta) = h(\frac{\pi}{6} - \theta)$ ) e che è crescente nell'intervallo  $[0, \frac{\pi}{6}]$  (infatti  $h'(\theta) = -\frac{1}{2} \sin(2\theta) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(2\theta)$ ). Quindi per via dell'andamento crescente e delle definizioni date per  $g$  e  $h$  si trova

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right) &= (1 - H_0) \sin^2\left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right) + h\left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right) < \\ &< (1 - H_0) \sin^2(\theta_2) + h(\theta_2) = g(\theta_2) = g(\theta_1); \end{aligned}$$

in particolare  $g(\frac{\pi}{3} - \theta_2) < g(\theta_1)$ . Dato che  $g \nearrow s.$  su  $[0, \frac{\pi}{6}]$ , si ottiene  $\frac{\pi}{3} - \theta_2 < \theta_1$ , dimostrando così anche il secondo punto.  $\square$

## 4.7 Separazione e instabilità

**Notazione 4.7.1.** Sia  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$  una double bubble stazionaria di rivoluzione il cui asse  $L$  è l'asse  $x_1$  con curva generatrice  $\Gamma \subset \{(x_1, x_2) | x_2 \geq 0\}$  che consiste di archi circolari  $\bar{\Gamma}_0$  che incontrano l'asse e altri archi  $\bar{\Gamma}_i$  che si incontrano in tre, con interni  $\Gamma_i$  (si veda la figura 4.7). La bolla  $\Sigma$  è invariante sotto l'azione del gruppo  $O(n)$  delle trasformazioni ortogonali in  $\mathbb{R}^n$  che fissano l'asse  $x_1$ . Si considera la mappa  $f : \Gamma - L \rightarrow L \cup \{\infty\}$  che porta  $p \in \Gamma - L$  in  $L(p) \cap L$  dove  $L(p)$  denota la retta normale a  $\Gamma$  in  $p$ . Se  $L(p)$  non incontra  $L$ , si definisce l'immagine di  $p$  come  $f(p) = \infty$ . Si nota che  $f$  assume più di un valore nei punti estremi degli archi  $\Gamma_i$ , dove si incontrano in tre. Mediante  $iA$  e  $iB$  si denoteranno le immagini attraverso  $f$  degli estremi di  $\bar{\Gamma}_i$ .

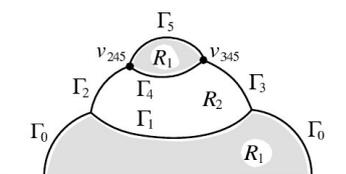


Figura 4.7: Si veda [4], p.477

**Proposizione 4.7.1** (separazione). *Sia  $n \geq 3$ . Sia  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$  una double bubble stabile di rivoluzione con asse  $L$ . Si assume che esista un numero finito di punti  $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$  in  $\cup \Gamma_i$  con  $x = f(p_1) = \dots = f(p_k)$  che separano  $\Gamma$ . Si assume inoltre che  $\{p_1, \dots, p_k\}$  sia l'insieme più piccolo con questa proprietà. Allora ogni componente connessa di  $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2$  che contiene uno dei punti  $p_i$  è sottoinsieme di una sfera centrata in  $x$  (se  $x \in L$ ) o sottoinsieme di un iperpiano ortogonale a  $L$  (se  $x = \infty$ ).*

*Dimostrazione. Caso  $x \in L$ .* A meno di traslazioni si può supporre  $x = 0$ .

Dato  $\theta \in \mathbb{R}$ , il seguente gruppo ad un parametro di rotazioni

$$\varphi_\theta(x_1, \dots, x_n) = (\cos(\theta)x_1 + \sin(\theta)x_2, -\sin(\theta)x_1 + \cos(\theta)x_2, x_3, \dots, x_n)$$

corrisponde alla seguente funzione di Jacobi su  $\Sigma$

$$u : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u : p \mapsto \left\langle \frac{d}{d\theta} \Big|_{\theta=0} \varphi_\theta(p), N(p) \right\rangle = -\det(p, N(p), e_3, \dots, e_n)$$

dove  $N(p)$  è il vettore unitario normale a  $\Sigma$  nel punto  $p$  e  $\{e_1, \dots, e_n\}$  è la base ortonormale canonica di  $\mathbb{R}^n$ .

Sia  $M_0 := \Sigma \cap \{x_2 = 0\}$ . Per la simmetria di  $\Sigma$ , nel caso in cui  $p \in M_0$ , il vettore  $N(p)$  si troverebbe sull'iperpiano  $x_2 = 0$  e dunque  $u \Big|_{M_0} \equiv 0$ ; d'altro canto, se  $p \in f^{-1}(0)$ , allora il vettore  $N(p)$  e  $p$  si troverebbero sulla stessa retta. Chiamando  $M(p)$  l'orbita di  $p$  sotto l'azione di  $O(n-1)$ , per l'invarianza di  $\Sigma$  rispetto al gruppo  $O(n-1)$ , si ha che  $u \Big|_{M(p)} \equiv 0$ .

Dato che per ipotesi i punti  $p_1, \dots, p_k$  separano la curva  $\Gamma$ , l'insieme  $M(p_1) \cup \dots \cup M(p_k) \cup M_0$  è un'ipersuperficie di  $\Sigma$  contenente  $u^{-1}(0)$  che separa  $\Sigma$  in almeno quattro componenti. Infatti dato che l'insieme  $\{p_1, \dots, p_k\}$  è il più piccolo tra i sottoinsiemi di  $f^{-1}(0)$  che soddisfano la proprietà di separazione, l'insieme  $\Sigma - [M(p_1) \cup \dots \cup M(p_k)]$  ha esattamente quattro componenti  $(\Lambda_i)_{i \in \{1,2,3,4\}}$ ; inoltre ciascuno degli insiemi  $M(p_1), \dots, M(p_k), M_0$  interseca il bordo di ciascuna delle quattro componenti.

Siano  $(v^{(i)})_{i \in \{1,2,3,4\}}$  funzioni su  $\Sigma$  definite come segue:

$$v^{(i)} = \begin{cases} u, & \text{su } \Lambda_i \\ 0, & \text{su } \Sigma - \Lambda_i. \end{cases}$$

Per come sono state definite le  $v^{(i)}$  sono funzioni ammissibili; inoltre esistono  $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$  non tutti nulli tali che  $v = \sum_{i=1}^3 a_i v^{(i)}$  verifica la condizione (4.10), cioè tali che  $v \in \mathcal{F}(\Sigma)$ . Per il lemma 4.5.5  $Q(v, v) = \sum_{i=1}^3 a_i^2 Q(v^{(i)}, v^{(i)}) = 0$ . Dato che  $u$  è una funzione di Jacobi (si veda la definizione 4.5.5) si ha

$$\Delta v + |\sigma|^2 v = 0 \tag{4.15}$$

su  $\Sigma - [M(p_1) \cup \dots \cup M(p_k) \cup M_0]$ . In realtà (4.15) vale su tutto  $\Sigma$ , dato che per ipotesi  $\Sigma$  è stabile e tenendo conto del lemma 4.5.4.

Dato  $i$ , sia  $S$  la componente connessa di un sottoinsieme liscio di  $\Sigma$  che contenga il punto  $p_i$ . Dato che  $p_i \in \mathring{S}$ , tutti e quattro i  $\Lambda_i$  intersecano  $\mathring{S}$ . Dato che  $v|_{S \cap \Lambda_4} \equiv 0$ , per la proprietà di prolungamento unico  $v|_S \equiv 0$ . Dunque  $u = 0$  su  $S \cap \Lambda_j$  per ogni  $j \in 1, 2, 3$  a cui corrisponde  $a_j \neq 0$ . Usando ancora la proprietà di prolungamento unico, dato che tale  $j$  esiste,  $u = 0$  su tutto  $S$ . Perciò, per come è stata definita  $u$ , il gruppo ad un parametro di rotazioni  $\varphi_\theta$  fissa  $S$ ; dato che  $S$  è simmetrica rotazionalmente rispetto all'asse  $x_1$ , questa componente deve essere sottoinsieme di una sfera centrata nell'origine.

**Caso  $x = \infty$ .** Si ripete il ragionamento del caso  $x \in L$  prendendo invece di  $\varphi_\theta$  il gruppo ad un parametro di traslazioni

$$T_\theta(x_1, \dots, x_n) = (x_1, x_2 + \theta, \dots, x_n)$$

e la sua funzione di Jacobi associata  $u(p) = \langle N(p), e_2 \rangle$ .

□

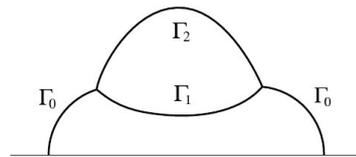


Figura 4.8: Si veda [4], p.477

**Corollario 4.7.1.** *Non esiste una double bubble stabile di rivoluzione in  $\mathbb{R}^n$  in cui la struttura del grafico è quella della figura 4.8.*

*Dimostrazione.* Si suppone che la retta equidistante dai due vertici intersechi l'asse  $L$  nel punto  $p$ ; allora  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  hanno ciascuno un punto interno molto lontano o molto vicino a  $p$ , cosicché  $p \in f(\Gamma_1) \cap f(\Gamma_2)$ . Per la proposizione

4.7.1, sia  $\Gamma_1$  che  $\Gamma_2$  sono sottoinsiemi di sfere centrate in  $L$ , il che è impossibile. Nel caso invece in cui la suddetta retta equidistante sia orizzontale, allora  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  hanno ciascuno un punto interno molto lontano a destra o a sinistra, cosicché  $\infty \in f(\Gamma_1) \cap f(\Gamma_2)$ . Usando ancora la proposizione 4.7.1, allora  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  dovrebbero essere entrambi verticali, il che è impossibile.

Quindi la double bubble della figura 4.8 non può essere stabile.  $\square$

**Corollario 4.7.2.** *Sia una double bubble stabile di rivoluzione in  $\mathbb{R}^n$  in cui entrambe le regioni hanno pressione positiva. Si assume che una delle regioni,  $R_2$ , sia connessa e che l'altra,  $R_1$ , abbia due componenti e che la struttura del grafico sia come in figura 4.7. Allora non esiste  $x \in L$  tale che  $f^{-1}(x) - \Gamma_0$  contenga punti nell'interno di distinti  $\Gamma_j$  che separano  $\Gamma$ .*

*Dimostrazione.* Devono esserci dei punti in  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  o  $\Gamma_3$ . Per la proposizione 4.7.1, uno di questi è sferico (ovvero appartiene a una componente connessa della double bubble che risulta essere un sottoinsieme di una sfera). Per il lemma 4.6.2, sia  $\Gamma_1$  che  $\Gamma_2$  che  $\Gamma_3$  sono sferici, ma questo è impossibile tenendo conto del lemma 4.6.4.  $\square$

**Corollario 4.7.3.** *Sia una double bubble stabile di rivoluzione. Se  $f$  non è iniettiva nell'interno di  $\Gamma_i$ , allora  $\Gamma_i$  è un arco circolare o una retta verticale.*

**Proposizione 4.7.2.** *Si consideri una double bubble  $\Sigma$  non standard di area minima in  $\mathbb{R}^n$  che è necessariamente rotazionalmente simmetrica attorno a un asse  $L$ . Allora non esiste  $x \in L$  tale che  $f^{-1}(x) - \Gamma_0$  contenga punti nell'interno di distinti  $\Gamma_j$  che separano  $\Gamma$ .*

*Dimostrazione.* Dal momento che ogni componente connessa di  $\Sigma$  confina con l'esterno, un insieme di separazione deve tagliare la parte esterna del bordo di una delle componenti. Per il lemma 4.6.2, la parte esterna del bordo di questa componente deve essere composta da sottoinsiemi di sfere.

Si supponga che  $f^{-1}(x)$  tagli due sottoinsiemi della parte esterna del bordo. In questo caso, questi due sottoinsiemi devono essere porzioni di sfere con lo stesso centro e la stessa curvatura media; in sostanza quindi sono porzioni

della stessa sfera. La parte di  $\Sigma$  tra questi due sottoinsiemi può essere ruotata attorno alla sfera, senza che cambino il perimetro o il volume racchiuso, fino a che arriva a toccare un'altra parte di  $\Sigma$ ; in questo modo si ottiene una bolla non regolare e quindi non minimizzante, in contrasto con quanto ipotizzato su  $\Sigma$ .

Allora  $f^{-1}(x)$  taglia la parte interna del bordo (un sottoinsieme di  $\Sigma_0$  - si veda la definizione 4.0.2). Per il lemma 4.6.2, gli estremi della parte interna del bordo incontrano altre due sfere, ma questo è in contraddizione con il lemma 4.6.4.  $\square$

**Proposizione 4.7.3.** *Non esiste una double bubble stabile di rivoluzione in  $\mathbb{R}^n$  in cui entrambe le regioni hanno pressione positiva, la regione,  $R_2$ , di pressione inferiore (o uguale all'altra) è connessa e l'altra regione,  $R_1$ , ha due componenti e la struttura del grafico è come in figura 4.7.*

*Dimostrazione.* Si suppone per assurdo che esista tale double bubble.

Si veda la figura 4.7 : i tratti contrassegnati come  $\Gamma_0$  sono sferici, mentre  $\Gamma_1$  è un onduloide o una catenoide ed è un grafico per il lemma 4.6.3. Per il lemma 4.6.2,  $\Gamma_2$  e  $\Gamma_3$  sono nodoidi. Dato che la terza componente in alto ha pressione (ovvero curvatura media) maggiore,  $\Gamma_4$  deve essere una nodoide, una catenoide o una linea verticale, a meno che non sia capovolta (il che non succede per i casi elencati in figura 4.14).

Si considerino in particolare la terza componente in alto e i suoi due vertici,  $\nu_{245}$  e  $\nu_{345}$ .

Nel caso della figura 4.9, in cui tutte le curve sono grafici, le immagini  $iA$

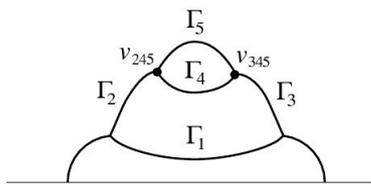


Figura 4.9: Si veda [4], p.479

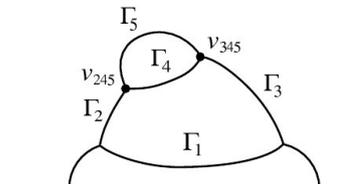


Figura 4.10: Si veda [4], p.479

e  $iB$  attraverso  $f$  dell'estremo destro e sinistro di  $\Gamma_i$  soddisfano le seguenti disuguaglianze:  $4A < 2B < 5A$  e  $5B < 3A < 4B$ . Queste continuano a valere facendo ruotare un vertice, fino a che i tre vettori tangenti diventano verticali.

Ruotando  $\nu_{245}$  di un 'passo' in senso antiorario come in figura 4.10 si ottiene  $5A < 4A < 2B$ .

Per evitare che  $\Gamma_4$  o  $\Gamma_5$  diano due tangenti verticali (questo non sarebbe permesso dal corollario 4.7.3), i due vertici devono ruotare nello stesso verso; si scelga ad esempio il senso antiorario. Supponendo che  $\nu_{245}$  e  $\nu_{345}$  ruotino in senso antiorario di  $m_1$  e  $m_2$  passi rispettivamente, allora  $m_1 \leq 2$  e  $m_2 \leq 3$ . Infatti se  $m_1 > 2$ ,  $\Gamma_2$  (tenendo conto che la regione  $R_2$  ha pressione positiva) non potrebbe incontrare  $\Gamma_0$  a  $120^\circ$  (si veda la figura 4.11); inoltre se  $m_2 > 3$ ,  $\Gamma_4$  avrebbe due tangenti verticali (si veda la figura 4.12), ma questo andrebbe contro il corollario 4.7.3.

Si prenda in considerazione il caso  $(m_1 = 2, m_2 = 3)$  come in figura 4.13: in

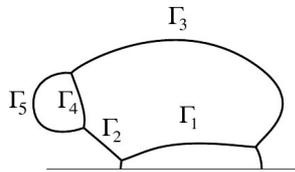


Figura 4.11: Si veda [4], p.479

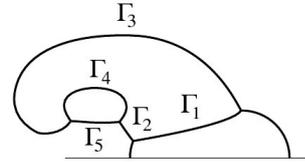


Figura 4.12: Si veda [4], p.479

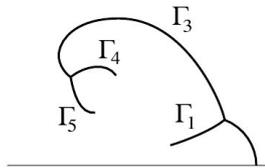


Figura 4.13: Si veda [4], p.479

tal caso  $\Gamma_3$  non è un grafico,  $f(\Gamma_3) = [\infty, 3A) \cup (3B, \infty]$  e, per la proposizione 4.7.1,  $3A \leq 3B$ . Quindi  $3B < 1B$ , altrimenti  $\Gamma_3$  avrebbe due tangenti verticali nel punto  $3B$ , in contraddizione con il corollario 4.7.3. Allora  $1B$

sta in  $f(\Gamma_3)$  e questo va contro il corollario 4.7.2 applicato a  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_3$ .

Rimane ora il caso  $0 \leq m_1 \leq 2$ ,  $0 \leq m_2 \leq 1$  (si veda la figura 4.14).

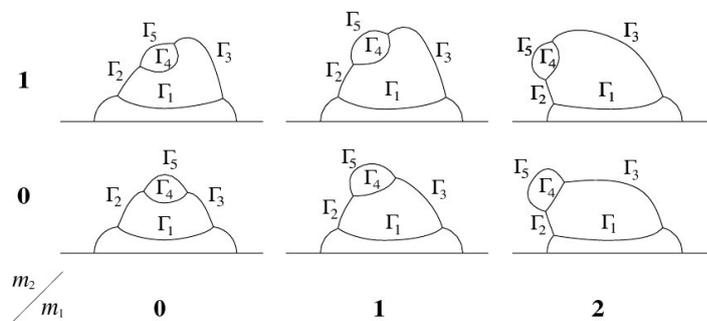


Figura 4.14: Si veda [4], p.480

In questo capoverso si dimostra che  $3A < f(\Gamma_1)$ . Ci si mette dapprima nel caso in cui  $\Gamma_3$  sia un grafico; si considera  $\nu_{13}$ ; allora  $3B < 1B$  e quindi  $f(\Gamma_3) < f(\Gamma_1)$  per il corollario 4.7.2 applicato a  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_3$ . Il vertice  $\nu_{13}$  può ruotare solo in senso orario di un passo, se si vuole fare in modo che la curva sia parte di un cerchio e che  $\Gamma_1$  resti un grafico; in tal caso  $\Gamma_3$  non è un grafico e  $f(\Gamma_3)$  comprende  $[\infty, 3A)$ . Si arriva a

$$3A < f(\Gamma_1), \quad (4.16)$$

come preannunciato, per via del corollario 4.7.2 applicato a  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_3$ .

Per i casi  $(m_1 = 0, m_2 = 0)$  e  $(m_1 = 0, m_2 = 1)$ , un ragionamento analogo porta ad affermare  $f(\Gamma_1) < 2B$ . Considerando i vertici  $\nu_{245}$  e  $\nu_{345}$ , si arriva alla seguente catena di disuguaglianze:  $5B < 3A < f(\Gamma_1) < 2B < 5A$ . Dato che l'angolo  $\theta_5$ , attraverso il quale  $\Gamma_5$  gira, soddisfa la disuguaglianza  $\theta_5 \leq 180^\circ$ , si ha  $4A < 3A$ . Per il caso  $(m_1 = 0, m_2 = 1)$ , caso in cui  $f(\Gamma_4)$  contiene  $(4A, \infty]$ , si avrebbe  $3A \in f(\Gamma_4) \cap f(\Gamma_5)$ , ma questo non è permesso dal corollario 4.7.2 applicato a  $\Gamma_3$ ,  $\Gamma_4$  e  $\Gamma_5$ . Per il caso  $(m_1 = 0, m_2 = 0)$ , prendendo in considerazione  $\nu_{345}$  si trova che  $3A < 4B$ , il che porta alla stessa contraddizione con lo stesso corollario di cui prima.

Si pensi ora ai casi  $(m_1 = 1, m_2 = 0)$  e  $(m_1 = 2, m_2 = 0)$ . Dato che  $5B < 3A$ ,

$3A \in f(\Gamma_5)$ . Dato che  $3A < 4B$ , per il corollario 4.7.2 applicato a  $\Gamma_3, \Gamma_4$  e  $\Gamma_5$ , si deve avere  $3A \leq 4A$ ; in particolare  $\theta_5 \leq 180^\circ$ . Per il corollario 4.7.3 applicato a  $\Gamma_5$ , si ha  $5A \leq 5B$ ; inoltre  $\Gamma_5$  esce da  $\nu_{345}$  e rimane sempre al di sopra della linea orizzontale che esce dallo stesso punto. Per il corollario 4.7.4 si dovrebbe avere  $3A > 4A$ , ma questo non può essere.

Si procede in maniera analoga per i casi rimanenti,  $(m_1 = 1, m_2 = 1)$  e  $(m_1 = 2, m_2 = 1)$ , in cui  $3A \in f(\Gamma_5)$ . Dato che  $f(\Gamma_4) \supseteq (4A, \infty]$ , per il corollario 4.7.2 applicato a  $\Gamma_3, \Gamma_4$  e  $\Gamma_5$ , si ha  $3A \leq 4A$ , ma questo porta a una contraddizione per il caso  $(m_1 = 1, m_2 = 1)$ . In particolare  $\theta_5 > 180^\circ$  e  $5A \leq 5B$ . Se  $\Gamma_5$  parte da  $\nu_{345}$  sopra il livello orizzontale, il corollario 4.7.4 porta a  $3A > 4A$ , una contraddizione. Se invece  $\Gamma_5$  parte da  $\nu_{345}$  sotto il livello orizzontale, allora la normale discendente  $n$  a  $\Gamma_3$  nel punto  $\nu_{345}$  è ruotata in senso antiorario rispetto alla tangente discendente a  $\Gamma_2$  nel punto  $\nu_{12}$  (quindi anche rispetto ad ogni tangente discendente a  $\Gamma_2$ ) e quindi ruotata in senso antiorario rispetto alla normale discendente a  $\Gamma_1$  in  $\nu_{12}$ . Dato che  $\Gamma_4$  è convesso,  $n$  si trova a destra di  $\Gamma_2$  e  $1A < 3A$ , in contraddizione con la disuguaglianza (4.16).  $\square$

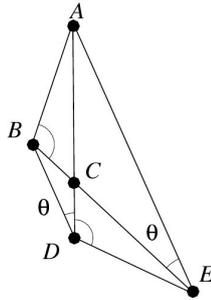


Figura 4.15: Si veda [4], p.481

**Lemma 4.7.1.** *Dati i punti  $A$  e  $B$ , si considerano due punti  $D$  e  $E$  dallo stesso lato di  $AB$  che sottendono lo stesso angolo come in figura 4.15. Allora  $\angle CDE = \angle ABC$ .*

*Dimostrazione.* Dato che  $\angle BCA = \angle DCE$  (poiché angoli opposti al vertice) e i triangoli  $ACE$  e  $BCD$  sono simili (infatti hanno due angoli uguali, quindi tutti e tre), allora sono simili anche i triangoli  $ABC$  e  $CDE$ .  $\square$

**Corollario 4.7.4.** *Nei casi  $(1,0)$ ,  $(2,0)$  e  $(2,1)$  della figura 4.14, si suppone che l'angolo  $\theta_5$ , attraverso il quale  $\Gamma_5$  gira, oltrepassi i  $180^\circ$ , che  $\Gamma_5$  esca da  $\nu_{345}$  e rimanga sempre a livello maggiore o uguale alla linea orizzontale che esce dallo stesso punto e che  $5A \leq 5B$ . Allora  $4A < 3A$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\theta = \theta_5 - 180^\circ > 0$ . Si consideri il lemma 4.7.1 con  $A = \nu_{345}$  e  $B = \nu_{245}$ ,  $AD$  ortogonale rispetto a  $\Gamma_5$  e  $AE$  ortogonale rispetto a  $\Gamma_3$  in  $\nu_{345}$ ,  $BD$  ortogonale rispetto a  $\Gamma_5$  e  $BE$  ortogonale rispetto a  $\Gamma_4$  in  $\nu_{245}$ ; allora  $\angle ADB = \angle AEB = \theta$ . Dato che  $\Gamma_4$  è strettamente convesso (non può essere una linea verticale dato che  $5A \leq 5B$ ), allora  $\angle ABC = 90^\circ$ ; per il lemma 4.7.1  $\angle CDE = \angle ABC = 90^\circ$ . Dato che per ipotesi  $\Gamma_5$  parte da  $\nu_{345}$  sopra o sul livello orizzontale,  $DE$  punta verso il basso.

In questi casi la figura 4.15, in cui  $AD$  è verticale, è ruotata in senso orario di meno di  $90^\circ$ , strettamente meno per via del corollario 4.7.3 tenendo conto che  $\theta_5 > 180^\circ$ .

Dato che  $5A \leq 5B$ , allora  $D$  si trova sull'asse orizzontale o sotto; quindi  $E$  si trova sotto l'asse orizzontale e  $4A < 3A$ .  $\square$

## 4.8 Stima del numero di componenti

**Proposizione 4.8.1.** *In una double bubble di area minima che racchiude i volumi  $v_1$  e  $v_2$  in  $\mathbb{R}^3$ , si suppone che  $R_2$  contenga una componente di volume  $\lambda v_2$ . Allora*

$$2A(v_1, v_2) \geq \lambda^{-\frac{1}{3}}A(v_2) + A(v_1) + A(v_1 + v_2).$$

**Proposizione 4.8.2.** *In una double bubble di area minima in  $\mathbb{R}^3$ , la regione con volume uguale o maggiore è connessa.*

*Dimostrazione.* A meno di riscalfare tutto, si può assumere che i volumi siano  $1 - w$  e  $w$ ; per il teorema 4.3.3, se  $w < \frac{1}{3}$ , allora la regione con il volume maggiore è connessa.

Nel caso  $w \geq \frac{1}{3}$ , per dimostrare che la regione di volume  $1 - w$  è connessa, è sufficiente mostrare che la disuguaglianza della proposizione 4.8.1 non vale per  $\lambda = \frac{1}{2}$ , cioè

$$2A(w, 1 - w) < 2^{\frac{1}{3}}A(1 - w) + A(w) + A(1).$$

Dato che è possibile deformare in maniera continua una standard double bubble in un'altra, per il lemma 4.5.1,  $\frac{dA(w, 1-w)}{dw} > 0$  per  $w < \frac{1}{2}$ ; inoltre la regione a volume inferiore ha pressione maggiore. Così  $A(w, 1-w) \leq A(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Si calcola  $A(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 2^{-\frac{4}{3}}3A(1)$  e  $A(v) = v^{\frac{2}{3}}A(1)$ . Allora è sufficiente mostrare la seguente disuguaglianza

$$2^{-\frac{1}{3}}3 < 2^{\frac{1}{3}}(1 - w)^{\frac{2}{3}} + w^{\frac{2}{3}} + 1.$$

Questa relazione vale nel caso  $w = 0, 1$  e nel caso  $w = 0, 63$ ; dato che il termine a destra è concavo, questo significa che la relazione vale per  $w : 0, 1 \leq w \leq 0, 63$ , quindi in particolare per  $w : \frac{1}{3} \leq w \leq \frac{1}{2}$ .  $\square$

**Lemma 4.8.1.** *In una double bubble di area minima in  $\mathbb{R}^n$  che racchiude due volumi uguali, la regione inferiore ha pressione maggiore.*

*Dimostrazione.* Si consideri la funzione  $A(v, 1 - v)$  che fornisce l'area minima che racchiude e separa due regioni di volume rispettivamente  $v$  e  $1 - v$ . Per il teorema 4.3.1, la funzione di area minima  $A$  è strettamente concava ed è inoltre simmetrica rispetto a  $v = \frac{1}{2}$ . Modificando la superficie di separazione (che ha curvatura media  $H_0$  -si veda la notazione 4.5.1) di una double bubble di area minima si ottiene  $\frac{dA}{dv} = nH_0$  e la derivata destra ( $A'_R$ ) e quella sinistra ( $A'_L$ ) di  $A$  devono soddisfare  $A'_R \leq nH_0 \leq A'_L$ . Quindi  $H_0$  è positiva per  $v < \frac{1}{2}$  e negativa per  $v > \frac{1}{2}$ , cioè la regione a volume inferiore ha pressione maggiore.  $\square$

**Proposizione 4.8.3.** *In una double bubble  $\Sigma$  di area minima in  $\mathbb{R}^3$ , la regione con volume uguale o inferiore ha al più due componenti connesse.*

*Dimostrazione.* Si assuma che il volume della regione  $R_1$  sia minore o uguale al volume della regione  $R_2$ . Per la proposizione 4.6.1 si ha  $H_1, H_2 > 0$ ; per il lemma 4.8.1  $H_0 \geq 0$ . Si ricorda che  $\kappa_i = \sigma_i(\nu_i, \nu_i)$  e si definisce  $c_i = \sigma_i(T, T)$ , dove  $T$  è il vettore tangente unitario della curva singolare  $C$ ; quindi  $2H_i = \kappa_i + c_i$ . Si considera una funzione ammissibile  $u$  invariante rispetto al gruppo di rotazioni ad un parametro di  $\Sigma$ . Siano  $u_i$  funzioni localmente costanti su  $C$ . Si consideri  $Q(u, u)$ , seguendo la definizione 4.5.3,

$$\begin{aligned} Q(u, u) &= \int_{\Sigma} \{ \langle \nabla u, \nabla u \rangle - |\sigma|^2 u^2 \} - \sum_{i,j=0,1,2} \int_C q_i u_i u_j = \\ &= \sum_i \int_{\Sigma_i} \{ |\nabla u_i|^2 - |\sigma_i|^2 u_i^2 \} - \sum_{i=0,1,2} \int_C q_i u_i^2 = \\ &= \sum_i \int_{\Sigma_i} \{ |\nabla u_i|^2 - |\sigma_i|^2 u_i^2 \} - \int_C (q_0 u_0^2 + q_1 u_1^2 + q_2 u_2^2) = \end{aligned}$$

per come sono definiti i  $q_i$  (si veda l'enunciato della proposizione 4.5.1)

$$= \sum_i \int_{\Sigma_i} \{ |\nabla u_i|^2 - |\sigma_i|^2 u_i^2 \} - \frac{1}{\sqrt{3}} \int_C [(\kappa_1 + \kappa_2) u_0^2 + (\kappa_0 - \kappa_2) u_1^2 + (-\kappa_1 - \kappa_0) u_2^2] =$$

per come sono definiti i  $c_i$

$$\begin{aligned} &= \sum_i \int_{\Sigma_i} \{ |\nabla u_i|^2 - |\sigma_i|^2 u_i^2 \} - \frac{1}{\sqrt{3}} \int_C [(2H_1 - c_1 + 2H_2 - c_2) u_0^2 + (2H_0 - c_0 - 2H_2 + c_2) u_1^2 + \\ &\quad + (-2H_1 + c_1 - 2H_0 + c_0) u_2^2] = \\ &= \sum_i \int_{\Sigma_i} \{ |\nabla u_i|^2 - |\sigma_i|^2 u_i^2 \} - \frac{2}{\sqrt{3}} \int_C [(H_1 + H_2) u_0^2 + (H_0 - H_2) u_1^2 + (-H_1 - H_0) u_2^2] + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{3}} \int_C [(c_1 + c_2) u_0^2 + (c_0 - c_2) u_1^2 + (-c_1 - c_0) u_2^2]. \end{aligned}$$

Considerando il prodotto scalare in  $D_T T$  all'interno delle formule (4.12) relative ai  $\nu_i$ , si ottengono le seguenti formule per  $\kappa_g^i$ , curvatures geodetiche di  $C$  in  $\Sigma_i$  rispetto alla co-normale  $\nu_i$

$$\kappa_g^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(c_1 + c_2), \quad \kappa_g^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(c_0 - c_2), \quad \kappa_g^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-c_1 - c_0).$$

Quindi il risultato appena ritrovato può essere riscritto usando queste definizioni

$$Q(u, u) = \sum_i \int_{\Sigma_i} \{|\nabla u_i|^2 - |\sigma_i|^2 u_i^2\} - \frac{2}{\sqrt{3}} \int_C [(H_1 + H_2)u_0^2 + (H_0 - H_2)u_1^2 + (-H_1 - H_2)u_2^2] + \int_C (\kappa_g^0 u_0^2 + \kappa_g^1 u_1^2 + \kappa_g^2 u_2^2). \quad (4.17)$$

Si consideri una componente connessa  $\Omega$  di  $R_1$ . Siano  $M_i = \Sigma_i \cap \partial\Omega$  e  $C^* = C \cap \partial\Omega$ . Ora si cerca una funzione ammissibile  $u$  supportata in  $\partial\Omega$  tale che  $Q(u, u) < 0$ . Allora se  $R_1$  ha tre componenti, ci sarebbe una combinazione lineare (a coefficienti non tutti nulli) delle tre componenti che potrebbe preservare il volume, ma questa sarebbe una contraddizione.

Si consideri la funzione  $v$  definita per casi:

$$v = \begin{cases} 1, & \text{su } M_0 \cup M_1 \\ 0, & \text{su } \Sigma - (M_0 \cup M_1). \end{cases}$$

Dall'equazione (4.17) si ricava

$$Q(v, v) = - \sum_{i=0,1} \int_{M_i} |\sigma_i|^2 - \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{C^*} (H_0 + H_1) + \int_{C^*} (\kappa_g^0 + \kappa_g^1) = \quad (4.18)$$

poiché  $|\sigma_i|^2 = 4H_i^2 - 2K_i$  (dove  $K_i$  è la curvatura gaussiana di  $\Sigma_i$ )

$$= - \sum_{i=0,1} \int_{M_i} \{4H_i^2 - 2K_i\} - \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{C^*} (H_0 + H_1) + \int_{C^*} (\kappa_g^0 + \kappa_g^1) =$$

per il teorema di Gauss-Bonnet  $\int_{M_i} K_i = 2\pi\chi(M_i) - \int_{\partial M_i} \kappa_g^i$ , dove  $\partial M_i = C^*$

$$= \sum_{i=0,1} \left\{ 4\pi\chi(M_i) - \int_{M_i} 4H_i^2 \right\} - \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{C^*} (H_0 + H_1) - \int_{C^*} (\kappa_g^0 + \kappa_g^1). \quad (4.19)$$

La componente  $\Omega$  potrebbe essere torica o sferica.

Si prenda prima in considerazione il caso che  $\Omega$  sia una componente torica; allora il suo bordo è unione di anelli. Sommando le equazioni (4.18) e (4.19), tenendo conto del fatto che  $\chi(M_i) = 0$  si ottiene proprio

$$2Q(v, v) = - \sum_{i=0,1} \int_{M_i} \{|\sigma_i|^2 + 4H_i^2\} - \frac{4}{\sqrt{3}} \int_{C^*} (H_0 + H_1) < 0;$$

dunque  $v$  soddisfa le richieste della funzione ammissibile cercata.

Nel caso invece in cui  $\Omega$  sia una componente sferica, allora  $M_1$  è unione di due cupole sferiche  $D_1$  e  $D_2$  e un anello  $M_0$ , come in figura 4.5. Dato che  $M_0$  è un grafico per il lemma 4.6.3 si può concludere che  $0 < \theta_i \leq \frac{2\pi}{3}$ , dove  $\theta_i$  è l'angolo determinato da  $D_i$ . A meno di scalare tutto, si può assumere che le cupole sferiche abbiano curvatura media  $H_1 = 1$ . Per Gauss-Bonnet si ha

$$A(M_1) = \int_{M_1} K_1 = 4\pi - \int_{C^*} \kappa_g^1. \quad (4.20)$$

Dato che  $\nu_0 = -\frac{1}{2}\nu_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}N_1$  (per via delle formule (4.12) e di  $-N_1 + N_2 + N_0 = 0$ ), usando il prodotto scalare con  $D_T T$  si ha  $\kappa_g^0 = -\frac{1}{2}\kappa_g^1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Da quest'ultima uguaglianza e dalle equazioni (4.19) e (4.20), tenendo conto che  $\chi(M_1) = 2$ , tralasciando il termine che contiene  $H_0$  si ottiene (indicando con  $l$  la lunghezza)

$$Q(v, v) \leq 6\pi - \frac{7}{2}A(M_1) - \frac{7}{2\sqrt{3}}l(C^*) =$$

dato che  $A(M_1) = 2\pi(1 - \cos(\theta_i))$  e  $l(\partial D_i) = 2\pi \sin(\theta_i)$

$$= 2\pi\{-4h(\theta_1) + h(\theta_2)\}, \quad (4.21)$$

dove  $h(\theta) = \frac{7}{2} \left( \cos(\theta) - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\theta) \right)$ , che è decrescente nell'intervallo  $[0, \frac{2\pi}{3}]$ .

Così se  $\theta_1$  o  $\theta_2$  è maggiore o uguale rispetto a  $\frac{\pi}{2}$ , si ha

$$Q(v, v) \leq 2\pi\{h(0) + h(\frac{\pi}{2})\} < 0.$$

Si assuma che entrambi i  $\theta_i$  siano strettamente minori di  $\frac{\pi}{2}$ ; sia  $w$  la seguente funzione definita su  $\Sigma$  per casi:

$$w = \begin{cases} \frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta_i)} & \text{su } D_i \\ 1 & \text{su } M_0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dato che  $v$  e  $w$  differiscono solamente in  $M_1$ , dalla definizione 4.5.3 si ricava

$$Q(w, w) = \int_{M_1} (|\nabla w|^2 - 2w^2) + 2 \int_{M_1} 1 + Q(v, v). \quad (4.22)$$

Dato che si assume che  $\Omega$  sia una componente sferica di  $\Sigma$  si può calcolare

$$\int_{M_1} (|\nabla w|^2 - 2w^2) = -2\pi \sum_{i=1,2} \frac{\sin^2(\theta_i)}{\cos(\theta_i)}, \quad \int_{M_1} 1 = 2\pi \sum_{i=1,2} (1 - \cos(\theta_i));$$

questi conti, assieme alla disuguaglianza (4.21) e all'uguaglianza (4.22) danno

$$Q(w, w) \leq 2\pi \{g(\theta_1) + g(\theta_2)\}, \quad (4.23)$$

dove  $g(\theta) = \frac{3}{2} \cos(\theta) - \frac{7}{2\sqrt{3}} \sin(\theta) - \frac{\sin^2(\theta)}{\cos(\theta)}$ . La funzione  $g$  è strettamente decrescente nell'intervallo  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , dato che è la somma di tre funzioni decrescenti. Dato che  $g(0) = \frac{3}{2} > 0$ ,  $g(\frac{\pi}{6}) = 0$ ,  $g(\frac{\pi}{3}) = -\frac{5}{2}$  si può affermare che  $Q(w, w) < 0$  se entrambi i  $\theta_i$  sono maggiori di  $\frac{\pi}{6}$  oppure uno dei due è maggiore uguale di  $\frac{\pi}{3}$ .

Si considerano infine i casi rimanenti: almeno uno dei due angoli è minore o uguale a  $\frac{\pi}{6}$  oppure entrambi sono minori di  $\frac{\pi}{3}$ .

Nel caso in cui  $\theta_1 \leq \frac{\pi}{6} < \theta_2 < \frac{\pi}{3}$ , si osserva che  $g$  è concava in  $[0, \frac{\pi}{3}]$  dato che  $g''(\theta) = -\frac{7}{2} \left( \cos(\theta) - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \left( 3 \frac{\sin^2(\theta)}{\cos(\theta)} + 2 \frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} \right) < 0$ . Per il lemma 4.6.5  $\frac{\pi}{3} - \theta_1 < \theta_2$ ; dato che  $g$  è decrescente e concava

$$\frac{1}{2\pi} Q(w, w) \leq g(\theta_1) + g(\theta_2) < g(\theta_1) + g\left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) \leq 2g\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.$$

Nel caso invece in cui  $\theta_1, \theta_2 \leq \frac{\pi}{6}$ , si osserva che, per il lemma 4.6.5,  $M_0$  è simmetrica rispetto al piano ortogonale alla linea di simmetria. Quindi se  $\kappa_1 = \sigma_1(\nu_1, \nu_1) \geq 0$  a partire dalla definizione 4.5.3 si arriva a

$$Q(v, v) = - \int_{M_0 \cup M_1} |\sigma|^2 - \int_{C^*} (\kappa_1 + \kappa_0) < 0.$$

Se  $\kappa_1 = \sigma_1(\nu_1, \nu_1) < 0$ , allora la curvatura di Gauss di  $M_0$  lungo  $C$  è negativa; per il lemma 4.6.3,  $M_0$  è un'onduloide o una catenoide. Dato che  $\theta_i \leq \frac{\pi}{6}$  il vettore  $\nu_1$ , tangente ai punti estremi della curva  $\Gamma_1$  che genera  $M_0$ , o è orizzontale o punta verso l'alto. Quindi  $M_0$  contiene nel suo interno una regione nodale con curvatura di Gauss, quindi  $M_0$  è instabile (si veda il teorema 3 del [14]).

Quindi per ogni componente  $\Omega$  di  $R_1$  esiste una funzione ammissibile  $u$  supportata in  $\partial\Omega$  tale che  $Q(u, u) < 0$ . Se si hanno tre componenti connesse

in  $R_1$ , allora si potrebbe avere una funzione ammissibile che soddisfi la proprietà (4.10), che rende instabile  $\Sigma$ ; questo sarebbe assurdo. Dunque tali componenti connesse possono essere al più due.  $\square$

## 4.9 Prova della congettura della double bubble

**Teorema 4.9.1.** *La double bubble standard in  $\mathbb{R}^3$  è l'unica double bubble di area minima per volumi fissati.*

*Dimostrazione.* Sia  $\Sigma$  una double bubble di area minima. Per le proposizioni 4.8.2 e 4.8.3, o entrambe le regioni sono connesse oppure la regione con maggior volume e minor pressione è connessa, mentre quella di minor volume e maggior pressione ha due componenti. Per la proposizione 4.6.1, o  $\Sigma$  è la standard double bubble oppure è una bolla come quelle delle figure 4.8 e 4.7. Dato che  $\Sigma$  è stabile, per il corollario 4.7.1 e la proposizione 4.7.3 si conclude che  $\Sigma$  debba essere la standard double bubble.  $\square$



# Bibliografia

- [1] Frank Morgan, *Geometric measure theory. A beginner's guide - Fourth Edition*, Academic Press, USA (2009)
- [2] Michael Hutchings, *The structure of area-minimizing double bubbles*, The Journal of Geometric Analysis, volume 7, number 2 (1997), p. 285-304 (§16.7)
- [3] Frank Morgan, Manuel Ritorè, *Geometric measure theory and the proof of the double bubble conjecture*, Clay Mathematics Proceedings, volume 2 (2005)
- [4] Michael Hutchings, Frank Morgan, Manuel Ritorè, Antonio Ros, *Proof of the double bubble conjecture*, Annals of Mathematics 155 (2002), p. 459-489
- [5] Luigi Ambrosio, Nicola Fusco, Diego Pallara, *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*, Oxford University Press, USA (2000)
- [6] Herbert Federer, *Geometric measure theory*, Springer, New York (1969)
- [7] Glen E. Bredon, *Topology and Geometry*, Springer, New York (1993)
- [8] Manfredo Perdigão Do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, Boston (1992)
- [9] Wilbur Richard Knorr, *The ancient tradition of geometric problems*, Birkhäuser, Boston (1986)

- [10] Hermann Amandus Schwarz, *Beweis des Satzes, dass die Kugel kleinere Oberfläche besitzt, als jeder andere Körper gleichen Volumens*, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1-13 (1884)
- [11] Joel Foisy, *Soap bubble clusters in  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$* , undergraduate thesis, Williams College (1991)
- [12] Joel Foisy, Manuel Alfaro, Jeffrey Brock, Nickelous Hodges, Jason Zimba, *The standard double soap bubble in  $\mathbb{R}^2$  uniquely minimizes perimeter*, Pacific Journal of Mathematics, volume 159 (1993), p. 47-59
- [13] Frederick Justin Almgren junior, *Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problems with constraints*, Memoirs of the American Mathematical Society, volume 4, number 165 (1976)
- [14] Manuel Ritorè, Antonio Ros, *Stable constant mean curvature tori and the isoperimetric problem in three space forms*, Commentarii Mathematici Helvetici 67 (1992), p. 293-305