

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Dualità proiettiva e sistemi lineari di ipersuperfici

Tesi di Laurea in Geometria Proiettiva

Relatore:
Chiar.mo Prof.
MONICA IDÀ

Presentata da:
IRENE UDASSI

II Sessione
Anno Accademico 2012/2013

Alle mie famiglie

Indice

Introduzione	I
1 Dualità vettoriale	1
1.1 Richiami di algebra lineare	1
1.2 Alcuni elementi di algebra bilineare	3
1.3 Dualità vettoriale	7
2 Dualità proiettiva	15
2.1 Richiami sui sottospazi proiettivi	15
2.1.1 Posizioni reciproche di sottospazi proiettivi	18
2.2 Dualità proiettiva	23
2.2.1 Esempi in \mathbb{P}^2	26
2.2.2 Esempi in \mathbb{P}^3	30
2.2.3 Esempi in \mathbb{P}^4 e \mathbb{P}^5	32
3 Sistemi lineari di ipersuperfici	34
3.1 Sistemi lineari di ipersuperfici e condizioni imposte da punti multipli	38
3.2 Fasci di coniche in \mathbb{P}^2	44
3.2.1 Esempi	52
Bibliografia	60

Introduzione

Lo scopo della prima parte di questa tesi è introdurre la teoria e i principali elementi necessari a dimostrare un «principio generale e fecondo della Geometria proiettiva»¹, ovvero il principio di dualità.

La Geometria proiettiva, la cui nascita è legata alle ricerche sulla prospettiva in ambito artistico, è una disciplina sviluppatasi principalmente dalla seconda metà del 1600 in poi², e si occupa oggi dello studio degli spazi proiettivi n -dimensionali, i quali sono definiti come l'insieme delle rette vettoriali (ovvero passanti per l'origine) di uno spazio $n + 1$ -dimensionale \mathbf{V} ; ad esempio, il piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è l'insieme delle rette per l'origine di \mathbb{R}^3 . Uno strumento essenziale in Geometria proiettiva è quindi l'Algebra lineare.

In effetti, per dimostrare il principio di dualità proiettivo, studieremo dapprima la dualità vettoriale. Nel primo capitolo, dopo alcuni richiami di algebra lineare, daremo la definizione di forma bilineare f sul prodotto $\mathbf{V} \times \mathbf{W}$ di due spazi vettoriali (non necessariamente della stessa dimensione), vedremo che f dà luogo ad altre applicazioni, e ne studieremo alcune proprietà. Parleremo del concetto di ortogonalità fra sottospazi di \mathbf{V} e \mathbf{W} rispetto a una forma bilineare f , e considereremo il caso particolare in cui \mathbf{V} è uno spazio vettoriale di dimensione n e $\mathbf{W} = \mathbf{V}^\sim$ è il suo spazio duale.

Infatti, a partire dalla forma bilineare su $\mathbf{V} \times \mathbf{V}^\sim$, definita come $f(\mathbf{v}, g) = g(\mathbf{v})$ per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, $g \in \mathbf{V}^\sim$, è possibile definire un'altra corrispondenza, che chiameremo δ , fra i sottospazi di \mathbf{V} di dimensione t e i loro ortogonali rispetto ad f in \mathbf{V}^\sim , i quali hanno dimensione $n - t$. L'applicazione δ , detta anche

¹[5, p. 31]

²[5, p. 359]

dualità vettoriale, è biunivoca ed inverte le inclusioni, e date delle equazioni cartesiane per un sottospazio \mathbf{W} , ci permette di trovare delle equazioni parametriche per $\delta(\mathbf{W})$, e viceversa.

Nel secondo capitolo si richiameranno le nozioni necessarie ad illustrare appunto la versione proiettiva dei risultati ottenuti nel capitolo 1: ricorderemo cosa significa dare un riferimento proiettivo in \mathbb{P}^n , dare equazioni parametriche e cartesiane per un sottospazio, e quali configurazioni di sottospazi possiamo aspettarci in uno spazio proiettivo di dimensione n .

A questo punto la dimostrazione del principio di dualità, così chiamato in quanto fu originariamente dedotto da una serie di postulati fondamentali nel piano e nello spazio proiettivo, diventa immediata: infatti l'applicazione δ dà luogo, nel proiettivo, ad un'altra corrispondenza, stavolta fra i sottospazi di dimensione t in $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ e i sottospazi di dimensione $n - t - 1$ in $\mathbb{P}(\mathbf{V}^\sim)$, che inverte le inclusioni ed è biunivoca. Questa corrispondenza, detta dualità proiettiva di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, ci permetterà di ottenere da ogni proposizione vera, riguardante solo sottospazi di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ e loro inclusioni, un'altra proposizione, ancora vera, riguardante solo sottospazi di $\mathbb{P}(\mathbf{V}^\sim)$ e loro inclusioni.

Ad esempio, vedremo che la proposizione duale della seguente proposizione vera:

In \mathbb{P}^2 , per due punti distinti passa una sola retta

è data da

In \mathbb{P}^2 , due rette distinte si intersecano sempre in un punto.

Naturalmente sarà necessario chiarire come i concetti di punti distinti, o più in generale di punti linearmente indipendenti, intersezione, sottospazio generato e quelli riguardanti altre posizioni reciproche fra sottospazi proiettivi, si esprimano esclusivamente in termini di "inclusione"; a questo scopo, alla fine del capitolo 2 saranno presentati alcuni esempi di proposizioni duali negli spazi proiettivi 2, 3, 4 e 5-dimensionali. Il Teorema di Desargues fornisce, tra altri, un esempio di proposizione autoduale.

Ora, il principio di dualità ci dà in particolare una corrispondenza fra gli

iperpiani di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ e i punti di $\mathbb{P}(\mathbf{V}^\vee)$; d'altra parte, fissato un riferimento proiettivo in $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, gli iperpiani di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ sono associati in maniera biunivoca ai polinomi omogenei di primo grado in x_0, \dots, x_n (se n è la dimensione di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$), identificati a meno di proporzionalità. Se $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_d$ denota il \mathbb{C} -spazio vettoriale dei polinomi omogenei di grado d , lo spazio proiettivo degli iperpiani $\mathbb{P}(\mathbf{V}^\vee)$ è quindi $\mathbb{P}(\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_1)$, ed è naturale a questo punto cominciare a studiare $\mathbb{P}(\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_d)$ con $d > 1$, cioè lo spazio delle ipersuperfici di \mathbb{P}^n di grado d .

Nel terzo capitolo di questa tesi vedremo quindi alcuni risultati sui sistemi lineari di ipersuperfici di grado d di \mathbb{P}^n . Considereremo poi il caso $n = d = 2$ e studieremo i fasci di coniche; in particolare, prenderemo in considerazione tutte le possibili configurazioni del luogo base quando questo è 0-dimensionale, e daremo un esempio di ciascuna.

Capitolo 1

Dualità vettoriale

1.1 Richiami di algebra lineare

Nel seguito denoteremo con \mathbf{V} uno spazio vettoriale finitamente generato su K , e se \mathcal{B} è una base fissata in \mathbf{V} , indicheremo con $(x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{B}}$ il vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ avente coordinate (x_1, \dots, x_n) rispetto alla base \mathcal{B} . In questo capitolo, K è un campo fissato.

Ricordiamo che se $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{V}$ è sottospazio vettoriale, con $\dim(\mathbf{W}) = s \leq n = \dim(\mathbf{V})$, dare delle equazioni cartesiane per \mathbf{W} significa, fissata una base $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ di \mathbf{V} , determinare un sistema di rango massimo di $n - s$ equazioni:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{n-s,1}x_1 + \dots + a_{n-s,n}x_n = 0 \end{cases}, \quad a_{i,j} \in K \quad (1.1)$$

tali che un elemento $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$ se e solo se le coordinate $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ di \mathbf{v} rispetto alla base fissata in \mathbf{V} soddisfano tutte le equazioni del sistema (1.1) (in altre parole, stiamo vedendo \mathbf{W} come intersezione di $n - s$ iperpiani linearmente indipendenti di \mathbf{V}).

È bene notare che è possibile scegliere un sistema di equazioni cartesiane per un sottospazio di dimensione s con più di $n - s$ equazioni, purchè il rango di

tale sistema sia sempre $n - s$.

Se invece $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una base per \mathbf{V} , e $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_s)$ è una base per \mathbf{W} , con $\mathbf{w}_i = b_{1,i}\mathbf{v}_1 + \dots + b_{n,i}\mathbf{v}_n$, $i = 1, \dots, s$, allora delle equazioni parametriche per \mathbf{W} sono date da

$$\begin{cases} x_1 = b_{1,1}\lambda_1 + \dots + b_{1,s}\lambda_s \\ \dots \\ x_n = b_{n,1}\lambda_1 + \dots + b_{n,s}\lambda_s \end{cases}, \quad (1.2)$$

dove $\text{rg} \left((b_{j,i})_{\substack{j=1,\dots,n \\ i=1,\dots,s}} \right) = s$ necessariamente, e $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ sono parametri in K . In pratica stiamo considerando l'isomorfismo $K^s \rightarrow \mathbf{W}$ dato da

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_s) \mapsto (b_{1,1}\lambda_1 + \dots + b_{1,n}\lambda_n, \dots, b_{n,1}\lambda_1 + \dots + b_{n,s}\lambda_s).$$

È immediato osservare che le equazioni cartesiane e parametriche per un sottospazio vettoriale non sono univocamente determinate, bensì dipendono sia dalle basi considerate che, nel caso delle equazioni cartesiane, dalla scelta degli iperpiani che intersechiamo.

Definizione 1.1. Siano K campo, \mathbf{V} K -spazio vettoriale. L'insieme delle applicazioni lineari $f : \mathbf{V} \rightarrow K$, denotato con $\text{Hom}(\mathbf{V}, K) =: \mathbf{V}^\sim$ è ancora un K -spazio vettoriale e si dice lo *spazio duale* di \mathbf{V} . Si pone inoltre $\mathbf{V}^{\sim\sim} := \text{Hom}(\mathbf{V}^\sim, K)$; $\mathbf{V}^{\sim\sim}$ è detto *spazio biduale* di \mathbf{V} .

Osservazione 1. Ricordiamo che se \mathbf{V}, \mathbf{W} sono K -spazi vettoriali di dimensioni rispettivamente m, n finite, allora $\text{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ è isomorfo allo spazio delle matrici $m \times n$ ad elementi in K , dove l'isomorfismo dipende dalle basi scelte in \mathbf{V}, \mathbf{W} . In particolare, $\dim(\text{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{W})) = \dim \mathbf{V} \dim \mathbf{W}$, così che $\dim \mathbf{V}^\sim = \dim \mathbf{V}$, e $\mathbf{V}^\sim \cong \mathbf{V}$, ma questo non è un isomorfismo canonico.

Esempio 1. Sia data in \mathbb{R}^2 la base $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$. Un'applicazione lineare $f \in (\mathbb{R}^2)^\sim$ è univocamente determinata dalle relazioni $f(\mathbf{v}_i) = a_i$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$. Si verifica che le applicazioni

$$\eta_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \eta_i(\mathbf{v}_j) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases} \quad i, j = 1, 2$$

costituiscono una base per $(\mathbb{R}^2)^\sim$; così $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow (\mathbb{R}^2)^\sim$, $\Phi(\mathbf{v}_i) = \eta_i$, estesa per linearità, dà un isomorfismo fra \mathbb{R}^2 e il suo duale.

Questo discorso vale in generale su un campo qualsiasi in dimensione n , ovvero se $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è una base per lo spazio vettoriale \mathbf{V} , allora le applicazioni lineari η_i , definite per $j = 1, \dots, n$ da:

$$\eta_i(\mathbf{v}_j) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases} \quad i = 1, \dots, n \quad (1.3)$$

costituiscono una base per \mathbf{V}^\sim , detta la base duale \mathcal{B}^\sim di \mathcal{B} .

1.2 Alcuni elementi di algebra bilineare

Diamo ora la nozione di forma bilineare, una funzione che definisce un'operazione binaria fra gli elementi di due spazi vettoriali; un primo esempio di applicazione bilineare può essere dato dal prodotto scalare standard definito su \mathbb{R}^2 :

$$\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 .$$

In seguito, in analogia col concetto di ortogonalità negli spazi vettoriali muniti di prodotto scalare, daremo la definizione (più generale) di sottospazio ortogonale rispetto a una forma bilineare.

Definizione 1.2. Siano \mathbf{V} , \mathbf{W} K -spazi vettoriali; un'applicazione bilineare $f : \mathbf{V} \times \mathbf{W} \rightarrow K$ è una funzione tale che

$$f(a\mathbf{v} + a'\mathbf{v}', \mathbf{w}) = af(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + a'f(\mathbf{v}', \mathbf{w})$$

$$f(\mathbf{v}, b\mathbf{w} + b'\mathbf{w}') = bf(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + b'f(\mathbf{v}, \mathbf{w}')$$

$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{v}' \in \mathbf{V}, \forall \mathbf{w}, \mathbf{w}' \in \mathbf{W}, \forall a, a', b, b' \in K$$

cioè fissato uno degli argomenti, f è lineare sull'altro. Scriveremo $f \in \text{Bil}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$.

Data $f \in \text{Bil}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$, risultano quindi definite le seguenti applicazioni lineari:

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad f_{\mathbf{v}} := f(\mathbf{v}, _) : \begin{array}{ccc} \mathbf{W} & \longrightarrow & K \\ \mathbf{w} & \longmapsto & f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \end{array} \quad (1.4)$$

$$\forall \mathbf{w} \in \mathbf{W}, \quad f^{\mathbf{w}} := f(_, \mathbf{w}) : \begin{array}{ccc} \mathbf{V} & \longrightarrow & K \\ \mathbf{v} & \longmapsto & f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \end{array} \quad (1.5)$$

$$\beta : \begin{array}{ccc} \mathbf{V} & \longrightarrow & \mathbf{W}^{\sim} \\ \mathbf{v} & \longmapsto & f_{\mathbf{v}} \end{array} \quad (1.6)$$

$$\alpha : \begin{array}{ccc} \mathbf{W} & \longrightarrow & \mathbf{V}^{\sim} \\ \mathbf{w} & \longmapsto & f^{\mathbf{w}} \end{array} \quad (1.7)$$

Definizione 1.3. Sia $f \in \text{Bil}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$, e siano $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{V}$, $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{W}$ sottospazi vettoriali. Definiamo gli insiemi

$$\mathbf{S}^{\perp f} := \{ \mathbf{w} \in \mathbf{W} \mid f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{S} \}$$

$$\mathbf{T}^{\perp f} := \{ \mathbf{v} \in \mathbf{V} \mid f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{T} \}$$

Osserviamo che

$$\mathbf{S}^{\perp f} = \{ \mathbf{w} \in \mathbf{W} \mid \mathbf{w} \in \text{Ker } f_{\mathbf{v}} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{S} \} = \bigcap_{\mathbf{v} \in \mathbf{S}} \text{Ker } f_{\mathbf{v}}.$$

In particolare $\mathbf{S}^{\perp f}$ è un sottospazio vettoriale di \mathbf{W} , detto *ortogonale di \mathbf{S} rispetto ad f* . Analogamente

$$\mathbf{T}^{\perp f} = \bigcap_{\mathbf{w} \in \mathbf{T}} \text{Ker } f^{\mathbf{w}} \subseteq \mathbf{V}$$

è il *sottospazio vettoriale ortogonale a \mathbf{T} rispetto ad f* .

Inoltre se \mathbf{R} , \mathbf{U} sono sottospazi tali che $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{S} \subseteq \mathbf{V}$, $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{T} \subseteq \mathbf{W}$, si ottiene subito

$$\mathbf{R}^{\perp f} = \bigcap_{\mathbf{v} \in \mathbf{R}} \text{Ker } f_{\mathbf{v}} \supseteq \bigcap_{\mathbf{v} \in \mathbf{S}} \text{Ker } f_{\mathbf{v}} = \mathbf{S}^{\perp f} \quad , \quad \mathbf{U}^{\perp f} \supseteq \mathbf{T}^{\perp f}. \quad (1.8)$$

Esempio 2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2)) = 3x_1y_1 + x_1y_2 + 3x_3y_1 + x_3y_2$; si verifica facilmente che f è bilineare. Consideriamo il piano in \mathbb{R}^3 dato da $S_1 : x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Vale

$$\begin{aligned} S_1^{\perp f} &= \{ (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid f((a, b, c), (y_1, y_2)) = 0 \quad \forall (a, b, c) \in S_1 \} = \\ &= \bigcap_{\substack{a+b+c=0 \\ a, b, c \in \mathbb{R}}} \{ (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (a+c)(3y_1 + y_2) = 0 \} = \\ &= \bigcap_{b \in \mathbb{R}} \{ (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -b(3y_1 + y_2) = 0 \}. \end{aligned}$$

In questo caso abbiamo trovato $S_1^{\perp f} : 3y_1 + y_2 = 0$.

Se invece consideriamo $S_2 : x_1 + x_3 = 0$ in \mathbb{R}^3 , si ha:

$$S_2^{\perp f} = \bigcap_{\substack{a+c=0 \\ a,b,c \in \mathbb{R}}} \{ (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (a+c)(3y_1 + y_2) = 0 \} = \mathbb{R}^2.$$

È spesso utile, nei casi di spazi vettoriali di dimensione finita, trovare una forma matriciale per gli oggetti presi in esame.

Sia infatti $f \in \text{Bil}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$, $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W} = n$, e siano $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ base di \mathbf{V} , $\mathcal{C} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$ base di \mathbf{W} . Possiamo associare una matrice ad f rispetto a queste basi:

$$A = \text{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) := \begin{pmatrix} f(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1) & \dots & f(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_n) \\ \vdots & & \vdots \\ f(\mathbf{v}_n, \mathbf{w}_1) & \dots & f(\mathbf{v}_n, \mathbf{w}_n) \end{pmatrix}.$$

Allora per ogni $\mathbf{v} = (x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{B}} \in \mathbf{V}$, per ogni $\mathbf{w} = (y_1, \dots, y_n)_{\mathcal{C}} \in \mathbf{W}$ si ha $f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j f(\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_j) = {}^t X A Y$, dove $X, Y \in K^n$ sono i vettori colonna delle coordinate di \mathbf{v} , \mathbf{w} nelle basi \mathcal{B} , \mathcal{C} rispettivamente, cioè $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$, $Y = {}^t(y_1, \dots, y_n)$.

Diremo che f è *non degenera* se $\text{rg}(A) = n$; osserviamo che questa definizione è ben posta, infatti se $\mathcal{B}' = (\mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_n)$, $\mathcal{C}' = (\mathbf{w}'_1, \dots, \mathbf{w}'_n)$ sono basi rispettivamente di \mathbf{V} e \mathbf{W} , denotate con X_i la matrice colonna delle coordinate di \mathbf{v}'_i rispetto a \mathcal{B} per $i = 1, \dots, n$, con Y_j la matrice colonna delle coordinate di \mathbf{w}'_j rispetto a \mathcal{C} per $j = 1, \dots, n$, si ha:

$$\begin{aligned} \text{Mat}(f, \mathcal{B}', \mathcal{C}') &= (f(\mathbf{v}'_i, \mathbf{w}'_j))_{i,j=1,\dots,n} = ({}^t X_i \text{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) Y_j)_{i,j=1,\dots,n} = \\ &= {}^t (X_1 \dots X_n) \text{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{C}) (Y_1 \dots Y_n), \end{aligned}$$

dove (X_1, \dots, X_n) è la matrice di cambiamento di base da \mathcal{B}' a \mathcal{B} , e analogamente (Y_1, \dots, Y_n) . In particolare, poiché le matrici $(X_1 \dots X_n)$, $(Y_1 \dots Y_n)$ sono invertibili, vale $\text{rg}(A) = \text{rg}(\text{Mat}(f, \mathcal{B}', \mathcal{C}'))$, dunque nell'ipotesi $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W} = n$ ha senso parlare di *rango* di un'applicazione bilineare f , e sarà $\text{rg}(f) := \text{rg}(A)$.

Osservazione 2. La notazione matriciale appena introdotta è utile anche per denotare le applicazioni lineari (1.4), (1.5); vale infatti

$$f_{\mathbf{v}} : \begin{array}{l} \mathbf{W} \longrightarrow K \\ Y \longmapsto ({}^t X A)Y \end{array} \quad (1.9)$$

$$f^{\mathbf{w}} : \begin{array}{l} \mathbf{V} \longrightarrow K \\ X \longmapsto ({}^t Y {}^t A)X \end{array} \quad (1.10)$$

in quanto nel secondo caso possiamo scrivere

$${}^t X(A Y) = {}^t ({}^t X(A Y)) = ({}^t Y {}^t A)X$$

perchè ${}^t X(A Y) \in K$, quindi coincide con la sua trasposta. Si osservi inoltre che le matrici ${}^t X A$, ${}^t Y {}^t A$ sono fissate per \mathbf{v} , \mathbf{w} fissati rispettivamente.

Esempio 3. Su $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = \mathbf{V} \times \mathbf{W}$, la forma bilineare $f(x, y) = 3x_1 y_1 + 4x_2 y_3 - x_3 y_2$ ha come matrice associata rispetto alla base canonica \mathcal{E} :

$$\text{Mat}(f, \mathcal{E}, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} f(e_1, e_1) & f(e_1, e_2) & f(e_1, e_3) \\ f(e_2, e_1) & f(e_2, e_2) & f(e_2, e_3) \\ f(e_3, e_1) & f(e_3, e_2) & f(e_3, e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

dunque f è non degenere.

Prendiamo ora $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{w} = (-1, 0, 2)$; le applicazioni lineari $f_{\mathbf{v}} \in \mathbf{W}^{\sim}$ e $f^{\mathbf{w}} \in \mathbf{V}^{\sim}$ sono quindi:

$$f_{\mathbf{v}}(y_1, y_2, y_3) = (1, 1, 1) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 3y_1 - y_2 + 4y_3,$$

$$f^{\mathbf{w}}(x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, 2) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -3x_1 + 8x_2.$$

La forma bilineare $g(x, y) = 3x_1 y_1 - 4x_2 y_2 + 4x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_3 y_3$ invece è degenere in quanto

$$\text{Mat}(g, \mathcal{E}, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.3 Dualità vettoriale

È opportuno a questo punto mettere in relazione il rango di un'applicazione bilineare f con le proprietà delle applicazioni lineari (1.4), (1.5), (1.6), (1.7) a cui essa dà luogo, e dei sottospazi ortogonali rispetto ad f . Ci occorreranno i seguenti:

Lemma 1.3.1. *Sia \mathbf{V} spazio vettoriale, $\dim \mathbf{V} = n$, e siano f_1, \dots, f_s linearmente indipendenti in \mathbf{V}^\sim ; allora $\text{Ker } f_j$ è un iperpiano di \mathbf{V} per $j = 1, \dots, s$ e $\dim(\text{Ker } f_1 \cap \dots \cap \text{Ker } f_s) = n - s$.*

Dimostrazione. Poiché gli f_j sono linearmente indipendenti, vale $f_j \neq 0$; d'altra parte è $f_j : \mathbf{V} \rightarrow K$, dunque $\dim(\text{Ker } f_j) = n - 1$, cioè $\text{Ker } f_j$ è un iperpiano di \mathbf{V} .

Siano poi $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ base per \mathbf{V} , $\mathcal{B}^\sim = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ la base duale data dalle (1.3) e siano $\mathbf{v} = b_1 \mathbf{v}_1 + \dots + b_n \mathbf{v}_n \in \mathbf{V}$, $f_j = a_{j,1} \eta_1 + \dots + a_{j,n} \eta_n \in \mathbf{V}^\sim$ per $j = 1, \dots, s$. Vale

$$f_j(\mathbf{v}) = \left(\sum_{k=1}^n a_{j,k} \eta_k \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \mathbf{v}_i \right) = \sum_{k=1}^n a_{j,k} b_k,$$

dunque $\mathbf{v} \in (\text{Ker } f_1 \cap \dots \cap \text{Ker } f_s)$ se e solo se le coordinate (b_1, \dots, b_n) di \mathbf{v} in \mathcal{B} verificano il sistema:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{s,1}x_1 + \dots + a_{s,n}x_n = 0 \end{cases}.$$

Per l'indipendenza degli f_i vale $\text{rg} \left((a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,s \\ j=1,\dots,n}} \right) = s$, e lo spazio delle soluzioni $(\text{Ker } f_1 \cap \dots \cap \text{Ker } f_s)$ ha dimensione $n - s$ \square

Lemma 1.3.2. *Sia \mathbf{V} spazio vettoriale, $\dim \mathbf{V} = n$. Sia \mathbf{T} un sottospazio di \mathbf{V}^\sim di dimensione $t \leq n$, e sia (f_1, \dots, f_t) una base per \mathbf{T} . Allora*

$$\bigcap_{f \in \mathbf{T}} \text{Ker } f = \bigcap_{i=1}^t \text{Ker } f_i.$$

Dimostrazione. Vale banalmente $\bigcap_{f \in \mathbf{T}} \text{Ker } f \subseteq \bigcap_{i=1}^t \text{Ker } f_i$. Viceversa, sia $\mathbf{v} \in \bigcap_{i=1}^t \text{Ker } f_i$, e sia $f \in \mathbf{T}$, $f = a_1 f_1 + \dots + a_t f_t$. Poiché $f_i(\mathbf{v}) = 0 \forall i = 1, \dots, t$, si ha anche $\mathbf{v} \in \text{Ker } f$, e per l'arbitrarietà di f in \mathbf{T} vale l'altra inclusione. \square

Proposizione 1.3.3. *Sia $f : \mathbf{V} \times \mathbf{W} \rightarrow K$, $f \in \text{Bil}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$, $\dim \mathbf{V} = \dim \mathbf{W} = n$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- (i) f è non degenere
- (ii) $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \setminus \{\mathbf{0}\}$, la $f_{\mathbf{v}}$ data da (1.4) non è l'applicazione nulla
- (iii) $\forall \mathbf{w} \in \mathbf{W} \setminus \{\mathbf{0}\}$, la $f^{\mathbf{w}}$ data da (1.5) non è l'applicazione nulla
- (iv) $\beta : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}^{\sim}$ data da (1.6) è un isomorfismo
- (v) $\alpha : \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{V}^{\sim}$ data da (1.7) è un isomorfismo
- (vi) Se \mathbf{S} sottospazio di \mathbf{V} , $\dim \mathbf{S} = s$, allora $\dim \mathbf{S}^{\perp f} = n - s$.
- (vii) Se \mathbf{T} sottospazio di \mathbf{W} , $\dim \mathbf{T} = t$, allora $\dim \mathbf{T}^{\perp f} = n - t$.

Se una (e quindi tutte) fra queste affermazioni è vera, allora comunque presi $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{V}$, $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{W}$ sottospazi, si ha $(\mathbf{S}^{\perp f})^{\perp f} = \mathbf{S}$ e $(\mathbf{T}^{\perp f})^{\perp f} = \mathbf{T}$.

Dimostrazione.

Siano $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ base di \mathbf{V} , $\mathcal{C} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$ base di \mathbf{W} .

$\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$ Sia $\text{rg}(f) = n$, sia $\bar{\mathbf{v}} \in \mathbf{V} \setminus \{\mathbf{0}\}$ un vettore fissato, $\bar{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \mathbf{v}_i$, con gli \bar{x}_i non tutti nulli. Supponiamo $f_{\bar{\mathbf{v}}} = 0$. Se indichiamo con \bar{X} il vettore colonna delle coordinate di $\bar{\mathbf{v}}$ rispetto a \mathcal{B} , per la (1.9) vale $({}^t \bar{X} A) Y = 0 \quad \forall Y \in K^n$, cioè ${}^t \bar{X} A$ è la matrice nulla; abbiamo così determinato una relazione di dipendenza lineare fra le righe A_1, \dots, A_n di A , cioè $\bar{x}_1 A_1 + \dots + \bar{x}_n A_n = 0$, da cui $\text{rg}(A) < n$, contro l'ipotesi.

$\boxed{(ii) \Rightarrow (i)}$ Sia $f_{\bar{\mathbf{v}}} \neq 0 \quad \forall \bar{\mathbf{v}} \in \mathbf{V} \setminus \{\mathbf{0}\}$. Se si suppone f degenere, si ha $\text{rg}(A) < n$, ovvero esiste \bar{X} in $K^n \setminus \{0\}$ tale che ${}^t \bar{X} A = 0$, e per ogni $Y \in K^n$ vale $({}^t \bar{X} A) Y = 0$. Se $\bar{\mathbf{v}} \in \mathbf{V}$ ha coordinate \bar{X} rispetto a \mathcal{B} , questo equivale a dire che esiste $\bar{\mathbf{v}} \in \mathbf{V} \setminus \{\mathbf{0}\}$ tale che $f_{\bar{\mathbf{v}}} = 0$, giungendo a un

assurdo.

$(ii) \Rightarrow (iv)$ Consideriamo le applicazioni lineari $f_{\mathbf{v}_1}, \dots, f_{\mathbf{v}_n}$, tutte non identicamente nulle in \mathbf{W}^\sim . Esse costituiscono una base per \mathbf{W}^\sim , infatti siano $a_1, \dots, a_n \in K$ tali che

$$a_1 f_{\mathbf{v}_1} + \dots + a_n f_{\mathbf{v}_n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n a_i f_{\mathbf{v}_i}(\mathbf{w}) = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{W}$$

dove per la bilinearità di f si ha $\sum_{i=1}^n a_i f_{\mathbf{v}_i}(\mathbf{w}) = f_{\Sigma a_i \mathbf{v}_i}(\mathbf{w})$. Dunque $f_{\Sigma a_i \mathbf{v}_i} : \mathbf{W} \rightarrow K$ è l'applicazione nulla, e $\Sigma a_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ necessariamente, quindi $a_1 = \dots = a_n = 0$. Così l'applicazione $\beta : \mathbf{v} \mapsto f_{\mathbf{v}}$ manda basi in basi, ed è quindi isomorfismo.

$(iv) \Rightarrow (vi)$ Sia \mathbf{S} sottospazio di \mathbf{V} , $\mathbf{S}^{\perp f} = \bigcap_{\mathbf{v} \in \mathbf{S}} \text{Ker } f_{\mathbf{v}} \subseteq \mathbf{W}$, e sia $(\mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_s)$ base per \mathbf{S} . Poichè β è isomorfismo, $f_{\mathbf{v}'_1}, \dots, f_{\mathbf{v}'_s}$ sono linearmente indipendenti in \mathbf{W}^\sim , e sono base per il sottospazio $\beta(\mathbf{S}) = \{f_{\mathbf{v}}, \mathbf{v} \in \mathbf{S}\} \subseteq \mathbf{W}^\sim$. Per il lemma 1.3.2 si ha $\bigcap_{f \in \beta(\mathbf{S})} \text{Ker } f = \bigcap_{\mathbf{v} \in \mathbf{S}} \text{Ker } f_{\mathbf{v}} = \bigcap_{i=1}^s \text{Ker } f_{\mathbf{v}'_i}$, dunque per il lemma 1.3.1 vale $\dim \mathbf{S}^{\perp f} = n - s$.

$(vi) \Rightarrow (ii)$ Supponiamo per assurdo che esista $\mathbf{v} \in \mathbf{V} \setminus \{\mathbf{0}\}$ tale che $f_{\mathbf{v}} = 0$; si consideri allora il sottospazio $\langle \mathbf{v} \rangle$ generato da \mathbf{v} , che ha dimensione 1 perchè \mathbf{v} non è il vettore nullo. Vale $\langle \mathbf{v} \rangle^{\perp f} = \mathbf{W}$, quindi $\dim \langle \mathbf{v} \rangle^{\perp f} = \dim \mathbf{W} = n$, contro l'ipotesi.

Abbiamo quindi provato $(i) \Leftrightarrow (ii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (vi) \Rightarrow (ii)$; analogamente si prova $(i) \Leftrightarrow (iii) \Rightarrow (v) \Rightarrow (vii) \Rightarrow (iii)$, quindi le affermazioni da (i) a (vii) sono tutte equivalenti.

Supponiamo ora \mathbf{S} sottospazio di \mathbf{V} , con $\dim \mathbf{S} = s$ e consideriamo

$$(\mathbf{S}^{\perp f})^{\perp f} = \bigcap_{\mathbf{w} \in \mathbf{S}^{\perp f}} \text{Ker } f^{\mathbf{w}};$$

per (vii) e (vi) esso ha dimensione $n - (n - s) = s$. Poiché contiene \mathbf{S} (in quanto $f^{\mathbf{w}}|_{\mathbf{S}}$ è l'applicazione nulla per ogni $\mathbf{w} \in \mathbf{S}^{\perp f}$, ovvero $\mathbf{S} \subseteq \text{Ker } f^{\mathbf{w}}$ per ogni $\mathbf{w} \in \mathbf{S}^{\perp f}$), si ha $(\mathbf{S}^{\perp f})^{\perp f} = \mathbf{S}$. Analogamente si dimostra $(\mathbf{T}^{\perp f})^{\perp f} = \mathbf{T}$ per ogni \mathbf{T} sottospazio di \mathbf{W} . \square

Osservazione 3. Nel caso $\mathbf{V} = \mathbf{W}$, $f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow K$, le (1.6), (1.7) diventano:

$$\alpha : \begin{array}{l} \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}^\sim \\ \mathbf{v} \longmapsto f^\mathbf{v} = f(_, \mathbf{v}) \end{array} \quad , \quad \beta : \begin{array}{l} \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}^\sim \\ \mathbf{v} \longmapsto f_\mathbf{v} = f(\mathbf{v}, _) \end{array} .$$

Vale $\alpha = \beta \Leftrightarrow f(_, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}, _)$ per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, ovvero se e solo se $f(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$, cioè se e solo se f è simmetrica.

Abbiamo visto nell'osservazione 1 che si può sempre determinare, per ogni scelta di una base, un isomorfismo non canonico fra \mathbf{V} e \mathbf{V}^\sim ; quindi ovviamente anche \mathbf{V} , $\mathbf{V}^{\sim\sim}$ sono isomorfi. Però tra \mathbf{V} e $\mathbf{V}^{\sim\sim}$, come è noto, esiste un isomorfismo canonico; ritroviamo questo risultato come corollario della proposizione 1.3.3.

Notazione 1. Denoteremo nel seguito con Φ l'applicazione bilineare

$$\Phi : \begin{array}{l} \mathbf{V} \times \mathbf{V}^\sim \longrightarrow K \\ (\mathbf{v}, g) \longmapsto g(\mathbf{v}) \end{array} . \quad (1.11)$$

Corollario 1.3.4. *L'applicazione bilineare Φ data dalla (1.11) è non degenere, e dà un isomorfismo canonico tra \mathbf{V} e $\mathbf{V}^{\sim\sim}$:*

$$\begin{array}{l} \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}^{\sim\sim} \\ \mathbf{v} \longmapsto \left(\begin{array}{l} \Phi(\mathbf{v}, _) : \mathbf{V}^\sim \longrightarrow K \\ g \longmapsto g(\mathbf{v}) \end{array} \right) . \end{array}$$

In genere, l'applicazione $\Phi(\mathbf{v}, _)$ è denotata con $\mathbf{v}^{\sim\sim}$.

Dimostrazione. Per quanto detto nella definizione 1.2, poichè Φ è bilineare, sono definite le applicazioni lineari:

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \Phi(\mathbf{v}, _) : \begin{array}{l} \mathbf{V}^\sim \longrightarrow K \\ g \longmapsto g(\mathbf{v}) \end{array} ;$$

$$\forall g \in \mathbf{V}^\sim, \Phi(_, g) : \begin{array}{l} \mathbf{V} \longrightarrow K \\ \mathbf{v} \longmapsto g(\mathbf{v}) \end{array} ;$$

$$\beta : \begin{array}{l} \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}^{\sim\sim} \\ \mathbf{v} \longmapsto \Phi(\mathbf{v}, _) \end{array} ;$$

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbf{V}^\sim &\longrightarrow \mathbf{V}^\sim \\ g &\longmapsto \Phi(_, g) = g \end{aligned}$$

cioè α è l'identità su \mathbf{V}^\sim .

Quindi, per la proposizione 1.3.3, essendo α isomorfismo, Φ è non degenera e β è isomorfismo (canonico) fra \mathbf{V} e $\mathbf{V}^{\sim\sim}$. \square

Per determinare una corrispondenza naturale fra \mathbf{V} e $\mathbf{V}^{\sim\sim}$ abbiamo dunque introdotto in (1.11) la forma bilineare non degenera Φ ; vedremo presto che non è l'unica applicazione notevole a cui Φ dà luogo.

Guardiamo ora cosa succede ai sottospazi $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{V}$, $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{V}^\sim$ e ai loro ortogonali, rispettivamente in \mathbf{V}^\sim e \mathbf{V} , rispetto alla Φ . Anzitutto, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{\perp\Phi} &= \{ g \in \mathbf{V}^\sim \mid \Phi(\mathbf{v}, g) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{S} \} = & (1.12) \\ &= \{ g \in \mathbf{V}^\sim \mid g(\mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{S} \} = \{ g \in \mathbf{V}^\sim \mid \mathbf{S} \subseteq \text{Ker } g \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{\perp\Phi} &= \{ \mathbf{v} \in \mathbf{V} \mid \Phi(\mathbf{v}, g) = 0 \quad \forall g \in \mathbf{T} \} = & (1.13) \\ &= \{ \mathbf{v} \in \mathbf{V} \mid \mathbf{v} \in \text{Ker } g \quad \forall g \in \mathbf{T} \} = \bigcap_{g \in \mathbf{T}} \text{Ker } g \end{aligned}$$

Definizione 1.4. Sia \mathbf{V} un K -spazio vettoriale di dimensione n ; si dice *grassmanniana* dei sottospazi di dimensione s di \mathbf{V} l'insieme

$$G(s, \mathbf{V}) := \{ \mathbf{S} \mid \mathbf{S} \text{ sottospazio di } \mathbf{V}, \dim \mathbf{S} = s \}.$$

La grassmanniana è un oggetto particolarmente interessante: anzitutto $G(1, \mathbf{V}) = \mathbb{P}(\mathbf{V})$, e $G(s, \mathbf{V})$ può essere pensato come l'insieme dei sottospazi proiettivi di dimensione $s - 1$ in $\mathbb{P}(\mathbf{V})$; dalla geometria algebrica troviamo inoltre che $G(s, \mathbf{V})$ può essere visto come varietà proiettiva [8, Lecture 6]. Noi metteremo in relazione le grassmanniane di uno spazio vettoriale con quelle del suo duale.

Teorema 1.3.5. *Sia \mathbf{V} un K -spazio vettoriale, $\dim \mathbf{V} = n$.*

(a) *Si ha una biezione naturale, detta dualità vettoriale su \mathbf{V}*

$$\begin{aligned} G(s, \mathbf{V}) &\xrightarrow{\delta} G(n - s, \mathbf{V}^\sim) \\ \mathbf{S} &\longmapsto \{ g \in \mathbf{V}^\sim \mid g(\mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{S} \} = \mathbf{S}^{\perp\Phi} \end{aligned}$$

con inversa

$$\begin{aligned} G(n-s, \mathbf{V}^\sim) &\xrightarrow{\delta^{-1}} G(s, \mathbf{V}) \\ \mathbf{T} &\longmapsto \{ \mathbf{v} \in \mathbf{V} \mid g(\mathbf{v}) = 0 \ \forall g \in \mathbf{T} \} = \mathbf{T}^{\perp\Phi}. \end{aligned}$$

- (b) Se \mathbf{S}, \mathbf{R} sono sottospazi di \mathbf{V} di dimensione s, r rispettivamente, allora vale $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{R} \Leftrightarrow \delta(\mathbf{S}) \supseteq \delta(\mathbf{R})$, dove $\dim \delta(\mathbf{S}) = n-s$, $\dim \delta(\mathbf{R}) = n-r$.
- (c) Se \mathcal{B} è base di \mathbf{V} , \mathcal{B}^\sim è la base duale di \mathcal{B} definita da (1.3), allora delle equazioni cartesiane per \mathbf{S} sono date da

$$\mathbf{S} : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{n-s,1}x_1 + \dots + a_{n-s,n}x_n = 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

con $\text{rg} \left((a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n-s \\ j=1,\dots,n}} \right) = n-s$, se e solo se $\delta(\mathbf{S})$ è il sottospazio generato dagli elementi in $\mathbf{V}^\sim: (a_{1,1}, \dots, a_{1,n})_{\mathcal{B}^\sim}, \dots, (a_{n-s,1}, \dots, a_{n-s,n})_{\mathcal{B}^\sim}$.

Dimostrazione.

- (a) Anzitutto, per la proposizione 1.3.3, se $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{V}$ è sottospazio di dimensione s , allora $\mathbf{S}^{\perp\Phi}$ è un sottospazio di \mathbf{V}^\sim di dimensione $n-s$, e δ è ben definita; inoltre, è pure ben definita l'applicazione

$$\begin{aligned} \xi : G(n-s, \mathbf{V}^\sim) &\longrightarrow G(s, \mathbf{V}) \\ \mathbf{T} &\longmapsto \mathbf{T}^{\perp\Phi}. \end{aligned}$$

Si ha anche:

$$\xi(\delta(\mathbf{S})) = \xi \left(\bigcap_{G(n-s, \mathbf{V}^\sim)} \mathbf{S}^{\perp\Phi} \right) = (\mathbf{S}^{\perp\Phi})^{\perp\Phi} = \mathbf{S} \quad \forall \mathbf{S} \in G(s, \mathbf{V}),$$

e analogamente

$$\delta(\xi(\mathbf{T})) = \delta \left(\bigcap_{G(s, \mathbf{V})} \mathbf{T}^{\perp\Phi} \right) = (\mathbf{T}^{\perp\Phi})^{\perp\Phi} = \mathbf{T} \quad \forall \mathbf{T} \in G(n-s, \mathbf{V}^\sim),$$

dunque δ è biettiva con inversa ξ , che verrà quindi denotata con δ^{-1} .

(b) Per la (1.8), l'applicazione δ inverte le inclusioni, ovvero se \mathbf{S}, \mathbf{R} sono sottospazi di \mathbf{V} , $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{R}$, vale senz'altro $\delta(\mathbf{R}) = \mathbf{R}^{\perp\Phi} \subseteq \mathbf{S}^{\perp\Phi} = \delta(\mathbf{S})$. D'altra parte anche δ^{-1} inverte le inclusioni, dunque $\delta(\mathbf{R}) \subseteq \delta(\mathbf{S}) \Rightarrow \mathbf{S} \subseteq \mathbf{R}$.

(c) Sia \mathbf{S} sottospazio di \mathbf{V} dato dalle (1.14); siano $f_1, \dots, f_{n-s} : \mathbf{V} \rightarrow K$ le applicazioni lineari definite da $f_i((x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{B}}) = a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,n}x_n$, allora possiamo scrivere $\mathbf{S} = \bigcap_{i=1}^{n-s} \text{Ker } f_i$; in particolare, si ha $\mathbf{S} \subseteq \text{Ker } f_i$, $i = 1, \dots, n-s$. Ma la (1.12) ci dice che $\mathbf{S}^{\perp\Phi}$ è dato proprio dalle applicazioni lineari in \mathbf{V}^{\sim} il cui nucleo contiene \mathbf{S} , dunque $f_1, \dots, f_{n-s} \in \mathbf{S}^{\perp\Phi}$. Poiché $\text{rg} \left((a_{i,j})_{\substack{i=1, \dots, n-s \\ j=1, \dots, n}} \right) = n-s$, f_1, \dots, f_{n-s} sono linearmente indipendenti, e dato che $\dim \mathbf{S}^{\perp\Phi} = n-s$, costituiscono una base di $\mathbf{S}^{\perp\Phi} = \delta(\mathbf{S})$.

Viceversa, consideriamo $\delta(\mathbf{S}) = \mathbf{T} \subseteq \mathbf{V}^{\sim}$, con $\mathbf{T} = \langle f_1, \dots, f_{n-s} \rangle$, $f_i = (a_{i,1}, \dots, a_{i,n})_{\mathcal{B}^{\sim}}$, $i = 1, \dots, n-s$, $\text{rg} \left((a_{i,j})_{\substack{i=1, \dots, n-s \\ j=1, \dots, n}} \right) = n-s$, il che equivale a dire $f_i((x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{B}}) = a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,n}x_n$. Per la (1.13) vale $\delta^{-1}(\mathbf{T}) = \mathbf{S} = \bigcap_{g \in \mathbf{T}} \text{Ker } g$, dunque per il lemma 1.3.2 si ha $\mathbf{S} = \bigcap_{i=1}^{n-s} \text{Ker } f_i$, ovvero \mathbf{S} è il sottospazio dato dalle (1.14). □

Esempio 4. In \mathbb{R}^3 consideriamo i piani dati da

$$S_2 : a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

$$S_1 : b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0$$

La δ porterà questi due piani nelle rette vettoriali di $(\mathbb{R}^3)^{\sim}$, rispettivamente $\delta(S_1) = \langle (a_1, a_2, a_3) \rangle$, $\delta(S_2) = \langle (b_1, b_2, b_3) \rangle$. Vale inoltre

$$S_1 \cap S_2 = R : \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0 \end{cases}$$

e $\delta(R) = \langle (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \rangle$. Se $\text{rg} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = 2$, allora R è una retta e $\delta(R)$ è un piano.

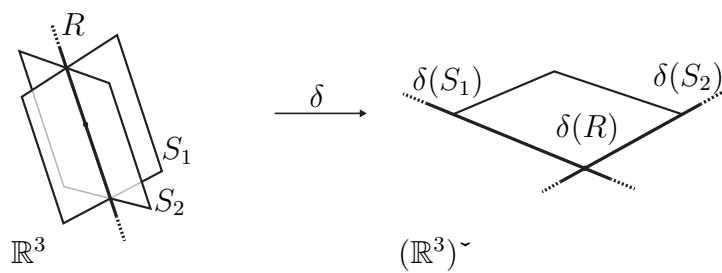


Figura 1.1: Una configurazione di sottospazi in \mathbb{R}^3 e la sua duale in $(\mathbb{R}^3)^\sim$.

Capitolo 2

Dualità proiettiva

Nel seguito \mathbf{V} è sempre un K -spazio vettoriale di dimensione $n + 1$.

2.1 Richiami sui sottospazi proiettivi

Abbiamo già ricordato il concetto di spazio proiettivo su \mathbf{V} , e abbiamo anche osservato che la grassmanniana dei sottospazi di dimensione 1 di \mathbf{V} , ovvero l'insieme delle rette vettoriali di \mathbf{V} , è proprio $\mathbb{P}(\mathbf{V})$. Richiamiamo allora alcune nozioni su spazi e sottospazi proiettivi, e sviluppiamo in questa chiave i risultati ottenuti nel paragrafo 1.3.

Sia dunque $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ uno spazio proiettivo di dimensione n , e poniamo $K^* = K \setminus \{0\}$. Anzitutto, poiché un punto P di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ è la classe $[\mathbf{v}]$ di tutti i vettori in \mathbf{V} proporzionali a $\mathbf{v} \in \mathbf{V} \setminus \{0\}$, fissata una base $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n)$ in \mathbf{V} , possiamo identificare $[\mathbf{v}]$ con la classe di proporzionalità $[(a_0, \dots, a_n)]$ in $\mathbb{P}^n(K)$, dove $(a_0, \dots, a_n)_{\mathcal{B}} = \mathbf{v}$.

D'altra parte, se consideriamo la base $\mu\mathcal{B} = (\mu\mathbf{v}_0, \dots, \mu\mathbf{v}_n)$ con $\mu \in K^*$ fissato, vale $\mathbf{v} = (\frac{a_0}{\mu}, \dots, \frac{a_n}{\mu})_{\mu\mathcal{B}}$, e $[\mathbf{v}]$ sarà ancora identificato a $[(a_0, \dots, a_n)]$ rispetto a $\mu\mathcal{B}$.

Posto dunque $\mathcal{P} = \{\mu\mathcal{B}\}_{\mu \in K^*}$, diremo che $P = [\mathbf{v}]$ ha *coordinate omogenee* a_0, \dots, a_n rispetto al *riferimento proiettivo* \mathcal{P} , e scriveremo $[\mathbf{v}] = [a_0, \dots, a_n]_{\mathcal{P}}$, se e solo se vale $\mathbf{v} = \lambda(a_0, \dots, a_n)_{\mathcal{B}}$ per qualche $\lambda \in K^*$. Sotto-

lineiamo che le coordinate omogenee di un punto $P \in \mathbb{P}(\mathbf{V})$ sono determinate a meno di un fattore di proporzionalità.

Indicheremo con \mathcal{S} il riferimento proiettivo in $\mathbb{P}^n(K)$ associato alla base canonica \mathcal{E} in K^{n+1} ; \mathcal{S} è detto il riferimento proiettivo standard.

Definizione 2.1. Se \mathbf{W} è sottospazio di \mathbf{V} , $\dim \mathbf{V} = n + 1$, $\dim \mathbf{W} = s + 1$, allora $\mathbb{P}(\mathbf{W})$ si dice *sottospazio proiettivo* di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ e vale $\dim \mathbb{P}(\mathbf{W}) = s$; inoltre si ha

$$\text{codim } \mathbb{P}(\mathbf{W}) := \dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) - \dim \mathbb{P}(\mathbf{W}) = n - s = \dim \mathbf{V} - \dim \mathbf{W}.$$

Nel paragrafo 1.1 si è visto che fissata una base $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n)$ in \mathbf{V} , è sempre possibile associare, in maniera non univoca, un sistema di equazioni cartesiane della forma

$$\begin{cases} a_{1,0}x_0 + \dots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{n-s,0}x_0 + \dots + a_{n-s,n}x_n = 0 \end{cases}, \quad \text{rg} \left((a_{i,j})_{\substack{i=0,\dots,n-s \\ j=0,\dots,n}} \right) = n - s \quad (2.1)$$

ad un sottospazio $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{V}$ con $\dim \mathbf{W} = s + 1$, per cui $\mathbf{v} = (x_0, \dots, x_n)_{\mathcal{B}} \in \mathbf{W}$ se e solo se (x_0, \dots, x_n) verifica il sistema (2.1).

Ora, se $\mathcal{P} = \{\mu\mathcal{B}\}_{\mu \in K^*}$ è un riferimento proiettivo, possiamo scrivere, se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$:

$$\mathbf{v} \in \mathbf{W} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \mathbf{v} \in \mathbf{W} \quad \forall \lambda \in K^* \Leftrightarrow [\mathbf{v}] \in \mathbb{P}(\mathbf{W}),$$

ovvero un punto P appartiene al sottospazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathbf{W})$ se e solo se uno (e quindi tutti) dei rappresentanti di $[x_0, \dots, x_n]_{\mathcal{P}}$ verifica il sistema (2.1).

Così, diremo che le (2.1) sono equazioni cartesiane anche per il sottospazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathbf{W})$ rispetto a \mathcal{P} . Viceversa, dato il sistema di equazioni (2.1), lo spazio delle soluzioni è un sottospazio di \mathbf{V} di dimensione $s + 1$ e il proiettivizzato di quest'ultimo è un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ di dimensione s .

Possiamo fare un discorso analogo anche per le equazioni parametriche: fissata una base $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n)$ di \mathbf{V} , se $(\mathbf{v}'_0, \dots, \mathbf{v}'_s)$ è base di \mathbf{W} ,

$\mathbf{v}'_i = \sum_{j=0}^n a_{j,i} \mathbf{v}_j$, allora

$$\begin{cases} x_0 = a_{0,0}\lambda_0 + \dots + a_{0,s}\lambda_s \\ \dots \\ x_n = a_{n,0}\lambda_0 + \dots + a_{n,s}\lambda_s \end{cases}, \quad \operatorname{rg} \left((a_{i,j})_{\substack{i=0,\dots,n \\ j=0,\dots,s}} \right) = s + 1 \quad (2.2)$$

sono equazioni parametriche per \mathbf{W} , e poiché, se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{v} \in \mathbf{W} \Leftrightarrow [\mathbf{v}] \in \mathbb{P}(\mathbf{W})$, le (2.2) sono anche equazioni parametriche per $\mathbb{P}(\mathbf{W})$. Viceversa, fissata \mathcal{B} in \mathbf{V} , le (2.2) danno un sottospazio \mathbf{W} in \mathbf{V} , dunque un sottospazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathbf{W})$ in $\mathbb{P}(\mathbf{V})$. Le (2.2), pensate come equazioni parametriche per $\mathbb{P}(\mathbf{W})$ in $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, si possono leggere così: $P = [x_0, \dots, x_n]_{\mathcal{P}} \in \mathbb{P}(\mathbf{W})$ se e solo se P appartiene al sottospazio generato dai punti linearmente indipendenti $[\mathbf{v}'_0], \dots, [\mathbf{v}'_s]$ (si veda il successivo paragrafo 2.1.1).

Vale la pena notare che due s -uple di parametri proporzionali individuano lo stesso punto in $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, ovvero stiamo considerando la corrispondenza biunivoca

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{P}^s(K) & \longrightarrow & \mathbb{P}(\mathbf{W}) \\ [\lambda_0, \dots, \lambda_s] & \longmapsto & [a_{0,0}\lambda_0 + \dots + a_{0,s}\lambda_s, \dots, a_{n,0}\lambda_0 + \dots + a_{n,s}\lambda_s] \end{array}.$$

I parametri λ_i , $i = 0, \dots, s$, si dicono *parametri omogenei*.

Esempio 5. In \mathbb{R}^3 , i sottospazi propri sono le rette e i piani per l'origine.

Rispetto alla base \mathcal{E} , considero le due rette vettoriali:

$$W_1: \begin{cases} 2x + y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}, \quad W_2: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}.$$

Delle equazioni parametriche per W_1, W_2 sono ad esempio:

$$W_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad W_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Il piano U contenente W_1, W_2 ha equazioni parametriche date da

$$U: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

e come equazione cartesiana possiamo prendere

$$U : \det \begin{pmatrix} x & y & z \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

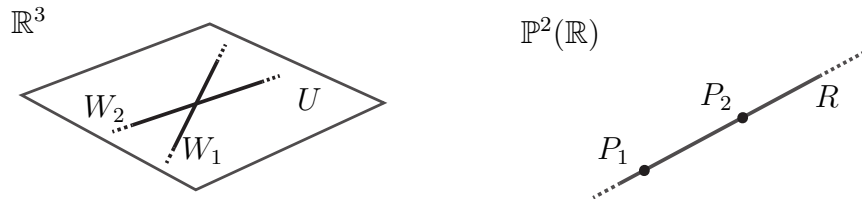
cioè $U : 2x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 0$. Proiettivizzando, si trovano i punti

$$P_1 = \mathbb{P}(W_1) = [-\frac{1}{2}, 1, 1] \quad , \quad P_2 = \mathbb{P}(W_2) = [0, 1, -1],$$

e la retta

$$R = \mathbb{P}(U) = \mathbb{P}(\langle (-\frac{1}{2}, 1, 1), (0, 1, -1) \rangle)$$

in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, e le equazioni parametriche e cartesiane scelte per W_1, W_2, U descrivono rispettivamente in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ i sottospazi P_1, P_2, R .



È da notare in particolare che il proiettivizzato del piano contenente W_1, W_2 è la retta contenente P_1, P_2 ; generalizzeremo a breve questo concetto.

Osserviamo inoltre che anche nel caso proiettivo il numero minimo di equazioni cartesiane necessarie per descrivere un sottospazio è pari alla sua codimensione (nel nostro esempio, il punto, che ha dimensione zero, è definito da almeno 2 equazioni cartesiane in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$).

2.1.1 Posizioni reciproche di sottospazi proiettivi

Finora abbiamo visto come le nozioni di sottospazio e base si traducono nel caso proiettivo; introduciamo analogamente i concetti di insieme generatore e indipendenza lineare.

Definizione 2.2. Sia dato in $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ un sottoinsieme A qualsiasi, e sia $D = \{ \mathbf{S} \mid \mathbf{S} \text{ sottospazio di } \mathbb{P}(\mathbf{V}), \mathbf{S} \supseteq A \}$. Si dice *sottospazio proiettivo generato*

da A il sottospazio di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ così definito: $L(A) := \bigcap_{\mathbf{S} \in D} \mathbf{S}$.

La definizione è ben posta, infatti l'intersezione su una famiglia di sottospazi proiettivi $\{\mathbb{P}(\mathbf{W}_i)\}_{i \in I}$ è ancora sottospazio proiettivo, e in particolare vale $\bigcap_{i \in I} \mathbb{P}(\mathbf{W}_i) = \mathbb{P}(\bigcap_{i \in I} \mathbf{W}_i)$. Si noti che $L(A)$ è il più piccolo sottospazio di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ contenente A , e per questo si dice che A genera il sottospazio $L(A)$.

Notazione 2. Denotiamo sempre con π la proiezione canonica

$$\pi : \mathbf{V} \setminus \{\mathbf{0}\} \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbf{V}) \\ \mathbf{v} \longmapsto [\mathbf{v}] .$$

La fibra su un punto $P = [\mathbf{v}] \in \mathbb{P}(\mathbf{V})$ è quindi

$$\pi^{-1}([\mathbf{v}]) = \{ \mathbf{w} \in \mathbf{V} \mid \mathbf{w} = \lambda \mathbf{v}, \lambda \in K^* \} = \langle \mathbf{v} \rangle \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

Osservazione 4. Se A è un sottoinsieme di $\mathbb{P}(V)$, vale $L(A) = \mathbb{P}(\langle \pi^{-1}(A) \rangle)$. Infatti $A \subseteq \mathbf{S} = \mathbb{P}(\mathbf{W}) \Leftrightarrow \pi^{-1}(A) \subseteq \mathbf{W}$ per la suriettività della proiezione π , dunque

$$L(A) = \bigcap_{\mathbb{P}(\mathbf{W}) \supseteq A} \mathbb{P}(\mathbf{W}) = \bigcap_{\mathbf{W} \supseteq \pi^{-1}(A)} \mathbb{P}(\mathbf{W}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{\mathbf{W} \supseteq \pi^{-1}(A)} \mathbf{W}\right) = \mathbb{P}(\langle \pi^{-1}(A) \rangle).$$

Inoltre se $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2$ sono sottospazi proiettivi, con $\mathbf{S}_1 = \mathbb{P}(\mathbf{W}_1), \mathbf{S}_2 = \mathbb{P}(\mathbf{W}_2)$, allora

$$\begin{aligned} L(\mathbf{S}_1 \cup \mathbf{S}_2) &= \mathbb{P}(\langle \pi^{-1}(\mathbf{S}_1 \cup \mathbf{S}_2) \rangle) = \mathbb{P}(\langle \pi^{-1}(\mathbf{S}_1) \cup \pi^{-1}(\mathbf{S}_2) \rangle) = \\ &= \mathbb{P}(\langle (\mathbf{W}_1 \setminus \{\mathbf{0}\}) \cup (\mathbf{W}_2 \setminus \{\mathbf{0}\}) \rangle) = \\ &= \mathbb{P}(\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2). \end{aligned}$$

Talvolta scriveremo $L(\mathbf{S}_1 \cup \mathbf{S}_2) =: \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$; $\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$ è detto il sottospazio generato da \mathbf{S}_1 e \mathbf{S}_2 , o anche lo *spazio somma*, o *congiungente*, di \mathbf{S}_1 e \mathbf{S}_2 . Il simbolo “+” fra sottospazi proiettivi sarà sempre da intendere con questo significato. Si noti infatti che non ha senso, nello spazio proiettivo, definire una somma fra punti come quella definita negli spazi vettoriali; ad esempio, basta considerare in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ i punti

$$P_1 = [0, 2, 1] \quad , \quad P_2 = [2, 0, 3].$$

Sommando i rappresentanti scelti sopra troviamo $(2, 2, 4)$; scrivendo invece

$$P_1 = [0, 2, 1] \quad , \quad P_2 = [-2, 0, -3]$$

e sommando questa nuova coppia di rappresentanti, si ha la tripla $(-2, 2, -2)$, che non è proporzionale a $(2, 2, 4)$. Non è possibile quindi determinare un punto in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ che sia dato dalla somma fra P_1, P_2 così definita.

Quindi la scrittura $P_1 + P_2$ va intesa come il sottospazio somma dei punti P_1 e P_2 , pensati come sottospazi; dato che $P_1 \neq P_2$, $P_1 + P_2$ è la retta per i due punti.

Definizione 2.3. Siano P_1, \dots, P_t punti in $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, $P_i = [\mathbf{v}_i]$, $\mathbf{v}_i \in \mathbf{V} \setminus \{\mathbf{0}\}$ per $i = 1, \dots, t$.

Diremo che P_1, \dots, P_t sono *linearmente indipendenti* se $\dim L(P_1, \dots, P_t) = t - 1$, dove

$$\begin{aligned} L(P_1, \dots, P_t) &= \mathbb{P}(\langle \pi^{-1}(P_1) \cup \dots \cup \pi^{-1}(P_t) \rangle) = \\ &= \mathbb{P}(\langle \langle \mathbf{v}_1 \rangle \setminus \{\mathbf{0}\} \cup \dots \cup \langle \mathbf{v}_t \rangle \setminus \{\mathbf{0}\} \rangle) = \\ &= \mathbb{P}(\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_t \rangle). \end{aligned}$$

In particolare P_1, \dots, P_t sono linearmente indipendenti in $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ se e solo se lo sono $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_t$ in \mathbf{V} , e se $\dim \mathbf{V} = n$, si avranno al più $n + 1$ punti linearmente indipendenti in $\mathbb{P}(\mathbf{V})$.

Definizione 2.4. Sia $\dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) = n$. Diremo che P_1, \dots, P_t sono in *posizione generale* se

- per $t \leq n + 1$, P_1, \dots, P_t sono linearmente indipendenti
- per $t > n + 1$, comunque presi $n + 1$ punti fra P_1, \dots, P_t , questi sono linearmente indipendenti.

Proposizione 2.1.1. In $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ di dimensione n , siano dati $n + 2$ punti $P_0 = [\mathbf{v}_0], \dots, P_{n+1} = [\mathbf{v}_{n+1}]$. Allora P_0, \dots, P_{n+1} sono in *posizione generale* se e solo se ne esistono $n + 1$ linearmente indipendenti, e il restante P_i è tale che

$$\mathbf{v}_i = \sum_{\substack{j=0, \dots, n+1 \\ j \neq i}} \lambda_j \mathbf{v}_j \quad , \quad \text{con } \lambda_j \neq 0 \quad \forall j = 0, \dots, n+1, \quad j \neq i.$$

Dimostrazione. Supponiamo P_0, \dots, P_{n+1} in posizione generale. Per definizione, P_0, \dots, P_n sono linearmente indipendenti, dunque lo sono anche $\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n$ in \mathbf{V} , ed esistono $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in K$, non tutti nulli, tali che $\mathbf{v}_{n+1} = \sum_{i=0}^n \lambda_i \mathbf{v}_i$. Mostriamo che i λ_i sono tutti diversi da zero. Se fosse ad esempio $\lambda_0 = 0$, si avrebbe $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{0}$, ovvero $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n+1}$ sarebbero linearmente dipendenti, contro l'ipotesi di posizione generale.

Viceversa, supponiamo P_0, \dots, P_n linearmente indipendenti (è sempre possibile riordinare gli indici in modo che questo sia vero), $\mathbf{v}_{n+1} = \sum_{i=0}^n \lambda_i \mathbf{v}_i$, $\lambda_i \neq 0$ per $i = 0, \dots, n$. Proviamo ad esempio P_1, \dots, P_{n+1} linearmente indipendenti; consideriamo la combinazione

$$\begin{aligned} a_1 \mathbf{v}_1 + \dots + a_{n+1} \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{0} &\Rightarrow a_1 \mathbf{v}_1 + \dots + a_{n+1} \left(\sum_{i=0}^n \lambda_i \mathbf{v}_i \right) = \mathbf{0} \Rightarrow \\ &\Rightarrow a_{n+1} \lambda_0 \mathbf{v}_0 + (a_1 + a_{n+1} \lambda_1) \mathbf{v}_1 + \dots + (a_n + a_{n+1} \lambda_n) \mathbf{v}_n = \mathbf{0} \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} a_{n+1} \lambda_0 = 0 &\Rightarrow a_{n+1} = 0 \\ a_i + a_{n+1} \lambda_i = 0 &\Rightarrow a_i = 0 \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

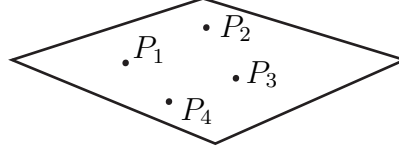
da cui l'asserto. □

Esempio 6. In $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, considero

$$\begin{aligned} P_1 &= [1, 0, \dots, 0] = [\mathbf{e}_1] \\ &\dots \\ P_{n+1} &= [0, \dots, 0, 1] = [\mathbf{e}_{n+1}] \\ Q &= [1, \dots, 1] = [\mathbf{v}]. \end{aligned}$$

Allora P_1, \dots, P_{n+1} sono linearmente indipendenti (perché lo sono $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n+1}$ in \mathbb{R}^{n+1}) e vale $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{e}_i$, dunque P_1, \dots, P_{n+1}, Q sono $n + 2$ punti in posizione generale. I P_i si dicono *punti fondamentali*, Q si dice *punto unità*.

Esempio 7. In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, quattro punti P_1, \dots, P_4 sono in posizione generale se e solo se, presi 3 alla volta, essi sono linearmente indipendenti, cioè non sono allineati, ovvero se e solo se sono i vertici di un quadrilatero che non degenera in triangolo.



In $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, i punti così disposti non sono in posizione generale (infatti quattro punti in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ possono essere linearmente indipendenti, e questi non lo sono).

Definizione 2.5. Siano $\mathbf{S}_1 = \mathbb{P}(\mathbf{W}_1)$, $\mathbf{S}_2 = \mathbb{P}(\mathbf{W}_2)$. Diremo che $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2$ sono *sghembi* se $\mathbf{S}_1 \cap \mathbf{S}_2 = \emptyset$, altrimenti diremo che sono *incidenti*.

Osserviamo che $\mathbf{S}_1 \cap \mathbf{S}_2 = \emptyset \Leftrightarrow \mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2 = \langle \mathbf{0} \rangle$. Inoltre, se $\dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) = n$, $\dim \mathbf{S}_1 = s_1$, $\dim \mathbf{S}_2 = s_2$, ricordando la formula di Grassmann proiettiva, ricaviamo che se $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2$ sono sghembi allora vale $s_1 + s_2 \leq n - 1$.

Definizione 2.6. Nelle notazioni precedenti, $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2$ si dicono in *posizione generale* se $\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$ ha dimensione più grande possibile, o equivalentemente, se $\mathbf{S}_1 \cap \mathbf{S}_2$ ha dimensione più piccola possibile, compatibilmente con s_1, s_2 . In particolare $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2$ sono in posizione generale se

- per $s_1 + s_2 \geq n - 1$, vale $\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 = \mathbb{P}(\mathbf{V})$
- per $s_1 + s_2 \leq n - 1$, vale $\mathbf{S}_1 \cap \mathbf{S}_2 = \emptyset$

Esempio 8. In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, una retta R ($\dim = 1$) e un punto P ($\dim = 0$) possono essere sghembi, e sono incidenti se e solo se $P \in R$. Invece, due rette sono sempre incidenti (d'altra parte, se passiamo al vettoriale, troviamo due piani in \mathbb{R}^3 che si intersecano lungo una retta se sono distinti) e sono in posizione generale \Leftrightarrow non coincidono \Leftrightarrow generano tutto $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Esempio 9. In $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, due rette R_1, R_2 sono in posizione generale \Leftrightarrow sono sghembe (in \mathbb{R}^4 si hanno due piani W_1, W_2 tali che $W_1 \cap W_2 = \langle \mathbf{0} \rangle$), mentre un piano T e una retta R sono in posizione generale \Leftrightarrow sono incidenti in un

punto $P \Leftrightarrow$ la retta non giace sul piano (figura 2.1). Analogamente, due piani sono in posizione generale \Leftrightarrow si intersecano lungo una retta \Leftrightarrow sono distinti e quindi generano tutto $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

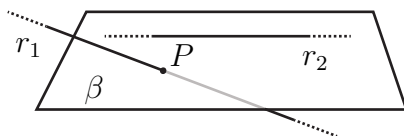


Figura 2.1

2.2 Dualità proiettiva

Definizione 2.7. Diremo che

$$\mathbb{P}(\mathbf{V}^\vee) = \mathbb{P}(\{ f : \mathbf{V} \rightarrow K \mid f \text{ lineare} \}) = \{ [f] \mid f \in \mathbf{V}^\vee \setminus \{0\} \}$$

è lo *spazio proiettivo duale* di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$.

È da notare che definire lo spazio duale di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ come l'insieme delle funzioni lineari da $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ a K non avrebbe avuto senso; si consideri ad esempio l'assegnazione da $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ a \mathbb{R} data da:

$$[x_0, x_1, x_2] \xrightarrow{f} 2x_0 + x_1$$

e sia dato il punto $P = [1, 2, 1] = [2, 4, 2]$. Scelto il primo rappresentante, si ha $f(P) = 4$, mentre col secondo $f(P) = 8$, dunque f non è una funzione.

Definiamo ora, a partire dall'applicazione δ introdotta nel teorema 1.3.5:

$$\begin{aligned} G(s, \mathbf{V}) &\xrightarrow{\delta} G(n-s, \mathbf{V}^\vee) \\ \mathbf{W} &\longmapsto \{ f \in \mathbf{V}^\vee \mid f(\mathbf{v}) = 0 \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W} \} = \mathbf{W}^{\perp_\Phi} \end{aligned}$$

un'altra corrispondenza, che chiameremo $\tilde{\delta}$, fra i sottospazi di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ e quelli di $\mathbb{P}(\mathbf{V}^\vee)$.

Definizione 2.8. Sia $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ uno spazio proiettivo di dimensione n su K ; si dice *grassmanniana proiettiva dei sottospazi di dimensione t di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$* l'insieme

$$\mathbb{G}(t, \mathbb{P}(\mathbf{V})) = \{ \mathbf{T} \mid \mathbf{T} \text{ sottospazio proiettivo di } \mathbb{P}(\mathbf{V}), \dim \mathbf{T} = t \}$$

La grassmanniana proiettiva $\mathbb{G}(t, \mathbb{P}(\mathbf{V}))$ è identificabile alla grassmanniana vettoriale $G(t+1, \mathbf{V})$.

A questo punto abbiamo tutti i presupposti per enunciare quello che è tradizionalmente chiamato *principio di dualità proiettiva*, dedotto per la prima volta da J.D. Gergonne negli *Annales de Mathématiques* [5, p. 364].

Noi lo vedremo sia come versione proiettiva del teorema 1.3.5, che nella sua formulazione più classica ed evocativa.

Teorema 2.2.1 (Principio di dualità - prima versione).

Sia \mathbf{V} K -spazio vettoriale di dimensione $n+1$.

(a) Si ha una biezione naturale $\tilde{\delta}$, detta *dualità proiettiva su $\mathbb{P}(\mathbf{V})$*

$$\begin{aligned} \mathbb{G}(s, \mathbb{P}(\mathbf{V})) &\xrightarrow{\tilde{\delta}} \mathbb{G}(n-s-1, \mathbb{P}(\mathbf{V}^\vee)) \\ \mathbb{P}(\mathbf{W}) = \mathbf{S} &\longmapsto \tilde{\delta}(\mathbf{S}) := \mathbb{P}(\delta(\mathbf{W})) = \mathbb{P}(\mathbf{W}^{\perp\Phi}) \end{aligned}$$

con inversa

$$\begin{aligned} \mathbb{G}(t, \mathbb{P}(\mathbf{V}^\vee)) &\xrightarrow{\tilde{\delta}^{-1}} \mathbb{G}(n-s-1, \mathbb{P}(\mathbf{V}^\vee)) \\ \mathbb{P}(\mathbf{U}) = \mathbf{T} &\longmapsto \tilde{\delta}^{-1}(\mathbf{T}) := \mathbb{P}(\delta^{-1}(\mathbf{U})) = \mathbb{P}(\mathbf{U}^{\perp\Phi}) \end{aligned}$$

(b) Se $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2$ sono sottospazi di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, allora $\mathbf{S}_1 \subseteq \mathbf{S}_2 \Leftrightarrow \tilde{\delta}(\mathbf{S}_1) \supseteq \tilde{\delta}(\mathbf{S}_2)$.

(c) Se $\mathcal{P} = \{\mu\mathcal{B}\}_{\mu \in K^*}$ è un riferimento proiettivo fissato in $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ e $\mathcal{P}^\vee := \{\mu\mathcal{B}^\vee\}_{\mu \in K^*}$ è il riferimento proiettivo duale, allora delle equazioni cartesiane per \mathbf{S} rispetto a \mathcal{P} sono date da

$$\mathbf{S} : \begin{cases} a_{1,0}x_0 + \dots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{n-s,0}x_0 + \dots + a_{n-s,n}x_n = 0 \end{cases}, \quad \text{rg} \left((a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n-s \\ j=0,\dots,n}} \right) = n-s$$

se e solo se $\tilde{\delta}(\mathbf{S})$ è il sottospazio

$$\tilde{\delta}(\mathbf{S}) = L([a_{1,0}, \dots, a_{1,n}]_{\mathcal{P}^\vee}, \dots, [a_{n-s,0}, \dots, a_{n-s,n}]_{\mathcal{P}^\vee}).$$

Dimostrazione. Segue direttamente dal teorema 1.3.5 e dalla teoria sui sottospazi proiettivi sviluppata in questo capitolo. \square

Teorema 2.2.2 (Principio di dualità - seconda versione). *Ad ogni proposizione vera riguardante solo sottospazi di uno spazio proiettivo di dimensione n su K e loro inclusioni corrisponde una proposizione ancora vera ottenuta sostituendo a sottospazi di dimensione s sottospazi di dimensione $n - s - 1$, e rovesciando le inclusioni.*

Le due proposizioni si dicono una duale dell'altra.

Dimostrazione. È la riformulazione del punto (a) del teorema precedente. Osserviamo che per la simmetria delle applicazioni $\tilde{\delta}$, $\tilde{\delta}^{-1}$, le proposizioni ottenute come duali di proposizioni vere che riguardino solo i sottospazi di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ e loro inclusioni, sono vere perché ogni relazione di inclusione vera tra sottospazi di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ diventa un'inclusione vera tra i sottospazi duali se si rovescia. Questo dà proposizioni vere in $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ o $\mathbb{P}(\mathbf{V}^\vee)$, ma possiamo omettere questa informazione dato che $\mathbb{P}(\mathbf{V}) \cong \mathbb{P}(\mathbf{V}^\vee) \cong \mathbb{P}^n$ e considerare un generico spazio proiettivo \mathbb{P}^n .

Per finire osserviamo che se da una proposizione \mathcal{P} si ottiene per dualità la proposizione \mathcal{P}^\vee , allora da \mathcal{P}^\vee si ottiene per dualità la \mathcal{P} . \square

Osservazione 5. Prima di procedere con esempi di proposizioni duali, occorre chiarire come l'applicazione $\tilde{\delta}$ agisce sui sottospazi generati o dati dall'intersezione di altri sottospazi, e sugli insiemi di punti linearmente indipendenti.

In $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ si consideri il sottospazio $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \dots + \mathbf{S}_k$. Dalla definizione 2.2, sappiamo che \mathbf{S} è il più piccolo sottospazio contenente $\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_k$, ovvero \mathbf{S} è l'unico sottospazio (che esiste) per cui vale per cui vale

$$\mathbf{R} \text{ sottospazio di } \mathbb{P}(\mathbf{V}), \mathbf{R} \supseteq \mathbf{S}_i \forall i = 1, \dots, k \Rightarrow \mathbf{R} \supseteq \mathbf{S}.$$

Dualizzando, $\tilde{\delta}(\mathbf{S})$ è l'unico sottospazio di $\mathbb{P}(\mathbf{V}^\vee)$ per cui vale:

$$\tilde{\delta}(\mathbf{R}) \text{ sottospazio di } \mathbb{P}(\mathbf{V}^\vee), \tilde{\delta}(\mathbf{R}) \subseteq \delta(\mathbf{S}_i) \forall i = 1, \dots, k \Rightarrow \tilde{\delta}(\mathbf{R}) \subseteq \tilde{\delta}(\mathbf{S}).$$

Si osservi che se \mathbf{R} varia nell'insieme di tutti i sottospazi di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, $\tilde{\delta}(\mathbf{R})$ varia nell'insieme di tutti i sottospazi di $\mathbb{P}(\mathbf{V}^\vee)$. Quindi $\tilde{\delta}(\mathbf{S})$ è il più grande sottospazio contenuto in ciascun $\tilde{\delta}(\mathbf{S}_i)$, e vale pertanto $\tilde{\delta}(\mathbf{S}) = \bigcap_{i=1}^k \tilde{\delta}(\mathbf{S}_i)$.

Ripetendo il ragionamento con $\tilde{\delta}^{-1}$ trovo dunque la corrispondenza:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_1 + \dots + \mathbf{S}_k &\xrightarrow{\tilde{\delta}} \tilde{\delta}(\mathbf{S}_1) \cap \dots \cap \tilde{\delta}(\mathbf{S}_k) \\ \mathbf{S}_1 \cap \dots \cap \mathbf{S}_k &\xrightarrow{\tilde{\delta}} \tilde{\delta}(\mathbf{S}_1) + \dots + \tilde{\delta}(\mathbf{S}_k) \end{aligned}$$

Siano ora P_0, \dots, P_t punti linearmente indipendenti in $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, con $t \leq n$ necessariamente; vale $\dim L(P_0, \dots, P_t) = t \Leftrightarrow \dim \bigcap_{i=0}^t \tilde{\delta}(P_i) = n - t - 1$. Ora, $\tilde{\delta}(P_i)$ è un iperpiano di $\mathbb{P}(\mathbf{V}^\vee)$, dunque i $\tilde{\delta}(P_i)$, $i = 1, \dots, t$ sono tali che la loro intersezione ha dimensione più piccola possibile.

Vediamo ora alcuni esempi di proposizioni duali negli spazi proiettivi di dimensione 2, 3, 4, 5.

2.2.1 Esempi in \mathbb{P}^2

Esempio 10. Determiniamo la proposizione duale della seguente:

$$\text{In } \mathbb{P}^2, \text{ due punti distinti generano una retta.} \quad (\bullet)$$

Anzitutto, $n = 2$ dunque ai punti P_1, P_2 ($\dim = 0$) sostituiamo le rette R_1, R_2 ($\dim = 1 = 2 - 0 - 1$), alla retta $R = P_1 + P_2$ il punto $P = \tilde{\delta}(R)$, e all'insieme vuoto ($\dim = -1$) il piano \mathbb{P}^2 . Dire che P_1, P_2 sono distinti, equivale a dire $P_1 \not\subseteq P_2, P_2 \not\subseteq P_1$, che si traduce in $R_1 \not\subseteq R_2, R_2 \not\subseteq R_1$, cioè R_1, R_2 sono distinte. Ora, per l'osservazione 5, poiché $P_1 + P_2 = R$, sarà $\tilde{\delta}(R) = P = R_1 \cap R_2$.

Dunque abbiamo trovato la proposizione duale di (\bullet) , che sappiamo essere ancora vera:

$$\text{In } \mathbb{P}^2, \text{ due rette distinte si incontrano in un punto.} \quad (\bullet^\vee)$$

Applicando ancora il principio di dualità alla proposizione (\bullet^\sim) , ritroviamo la (\bullet) , ovvero le due proposizioni sono, come sappiamo, una duale dell'altra.

Esempio 11. La seguente proposizione è vera in \mathbb{P}^2 :

Se P_1, P_2, P_3 sono punti linearmente indipendenti, allora
 $L(P_1, P_2) \cap L(P_2, P_3) \cap L(P_1, P_3) = \emptyset$.

Ragionando in maniera del tutto analoga all'esempio precedente, per quanto detto nell'osservazione 5, troviamo le corrispondenze:

P_1, P_2, P_3 punti linearmente indipendenti \longleftrightarrow $\delta(P_1), \delta(P_2), \delta(P_3)$ rette che si intersecano nel vuoto

$L(P_1, P_2) \cap L(P_2, P_3) \cap L(P_1, P_3) = \emptyset$ \longleftrightarrow $\delta(P_1) \cap \delta(P_2), \delta(P_2) \cap \delta(P_3), \delta(P_1) \cap \delta(P_3)$ generano \mathbb{P}^2 .

Si ha quindi la proposizione:

Se R_1, R_2, R_3 sono rette che hanno intersezione vuota, allora i punti $R_1 \cap R_2, R_2 \cap R_3, R_1 \cap R_3$ generano tutto \mathbb{P}^2 (cioè sono linearmente indipendenti).

In particolare, la seguente proposizione è vera:

Siano P_1, P_2, P_3 punti del piano. Allora le rette $P_1 + P_2, P_2 + P_3, P_1 + P_3$ hanno intersezione vuota se e solo se P_1, P_2, P_3 sono linearmente indipendenti.

Questa proposizione è tale che la sua duale è la proposizione stessa; proposizioni di questo tipo si dicono *autoduali*.

Vedremo a breve un altro esempio di proposizione autoduale. Intanto enunciamo e dimostriamo il teorema di Desargues nella forma seguente:

Teorema 2.2.3 (Teorema di Desargues).

Sia $\mathbb{P} = \mathbb{P}(\mathbf{V})$ un piano proiettivo, e siano $P_1, \dots, P_6 \in \mathbb{P}$ punti distinti;

scriviamo $L_{i,j} := P_i + P_j$ per $i, j = 1, \dots, 6, i \neq j$. Supponiamo che le rette $L_{1,4}, L_{2,5}, L_{3,6}$ siano a due a due non coincidenti e valga

$$L_{1,4} \cap L_{2,5} \cap L_{3,6} = P_0 \neq P_i, \quad i = 1, \dots, 6.$$

Allora i punti

$$L_{1,3} \cap L_{4,6}, \quad L_{2,3} \cap L_{5,6}, \quad L_{1,2} \cap L_{4,5}$$

sono allineati.

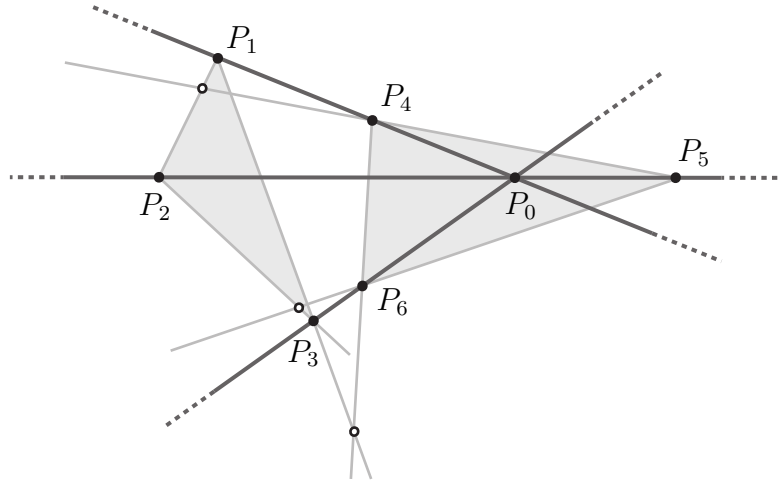


Figura 2.2: I vertici di due triangoli come quelli evidenziati nella figura soddisfano le ipotesi del teorema di Desargues.

Dimostrazione. Siano $\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_6 \in \mathbf{V}$ tali che $[\mathbf{v}_i] = P_i, i = 0, \dots, 6$ in \mathbb{P} .

Fissato un riferimento \mathcal{P} , per ipotesi esistono a_1, \dots, a_6 scalari in K tali che

$$\mathbf{v}_0 = a_1 \mathbf{v}_1 + a_4 \mathbf{v}_4 = a_2 \mathbf{v}_2 + a_5 \mathbf{v}_5 = a_3 \mathbf{v}_3 + a_6 \mathbf{v}_6 \quad (2.3)$$

dove gli a_i sono non nulli in quanto $P_0 \neq P_i, i = 1, \dots, 6$.

Ora, certamente esistono $(\lambda_1, \lambda_3), (\lambda_4, \lambda_6) \neq (0, 0), \lambda_i \in K$, tali che il punto $L_{1,3} \cap L_{4,6}$ sia associato al vettore $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 = \lambda_4 \mathbf{v}_4 + \lambda_6 \mathbf{v}_6$.

D'altra parte, dalla (2.3) abbiamo anche $a_1 \mathbf{v}_1 - a_3 \mathbf{v}_3 = -a_4 \mathbf{v}_4 + a_6 \mathbf{v}_6$, quindi possiamo scegliere $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_6$ così:

$$\lambda_1 = a_1, \quad \lambda_3 = -a_3, \quad \lambda_4 = -a_4, \quad \lambda_6 = a_6.$$

Dunque

$$L_{1,3} \cap L_{4,6} = [a_1 \mathbf{v}_1 - a_3 \mathbf{v}_3] = [-a_4 \mathbf{v}_4 + a_6 \mathbf{v}_6]$$

e analogamente

$$L_{2,3} \cap L_{5,6} = [-a_2 \mathbf{v}_2 + a_3 \mathbf{v}_3] = [a_5 \mathbf{v}_5 - a_6 \mathbf{v}_6]$$

$$L_{1,2} \cap L_{4,5} = [-a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2] = [a_4 \mathbf{v}_4 - a_5 \mathbf{v}_5].$$

Ma $(a_1 \mathbf{v}_1 - a_3 \mathbf{v}_3) + (-a_2 \mathbf{v}_2 + a_3 \mathbf{v}_3) + (-a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2) = \mathbf{0}$, ovvero i tre punti corrispondenti sono allineati. \square

Applicando il principio di dualità troviamo le seguenti corrispondenze:

$$\begin{array}{l} P_1, \dots, P_6 \text{ punti distinti tali che} \\ L_{1,4}, L_{2,5}, L_{3,6} \text{ siano tre rette} \\ \text{distinte} \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{l} R_1, \dots, R_6 \text{ rette distinte tali che} \\ R_1 \cap R_4, R_2 \cap R_5, R_3 \cap R_6 \text{ siano} \\ \text{tre punti distinti} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} L_{1,4}, L_{2,5}, L_{3,6} \text{ si intersecano in} \\ P_0 \neq P_i, i = 1, \dots, 6 \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{l} Q_1 = R_1 \cap R_4, Q_2 = R_2 \cap R_5, \\ Q_3 = R_3 \cap R_6 \text{ giacciono su} \\ R_0 \neq R_i, i = 1, \dots, 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} L_{1,3} \cap L_{4,6}, L_{2,3} \cap L_{5,6}, \\ L_{1,2} \cap L_{4,5} \text{ sono allineati} \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{l} L(R_1 \cap R_3, R_4 \cap R_6), \\ L(R_2 \cap R_3, R_5 \cap R_6), \\ L(R_1 \cap R_2, R_4 \cap R_5) \text{ si} \\ \text{intersecano in un punto} \end{array}$$

ovvero otteniamo il seguente:

Teorema 2.2.4. *Date R_1, \dots, R_6 rette proiettive distinte tali che $Q_1 = R_1 \cap R_4$, $Q_2 = R_2 \cap R_5$, $Q_3 = R_3 \cap R_6$ siano punti distinti, se i punti Q_1, Q_2, Q_3 sono allineati allora le rette $L(R_1 \cap R_3, R_4 \cap R_6)$, $L(R_2 \cap R_3, R_5 \cap R_6)$, $L(R_1 \cap R_2, R_4 \cap R_5)$ si intersecano in un punto.*

I teoremi 2.2.3 e 2.2.4 esprimono una condizione necessaria e l'altro una condizione sufficiente affinché si abbia una certa configurazione di punti e rette. Enunciando il teorema di Desargues come condizione necessaria e sufficiente si ottiene un enunciato autoduale.

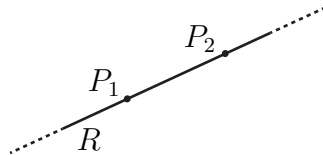
2.2.2 Esempi in \mathbb{P}^3

Esempio 12. In \mathbb{P}^3 , il principio di dualità dà le corrispondenze:

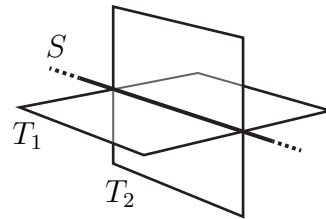
$$\begin{aligned} \text{punto} &\longleftrightarrow \text{piano} \\ \text{retta} &\longleftrightarrow \text{retta} \\ \emptyset &\longleftrightarrow \mathbb{P}^3 \end{aligned}$$

Sono proposizioni duali (entrambe vere) in \mathbb{P}^3 :

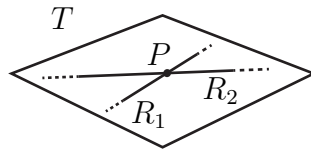
- *Due punti distinti generano una retta.*



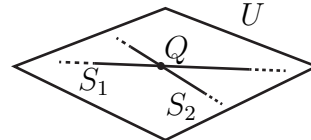
- *Due piani distinti si incontrano lungo una retta.*



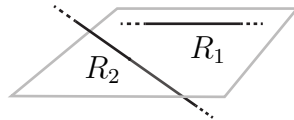
- *Due rette incidenti in un punto generano un piano.*



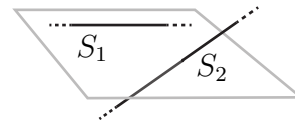
- *Due rette complanari si intersecano in un punto.*



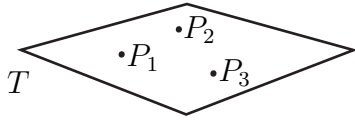
- *Due rette sghembe generano tutto \mathbb{P}^3 .*



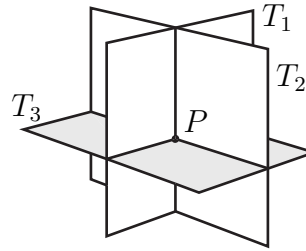
- *Due rette che generano tutto \mathbb{P}^3 sono sghembe.*



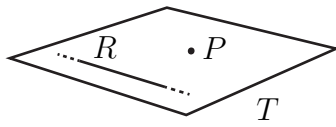
- *Tre punti non allineati generano un piano.*



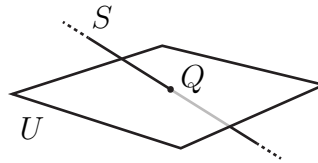
Tre piani non contenenti una stessa retta si incontrano in un punto



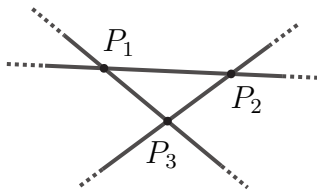
- *Un punto e una retta non passante per esso generano un piano.*



Un piano e una retta non giacente su esso si intersecano in un punto.

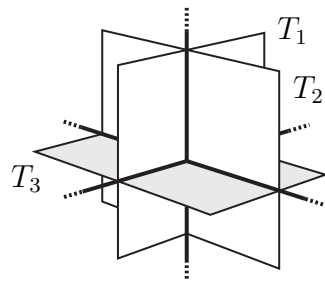


- *Dati tre punti linearmente indipendenti, esistono tre rette distinte ognuna delle quali ne contiene due. Queste tre rette generano il piano che contiene i punti.*



Dati tre piani non contenenti una stessa retta, esistono tre rette distinte, ciascuna contenuta in due di essi.

Queste tre rette si intersecano nel punto che è l'intersezione dei tre piani.



2.2.3 Esempi in \mathbb{P}^4 e \mathbb{P}^5

Esempio 13. In \mathbb{P}^4 , $\tilde{\delta}$ dà le corrispondenze:

$$\begin{array}{lcl} \text{punto} & \longleftrightarrow & \text{iperpiano (dim = 3)} \\ \text{retta} & \longleftrightarrow & \text{piano} \\ \emptyset & \longleftrightarrow & \mathbb{P}^4 \end{array}$$

Le seguenti proposizioni vere sono una duale dell'altra:

<p><i>In \mathbb{P}^4, due piani che si</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>intersecano lungo una retta generano un iperpiano di \mathbb{P}^4.</i> 	<p><i>In \mathbb{P}^4, due rette che generano un piano si intersecano in un punto.</i></p>
<p><i>Due piani di \mathbb{P}^4 aventi in</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>comune un punto generano tutto \mathbb{P}^4.</i> 	<p><i>Due rette di \mathbb{P}^4 che generano un iperpiano hanno intersezione nulla (sono sghembe).</i></p>
<p><i>In \mathbb{P}^4, un piano e una retta</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>sghembi fra loro generano tutto \mathbb{P}^4</i> 	<p><i>Una retta e un piano che generano \mathbb{P}^4 sono sghembi</i></p>
<p><i>In \mathbb{P}^4, dato un piano T e un</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>punto P non giacente su esso, esistono infinite rette passanti per P e sghembe rispetto a T.</i> 	<p><i>In \mathbb{P}^4, data una retta R e un iperpiano D non contenente R, esistono infiniti piani U contenuti in D tali che R ed U generano tutto \mathbb{P}^4.</i></p>

Esempio 14. In \mathbb{P}^5 abbiamo le corrispondenze:

$$\begin{array}{lcl} \text{punto} & \longleftrightarrow & \text{iperpiano (dim = 4)} \\ \text{retta} & \longleftrightarrow & \text{sottospazio di dim = 3} \\ \text{piano} & \longleftrightarrow & \text{piano} \\ \emptyset & \longleftrightarrow & \mathbb{P}^5 \end{array}$$

Le seguenti proposizioni vere sono una duale dell'altra:

<p><i>In \mathbb{P}^5, due piani incidenti</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>lungo una retta generano un sottospazio di dimensione 3.</i> 	<p><i>In \mathbb{P}^5, due piani che generano un sottospazio di dimensione 3 si intersecano lungo una retta.</i></p>
<p><i>In \mathbb{P}^5, due piani che si</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>intersecano in un punto generano un iperpiano.</i> 	<p><i>In \mathbb{P}^5, due piani che generano un iperpiano si intersecano in un punto.</i></p>
<ul style="list-style-type: none"> • <i>Due piani sghembi di \mathbb{P}^5 generano tutto \mathbb{P}^5.</i> 	<p><i>Due piani di \mathbb{P}^5 che generano tutto \mathbb{P}^5 sono sghembi</i></p>
<p><i>Dati i punti P_1, \dots, P_6 linearmente indipendenti, le</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>rette $P_1 + P_2, P_3 + P_4, P_5 + P_6$ sono a due a due sghembe fra loro</i> 	<p><i>Dati T_1, \dots, T_6 iperpiani tali che $T_1 \cap \dots \cap T_6 = \emptyset$, comunque presi due sottospazi di dimensione 3 fra $T_1 \cap T_2, T_3 \cap T_4, T_5 \cap T_6$, essi generano \mathbb{P}^5</i></p>

Capitolo 3

Sistemi lineari di ipersuperfici

Nel seguito, lavoreremo sempre sul campo algebricamente chiuso \mathbb{C} , e scriveremo \mathbb{P}^n per $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Inoltre, useremo la notazione $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_d$, o anche S_d , o ancora $S_{d,n}$ se non è chiaro dal contesto quale \mathbb{P}^n stiamo considerando, per indicare il \mathbb{C} -spazio vettoriale dato dall'insieme dei polinomi omogenei di grado d in $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$, più il polinomio nullo. Chiameremo gli elementi non nulli di S_d *forme di grado d* .

Sia $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ lo spazio proiettivo del \mathbb{C} -spazio vettoriale \mathbf{V} , $\dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) = n$, e sia $\mathcal{P} = \{\mu\mathcal{B}\}_{\mu \in \mathbb{C}^*}$ un riferimento proiettivo fissato in $\mathbb{P}(\mathbf{V})$. Nel secondo capitolo, si è visto che il principio di dualità dà la corrispondenza:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(\mathbf{V}) & & \mathbb{P}(\mathbf{V})^\vee \\ \text{iperpiani} & \longleftrightarrow & \text{punti} \end{array}$$

Sappiamo che un iperpiano di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ è determinato da un'equazione della forma $a_0x_0 + \dots + a_nx_n = 0$; viceversa, dato un polinomio omogeneo di primo grado (in particolare non nullo) a coefficienti in \mathbb{C} nelle indeterminate x_0, \dots, x_n , la relazione $f = 0$ dà un iperpiano di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$. In altre parole, fissato un riferimento proiettivo in $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, gli iperpiani di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ sono associati in maniera biunivoca ai polinomi omogenei di primo grado in $n + 1$ indeterminate, identificati a meno di proporzionalità.

Fissando in $\mathbb{P}(\mathbf{V})^\vee$ il riferimento proiettivo duale $\mathcal{P}^\vee = \{\alpha\mathcal{B}^\vee\}_{\alpha \in \mathbb{C}^*}$, il teore-

ma 2.2.1 ci dice che tale biezione è data da:

$$a_0x_0 + \dots + a_nx_n = 0 \quad \longleftrightarrow \quad [a_0, \dots, a_n]_{\mathcal{P}^n} \quad .$$

Fissare coordinate in $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ vuol dire lavorare in \mathbb{P}^n ; la dualità ci dice quindi che gli iperpiani di $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, o di \mathbb{P}^n , sono i punti dello spazio proiettivo:

$$\mathbb{P}(\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_1) = (\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_1 \setminus \{0\}) / \sim \quad ,$$

dove \sim è la relazione di equivalenza $g \sim f \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^*$ tale che $g = \lambda f$, e la corrispondenza è data associando ad una equazione che rappresenta un iperpiano la $(n+1)$ -upla ordinata dei suoi coefficienti.

Consideriamo ora polinomi di grado $d > 1$. Osserviamo preliminarmente i seguenti fatti: in primo luogo non ha senso, in \mathbb{P}^n , parlare di luoghi di zeri di polinomi non omogenei (ad esempio la terna $(1, 1, -1)$ soddisfa l'equazione in tre indeterminate $x_0^2x_1 + x_2 = 0$, mentre la terna $(2, 2, -2)$, proporzionale alla prima, non la verifica). Ha però senso parlare di zeri di polinomi omogenei, perché se $f \in S_d$, vale $f(x_0, \dots, x_n) \Leftrightarrow f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^*$.

In secondo luogo, poiché \mathbb{C} è un campo algebricamente chiuso, in virtù del teorema degli zeri di Hilbert (si veda [6, I.1]), possiamo identificare la classe di proporzionalità di un polinomio omogeneo irriducibile in $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ con il suo luogo di zeri in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Si noti che se $d = 1$ questo, come già detto più volte, vale su un campo qualsiasi anche non algebricamente chiuso, e l'ipotesi di irriducibilità è superflua dato che un polinomio lineare è sempre irriducibile.

Tornando al caso $d > 1$, l'ipotesi che il campo sia algebricamente chiuso è necessaria, ad esempio $x_0^2 + x_1^2$ e $x_0^2 + 2x_1^2$ sono irriducibili in $\mathbb{R}[x_0, x_1]$, ma il luogo di zeri in $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ è per entrambi \emptyset . D'altra parte, volendo considerare tutti i polinomi omogenei, non solo gli irriducibili, non è più possibile identificare la classe di proporzionalità di una forma di grado d con il suo luogo di zeri: ad esempio $x_0^2x_1$ e $x_0x_1^2$ hanno entrambi come luogo di zeri in $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ l'unione delle rette $x_0 = 0$ e $x_1 = 0$, ma i polinomi non sono proporzionali. Quindi, dal momento che abbiamo studiato $\mathbb{P}(S_1)$, cioè \mathbb{P}^* , e vorremmo iniziare a studiare $\mathbb{P}(S_d)$ con $d > 1$, diamo la seguente definizione di ipersuperficie:

Definizione 3.1. Una *ipersuperficie algebrica* \mathcal{S} di grado d di \mathbb{P}^n è la classe di proporzionalità di un polinomio omogeneo f non costante di S_d . Il sottoinsieme di \mathbb{P}^n costituito dagli zeri del polinomio:

$$\{ [x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n \mid f(x_0, \dots, x_n) = 0 \}$$

è detto *supporto* dell'ipersuperficie, e viene spesso denotato con lo stesso simbolo \mathcal{S} ; diremo che $f = 0$ è un'equazione dell'ipersuperficie, così come $\lambda f = 0$ per $\lambda \in \mathbb{C}^*$, e scriveremo

$$\mathcal{S} : f = 0.$$

Quindi le ipersuperfici di grado d di \mathbb{P}^n sono i punti dello spazio proiettivo $\mathbb{P}(S_d) = (S_d \setminus \{0\}) / \sim$.

Se $n = 2$ le ipersuperfici vengono dette *curve* (piane), se $n = 3$ *superfici* (di \mathbb{P}^3).

Osservazione 6. Una base per S_d è data dall'insieme dei monomi di grado d

$$x_0^{d_0} x_1^{d_1} \dots x_n^{d_n}, \text{ con } d_0 + \dots + d_n = d, \ 0 \leq d_i \leq d \text{ per } i = 0, \dots, n \quad (3.1)$$

su cui supponiamo sempre di aver fissato un ordine.

Poiché possiamo vedere un monomio come una combinazione con ripetizione di d elementi presi fra $n+1$, vale $\dim S_d = \binom{n+d}{d}$ e $N := \dim \mathbb{P}(S_d) = \binom{n+d}{d} - 1$. Dunque se

$$\sum_{d_0+\dots+d_n=d} a_{d_0\dots d_n} x_0^{d_0} \dots x_n^{d_n} = 0 \quad (3.2)$$

è un'equazione dell'ipersuperficie $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{P}^n$, possiamo definire un isomorfismo tra $\mathbb{P}(S_d)$ e \mathbb{P}^N associando a \mathcal{S} il punto $[\dots, a_{d_0\dots d_n}, \dots] \in \mathbb{P}^N$.

Per esempio, consideriamo la base monomiale di $S_{2,2}$ con l'ordine lessicografico:

$$x_2^2 < x_1 x_2 < x_1^2 < x_0 x_2 < x_0 x_1 < x_0^2.$$

La curva di \mathbb{P}^2 di equazione

$$x_0^2 + 2x_0 x_1 + 3x_1^2 - x_0 x_2 + 4x_1 x_2 - x_2^2 = 0,$$

pensata come punto di \mathbb{P}^5 (qui $d = 2$, $n = 2$, quindi $N = 5$), ha coordinate $[-1, 4, 3, -1, 2, 1]$.

Definizione 3.2. Un *sistema lineare* Δ di ipersuperfici di \mathbb{P}^n di grado d è un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(S_d)$; vale quindi $\Delta = \mathbb{P}(\mathbf{W})$, con \mathbf{W} sottospazio vettoriale di S_d . Se r è la dimensione di Δ come sottospazio proiettivo (quindi $\dim \mathbf{W} = r + 1$), scriveremo $\dim \Delta = r$ e diremo che Δ è un *sistema lineare* ∞^r ; in tal caso, se f_0, \dots, f_r è base del sottospazio \mathbf{W} , gli elementi di Δ sono tutte e sole le ipersuperfici di equazione $\lambda_0 f_0 + \dots + \lambda_r f_r = 0$ con i λ_i non tutti nulli, e useremo la notazione

$$\Delta : \lambda_0 f_0 + \dots + \lambda_r f_r = 0.$$

Osserviamo che $\mathbb{P}(S_d)$ stesso è un sistema lineare $\infty^{\binom{n+d}{d}-1}$, detto il *sistema lineare completo delle ipersuperfici di \mathbb{P}^n di grado d* .

Per $r = 1$, il sistema Δ si dice *fascio* di ipersuperfici; per $r = 2$, Δ si dice *rete* di ipersuperfici.

Definizione 3.3. Diremo che $P \in \mathbb{P}^n$ è un *punto base* di Δ se $P \in \mathcal{S}$ per ogni $\mathcal{S} \in \Delta$. Il *luogo base* di Δ è l'insieme $\{P \in \mathbb{P}^n \mid P \text{ è punto base di } \Delta\}$.

Esempio 15. Nelle notazioni precedenti, siano $n = 2$, $d = 3$, e consideriamo lo spazio

$$\mathbb{P}(S_3) = \{\text{cubiche di } \mathbb{P}^2\} \quad ;$$

vale $\dim \mathbb{P}(S_3) = \binom{5}{3} - 1 = 9$, cioè $\mathbb{P}(S_3)$ è un \mathbb{P}^9 . Una cubica $\mathcal{C} \in \mathbb{P}(S_3)$ è descritta da:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} : \quad & a_0 x_0^3 + a_1 x_1^3 + a_2 x_2^3 + a_3 x_0^2 x_1 + a_4 x_0^2 x_2 + a_5 x_0 x_1^2 + \quad (3.3) \\ & + a_6 x_1^2 x_2 + a_7 x_0 x_2^2 + a_8 x_1 x_2^2 + a_9 x_0 x_1 x_2 = 0 \end{aligned}$$

con $[a_0, \dots, a_9] \in \mathbb{P}^9$. Prendiamo le cubiche (degeneri) $\mathcal{C}_0 : x_0^3 = 0$, $\mathcal{C}_1 : x_1^3 = 0$; allora

$$\Delta : \lambda_0 x_0^3 + \lambda_1 x_1^3 = 0, \quad [\lambda_0, \lambda_1] \in \mathbb{P}^2$$

è un fascio di cubiche (infatti x_0^3, x_1^3 sono elementi linearmente indipendenti di S_3), e il punto $P = [0, 0, 1]$ è un punto base. Scegliendo invece gli elementi linearmente indipendenti in S_3 :

$$f_0 : x_0^3 - x_1^2 x_2, \quad f_1 : x_1^3 - x_2^2 x_0, \quad f_3 : x_2^3 - x_0^2 x_1$$

associati alle cubiche $\mathcal{D}_0 : f_0 = 0$, $\mathcal{D}_1 : f_1 = 0$, $\mathcal{D}_2 : f_2 = 0$, troviamo la rete di cubiche

$$\Sigma : \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0, \quad [\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2] \in \mathbb{P}^2$$

e $Q = [1, 1, 1]$ è un punto base di Σ .

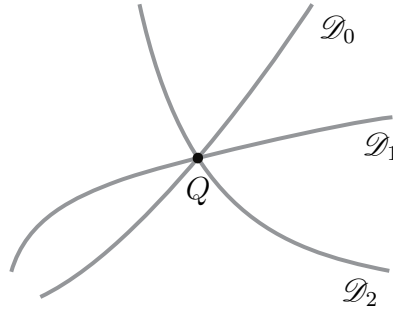


Figura 3.1: Rappresentazione della parte reale di $\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ in coordinate

non omogenee $X = \frac{x_0}{x_2}, Y = \frac{x_1}{x_2}$, in un intorno del punto Q .

3.1 Sistemi lineari di ipersuperfici e condizioni imposte da punti multipli

Finora abbiamo definito i sistemi lineari come proiettivizzati di sottospazi vettoriali di S_d , e li abbiamo visti come insiemi descritti parametricamente, cioè tramite ipersuperfici linearmente indipendenti che generano il sistema. Proveremo a breve che è possibile ottenere dei sistemi lineari di ipersuperfici anche imponendo particolari condizioni alle ipersuperfici stesse, ad esempio stabilendo che esse passino per dei punti dati in \mathbb{P}^n : questo dà luogo a equazioni cartesiane per il sistema. Consideriamo il caso di un solo punto: sia P

fissato in \mathbb{P}^n , $P = [\alpha_0, \dots, \alpha_n]$. Se (3.2) è un'equazione per \mathcal{S} , vale $P \in \mathcal{S}$ se e solo se

$$\sum_{d_0+\dots+d_n=d} a_{d_0\dots d_n} \alpha_0^{d_0} \dots \alpha_n^{d_n} = 0. \quad (3.4)$$

Ora, la (3.4) può essere vista come equazione omogenea di primo grado con coefficienti costanti $\alpha_0^{d_0} \dots \alpha_n^{d_n}$ e incognite $a_{d_0\dots d_n}$; notiamo che l'equazione non si può ridurre a $0 = 0$, perchè $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$. In altre parole, la (3.4) individua un iperpiano di \mathbb{P}^N (in particolare, un sistema lineare che denoteremo con $\Delta_d(P)$), dato dall'insieme di tutte le ipersuperfici di grado d passanti per P . Generalizziamo ora questo concetto.

Proposizione 3.1.1. *Siano P_1, \dots, P_t punti di \mathbb{P}^n , $P_i = [\alpha_{0,i}, \dots, \alpha_{n,i}]$.*

L'insieme delle ipersuperfici di grado d che passano per P_1, \dots, P_t è un sistema lineare Δ di dimensione $\geq N - t$.

Dimostrazione. Un'ipersuperficie $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{P}^n$ avente equazione (3.2) contiene i punti P_1, \dots, P_t se e solo se il punto $[\dots, a_{d_0\dots d_n}, \dots] \in \mathbb{P}^N$ è soluzione del sistema lineare:

$$\begin{cases} \sum_{d_0+\dots+d_n=d} a_{d_0\dots d_n} \alpha_{0,1}^{d_0} \dots \alpha_{n,1}^{d_n} = 0 \\ \dots \\ \sum_{d_0+\dots+d_n=d} a_{d_0\dots d_n} \alpha_{0,t}^{d_0} \dots \alpha_{n,t}^{d_n} = 0 \end{cases}. \quad (3.5)$$

Sappiamo che lo spazio delle soluzioni è un sottospazio vettoriale $\mathbf{W} \subseteq \mathbb{C}^{N+1}$ di dimensione $N + 1 - \text{rg}(A)$, dove A è la matrice del sistema (3.5) e ha rango $\leq t$; vale quindi $\dim \mathbf{W} \geq N + 1 - t$ e $\dim \Delta = \dim \mathbb{P}(\mathbf{W}) \geq N - t$. \square

Useremo la notazione $\Delta_d(P_1, \dots, P_t)$ per indicare il sistema lineare delle ipersuperfici di grado d per P_1, \dots, P_t ; osserviamo che vale $\Delta_d(P_1, \dots, P_t) = \Delta_d(P_1) \cap \dots \cap \Delta_d(P_t)$.

Osservazione 7. Come conseguenza immediata della proposizione 3.1.1, si ha che dati $\binom{n+d}{d} - 1$ punti distinti in \mathbb{P}^n , esiste almeno un'ipersuperficie di grado d passante per tali punti. In \mathbb{P}^2 ad esempio, per 2 punti passa sempre

una retta, per 5 punti passa almeno una conica, per 9 punti almeno una cubica.

Osservazione 8. La proposizione 3.1.1 ci dice che ogni punto $P \in \mathbb{P}^n$ individua un iperpiano $\Delta(P)$ di $\mathbb{P}(S_d)$; d'altra parte non tutti gli iperpiani di $\mathbb{P}(S_d)$ sono del tipo $\Delta(P)$. Ciò risulta evidente se si considerano ad esempio le ipersuperfici $\mathcal{S}_1 : f_1 = 0$, $\mathcal{S}_2 : f_2 = 0$ e $\mathcal{S}_3 : f_3 = 0$ tali che \mathcal{S}_3 non passi per $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ (questo è sempre possibile); completando con f_4, \dots, f_{N-1} scelti in modo che f_0, \dots, f_{N-1} siano linearmente indipendenti in S_d , si ha $\mathbb{P}(\langle f_0, \dots, f_{N-1} \rangle)$ iperpiano di $\mathbb{P}(S_d)$ non del tipo $\Delta(P)$.

Definizione 3.4. Diremo che i punti $P_1, \dots, P_t \in \mathbb{P}^n$ impongono *condizioni indipendenti* alle ipersuperfici di grado d se

$$\dim \Delta_d(P_1, \dots, P_t) = \max\{N - t, -1\}$$

Esempio 16. Cerchiamo le cubiche di \mathbb{P}^2 passanti per i punti:

$$\begin{aligned} P_1 &= [-1, 0, 1], & P_2 &= [0, 1, 1], & P_3 &= [1, 0, 1], & P_4 &= [0, -1, 1] \\ P_5 &= [-1, -1, 1], & P_6 &= [0, 0, 1], & P_7 &= [1, 1, 1]. \end{aligned}$$

Tenendo che l'equazione di una generica cubica è data dalla (3.3), si tratta di cercare le soluzioni al sistema:

$$\begin{cases} -a_0 + a_2 + a_4 - a_7 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_6 + a_8 = 0 \\ a_0 + a_2 + a_4 + a_7 = 0 \\ -a_0 - a_1 - a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - a_7 - a_8 + a_9 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 0 \end{cases}$$

il quale ha rango pari a 7, dunque lo spazio delle soluzioni sarà una rete di cubiche $\Sigma = \Delta(P_1, \dots, P_7)$, ed i P_i sono punti che impongono condizioni indipendenti alle cubiche di \mathbb{P}^2 . Ad esempio, i punti in $\mathbb{P}^9 = \mathbb{P}(S_3)$:

$$[1, 1, 0, 1, 0, -1, 0, -1, -1, 0],$$

$$[1, -1, 0, -1, 0, 1, -1, 1, 0],$$

$$[1, -1, 0, 1, 0, -1, 0, -1, 1, 0]$$

soddisfano il sistema, e sono linearmente indipendenti in \mathbb{P}^9 . Essi corrispondono alle cubiche $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$:

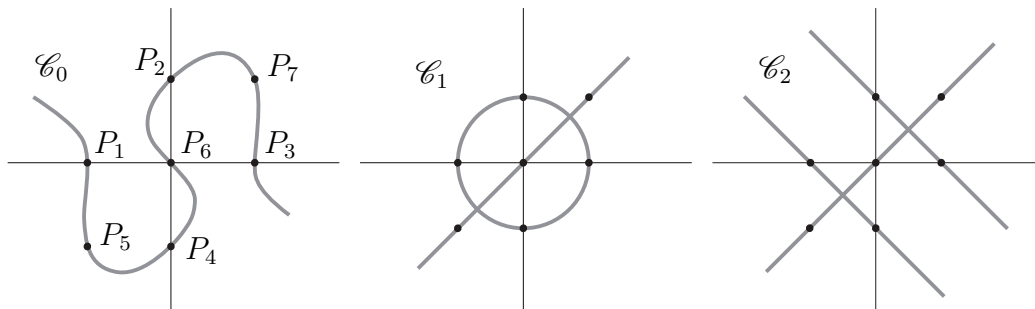


Figura 3.2: Rappresentazione di $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ in coordinate non omogenee

$$X = \frac{x_0}{x_2}, Y = \frac{x_1}{x_2}, \text{ in un intorno dell'origine.}$$

Per quanto detto nella definizione 3.2, se f_0, f_1, f_2 sono equazioni per $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ rispettivamente, allora possiamo scrivere $\Sigma : \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0$, con $[\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2] \in \mathbb{P}^2$.

Ricordiamo che se

$$R : \begin{cases} x_0 = \lambda a_0 + \mu b_0 \\ \dots \\ x_n = \lambda a_n + \mu b_n \end{cases}, \quad [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1,$$

è una retta di \mathbb{P}^n , $P = [\bar{\lambda} a_0 + \bar{\mu} b_0, \dots, \bar{\lambda} a_n + \bar{\mu} b_n]$ è un punto di R , e \mathcal{S} è un'ipersuperficie di grado d di \mathbb{P}^n , possiamo considerare la risolvente $F(\lambda, \mu) = f(\lambda a_0 + \mu b_0, \dots, \lambda a_n + \mu b_n)$, dove $f(\lambda a_0 + \mu b_0, \dots, \lambda a_n + \mu b_n)$ è un polinomio omogeneo di grado d nelle indeterminate λ, μ , e per il teorema fondamentale dell'algebra "omogeneo" (si veda ad esempio [10, p. 455]), F fattorizza in d fattori lineari omogenei:

$$F(\lambda, \mu) = (\alpha_1 \lambda + \beta_1 \mu)^{m_1} \dots (\alpha_t \lambda + \beta_t \mu)^{m_t}, \quad m_1 + \dots + m_t = d.$$

Diciamo che $[\beta_i, \alpha_i] \in \mathbb{P}^1$ è radice di molteplicità m_i per $F(\lambda, \mu)$. Si definisce la *molteplicità di intersezione di \mathcal{S} e R in P* come

$$i(\mathcal{S}, R, P) = \begin{cases} 0 & \text{se } P \notin \mathcal{S} \\ \infty & \text{se } R \subseteq \mathcal{S} \\ m & \text{se } [\bar{\lambda}, \bar{\mu}] \text{ è radice di molteplicità } m \\ & \text{per la risolvente } F(\lambda, \mu) \end{cases}; \quad (3.6)$$

si dimostra che questa definizione non dipende dalla parametrizzazione scelta per R .

Si definisce inoltre la *molteplicità di \mathcal{S} in P* come $\mu_P(\mathcal{S}) = \min_{R \ni P} i(\mathcal{S}, R, P)$; se $\mu_P(\mathcal{S}) \geq 2$, diremo che P è un punto *multiplo* (o *singolare*) per \mathcal{S} .

Enunciamo ora due risultati che ci permettono di imporre condizioni ulteriori rispetto al passaggio di un'ipersuperficie per dei punti.

Proposizione 3.1.2. *Sia $P = [\alpha_0, \dots, \alpha_n] \in \mathbb{P}^n$; l'insieme delle ipersuperfici di grado d che passano per P e hanno lì molteplicità almeno m , dove m è un intero fissato fra 1 e d , è un sistema lineare di dimensione $\geq N - \binom{n+m-1}{n}$, denotato con $\Delta_d(P^m)$.*

Dimostrazione. Ricordiamo anzitutto che affinché P sia punto di molteplicità m dell'ipersuperficie $\mathcal{S} : f = 0$ è necessario e sufficiente che tutte le derivate parziali $(m-1)$ -esime di f si annullino in P [1, pp. 70, 108-110]; queste derivate sono tante quante le combinazioni con ripetizione di $m-1$ elementi scelti fra $n+1$, cioè $\binom{n+m-1}{m-1} = \binom{n+m-1}{n}$. Determinare le ipersuperfici per P aventi qui molteplicità m significa quindi risolvere un sistema di $\binom{n+m-1}{n}$ equazioni lineari in N incognite, della forma

$$\frac{\partial^{m-1} f}{\partial x_0^{i_0} \dots \partial x_n^{i_n}}(\alpha_0, \dots, \alpha_n) = 0$$

con $i_0 + \dots + i_n = m-1$. Troviamo così che il sistema lineare $\Delta_d(P^m)$ ha dimensione $\geq N - \binom{n+m-1}{n}$. \square

Osservazione 9. Non è difficile provare che il sistema lineare $\Delta_d(P^m)$ ha dimensione effettivamente uguale a $N - \binom{n+m-1}{n}$, per esempio scegliendo un sistema di coordinate in cui $P = [0, \dots, 0, 1]$.

Proposizione 3.1.3. *L'insieme delle ipersuperfici di grado d che passano per i punti P_1, \dots, P_t con molteplicità rispettivamente m_1, \dots, m_t , $1 \leq m_i \leq d$ è un sistema lineare, che denoteremo con $\Delta_d(P_1^{m_1}, \dots, P_t^{m_t})$ di dimensione $\geq N - \sum_{i=1}^t \binom{m_i+n-1}{n}$. Se vale $N - \sum_{i=1}^t \binom{m_i+n-1}{n} \geq 0$, allora esiste almeno un'ipersuperficie passante per P_1, \dots, P_t con le molteplicità richieste.*

Esempio 17. Cerchiamo una cubica in \mathbb{P}^2 avente molteplicità 2 in $P = [0, 0, 1]$ e passante per i punti

$$\begin{aligned} P_1 &= [1, 1, 1], & P_2 &= [0, 1, 2], & P_3 &= [-1, 1, 4], \\ P_4 &= [3, 2, 1], & P_5 &= [-2, 0, -1], & P_6 &= [1, 0, 1]. \end{aligned}$$

Sappiamo che una cubica ha equazione (3.3); poiché vogliamo che P sia punto di molteplicità 2 per \mathcal{C} , devono essere qui nulle le derivate prime

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_0} &= 3a_0x_0^2 + 2a_3x_0x_1 + 2a_4x_0x_2 + a_5x_1^2 + a_7x_2^2 + a_9x_1x_2, \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} &= 3a_1x_1^2 + a_3x_0^2 + 2a_5x_1x_0 + 2a_6x_1x_2 + a_8x_2^2 + a_9x_0x_2, \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= 3a_2x_2^2 + a_4x_0^2 + a_6x_1^2 + 2a_7x_2x_0 + 2a_8x_2x_1 + a_9x_0x_1. \end{aligned}$$

Si trova $a_2 = 0$, $a_7 = 0$, $a_8 = 0$, ovvero l'insieme delle cubiche che hanno molteplicità 2 in P è un sistema lineare ∞^6 , che chiamiamo $\Delta_3(P^2) =: \mathbb{P}(\mathbf{W})$, $\mathbf{W} \subseteq S_3$. Qui le cubiche hanno equazione

$$\mathcal{C} : a_0x_0^3 + a_1x_1^3 + a_3x_0^2x_1 + a_4x_0^2x_2 + a_5x_1^2x_0 + a_6x_1^2x_2 + a_9x_0x_1x_2 = 0.$$

Imporre il passaggio per P_1, \dots, P_6 significa risolvere un sistema di 6 equa-

zioni in 7 incognite la cui matrice associata è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 4 & -1 & 4 & -4 \\ 27 & 8 & 18 & 9 & 12 & 4 & 6 \\ -8 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vale $\text{rg}(A) = 6$, dunque lo spazio delle soluzioni è un sottospazio di dimensione 1 di \mathbf{W} , cioè è un punto di $\mathbb{P}(S_3)$, precisamente $[0, -2, 0, 1, 0, -1, 1, 0, 0, 1]$. Abbiamo quindi trovato la cubica:

$$\mathcal{C} : -2x_1^3 + x_0^2x_1 - x_1^2x_0 + x_1^2x_2 + x_0x_1x_2 = 0.$$

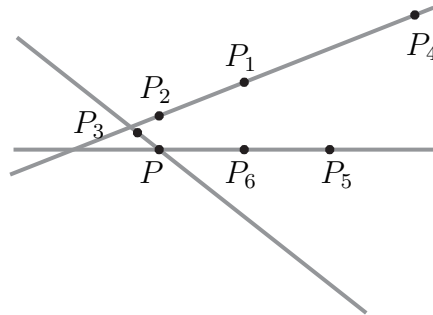


Figura 3.3: Rappresentazione di \mathcal{C} in coordinate non omogenee $X = \frac{x_0}{x_2}$,

$Y = \frac{x_1}{x_2}$, in un intorno dell'origine P .

3.2 Fasci di coniche in \mathbb{P}^2

Approfondiamo ora il caso dei sistemi lineari di coniche in \mathbb{P}^2 , in particolare dei fasci di coniche; più precisamente, ci interessa studiare le configurazioni di punti che impongono ad esse condizioni indipendenti. Ci occorrerà anzitutto il seguente (si veda [4]):

Lemma 3.2.1 (Criterio di separazione).

Siano d, t due interi tali che $d \geq 1$ e $N + 1 = \binom{2+d}{2} = \frac{(d+1)(d+2)}{2} \geq t$ e siano

P_1, \dots, P_t punti di \mathbb{P}^2 .

I punti P_1, \dots, P_t impongono condizioni indipendenti alle curve di grado d se e solo se per ogni $i = 1, \dots, t$ esiste una curva \mathcal{C}_i di grado d che non passa per P_i e passa per P_j se $j \neq i$.

Dimostrazione. Sia $\Delta = \Delta(P_1, \dots, P_t) = \Delta(P_1) \cap \dots \cap \Delta(P_t)$, e supponiamo che valga

$$\forall i = 1, \dots, t \quad \exists \mathcal{C}_i \in \bigcap_{j \neq i} \Delta(P_j), \quad \mathcal{C}_i \notin \Delta(P_i).$$

Mostriamo per induzione sul numero di punti k che vale $\dim \Delta = \max\{N - t, -1\} = N - t$; per $k = 1$ sappiamo già che $\dim \Delta(P_1) = N - 1$. Sia ora $\dim \Delta(P_1) \cap \dots \cap \Delta(P_k) = N - k$; per ipotesi, esiste una curva \mathcal{C}_{k+1} in $\Delta(P_1) \cap \dots \cap \Delta(P_k)$ che non passa per P_{k+1} . In particolare l'iperpiano $\Delta(P_{k+1})$ non contiene $\Delta(P_1) \cap \dots \cap \Delta(P_k)$, dunque

$$\dim(\Delta(P_1) \cap \dots \cap \Delta(P_k)) \cap \Delta(P_{k+1}) = N - k - 1.$$

Viceversa, sia $\dim \Delta = N - t$; allora il rango della matrice associata al sistema (3.5) è massimo, dunque togliendo un'equazione, ad esempio quella associata al punto P_i , troviamo un sistema di rango $t - 1$ che descrive il sistema lineare $\bigcap_{j \neq i} \Delta(P_j)$ di $\dim = N - t + 1$. Quindi

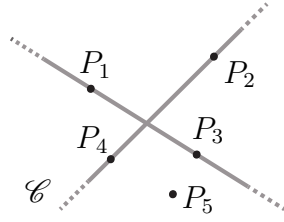
$$\left. \begin{array}{l} \dim(\bigcap_{j \neq i} \Delta(P_j)) \cap \Delta(P_i) = N - t \\ \dim \bigcap_{j \neq i} \Delta(P_j) = N - t + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta(P_i) \not\subseteq \bigcap_{j \neq i} \Delta(P_j),$$

da cui l'asserto. □

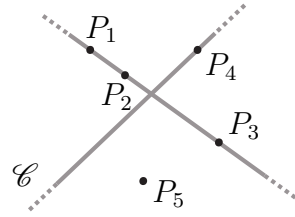
Corollario 3.2.2. *Nelle ipotesi precedenti, se $X = \{P_1, \dots, P_t\}$ impone condizioni indipendenti alle curve di grado d , allora ogni sottoinsieme $X' \subseteq X$ impone condizioni indipendenti alle curve di grado d .*

Esempio 18. Siano P_1, \dots, P_5 a 4 a 4 non allineati; allora per il lemma 3.2.1 i P_i impongono condizioni indipendenti alle coniche, infatti esiste sempre una conica \mathcal{C} che passa per 4 dei punti, per esempio P_1, \dots, P_4 e non per il quinto, P_5 . I casi possibili sono:

- (a) P_1, \dots, P_5 sono a 3 a 3 non allineati; allora la conica è l'unione delle rette $P_1 + P_3, P_2 + P_4$
- (b) P_1, P_2, P_3 sono allineati su $R, P_4, P_5 \notin R$; allora una conica è data dall'unione di R ed una qualsiasi retta per P_4 , diversa da $P_4 + P_5$.



(a): $P_i, i = 1, \dots, 5$ a tre a tre non allineati



(b): P_1, P_2, P_3 allineati su $R, P_4, P_5 \notin R$

Per il corollario 3.2.2, se P_1, \dots, P_t sono a 4 a 4 non allineati, $t \leq 5$, allora P_1, \dots, P_t impongono condizioni indipendenti alle coniche di \mathbb{P}^2 .

Siano ora P_1, \dots, P_6 a 4 a 4 non allineati; per quanto detto sopra, esiste un'unica conica \mathcal{C} passante per 5 di questi punti, ad esempio P_1, \dots, P_5 . Se $P_6 \notin \mathcal{C}$, allora P_1, \dots, P_6 impongono condizioni indipendenti alle coniche, in quanto $\Delta(P_1, \dots, P_6) = \emptyset$.

Diamo ora un metodo per parametrizzare le coniche lisce, ovvero senza punti singolari, che sono tutte e sole le coniche non degeneri, cioè della forma

$$\mathcal{C} : \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} \\ a_{0,1} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{0,2} & a_{1,2} & a_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{rg}((a_{i,j})_{i,j=0,1,2}) = 3.$$

Poiché queste ultime sono tutte proiettivamente equivalenti alla conica $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$ (si veda ad esempio [10, pp. 359-361]), ci limiteremo a cercare una parametrizzazione in questo caso.

Siano dunque $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2$, $\mathcal{C} : x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$, $P = [1, 0, 1]$, e sia \mathcal{F} il fascio di

rette di centro P ; poiché due rette di questo fascio sono $x_1 = 0$, $x_0 - x_2 = 0$, possiamo scrivere $\mathcal{F} : \lambda(x_0 - x_2) + \mu x_1 = 0$.

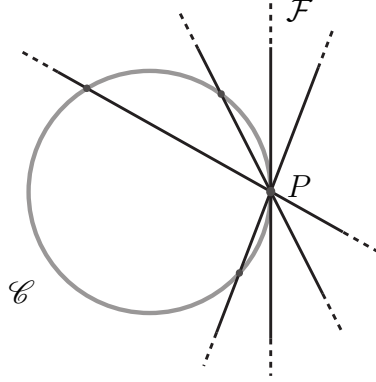


Figura 3.4: Rappresentazione di \mathcal{C} e \mathcal{F} in coordinate non omogenee

$$X = \frac{x_0}{x_1}, Y = \frac{x_1}{x_2}, \text{ in un intorno di } P.$$

Intersechiamo la generica retta del fascio \mathcal{F} con la \mathcal{C} ; se $\mu = 0$ si ha

$$\begin{cases} x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ x_0 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1^2 = 0,$$

cioè troviamo il punto P contato 2 volte. Se $\mu \neq 0$

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ x_1 = -\frac{\lambda}{\mu}(x_0 - x_2) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x_0^2 + \frac{\lambda^2}{\mu^2}(x_0 - x_2)^2 - x_2^2 = 0 \\ x_1 = -\frac{\lambda}{\mu}(x_0 - x_2) \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} (x_0 - x_2)(\lambda^2(x_0 - x_2) + \mu^2(x_0 + x_2)) = 0 \\ x_1 = -\frac{\lambda}{\mu}(x_0 - x_2) \end{cases} . \end{aligned}$$

Una soluzione è sempre $x_0 = x_2$, che corrisponde a P ; l'altra è data da

$$x_0(\lambda^2 + \mu^2) = x_2(\lambda^2 - \mu^2)$$

cioè $[x_0, x_2] = [\lambda^2 - \mu^2, \lambda^2 + \mu^2]$, da cui:

$$\lambda(\lambda^2 - \mu^2 - \lambda^2 - \mu^2) + \mu x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 2\lambda\mu.$$

Abbiamo dunque parametrizzato \mathcal{C} nel modo seguente:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x_0 = \lambda^2 - \mu^2 \\ x_1 = 2\lambda\mu \\ x_2 = \lambda^2 + \mu^2 \end{cases}, \quad [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1 \quad (3.7)$$

(notiamo che sostituendo $\mu = 0$ nella (3.7) troviamo P). Se \mathcal{C}' è una curva proiettivamente equivalente a \mathcal{C} , è sempre possibile trasportare la parametrizzazione di \mathcal{C} a \mathcal{C}' mediante la proiettività che porta \mathcal{C} in \mathcal{C}' , così che le coordinate di un punto di \mathcal{C}' sono date da polinomi omogenei di secondo grado in λ e μ , ovvero

$$\mathcal{C}' = \begin{cases} x_0 = \phi_0(\lambda, \mu) \\ x_1 = \phi_1(\lambda, \mu) \\ x_2 = \phi_2(\lambda, \mu) \end{cases}, \quad \phi_i \in \mathbb{C}[\lambda, \mu]_2, \quad [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$$

A questo punto è possibile, analogamente a quanto fatto in (3.6), definire la molteplicità d'intersezione fra una curva $\mathcal{D} : f = 0$ e una conica parametrizzata \mathcal{C} , in un punto $P = [\phi_0(\bar{\lambda}, \bar{\mu}), \phi_1(\bar{\lambda}, \bar{\mu}), \phi_2(\bar{\lambda}, \bar{\mu})] \in \mathcal{C}$, come

$$i(\mathcal{D}, \mathcal{C}, P) = \begin{cases} 0 & \text{se } P \notin \mathcal{D} \\ \infty & \text{se } \mathcal{C} \subseteq \mathcal{D} \\ m & \text{se } [\bar{\lambda}, \bar{\mu}] \text{ è radice di molteplicità } m \\ & \text{per il polinomio omogeneo di grado } 2d \\ & f(\phi_0(\lambda, \mu), \phi_1(\lambda, \mu), \phi_2(\lambda, \mu)) \end{cases}$$

Anche in questo caso si dimostra che la definizione non dipende dalla parametrizzazione scelta.

Se $\mathcal{C} : f = 0$ e $\mathcal{D} : g = 0$ sono due curve in \mathbb{P}^2 , diciamo che \mathcal{C} è contenuta in \mathcal{D} se $f|g$, il che equivale a dire, per il già citato Teorema degli zeri di Hilbert, che il supporto di \mathcal{C} è contenuto nel supporto di \mathcal{D} . Se \mathcal{C} è una retta oppure una conica liscia, questo si può vedere con un semplice calcolo diretto (si veda [9, lemma 2.5]).

Si ha il seguente:

Teorema 3.2.3. *Siano date in \mathbb{P}^2 una curva \mathcal{D} di grado d e una conica liscia \mathcal{C} non contenuta in \mathcal{D} . Allora*

$$\sum_{P \in \mathcal{C}} i(\mathcal{D}, \mathcal{C}, P) = 2d.$$

Dimostrazione. Siano

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x_0 = \phi_0(u, v) \\ x_1 = \phi_1(u, v) \\ x_2 = \phi_2(u, v) \end{cases}, \quad \phi_i \in \mathbb{C}[u, v]_2, \quad \mathcal{D} : f(x_0, x_1, x_2) = 0.$$

Il polinomio in u, v dato da $f(\phi_0(u, v), \phi_1(u, v), \phi_2(u, v))$ è omogeneo di grado $2d$ e non è il polinomio nullo, poiché se lo fosse si avrebbe $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$, contro l'ipotesi. Dunque ha $2d$ radici contate con molteplicità, da cui l'asserto. \square

Osservazione 10. Date due coniche $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subseteq \mathbb{P}^2$, solo una delle seguenti affermazioni è vera:

- (a) \mathcal{C}, \mathcal{D} sono degeneri e hanno una retta in comune;
- (b) \mathcal{C}, \mathcal{D} si incontrano in 4 punti contati con molteplicità;
- (c) \mathcal{C}, \mathcal{D} coincidono.

Consideriamo ora un fascio \mathcal{F} di coniche di \mathbb{P}^2 (cioè una retta in \mathbb{P}^5); per quanto detto nella definizione 3.2, se \mathbf{W} è il sottospazio di S_2 tale che $\mathcal{F} = \mathbb{P}(\mathbf{W})$ e (f, g) è una base per \mathbf{W} , allora tutte le coniche di \mathcal{F} hanno equazione:

$$\mathcal{F} : \lambda f + \mu g = 0, \quad [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1.$$

Sappiamo anche che f, g corrispondono a due coniche $\mathcal{C} : f = 0, \mathcal{D} : g = 0$ (che sono distinte perché f, g sono linearmente indipendenti), dunque per quanto detto sopra si possono avere solo i seguenti casi:

- (a) $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ è una retta R
- (b) $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ è dato da 4 punti contati con molteplicità.

Nel primo caso, se $h = 0$ è un'equazione per R , allora $f = f'h$, $g = g'h$, con f' , g' omogenei di grado 1, e $\mathcal{F} : h(\lambda f' + \mu g') = 0$, dove $\lambda f' + \mu g' = 0$ è un'equazione di un fascio di rette \mathcal{F}' . Dunque le coniche di \mathcal{F} sono tutte degeneri e contengono R .

Consideriamo ora $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \{P_1, \dots, P_4\}$; siamo quindi nell'ipotesi che i punti siano distinti. Se $\mathcal{C}' : \bar{\lambda} f + \bar{\mu} g = 0$ è una conica di \mathcal{F} , si ha:

$$(\bar{\lambda} f + \bar{\mu} g)(P_i) = \bar{\lambda} f(P_i) + \bar{\mu} g(P_i) = 0$$

cioè $P_i \in \mathcal{C}'$, per $i = 1, \dots, 4$; in altre parole, i P_i sono punti base del fascio \mathcal{F} , è il luogo base di \mathcal{F} è precisamente $\{P_1, \dots, P_4\}$.

Osserviamo infatti che i P_i devono essere a tre a tre non allineati, altrimenti se ad esempio P_1, P_2, P_3 fossero contenuti in R si avrebbe $\sum_{P \in R} i(\mathcal{C}', R, P) \geq 3$, dunque $R \subseteq \mathcal{C}' \forall \mathcal{C}' \in \mathcal{F}$, e si ritroverebbe il caso (a).

Per quanto visto nell'esempio 18, i P_i impongono condizioni indipendenti alle coniche di \mathbb{P}^2 , cioè $\dim \Delta_2(P_1, \dots, P_4) = 1$. Dunque \mathcal{F} e $\Delta_2(P_1, \dots, P_4)$ hanno la stessa dimensione, e poiché, come detto sopra, vale $\mathcal{C}' \in \Delta_2(P_1, \dots, P_4)$ per ogni $\mathcal{C}' \in \mathcal{F}$, cioè $\mathcal{F} \subseteq \Delta_2(P_1, \dots, P_4)$, essi coincidono.

Questo ci permette di dare delle equazioni cartesiane per \mathcal{F} . Sia $P_i = (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$, $i = 1, \dots, 4$, e sia

$$\tilde{\mathcal{C}} : a_{0,0}x_0^2 + a_{1,1}x_1^2 + a_{2,2}x_2^2 + 2a_{0,1}x_0x_1 + 2a_{0,2}x_0x_2 + 2a_{1,2}x_1x_2 = 0$$

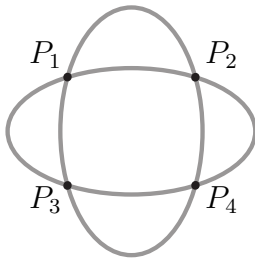
la generica conica di \mathbb{P}^2 ; $[a_{0,0}, a_{1,1}, a_{2,2}, 2a_{0,1}, 2a_{0,2}, 2a_{1,2}]$ sono quindi le coordinate del punto di \mathbb{P}^5 corrispondente a $\tilde{\mathcal{C}}$. Allora $\tilde{\mathcal{C}} \in \mathcal{F}$ se e solo se

$$\mathcal{F} : \begin{cases} a_{0,0}\alpha_1^2 + a_{1,1}\beta_1^2 + a_{2,2}\gamma_1^2 + 2a_{0,1}\alpha_1\beta_1 + 2a_{0,2}\alpha_1\gamma_1 + 2a_{1,2}\beta_1\gamma_1 = 0 \\ a_{0,0}\alpha_2^2 + a_{1,1}\beta_2^2 + a_{2,2}\gamma_2^2 + 2a_{0,1}\alpha_2\beta_2 + 2a_{0,2}\alpha_2\gamma_2 + 2a_{1,2}\beta_2\gamma_2 = 0 \\ a_{0,0}\alpha_3^2 + a_{1,1}\beta_3^2 + a_{2,2}\gamma_3^2 + 2a_{0,1}\alpha_3\beta_3 + 2a_{0,2}\alpha_3\gamma_3 + 2a_{1,2}\beta_3\gamma_3 = 0 \\ a_{0,0}\alpha_4^2 + a_{1,1}\beta_4^2 + a_{2,2}\gamma_4^2 + 2a_{0,1}\alpha_4\beta_4 + 2a_{0,2}\alpha_4\gamma_4 + 2a_{1,2}\beta_4\gamma_4 = 0 \end{cases},$$

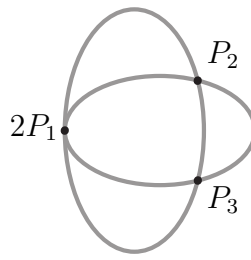
$$\text{rg} \begin{pmatrix} \alpha_1^2 & \beta_1^2 & \gamma_1^2 & \alpha_1\beta_1 & \alpha_1\gamma_1 & \beta_1\gamma_1 \\ \alpha_2^2 & \beta_2^2 & \gamma_2^2 & \alpha_2\beta_2 & \alpha_2\gamma_2 & \beta_2\gamma_2 \\ \alpha_3^2 & \beta_3^2 & \gamma_3^2 & \alpha_3\beta_3 & \alpha_3\gamma_3 & \beta_3\gamma_3 \\ \alpha_4^2 & \beta_4^2 & \gamma_4^2 & \alpha_4\beta_4 & \alpha_4\gamma_4 & \beta_4\gamma_4 \end{pmatrix} = 4 \quad .$$

In altre parole, abbiamo descritto \mathcal{F} a partire dal suo luogo base. Ora, questo si può fare anche nel caso in cui $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ non sia dato da 4 punti distinti, ovvero quando, per qualche P_i , si abbia $i(\mathcal{D}, \mathcal{C}, P_i) \geq 2$; questo verrà illustrato negli esempi 19-23.

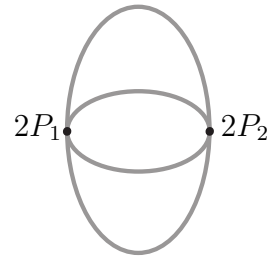
Se \mathcal{C} , \mathcal{D} sono due coniche lisce, sono possibili solo i seguenti casi:



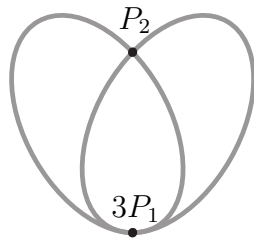
(a): Luogo base:
 $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$



(b): Luogo base:
 $\{2P_1, P_2, P_3\}$



(c): Luogo base:
 $\{2P_1, 2P_2\}$



(d): Luogo base:
 $\{3P_1, P_2\}$



(e): Luogo base:
 $\{4P_1\}$

Usiamo la notazione mP_1 per indicare che in P_1 le due coniche si intersecano con molteplicità m , cioè che le coordinate di P_1 sono una radice di molteplicità m per l'equazione che si ottiene sostituendo, ad esempio, una parametrizzazione di \mathcal{C} in un'equazione cartesiana di \mathcal{D} ; è bene notare che questo non vuol dire che \mathcal{C} o \mathcal{D} hanno molteplicità m in P_1 , dato che \mathcal{C} e \mathcal{D} sono lisce.

Prima di presentare alcuni esempi di fasci di coniche nei casi descritti sopra, riportiamo un risultato utile per determinare le coniche degeneri di un fascio che ne contiene almeno una liscia.

Proposizione 3.2.4. *Sia \mathcal{F} un fascio di coniche contenente almeno una conica non degenera. Allora esistono al più tre coniche degeneri contenute in \mathcal{F} , ed almeno una.*

Dimostrazione. Siano

$$\mathcal{C} : (x_0 \ x_1 \ x_2) A \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D} : (x_0 \ x_1 \ x_2) B \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

e supponiamo \mathcal{D} non degenera. La generica conica \mathcal{S} del fascio ha equazione:

$$\mathcal{S} : (x_0 \ x_1 \ x_2) (\lambda A + \mu B) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$$

ed è degenera se e solo se λ, μ sono tali che

$$h(\lambda, \mu) := \det(\lambda A + \mu B) = 0 \quad .$$

Poiché $h(0, 1) = \det B \neq 0$, h non è identicamente nullo, ed è quindi un polinomio omogeneo di terzo grado in λ, μ ; sappiamo dunque che ha tre radici contate con molteplicità, da cui l'asserto. \square

3.2.1 Esempi

Esempio 19 (caso (a)). Vogliamo descrivere il fascio \mathcal{F} di coniche passanti per i 4 punti distinti

$$P_1 = [-1, 1, 1], \quad P_2 = [1, 1, 1], \quad P_3 = [-1, -1, 1], \quad P_4 = [1, -1, 1],$$

cioè $\Delta_2(P_1, P_2, P_3, P_4)$. Per la proposizione 3.1.1, basta risolvere il sistema:

$$\begin{cases} a_{0,0} + a_{1,1} + a_{2,2} - 2a_{0,1} - 2a_{0,2} + 2a_{1,2} = 0 \\ a_{0,0} + a_{1,1} + a_{2,2} + 2a_{0,1} + 2a_{0,2} + 2a_{1,2} = 0 \\ a_{0,0} + a_{1,1} + a_{2,2} + 2a_{0,1} - 2a_{0,2} - 2a_{1,2} = 0 \\ a_{0,0} + a_{1,1} + a_{2,2} - 2a_{0,1} + 2a_{0,2} - 2a_{1,2} = 0 \end{cases} .$$

Si vede che due soluzioni sono date da $[1, -1, 0, 0, 0, 0]$, $[1, 0, -1, 0, 0, 0]$ che corrispondono alle coniche degeneri

$$\begin{aligned} \mathcal{C} : (x_0 - x_1)(x_0 + x_1) &= 0 \\ \mathcal{D} : (x_0 - x_2)(x_0 + x_2) &= 0 \end{aligned} ,$$

dunque

$$\mathcal{F} : \lambda(x_0 - x_1)(x_0 + x_1) + \mu(x_0 - x_2)(x_0 + x_2) = 0.$$

D'altronde si poteva ragionare geometricamente evitando di risolvere il sistema; due coniche che certamente passano per P_1, \dots, P_4 sono le coniche degeneri:

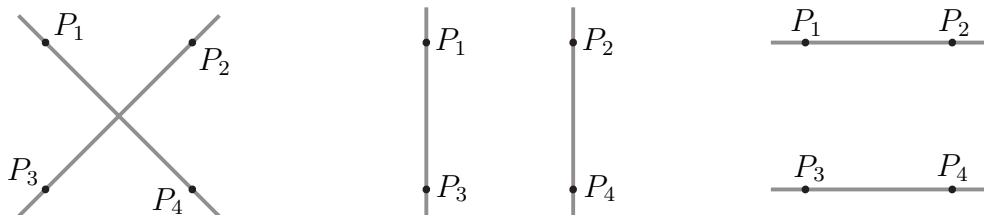
$$(P_1 + P_4) \cup (P_2 + P_3) \text{ e } (P_1 + P_3) \cup (P_2 + P_4) ,$$

che sono proprio \mathcal{C} e \mathcal{D} .

Le coniche degeneri di \mathcal{F} corrispondono ai valori di λ, μ tali che

$$\det \begin{pmatrix} \lambda + \mu & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix} = 0$$

ovvero $(\lambda + \mu)\lambda\mu = 0$. Le soluzioni sono date da $[\lambda, \mu] = [1, 0]$, $[0, 1]$ (cioè ritroviamo \mathcal{C} e \mathcal{D}) e $[1, -1]$, che corrisponde alla conica $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$, cioè, come potevamo aspettarci, $(P_1 + P_2) \cup (P_3 + P_4)$.



Notazione 3. Finora abbiamo usato simboli come \mathcal{C} , \mathcal{D} per denotare coniche nel piano proiettivo. Negli esempi seguenti, per semplificare i calcoli, lavoreremo prima nel piano affine, e cercheremo le coniche in \mathbb{A}^2 tali che i loro completamenti proiettivi soddisfino le condizioni richieste. Useremo allora i simboli \mathcal{C} , \mathcal{D} per indicare coniche del piano affine, e i simboli $\overline{\mathcal{C}}$, $\overline{\mathcal{D}}$ per i rispettivi completamenti proiettivi in \mathbb{P}^2 .

Esempio 20 (caso(b)). Vogliamo descrivere il fascio \mathcal{F} di coniche in \mathbb{P}^2 che hanno come luogo base $\{2P_1, P_2, P_3\}$, con $P_1 = [0, 0, 1]$, $P_2 = [1, 1, 1]$, $P_3 = [1, -1, 1]$.

Lavoriamo nel piano affine; sia

$$f(X, Y) = a_{0,0}X^2 + a_{1,1}Y^2 + a_{2,2} + 2a_{0,1}XY + 2a_{0,2}X + 2a_{1,2}Y, \quad (3.8)$$

cerchiamo quindi le coniche in \mathbb{A}^2 di equazione $\mathcal{C} : f(X, Y) = 0$, con $X = \frac{x_0}{x_2}$, $Y = \frac{x_1}{x_2}$, passanti per $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 1)$, $P_3 = (1, -1)$ e con tangente in $(0, 0)$ data da $X = 0$. Infatti due coniche \mathcal{C} , \mathcal{D} sono tali che $i(\mathcal{C}, \mathcal{D}, P_1) \geq 2$ se passano entrambe per P_1 ed hanno lì la stessa tangente. Imponendo a \mathcal{C} e a \mathcal{D} di passare per P_2 e P_3 , e di passare per P_1 avendo lì la stessa tangente, poiché $\sum_{P \in \mathcal{C}} i(\mathcal{C}, \mathcal{D}, P) = 4$, ne segue $i(\mathcal{C}, \mathcal{D}, P_1) = 2$.

Sappiamo che un'equazione della retta tangente a una curva $\mathcal{C} : f(X, Y) = 0$ in un suo punto liscio $P = (a, b)$ è data da

$$t : \frac{\partial f}{\partial X} \Big|_P (X - a) + \frac{\partial f}{\partial Y} \Big|_P (Y - b) = 0 \quad (3.9)$$

e per questa retta vale $i(\mathcal{C}, t, P) \geq 2$. Se P è singolare per \mathcal{C} , la (3.9) diventa $0 = 0$; in tal caso, converremo che tutte le rette per P sono tangenti a \mathcal{C} .

L'equazione (3.9) per $(a, b) = (0, 0)$ diventa quindi

$$2a_{0,2}X + 2a_{1,2}Y = 0$$

e poiché vogliamo $t : X = 0$, sarà $a_{1,2} = 0$. Inoltre deve valere

$$\begin{cases} a_{2,2} = 0 \\ a_{0,0} + a_{1,1} + a_{2,2} + 2a_{0,1} + 2a_{0,2} = 0 \\ a_{0,0} + a_{1,1} + a_{2,2} - 2a_{0,1} + 2a_{0,2} = 0 \end{cases} .$$

Due soluzioni sono date ad esempio da $(1, -1, 0, 0, 0, 0)$, $(2, 0, 0, 0, -1, 0)$ che corrispondono alle coniche degeneri in \mathbb{A}^2 :

$$\mathcal{C} : X^2 - Y^2 = 0 \quad , \quad \mathcal{D} : X^2 - X = 0.$$

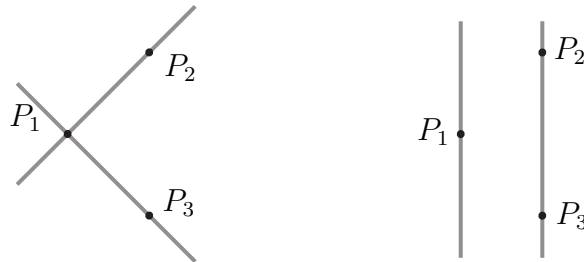
Dunque, se $\bar{\mathcal{C}} : x_0^2 - x_1^2 = 0$, $\bar{\mathcal{D}} : x_0^2 - x_0x_2 = 0$, il fascio di coniche proiettive \mathcal{F} è dato da

$$\mathcal{F} : (\lambda + \mu)x_0^2 - \lambda x_1^2 - \mu x_0x_2 = 0 \quad , \quad [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1 .$$

Sapendo infine che \mathcal{F} contiene almeno una conica liscia (ad esempio $x_0^2 + x_1^2 - 2x_0x_2 = 0$), cerchiamo l'eventuale altra conica degenera:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda + \mu & 0 & -\frac{\mu}{2} \\ 0 & -\lambda & 0 \\ -\frac{\mu}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

ovvero $\lambda\mu^2 = 0$, che dà i $[\lambda, \mu] = [1, 0]$ con molteplicità 2 e $[\lambda, \mu] = [0, 1]$ con molteplicità 1; quindi il fascio ha solo due coniche non degeneri, la $\mathcal{C} = (P_1 + P_3) \cup (P_1 + P_2)$ (contata due volte) e la \mathcal{D} , data dall'unione della tangente assegnata in P_1 con la retta $P_1 + P_3$.



Esempio 21 (caso (c)). Cerchiamo il fascio \mathcal{F} di coniche in \mathbb{P}^2 con luogo base $\{2P_1, 2P_2\}$, $P_1 = [0, 0, 1]$, $P_2 = [2, 0, 1]$. Lavoriamo ancora su \mathbb{A}^2 e determiniamo le coniche per $(0, 0)$ e $(2, 0)$, con tangente in $(0, 0)$ data da $X = 0$, e tangente in $(2, 0)$ data da $X = 2$. Ragionando in maniera analoga

all'esempio precedente e usando la (3.9), troviamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial X} \Big|_{(0,0)} X + \frac{\partial f}{\partial Y} \Big|_{(0,0)} Y &= 2a_{0,2}X + 2a_{1,2}Y \\ \frac{\partial f}{\partial X} \Big|_{(2,0)} (X-2) + \frac{\partial f}{\partial Y} \Big|_{(2,0)} Y &= (4a_{0,0} + 2a_{0,2})(X-2) + (4a_{0,1} + 2a_{1,2})Y \\ \Rightarrow a_{1,2} &= 0, \quad a_{0,1} = 0. \end{aligned}$$

Inoltre deve valere:

$$\begin{cases} a_{2,2} = 0 \\ 4a_{0,0} + 4a_{0,2} = 0 \end{cases}.$$

Le coniche $\mathcal{C} : X^2 + Y^2 - 2X = 0$, $\mathcal{D} : X^2 + 2Y^2 - 2X = 0$ soddisfano le condizioni richieste; se $\bar{\mathcal{C}} : x_0^2 + x_1^2 - 2x_0x_2 = 0$, $\bar{\mathcal{D}} : x_0^2 + 2x_1^2 - 2x_0x_2 = 0$, allora

$$\mathcal{F} : \lambda(x_0^2 + x_1^2 - 2x_0x_2) + \mu(x_0^2 + 2x_1^2 - 2x_0x_2) = 0,$$

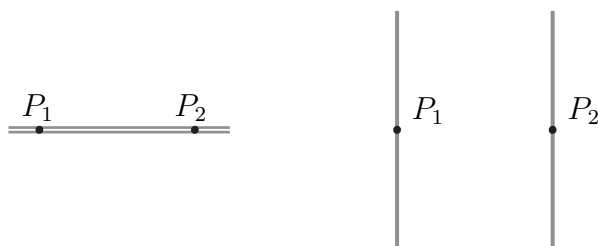
cioè

$$\mathcal{F} : (\lambda + \mu)x_0^2 + (\lambda + 2\mu)x_1^2 - 2(\lambda + \mu)x_0x_2 = 0.$$

Le coniche degeneri di \mathcal{F} si trovano quindi per i valori di λ, μ tali che

$$\det \begin{pmatrix} \lambda + \mu & 0 & -(\lambda + \mu) \\ 0 & \lambda + 2\mu & 0 \\ -(\lambda + \mu) & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

ovvero $(\lambda + \mu)^2(\lambda + 2\mu) = 0$, che dà $[\lambda, \mu] = [1, -1]$ con molteplicità 2 e $[\lambda, \mu] = [1, \frac{1}{2}]$ con molteplicità 1. Abbiamo trovato quindi le coniche in \mathbb{P}^2 descritte dalle equazioni $x_1^2 = 0$, cioè la retta $P_1 + P_2$ doppia, e $x_0(x_0 - 2x_2) = 0$, cioè l'unione delle due tangenti assegnate.



Esempio 22 (caso (d)). Determiniamo il fascio \mathcal{F} di coniche in \mathbb{P}^2 avente un luogo base del tipo $3P_1, P_2$, con $P_1 = [0, 0, 1]$, $P_2 = [1, 1, 1]$. Osserviamo che in questo caso la teoria e gli esempi visti sui fasci di coniche ci permettono di determinare solo 3 delle 4 condizioni lineari necessarie a definire un fascio di coniche siffatto. Cerchiamo le coniche in \mathbb{A}^2 passanti per $P_1 = (0, 0)$ e $P_2 = (1, 1)$, con tangente in $(0, 0)$ data da $Y = 0$.

L'equazione della retta tangente a una conica \mathcal{C} passante per P_1 è $2a_{0,2}X + 2a_{1,2}Y = 0$, dunque $a_{0,2} = 0$; inoltre deve valere

$$\begin{cases} a_{2,2} = 0 \\ a_{0,0} + a_{1,1} + 2a_{0,1} + 2a_{1,2} = 0 \end{cases} .$$

Si vede subito che le coniche affini $\mathcal{C} : X^2 - Y = 0$, $\mathcal{D} : X^2 + Y^2 - XY - Y = 0$ soddisfano le condizioni richieste, e studiandone le intersezioni si trova:

$$\begin{aligned} \begin{cases} Y = X^2 \\ X^2 + Y^2 - XY - Y = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} Y = X^2 \\ X^2 + X^4 - X^3 - X^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} Y = X^2 \\ X^3(X - 1) = 0 \end{cases} ; \end{aligned}$$

si hanno quindi i punti $(0, 0)$ con molteplicità 3 e $(1, 1)$ con molteplicità 1. Dunque se $\bar{\mathcal{C}} : x_0^2 - x_1x_2 = 0$, $\bar{\mathcal{D}} : x_0^2 + x_1^2 - x_0x_1 - x_1x_2 = 0$ sono i completamenti proiettivi di \mathcal{C} e \mathcal{D} , vale

$$\mathcal{F} : \lambda(x_0^2 - x_1x_2) + \mu(x_0^2 + x_1^2 - x_0x_1 - x_1x_2) = 0$$

cioè

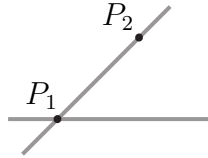
$$\mathcal{F} : (\lambda + \mu)x_0^2 + \mu x_1^2 - \mu x_0x_1 - (\lambda + \mu)x_1x_2 = 0 .$$

Osserviamo che la conica generica $\mathcal{E} \in \mathcal{F}$ passa per P_2 e per P_1 con tangente $x_1 = 0$; inoltre $i(\mathcal{C}, \mathcal{E}, P_1) \geq 3$.

Le coniche degeneri di \mathcal{F} sono date da

$$\det \begin{pmatrix} \lambda + \mu & -\frac{\mu}{2} & 0 \\ -\frac{\mu}{2} & \mu & \frac{\lambda + \mu}{2} \\ 0 & -\frac{\lambda + \mu}{2} & 0 \end{pmatrix} = 0$$

ovvero $(\lambda + \mu)^3 = 0$, che dà $[\lambda, \mu] = [1, -1]$ con molteplicità 3. L'unica conica degenera di \mathcal{F} è dunque $x_1^2 - x_0x_1 = 0$, cioè l'unione della retta $P_1 + P_2$ con la tangente assegnata.



Esempio 23 (caso (e)). Cerchiamo il fascio \mathcal{F} di coniche proiettive avente un luogo base del tipo $4P$, con $P = [0, 0, 1]$.

Stavolta sappiamo solo che nell'equazione della conica dev'essere $a_{0,2} = a_{2,2} = 0$. Si vede che le coniche affini $\mathcal{C} : X^2 - Y = 0$, $\mathcal{D} : X^2 + Y^2 - Y = 0$ sono non degeneri, passano per $(0, 0)$ e hanno la tangente $Y = 0$.

Inoltre vale

$$\mathcal{C} \cap \mathcal{D} : \begin{cases} X^2 - Y = 0 \\ X^2 + Y^2 - Y = 0 \end{cases}$$

cioè

$$\mathcal{C} \cap \mathcal{D} : \begin{cases} Y = X^2 \\ X^4 = 0 \end{cases}$$

ovvero ottengo il punto $(0, 0)$ con molteplicità 4.

Se $\bar{\mathcal{C}} : x_0^2 - x_1x_2 = 0$, $\bar{\mathcal{D}} : x_0^2 + x_1^2 - x_1x_2 = 0$, allora \mathcal{F} è il fascio di coniche di equazione

$$\mathcal{F} : \lambda(x_0^2 - x_1x_2) + \mu(x_0^2 + x_1^2 - x_1x_2) = 0$$

cioè

$$\mathcal{F} : (\lambda + \mu)x_0^2 + \mu x_1^2 - (\lambda + \mu)x_1x_2 = 0.$$

Le coniche degeneri di \mathcal{F} si trovano dunque in corrispondenza dei valori di λ, μ per cui

$$\det \begin{pmatrix} \lambda + \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & -\frac{\lambda + \mu}{2} \\ 0 & -\frac{\lambda + \mu}{2} & 0 \end{pmatrix} = 0$$

ovvero $(\lambda + \mu)^3 = 0$, che dà $[\lambda, \mu] = [1, -1]$ con molteplicità 3. L'unica conica degenera di \mathcal{F} ha quindi equazione $x_1^2 = 0$, ed è cioè la tangente fissata, doppia.



Bibliografia

- [1] Mauro C. Beltrametti, Ettore Carletti, Dionisio Gallarati, Giacomo Monti Bragadin, *Lecture su curve, superfici e varietà proiettive speciali*, Bollati Boringhieri, Torino 2002.
- [2] Guido Castelnuovo, *Lezioni di Geometria Analitica e Proiettiva*, vol. 1, Società editrice Dante Alighieri, Venezia 1905.
- [3] Ciro Ciliberto, *Algebra Lineare*, Bollati Boringhieri, Torino 1994.
- [4] Philippe Ellia, *Introduzione light alla Geometria Algebrica*, <http://web.unife.it/utenti/philippe.ellia/Altro.html>, 2006.
- [5] Federigo Enriques, *Lezioni di Geometria Proiettiva*, Zanichelli, Bologna 1898.
- [6] Robin Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 52, Springer-Verlag, New York 1977.
- [7] Monica Idà, *Appunti del corso di Geometria Proiettiva*, anno 2005-2006
- [8] Joe Harris, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 133, Springer-Verlag, New York 1992.
- [9] Miles Reid, *Undergraduate Algebraic Geometry*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 12, Cambridge University Press, New York 1990.
- [10] Edoardo Sernesi, *Geometria 1*, Bollati Boringhieri, Torino 2000.