

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Triennale in Matematica

**PROGRAMMAZIONE DINAMICA
IN UN
MODELLO COMPLETO**

Tesi di Laurea in Finanza Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Andrea Pascucci

Presentata da:
Daniela Maddalena

Sessione II
Anno Accademico 2012/'13

Introduzione

Obiettivo della tesi è la descrizione di un metodo di ottimizzazione per una strategia di copertura di un derivato replicabile in un modello di mercato completo nel caso in cui il valore iniziale della stessa fosse inferiore al valore iniziale del prezzo di arbitraggio del derivato considerato, ossia minore del valore monetario necessario al tempo iniziale per replicare perfettamente il suo payoff.

Per riuscire a fornire una descrizione esaustiva si è scelta una suddivisione del lavoro in due parti. Nella prima si sono considerate la composizione di un modello di mercato a tempo discreto, la nozione di strategia di arbitraggio con le relative condizioni necessarie per l'eliminazione delle possibilità di comperle nel modello di mercato in esame e la nozione di completezza di un modello legata alla replicabilità di un titolo derivato europeo. Infine sono stati affrontati e descritti i principali problemi legati ad un derivato, ossia i problemi di valutazione e copertura, che si sono dimostrati essere risolvibili in un modello di mercato completo a tempo discreto.

Nel secondo capitolo si è preso in esame un esempio di modello di mercato completo a tempo discreto, il modello binomiale. Dopo aver precisato le condizioni che lo rendono un modello completo, ossia dopo la definizione univoca dei parametri dello stesso in correlazione all'esistenza di una misura martingala, si è definito il prezzo di arbitraggio di un derivato nel modello ed è stato descritto un metodo di ottimizzazione di strategia nel caso in cui il valore iniziale di una strategia potenzialmente replicante fosse inferiore al valore iniziale del prezzo di arbitraggio, il metodo della Programmazione Dinamica.

Un esempio di applicazione ha poi permesso di sviluppare tale metodo in relazione al tentativo di minimizzazione di due criteri di rischio differenti: il rischio quadratico e il rischio di shortfall, dei quali, in conclusione, si è confrontato l'errore medio di replicazione.

Indice

Introduzione	i
1 Modello di mercato discreto	1
1.1 Portafoglio	3
1.2 Arbitraggio e primo teorema della valutazione	6
1.3 Titoli derivati e completezza di mercato	9
1.3.1 Valutazione d'arbitraggio	10
1.3.2 Copertura	12
2 Il modello binomiale	13
2.1 Esistenza misura martingala e prezzo d'arbitraggio	14
2.2 Copertura in un modello binomiale	15
2.2.1 Copertura nel caso in cui $V_0 < H_0$	16
2.3 Esempio di applicazione	18
2.3.1 Osservazioni	25
A	27
A.1 Spazi di probabilità	27
A.2 Variabili aleatorie e valore atteso	28
A.3 Attesa condizionata	30
A.4 Processi stocastici	30
Bibliografia	33

Capitolo 1

Modello di mercato discreto

Consideriamo uno spazio di probabilità (Ω, \mathcal{F}, P) nel quale lo spazio campione Ω abbia un numero finito di elementi, la σ -algebra \mathcal{F} sia la più grande possibile, ossia l'insieme delle parti di Ω , e che non vi siano in \mathcal{F} eventi trascurabili, ossia vale che $P(\omega) > 0$ per ogni $\omega \in \Omega$. Fissiamo $t_0, t_1, \dots, t_N \in \mathbb{R}$ con

$$t_0 < t_1 < \dots < t_N$$

per indicare le date di contrattazione. Per semplificare l'esposizione, in seguito si indicherà con $t_0 = 0$ la data odierna e con $t_N = T$ la data di scadenza dello strumento finanziario in esame.

Una volta fissato $d \in \mathbb{N}$, è possibile definire un *modello di mercato discreto*. Questo è costituito da un titolo non rischioso B , detto *bond*, e da d titoli rischiosi S^1, \dots, S^d , detti *stocks*. Per il bond vale la seguente dinamica deterministica: indicando con B_n il valore del bond all'istante t_n , si ha

$$\begin{cases} B_0 = 1, \\ B_n = B_{n-1}(1 + r_n), \quad n = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (1.1)$$

dove r_n indica il tasso privo di rischio nel periodo n -esimo $[t_{n-1}, t_n]$ ed è tale che $1 + r_n > 0$.

Per i titoli rischiosi vale, invece, la seguente dinamica stocastica: indican-

do con S_n^i il prezzo all'istante t_n del titolo i -esimo, si ha

$$\begin{cases} S_0^i \in \mathbb{R}_+, \\ S_n^i = S_{n-1}^i(1 + \mu_n^i), \quad n = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (1.2)$$

dove μ_n^i è una variabile aleatoria reale rappresentativa del tasso di rendimento dell' i -esimo stock nel periodo n -esimo $[t_{n-1}, t_n]$.

Poniamo

$$\mu_n = (\mu_n^1, \dots, \mu_n^d)$$

e supponiamo che il processo μ_n sia adattato ad una generica filtrazione (\mathcal{F}_n) , che assumiamo essere coincidente con la σ -algebra generata da μ_n , in quanto tale successione costituisce l'unica sorgente di aleatorità nei modelli presi in esame, ossia

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n^\mu := \sigma\{\mu_k | k \leq n\}, \quad n = 1, \dots, N. \quad (1.3)$$

Si osservi che la filtrazione (\mathcal{F}_n) appena definita coincide con quella generata dai titoli rischiosi S , in quanto la (1.2) stabilisce una corrispondenza biunivoca tra i processi μ_n e S_n . Si ha quindi $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n^\mu = \mathcal{F}_n^S$ e tale filtrazione rappresenta le informazioni disponibili sul mercato all'istante t_n . Assumiamo, inoltre, che μ_n sia indipendente da \mathcal{F}_{n-1} per ogni $n = 1, \dots, N$.

Supponiamo che esista un titolo del modello che assume sempre valori strettamente positivi, ad esempio $B_n > 0$ per ogni n , allora è possibile definire il *mercato scontato* rispetto a B

$$\tilde{S}_n^i = \frac{S_n^i}{B_n}, \quad n = 1, \dots, N.$$

In tale mercato si ha, ovviamente, che $\tilde{B}_n = 1$ per ogni n e i prezzi dei titoli sono espressi in unità del titolo non rischioso B , che viene chiamato *numeraire*. Considerare il mercato scontato permette di confrontare i prezzi quotati in istanti differenti.

1.1 Portafoglio

Definizione 1.1. *Un portafoglio (o strategia) (α, β) è un processo stocastico in \mathbb{R}^{d+1}*

$$(\alpha, \beta) = (\alpha_n^1, \dots, \alpha_n^d, \beta_n)_{n=1, \dots, N}.$$

Nella definizione precedente α_n^i e β_n rappresentano rispettivamente la quantità di titolo rischioso S^i e di bond contenuta nel portafoglio durante il periodo n -esimo, ossia nell'intervallo temporale $[t_{n-1}, t_n]$. È quindi lecito definire il *valore del portafoglio* (α, β) all'istante t_n come

$$V_n^{(\alpha, \beta)} = \sum_{i=1}^d \alpha_n^i S_n^i + \beta_n B_n, \quad n = 1, \dots, N \quad (1.4)$$

e, utilizzando la notazione vettoriale per il processo stocastico dei prezzi $S = (S^1, \dots, S^d)$, dato il vettore $\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^d)$ si ha

$$V_n^{(\alpha, \beta)} = \alpha_n \cdot S_n + \beta_n B_n$$

dove \cdot indica il prodotto scalare in \mathbb{R}^d .

Il valore $V^{(\alpha, \beta)}$ del portafoglio è un processo stocastico reale a tempo discreto. Si osservi che α_n^i e β_n possono anche assumere valori negativi, il che implica la possibilità di vendere allo scoperto le azioni.

Definizione 1.2. *Un portafoglio (α, β) è autofinanziante se vale la relazione*

$$V_{n-1}^{(\alpha, \beta)} = \alpha_n \cdot S_{n-1} + \beta_n B_{n-1} \quad (1.5)$$

per ogni $n = 1, \dots, N$.

Dal momento che $V_{n-1}^{(\alpha, \beta)}$ indica anche il valore del portafoglio all'istante t_{n-1} , per un portafoglio autofinanziante vale l'uguaglianza

$$\alpha_{n-1} \cdot S_{n-1} + \beta_{n-1} B_{n-1} = \alpha_n \cdot S_{n-1} + \beta_n B_{n-1}.$$

Questa relazione si interpreta nel modo seguente: all'istante t_{n-1} si costruisce la strategia per il periodo n -esimo $[t_{n-1}, t_n]$ con le nuove quantità α_n, β_n in

modo tale da non mutare il valore complessivo del portafoglio.

Dal momento che, per una strategia autofinanziante, (α_n, β_n) indicano la composizione di portafoglio che si costruisce all'istante di tempo t_{n-1} , risulta naturale assumere che il processo (α, β) sia predicibile.

Definizione 1.3. *Si dice predicibile un portafoglio (α, β) tale per cui (α_n, β_n) risultino \mathcal{F}_{n-1} -misurabile per ogni $n = 1, \dots, N$.*

Notazione 1.1. *Di qui in poi, \mathcal{A} indicherà la famiglia delle strategie autofinanzianti e predicibili.*

Si osservi che la condizione di autofinanziamento (1.5) stabilisce un legame tra i processi α e β per cui è possibile identificare una strategia in \mathcal{A} mediante la coppia (α, β) . Equivalentemente questa può essere identificata anche mediante la coppia (V_0, α) , dove $V_0 \in \mathbb{R}$ è il valore iniziale della strategia e α è un processo predicibile d -dimensionale. Vale infatti

Proposizione 1.1. *Il valore di una strategia autofinanziante (α, β) è determinato dal valore iniziale V_0 e ricorsivamente dalla relazione*

$$V_n = V_{n-1}(1 + r_n) + \sum_{i=1}^d \alpha_n^i S_{n-1}^i (\mu_n^i - r_n) \quad (1.6)$$

per $n = 1, \dots, N$.

Dimostrazione. Per la dimostrazione consideriamo, a partire dalla condizione (1.5), la variazione di un portafoglio autofinanziante nel periodo $[t_{n-1}, t_n]$

$$\begin{aligned} V_n - V_{n-1} &= \alpha_n \cdot (S_n - S_{n-1}) + \beta_n (B_n - B_{n-1}) \\ &= \alpha_n \cdot \mu_n S_{n-1} + \beta_n r_n B_{n-1} \\ &= \sum_{i=1}^d \alpha_n^i \mu_n^i S_{n-1}^i + \beta_n r_n B_{n-1} \end{aligned} \quad (1.7)$$

(sostituendo poi, dalla (1.5), $\beta_n B_{n-1} = V_{n-1} - \alpha_n \cdot S_{n-1}$ e mettendo in evidenza $\alpha_n \cdot S_{n-1}$)

$$= \sum_{i=1}^d \alpha_n^i S_{n-1}^i (\mu_n^i - r_n) + r_n V_{n-1}$$

e si ottiene quanto si voleva dimostrare. \square

Si noti che la dimostrazione permette di osservare che la variazione di portafoglio dal tempo t_{n-1} al tempo t_n dipende solo da quella dei titoli in esso contenuti e non dal fatto che sia stata introdotta o tolta liquidità. Per cui, in una strategia autofinanziante, si stabilisce la somma da investire al tempo iniziale.

Sommando in n la (1.7), si ottiene:

$$V_n^{(\alpha,\beta)} = V_0^{(\alpha,\beta)} + g_n^{(\alpha,\beta)} \quad (1.8)$$

dove

$$g_n^{(\alpha,\beta)} = \sum_{j=1}^n (\alpha_j \cdot (S_j - S_{j-1}) + \beta_j (B_j - B_{j-1})) \quad (1.9)$$

definisce il processo del *rendimento della strategia*.

Sostituendo (1.1) e (1.2) in (1.9), il rendimento diventa:

$$g_n^{(\alpha,\beta)} = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^d \alpha_j^i S_{j-1}^i \mu_j^i + \beta_j B_{j-1} r_j \right). \quad (1.10)$$

Dunque una strategia autofinanziante si può esprimere in ogni istante come la somma dell'investimento iniziale e del guadagno maturato.

Talvolta si può scegliere anche di considerare un portafoglio in termini relativi, indicando cioè le proporzioni del valore totale investite nei singoli titoli. Pertanto, se $V_{n-1} \neq 0$ indichiamo con

$$\pi_n^i = \frac{\alpha_n^i S_{n-1}^i}{V_{n-1}}, \quad i = 1, \dots, d, \quad (1.11)$$

e (sempre tenendo conto di (1.5))

$$\pi_n^0 = \frac{\beta_n B_{n-1}}{V_{n-1}} = 1 - \sum_{i=1}^d \pi_n^i \quad (1.12)$$

le proporzioni investite nel periodo n -esimo $[t_{n-1}, t_n]$ con $n = 1, \dots, N$. Per convenzione, se $V_{n-1} = 0$, poniamo $\pi_n^i = 0$ per $i = 0, \dots, d$. Si noti che non è detto che π_n^i appartenga all'intervallo $[0, 1]$.

In relazione alla notazione appena introdotta, è possibile esprimere nuovamente la condizione di autofinanziamento per un portafoglio in termini relativi.

Proposizione 1.2. *Il valore di una strategia autofinanziante (α, β) è determinato dal valore iniziale $V_0 \in \mathbb{R}$ e dai processi π^1, \dots, π^d mediante la relazione ricorsiva*

$$V_n = V_{n-1}(1 + \pi_n \cdot \mu_n + \pi_n^0 r_n) \quad (1.13)$$

che è equivalente alla

$$V_n = V_{n-1} \left(1 + r_n + \sum_{i=1}^d \pi_n^i (\mu_n^i - r_n) \right) \quad (1.14)$$

come pure alla

$$\frac{V_n - V_{n-1}}{V_{n-1}} = \pi_n \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}} + \pi_n^0 \frac{B_n - B_{n-1}}{B_{n-1}}. \quad (1.15)$$

Quest'ultima relazione esprime il fatto che il rendimento relativo di un portafoglio autofinanziante è combinazione lineare dei rendimenti dei titoli che lo compongono con pesi espressi dal portafoglio relativo.

Dimostrazione. La (1.14) si ottiene direttamente dalla (1.6) mettendo in evidenza l'elemento V_{n-1} . La (1.13) si ottiene inserendo (1.11) in (1.14) e la (1.15) si ottiene dalla (1.13) sostituendo a μ_n e r_n le loro espressioni risultanti dalle (1.1) e (1.2). \square

1.2 Arbitraggio e primo teorema della valutazione

Un arbitraggio è un'operazione finanziaria a costo zero che produce un guadagno senza rischio. La modellizzazione matematica di un mercato finanziario segue il Principio di Assenza di Opportunità di Arbitraggio (AOA) il quale afferma che, in un mercato, i prezzi dei titoli devono essere tali da non permettere un guadagno certo senza rischio. Questo significa che un modello matematico di mercato è ritenuto accettabile se non ammette l'esistenza di opportunità di arbitraggio.

In un modello un arbitraggio viene formalmente espresso in termini di

strategie e la sua esistenza o meno dipende da quella di una opportuna misura di probabilità, detta misura martingala.

Definizione 1.4. *Un arbitraggio è una strategia autofinanziante $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}$ che verifica le seguenti condizioni:*

- i) $V_0^{(\alpha, \beta)} = 0$;
- ii) $V_N^{(\alpha, \beta)} \geq 0$;
- iii) $P(V_N^{(\alpha, \beta)} > 0) > 0$

Si dice che un modello di mercato è libero da arbitraggi se la famiglia \mathcal{A} non ne contiene.

Definizione 1.5. *Una misura martingala con numeraire B è una misura di probabilità Q su (Ω, \mathcal{F}) tale che:*

- i) Q è una misura equivalente a P ;
- ii) per ogni $n = 1, \dots, N$, il processo dei titoli scontato \tilde{S} è una Q -martingala.

Si osservi che la definizione di misura martingala dipende dalla scelta del numeraire. Inoltre, poiché Q è equivalente a P , il mercato è libero da arbitraggi in P se e solo se lo è in Q . Ricordiamo che una martingala è un processo in media costante, da cui

$$E^Q[\tilde{S}_n] = E^Q[E^Q[\tilde{S}_n | \mathcal{F}_0]] = \tilde{S}_0.$$

La precedente uguaglianza esprime il fatto che il valore atteso dei prezzi scontati futuri è uguale al prezzo attuale. Dunque essa costituisce una *formula di valutazione neutrale al rischio*: il valore atteso di \tilde{S} nella misura Q corrisponde al valore attribuito da un investitore che pensa che il prezzo attuale del titolo nel mercato sia corretto.

È possibile enunciare ora il primo teorema fondamentale della valutazione:

Teorema 1.1 (Primo Teorema della Valutazione). *Un mercato a tempo discreto è libero da arbitraggi se e solo se esiste almeno una misura martingala.*

Rispetto ad una misura martingala, non solo il processo del prezzo scontato di ogni titolo primario è una martingala, ma lo è anche il valore scontato di ogni strategia autofinanziante e predicibile. Vale infatti

Proposizione 1.3. *Siano Q una misura martingala e $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}$ di valore V . Allora vale*

$$\tilde{V}_{n-1} = E^Q[\tilde{V}_n \mid \mathcal{F}_{n-1}], \quad n = 1, \dots, N, \quad (1.16)$$

e in particolare

$$V_0 = E^Q[\tilde{V}_n], \quad n = 1, \dots, N. \quad (1.17)$$

Dimostrazione. Consideriamo la condizione di autofinanziamento per una strategia (α, β) in un mercato scontato con numeraire B_n

$$\tilde{V}_n = \tilde{V}_{n-1} + \alpha_n(\tilde{S}_n - \tilde{S}_{n-1})$$

e consideriamo l'attesa condizionata a \mathcal{F}_{n-1} . Tenendo presente che il processo α è un processo predicibile, otteniamo

$$\begin{aligned} E^Q[\tilde{V}_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] &= \tilde{V}_{n-1} + E^Q[\alpha_n(\tilde{S}_n - \tilde{S}_{n-1}) \mid \mathcal{F}_{n-1}] = \\ &= \tilde{V}_{n-1} + \alpha_n E^Q[\tilde{S}_n - \tilde{S}_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}] = \\ &= \tilde{V}_{n-1} + \alpha_n (E^Q[\tilde{S}_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] - E^Q[\tilde{S}_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}]) \\ &= \tilde{V}_{n-1} \end{aligned}$$

perché \tilde{S} è per definizione una martingala. □

La principale conseguenza della condizione di assenza di arbitraggi si riassume nel concetto che, se due strategie in \mathcal{A} hanno lo stesso valore finale, allora devono avere lo stesso valore anche in tutti i tempi precedenti.

Proposizione 1.4. *In un mercato libero da arbitraggi, se due strategie (α, β) , $(\alpha', \beta') \in \mathcal{A}$ hanno uguale valore finale, $V_N^{(\alpha, \beta)} = V_N^{(\alpha', \beta')}$ q.c allora vale anche*

$$V_n^{(\alpha, \beta)} = V_n^{(\alpha', \beta')} \quad \text{q.c,} \quad n = 0, \dots, N.$$

Dimostrazione. Il mercato è libero da arbitraggi per cui, per il Teorema 1.1, esisterà una misura martingala Q . Allora per la Proposizione 1.3 vale

$$\tilde{V}_n^{(\alpha,\beta)} = E^Q[\tilde{V}_N^{(\alpha,\beta)}] = E^Q[\tilde{V}_N^{(\alpha',\beta')}] = \tilde{V}_n^{(\alpha',\beta')}.$$

□

1.3 Titoli derivati e completezza di mercato

All'interno di un modello di mercato discreto con processo $S_n = (S_n^1, \dots, S_n^d)$ dei titoli rischiosi e scadenza fissata t_n che indicheremo con N

Definizione 1.6. *Un derivato Europeo con sottostante S è una variabile aleatoria X definita sullo spazio di probabilità (Ω, \mathcal{F}, P) e misurabile rispetto alla σ -algebra $\mathcal{F}_N^S = \sigma(\{S_n \mid n \leq N\})$. La X viene detta anche payoff del derivato, o claim.*

Si osservi che nella definizione si è messa appositamente in risalto la dipendenza della filtrazione dal titolo rischioso, in quanto si voleva sottolineare il fatto che un titolo derivato *deriva* il suo valore dai titoli rischiosi sottostanti S . Da quanto in precedenza detto, in seguito alla (1.2), si sa già che nei casi considerati $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n^S$.

Un esempio di derivati sono le opzioni Put Europee. Queste sono dei contratti che danno al detentore il diritto, ma non l'obbligo, di vendere alla scadenza N un'unità di sottostante ad un prezzo prestabilito K , detto *strike* o *prezzo di esercizio*. Il payoff di un'opzione Put è quindi della forma

$$X = (K - S_N)^+$$

e dipende unicamente dal valore del sottostante a scadenza.

Un derivato permette, in sostanza, al detentore di trasferire parte del rischio legato al sottostante alla controparte. Nel caso di un'opzione Put, infatti, il detentore trasferisce il rischio legato al calo del prezzo del titolo da vendere.

Vi sono principalmente due problemi legati allo studio di un derivato X :

- *la valutazione*, ossia la determinazione di un prezzo equo per il derivato che eviti l'introduzione di possibilità di arbitraggio nel mercato.
- *la copertura*, ossia la determinazione di una strategia che permetta all'emittente del titolo derivato di riuscire a coprire il payoff.

1.3.1 Valutazione d'arbitraggio

Per risolvere il problema della valutazione occorre stabilire quali siano le condizioni per l'esistenza di una strategia $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}$ che assuma, a scadenza, quasi sicuramente lo stesso valore del payoff del derivato

$$V_N^{(\alpha, \beta)} = X \quad q.c.$$

Nel caso in cui una tale strategia dovesse esistere, il derivato X sarebbe *replicabile* e (α, β) sarebbe una *strategia replicante* per X .

In base alla Proposizione 1.4, in un mercato libero da arbitraggi, se due investimenti hanno lo stesso valore finale allora devono avere lo stesso valore anche in ogni istante precedente. Possiamo quindi dire che il prezzo equo del derivato replicabile X deve coincidere con il valore $V_n^{(\alpha, \beta)}$ di una strategia autofinanziante e replicante.

Possiamo riformulare questa osservazione anche in termini intuitivi. Indichiamo con H_n il prezzo del derivato X al tempo n . Se $V_n^{(\alpha, \beta)} < H_n$, si potrebbe vendere il derivato al prezzo H_n ed investire la parte $V_n^{(\alpha, \beta)}$ nel portafoglio replicante per X , il quale permette di replicare a scadenza il valore del payoff del derivato in base alla condizione di replicazione. Investendo poi la rimanenza, $H_n - V_n^{(\alpha, \beta)}$, nel titolo non rischioso si riuscirebbe ad avere un guadagno certo privo di rischio. Analogo il ragionamento per $V_n^{(\alpha, \beta)} > H_n$, il quale porta comunque alla costruzione di un arbitraggio. Nelle premesse, però, si è detto che il prezzo del derivato deve essere tale da evitare l'introduzione di possibilità di arbitraggio nel mercato.

Consideriamo il seguente teorema.

Teorema 1.2. *Sia X un derivato replicabile in un mercato libero da arbitraggi. Allora per ogni strategia replicante $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}$ e per ogni misura martingala Q vale*

$$H_n := V_n^{(\alpha, \beta)} = E^Q \left[X \frac{B_n}{B_N} \mid \mathcal{F}_n \right], \quad n = 0, \dots, N. \quad (1.18)$$

Il processo H definito in (1.18) è detto prezzo d'arbitraggio di X .

Notiamo che vale in particolare

$$H_0 = E^Q \left[\frac{X}{B_N} \right]. \quad (1.19)$$

Dal momento che H_0 è il valore atteso, rispetto ad una misura neutrale al rischio, del payoff scontato si dice anche che H_0 è il *prezzo neutrale al rischio* di X .

Si osservi che nella definizione di prezzo di arbitraggio interviene solo la misura neutrale al rischio Q e non quella fisica P .

Nel caso in cui, invece, un derivato X non fosse replicabile, la definizione (1.18) di prezzo d'arbitraggio perderebbe consistenza. Tuttavia, in un mercato libero d'arbitraggi, per il primo teorema della valutazione, esiste una misura martingala Q , non necessariamente unica. È quindi possibile definire, per ogni fissata misura martingala Q , il processo (H_n^Q) come segue:

$$H_n^Q = \left[X \frac{B_n}{B_N} \mid \mathcal{F}_n \right]. \quad (1.20)$$

La (1.20) definisce, ovviamente in modo non unico, un prezzo per X in base al quale non si introduce sul mercato la possibilità di arbitraggio.

Si osservi che la (1.18) è indipendente dalla misura martingala Q fissata, per cui costituisce una definizione ben posta del prezzo d'arbitraggio, mentre la (1.20) dipende dalla misura martingala scelta: ipoteticamente potrebbero esistere anche infinite misure martingale Q_i rispetto alle quali risulterebbe possibile definire un prezzo per il derivato X .

Non è possibile, quindi, avere una definizione univoca del prezzo con la (1.20).

Il seguente teorema esprime la condizione di replicabilità del derivato X .

Teorema 1.3. *In un mercato libero da arbitraggi, un derivato X è replicabile se e solo se $E^Q \left[\frac{X}{B_N} \right]$ assume lo stesso valore per ogni misura martingala Q .*

Si noti però che i prezzi (1.18) e (1.20) condividono una importante proprietà: sono entrambi definiti in modo tale da non introdurre nel mercato la possibilità di costruire una strategia di arbitraggio. Vale infatti:

Proposizione 1.5. *Per ogni misura martingala Q il mercato costituito dal bond B , dai titoli rischiosi (S^1, \dots, S^d) e da H^Q in (1.20) è libero da arbitraggi.*

Dimostrazione. Dal fatto che \tilde{H}_Q è una Q -martingala segue che anche Q è una misura martingala per il mercato (B, S, H^Q) e dunque la tesi è conseguenza del primo teorema della valutazione. \square

1.3.2 Copertura

Il problema della copertura è un problema dell'emittente di un titolo derivato. Infatti esso consiste nella determinazione di una *strategia replicante*. Per quanto detto in precedenza, risulta chiaro che non sempre è possibile replicare il payoff di un derivato X .

Definizione 1.7. *Si dice mercato completo un mercato in cui ogni titolo derivato X sia replicabile.*

È possibile quindi enunciare il secondo teorema fondamentale della valutazione che dà la condizione di completezza per un modello di mercato.

Teorema 1.4 (Secondo Teorema della Valutazione). *Un mercato libero da arbitraggi è completo se e solo se esiste un'unica misura martingala (con numeraire B).*

Capitolo 2

Il modello binomiale

Nel capitolo precedente si è mostrato come (1.1) e (1.2) formino un modello di mercato discreto. Tuttavia, per risolvere un problema più specifico come quello della valutazione o della copertura, occorre avere a disposizione un modello definito in maniera più precisa, ossia occorre definire la sequenza di variabili aleatorie μ_n , rappresentativa del rendimento dei titoli rischiosi. Segue quindi la descrizione di un modello di mercato completo, il modello binomiale, la valutazione e la copertura per derivati in un tale modello e si affronterà il problema della copertura di un derivato nel caso in cui il capitale iniziale fosse inferiore ad H_0 .

Un modello binomiale è costituito da un bond e da uno stock. Assumiamo che esista un bond B con dinamica (1.1) che abbia tasso privo di rischio a breve termine costante, $r_n = r$, ossia

$$B_n = (1 + r)^n \quad n = 1, \dots, N. \quad (2.1)$$

Inoltre, supponiamo vi sia un unico titolo rischioso S con dinamica (1.2), ossia

$$S_n = S_{n-1}(1 + \mu_n), \quad n = 1, \dots, N$$

in cui le μ_n sono variabili aleatorie identicamente distribuite e indipendenti tali che

$$1 + \mu_n = \begin{cases} u & \text{con probabilità } p, \\ d & \text{con probabilità } 1 - p \end{cases}$$

con $p \in]0, 1[$ e $0 < d < u$.

Nel modello binomiale figurano tre parametri u, d, p i quali devono essere determinati a priori a partire da osservazioni sul mercato oppure in base a dati storici dello stock.

2.1 Esistenza misura martingala e prezzo d'arbitraggio

Abbiamo visto che, per il secondo teorema fondamentale della valutazione, un modello di mercato discreto è completo se esiste, ed è unica, una misura martingala. Vediamo ora quali sono le condizioni che devono essere soddisfatte dai parametri del modello affinché una misura martingala esista nel modello binomiale.

Teorema 2.1. *In un modello binomiale esiste ed è unica una misura martingala Q se è soddisfatta la condizione*

$$d < 1 + r < u. \quad (2.2)$$

Sotto tale condizione, posto

$$q = \frac{1 + r - d}{u - d}, \quad (2.3)$$

la misura Q è definita da

$$Q(1 + \mu_n = u) = 1 - Q(1 + \mu_n = d) = q, \quad (2.4)$$

essendo le variabili aleatorie μ_1, \dots, μ_N Q -indipendenti. Inoltre vale

$$Q(S_n = u^k d^{n-k} S_0) = \binom{n}{k} q^k (1 - q)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n \leq N. \quad (2.5)$$

Dimostrazione. Dalla Definizione 1.5 sappiamo che Q è una misura martingala se e solo se il processo del prezzo scontato \tilde{S} è una martingala, ossia se vale

$$\tilde{S}_{n-1} = E^Q[\tilde{S}_n \mid \mathcal{F}_{n-1}].$$

Equivalentemente

$$S_{n-1}(1+r) = E^Q[S_{n-1}(1+\mu_n) \mid \mathcal{F}_{n-1}] = S_{n-1}E^Q[(1+\mu_n) \mid \mathcal{F}_{n-1}].$$

Semplificando, si ha:

$$\begin{aligned} r &= E^Q[\mu_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= (u-1)Q(\mu_n = u-1 \mid \mathcal{F}) + (d-1)(1-Q(\mu_n = u-1 \mid \mathcal{F})). \end{aligned}$$

In definitiva si ottiene

$$Q(\mu_n = u-1 \mid \mathcal{F}_{n-1}) = \frac{1+r-d}{u-d} = q. \quad (2.6)$$

La condizione (2.2) si ottiene imponendo l'appartenenza di q all'intervallo $]0, 1[$, ossia essa equivale a dire che Q , definita dalla (2.4), è una misura di probabilità equivalente a P . Si noti che (2.6) è una costante reale, da cui segue che le variabili aleatorie μ_1, \dots, μ_N sono indipendenti anche nella misura Q e, di conseguenza, vale (2.5). \square

In base ai teoremi della valutazione, nel caso in cui valga la condizione (2.2), il mercato binomiale è libero da arbitraggi e completo. Ne segue che, per il Teorema 1.2, il prezzo d'arbitraggio di un derivato Q è pari a

$$H_n = \frac{1}{(1+r)^{N-n}} E^Q[X \mid \mathcal{F}_n]. \quad (2.7)$$

2.2 Copertura in un modello binomiale

Il problema della copertura di uno strumento derivato è stato precedentemente descritto e si è messo in evidenza come in un modello di mercato completo ogni derivato sia replicabile, ossia risulta sempre possibile costruire

una strategia di copertura (α, β) con scadenza N qualunque.

Poniamo $V_n = \alpha_n S_n + \beta_n B_n$. Sia S_{N-1} il prezzo del titolo rischioso all'istante $N - 1$, allora i possibili valori finali di S sono due, ossia

$$S_N = \begin{cases} uS_{N-1}, \\ dS_{N-1}. \end{cases}$$

Si ha quindi che la condizione di replicazione $V_N = X$ equivale al sistema

$$\begin{cases} \alpha_N u S_{N-1} + \beta_N B_N = X^u, \\ \alpha_N d S_{N-1} + \beta_N B_N = X^d, \end{cases} \quad (2.8)$$

dove X^u e X^d rappresentano rispettivamente i payoff in caso di crescita e decrescita del sottostante date le informazioni al tempo $N - 1$. Il sistema lineare (2.8) permette di ricavare $\bar{\alpha}_N$ e $\bar{\beta}_N$ e fornisce la strategia da utilizzare al tempo $N - 1$ che assicura la replicazione all'istante finale, ossia

$$\bar{\alpha}_N = \frac{X^u - X^d}{(u - d)S_{N-1}}, \quad \bar{\beta}_N = \frac{uX^d - dX^u}{(1 + r)^N(u - d)}. \quad (2.9)$$

In base alla condizione di autofinanziamento

$$H_{N-1} := V_{N-1} = \bar{\alpha}_N S_{N-1} + \bar{\beta}_N B_{N-1}$$

si determina il prezzo d'arbitraggio del derivato X al tempo $N - 1$. Tale risultato è in accordo con quanto visto in (2.7), in quanto

$$\bar{\alpha}_N S_{N-1} + \bar{\beta}_N B_{N-1} = \frac{qX^u + (1 - q)X^d}{1 + r} = \frac{1}{1 + r} E^Q[X \mid \mathcal{F}_{N-1}].$$

Procedendo a ritroso e ripetendo l'argomento appena utilizzato, è possibile determinare tutta la strategia di copertura fino all'istante iniziale, ossia si arriva a determinare $H_0 := V_0$.

2.2.1 Copertura nel caso in cui $V_0 < H_0$

Si è visto sino ad ora quali siano le condizioni per replicare un derivato X in un modello binomiale e come determinare una strategia di investimento

$(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}$ il cui valore a scadenza coincida con il payoff del derivato. Il valore iniziale di una tale strategia è dato da H_0 , ma se non si disponesse di una tale liquidità?

È chiaro che, nel caso in cui $V_0 < H_0$, non è possibile avere una replicazione perfetta del payoff di un derivato X . Occorre quindi rinunciare e capire se esistano dei criteri che rendano possibile la determinazione di una strategia, tra le $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}$, il cui valore finale si discosti minormente dal payoff che si intende replicare. Il metodo preso in esame che rende possibile la risoluzione di questo problema prevede la minimizzazione di un criterio di rischio, come ad esempio:

- **Minimizzazione del rischio quadratico:** si chiede di determinare una strategia che minimizza

$$E_{S_0, V_0} \left[\left(X - V_N^{(\alpha, \beta)} \right)^2 \right].$$

Questo è un criterio simmetrico che penalizza in maniera eguale uno scarto in eccesso come uno in difetto.

- **Minimizzazione del rischio di shortfall:** si chiede di determinare una strategia che minimizza

$$E_{S_0, V_0} \left[\left(X - V_N^{(\alpha, \beta)} \right)^+ \right].$$

È questo un criterio asimmetrico che penalizza solo gli scarti per difetto.

Si osservi che i due criteri di minimizzazione possono coinvolgere anche la V_0 , qualora non fosse data.

Per risolvere il problema della minimizzazione nel caso pratico si utilizza l'algoritmo della Programmazione Dinamica. Questo permette di determinare una strategia (α, β) autofinanziante con valore V che minimizzi un criterio di rischio

$$E^P[\mathcal{U}(V, S)]$$

dove \mathcal{U} è la funzione da minimizzare.

Per un modello a N periodi l'algoritmo di Programmazione Dinamica si articola in due passi:

1) calcoliamo

$$R_{N-1}(V, S) := \min_{\alpha_N \in I} E^P[\mathcal{U}(V, S)]$$

al variare di S fra i possibili stati di S_{N-1} ;

2) per $n \in \{N-1, N-2, \dots, 1\}$, calcoliamo

$$R_{n-1}(V, S) := \min_{\alpha_n \in J} E^P[R_n(V, S)]$$

al variare di S fra i possibili valori assunti da S_{n-1} .

I e J sono intervalli reali, limitati qualora vi fossero nelle ipotesi preliminari dei vincoli sul valore della strategia (ie $V_n \geq 0$ per ogni n).

La Programmazione Dinamica minimizza la funzione di rischio in ogni intervallo $[t_{n-1}, t_n]$, con $n = 1, \dots, N$, tramite la determinazione degli α_{n+1} . La strategia definita in seguito su un'intera successione di periodi risulterà essere quella ottimale essendo ottimale su ogni singolo periodo.

2.3 Esempio di applicazione

In un modello di mercato binomiale si consideri un'opzione di vendita con payoff $X = (K - S_N)^+$. Si assumano i seguenti valori per i parametri del modello: $S_0 = 1, u = 2, d = 1/2, r = 0, K = 1$ e $N = 2$.

- i) *Si verifichi che il prezzo iniziale dell'opzione è $H_0 = \frac{1}{3}$ e si calcoli il prezzo dell'opzione all'istante $n = 1$ nei due scenari $S_1 = 2$ e $S_2 = \frac{1}{2}$. Si determini inoltre la strategia di copertura (π_1, π_2) ;*
- ii) *supponendo di disporre di un capitale iniziale $V_0 < \frac{1}{3}$, risulta che non è possibile avere copertura perfetta. Ricorrendo all'utilizzo della Programmazione Dinamica si determini allora la strategia autofinanziante (π_1, π_2) in modo da minimizzare il criterio di rischio quadratico*

$$E^P \left[(V_2 - (K - S_2)^+)^2 \right],$$

assumendo $p := P(1 + \mu_n = u) = \frac{1}{2}$;

- iii) utilizzando ancora la Programmazione Dinamica, si determini la strategia autofinanziante in modo da minimizzare il criterio di rischio di shortfall

$$E^P \left[((K - S_2)^+ - V_2)^2 \right],$$

col vincolo $V_n \geq 0, n = 1, 2$.

Si osservi anzitutto che supporre che il tasso privo di rischio sia nullo, $r = 0$, significa sostanzialmente che il processo del titolo non rischioso è un processo costante, ossia che $B_n = 1$ per ogni $n = 0, 1, 2$, e, di conseguenza, che il processo del titolo rischioso S è coincidente con il processo scontato \tilde{S} . Inoltre, ricordando la (1.13), riconosciamo che la determinazione di π_n^0 è superflua.

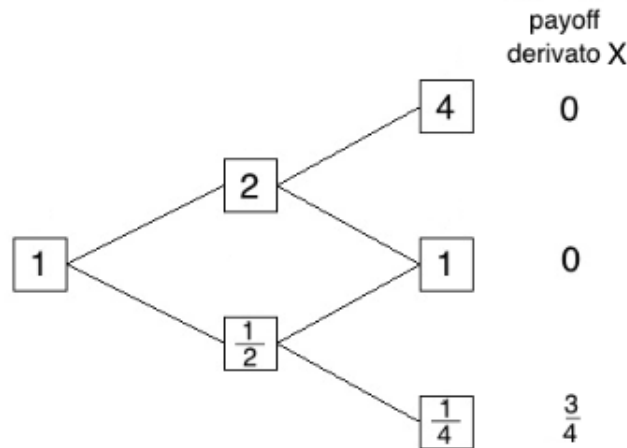


Figura 2.1: Prezzo del sottostante (nei quadrati) e payoff a scadenza del derivato

Punto i) Dal Teorema 2.1 si sa che in un modello binomiale è possibile definire un'unica misura martingala nel modo seguente

$$q = \frac{1 + r - d}{u - d} = \frac{1}{3}.$$

Risulta quindi possibile determinare il prezzo di arbitraggio H_0 tramite la (1.19)

$$\begin{aligned} H_0 &= E^Q[(1 - S_2)^+] \\ &= q^2(1 - u^2)^+ + 2q(1 - q)(1 - ud)^+ + (1 - q)^2(1 - d^2)^+ \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Determinare poi il prezzo dell'opzione all'istante $n = 1$ equivale sostanzialmente a calcolare l'attesa condizionata del payoff rispetto al verificarsi della crescita o decrescita del titolo S_0 nell'intervallo temporale $[0, 1]$. Infatti:

$$H_1^u := E^Q[X \mid S_1 = u] = q(1 - u^2)^+ + (1 - q)(1 - ud)^+ = 0.$$

$$H_1^d := E^Q[X \mid S_1 = d] = q(1 - ud)^+ + (1 - q)(1 - d^2)^+ = 0.$$

Ricordando (2.9), la utilizziamo per ricavare α :

$$\alpha_1 = \frac{H_1^u - H_1^d}{S_0(u - d)} = -\frac{1}{3},$$

mentre, per determinare β , utilizziamo la definizione stessa di valore di portafoglio:

$$\beta_1 = H_0 - \alpha_1 S_0 = \frac{2}{3}.$$

Nel secondo periodo, ossia per $n = 2$, dobbiamo determinare i valori di α_2 e β_2 i quali sono vincolati dalle determinazioni di S_1 .

Nel caso $S_1 = u$, vale che $H_2^{uu} = H_2^{ud} = 0$, da cui si ha:

$$\alpha_2^u = \beta_2^u = 0.$$

Nel caso $S_1 = d$, si ha che

$$\alpha_2^d = \frac{H_2^{du} - H_2^{dd}}{d(u - d)} = \frac{0 - \frac{3}{4}}{\frac{1}{2}(2 - \frac{1}{2})} = -1$$

e ricaviamo β_2^d usando ancora la condizione di autofinanziamento

$$\beta_2^d = H_1^d - \alpha_2^d d = 1.$$

Ricordando la definizione (1.11) di portafoglio relativo e usando la notazione $\pi_n = \pi_n^i$, si ha

$$\pi_1 = \frac{\alpha_1 S_0}{H_0} = -1$$

e, inoltre,

$$\pi_2^u = 0, \quad \pi_2^d = \frac{\alpha_2^d d}{H_1^d} = -1.$$

Punto ii) In base a quanto visto in (1.13), ricordando che in questo caso $r = 0$, la dinamica del valore V di una strategia autofinanziante (π_1, π_2) è data da

$$V_n = V_{n-1}(1 + \pi_n \mu_n) = \begin{cases} V_{n-1}(1 + \pi_n(u - 1)) = V_{n-1}(1 + \pi_n), \\ V_{n-1}(1 + \pi_n(d - 1)) = V_{n-1}(1 + \frac{\pi_n}{2}), \end{cases} \quad (2.10)$$

per $n = 1, 2$.

Per quanto visto nel precedente paragrafo, si ricorre all'algoritmo della Programmazione Dinamica per minimizzare il rischio quadratico. Questa si articola in due passi, il primo dei quali consiste nel calcolare

$$R_1(V, S_1) := \min_{\pi_2 \in \mathbb{R}} E^P \left[(V(1 + \pi_2 \mu_2) - (K - S_1(1 + \mu_2)))^+ \right]^2$$

nei due stati $S_1 = u$ e $S_1 = d$.

Consideriamo il caso in cui $S_1 = u = 2$. Si ha

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{2} \min_{\pi_2 \in \mathbb{R}} \left(V^2(1 + \pi_2)^2 + V^2 \left(1 - \frac{\pi_2}{2} \right)^2 \right) \\ &= \frac{V^2}{8} \min_{\pi_2 \in \mathbb{R}} (5\pi_2^2 + 4\pi_2 + 8). \end{aligned}$$

Ora, $5\pi_2^2 + 4\pi_2 + 8$ assume il suo valore minimo in $\pi_2^u = -\frac{2}{5}$, da cui risulta

$$R_1(V, 2) = \frac{9V^2}{10}. \quad (2.11)$$

Nel caso in cui, invece, $S_1 = d = \frac{1}{2}$, si ha

$$\begin{aligned} R_1 \left(V, \frac{1}{2} \right) &= \frac{1}{2} \min_{\pi_2 \in \mathbb{R}} \left(V^2(1 + \mu_2)^2 + \left(\frac{3}{4} - V \left(1 - \frac{\pi_2}{2} \right) \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{32} \min_{\pi_2 \in \mathbb{R}} (20V^2\pi_2^2 + (16V^2 + 12V)\pi_2 + 32V^2 - 24V + 9). \end{aligned}$$

Il punto di minimo in questo caso risulta essere $\pi_2^d = -\frac{4V+3}{10V}$ da cui si ha

$$R_1\left(V, \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{40}(2V-1)^2. \quad (2.12)$$

Nel secondo passo dell'algoritmo PD, calcoliamo

$$R_0(V, S_0) := \min_{\pi_1 \in \mathbb{R}} E^P[R_1(V(1 + \pi_1\mu_1), S_0(1 + \mu_1))].$$

Si ha, utilizzando le espressioni (2.11) e (2.12),

$$\begin{aligned} R_0(V, 1) &= \frac{1}{2} \min_{\pi_1 \in \mathbb{R}} \left(R_1(V(1 + \pi_1), 2) + R_1\left(V\left(1 - \frac{\pi_1}{2}\right), \frac{1}{2}\right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \min_{\pi_1 \in \mathbb{R}} \left(\frac{9}{10}V^2(1 + \pi_1)^2 + \frac{9}{40}\left(2V\left(1 - \frac{\pi_1}{2} - 1\right)\right) \right) = \\ &= \min_{\pi_1 \in \mathbb{R}} \frac{9}{40} \left[\frac{5V^2}{2}\pi_1^2 + (2V^2 + V)\pi_1 + 4V^2 - 2V + \frac{1}{2} \right] \end{aligned}$$

con minimo in $\pi_1 = -\frac{2V+1}{5V}$, da cui risulta

$$R_0(V, 1) = \frac{9}{100}(3V-1)^2.$$

In definitiva, partendo da un capitale iniziale V , la strategia che minimizza il rischio quadratico è data da

$$\pi_1 = -\frac{2V+1}{5V}, \quad \pi_2^u = -\frac{2}{5}, \quad \pi_2^d = -\frac{4V+3}{10V}. \quad (2.13)$$

Grazie alla (2.10) è possibile calcolare il valore di tale strategia, rappresentato nella seguente figura.

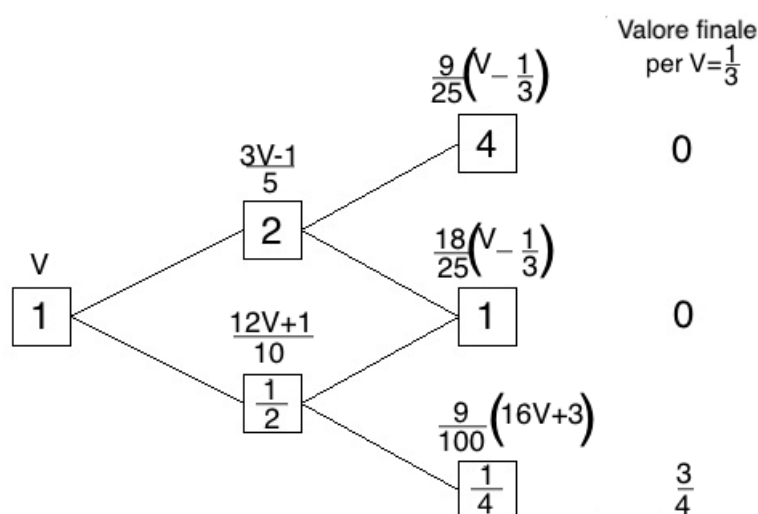


Figura 2.2: Prezzo del sottostante (nei quadrati) e valore strategia che minimizza il rischio quadratico (sopra ai quadrati)

Si noti che se il capitale iniziale è pari a $V = H_0 = \frac{1}{3}$, allora la replicazione è perfetta (il valore finale per $V = \frac{1}{3}$ coincide con quello del payoff del derivato, rappresentato precedentemente in Figura 2.1). Nelle nostre ipotesi di partenza, ossia nel caso $V < \frac{1}{3}$, il valore finale della strategia è sempre minore del payoff del derivato X .

Punto iii) Si vuole procedere come fatto nel punto ii), ma, anzitutto, occorre esplicitare il vincolo sul valore della strategia (2.10) che si chiede essere non negativa in ogni periodo, $V_n \geq 0, n = 1, 2$. In un portafoglio replicante tale vincolo si traduce in

$$1 + \pi_n \geq 0 \quad e \quad 1 - \frac{\pi_n}{2} \geq 0 \quad \Rightarrow \pi_n \in [-1, 2] \text{ per } n = 1, 2.$$

Procediamo ora come fatto in precedenza. Come prima cosa calcoliamo

$$R_1(V, S_1) := \min_{\pi_2 \in [-1, 2]} E^P \left[\left((K - S_1(1 + \mu_2))^+ - V(1 + \pi_2 \mu_2) \right)^+ \right]$$

nelle due determinazioni di S_1 .

Nel caso in cui $S_1 = u = 2$ si ha

$$\begin{aligned} R_1(V, 2) &= \frac{1}{2} \min_{\pi_2 \in [-1, 2]} \left((-V(1 + \pi_2))^+ + \left(-V \left(1 - \frac{\pi_2}{2} \right) \right)^+ \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nel caso in cui, invece, $S_1 = d = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} R_1 \left(V, \frac{1}{2} \right) &= \frac{1}{2} \min_{\pi_2 \in [-1, 2]} \left((-V(1 + \pi_2))^+ + \left(\frac{3}{4} - V \left(1 - \frac{\pi_2}{2} \right) \right)^+ \right) \\ &= \frac{1}{2} \min_{\pi_2 \in [-1, 2]} \left(\frac{3}{4} - V \left(1 - \frac{\pi_2}{2} \right) \right)^+. \end{aligned}$$

Il minimo è assunto in $\pi_2 = -1$, da cui si ha

$$R_1 \left(V, \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} - V \right)^+.$$

Nel secondo passo dell'algoritmo della PD si calcola

$$R_0(V, S_0) := \min_{\pi_1 \in [-1, 2]} E^P [R_1(V(1 + \pi_1 \mu_1), S_0(1 + \mu_1))].$$

Ricordando che $S_0 = 1$ si ha

$$\begin{aligned} R_0(V, S_0) &= \frac{1}{2} \min_{\pi_1 \in [-1, 2]} \left(R_1(V(1 + \pi_1), 2) + R_1 \left(V \left(1 - \frac{\pi_1}{2} \right), \frac{1}{2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \min_{\pi_1 \in [-1, 2]} \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} - V \left(1 - \frac{\pi_1}{2} \right) \right)^+ \\ &= \frac{9}{16} \left(\frac{1}{3} - V \right)^+, \end{aligned}$$

essendo ancora una volta il minimo assunto in $\pi_1 = -1$.

In definitiva, partendo da una quantità iniziale V , la strategia che minimizza il rischio di shortfall è data da

$$\pi_1 = -1, \quad \pi_2^u = 0, \quad \pi_2^d = -1.$$

Come fatto in precedenza, il valore della strategia si calcola tramite la (2.10) e tale valore è rappresentato nella seguente figura.

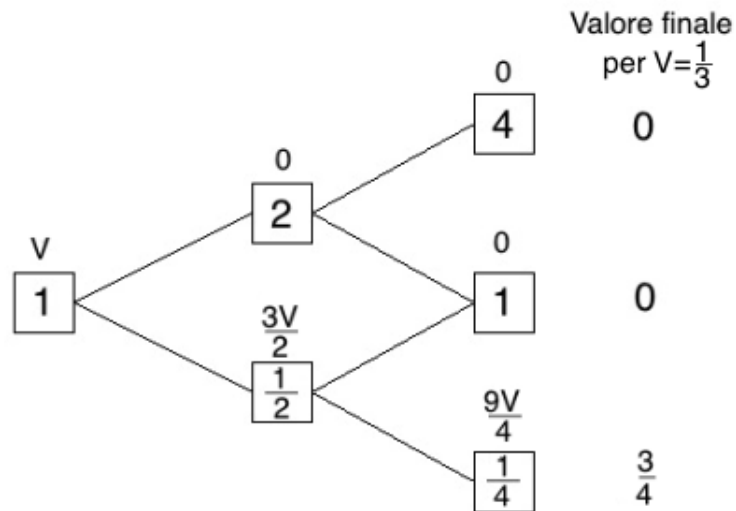


Figura 2.3: Prezzo del sottostante (nei quadrati) e valore della strategia che minimizza il rischio di shortfall

In questo caso, se il capitale iniziale è pari a $V = H_0 = \frac{1}{3}$, la replicazione risulta essere perfetta ancora una volta in ogni scenario possibile. Nel caso in cui $V < \frac{1}{3}$, la strategia determinata replica il payoff del derivato in due scenari, ossia per $S_2 = u^2$ e $S_2 = ud$. Non lo replica, invece, nello scenario $S_2 = d^2$.

2.3.1 Osservazioni

L'esempio di applicazione visto permette di notare come l'errore di replicazione venga distribuito in maniera differente nei due metodi di minimizzazione quadratica e del rischio di shortfall: il primo lo distribuisce fra tutti i possibili scenari finali; il secondo, invece, lo concentra in un unico scenario, ossia quello che si verifica nel caso $S_2 = d^2$.

Per confrontare ulteriormente i due metodi di minimizzazione possiamo determinare l'errore medio di replicazione $E^P[V_N - X]$, facilmente calcolabile guardando le Figure 2.2 e 2.3. Infatti, nel caso quadratico, ricordando che

$$p = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} E^P[V_N - X] &= p^2 \left(\frac{9}{25} \left(V - \frac{1}{3} \right) - 0 \right) + p(1-p) \left(\frac{18}{25} \left(V - \frac{1}{3} \right) - 0 \right) \\ &\quad + (1-p)^2 \left(\frac{9}{100} (16V + 3) - \frac{3}{4} \right) = \frac{27}{100} (3V - 1), \end{aligned}$$

mentre, nel caso shortfall

$$\begin{aligned} E^P[V_N - X] &= (1-p)^2 \left(\frac{9V}{4} - \frac{3}{4} \right) \\ &= \frac{3}{16} (3V - 1). \end{aligned}$$

Confrontando i due valori risulta che l'errore di replicazione nel caso di shortfall è minore.

Appendice A

A.1 Spazi di probabilità

Uno spazio di probabilità è una terna (Ω, \mathcal{F}, P) di elementi. In particolare Ω è un insieme non vuoto, $\Omega \neq \emptyset$, detto *spazio campione*, nel quale ogni elemento ω è rappresentativo di un possibile stato di un fenomeno, come ad esempio il prezzo di un titolo azionario. \mathcal{F} è una σ -algebra che si definisce formalmente come:

Definizione A.1. Una σ -algebra \mathcal{F} è una famiglia di sottoinsiemi Ω tale che:

- i) $\emptyset \in \mathcal{F}$;
- ii) se $F \in \mathcal{F}$ allora $F^c := (\Omega \setminus F) \in \mathcal{F}$;
- iii) per ogni successione $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di elementi di \mathcal{F} , $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{F}$.

Si osservi che l'intersezione di σ -algebre è ancora una σ -algebra per cui è possibile definire, a partire da una famiglia \mathcal{M} di sottoinsiemi di Ω ,

$$\sigma(\mathcal{M}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{F} \text{ } \sigma\text{-algebra} \\ \mathcal{F} \supseteq \mathcal{M}}} \mathcal{F}$$

e $\sigma(\mathcal{M})$ è la σ -algebra generata da \mathcal{M} . Essendo intersezione di tutte le σ -algebre contenenti \mathcal{M} , $\sigma(\mathcal{M})$ è la più piccola σ -algebra contenente \mathcal{M} .

Esempio A.1. La σ -algebra dei Borelliani $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ è la σ -algebra generata dalla topologia Euclidea di \mathbb{R}^N , ossia

$$\mathcal{B} := \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) = \sigma(\{A \mid A \text{ aperto di } \mathbb{R}^N\}).$$

Infine, P è una applicazione definita sulla σ -algebra \mathcal{F} , detta misura di probabilità:

Definizione A.2. Una misura di probabilità P sulla σ -algebra \mathcal{F} di Ω è un'applicazione

$$P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$$

tale che:

i) $P(\emptyset) = 0$;

ii) per ogni successione $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di elementi di \mathcal{F} , a due a due disgiunti, vale

$$P\left(\bigcup_{n \geq 1} F_n\right) = \sum_{n \geq 1} P(F_n);$$

iii) $P(\Omega) = 1$.

Un elemento di \mathcal{F} è chiamato *evento* e $P(E)$ è detta *probabilità dell'evento* E . Sostanzialmente, immaginando \mathbb{R}_+ essere lo spazio campione in esame, ossia rappresentativo, ad esempio, dell'insieme dei possibili prezzi di un titolo rischioso, allora $P(]a, b[)$ rappresenta la probabilità che il prezzo sia maggiore di a e minore di b .

A.2 Variabili aleatorie e valore atteso

Definizione A.3. Una variabile aleatoria sullo spazio di probabilità (Ω, \mathcal{F}, P) è una funzione misurabile X da Ω a valori in \mathbb{R}^N , ossia una funzione

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N \quad t.c. \quad X^{-1}(H) \in \mathcal{F}, \quad H \in \mathcal{B}.$$

È possibile definire, a partire da una variabile aleatoria, una misura di probabilità ad essa associata, la quale, in particolare, è una distribuzione in quanto definita su $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B})$. Tale distribuzione assegna ad ogni sottoinsieme dell'insieme dei possibili valori di X la probabilità che la variabile aleatoria assuma valore in esso.

Definizione A.4. *Data una variabile aleatoria X , definiamo l'applicazione*

$$P^X : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$$

ponendo

$$P^X(H) = P(X^{-1}(H)), \quad H \in \mathcal{B}.$$

È facile verificare che P^X è una distribuzione detta *distribuzione (o legge) di X* e scriviamo

$$X \sim P^X.$$

Di fondamentale importanza nell'utilizzo delle variabili aleatorie è la determinazione del loro *valore atteso*, il quale corrisponde intuitivamente ad una media di valori assunti da X , pesati rispetto alla probabilità P .

Formalmente:

Definizione A.5. *Data una variabile aleatoria $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ sommabile, il valore atteso di X è il vettore di \mathbb{R}^N*

$$E[X] := \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega). \quad (\text{A.1})$$

Nel caso X fosse una variabile aleatoria discreta, vale

$$\int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega) = \sum_{k=1}^n \alpha_k P(A_k) \quad (\text{A.2})$$

ove $\alpha_k \in X(\Omega) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ e $A_k = X^{-1}(\alpha_k)$.

Si osservi che generalmente il valore atteso di una variabile aleatoria X , essendo una media, non coincide con il valore più probabile di X , soddisfa le

proprietà di linearità e monotonia ed il valore atteso di una costante coincide con la costante stessa.

Data una variabile aleatoria è possibile definire la σ -algebra da questa generata come segue:

Definizione A.6. *Data una variabile aleatoria X sullo spazio di probabilità (Ω, \mathcal{F}, P) , indichiamo con $\sigma(X)$ la σ -algebra generata da X ossia la σ -algebra generata dalle contro-immagini mediante X dei Borelliani, ossia*

$$\sigma(X) = \sigma(\{X^{-1}(H) \mid H \in \mathcal{B}\}).$$

A.3 Attesa condizionata

Nel modello di mercato che verrà esposto in seguito, il prezzo di un titolo rischioso è generalmente descritto da una variabile aleatoria X e l'insieme di informazioni disponibili in un determinato istante temporale è descritto da una σ -algebra \mathcal{S} . Sarà quindi importante capire come le informazioni contenute in \mathcal{S} si ripercuotono sulla variabile aleatoria X . Per fare ciò risulta utile la seguente definizione:

Definizione A.7. *Sia X una variabile aleatoria reale sommabile sullo spazio di probabilità (Ω, \mathcal{F}, P) e sia \mathcal{S} una σ -algebra contenuta in \mathcal{F} . Sia Y una variabile aleatoria tale che*

i) Y è sommabile e \mathcal{S} -misurabile;

ii) $\int_A X dP = \int_A Y dP$ per ogni $A \in \mathcal{S}$.

Allora diciamo che Y è una versione dell'attesa di X condizionata a \mathcal{S} e scriviamo $Y = E[X \mid \mathcal{S}]$.

A.4 Processi stocastici

Nel corso delle seguenti definizioni si indicherà con $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ l'insieme dei numeri interi non negativi.

Definizione A.8. Un processo stocastico discreto in \mathbb{R}^N è una famiglia di variabili aleatorie $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ definite su uno spazio di probabilità (Ω, \mathcal{F}, P) a valori in \mathbb{R}^N , ossia:

$$X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

La famiglia di σ -algebre $(\mathcal{F}_n^X)_{n \in \mathbb{N}_0}$ definita da

$$\mathcal{F}_n^X = \sigma(X_k, 0 \leq k \leq n),$$

si dice *filtrazione naturale* per X .

In generale una filtrazione sullo spazio di probabilità (Ω, \mathcal{F}, P) è una famiglia $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ crescente di sotto- σ -algebre di \mathcal{F} , ossia una famiglia tale che $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$.

Il processo X si dice *adattato alla filtrazione* (\mathcal{F}_n) se X_n è \mathcal{F}_n -misurabile o, equivalentemente, se $\mathcal{F}_n^X \subseteq \mathcal{F}_n$.

Solitamente, nelle applicazioni, i processi stocastici vengono utilizzati per descrivere l'evoluzione temporale di un fenomeno aleatorio e l'indice n rappresenta la variabile temporale. Dal momento che $n \in \mathbb{N}_0$, il processo stocastico X della precedente definizione è un *processo stocastico a tempo discreto*.

La seguente classe di processi stocastici gioca un ruolo centrale nella teoria della probabilità così come nelle applicazioni finanziarie.

Definizione A.9. Sia $M = (M_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ un processo stocastico sommabile e adattato nello spazio di probabilità con filtrazione $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_n)$. Diciamo che M è una *martingala* se

$$M_n = E[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n], \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Si osservi che la proprietà di martingala dipende sia dalla filtrazione che dalla probabilità P considerate. Inoltre, le martingale sono dei processi in media costante.

Bibliografia

- [1] Andrea Pascucci, Wolfgang J. Runggaldier (2009). *Finanza Matematica. Teoria e problemi per modelli multiperiodali.*
- [2] Andrea Pascucci (2008). *Calcolo stocastico per la finanza*