

**ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITA' DI BOLOGNA**

SCUOLA DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA
- Sede di Forlì -

CORSO DI LAUREA
IN INGEGNERIA AEROSPAZIALE
Classe: L-9

ELABORATO FINALE DI LAUREA
in
FLUIDODINAMICA

**Controllo del flusso termico in convezione mista
tramite fluidi visco-elastici**

Candidato:
Michele Manfroni

Relatore:
Prof.ssa Elisabetta De Angelis

**Anno Accademico 2012/2013
Sessione II**

Indice

1. Introduzione	4
2. Struttura della tesi	5
1 Il moto convettivo	
1. Generalità.	6
2. Convezione naturale.	7
3. Convezione mista.	9
4. Flussi in convezione di Rayleigh-Bènard.	10
5. I numeri caratteristici.	12
6. L'approssimazione di Boussinesq.	15
7. Condizioni al contorno.	18
8. Cascata di energia.	19
9. Tipi di flussi convettivi e strutture coerenti.	22
2 Modellazione di un fluido viscoelastico	
1. Comportamento generale delle soluzioni polimeriche.	27
2. Parametri adimensionali.	30
3. Modelli di fluidi viscoelastici.	31
3.1 Il modello bead spring.	31
4. Conoscenze attuali.	34
3 Risultati	
1. Setup numerico e parametri rilevanti.	36
2. Analisi del flusso e delle strutture coerenti.	39
2.1 Effetti dell'introduzione di polimeri in soluzione in convezione naturale.	39
2.2 Analisi di un flusso turbolento Newtoniano in convezione mista.	42
2.3 Effetti della variazione del numero di Deborah su flussi turbolenti viscoelastici in convezione mista.	44
3. Analisi statistiche.	48
3.1 Variazione dei profili statistici di fluidi Newtoniani e visco-elastici in convezione naturale.	50

3.2	Variazione dei profili statistici di un fluido Newtoniano in convezione mista.	53
3.3	Variazione dei profili statistici di fluidi viscoelastici in convezione mista.	55
4	Conclusioni.	64
5	Bibliografia.	68
	Appendice	

Introduzione

Obiettivo della tesi è valutare qualitativamente e statisticamente l'effetto della variazione del numero di Deborah di un flusso di Rayleigh-Bènard-Poiseuille in regime turbolento e stazionario, osservato a diversi valori del gradiente di pressione esterno, sui campi di velocità, temperatura e sulla distribuzione dei vortici nel flusso, mediante l'analisi di dati ottenuti tramite simulazioni numeriche dirette (Direct Numerical Simulation, DNS). Il problema in esame viene dapprima risolto considerando un fluido Newtoniano viscoso e successivamente alcune soluzioni viscoelastiche, caratterizzate da tempi di rilassamento delle catene polimeriche differenti, per valutare come la presenza del soluto influenzi il trasporto di calore attraverso un flusso turbolento, evidenziando a livello qualitativo il cambiamento delle strutture caratteristiche delle rilevanti qualità fisiche.

La simulazione numerica diretta permette di risolvere tutte le scale della turbolenza, risolvendo le equazioni di Navier-Stokes senza modelli, con una rappresentazione esatta del campo turbolento e della sua evoluzione temporale. Per effettuare questa simulazione la potenza di calcolo da sfruttare è proporzionale a $Re^{\frac{9}{4}}$, per cui si può realizzare, oltre che per geometrie poco complesse, solo per numeri di Reynolds bassi (10^3 - 10^4) rispetto alle necessità applicative.

Il ruolo svolto dal numero di Reynolds nella convezione forzata (o in generale in qualsiasi flusso) viene svolto dal numero di Rayleigh nella convezione naturale. Calibrando opportunamente questo parametro è possibile generare numericamente un flusso turbolento in regime di convezione naturale. In particolare, i risultati descritti in questa tesi sono stati ottenuti con delle simulazioni a $Ra=10^5$, un valore appena superiore a quello critico, a partire dal quale si manifesta la turbolenza.

Lo studio della convezione turbolenta in fluidi viscoelastici, che solo da pochi anni ha attirato l'interesse della comunità scientifica, è motivato dall'ipotesi che l'aggiunta di polimeri in un flusso turbolento dato modifichi profondamente le strutture coerenti che si sviluppano nel flusso stesso e, dunque, il trasporto di calore.

Il vantaggio di simulare numericamente l'evoluzione dei flussi viscoelastici, in un regime così definito, è la possibilità di ottenere le caratteristiche del loro campo di moto, gli andamenti delle tensioni e degli

scambi di forze o la conformazione delle molecole polimeriche, che non si possono rilevare attraverso gli esperimenti.

Perciò, attraverso il confronto qualitativo delle caratteristiche topologiche delle celle convettive e delle modifiche apportate dai polimeri nell'organizzazione delle piume termiche e delle strutture vorticose, sarà possibile fornire una spiegazione alle variazioni dell'efficienza del trasporto di calore convettivo, a supporto delle variazioni quantitative estratte dall'analisi statistica dei dati.

Struttura della tesi

In questa tesi il problema della convezione mista viene studiato con tecniche di simulazione numerica diretta ed integrato con un modello reologico di un fluido viscoelastico. Per rendere, quindi, comprensibili i risultati ottenuti sono necessarie delle premesse che approfondiscano le caratteristiche fisiche del problema analizzato.

In particolare, nel Capitolo 1 sarà illustrato il problema della convezione mista, attraverso la descrizione qualitativa e matematica delle strutture fisiche e dei processi energetici che lo caratterizzano. Il Capitolo 2 è una sintesi delle proprietà dei fluidi viscoelastici e delle procedure di base per lo sviluppo di un modello da implementare nella simulazione numerica. Nel Capitolo 3, attraverso i risultati ottenuti in termini di campi medi e grandezze statistiche e visualizzazioni tridimensionali dei campi di moto e delle strutture coerenti, si mostrano gli effetti dei fluidi viscoelastici sui meccanismi della convezione naturale e si valuta il flusso termico. Nell'ultimo capitolo, infine, si riportano le osservazioni conclusive.

Capitolo 1

Il moto convettivo

1.1 Generalità

La convezione è uno dei tre meccanismi (insieme a conduzione e irraggiamento) mediante i quali si ha trasferimento di energia termica tra due sistemi o tra due punti di uno stesso sistema a differente temperatura. La grandezza in transito è detta calore o energia termica: è bene chiarire subito che l'energia termica fluisce sempre dalla zona a temperatura maggiore verso quella a temperatura minore in accordo con il secondo principio della termodinamica. A differenza della conduzione e dell'irraggiamento, per i quali lo scambio termico è dovuto esclusivamente alla differenza di temperatura, la convezione comporta anche un trasporto di materia. In particolare, la convezione è un processo di trasporto di energia mediante l'azione combinata della conduzione e del trasporto di materia ed è il più importante meccanismo di scambio di energia tra una superficie solida e un mezzo fluido. La trasmissione di energia per convezione tra una superficie solida e un mezzo fluido circostante avviene per passi successivi: dapprima il calore passa per conduzione dalla superficie alle particelle di fluido a essa adiacente, poi queste ultime si muovono verso regioni di fluido a temperatura minore. Lo scambio termico convettivo si differenzia a seconda se il moto è indotto da forze che agiscono in seno al fluido stesso o è causato da qualche agente esterno, quale ad esempio un ventilatore. Nel primo caso si parla di convezione naturale, nel secondo caso di convezione forzata. Esempi di convezione naturale sono la sensazione di caldo che si avverte quando si avvicina la mano a una superficie riscaldata e il trasferimento di calore da un elemento riscaldata all'ambiente circostante, mentre la sensazione di fresco che si prova quando si è investiti da una corrente d'aria mossa da un ventilatore e il raffreddamento di un motore o di un computer, sono esempi di convezione forzata.

Poiché lo scambio termico convettivo è caratterizzato dal moto del fluido, è fondamentale un'analisi fluidodinamica al fine di stabilire se il moto è di tipo laminare o di tipo turbolento. Nel moto laminare ogni particella fluida

segue un cammino regolare e continuo; nel moto turbolento, invece, le particelle di fluido presentano traiettorie irregolari e il moto d'insieme è caotico e vorticoso. Un esempio tipico di moto laminare è rappresentato dal getto filiforme a bassa velocità che fluisce da un rubinetto con modesta apertura; si può osservare che al crescere dell'apertura del rubinetto il getto aumenta la sua velocità e con essa la sua forma irregolare: si ha così il passaggio dal moto laminare al moto turbolento.

I problemi di trasmissione del calore si differenziano, oltre che per i meccanismi di scambio termico coinvolti, anche per il tipo di regime. In particolare, un processo è a regime stazionario o permanente quando la temperatura in ciascun punto non dipende dal tempo: basti pensare al trasferimento di energia termica da una lampadina all'atmosfera circostante, oppure all'energia termica trasferita da un fluido caldo a un fluido freddo in uno scambiatore di calore. Viceversa, un processo è a regime non stazionario o transitorio quando la temperatura in qualche punto varia nel tempo: esempi di processi transitori sono l'avviamento di forni o caldaie e il trattamento termico di pezzi fusi.

1.2 La convezione naturale

La convezione naturale è dovuta esclusivamente a forze che agiscono nel fluido stesso, quali la tensione superficiale, la forza elettromagnetica, centrifuga, di gravità. Nella maggior parte dei casi le forze responsabili della convezione naturale si riducono alla sola forza di gravità; quest'ultima, in seguito a differenze di densità, indotte da gradienti di temperatura, genera il moto del fluido. Più precisamente, la forza responsabile del moto del fluido prende il nome di forza di galleggiamento, ed è pari a:

$$F_g = \Delta\rho g L^3 \quad (1.1)$$

dove $\Delta\rho$ (kg/m^3) è la variazione di densità, g (m/s^2) è l'accelerazione di gravità e L (m) è una lunghezza caratteristica. Detto β ($1/\text{K}$) il coefficiente di dilatazione termica a pressione costante, la variazione di densità $\Delta\rho$ è

pari a:

$$\Delta\rho = \rho \beta \Delta T \quad (1.2)$$

dove ρ (kg/m^3) è la densità del fluido alla temperatura di riferimento e ΔT (K) è la variazione di temperatura rispetto a quella di riferimento.

Sostituendo la (1.2) nella (1.1) si ha:

$$F_g = \rho g \beta \Delta T L^3 \quad (1.3)$$

Da quanto detto deriva che un gradiente termico infinitesimo potrebbe provocare un moto convettivo. Quest'affermazione, però, è contraddetta dall'osservazione sperimentale da cui si evince che esiste un valore di soglia, al di sopra del quale il moto convettivo s'instaura. Ciò è dovuto al fatto che nello studio della convezione naturale è necessario considerare almeno due effetti dissipativi: lo scambio termico per conduzione e la resistenza viscosa. Lo scambio termico diffusivo tende ad annullare il gradiente termico che è l'origine del flusso convettivo; lo sforzo viscoso, invece, non consente il moto del fluido finché esso si mantiene maggiore della forza di galleggiamento.

Un parametro che ci consente di confrontare queste ultime due grandezze è il *numero adimensionale di Rayleigh* che misura proprio l'importanza delle forze di galleggiamento rispetto alle forze viscosi:

$$Ra = \text{Forze di galleggiamento} / \text{Forze viscosi}$$

Tenendo presente la legge di Newton:

$$\tau = - \mu dV/dy \quad (1.4)$$

dove τ (N/m^2) è lo sforzo viscoso, μ (kg/ms) è la viscosità dinamica e dV/dy ($1/\text{s}$) è la variazione della velocità del fluido in direzione normale a quella del moto, la forza viscosa F_v è dell'ordine di:

$$F_v \approx \mu VL^2/L \approx \mu a L^2/L^2 \quad (1.5)$$

dove V (m/s) è la velocità del fluido e a (m^2/s) è la sua diffusività termica.

Dal rapporto tra la (1.3) e la (1.5) si ottiene il numero di Rayleigh:

$$Ra = \rho g \beta \Delta T L^3 / \mu a = g \beta \Delta T L^3 / \nu a \quad (1.6)$$

dove $\nu = \mu / \rho$ (m^2/s) è la viscosità cinematica.

Quando il numero di Rayleigh è maggiore di un valore limite (Ra_{lim}), dipendente dalla geometria, le forze di galleggiamento predominano sulle forze viscosi e quindi si ha convezione [5].

1.3 La convezione mista

La convezione mista si ha quando, alle forze che agiscono nel fluido stesso, si sommano forze esterne che contribuiscono, in maniera più o meno marcata, al movimento del fluido e quindi allo scambio termico convettivo. Qualora le forze interne al fluido siano trascurabili rispetto alle forze imposte dall'esterno, allora non si parla più di convezione mista, bensì di convezione forzata. I modi di interagire dei due meccanismi convettivi sono molteplici, per tale motivo limitiamo l'attenzione a un caso semplice. Consideriamo una parete verticale riscaldata, lambita da un fluido in determinate condizioni di temperatura e velocità. Detto δT (m) lo strato limite termico¹, in convezione naturale esso è dell'ordine di:

$$(\delta T)_{cn} \approx y Ra_y^{1/4} \quad (1.7)$$

dove y (m) è la distanza dal bordo di attacco della parete e Ra è il già definito numero di Rayleigh, mentre in convezione forzata esso è dell'ordine di:

$$(\delta T)_{cf} \approx y Re_y^{-1/2} Pr^{-1/3} \quad (1.8)$$

dove Re è il numero adimensionale di Reynolds² e Pr è il numero adimensionale di Prandtl³.

Dato che:

se $(\delta T)_{cn} < (\delta T)_{cf}$, convezione naturale

se $(\delta T)_{cn} > (\delta T)_{cf}$, convezione forzata

si ha che quando $(\delta T)_{cn} \approx (\delta T)_{cf}$ siamo in condizioni di convezione mista. Più in generale possiamo far riferimento al *numero adimensionale di Richardson* che misura l'importanza delle forze di galleggiamento rispetto alle forze d'inerzia:

$$Ri = \text{Forze di galleggiamento} / \text{Forze di inerzia}$$

Tenendo presente che la forza d'inerzia è dell'ordine di:

$$F_i \approx \rho V^2 L^2 \quad (1.9)$$

dal rapporto tra la (1.3) e la (1.9) si ottiene il numero di Richardson:

$$Ri = \rho g \beta \Delta T L^3 / \rho V^2 L^2 = g \beta \Delta T L / V^2 \quad (1.10)$$

Maggiore risulta il numero di Richardson, maggiore è l'importanza della convezione naturale rispetto a quella forzata.

1.4 Flussi in convezione di Rayleigh-Bènard

La convezione generata da un riscaldamento non uniforme è, senza dubbio, il tipo di moto dei fluidi più diffuso in natura e da un punto di vista applicativo e ingegneristico, i flussi guidati da gradienti di temperatura hanno un'indiscussa importanza. La convezione in uno strato piano orizzontale riscaldato dal basso, o *convezione di Rayleigh-Bènard*, è un problema classico della fluidodinamica. Bènard [3], portando avanti i suoi esperimenti all'inizio del secolo scorso, osservò, in un sottile strato orizzontale di spermaceti fusi, la formazione di uno schema regolare e stazionario di celle convettive esagonali, note in seguito come *celle di*

¹ Lo strato limite termico è lo strato di fluido interessato da gradienti di temperatura.

² Il numero adimensionale di Reynolds misura l'importanza delle forze d'inerzia rispetto alle forze viscose.

³ Il numero adimensionale di Prandtl misura l'importanza della diffusione della quantità di moto, ossia la propagazione del movimento del fluido in direzione ortogonale alla direzione del moto stesso, rispetto alla diffusione dell'energia termica.

Bènard, mentre il primo a risolvere il problema dal punto di vista teorico con un'analisi lineare fu Lord Rayleigh [12], che, definendo un parametro adimensionale basato sulla geometria, il tipo di fluido e l'entità del gradiente di temperatura, il già citato numero di Rayleigh, stabilì il valore critico dal quale si manifestava il fenomeno.

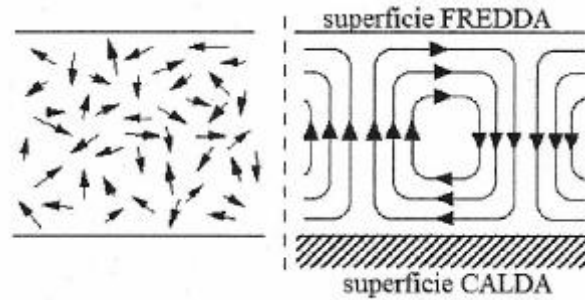


Figura 1 Formazione delle celle di Bénard nel flusso tra due pareti piane orizzontali riscaldate dal basso

Numerosi studi sperimentali sulla convezione di Rayleigh-Bènard hanno provato l'esistenza di diversi schemi di flusso, che dipendono dai numeri di Rayleigh Ra e Prandtl Pr . Subito dopo l'inizio del processo convettivo ($Ra = Ra_{lim} \approx 1.7 \cdot 10^3$) nel flusso si sviluppano delle strutture rettilinee e ordinate, dette *rolls*, con alcuni difetti in corrispondenza dei bordi. All'aumentare di Ra e per fluidi a basso numero di Prandtl ($Pr < 1$) compaiono dei difetti a spirale che evolvono in modo caotico; per $Ra \approx 6.8 \cdot 10^3$ sono stati osservati due tipi di celle esagonali, dette *l-cells* e *g-cells* con moto rispettivamente ascendente e discendente, che coesistono con le spirali.

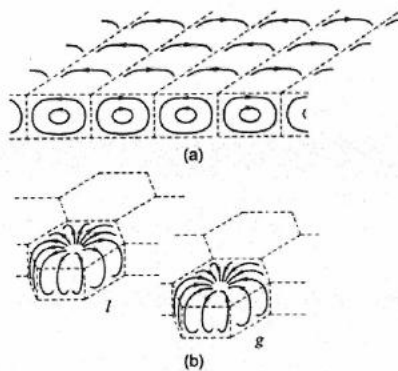


Figura 2 Schema delle celle convettive: (a) cilindri bidimensionali. (b) celle esagonali a *l* e a *g*

Quando il numero di Rayleigh supera il valore di 10^4 si formano delle strutture allungate, dette *spokes*, che diventano caotiche per $Ra \geq 10^5$. Un ulteriore aumento del numero di Rayleigh porta questi spokes instabili a formare delle strutture a larga scala indipendenti, che si generano nello strato limite termico e sono guidate dalle forze di galleggiamento. Le piume termiche sono gli elementi responsabili del trasporto di calore nel regime a Ra moderato, che inizia per $Ra = 10^5$. Per $Ra \sim 10^8$ si sviluppa una circolazione a larga scala, generata da queste piume termiche. L'analisi di dati DNS ha reso evidente che l'organizzazione tridimensionale delle piume termiche è ben distinguibile per Ra compresi tra 10^5 e 10^7 , poiché all'aumentare di Ra si generano moti caotici molto accentuati che tendono a mescolare velocemente il flusso.

L'interesse verso la comprensione di questo fenomeno è dovuto, inoltre, al fatto che i problemi riguardanti i flussi convettivi sono un punto di partenza ideale per lo sviluppo di nuove teorie sulla relazione tra ordine e caos nei flussi. Lorenz, in uno studio sul moto atmosferico dei fluidi, ha infatti derivato un modello del problema di Rayleigh-Bénard, suggerendo che le difficoltà di accuratezza sono dovute alla comparsa di comportamenti caotici nel modello [17,7]; infine, questo è uno dei problemi più adatti per illustrare da vari punti di vista fisici e matematici la teoria generale della stabilità idrodinamica [6,13].

1.5 I numeri caratteristici

Nello studio della convezione va sottolineata l'importanza di adimensionalizzare la formulazione dei problemi di scambio termico, poiché la risoluzione delle equazioni che governano il fenomeno, tranne che in pochi casi spesso particolarmente idealizzati e semplici, è estremamente difficoltosa. L'adimensionalizzazione consiste proprio nel raggruppare le variabili in gioco in gruppi adimensionali denominati numeri caratteristici. Ciò semplifica sia l'aspetto matematico sia la presentazione dei risultati e, inoltre, consente l'analisi degli ordini di grandezza tra le entità che regolano il fenomeno; infatti, i numeri caratteristici rappresentano una misura dell'importanza relativa tra due grandezze fisicamente e dimensionalmente omogenee. Tralasciando la metodologia che permette l'identificazione delle variabili adimensionali,

vediamo quali sono i più importanti numeri caratteristici atti allo studio dei fenomeni convettivi, oltre ai già citati numeri di *Rayleigh* e di *Richardson*.

i. Numero di Nusselt medio

Il numero di Nusselt medio misura l'importanza relativa del gradiente di temperatura medio nel fluido a diretto contatto con la superficie rispetto a un gradiente di temperatura di riferimento:

$$Nu_m = \frac{\text{Gradiente di temperatura locale medio}}{\text{Gradiente di temperatura medio di riferimento}} = \frac{\bar{h}_c L}{k} \quad (1.11)$$

dove \bar{h}_c (W/m²K) è la conduttanza media unitaria convettiva, L (m) è sempre una lunghezza caratteristica e k (W/mK) è la conducibilità termica del fluido.

ii. Numero di Reynolds

Il numero di Reynolds misura l'importanza delle forze d'inerzia rispetto alle forze viscosi:

$$Re = \frac{\text{Forze d'inerzia}}{\text{Forze viscosi}} = \frac{\rho V L}{\mu} \quad (1.12)$$

iii. Numero di Prandtl

Il numero di Prandtl misura l'importanza della diffusione della quantità di moto, ossia la propagazione del movimento del fluido in direzione ortogonale alla direzione del moto stesso, rispetto alla diffusione dell'energia termica:

$$Pr = \frac{\text{Diffusione della quantità di moto}}{\text{Diffusione dell'energia termica}} = \frac{c_p \mu}{k} \quad (1.13)$$

iv. Numero di Grashof

Il numero di Grashof rappresenta il prodotto tra le misure dell'importanza delle forze di galleggiamento rispetto alle forze viscosse e dell'importanza delle forze d'inerzia rispetto alle forze viscosse:

$$Gr = \frac{\text{Forze di galleggiamento}}{\text{Forze viscosse}} \frac{\text{Forze d'inerzia}}{\text{Forze viscosse}} = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu^2} \quad (1.14)$$

Si ricorda inoltre che il numero di Richardson può porsi anche come rapporto tra il numero di Grashof e il quadrato del numero di Reynolds:

$$Ri = \frac{Gr}{Re^2}$$

mentre il numero di Rayleigh può porsi come prodotto del numero di Grashof per il numero di Prandtl:

$$Ra = Gr Pr$$

Il numero di Nusselt riveste fondamentale importanza nello studio della convezione poiché dalla sua conoscenza si può risalire al coefficiente di scambio termico convettivo \bar{h}_c . Il numero di Nusselt si presenta come funzione di altri numeri caratteristici; in generale si ha:

$$Nu = f(Gr, Pr, Re)$$

Per la convezione naturale, si può porre:

$$Nu = f(Gr, Pr)$$

mentre per la convezione forzata si può porre:

$$Nu = f(Re, Pr)$$

Nella convezione naturale si definiscono, inoltre, il numero di Grashof critico, Gr_c , e il numero di Rayleigh critico, Ra_c , mentre nella convezione

forzata si definisce il numero di Reynolds critico, Re_c , atti a indicare se ha luogo la transizione dal regime di moto laminare a quello turbolento, ovvero:

convezione naturale : $Gr > Gr_c$; $Ra > Ra_c$
convezione forzata : $Re > Re_c$.

1.6 L'approssimazione di Boussinesq

Nei flussi in convezione di Rayleigh-Bènard, il moto è generato dalle forze di galleggiamento presenti nel campo gravitazionale, che spingono verso l'alto un fluido leggero immerso in un fluido più pesante. Le differenze di temperatura sono indotte nel campo in corrispondenza delle pareti, mantenute a temperatura costante, e creano differenze di densità che inducono il moto del fluido. Nel problema studiato in questa trattazione, in particolare, è presente un flusso tra due lastre parallele e piane a distanza $2H$; se la temperatura alla quale è mantenuta la lastra inferiore è più grande rispetto alla temperatura della lastra superiore, qualunque tipo di disturbo innescherà dei moti ascendenti di particelle.

Per studiare questi flussi si utilizza un sistema ridotto di equazioni a partire dal sistema completo di equazioni di Navier Stokes, nel quale si introducono alcune semplificazioni proposte da Boussinesq.

La densità di un fluido, in genere, dipende dalla temperatura, dalla concentrazione e dalla pressione:

$$\rho = \rho(T, C, p) \quad (1.15)$$

ma, per fluidi caratterizzati da un basso valore del numero di Mach⁴ ($M \ll 1$), condizione quasi sempre verificata nella convezione naturale per le basse velocità in gioco, con buona approssimazione si può ritenere la densità indipendente dalla pressione. Inoltre, supponendo nulli i gradienti

⁴Il numero di Mach è il rapporto tra la velocità del fluido e la velocità del suono.

di concentrazione, la densità risulta funzione esclusivamente della temperatura:

$$\rho = \rho(T) \quad (1.16)$$

Detti ρ_0 e T_0 rispettivamente la densità e la temperatura di riferimento, la (1.16) può essere sviluppata in serie di Taylor:

$$\rho = \rho_0 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_{c_p} (T - T_0) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial T^2}\right)_{c_p} (T - T_0)^2 + \dots \quad (1.17)$$

Assumendo che la variazione di densità con la temperatura avvenga a pressione costante si ottiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta} \Big|_{p=const} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{v}\right) \Big|_{p=const} = -\frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)_{p=const} \Big|_{\theta=\theta_0} = -\rho_0 \beta_0$$

Ricordando la definizione di coefficiente di comprimibilità a pressione costante, la (1.17) diventa:

$$\rho = \rho_0 - \beta \rho_0 (T - T_0) \left[1 - \frac{1}{2!} \beta (T - T_0) \dots\right] \quad (1.18)$$

che rappresenta l'equazione di stato linearizzata rispetto alle variazioni di temperatura. Per piccoli gradienti di temperatura possiamo troncare lo sviluppo in serie ai termini del primo ordine, per cui la (1.18) diventa:

$$\rho - \rho_0 = -\beta \rho_0 (T - T_0) \quad (1.19)$$

Inoltre, osservando che β assume, per la maggior parte dei fluidi, valori molto piccoli (dell'ordine di 10^{-3} K^{-1}), le variazioni di densità, per piccoli gradienti di temperatura, sono contenute.

L'approssimazione di Boussinesq consiste, proprio, nell'assumere la densità costante in tutti i termini delle equazioni che governano la convezione naturale, ad eccezione che nel termine di galleggiamento.

In tali ipotesi l'equazione di conservazione della massa assume la seguente

espressione:

$$\bar{\nabla} * \bar{V} = 0 \quad (1.20)$$

Per quanto riguarda l'equazione di bilancio della quantità di moto, se le forze esterne si riducono alla sola forza gravitazionale per unità di massa \bar{g} :

$$\rho \frac{D\bar{V}}{Dt} = -\bar{\nabla}p + \rho\bar{g} + \bar{\nabla} * \bar{\tau} \quad (1.21)$$

Applicando l'equazione (1.21) a un fluido in quiete, si ha:

$$0 = -\bar{\nabla}p_0 + \rho_0\bar{g} \quad (1.22)$$

dove p_0 è la pressione di riferimento.

Sottraendo membro a membro la (1.22) dalla (1.21), si ha:

$$\rho \frac{D\bar{V}}{Dt} = -\bar{\nabla}(p - p_0) + (\rho - \rho_0)\bar{g} + \bar{\nabla} * \bar{\tau} \quad (1.23)$$

Quindi, considerando variabile la densità solo nel termine di galleggiamento, e ricordando la (1.20), l'equazione di bilancio della quantità di moto assume la seguente espressione:

$$\rho_0 \frac{D\bar{V}}{Dt} = -\bar{\nabla}p_m - \beta\rho_0(T - T_0)\bar{g} + \bar{\nabla} * \bar{\tau} \quad (1.24)$$

dove $p_m = p - p_0$ è definita pressione dinamica e può essere vista come un impulso di moto causato dalla forza di galleggiamento. Infine, l'equazione di conservazione dell'energia assume la seguente forma:

$$\rho_0 c_p \frac{DT}{Dt} = k\nabla^2 t + \beta T \frac{Dp}{Dt} + \mu\phi + u''' \quad (1.25)$$

Riassumendo, le equazioni valide per il problema di Rayleigh-Bènard, ottenute mediante l'approssimazione di Boussinesq, sono:

1. Equazione di conservazione della massa:

$$\bar{\nabla} * \bar{V} = 0 \quad (1.26)$$

2. Equazione di bilancio della quantità di moto:

$$\rho_0 \frac{D\bar{V}}{Dt} = -\bar{\nabla} p_m - \beta \rho_0 (T - T_0) \bar{g} + \bar{\nabla} * \bar{\tau} \quad (1.27)$$

3. Equazione di conservazione dell'energia:

$$\rho_0 c_p \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 t + \beta T \frac{Dp}{Dt} + \mu \phi + u''' \quad (1.28)$$

1.7 Condizioni al contorno

Il fluido è confinato tra due pareti piane poste a $z = -H$ e $z = H$ e in corrispondenza di queste devono essere soddisfatte le seguenti condizioni al contorno:

$$\theta = 0 \text{ e } w = 0 \text{ per } z = -H, \theta = 2 \text{ e } w = 0 \text{ per } z = H \quad (1.29)$$

il canale, quindi, ha altezza $h = 2H$, lunghezza L e larghezza b , tali che $\frac{L}{\delta} \gg 1$ e $\frac{b}{\delta} \gg 1$. Nella simulazione numerica la condizione di omogeneità e indipendenza statistica nelle direzioni x e y è imposta attraverso condizioni al contorno di tipo periodico.

Si deve distinguere tra due tipi di superfici al contorno: *superfici rigide*, in corrispondenza delle quali non è presente lo scorrimento e *superfici libere*, in corrispondenza delle quali non agisce alcuno sforzo tangenziale. In questo tipo di problema sarà considerato il primo tipo di superficie, per la quale la condizione di *no slip* implica che non solo w , ma anche le componenti di velocità orizzontale u e v , scompaiano alle pareti. Perciò:

$$u = 0 \quad v = 0 \quad w = 0 \quad \text{per la parete rigida} \quad (1.30)$$

Dovendo questa condizione essere soddisfatta per tutti i valori di x e y sulla

superficie, occorre dalla condizione di continuità:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.31)$$

Sia verificato che:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{per la parete rigida}$$

La condizione al contorno per la vorticità normale ω si deduce da:

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.32)$$

Quindi:

$$\omega = 0 \quad \text{per la parete rigida} \quad (1.33)$$

1.8 Cascata di energia

Riprendendo la rappresentazione a cascata della turbolenza di Richardson (1926), a partire dalla quale Kolmogorov nel 1941 formulò la sua teoria per la turbolenza omogenea isotropa, in [16] viene spiegata la teoria alla base del trasferimento di energia nella convezione di Rayleigh-Bènard, vista attraverso lo *scaling* di Bolgiano-Obhukhov (1959).

Nella cascata di energia di Kolmogorov, i vortici sono ordinati in modo gerarchico. In breve, [11] l'energia cinetica è immessa nel meccanismo turbolento, attraverso il termine di produzione, in corrispondenza delle grandi scale del moto. Questa energia è quindi trasferita attraverso processi non viscosi verso scale sempre più piccole, fino a che, raggiunta la scala più piccola del moto (la scala di Kolmogorov η) è dissipata grazie all'azione viscosa.

Quindi, la forzante esterna della turbolenza agisce solo in corrispondenza delle grandi scale dell'ordine delle dimensioni del sistema. L'energia in ingresso e_{in} alle grandi scale uguaglia il trasporto turbolento $T_r^u \sim u_r^3/r$ per

tutte le scale r del range inerziale, nel quale u_r è la velocità tipica delle particelle del fluido. Nel range viscoso, che comprende tutte le scale più piccole della scala η , l'energia è dissipata attraverso il termine ϵ_u , che per la stazionarietà statistica uguaglia e_{in} . L'uguaglianza dei termini $T_r^u = \epsilon_u = e_{in}$ implica che $u_r \sim r^{\frac{1}{3}}$. La struttura del termine di trasporto di energia $T_r^u = u_r \sim r^{\frac{1}{3}}$ emerge anche da un'analisi dimensionale dell'equazione di Navier-Stokes, moltiplicata per la velocità.

Analogamente, se si considera uno scalare passivo θ , nella rappresentazione di Obukhov-Chorsin, il termine di trasporto termico $T_r^\theta \sim \theta_r^2 u_r / r$ ottenuto moltiplicando l'equazione della temperatura per θ , è indipendente da r ed è pari sia al termine di energia termica in ingresso, che a quello della dissipazione termica ϵ_θ . Questa uguaglianza, insieme con l'espressione $u_r \sim r^{\frac{1}{3}}$ fornisce la relazione $\theta \sim r^{\frac{1}{3}}$.

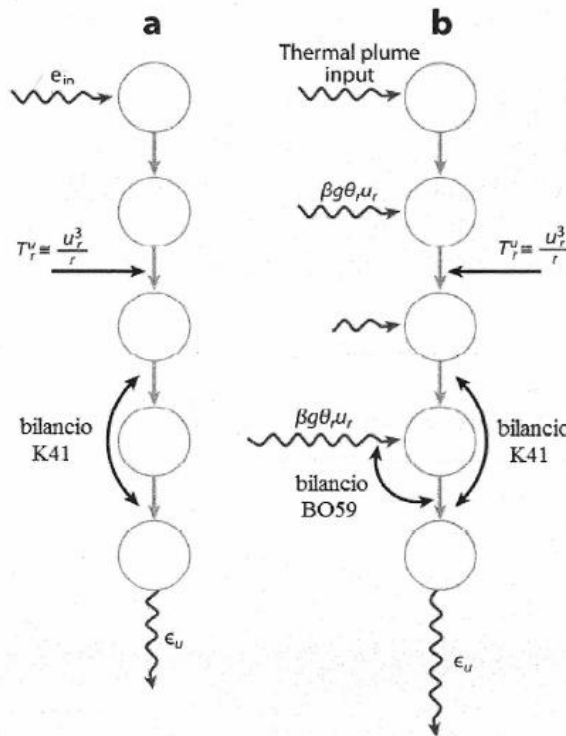


Figura 3 (a) Schema della cascata di Richardson per la turbolenza omogenea isotropa. Il bilancio K41 fornisce lo scaling $u_r \sim r^{\frac{1}{3}}$. (b) Schema della cascata di energia nel flusso di Rayleigh-Bénard: da un lato le piume guidano i cilindri convettivi di grande scala, dall'altro il termine di galleggiamento $\beta g \theta_r u_r$ fornisce l'energia cinetica in corrispondenza della scala r . Il termine convettivo di energia T_r^u trasporta la somma di tutte le energie immesse alle varie scale.

Se è introdotto uno scalare attivo, come la temperatura θ nella convezione di Rayleigh-Bènard, il bilancio termico non cambia e si conserva sempre la relazione $T_r^\theta \sim \theta_r^2 u_r / r \sim \epsilon_\theta$. Allo stesso tempo, si sviluppano dei cilindri convettivi di grande scala, guidati e sostenuti dalle piume termiche di piccola scala, che si distaccano dallo strato limite. Questo implica un'interazione non locale tra le scale. I cilindri convettivi di grande scala decadono in vortici sempre più piccoli e in questo modo l'energia viene trasportata dalle grandi alle piccole scale. Per tutte le scale comprese nel range iniziale, per l'equazione dell'energia, è richiesto che sia soddisfatto il bilancio $\beta g \theta_r u_r \sim T_r^u \sim u_r^3 / r$. Quindi, da questo bilancio e considerando il bilancio termico $T_r^\theta \sim \epsilon_\theta$ si ottiene immediatamente lo *scaling* di Bolgiano-Obhukhov (BO59) che consiste in una duplice cascata per una convezione stabile e stratificata. Per piccoli numeri d'onda (grandi lunghezze di scala), è stata prevista la dominanza delle forze di galleggiamento sulle forze d'inerzia. In questo regime, il flusso di energia del campo di temperatura è costante, mentre il flusso del campo di velocità varia con $k^{4/5}$, dove k è il numero d'onda. Per i numeri d'onda intermedi, Bolgiano e Obhukhov hanno ipotizzato la dominanza delle forze d'inerzia sulle forze di galleggiamento. Di conseguenza, il campo di temperatura agisce come uno scalare passivo, e i campi di velocità e temperatura sono caratterizzati dallo spettro di energia di Kolmogorov ($k^{5/3}$) e da un flusso costante di energia. Gli spettri di energia e i flussi relativi alla turbolenza convettiva sono molto più complessi rispetto a quelli della turbolenza classica, a causa della presenza delle forze di galleggiamento [21]. Gli spettri di energia per il campo di velocità $[E^u(k)]$ e per il campo di temperatura $[E^\theta(k)]$ si definiscono come:

$$E^u(k) = \sum_{k'=k}^{k+1} \frac{1}{2} |u(\mathbf{k}')|^2 \quad (1.34)$$

$$E^\theta(k) = \sum_{k'=k}^{k+1} \frac{1}{2} |\theta(\mathbf{k}')|^2 \quad (1.35)$$

il flusso di energia è la misura dell'energia non lineare trasferita nella turbolenza. Si definiscono il flusso di energia cinetica $\Pi^u(k_0)$ ed il flusso

di entropia $\Pi^\theta(k_0)$ come:

$$\Pi^u(k_0) = \frac{1}{2} \sum_{k>k_0} \sum_{p,q} \langle k_0 \delta_{k,p+q} i \frac{k_m k_l}{k_n} (1 - \delta_{l,n}) \times u_l^*(\mathbf{k}) u_m(\mathbf{p}) u_n(\mathbf{q}) \rangle \quad (1.36)$$

$$\Pi^\theta(k_0) = \frac{1}{2} \sum_{k>k_0} \sum_{p,q} \langle k_0 \delta_{k,p+q} i [\mathbf{k} * u(\mathbf{q})] \times \theta^*(\mathbf{k}) \theta(\mathbf{p}) \rangle \quad (1.37)$$

Queste quantità rappresentano la cascata netta di $|\theta|^2/2$ e $|u|^2/2$, rispettivamente, dai modi interni ad una sfera di raggio k_0 ai modi esterni alla sfera.

1.9 Tipi di flussi convettivi e strutture coerenti

L'esistenza di una corrente turbolenta (*wind of turbulence*) è l'ipotesi di base per la scomposizione dei termini di dissipazione esposta di seguito [15]. L'effetto della corrente è duplice:

- Nello spazio compreso tra la corrente turbolenta e la parete della cella si crea il flusso di taglio dello strato limite;
- Nel *bulk* la corrente mescola il fluido.

Le fluttuazioni di velocità all'interno della cella sono considerate solo come conseguenza del mescolamento causato dai *rolls* di larga scala. Per questo, per descrivere la turbolenza di *bulk* è più appropriato considerare il numero di Reynolds Re basato sulla velocità dei cilindri, piuttosto che il Re_{fluct} , basato sulle fluttuazioni nei *bulk*.

Studiando la dipendenza delle caratteristiche del flusso da Ra e Pr , Grossman e Lohse [12] hanno analizzato i termini di dissipazione termica e cinetica e hanno suggerito uno studio separato del *bulk* turbolento e dello strato limite.

Si considerano i tassi di dissipazione cinetica e termica:

$$\epsilon_u(\mathbf{x}, t) = \nu \frac{\partial^2 u_j(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i^2} \quad (1.38)$$

$$\epsilon_{\theta}(\mathbf{x}, t) = k \frac{\partial^2 \theta(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i^2} \quad (1.39)$$

Le loro medie globali $\langle \epsilon_u(\mathbf{x}, t) \rangle_V = \epsilon_u$ e $\langle \epsilon_{\theta}(\mathbf{x}, t) \rangle_V = \epsilon_{\theta}$ obbediscono alle

seguenti relazioni rigorose, derivabili dalle equazioni del moto:

$$\epsilon_u = \frac{\nu^3}{L^4} (Nu - 1) Re Pr^{-2} \quad (1.40)$$

$$\epsilon_{\theta} = k \frac{\Delta^2}{L^2} Nu \quad (1.41)$$

La dissipazione occorre sia all'interno del flusso, che in corrispondenza dello strato limite. Vicino alla parete si sviluppano gli strati limite termico e cinetico, di spessore, relativamente λ_{θ} e λ_u , che possono essere determinati attraverso le diffusività termica k e la viscosità cinematica ν e che, in generale, sono differenti, dipendono da Pr e sono definiti in base ai profili di temperatura e di velocità. Lo spessore dello strato limite termico è connesso con il numero di Nusselt dalla relazione:

$$\lambda_{\theta} = \frac{1}{2} L Nu^{-1} \quad (1.42)$$

Lo spessore dello strato limite cinetico può essere espresso in termini del numero di Reynolds come:

$$\lambda_u \sim L \sqrt{Re} \quad (1.43)$$

In questo caso è stata fatta l'ipotesi di flusso laminare viscoso del tipo di Blasius nello strato limite; l'estensione lungo x dello strato limite (BL) è stata identificata con la lunghezza L della cella convettiva. La transizione verso la turbolenza nello strato limite avviene per numeri di Rayleigh molto alti, che non saranno considerati in questa trattazione.

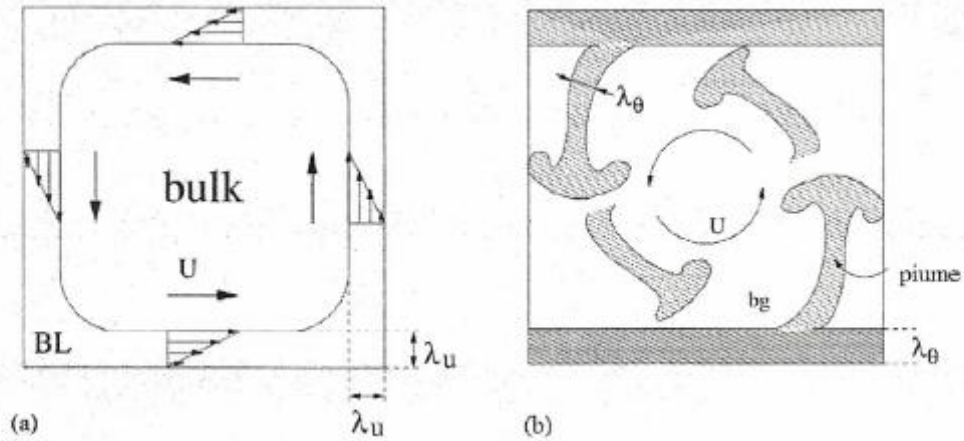


Figura 4 Partizione BL-bulk. Schema della divisione dei termini di dissipazione cinetica (a) e termica (b). In entrambe le figure è rappresentata la velocità media di grande scala U . Lo spessore tipico del BL cinetico è λ_u , mentre lo spessore tipico del BL termico e delle piume è λ_θ . All'esterno del BL e delle piume è raffigurata la regione del bulk (bg).

Considerando le piume termiche distaccate dallo strato limite, in generale, il tasso di dissipazione globale medio viene decomposto in un contributo relativo allo strato limite (BL) e in uno relativo al bulk turbolento:

$$\epsilon_u = \epsilon_{u,BL} + \epsilon_{u,bulk} \quad (1.44)$$

$$\epsilon_\theta = \epsilon_{\theta,BL} + \epsilon_{\theta,bulk} \quad (1.45)$$

Dove $\epsilon_{u,BL}$ è la dissipazione viscosa che agisce nello strato limite viscoso, $\epsilon_{\theta,BL}$ è la dissipazione termica nello strato limite termico, $\epsilon_{u,bulk}$ è la dissipazione viscosa nel bulk e $\epsilon_{\theta,bulk}$ è la dissipazione termica nel bulk. Attraverso questi termini sono individuati quattro regimi convettivi principali:

1. Nei termini ϵ_u e ϵ_θ è dominante il contributo relativo allo strato limite;
2. ϵ_θ è dominato dal contributo $\epsilon_{\theta,BL}$ ed ϵ_u è dominato dal contributo $\epsilon_{u,bulk}$;
3. ϵ_u è dominato dal contributo $\epsilon_{\theta,BL}$ ed ϵ_θ è dominato dal contributo $\epsilon_{u,bulk}$;

4. Nei termini ϵ_u e ϵ_θ è dominante il contributo relativo al bulk.

Per numeri di Ra relativamente bassi, gli strati limite sono più estesi, quindi ci si aspetta un comportamento che rientra nel regime 1. Allo stesso modo, per gli alti Ra, gli strati limite sono molto sottili e ci si aspetta un comportamento del regime 4. Per bassi Pr lo strato limite viscoso è più piccolo rispetto allo strato limite termico e il comportamento rientra nel regime 2. Infine, per alti Pr si entra nel regime 3.

Dall'analisi di Grossman e Lohse emerge che nel termine di dissipazione termica, per alti Ra domina il contributo del bulk; dall'altra parte, dati DNS riassunti in [14] hanno mostrato che anche il contributo proveniente dallo strato limite orizzontale al termine di dissipazione termica media aumenta con Ra. Da quest'osservazione si segnala un ruolo sempre meno importante delle piume termiche nel fenomeno convettivo all'aumentare del numero di Rayleigh. Per analizzare le proprietà delle piume e comprendere il peso del contributo di bulk nella dissipazione termica per alti Ra, il campo di temperatura è diviso in due parti caratterizzate rispettivamente dalla presenza e dall'assenza delle piume.



Figura 5 Visualizzazione del flusso nell'esperimento di Sparrow, Husar e Goldstein (1970) [1]

Le piume possono essere facilmente visualizzate nei risultati sperimentali, o dai grafici tridimensionali di dati DNS, ma sono abbastanza difficili da identificare quantitativamente, attraverso l'isolamento dei valori elevati della skewness della derivata della temperatura; oppure associando la velocità delle piume a una velocità media condizionata [8], o ancora, utilizzando un tasso di dissipazione termica locale, attraverso la funzione

$C(T, \epsilon_\theta) = T\epsilon_\theta$ i cui valori più elevati sono associati allo strato limite termico e alle piume [14].

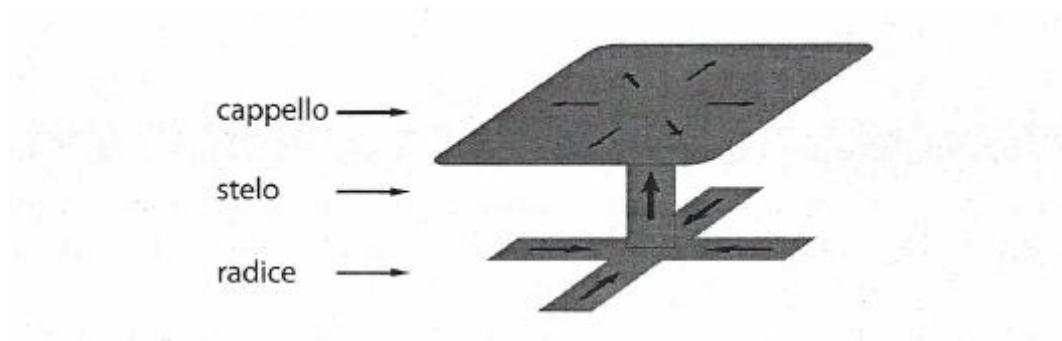


Figura 6 Schema della struttura di una piuma calda, dedotto dall' analisi di dati DNS

Generalmente, l'analisi dei dati DNS rende evidente la struttura tridimensionale delle piume termiche, per numeri di Ra moderati tra 10^5 e 10^7 . Le radici delle piume calde e fredde tendono a intersecarsi ad angolo retto, e con l'aumentare di Ra iniziano a unirsi in modo caotico per i moti ascendenti e discendenti. La struttura delle piume si presenta come una struttura coerente della convezione naturale a numeri di Ra moderati, che si distingue chiaramente dai cilindri bidimensionali, dalle l-cells e g-cells, dai raggi (spoke) che caratterizzano i regimi a bassi numeri di Ra.

Capitolo 2

Modellazione di un fluido viscoelastico

In questo capitolo saranno evidenziate le principali caratteristiche che differenziano i liquidi polimerici dai fluidi Newtoniani, sarà presentata l'equazione costitutiva che ne descrive il comportamento e il modello matematico implementato nel metodo numerico sul quale si basano le simulazioni numeriche dirette compiute.

2.1 Comportamento generale delle soluzioni polimeriche

Un polimero è una molecola complessa costituita da numerose e semplici unità chimiche, dette monomeri, mantenute insieme da legami chimici. Come molte altre sostanze, per comprendere le proprietà di questi materiali occorre considerare una grande quantità di molecole, anche se, nel caso dei polimeri, le stesse molecole sono piuttosto estese e, quindi, è necessario utilizzare la meccanica statistica per calcolare le caratteristiche anche di un polimero isolato. Un modo per ricercare le proprietà di un singolo polimero è di collocarlo in una soluzione abbastanza diluita, in modo che le interazioni tra le catene polimeriche possano essere trascurate [10].

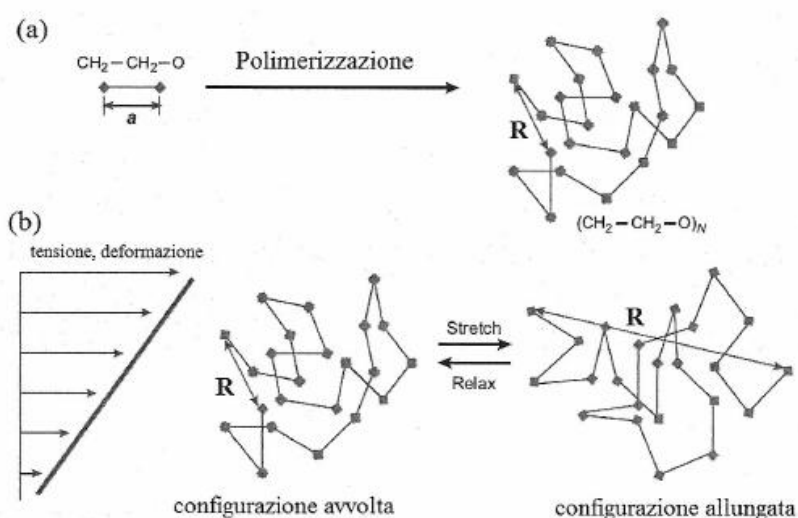


Figura 7 (a) Schema della struttura di base della molecola polimerica dell'ossido di polietilene, costituita da N monomeri di $\text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{O}$ monomeri di lunghezza a . Il

vettore *end-to-end* della molecola è \mathbf{R} . (b) Schema dell'allungamento e del rilassamento del polimero in un flusso di taglio, caratterizzati dal cambiamento di \mathbf{R} [18].

Le proprietà che caratterizzano il comportamento generale dei polimeri sono sia viscosi, sia elastici. Questa peculiarità che distingue i sistemi polimerici rispetto a quelli Newtoniani è detta viscoelasticità.

Per calcolare il flusso di un fluido al quale è applicata una forza esterna occorre una relazione, detta equazione costitutiva, che legghi le tensioni nel fluido alla sua deformazione. Usualmente, l'equazione costitutiva lega il tensore delle tensioni $\sigma_{\alpha\beta}$ al tensore gradiente di velocità $\frac{\partial v_\alpha}{\partial r_\beta}$. Per un normale fluido viscoso, la relazione è scritta come:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \eta \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial r_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial r_\alpha} \right) - P \delta_{\alpha\beta} \quad (2.1)$$

dove η è la viscosità del fluido, $P = -\left(\frac{\partial A_0}{\partial V}\right)_T$ è la variazione di energia libera sul volume a temperatura costante e $\delta_{\alpha\beta}$ è una deformazione infinitesima. L'equazione costitutiva di un liquido polimerico non può essere scritta in una forma così semplice. Come esempio si può considerare il seguente flusso di taglio:

$$v_x = \dot{\gamma}(t)y \quad v_y = 0 \quad v_z = 0 \quad (2.2)$$

Dove $\dot{\gamma} = \frac{\partial v_x}{\partial y}$ è lo shear rate. In caso di liquido viscoso, la (2.2) fornisce le seguenti espressioni per le tensioni:

$$\sigma_{xy}(t) = \sigma_{yx} = \eta \dot{\gamma}(t) \quad \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} \quad (2.3)$$

ossia, la tensione all'istante t è determinata solo dallo shear rate di quell'istante particolare, ed esiste una relazione di proporzionalità tra le due grandezze. Nei fluidi viscoelastici, invece, la tensione dipende anche dagli shear stress precedenti, con una relazione non lineare. Quindi, se il flusso stazionario di un liquido polimerico viene bloccato, la tensione non diventa immediatamente 0, ma decade con un tempo di rilassamento τ_r .

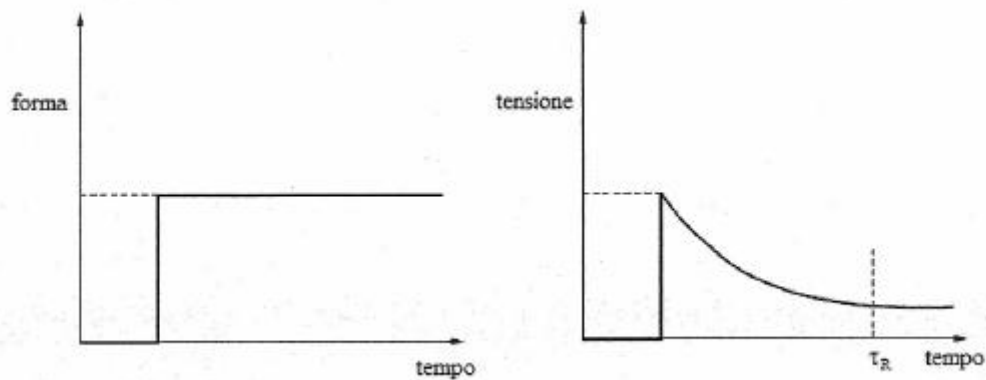


Figura 8 Risposta di un materiale viscoelastico ad una deformazione imposta. [9]

Il tempo di rilassamento τ_R dipende fortemente dal peso molecolare del polimero e dalla sua temperatura; inoltre, la tensione di taglio σ_{xy} non è proporzionale allo shear rate e, quindi, il rapporto tra le due grandezze, ossia la viscosità, può cambiare di diversi ordini di grandezza (10^3):

$$\eta = \frac{\sigma}{\dot{\gamma}} \quad (2.4)$$

Per un fluido newtoniano, la viscosità è indipendente dal gradiente di velocità di deformazione, mentre per i fluidi viscoelastici normalmente decresce all'aumentare di $\dot{\gamma}$. In questo caso il comportamento è chiamato *shear thinning*, mentre pochi materiali manifestano il comportamento opposto, detto *shear thickening*.

Se la tensione è piccola, è possibile ipotizzare una relazione lineare tra tensione e tasso di deformazione, che nel caso di flusso di taglio assuma la forma:

$$\sigma_{xy}(t) = \int_{-\infty}^t dt' G(t - t') \dot{\gamma}(t') \quad (2.5)$$

dove $G(t)$ è la funzione di tensione di rilassamento. Nell'intervallo in cui è valida questa relazione, si dice che il sistema è in regime di viscoelasticità lineare, nel quale la risposta in tensione ad una deformazione arbitraria può essere facilmente calcolata. In questo caso, la tensione di taglio aumenta

fino a raggiungere un valore stazionario dato da:

$$\sigma(t) = \dot{\gamma} \int_0^t dt' G(t - t') = \dot{\gamma} \int_0^t dt' G(t') \quad (2.6)$$

Quindi, anche la viscosità raggiungerà il valore costante della cosiddetta viscosità *zero-shear-rate*:

$$\eta_0 = \int_0^\infty dt G(t) \quad (2.7)$$

2.2 Parametri adimensionali

I fenomeni di rilassamento sono un'importante caratteristica dei fluidi viscoelastici e, generalmente, nello spettro dei tempi di rilassamento che è possibile definire, è considerato il tempo di rilassamento più lungo per la caratterizzazione della soluzione polimerica. Questo tempo di rilassamento dipende principalmente dal tipo di polimero e di solvente e dalla concentrazione del polimero e assume valori nell'intervallo tra 10^{-3} e 10^3 secondi.

Quindi, per i fluidi con caratteristiche non Newtoniane è possibile definire un parametro adimensionale detto numero di Deborah o di Weissenberg:

$$De = \frac{\tau_R}{t_f} \quad (2.8)$$

Questo parametro è il rapporto tra il tempo di rilassamento più lungo della catena polimerica $\tau_r = \frac{\eta}{k}$ dove η è la viscosità del fluido e k è la costante di elasticità della molla che idealmente collega due molecole del polimero, e il tempo fluidodinamico caratteristico t_f ; in definitiva, è una misura dell'elasticità del polimero [19], infatti, comunemente un fluido con un tempo di rilassamento prolungato viene pensato come elastico perché si rilassa più lentamente. Se De è piccolo, la catena polimerica non si allunga e la soluzione si comporta in modo simile al fluido Newtoniano. Quando il numero di Deborah supera l'unità, la catena si allunga e, al limite per De all'infinito, il flusso cambia così rapidamente rispetto al tempo di rilassamento del materiale, da comportarsi come solido elastico di Hook.

Il secondo parametro adimensionale da considerare è η_p , che esprime il rapporto tra il contributo della viscosità di *zero-shear* alla viscosità della soluzione sulla viscosità del solvente:

$$\eta_p = \frac{\eta_p^k \Theta \tau_R}{\mu} \quad (2.9)$$

2.3 Modelli di fluidi viscoelastici

Tutti i materiali possiedono una microstruttura a livello molecolare, ma nelle applicazioni meccaniche, solitamente, è conveniente utilizzare un modello ideale continuo del materiale, nel quale la microstruttura non viene specificata in modo dettagliato. All'aumentare della complessità del materiale, però, si presenta la necessità di un approccio più completo, che tenga conto anche della struttura interna del materiale.

Metodo recenti, per analizzare la risposta dei polimeri in termini di tensione ad una deformazione imposta. Combinano la meccanica del continuo con principi legati alla microstruttura del materiale.

2.3.1 Il modello bead-spring

Per ottenere una descrizione completa della catena è conveniente utilizzare un modello che abbia una formulazione matematica semplice. Tra i modelli non basati su una griglia, quello Gaussiano è il più semplice dal punto di vista matematico. In questo modello si assume che lo stesso vettore del legame \mathbf{r} possieda una sua flessibilità e segua una distribuzione Gaussiana:

$$p(\mathbf{r}) = \left(\frac{3}{2\pi b^2}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{3\mathbf{r}^2}{2b^2}\right) \quad (2.10)$$

Scrivendo il vettore di posizione dell' n -esimo segmento della catena Gaussiana come \mathbf{R}_n , la distribuzione del vettore del legame $\mathbf{r}_n = \mathbf{R}_n - \mathbf{R}_{n-1}$ è data dalla (2.20) e quindi la distribuzione di probabilità dell'insieme dei vettori di posizione $\{\mathbf{R}_n\} \equiv (\mathbf{R}_0 \mathbf{R}_1 \dots \mathbf{R}_n)$ è proporzionale a :

$$P(\{\mathbf{R}_n\}) = \left(\frac{3}{2\pi b^2}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{-3}{2b^2} \sum_{n=1}^N (\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_{n-1})^2\right) \quad (2.11)$$

La catena Gaussiana può essere pensata come un insieme di segmenti uniti tra loro, che costituiscono delle molle di grandezza naturale nulla. Se k è la costante elastica di queste molle, l'energia associata alla catena può essere scritta come:

$$U = \frac{1}{2}k \sum_{n=1}^N (\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_{n-1})^2 \quad (2.12)$$

Poiché queste connessioni hanno un comportamento simile a quello delle molle, il modello di soluzione diluita di polimeri che noi utilizziamo si basa su un modello micromeccanico identificato con il modello *bead-spring* o modello a *dumbbells*.

Il modello è costituito da due biglie prive di massa connesse da una molla e la distanza tra le due biglie corrisponde al vettore *end-to-end* \mathbf{R} . Le forze che agiscono sulle biglie sono di tre tipi:

1. forza idrodinamica di resistenza, ossia la resistenza che incontrano le biglie a causa del loro moto, che in questo modello semplificato è trascurata;
2. forza Browniana che agisce sulle biglie e tiene conto del moto termico nel fluido;
3. forza conservativa, che è la forza risultante dall'azione della molla sulle biglie.

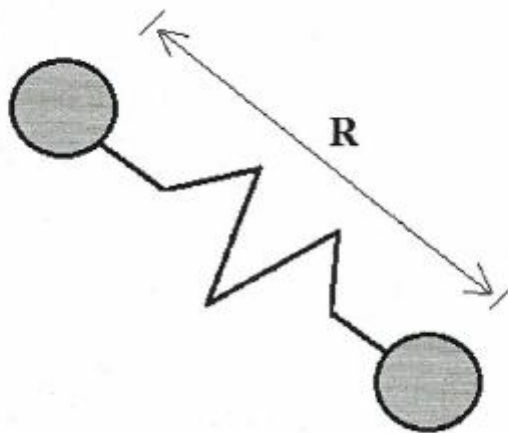


Figura 10 Modello a dumbbell

La dinamica della soluzione è descritta dall'equazione della quantità di moto,

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i \quad (2.13)$$

dove il termine forzante legato alla divergenza dell'extra-stress dovuto ai polimeri,

$$f_i = \frac{1}{Re} \frac{\partial T_{ij}^p}{\partial x_j} \quad (2.14)$$

È aggiunto ai termini usuali delle equazioni di Navier-Stokes. Tutte le quantità sono adimensionalizzate usando la velocità di *centre-line* U_0 , la metà dell'altezza del canale h e la viscosità cinematica del solvente.

La configurazione di ciascun *dumbell* è descritta in termini del vettore *end-to-end* R_i e la forza della molla è espressa come:

$$F_i = kf(R^2)R_i \quad (2.15)$$

dove il coefficiente $f(R^2)$ tiene conto del comportamento non-lineare della molla stessa.

La presenza dei *dumbells* genera un tensore di extra-stress T_{ij}^p nel campo,

$$T_{ij}^p = \eta_p \langle F_i R_j \rangle \quad (2.16)$$

con η_p rappresentante il numero medio di *dumbells* per unità di volume.

Sotto l'ipotesi di Peterlin (FENE-P), il comportamento statistico del sistema è descritto dal tensore di conformazione $\mathbf{R}_{ij} = \langle R_i R_j \rangle$, cioè la media d'insieme del prodotto diadico del vettore *end-to-end* dei polimeri.

L'equazione di evoluzione del tensore di conformazione si scrive:

$$\frac{D\mathbf{R}_{ij}}{Dt} = -\frac{1}{De} f(\mathbf{R}_{ij}) \mathbf{R}_{ij} + \frac{1}{De} \delta_{ij} \quad (2.17)$$

Col coefficiente $f(\mathbf{R}_{ij})$ definito come:

$$f(\mathbf{R}_{ij}) = \frac{(R_{max}^2 - 3)}{(R_{max}^2 - \mathbf{R})} \quad (2.18)$$

Dove $\mathbf{R} = Tr(\mathbf{R}_{ij}) = \langle R^2 \rangle$ e R_{max} fornisce l'elongazione massima del polimero. Il termine a primo membro può essere riscritto come:

$$\frac{D\mathbf{R}_{ij}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{R}_{ij}}{\partial t} + u_k \frac{\partial \mathbf{R}_{ij}}{\partial x_k} - K_{ir} \mathbf{R}_{rj} - \mathbf{R}_{ir} K_{jr} \quad (2.19)$$

con K_{ir} che denota il gradiente di velocità.

Il tensore di conformazione, R_{max} e \mathbf{R} sono adimensionalizzati usando la lunghezza di equilibrio delle catene polimeriche $\sqrt{\langle R_0^2 \rangle}$ come riferimento. L'extra-stress è dato direttamente in termini del tensore di conformazione dall'equazione costitutiva adimensionale:

$$\mathbf{T}_{ij}^p = \frac{\eta_p}{De} (f(\mathbf{R}) \mathbf{R}_{ij} - \delta_{ij}) \quad (2.20)$$

dove η_p è il rapporto tra la viscosità della soluzione dovuta ai polimeri e la viscosità del solvente, definita in precedenza.

2.4 Conoscenze attuali

Da ormai sessanta anni è noto e documentato attraverso numerosi studi sperimentali, numerici e teorici, che una piccola quantità di polimeri dissolta in un fluido riesce a ridurre in modo significativo la resistenza che incontra un flusso turbolento vicino a una parete solida [9]. Questa riduzione raggiunge, attraverso una calibrazione efficace dei parametri caratteristici delle catene polimeriche, anche l'80% e dimostra l'azione di dissipazione intelligente dell'energia cinetica da parte dei polimeri, che si comportano come sistemi meccanici che interagiscono col flusso circostante, sottraendo energia in alcuni punti del canale, immagazzinandola sotto forma di energia potenziale elastica, che è restituita in altre regioni del flusso.

Il problema dell'influenza di additivi polimerici nella convezione naturale turbolenta in un fluido tra due pareti riscaldate dal basso, invece, si è iniziato a studiare solo di recente e sebbene ci siano già alcuni risultati teorici e numerici, sono molto pochi gli articoli sperimentali che si possono citare. Tra questi *Alhers* e *Nikolaenko* [2] hanno misurato il trasporto di calore, espresso in termini del numero di Nusselt, per un flusso turbolento in convezione di Rayleigh-Bénard di acqua contenenti 120 ppm in peso di ossido di polietilene con un peso molecolare di $4 \cdot 10^6$ g/mol.

In un intervallo $5 \cdot 10^9 \lesssim Ra \lesssim 7 \cdot 10^{10}$ è stato rilevato un numero di Nusselt più piccolo rispetto a quello dell'acqua pura, pari a circa il 10%. A causa dei numeri di Rayleigh molto elevati che caratterizzavano il flusso esaminato sperimentalmente, non è possibile fare un confronto diretto con le simulazioni numeriche, che sono vincolate a essere svolte considerando Ra relativamente bassi.

Capitolo 3

Risultati

In questo capitolo sono discussi i risultati delle simulazioni numeriche, ottenute attraverso simulazioni numeriche dirette (Direct Numerical Simulation, DNS), di un flusso in convezione naturale e mista. Considerando un fluido Newtoniano e alcuni tipi di soluzioni polimeriche, caratterizzate da diversi valori del numero di Deborah e del gradiente di pressione esterno imposto, si confrontano gli andamenti dei campi cinematici e di temperatura e si analizza come la presenza dei polimeri influenzi le strutture coerenti del flusso.

Il vantaggio di simulare numericamente l'evoluzione di questi flussi viscoelastici è la possibilità di ottenere le caratteristiche del loro campo di moto, gli andamenti delle tensioni e degli scambi di forze o la conformazione delle molecole polimeriche, che non si possono rilevare attraverso gli esperimenti.

3.1 Setup numerico e parametri rilevanti

Per i risultati della DNS esposti di seguito, le dimensioni del dominio computazionale sono $16h \times 16h \times h$, dove h è la metà dell'altezza del canale e i punti di griglia sono $128 \times 128 \times 64$. Il gradiente di temperatura è presente lungo la direzione y , tra la parete inferiore (più calda) e quella superiore (più fredda), mentre il gradiente di pressione esterno forza il flusso lungo x ; il piano x - z è di omogeneità. Nel seguito, quando si presenteranno le analisi statistiche dei campi di moto, con u , v , z e R_{11} , R_{22} , R_{33} si intenderanno, rispettivamente, le velocità e gli allungamenti delle catene polimeriche lungo le direzioni x , y e z .

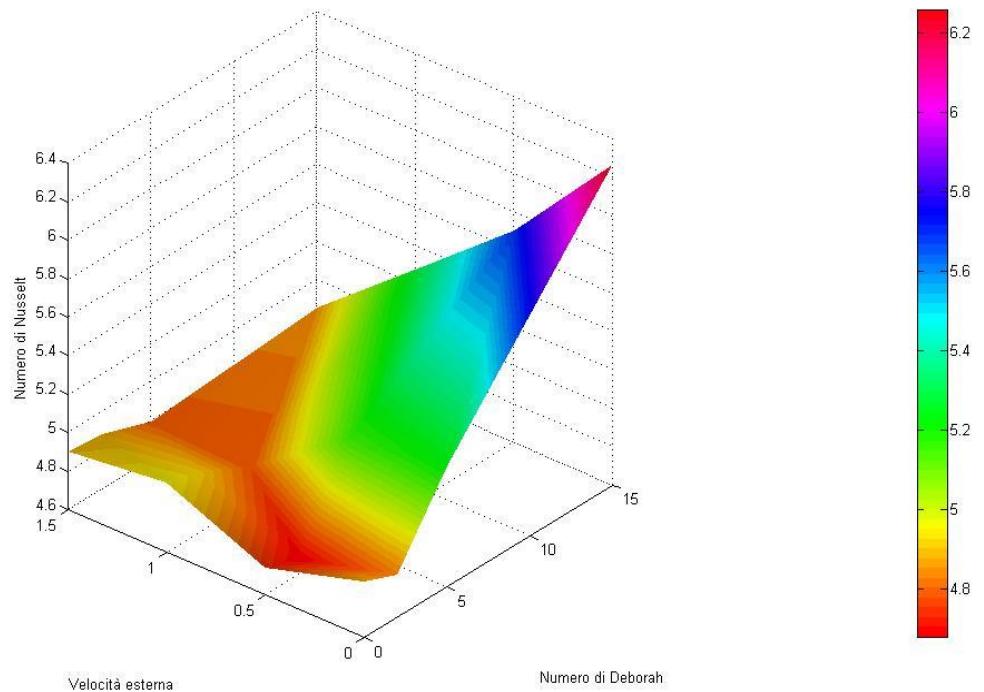
Nelle varie simulazioni sono stati utilizzati flussi turbolenti Newtoniani e viscoelastici in convezione sia naturale sia mista, con $Ra = 10^5$ e $Pr = 7$, attraverso due pareti orizzontali infinite separate da un'altezza costante pari a $2h$. I numeri di Deborah utilizzati sono 0, 2, 5 e 15 e per ogni valore sono stati fatte simulazioni con un differente valore del gradiente di pressione esterno, usato per generare la convezione forzata. Il gradiente forzante

verrà nel seguito quantificato col parametro U_c , intendendo con ciò che tale gradiente assume un'intensità pari a quella che, in un equivalente flusso di Poiseuille, avrebbe generato una velocità di centre line del flusso pari a k volte una velocità di riferimento adimensionale. Il numero di Prandtl pari a 7 corrisponde all'acqua, poiché la maggior parte degli esperimenti con polimeri sono condotti utilizzando soluzioni acquose. Entrambe le pareti sono isoterme, con un gradiente di temperatura negativo ($|\Delta T| = 2$) rispetto alla gravità g , ortogonale alle pareti.

L'efficacia del trasferimento di calore turbolento è misurata attraverso il numero di Nusselt, in questo caso calcolato come derivata della temperatura fatta in corrispondenza della parete:

$$Nu = \frac{\langle \frac{\partial \theta}{\partial z} |_w \rangle}{(\theta_0 - \theta_1)/2H} \quad (3.1)$$

Di seguito sono riportati gli andamenti del Nusselt in funzione sia del numero di Deborah sia della velocità esterna:



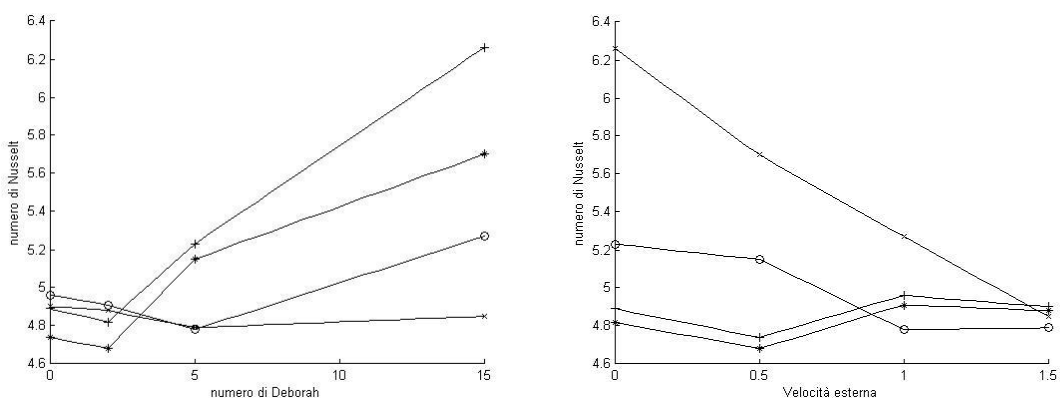
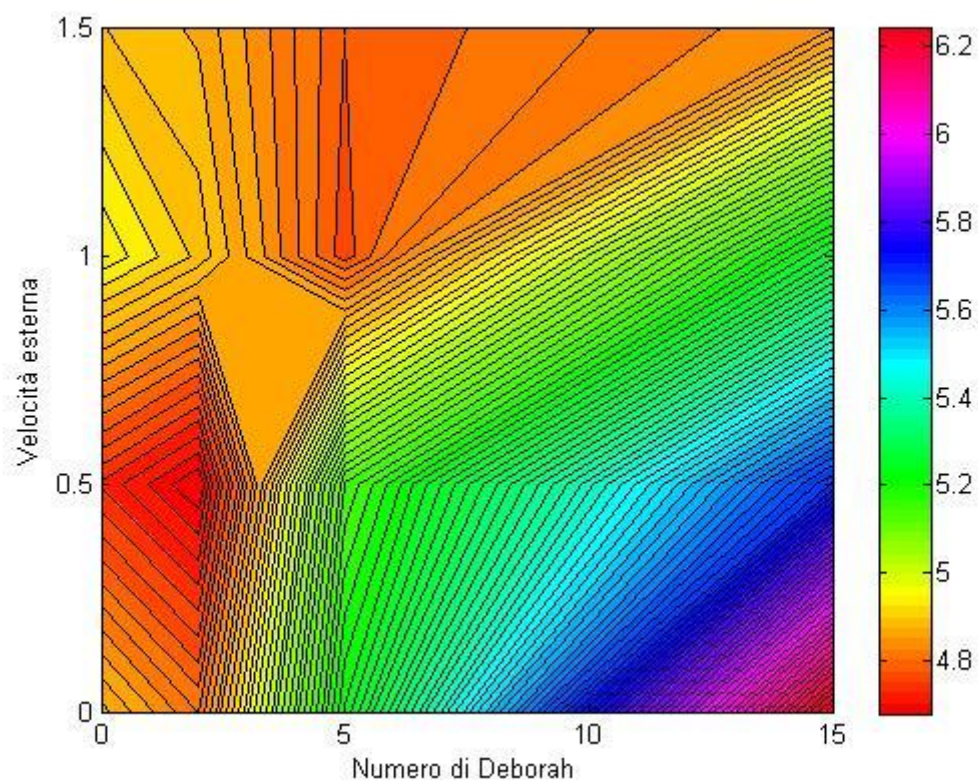


Figura 11 Numero di Nusselt in funzione del numero di Deborah e della velocità esterna U_c

$U_c \backslash De$	0	2	5	15
1.5	4.90	4.88	4.79	4.85
1.0	4.96	4.91	4.78	5.27
0.5	4.74	4.68	5.15	5.70
0	4.89	4.82	5.27	6.26

Tabella 1 Numeri di Nusselt nelle varie simulazioni

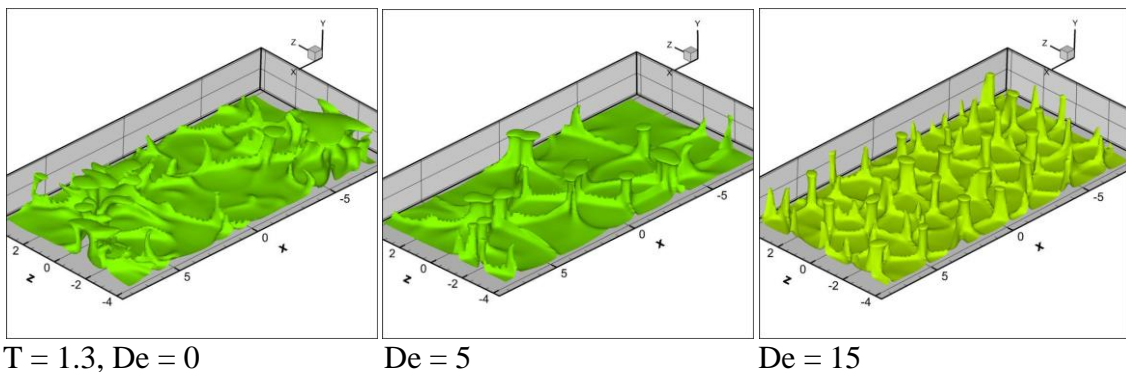
La linea con “i più” rappresenta l’andamento del numero di Nusselt, rispettivamente, per $U_c=0$ e $De=0$; gli asterischi tracciano il profilo per $U_c=0.5$ e $De=2$; i tondini per $U_c=1$ e $De=5$; le croci per $U_c=1.5$ e $De=15$. In Tabella 1 invece sono riportati i valori numerici precisi calcolati nelle simulazioni.

Per approfondimenti sull’approccio utilizzato per l’identificazione dei vortici si veda in Appendice.

3.2 Analisi del flusso e delle strutture coerenti

L’analisi qualitativa dei campi di temperatura, le visualizzazioni tridimensionali delle isosuperfici a temperatura costante e delle strutture che si ripetono quasi regolarmente nel flusso e lo caratterizzano in modo specifico, permettono di comprendere meglio la fisica del fenomeno della convezione e di formulare delle ipotesi per spiegare gli andamenti statistici dei profili di temperatura media e fluttuazioni di velocità derivati dalle simulazioni numeriche. Il confronto tra le visualizzazioni riguardanti il flusso Newtoniano e quelle riguardanti la soluzione polimerica consente di dare una spiegazione al meccanismo che regola lo scambio convettivo di calore.

3.2.1 Effetti dell’introduzione di polimeri in soluzione in convezione naturale



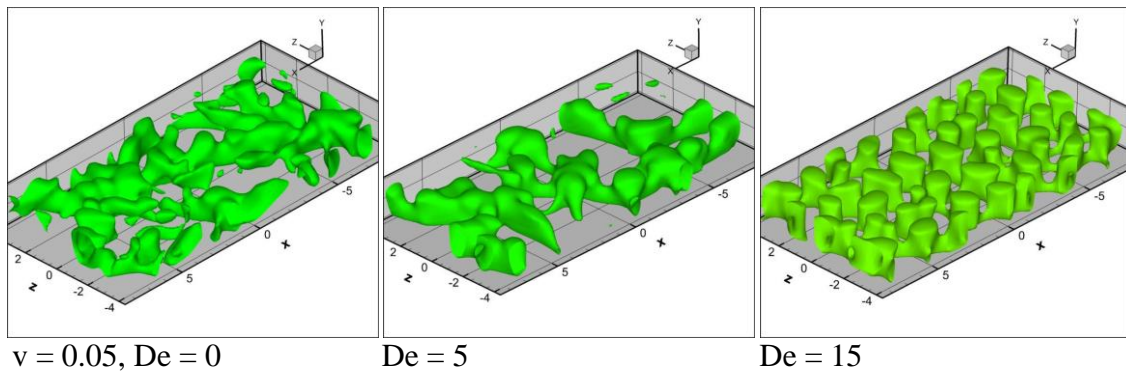


Figura 12 Isosuperfici di temperatura e velocità al crescere del numero di Deborah, con U_c nulla

In base all'analisi della letteratura, le strutture coerenti, ossia gli schemi che compaiono in modo ripetitivo nel flusso, più evidenti nella convezione di Rayleigh-Bènard, al numero di Rayleigh simulato, sono le piume termiche, con la struttura a fungo tipica di questo processo. Si noti che il campo di temperatura, nel caso Newtoniano, presenta una distribuzione irregolare delle piume, la cui evoluzione è guidata dal gradiente termico e disturbata dalla presenza di vortici turbolenti, generando un mescolamento caotico delle particelle fluide. Aumentando progressivamente il numero di Deborah della soluzione viscoelastica, le piume termiche calde si sviluppano in modo ordinato, regolare e in numero maggiore. Pensiamo infatti che, in corrispondenza dei vortici, le catene polimeriche subiscano un forte allungamento [5], accumulando "intelligentemente" energia elastica, con conseguente riduzione della turbolenza di piccola scala e formazione di piume termiche più coerenti. Poiché sono proprio le piume calde a essere responsabili del trasporto di calore attraverso il flusso, il loro aumento può essere la causa dell'incremento del trasferimento di calore, evidenziato dal passaggio del numero di Nusselt da un valore pari a 4.89 nel caso Newtoniano, a 6.26 per $De=15$. Si fa notare che, in altre simulazioni numeriche [4], effettuate con flusso omogeneo e privo di pareti, è stato osservato un aumento del trasporto di calore molto più pronunciato, e questo induce a far pensare che la presenza di pareti inibisca l'aumento del trasporto di calore favorito dai polimeri.

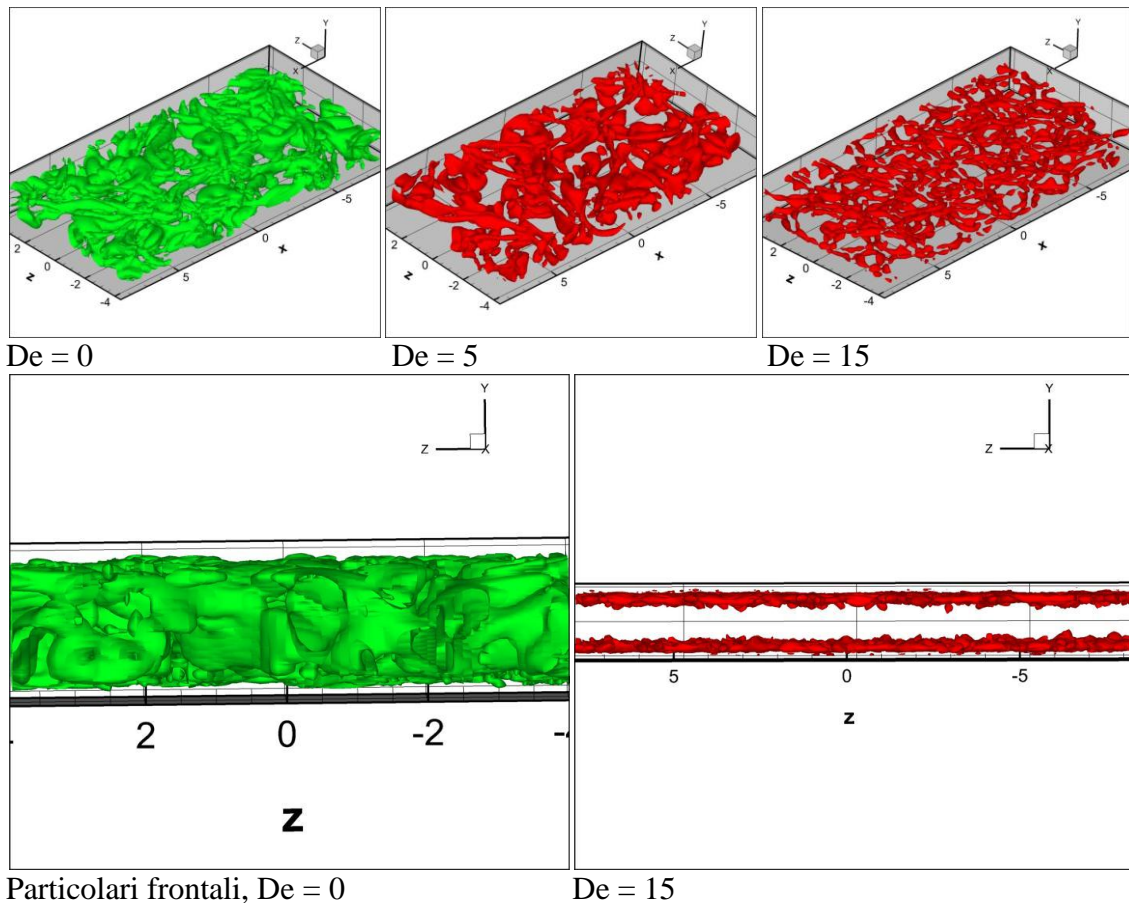


Figura 13 Distribuzione dei vortici, U_c nulla

Osservando la fig.13, si nota come nel caso Newtoniano le strutture vorticoshe coinvolgono l'intera regione del flusso e si sviluppano sia in corrispondenza dello strato limite sia del bulk, interagendo in modo invasivo con le dinamiche delle celle convettive. È evidente la differenza con i risultati ottenuti per la soluzione viscoelastica, nella quale i vortici si manifestano principalmente nella regione dello strato limite e sono assenti nel bulk. Sarebbe, quindi, che i polimeri sopprimano la turbolenza di *bulk*, eliminando i vortici al centro del canale, responsabili del *mixing* interno. Questo potrebbe fornire una spiegazione al fatto che i polimeri consentano uno sviluppo più regolare e ordinato delle piume termiche, poiché la riduzione delle interazioni tra vortici e celle convettive consente l'evoluzione di piume termiche più numerose e meglio organizzate.

3.2.2 Analisi di un flusso turbolento Newtoniano in convezione mista

Introducendo un gradiente di pressione esterno e generando dunque il moto di un flusso turbolento Newtoniano in convezione mista, si è visto dalle simulazioni che gli effetti di tale gradiente sui campi di velocità e temperatura dipendono dall'intensità dello stesso.

Risulta infatti che una piccola velocità esterna rompa la struttura delle celle convettive: l'evoluzione delle piume termiche è disturbata e queste si formano in numero e dimensioni minori. Di conseguenza, lo scambio termico diminuisce, ma in misura molto limitata, in quanto a $U_c=0.5$ corrisponde un gradiente di pressione molto piccolo, incapace di essere causa di sostanziali modifiche nel flusso.

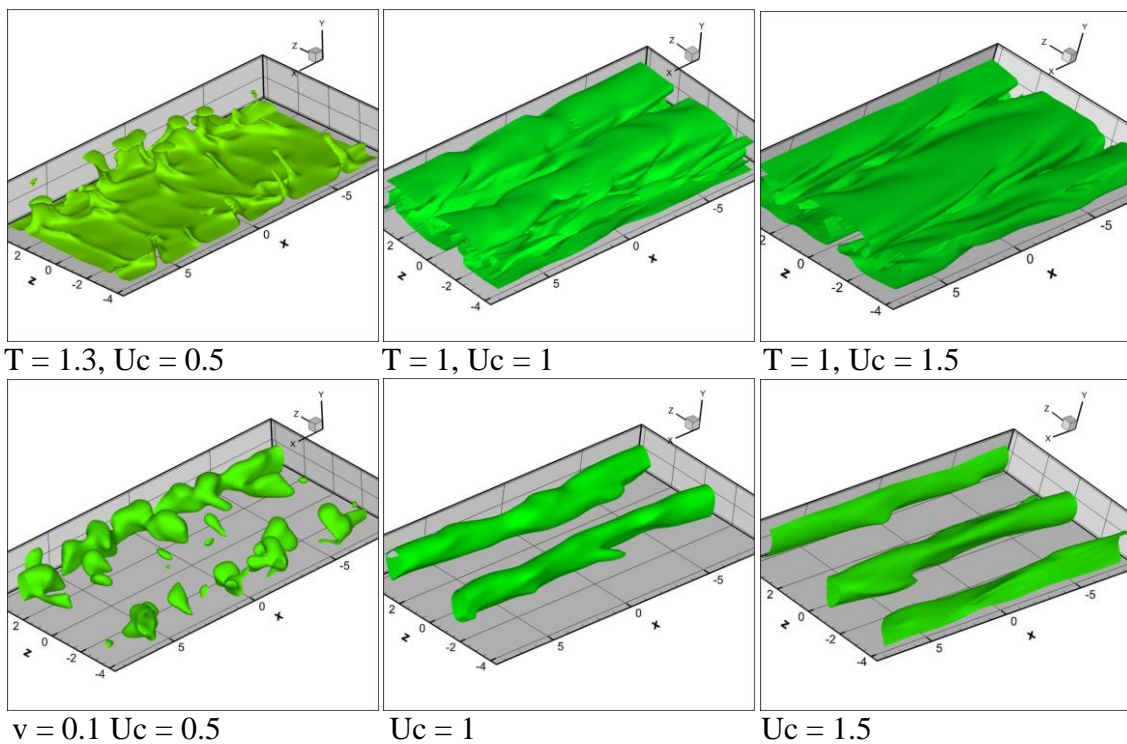


Figura 14: Isosuperfici di temperatura e velocità al crescere della velocità esterna U_c , con $De = 0$

Se invece l'incremento di velocità U_c è più consistente ($U_c=1$ e $U_c=1.5$) non si nota più la formazione di piume termiche, bensì sembra che la velocità esterna favorisca la creazione di cilindri convettivi, affiancati

lungo la direzione z , in cui il fluido sale verso l'alto centralmente e scende esternamente, vista la forma “a fungo” che presenta la sezione y - z .

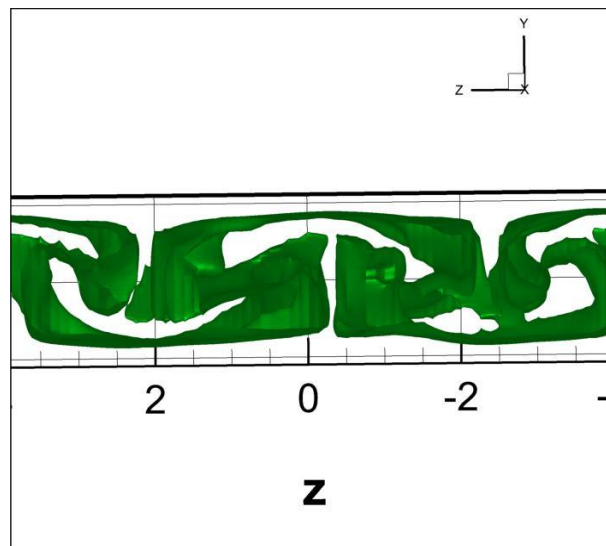


Figura 15 Particolare frontale dell'isosuperficie $T = 1$, simulazione $De = 0$, $Uc = 1.5$

Nonostante il gradiente forzante modifichi sostanzialmente la forma del campo, lo scambio termico rimane pressoché costante in tutte le simulazioni sopra analizzate: rispetto al caso in convezione naturale, la simulazione fatta con $Uc=1.5$ presenta un numero di Nusselt di solo 0.01 maggiore.

Se dunque è vero che nel moto turbolento si ha un mescolamento notevole di particelle fluide e il trasporto convettivo di energia cinetica e termica è aumentato dall'incremento della turbolenza, nelle simulazioni in questione il gradiente di pressione forzante è troppo debole perché favorisca di per sé tale aumento. La questione è quindi posta sull'interazione complessa tra catene polimeriche, dinamica convettiva e il gradiente forzante imposto, come si vedrà nel seguito, e su come tale interazione influisca sul flusso termico.

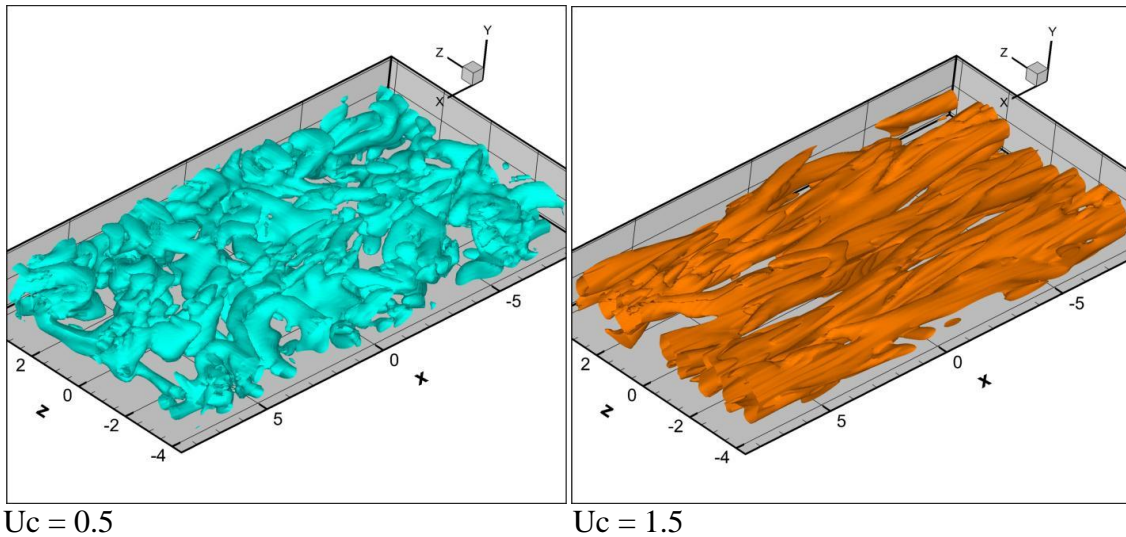
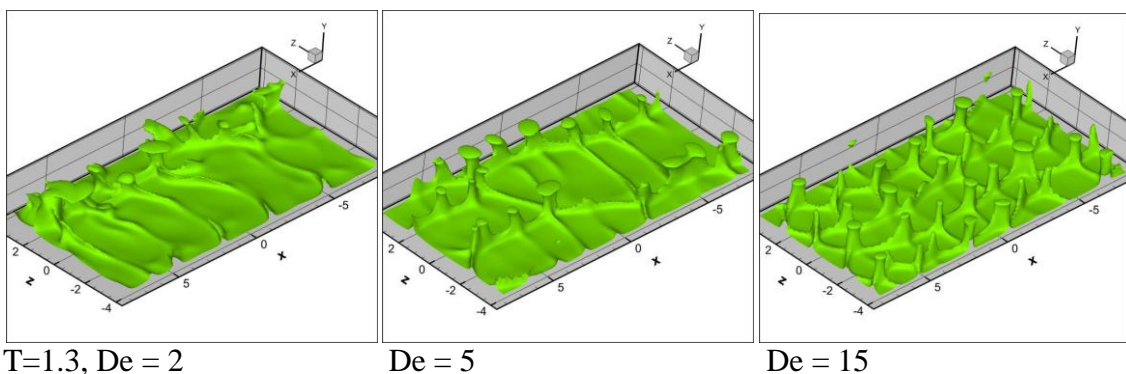


Figura 16 Distribuzione dei vortici, $De = 0$

3.2.3 Effetti della variazione del numero di Deborah su flussi turbolenti viscoelastici in convezione mista

Analizziamo ora come il progressivo aumento del numero di Deborah di una soluzione polimerica influisce sullo scambio termico in flussi turbolenti in convezione mista, per diversi valori del gradiente di pressione forzante.



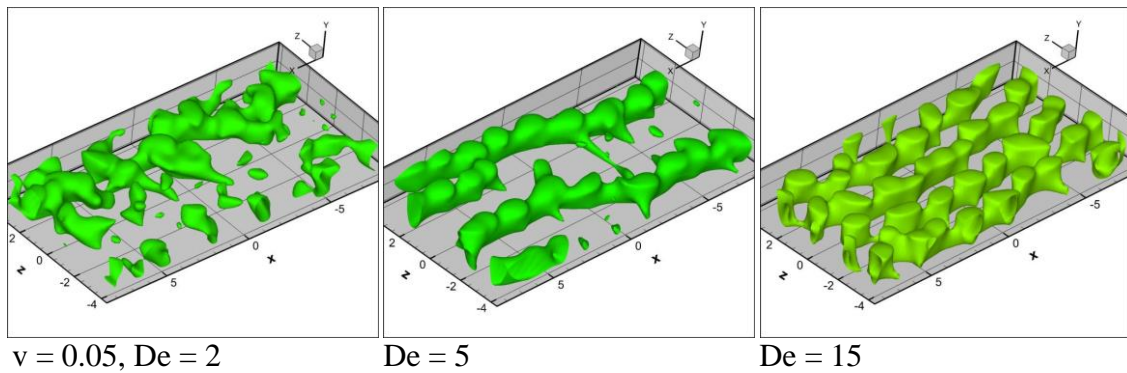


Figura 17 Isosuperfici di temperatura e velocità al crescere del numero di Deborah, $U_c=0.5$

Come già osservato per il caso Newtoniano, l'introduzione di una velocità esterna di piccola entità ($U_c=0.5$) è un fattore negativo per lo scambio termico per qualsiasi soluzione polimerica presa in esame, poiché tale forzante esterna rappresenta un disturbo per le celle convettive, impedendone una formazione coerente e ordinata.

Considerando la soluzione con $De=2$ in fig.17, si nota che le differenze qualitative del campo di temperatura e di quello cinetico col caso Newtoniano sono trascurabili, la distribuzione delle strutture vorticosi rimane invariata, dunque sembrerebbe che tale modifica non abbia inficiato sulla struttura del flusso e sulla dinamica convettiva, sebbene si registri un lieve abbassamento del numero di Nusselt, la cui causa non è nota. D'altra parte, si può affermare che l'aumento del numero di Nusselt di un flusso viscoelastico in convezione mista, se $U_c=0.5$, è correlato positivamente con il numero di Deborah. Se infatti si osservano le immagini successive, con $De=5$ e $De=15$, si nota che le piume termiche si presentano progressivamente in maggior numero e dimensioni, e la loro distribuzione nel campo di moto più omogenea, essendo meno concentrate lungo le linee di corrente.

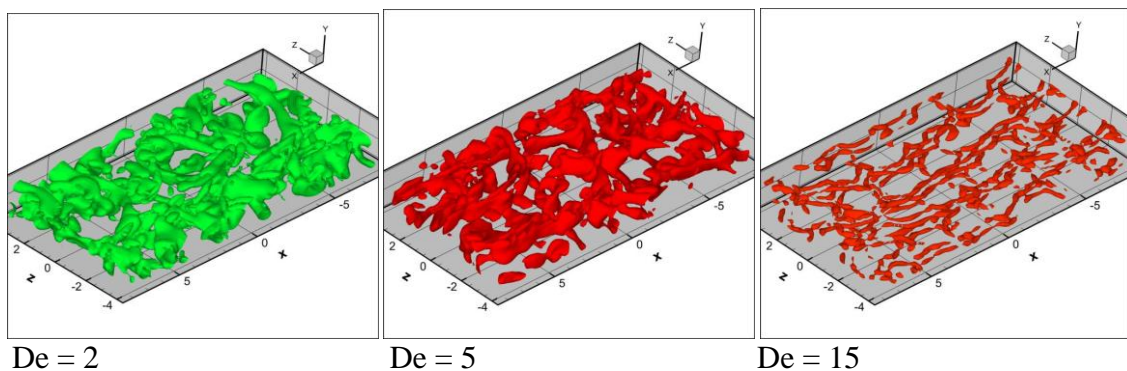


Figura 18 Distribuzione dei vortici, $U_c=0.5$

Sembra che il progressivo aumento delle proprietà viscoelastiche della soluzione polimerica limiti gli effetti negativi associati al gradiente di pressione forzante: i polimeri riducono gli effetti caotici del regime turbolento, riducendo le strutture vorticosi del campo e favorendo l'evoluzione ordinata delle celle convettive, permettendo la realizzazione di una buona convezione. Il progressivo aumento del numero di Nusselt rafforza tale ipotesi e, se si comparano i campi di temperatura e di velocità a $De=15$ con gli stessi a U_c nulla, si noterà la netta somiglianza.

Se il gradiente di pressione esterno assume valori maggiori, l'effetto dell'aumento del numero di Deborah sulla soluzione viscoelastica è differente.

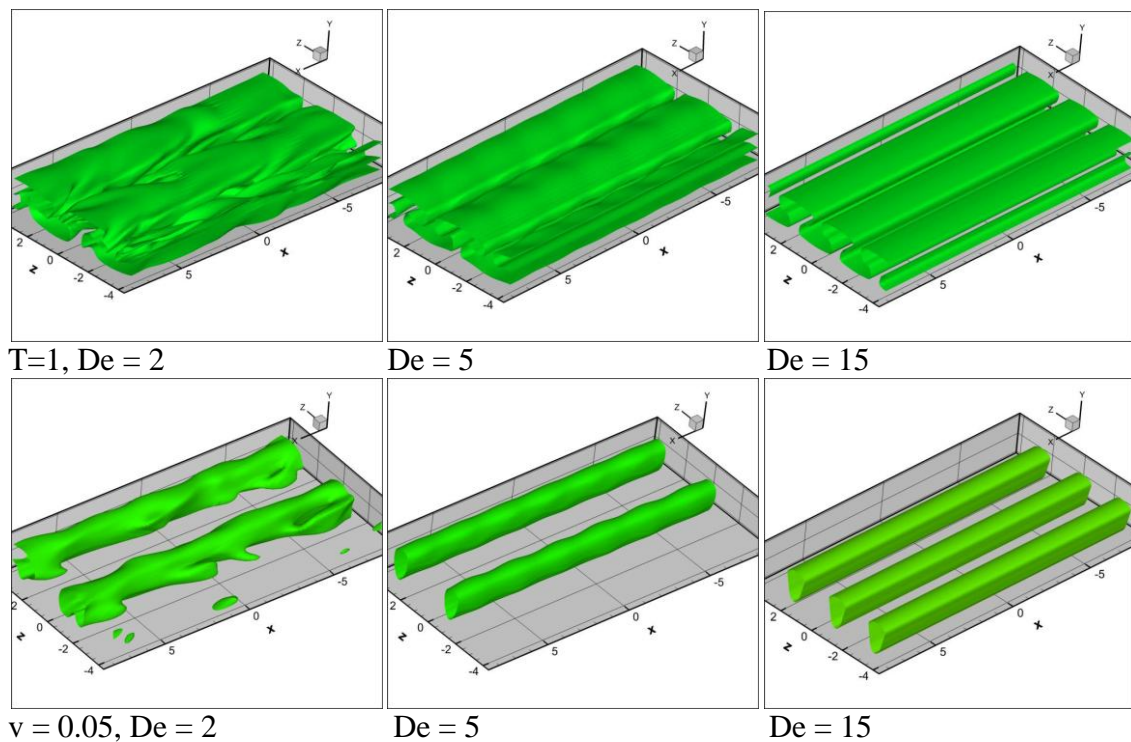


Figura 19 Isosuperfici di temperatura e velocità al crescere del numero di Deborah, $U_c=1$

Tale gradiente impedisce la formazione di piume termiche e favorisce la formazione di cilindri convettivi simmetrici disposti lungo la direzione del moto. Diversamente da quanto accadeva per le simulazioni a U_c bassa o nulla, dove il progressivo aumento del Deborah riduceva la turbolenza permettendo la formazione di piume termiche ordinate e in maggior numero, ora si assiste a una progressiva laminarizzazione del flusso.

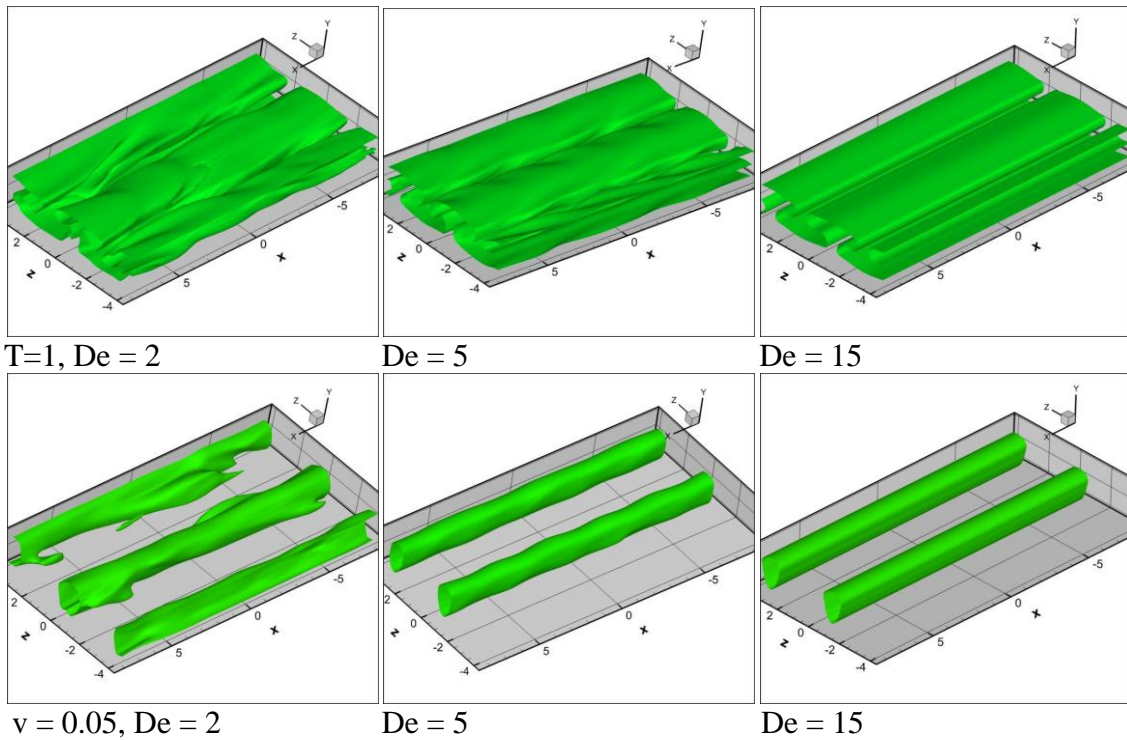


Figura 20 Isosuperfici di temperatura e velocità al crescere del numero di Deborah, $U_c=1.5$

L'ulteriore incremento del gradiente di pressione esterno non comporta sostanziali differenze nell'aspetto dei campi cinetici e di temperatura: per i numeri di Deborah considerati, oltrepassata la soglia di $U_c=1$, le simulazioni presentano forti similitudini e analoghi comportamenti al variare di De . Tale valore di soglia non è generalmente valido, bensì molto probabilmente legato al valore del numero di Deborah: se si considerano valori maggiori di tale parametro potrebbero essere necessari gradienti di pressione esterni più elevati per generare medesimi effetti.

Riassumendo, se il gradiente di pressione esterno è basso ($U_c=0.5$), numeri di Deborah maggiori favoriscono la formazione di piume termiche numerose e di un'architettura convettiva stabile e ordinata, limitando gli effetti negativi di tale disturbo.

Aumentando il valore di tale gradiente ($U_c=1$ e $U_c=1.5$), l'incremento del numero di Deborah favorisce una progressiva laminarizzazione del flusso e, contrariamente ai casi con U_c inferiore, l'azione positiva delle catene polimeriche sullo scambio termico viene totalmente annullata dall'azione del gradiente di pressione forzante. Tale fatto è confermato sia dall'aspetto

fisico del flusso, che non presenta numerose e ordinate celle convettive, in grado di generare un ottimo trasporto termico (come accade in convezione naturale), sia dal valore costante del numero di Nusselt, che rimane sui livelli calcolati per il flusso Newtoniano.

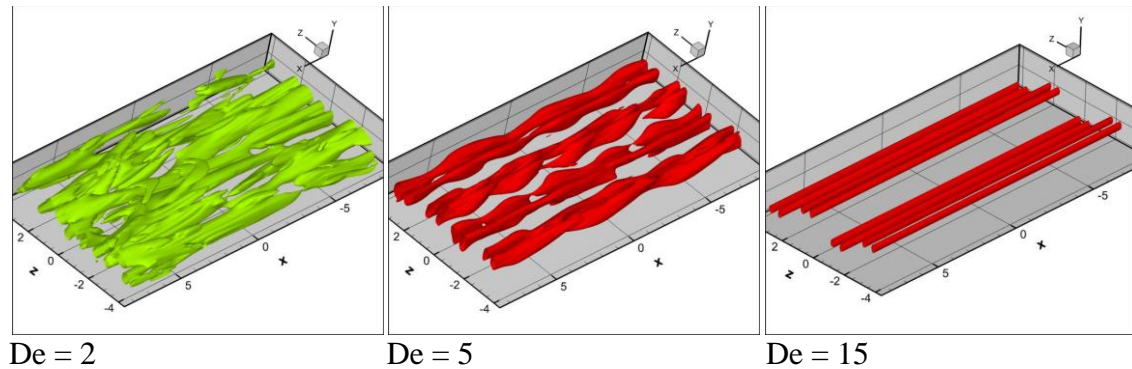


Figura 21 Distribuzione dei vortici, $U_c=1.5$

Osservando le strutture vorticose, si nota che i vortici assumono una forma cilindrica sempre più definita all'aumentare del numero di Deborah, occupando sempre minor spazio nel campo di moto e, in particolare, nel bulk. Il flusso tende progressivamente a perdere le sue caratteristiche turbolente, i vortici sono deboli e, come si vedrà nel seguito, l'ampiezza delle fluttuazioni di velocità molto bassa, confermando lo sviluppo di un flusso simile al laminare, già osservato in fig.19.

3.3 Analisi statistiche

Il regime turbolento è caratterizzato da un moto disordinato, completamente tridimensionale e non stazionario e da fluttuazioni di velocità con caratteristiche apparentemente non deterministiche. Se si ripete lo stesso esperimento e si misura la stessa quantità nello stesso punto per lo stesso intervallo temporale si ottengono dei segnali notevolmente differenti se confrontati istantaneamente, mentre essi hanno le stesse caratteristiche statistiche. Quest'osservazione sembra a prima vista inconciliabile con la natura delle equazioni di Navier-Stokes, che governano il fenomeno; essendo di tipo deterministico e avendo condizioni iniziali e al contorno definite, si ha che la soluzione deve essere deterministica nello spazio e nel tempo. Quest'apparente paradosso fu

risolto da Lorentz, il quale mostrò che alcuni sistemi non lineari possono avere una tale sensibilità alle condizioni iniziali che perturbazioni inapprezzabili nei parametri di partenza determinano rapidamente soluzioni completamente differenti [11]. La causa fondamentale dell'instaurarsi di un campo di moto turbolento è dunque da ricercarsi nell'intrinseca non linearità delle equazioni di Navier-Stokes: l'azione combinata dei termini non lineari, inerziali e viscosi è artefice dell'instabilità del flusso e della produzione di fluttuazioni "locali" di velocità, che comportano la generazione di strutture fluidodinamiche di piccola scala e l'evoluzione della turbolenza.

Appare irrealizzabile sviluppare una teoria che permetta di prevedere l'evoluzione degli stati turbolenti, quindi s'impone una teoria statistica, riferendosi alle medie delle grandezze fisiche turbolente, per descrivere la fisica del fenomeno.

Nelle pagine successive sono presentati i profili medi della velocità longitudinale u_{mean} , della temperatura T_{mean} , del prodotto $T'v'$, con T' e v' che indicano rispettivamente le fluttuazioni stocastiche locali della temperatura e della velocità verticale, e delle fluttuazioni *rms* (Root Mean Square) di velocità u_{rms} , v_{rms} e w_{rms} e di temperatura T_{rms} , in funzione della distanza tra le pareti.

Generalmente, i profili di velocità media presentano un tipico aspetto "a campana", dovuto a forti gradienti in prossimità delle pareti, nella regione dello strato limite, a causa della condizione di no-slip sulle pareti. I profili di temperatura presentano invece una forma a "S", con forti gradienti nella regione di strato limite, dove avviene l'intera variazione di temperatura nel flusso, e un andamento circa costante nel bulk, con un'inversione del gradiente più accentuata se il mescolamento dovuto alle strutture vorticosi in tale regione non è ottimale; le fluttuazioni di velocità v_{rms} raggiungono il massimo in corrispondenza del centro del canale, in quanto il loro moto in direzione verticale è guidato dalla forza di galleggiamento diretta verso la parete superiore e generata dal gradiente di temperatura imposto, mentre u_{rms} e w_{rms} raggiungono il massimo in prossimità delle regioni di strato limite, dove i gradienti di velocità e la turbolenza di parete sono più intensi.

3.3.1 Variazione dei profili statistici di fluidi Newtoniani e visco-elastici in convezione naturale

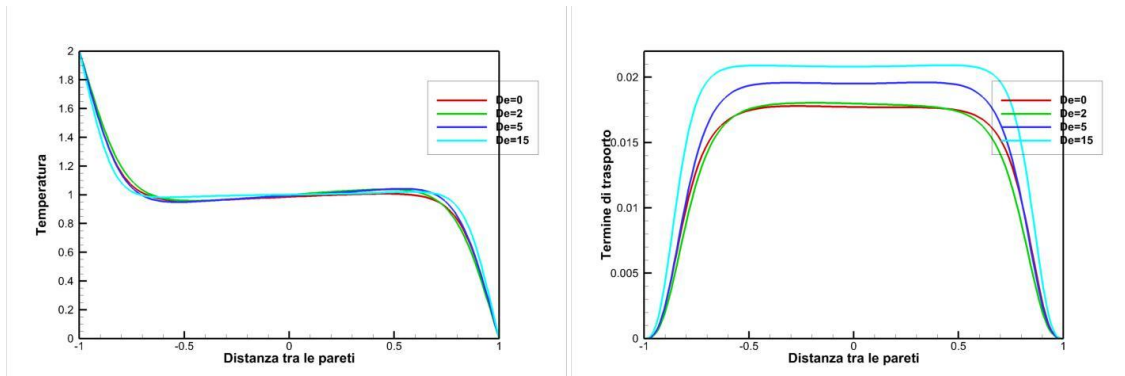


Figura 22 Profili medi di temperatura e del termine di trasporto al variare del numero di Deborah, $U_c = 0$

Osservando come varia il profilo di temperatura, in funzione del numero di Deborah, di un flusso turbolento in convezione naturale, si nota la presenza di un'inversione della curva al centro del canale. Secondo [11], tale inversione è dovuta al basso numero di Rayleigh usato per la simulazione, segno di un non ottimale mescolamento del flusso nel *bulk*. L'effetto del basso Rayleigh, secondo [11], è una conseguenza dell'instabilità secondaria di Kelvin-Helmholtz, generata dalle piume termiche, che crea una popolazione di vortici attorno al centro del dominio. Ai lati di ciascuna piuma si sviluppa non più di un vortice per parte, mentre per alti Ra è possibile osservare numerosi vortici attorno ad ogni piuma termica, che permettono un migliore mescolamento e un profilo di temperatura costante. In generale, ciò che emerge dall'osservazione del profilo di temperatura medio è che il gradiente di temperatura è molto piccolo nella regione di bulk, mentre in corrispondenza degli strati limite mostra picchi rilevanti: tale gradiente rappresenta proprio il numero di Nusselt utilizzato per quantificare lo scambio termico, e si nota come esso aumenti al crescere del numero di Deborah della soluzione.

Il termine di trasporto $T'v'$, essendo correlato allo scambio di energia termica nel flusso, cresce all'aumentare del numero di Deborah, confermando dunque che il flusso termico migliora all'aumentare delle proprietà viscoelastiche del fluido.

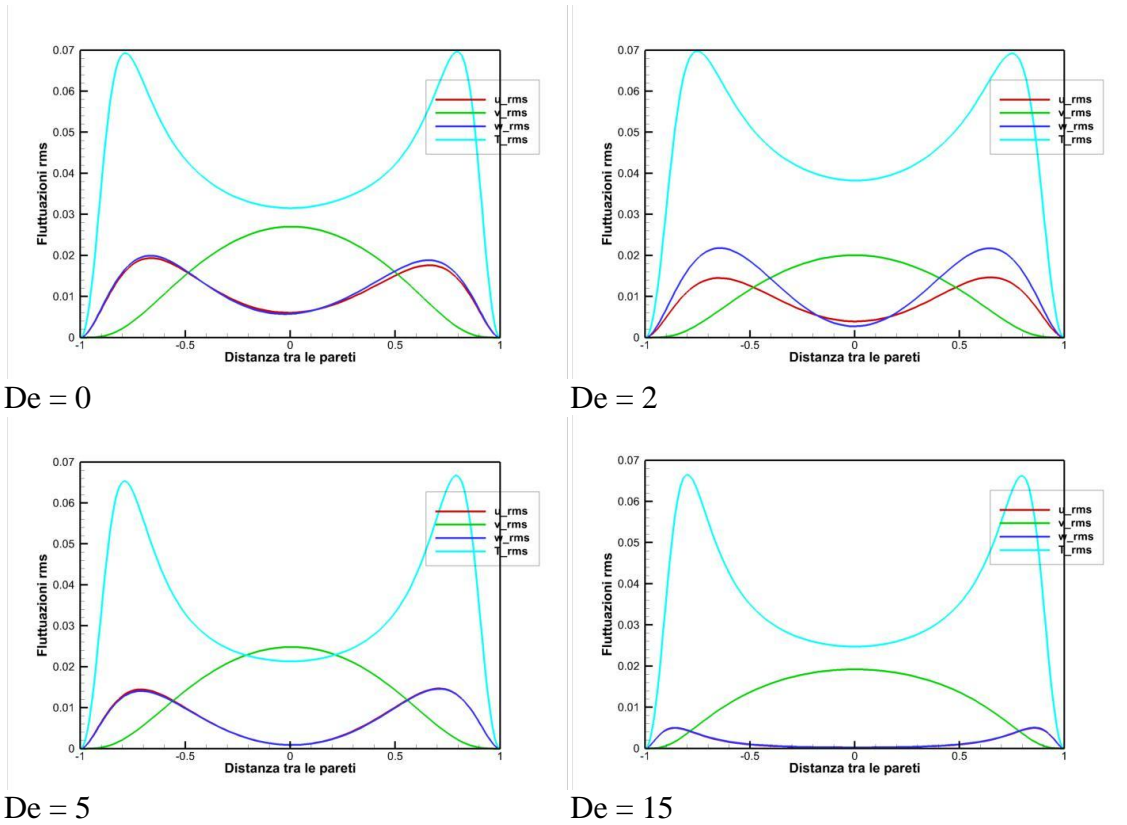


Figura 23 Profili delle fluttuazioni rms al variare del numero di Deborah, $U_c=0$

I risultati riportati in fig.23 mostrano come le soluzioni polimeriche presentino fluttuazioni di velocità e temperature progressivamente minori con l'incremento del numero di Deborah, benché la diminuzione della componente v_{rms} sia circa il 65% in meno rispetto alle componenti u_{rms} e w_{rms} . Tale componente normale risulta dunque molto maggiore rispetto alle componenti orizzontali, ossia aumenta l'anisotropia del campo di velocità a favore della direzione y , lungo la quale avviene lo scambio termico. Lo slittamento del massimo delle fluttuazioni u_{rms} e w_{rms} verso lo strato limite suggerisce che le celle convettive sono più organizzate e di dimensioni minori.

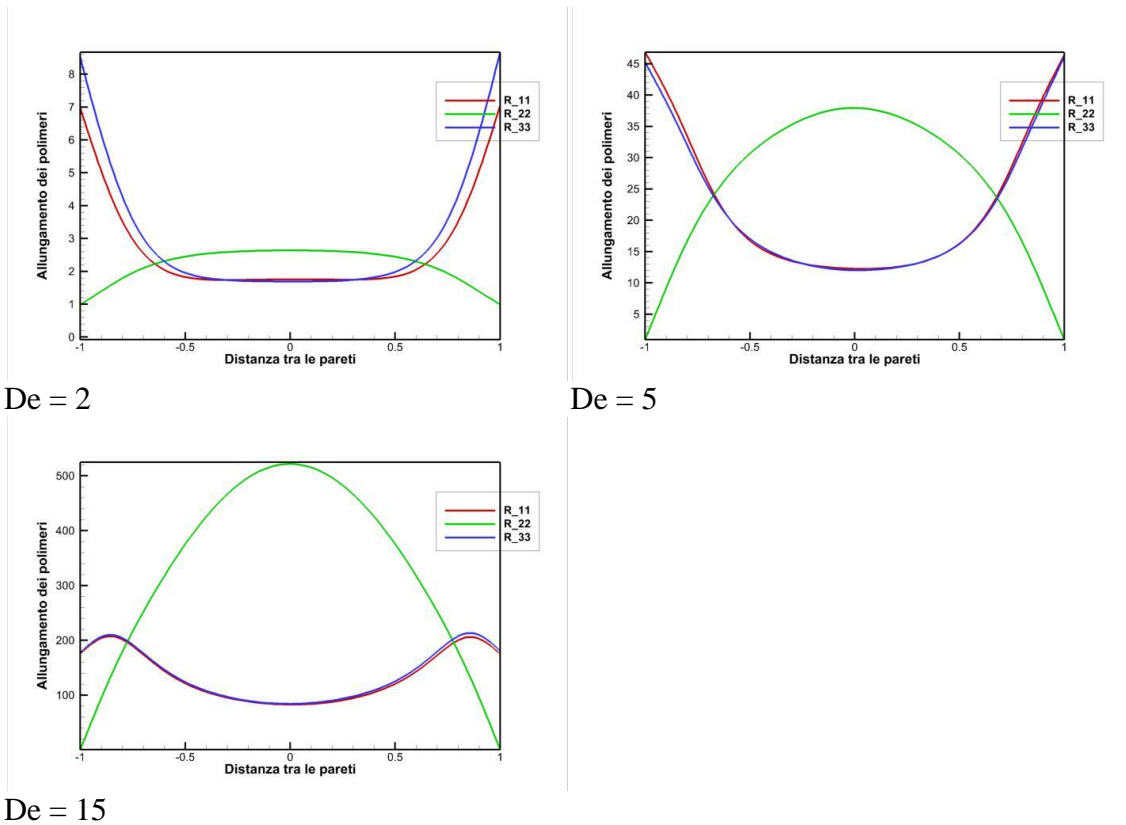


Figura 24 Allungamento delle catene polimeriche lungo x,y, e z al variare del parametro De , $U_c=0$

L'aumento del numero di Deborah comporta un marcato aumento dell'allungamento dei polimeri in direzione y normale al moto, in particolare nel *bulk*. Tale aumento è dovuto a un incremento dell'intensità delle forze di galleggiamento: è evidente come ciò significhi un miglioramento della dinamica convettiva e del flusso termico nel canale. Queste osservazioni confermano come l'introduzione di catene polimeriche in soluzione esalti le forze di galleggiamento nel flusso, aumentando nettamente il trasporto di calore in direzione normale, e diminuisca i disturbi turbolenti nelle altre componenti spaziali, portando a un flusso ordinato lungo y, guidato dalle celle convettive, come già riportato in [5].

3.3.2 Variazione dei profili statistici di un fluido Newtoniano in convezione mista

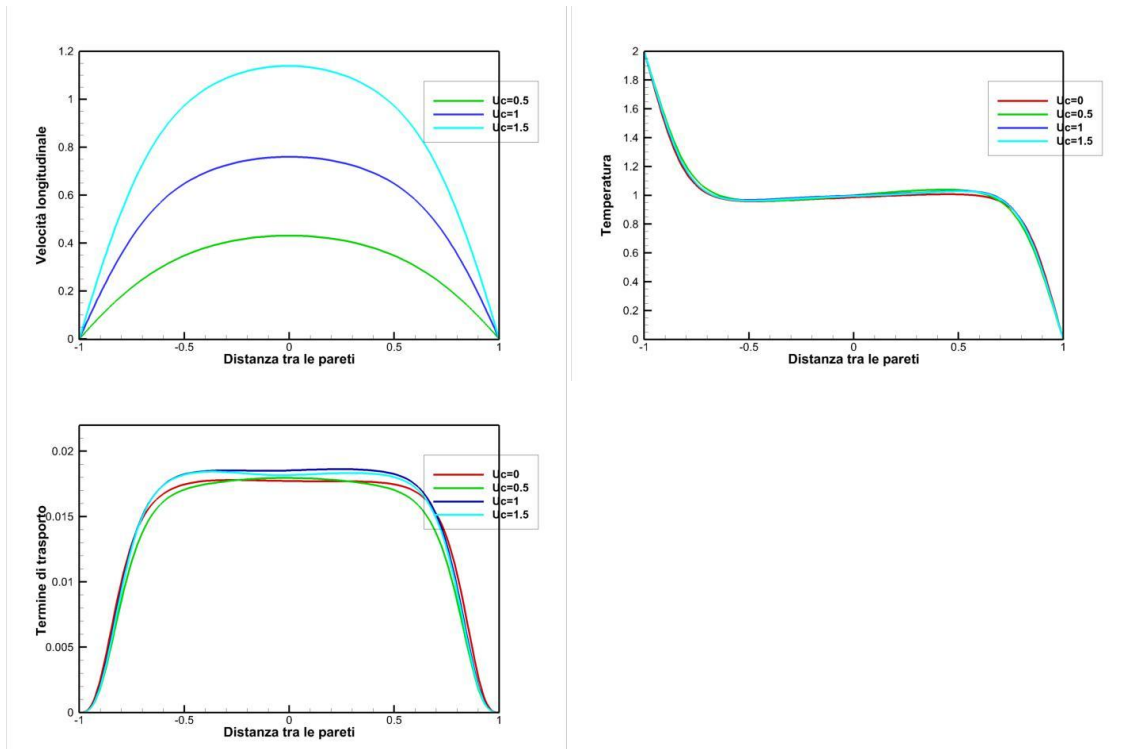
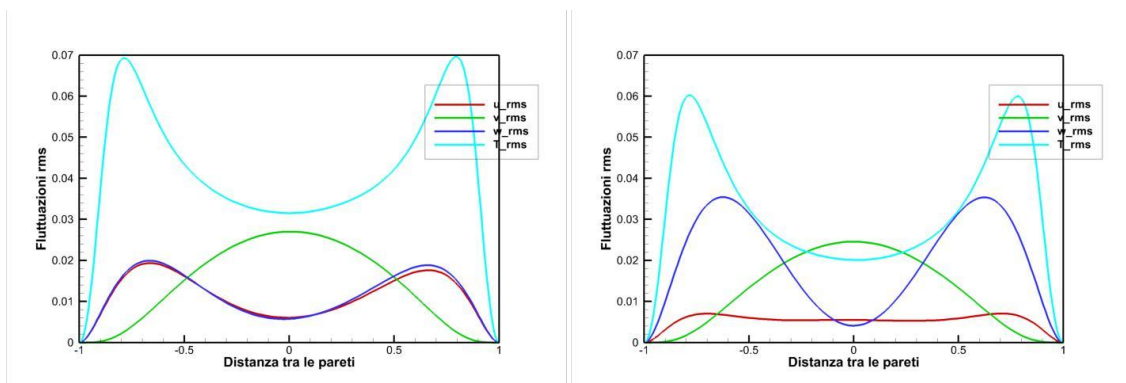


Figura 25 Profili medi di velocità, temperatura e del termine di trasporto al variare di U_c , $De=0$

L'incremento del gradiente di pressione forzante opera un naturale aumento della velocità del flusso, in particolare nel bulk, generando uno *shear* più intenso nella regione dello strato limite. Non sono invece significativamente modificati i profili di temperatura e del termine di trasporto, il processo convettivo non è alterato significativamente e, di fatto, il numero di Nusselt rimane pressoché costante.



$U_c = 0$

$U_c = 0.5$

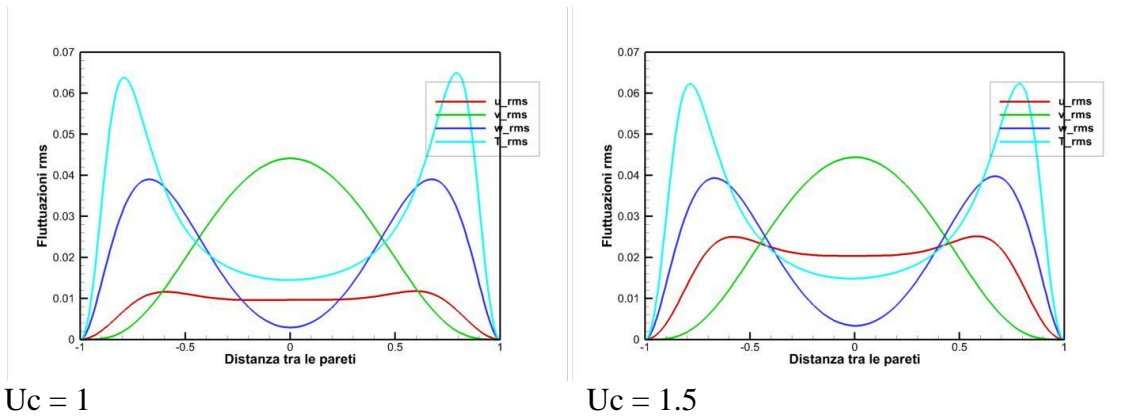


Figura 26 Profili delle fluttuazioni *rms* al variare del parametro U_c , $De=0$

Se il processo convettivo naturale non è sostanzialmente modificato, non si può dire altrettanto per il campo di velocità. Dall'osservazione dei campi di temperatura è emerso che, al crescere del gradiente di pressione forzante, la formazione delle piume termiche è disturbata e si generano invece delle strutture convettive cilindriche, allungate lungo la direzione x del moto. Tale organizzazione del campo genera maggiori forze inerziali sul piano orizzontale, in particolare lungo la direzione trasversale z , come testimoniano le aumentate fluttuazioni *rms* lungo proprio tale direzione. Parallelamente, il termine u_{rms} cala notevolmente, e solo per $U_c=1.5$ assume nuovamente l'intensità mostrata in convezione naturale.

Forze di galleggiamento maggiori, dovute proprio alla configurazione con i cilindri convettivi, provocano un incremento di v_{rms} lungo la direzione normale, ma allo stesso tempo le fluttuazioni T_{rms} calano, mantenendo il termine di trasporto costante.

3.3.3 Variazione dei profili statistici di fluidi viscoelastici in convezione mista

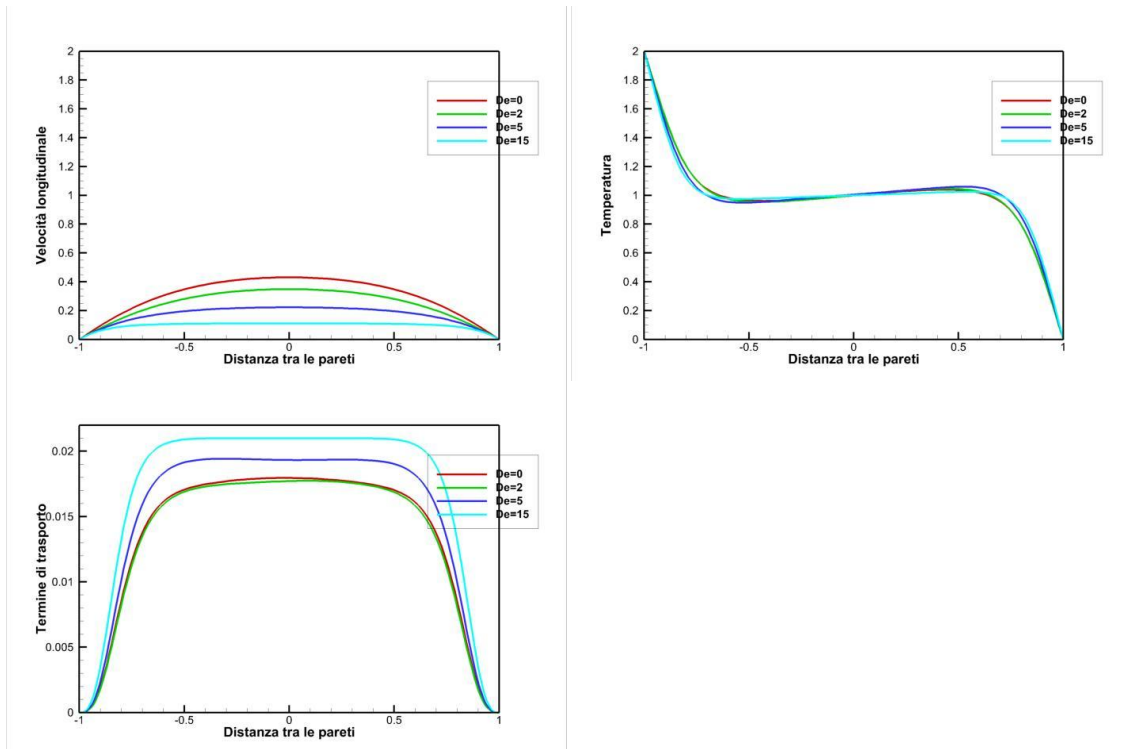


Figura 27 Profili medi di velocità, temperatura e del termine di trasporto al variare di De , $U_c=0.5$

Si nota subito, osservando la prima immagine di fig.27, che all'aumentare del numero di Deborah il flusso rallenta nonostante il valore di U_c sia costante, conseguenza dell'aumentata viscosità della soluzione polimerica. Il profilo di temperatura mostra un gradiente lievemente inferiore se $De=2$ in prossimità dello strato limite, per poi aumentare nuovamente al crescere di De . Parallelamente, il termine di trasporto migliora sensibilmente se $De \geq 5$, ed è naturale aspettarselo in quanto, ricordando la configurazione del campo di temperatura, all'aumentare del numero di Deborah aumenta il numero e l'ordine delle piume termiche e delle celle convettive, indicando un ottimo flusso termico lungo y .

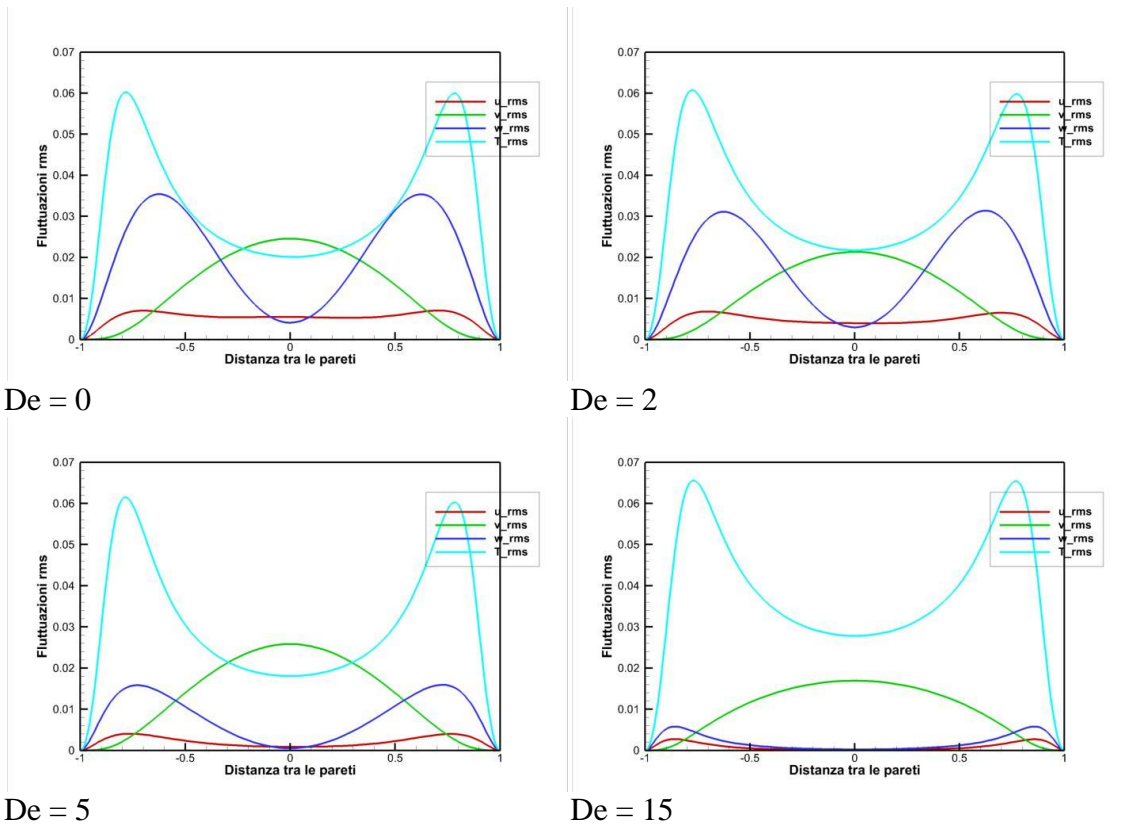


Figura 28 Profili delle fluttuazioni *rms* al variare del parametro De , $U_c=0.5$

La presenza di un gradiente di pressione forzante favorisce un netto aumento delle fluttuazioni w_{rms} rispetto a u_{rms} , che invece riducono la loro ampiezza rispetto ai casi omologhi in convezione naturale. Bisogna però osservare che tali differenze sono più marcate se il numero di Deborah è basso, in quanto il suo incremento opera una generale riduzione della turbolenza: per $De=15$ le differenze con l'analogo caso in convezione naturale sono trascurabili. Il campo turbolento presenta una certa anisotropia, con fluttuazioni più ampie lungo y , e in generale lo scambio termico è decisamente favorito dall'introduzione di catene polimeriche in soluzione.

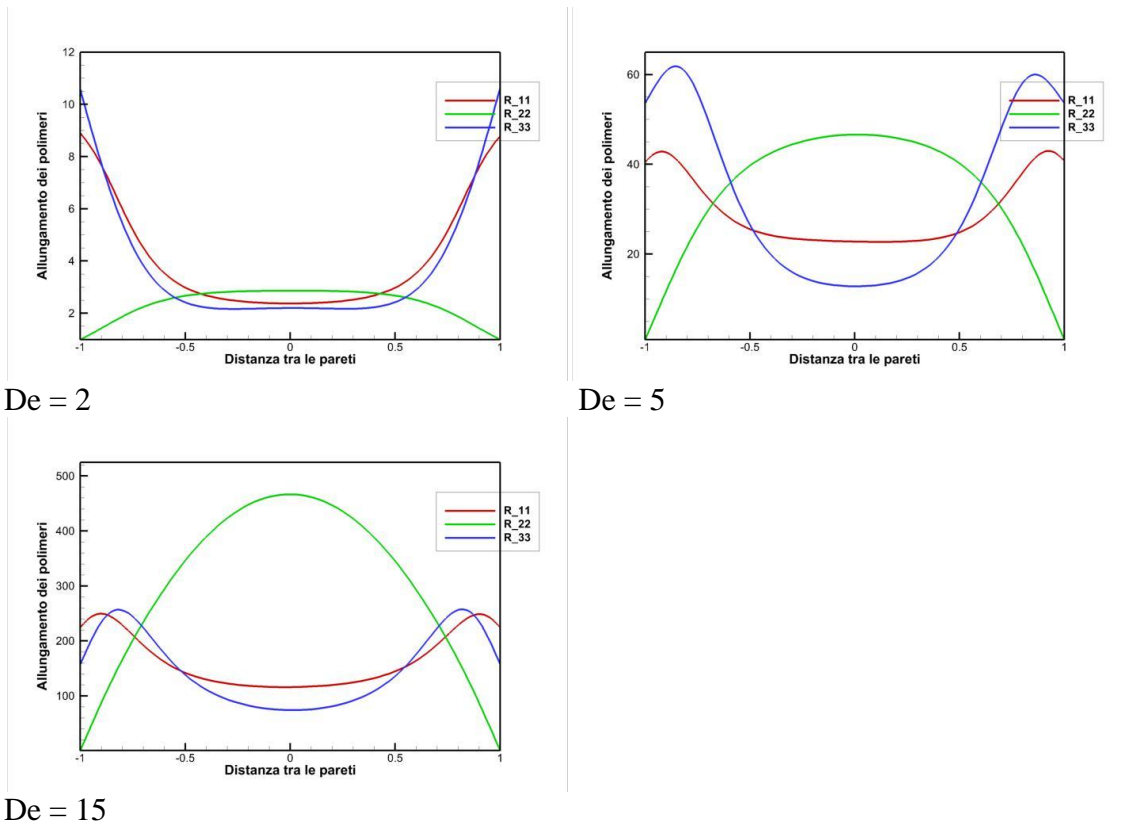


Figura 29 Allungamento delle catene polimeriche lungo x,y, e z al variare del parametro De, $U_c=0.5$

L'interazione tra le catene polimeriche e la dinamica convettiva cresce con il numero di Deborah: all'aumentare di tale parametro, infatti, i polimeri subiscono allungamenti più significativi in tutte le direzioni.

In fig.29, $De=2$, essi si presentano maggiormente allungati in prossimità dello strato limite, lungo le due direzioni orizzontali x e z, a causa dello *shear* vicino alla parete e della turbolenza in tale regione. Ma se il numero di Deborah aumenta, essi interagiscono con la dinamica convettiva in modo tale da subire trazione principalmente in direzione normale: il valore dell'allungamento R_{22} è infatti nettamente maggiore rispetto agli altri due, capovolgendo la situazione iniziale e incrementando notevolmente il flusso termico.

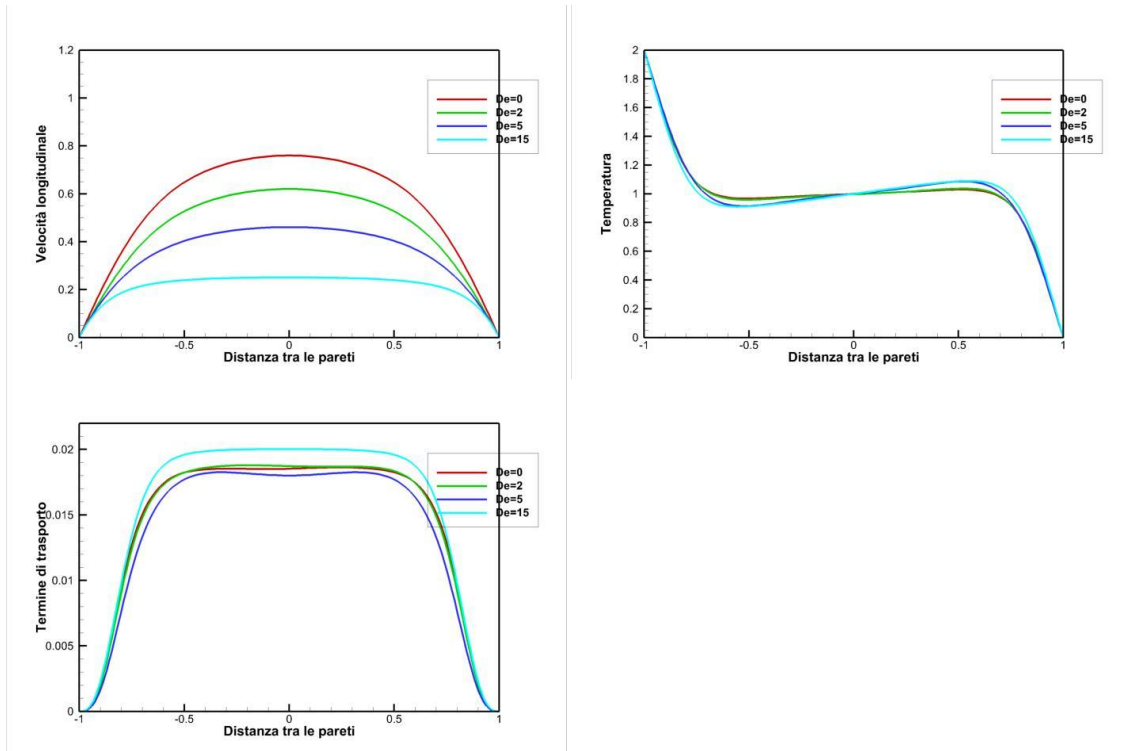
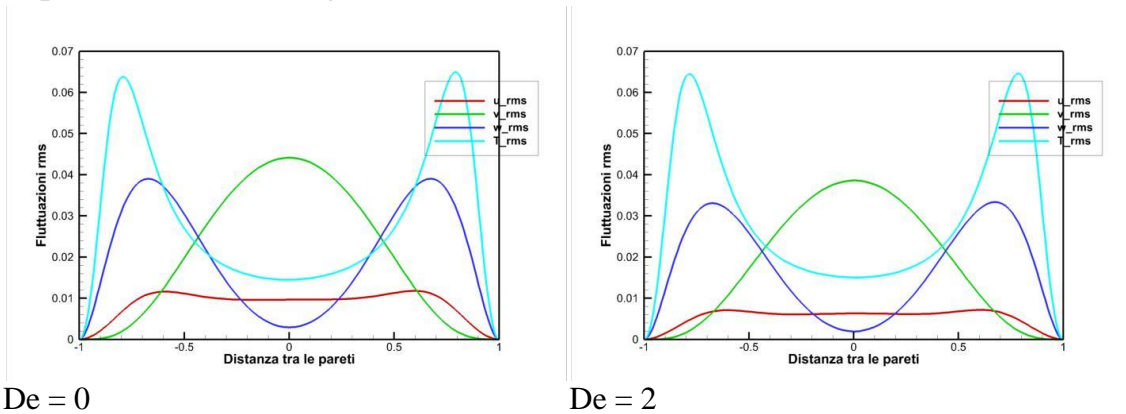


Figura 30 Profili medi di velocità, temperatura e del termine di trasporto al variare di De , $U_c=1$

Aumentando l'intensità del gradiente di pressione forzante, l'evoluzione dei profili statistici di temperatura, velocità e termine di trasporto non mostra sostanziali modifiche. Da notare, il gradiente di temperatura presenta un aumento non trascurabile solo per $De=15$, così come il termine di trasporto, mentre l'inversione del profilo di temperatura nella zona del bulk per $De=5$ e $De=15$ è indice di scarsa presenza di vortici in tale regione.

Alla luce di queste considerazioni, è evidente come il numero di Nusselt aumenti significativamente solo per $De=15$ e, in ogni caso, sia inferiore rispetto ai casi omologhi, ma con U_c inferiore.



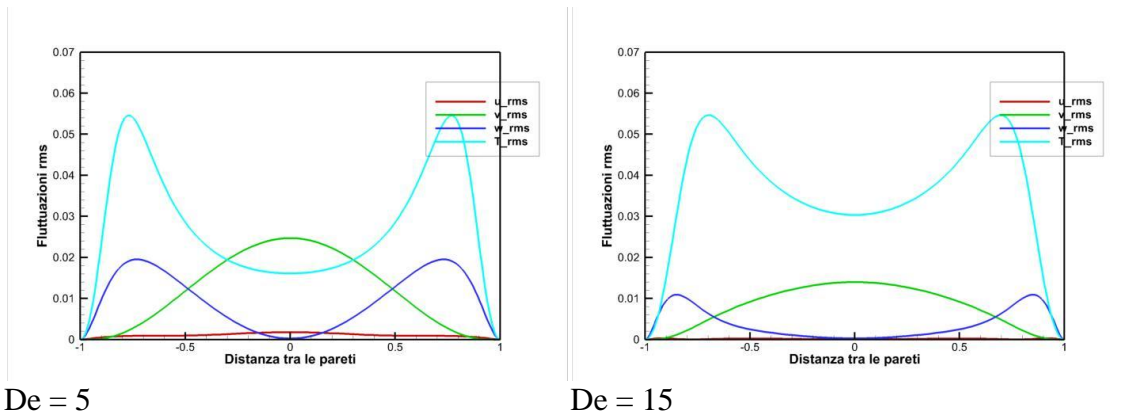
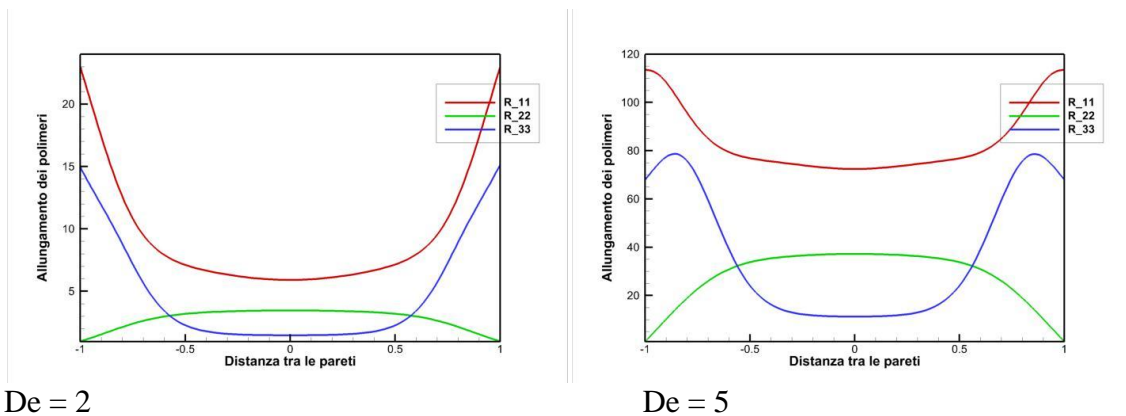
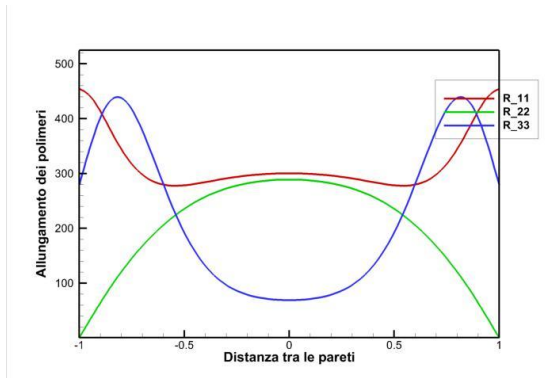


Figura 31 Profili delle fluttuazioni *rms* al variare del parametro De , $U_c=1$

Le immagini riportate in fig.31 confermano quanto osservato per le simulazioni con $U_c=0.5$: il gradiente di pressione forzante aumenta l'ampiezza delle fluttuazioni turbolente in tutte le dimensioni, in particolare w_{rms} a causa della configurazione con i cilindri convettivi assunta dal flusso, mentre il numero di Deborah svolge esattamente l'azione opposta, riducendo fortemente le fluttuazioni u_{rms} e w_{rms} sul piano orizzontale e in misura minore quelle v_{rms} in direzione normale, introducendo un'anisotropia nel campo turbolento che favorisce il flusso termico. Per quanto riguarda T_{rms} , il profilo è reso omogeneo, diminuendo i picchi di fluttuazioni nella regione di strato limite e aumentandone invece l'ampiezza nel bulk.

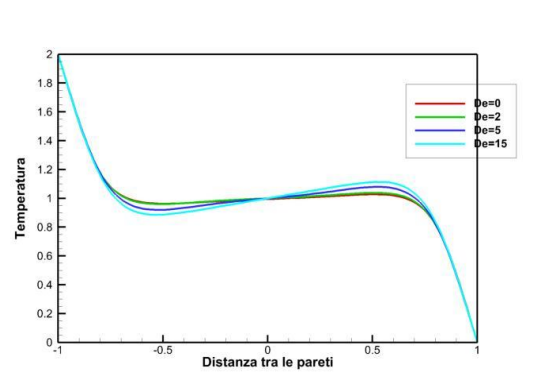
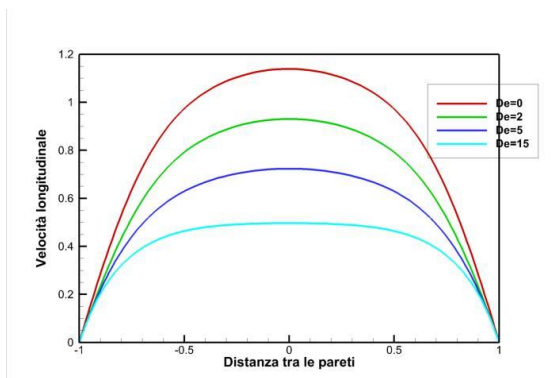




De = 15

Figura 32 Allungamento delle catene polimeriche lungo x,y, e z al variare del parametro De, $U_c=1$

L'aumento del gradiente esterno fa sì che l'allungamento delle catene polimeriche sul piano orizzontale R_{11} sia sempre maggiore rispetto a quello verticale R_{22} , infatti la particolare struttura convettiva assunta dal flusso al crescere di U_c rende le forze d'inerzia su x-z più intense rispetto alle forze di galleggiamento lungo y. L'introduzione di polimeri con peso molecolare maggiore mitiga solo parzialmente tale tendenza allungandosi maggiormente in direzione normale, interferendo con la dinamica convettiva e migliorando il flusso termico, come si deduce dal progressivo maggior allungamento R_{22} in relazione a R_{11} e R_{33} .



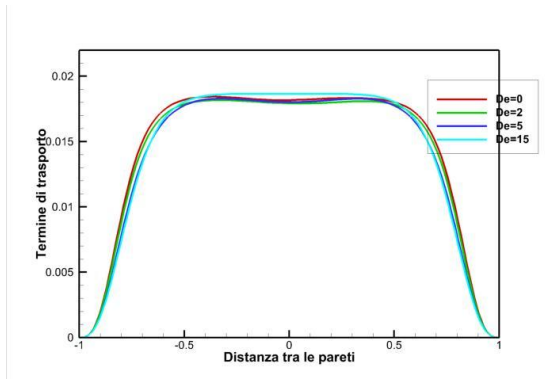


Figura 33 Profili medi di velocità, temperatura e del termine di trasporto al variare di De , $U_c=1.5$

L'ulteriore aumento del gradiente di pressione esterno impedisce qualsiasi beneficio, in termini di organizzazione e numero delle celle convettive e bassa turbolenza del flusso, ottenibile dall'aumento del numero di Deborah. Il profilo di temperatura della soluzione non mostra variazioni del gradiente a parete e il termine di trasporto rimane costante anche per la simulazione $De=15$.

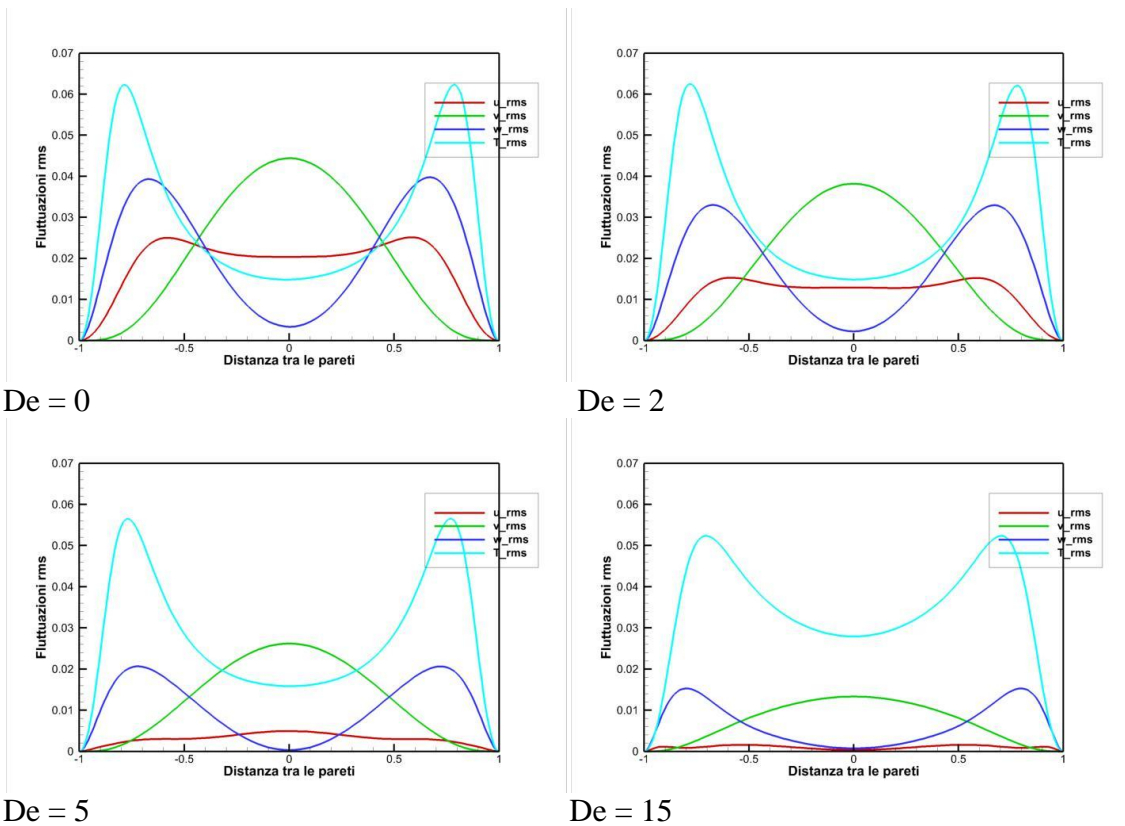


Figura 34 Profili delle fluttuazioni rms al variare del parametro De , $U_c=1.5$

I profili statistici medi delle fluttuazioni turbolente sono profondamente differenti tra loro al crescere del parametro De , passando dal caso $De=0$ $Uc=1.5$, che presenta un'intensità di turbolenza tra le maggiori osservate in questa tesi, al caso $De=15$ $Uc=1.5$, che invece presenta caratteristiche simili a un flusso laminare. Eppure, il numero di Nusselt si rivela pressoché costante per tutti questi casi.

Contrariamente a quanto ci si poteva aspettare, fornire un gradiente di pressione forzante non è un fattore favorente lo scambio termico tra le due pareti. Tale gradiente, piuttosto che favorire un maggior flusso termico a parità di numero di Deborah della soluzione, riducendo la turbolenza e permettendo la formazione di celle convettive più piccole, numerose e stabili, si è rivelato agire direttamente sulla dinamica convettiva, introducendo un disturbo che limita e, nei casi con Uc maggiore, impedisce la formazione di tale architettura nel flusso. A seguito di tale interferenza, crescono maggiormente le forze di inerzia lungo x e z e il valore degli allungamenti delle catene polimeriche su tali direzioni, R_{11} e R_{33} , riducendosi invece drasticamente le forze di galleggiamento e il valore di R_{22} , importanti ai fini del flusso termico.

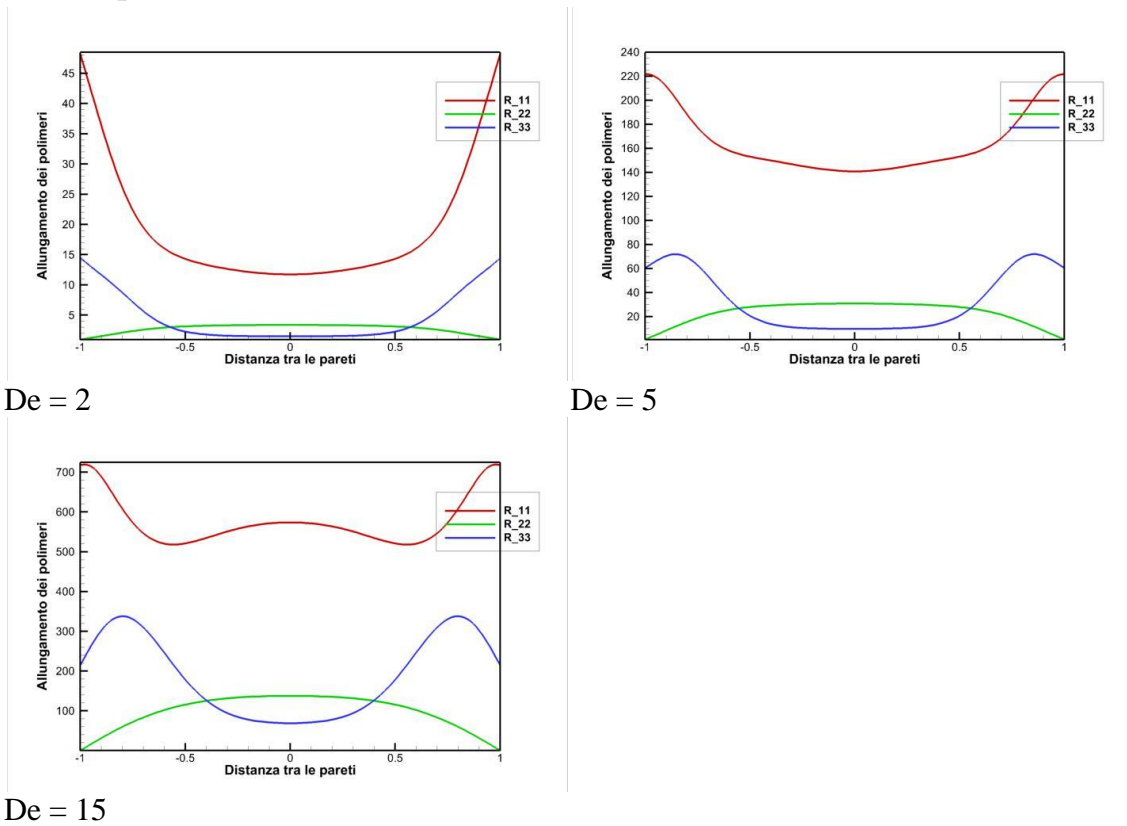


Figura 32 Allungamento delle catene polimeriche lungo x,y, e z al variare del parametro De , $Uc=1.5$

Dunque, se fino a $U_c=1$ si riuscivano comunque a ottenere benefici introducendo catene polimeriche sempre più ad alto numero di Deborah nel flusso, con $U_c=1.5$ qualsiasi effetto positivo dei polimeri viene annullato dall'eccessivo gradiente di pressione esterno

Conclusioni

In questa tesi è stato affrontato lo studio degli effetti dei polimeri diluiti in un solvente Newtoniano, che abbia raggiunto la stazionarietà statistica, in un processo di convezione mista. La ricerca è stata condotta per mezzo di simulazioni numeriche dirette, in un canale con un gradiente di temperatura imposto, analizzando dapprima gli effetti di una variazione del numero di Deborah della soluzione ottenuti in convezione naturale, poi introducendo gradienti di pressione esterni di varia intensità e comparando quanto accadeva alla struttura del flusso per i diversi numeri di Deborah presi in considerazione.

L'equazione costitutiva che descrive il comportamento del fluido è il modello FENE-P (Finite Extension Nonlinear Elasticity con l'ipotesi di Peterlin), nel quale per ogni molecola viene adottato un modello meccanico attraverso un approccio microreologico, che si adatta meglio alla descrizione della soluzione diluita reale.

Per la simulazione numerica diretta del problema è stato utilizzato un metodo numerico basato sul codice di Lundbladh et al [18], nel quale si utilizzano metodi spettrali, con rappresentazione nello spazio di Fourier nelle direzioni di omogeneità x e y , nelle quali si possono considerare condizioni al contorno periodiche e griglie uniformi, e una rappresentazione nello spazio di Chebyshev nella direzione di non omogeneità z .

Questo codice, creato per compiere la simulazione numerica diretta di flussi turbolenti o in transizione in un canale piano, è stato modificato (non entro l'attività di tesi) introducendo la temperatura che agisce da scalare attivo e aggiungendo il calcolo del numero di Nusselt, indice della bontà della convezione naturale, rispetto alla condizione in un flusso di parete. Per le simulazioni dell'evoluzione del fluido viscoelastico è stato utilizzato lo stesso codice, modificato da [9], nel quale è stato introdotto il campo di temperatura da accoppiare al campo cinematico.

Sono stati, inoltre, adattati a questo problema gli strumenti di *post-processing* utilizzati nel caso di flusso turbolento in un canale piano, in modo da fornire i risultati, in termini di profili medi e fluttuazioni del campo di temperatura e di velocità e visualizzazioni tridimensionali, che hanno permesso di comprendere meglio il processo e confrontarlo con i risultati presenti in letteratura.

I risultati della simulazione del comportamento delle soluzioni viscoelastiche in convezione naturale mostrano chiaramente un aumento del trasporto di calore rispetto alla corrispondente soluzione Newtoniana. Le strutture coerenti più evidenti nella convezione di Rayleigh-Bènard, al numero di Rayleigh simulato, sono le piume termiche, responsabili del trasporto di calore per convezione. I dati forniti dalle simulazioni numeriche condotte hanno permesso la rappresentazione di un campo istantaneo di temperatura, nel quale queste strutture sono facilmente individuabili e presentano una tipica struttura *a fungo*. Quest'aumento è il risultato di un'alterazione evidente delle strutture del processo; la topologia delle celle convettive viene, infatti, modificata in modo espressivo dalla presenza dei polimeri, che portano alla formazione di celle convettive molto organizzate e più piccole, quindi più numerose. Collegata a questi cambiamenti di scala delle strutture, vi è una modifica nell'intensità della turbolenza. Nel caso Newtoniano le strutture vorticosi, individuate come regioni nelle quali il discriminante invariante D è positivo, coinvolgono l'intera regione del flusso e si sviluppano sia in corrispondenza dello strato limite che del *bulk*, interagendo in modo invasivo con le dinamiche delle celle convettive. Nelle soluzioni viscoelastiche, invece, al crescere del numero di Deborah i vortici si manifestano principalmente nella regione dello strato limite e sono quasi assenti nel *bulk*. Sembrerebbe, quindi, che i polimeri sopprimano la turbolenza di *bulk*, eliminando i vortici al centro del canale, responsabili del *mixing* interno. Questo potrebbe fornire una spiegazione al fatto che i polimeri consentano uno sviluppo più regolare e ordinato delle piume termiche, poiché la riduzione delle interazioni tra vortici e celle convettive consente l'evoluzione di piume termiche più numerose e meglio organizzate.

I benefici ottenuti in termini di aumento del flusso termico nel canale sono progressivamente annullati dall'introduzione di gradienti di pressione forzanti d'intensità crescente. La convezione forzata modifica profondamente la configurazione dei campi di temperatura e velocità di un flusso Newtoniano, impedendo la formazione di numerose piume termiche e generando moto convettivo attraverso la creazione di *rolls* allungati in direzione del moto. Queste strutture non alterano in sé il flusso termico nel canale, poiché il numero di Nusselt si mantiene pressoché costante al crescere del parametro Uc . Tuttavia, l'aumento del numero di Deborah di soluzioni poste in tale regime di convezione non migliora il trasporto di

calore. Al crescere del parametro De , i flussi in regime di convezione mista sono laminari: i vortici sono di debole intensità e circoscritti in limitate zone del *bulk*, di fatto non interagendo significativamente con la dinamica convettiva.

La natura turbolenta del flusso permette uno studio dei profili caratteristici solo dal punto di vista statistico, utilizzando medie d'insieme e valori efficaci *Root Mean Square*.

I profili delle fluttuazioni *rms* di velocità in direzione orizzontale e verticale ottenuti nelle simulazioni in convezione naturale si sono dimostrati coerenti con quelli tipici del flusso di Rayleigh-Bénard. Le fluttuazioni di velocità v_{rms} raggiungono il massimo in corrispondenza del centro del canale, in quanto il loro moto in direzione verticale è guidato dalla forza di galleggiamento diretta verso la parete superiore del canale e generata dal gradiente di temperatura imposto. Gli andamenti dei profili che caratterizzano i casi viscoelastici sono simili al caso Newtoniano, ma con una significativa riduzione di ampiezza. I dati della simulazione $De=15$, $Uc=0$ mostrano una componente verticale molto più grande rispetto alle componenti orizzontali, ossia si verifica un aumento dell'anisotropia del campo di velocità. Nella regione dello strato limite, le fluttuazioni di temperatura e velocità dei casi Newtoniano e non-Newtoniano sono molto vicine. Le differenze principali si osservano per le componenti orizzontali di velocità u_{rms} e w_{rms} , con una riduzione dello strato limite cinematico. L'anisotropia nel campo di velocità è generata da un rapporto di forze favorevole a quelle di galleggiamento, confermato dal maggior allungamento dei polimeri proprio in direzione y , e ha come conseguenza un incremento del numero di Nusselt.

I profili delle fluttuazioni *rms* di velocità in direzione orizzontale e verticale ottenuti nelle simulazioni in convezione mista mostrano un evidente aumento delle fluttuazioni w_{rms} rispetto alle altre due componenti spaziali, dovuto alle forze inerziali generate dai cilindri convettivi attraverso i quali si svolge la dinamica convettiva. L'azione delle catene polimeriche si conferma svolgersi nella direzione di una riduzione generale della turbolenza del flusso. Nonostante ciò, il flusso termico non è influenzato positivamente come nei casi con gradiente forzante inferiore o nullo e, per il caso $Uc=1.5$, l'incremento del numero di Deborah non sortisce effetto alcuno sullo scambio di calore. La maggior intensità dello *shear* nel canale determina un incremento notevole dell'allungamento dei

polimeri in direzione x, dunque evidenzia un maggior peso delle forze inerziali rispetto a quelle di galleggiamento: coerentemente con la configurazione del flusso, l'incremento del numero di Deborah favorisce uno *stretching* maggiore lungo la direzione x e y, non influenzando particolarmente la direzione trasversale z.

Per concludere, come nei *drag reduction flows*, i polimeri si comportano come un sistema meccanico autonomo, che dissipa energia in modo "intelligente", incrementando il termine di produzione termica e favorendo lo sviluppo di uno schema coerente di piume termiche. Tale meccanismo è però inconciliabile con la presenza di una convezione forzata, che disturba la dinamica convettiva al punto, se è abbastanza intensa, da impedire qualsiasi beneficio in termini di trasporto termico.

Bibliografia

- [1] R.J. Adrian, R.T.Ferreira, T.Boberg, *Turbulent thermal convection in wide horizontal fluid layers*, Experiments in Fluid **4**,121-141, 1986.
- [2] G.Ahlers A.Nikolaenko, *Effects of a polymer additive on heat transport in turbulent Rayleigh-Bènard convection*, Applied Mathematical Sciences 84, Springer 1990.
- [3] H.Bènard, *Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide*, Rev. Gèn. Sciences Pure Appl. **11**(23), 1261-1271, 1900.
- [4] R. Benzi, E. S. C. Ching, E. De Angelis, *Effect of polymer additives on heat transport in turbulent thermal convection*, Phys. Rev. Lett. 104, 024502 2010.
- [5] F.Z.Cagnazzo, *Studio della convezione naturale in un fluido viscoelastico*, Tesi di Laurea Specialistica, Università di Bologna, 2010.
- [6] S.Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Dover, New York, 1981.
- [7] Z.M.Chen, W.G.Price, *On the relation between Rayleigh-Bènard convection and Lorenz System*, Chaos, Solitons and Fractals, 28, 571-578, 2006.
- [8] E.S.C. Ching, H. Guo, X.Shang, P. Tong, K.Q. Xia, *Extraction of plumes in turbulent thermal convection*, Phys. Rev. Lett. 93, 124501, 2004.
- [9] E. De Angelis, *The influence of polymer additives on the structure of wall turbulence*, Tesi di dottorato, Università di Roma La Sapienza – Dipartimento di Meccanica e Aeronautica, 2001.
- [10] M. Doi, *Introduction to polymer physics*, Phys. Fluids, Oxford Science Publication, 1982.
- [11] .B.Pope, *Turbulent Flows*, Cambridge Univ. Press 2000.

- [12] Lord Rayleigh, *On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side*, Phil. Mag., ser. 6, **32** (192), 529-546, 1916.
- [13] A.V. Getling, *Rayleigh-Bènard convection: structures and dynamics*, World Scientific Publishing, 1998.
- [14] O. Shishkina, C. Wagner, *Analysis of thermal dissipation rates in turbulent Rayleigh-Bènard convection*, J. Fluid Mech. **546**, 51-60, 2008.
- [15] S. Grossman, D. Lohse, *scaling in thermal convection: a unifying theory*, J. Fluid Mech. 407, 27, 2008.
- [16] D. Lohse, K.Q. Xia, *Small-scale properties of turbulent Rayleigh-Bènard convection*, Ann. Rev. Fluid Mech. 42, 335-64, 2010.
- [17] E.N. Lorenz, *Deterministic non-periodic flow*, J. Atmos. Sci. 20, 130-41, Springer, 1963.
- [18] C. M. White, C. G. Mungal, *Mechanics and prediction of turbulent drag reduction with polymer additives*, Ann. Rev. Fluid Mech. 40, 235-256, 2008.
- [19] D.D. Joseph, *Fluid Dynamics of viscoelastic liquids*, Applied Mathematical Sciences 84, Springer 1990.
- [20] Giovanni La Casa, *Analisi sperimentale e numerica della convezione mista in aria in canali uniformemente riscaldati in presenza di una parete mobile*, Tesi di Dottorato, Università degli studi di Napoli "Federico II", 2007.
- [21] P.K. Mishra, M.K. Verma, *Energy spectra and fluxes for Rayleigh-Bènard convection*, Phys. Rev. Lett. 81, 056316, 2010.

Appendice

Metodo di identificazione delle strutture vorticose

L'approccio utilizzato per l'identificazione dei vortici [9] parte dalla definizione di vortice come regione nella quale la rotazione prevale sulla deformazione locale, permettendo il moto a spirale delle particelle. L'esistenza di una struttura vorticosa è legata al campo cinematico locale. Quindi, per caratterizzare il moto relativo in una data regione del campo, viene studiato il tensore gradiente di velocità. L'equazione per il vettore del moto relativo ($r = x - x_0$) è:

$$\frac{dr_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} r_j = A_{ij} r_j \quad (\text{A.1})$$

In ogni punto può essere considerato un problema linearizzato e, dunque, la traiettoria del moto relativo viene determinata attraverso gli autovalori λ_1, λ_2 e λ_3 del gradiente di velocità, che sono soluzioni dell'equazione caratteristica:

$$\lambda^3 + P\lambda^2 + Q\lambda + R = 0 \quad (\text{A.2})$$

I coefficienti di questa equazione polinomiale sono gli invarianti del gradiente di velocità, ossia:

$$P = -A_{ii} \quad Q = -\frac{1}{2}A_{ij}A_{ji} \quad R = -\frac{1}{3}A_{ij}A_{jk}A_{ki} \quad (\text{A.3})$$

dove il primo invariante P è nullo per un flusso incomprimibile. Inoltre, la natura delle radici viene determinata attraverso il segno del discriminante:

$$D = \frac{27}{4}R^2 + Q^3 \quad (\text{A.4})$$

Se il discriminante è positivo, il tensore A_{ij} ammette due autovalori complessi coniugati ed uno reale, mentre se $D < 0$ tutti gli autovalori sono reali. Questo significa che, poiché il moto a spirale si manifesta quando

sono presenti autovalori complessi coniugati, la condizione di esistenza dei vortici è per $D > 0$. A causa dell' incomprimibilità, la somma dei tre autovalori deve essere nulla, quindi c'è almeno un autovalore per ogni segno. La divisione tra autovalori positivi e negativi è determinata dal segno di $R = -\lambda_1\lambda_2\lambda_3$, ossia, se $R > 0$ c'è una direzione di contrazione e due direzioni di espansione, mentre se $R < 0$ c'è una direzione di espansione e due di contrazione.

Il secondo invariante può essere scomposto in due termini:

$$Q = -\frac{1}{2}(S_{ij}S_{ji} + \Omega_{ij}\Omega_{ji}) \quad (A.5)$$

Questa espressione sottolinea il fatto che lo schema locale del flusso dipende dal bilancio tra vorticità e deformazione. Quindi, le regioni nelle quali la vorticità prevale sulla componente di deformazione del gradiente di velocità, valori positivi di Q , corrisponde a valori positivi del discriminante. Le zone caratterizzate da un' elevata vorticità presentano un moto a spirale. Considerando questa teoria, verranno considerati come vortici le regioni nelle quali il discriminante è positivo. Un importante caratteristica di questo metodo è che sia Q che R e, di conseguenza il suo discriminante, sono invarianti per una traslazione non uniforme ed indipendenti dall' orientamento della trasformazione di coordinate.

Le regioni nelle quali sono presenti strutture vorticose vengono identificate, in questo caso, come zone caratterizzate da un discriminante invariante $D > 0$, nello specifico $D = 0.001$.