Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

Scuola di Scienze
Corso di Laurea in Fisica

Operatori Simmetrici Massimali in Meccanica Quantistica

Relatore:
Prof. Fabio Ortolani

Presentata da:
Matteo Parisi

Sessione II
Anno Accademico 2013/2014

Abstract

Si è proposto una serie di 4 assiomi per la MQ più deboli, e quindi più fondamentali, da cui è possibile dedurre i concetti di misura di probabilità, equazione di Schrödinger e operatori autoaggiunti, considerati i pilastri della MQ. Si è cercato di trovare le motivazioni fisiche che rendevano necessaria la loro formulazione e si sono sviluppate le conseguenze matematiche. In particolare ci si è focalizzati nel dimostrare che non a tutte le osservabili possono essere associati operatori simmetrici definiti su tutto lo spazio di Hilbert, da cui l'introduzione negli assiomi della MQ degli operatori simmetrici massimali densamente definiti; il punto fondamentale è che da questi ultimi è stato provato che si può arrivare alla corrispondenza biunivoca tra operatori autoaggiunti ed osservabili fisiche. Si è infine dimostrato che la condizione che un operatore sia simmetrico massimale non implica che esso sia autoaggiunto.

Indice

Capitolo 1

Assiomi della MQ

La Meccanica Quantistica non solo descrive i fenomeni “non classici”, ma lo fa anche in modo totalmente nuovo, discostandosi notevolmente, come modello fisico e matematico, dalle precedenti *teorie classiche*. Proprio per questi motivi non è semplice delineare le sue fondamenta, piantare i pilastri che dovranno sorreggere l’intera struttura teorica. Grazie ai contributi di Schrödinger, Heisenberg, Born, Dirac, von Neumann e molti altri, i quali hanno creato le basi fisiche e matematiche della nuova teoria, si ha ora a disposizione un *framework* entro il quale è possibile, in linea di principio, presentare e, spesso, rispondere a questioni fisiche inerenti a sistemi molecolari, atomici, nucleari, e anche a quei sistemi macroscopici che tendono a mostrare comportamenti quantistici. E’ a questo “quadro concettuale” che viene dato il nome di *Meccanica Quantistica* (MQ).

Così come in Matematica, anche in Fisica sono necessari degli Assiomi per poter sviluppare un quadro teorico coerente. Tali Assiomi dovrebbero essere il meno restrittivi possibile e porre delle condizioni fondamentali da cui poter ricavare, tramite dimostrazioni, ulteriori considerazioni significative. Inoltre, nel caso della Fisica, e quindi della MQ, gli Assiomi dovrebbero nascere da pure questioni di sensatezza e coerenza fisica e, a meno dell’audace tentativo di totale riformulazione della MQ, devono tenere conto degli sviluppi teorici che sono avvenuti, unitamente ai numerosi riscontri sperimentali.

Consapevoli del fatto che non esiste una serie di Assiomi per la MQ che è universalmente accettata, nella trattazione seguente verranno proposti gli Assiomi considerati da [1]. Tra questi ce ne sono alcuni (Ass.1,3,4) che sono in una forma simile a quelli generalmente inseriti nella letteratura ed un altro (Ass.2) che si presenta invece come un’interessante variante. Sarà quest’ultimo l’oggetto principale della dissertazione: vi si analizzeranno le implicazioni matematiche e vi si faranno considerazioni fisiche. E’ da osservare infine che gli Assiomi presentati possono essere considerati come “fondamentali”, nel senso che stabiliscono le condizioni minime necessarie per costruire la MQ: non ci si stupisca quindi se non compaiono esplicitamente i concetti di operatore autoaggiunto, misure di probabilità, equazione di Schrödinger, ecc... Essi verranno *dedotti* dagli Assiomi, con particolare attenzione agli operatori autoaggiunti (cf. Cap.2,3).

ASSIOMA 1 *Lo spazio delle configurazioni di un sistema quantistico è uno spazio di Hilbert $\mathfrak{H}$ complesso e separabile e gli stati possibili di questo sistema sono rappresentati dagli elementi di $\mathfrak{H}$ che hanno norma unitaria.*

La base fisica della formulazione matematica dell'Ass.1 sta nel cosiddetto *Principio di Sovrapposizione*. Esso consiste nell'ipotesi che fra gli stati di un sistema esistano relazioni caratteristiche tali che, ogniqualvolta detto sistema si trovi in uno stato definito, esso possa venire considerato come facente parte contemporaneamente di due o più altri, in un numero infinito di modi, come risultante da una specie di sovrapposizione che avviene in modo classicamente inconcepibile. Viceversa, due o più stati possono venir sovrapposti per formarne uno nuovo. Se uno stato è costituito dalla sovrapposizione di due altri, esso avrà delle proprietà fisiche che risultano, in un senso da specificare, "intermedie" tra quelle dei due sistemi originari, e che si avvicinano più o meno a quelle di uno di essi a seconda del maggiore o minore "peso" associato a tale stato nel processo di sovrapposizione. Ad esempio, se si considera la sovrapposizione di due stati A e B, tali che un'osservazione che, effettuata sul sistema nello stato A, porti certamente a un particolare risultato a, mentre, effettuata sul sistema nello stato B, conduca certamente a un risultato diverso b, il risultato di un'osservazione eseguita sul sistema nello stato risultante da una certa sovrapposizione dei due, sarà *solamente* talvolta a e talvolta b. La differenza con la sovrapposizione classica sta dunque nel fatto che la caratteristica fisica "sovrapposta" dello stato risultante sia la *probabilità* di ottenere un particolare risultato in un'osservazione e non il risultato stesso dell'osservazione.

La struttura matematica che sembra poter interpretare al meglio il principio di sovrapposizione fisica è quella di uno *Spazio Vettoriale*. Ma vi sono altre due richieste "speciali": in primo luogo, a differenza degli stati classici, sovrapporre uno stato quantistico con se stesso non forma alcun altro stato che non sia quello originario; per secondo, il vettore nullo non corrisponde ad alcuno stato. Per cui al vettore $\alpha_1\psi_1+\alpha_2\psi_1$ corrisponde lo stesso stato di ψ_1, se $\alpha_1+\alpha_2 \neq 0$. Per questo spesso si parla di *raggi*, ovvero classi di equivalenza di vettori con la relazione d'equivalenza $\psi_1 \sim \psi_2 \Leftrightarrow \exists \alpha \neq 0 : \psi_2 = \alpha\psi_1$. In un certo senso, quindi, gli stati quantistici possono essere rappresentati da tali classi di equivalenza esclusa quella nulla $[0] = \{0\}$.

Si è parlato di spazio vettoriale ma non si è specificato su quale campo $\mathbb{K}$ debba essere. Un esempio fisico riportato in [5] Cap.1, mostra come $\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{K}$. Nel caso di un fotone, infatti, vi sono solo 2 stati di polarizzazione indipendenti (polarizzazione lineare in direzione parallela e perpendicolare ad una direzione prefissata). Se questi ultimi si indicano con ψ_1 e ψ_2 e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$, allora:

$$\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2 = \alpha_1\left(\psi_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\psi_2\right) \sim \psi_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\psi_2 = \psi_1 + \beta\psi_2, \quad \beta := \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \in \mathbb{K}$$

da cui il fatto che la cardinalità dell'insieme degli stati fisici ottenibile dalla sovrapposizione di due stati (differenti) è sicuramente inferiore o uguale a Card$(\mathbb{K})$. Se non fosse così, $\mathbb{K}$ non conterrebbe scalari a sufficienza da originare tutti i vettori che sono associati agli stati formati dalla sovrapposizione. Nell'esempio del fotone ci si aspetta che i due stati di polarizzazione siano in grado di generare tutti gli stati di polarizzazione ellittica, il cui insieme ha una cardinalità pari a quella di $\mathbb{R}^2$. Per cui $\mathbb{C}$ è un buon candidato. Anche campi "più grandi" potrebbero essere ammessi (come i quaternioni), ma, finora, l'uso di $\mathbb{C}$ è più che soddisfacente (cf. [4], Cap.2).

Poiché, per quanto detto, gli stati quantistici possono essere rappresentati da raggi, è possibile prendere come rappresentante di ciascuna classe di equivalenza un vettore di norma unitaria; questa scelta particolare può essere giustificata a posteriori con la necessità di ottenere una misura di probabilità su $\mathbb{R}$ (cf. Ass.3). Si è visto anche che è possibile assumere $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, da cui il fatto che un vettore normalizzato ha come "parametro libero" un fattore $\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha| = 1 \Rightarrow \exists \varphi \in \mathbb{R} : \alpha = \mathrm{e}^{i\varphi}$ detto *Fattore di Fase*. Quest'ultimo non ha un significato fisico nel caso intervenga sul singolo stato oppure in maniera "globale", ma è essenziale nel momento in cui due o più stati si sovrappongono:

$$\psi_2 \sim \mathrm{e}^{i\varphi}\psi_2, \quad \mathrm{e}^{i\varphi}\psi_1 + \mathrm{e}^{i\varphi}\psi_2 = \mathrm{e}^{i\varphi}(\psi_1 + \psi_2) \sim \psi_1 + \psi_2, \text{ ma } \psi_1 + \psi_2 \not\sim \psi_1 + \mathrm{e}^{i\varphi}\psi_2$$

Il motivo per cui $\mathfrak{H}$ debba essere uno spazio di Hilbert è che esso è una delle strutture matematiche più ricche in cui vi è "inserito" uno spazio vettoriale, e molte sue proprietà sono utilizzate per gli Assiomi successivi.

Da ultimo si osserva che $\mathfrak{H}$ è assunto essere separabile; ciò è dovuto sostanzialmente ad una maggiore facilità nel trattare questi spazi per via delle seguenti proposizioni:

Proposizione 1 *Sia $\mathfrak{H}$ uno spazio di Hilbert,*

$$\Big(\mathfrak{H} \textit{ è } \text{Separabile}\Big) \Longleftrightarrow \Big(\exists\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}} \textit{ base ortonormale } \text{Numerabile}\Big)$$

Proposizione 2 *Ogni spazio di Hilbert $\mathfrak{H}$ di dimensioni infinite e separabile è* unitariamente equivalente *a $\ell^2(\mathbb{N})$.*

ASSIOMA 2 *Ad ogni osservabile* a *corrisponde un operatore lineare A massimale definito su un sottoinsieme denso $\mathcal{D}(A) \hookrightarrow \mathfrak{H}$.*
L'operatore corrispondente all'osservabile

$$P_n(a) := \sum_{j=0}^{n} \alpha_j a^j \quad \textit{è} \quad P_n(A) := \sum_{j=0}^{n} \alpha_j A^j, \quad \alpha_j \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{D}\big(P_n(A)\big) = \mathcal{D}(A^n) = \big\{\psi \in \mathcal{D}(A) : A\psi \in \mathcal{D}(A^{n-1})\big\}.$$

I dettagli sull'Ass.2 e le sue implicazioni sono discussi nei capitoli successivi. Si osserva solo che, in questa sede, il termine *Massimale*, riferito ad un operatore, indica che non vi sono estensioni dello stesso che soddisfino tutti i requisiti degli assiomi quivi enunciati.

ASSIOMA 3 *Il valore di aspettazione di un processo di misura di* a, *quando il sistema è nello stato* $\psi \in \mathcal{D}(A)$, *è dato da:*

$$\mathbb{E}_\psi(A) := \langle \psi, A\psi \rangle \quad \wedge \quad \mathbb{E}_\psi(A) \in \mathbb{R},\ \forall \psi \in \mathcal{D}(A)$$

$\mathbb{E}_\psi(A)$ è anche detta *Forma Quadratica* associata all'operatore A. Il fatto che quest'ultima debba avere valori reali deriva dall'importante considerazione che ogni misurazione di una grandezza fisica deve essere un numero reale. E' da osservare che molte grandezze fisiche sono vettoriali (come la posizione ed il momento), in tal caso ciascuna loro componente rispetto ad assi di riferimento è un'osservabile fisica, come lo è anche il modulo del vettore.

Alla luce del Teo.11, per ogni funzione boreliana $f(a)$ è possibile costruire, tramite la teoria del calcolo funzionale degli operatori autoaggiunti illimitati (cf. [2] Cap.8.3), un corrispettivo operatore autoaggiunto $f(A)$ che sarà a sua volta un'osservabile. E' naturale, e coerente con le richieste dell'Ass.2, assumere che $f(A)$ sia l'operatore associato all'osservabile $f(a)$. Sia ora A un operatore associato ad un'osservabile a e Ω boreliano di $\mathbb{R}$; per quanto detto, è definibile $\chi_\Omega(A)$, che risulterà corrispondere all'osservabile $\chi_\Omega(a)$. E' semplice vedere che tale osservabile ci dice se il valore di $a \in \Omega$ (restituisce 1), oppure se il valore di $a \notin \Omega$ (restituisce 0). Il suo valore di aspettazione $\mathbb{E}_\psi\big(\chi_\Omega(A)\big)$ sarà quindi la *Probabilità* che una misurazione di a porti un valore dell'osservabile incluso in Ω. Coerentemente alla suddetta interpretazione, dalla teoria matematica citata in precedenza, risulta che $\mu_{\psi,A}(\Omega) := \mathbb{E}_\psi\big(\chi_\Omega(A)\big)$ è una *Misura di Probabilità* su $\mathbb{R}$.

ASSIOMA 4 *L'evoluzione temporale è data da un gruppo unitario* $U(t)$ *ad un parametro fortemente continuo. Il generatore di questo gruppo corrisponde all'energia del sistema.*

Dato uno stato iniziale $\psi(0)$ del sistema, dovrebbe esserci un unico $\psi(t)$ che rappresenti lo stato del sistema al tempo $t \in \mathbb{R}$. Esisterà quindi un'applicazione $U(t) : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H} :\ \psi(t) = U(t)\psi(0)$. Inoltre, da esperimenti fisici, è noto valere il *principio di sovrapposizione* degli stati, ovvero

$$U(t)(\alpha_1\psi_1(0) + \alpha_2\psi_2(0)) = \alpha_1\psi_1(t) + \alpha_2\psi_2(t),\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K} \Rightarrow U \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$$

Si ha inoltre che $\psi(t)$ deve essere associato ad uno stato e quindi, per l'Ass.1,

$$\|\psi(t)\| = \|U(t)\psi(0)\| = 1 = \|\psi(0)\|,$$

per garantire ciò si impone quindi che $U(t)$ sia *Unitario* $\forall t \in \mathbb{R}$ (cf. Def.7). In questo modo si garantisce la conservazione della norma unitaria di ψ durante l'evoluzione del sistema. Inoltre la richiesta di suriettività di $U(t)$ è giustificata dal fatto che, in tal modo:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall \psi_2 \in \mathfrak{H}, \exists \psi_1 \in \mathfrak{H} : \psi_2 = U(t)\psi_1$$

ovvero uno stato ψ_2 può sempre essere visto come l'evoluzione temporale, per un certo tempo t, di uno stato ψ_1. Poiché un operatore unitario è sempre 1-1, dato che è una isometria (cf. Oss.8), ciò implica anche che $U(t)$ sia invertibile ed è noto che $U(t)^{-1} = U(t)^\dagger$ unitario. Altre importanti proprietà che vogliamo che siano soddisfatte ragionevolmente sono:

$$U(0) = \mathbb{I}, \quad U(t+s) = U(t)U(s), \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$$

da cui, ponendo $s = -t$ e poi $t = -s$, si ha anche che $U(t)^{-1} = U(-t)$.
Una famiglia di operatori unitari con le suddette proprietà costituisce un *Gruppo Unitario ad un parametro.* E' naturale anche assumere che tale gruppo sia *fortemente continuo*:

$$\mathfrak{H}-\lim_{t \to t_0} U(t)\psi = U(t_0)\psi, \quad \forall \psi \in \mathfrak{H}$$

Un gruppo siffatto ha un *Generatore Infinitesimo* $H \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$ definito da:

$$H\psi := \mathfrak{H}-\lim_{t \to 0} \frac{i}{t}\big(U(t)\psi - \psi\big)$$

$$\mathcal{D}(H) := \left\{ \psi \in \mathfrak{H} : \exists\, \mathfrak{H}-\lim_{t \to 0} \frac{i}{t}\big(U(t)\psi - \psi\big) \right\}$$

Tale operatore è chiamato *Hamiltoniana* ed è l'operatore corrispondente all'osservabile *energia.* Ciò deve essere coerente con gli Ass.2,3 e quindi, per il Teo.11, H deve essere autoaggiunto. Questo è garantito dall'interessante teorema che dimostra la corrispondenza *biunivoca* tra operatori autoaggiunti e gruppi unitari ad un parametro fortemente continui:

Teorema 1 (di Stone) *Se $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$ è Autoaggiunto e $U(t) := \exp(-itA)$ allora $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ è un gruppo unitario ad un parametro fortemente continuo. Viceversa, se $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ è un gruppo unitario ad un parametro fortemente continuo allora il suo generatore $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$ è Autoaggiunto e vale $U(t) = \exp(-itA)$.*

Dimostrazione
La dimostrazione esula dai nostri scopi e può essere trovata in [1], Cap.5. ■
Il significato di $\exp(-itA)$ può essere chiaro nel caso A sia un operatore limitato; considerando infatti la convergenza in norma della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(zA)^n}{n!}$, essa è garantita dal fatto che:

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{m} \frac{(zA)^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{|z|^k \|A\|^k}{k!}, \quad m > n, z \in \mathbb{C}$$

poiché $\sum_{k=0}^{n} \frac{|z|^k \|A\|^k}{k!}$ è di Cauchy, in quanto converge a $\exp(|z|\|A\|)$, lo è anche $\sum_{k=0}^{n} \frac{(zA)^k}{k!}$ che è quindi convergente. Tuttavia si vedrà che, in generale, gli operatori autoaggiunti in gioco nella MQ possono non essere limitati (cf. Cap.3) e, per tali operatori, non è banale una definizione dell'esponenziale. Questo è possibile attraverso la teoria del calcolo funzionale degli operatori autoaggiunti illimitati (cf. [2] Cap.8.3).

E' interessante notare come la necessità fisica di avere un gruppo di applicazioni che siano in grado di "far evolvere" il sistema, coerentemente con il quadro matematico enunciato dall'Ass.1, abbia naturalmente portato al concetto di *operatore autoaggiunto* e di *Hamiltoniana*. E non solo:

Proposizione 3 *Sia* $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ *un Gruppo Unitario ad un parametro fortemente continuo e* H *il suo generatore infinitesimo:* $\forall\psi \in \mathcal{D}(H)$ *la curva* $\psi(t) := U(t)\psi$ *in* $\mathfrak{H}$ *è l'unica soluzione di:*

$$i\frac{d\psi}{dt}(t) = H\psi(t), \quad \psi(0) = \psi$$

da cui si riconosce immediatamente l'*Equazione di Schrödinger*.

L'ultima nota sull'Ass.4, è che, sebbene, per quanto visto, sia matematicamente equivalente partire da gruppi unitari ad un parametro fortemente continui o da operatori autoaggiunti, il primo approccio rivela una profondità concettuale maggiore. Infatti è possibile estendere il discorso anche ad altri gruppi unitari ad un parametro fortemente continui non necessariamente legati alla dinamica (i.e. l'evoluzione) del sistema, come quelli legati alla *traslazione* e alla *rotazione* i cui generatori infinitesimi sono rispettivamente i noti operatori *impulso* e *momento angolare*. Questa strada porta poi anche al celebre *teorema di Noether* (cf. [1] Cap.8).

Capitolo 2

Operatori Definiti su $\mathfrak{H}$

Vi è una interessante considerazione da fare a proposito dell'Ass.3: fissata un'osservabile a, $\mathbb{E}_\psi(A)$ dovrebbe avere senso per ogni stato fisico ψ del sistema, altrimenti ammetteremmo o che a non è un'osservabile per ψ oppure che ψ stesso non è uno stato fisico. Per evitare questo problema verrebbe quindi da ipotizzare che $\mathcal{D}(A) = \mathfrak{H}$ e in questo capitolo verrà mostrato proprio cosa implichi assumere che l'operatore associato a ciascuna osservabile debba essere definito su tutto lo spazio di Hilbert. Dopo avere introdotto e dimostrato gli elementi necessari, si arriverà all'importante *Teorema del Grafico Chiuso* (cf. Teo.5) che è la chiave per mostrare il legame tra il dominio di definizione dell'operatore e la sua limitatezza. Esso sarà indispensabile per arrivare al teorema conclusivo del capitolo (cf. Teo.6) e alle sue conseguenze fisiche.

Prima di iniziare, introducendo le definizioni di operatori simmetrici e autoaggiunti, si riporta un classico teorema della teoria degli spazi di Hilbert, a cui vi si farà riferimento più volte.

Teorema 2 (di Riesz-Fréchet) *Sia $\mathfrak{H}$ uno spazio di Hilbert,*

$$\forall \phi \in \mathfrak{H}^* \quad \exists! x \in \mathfrak{H} : \phi(y) = \langle x, y \rangle \quad \forall y \in \mathfrak{H} \quad \wedge \quad \|x\|_{\mathfrak{H}} = \|\phi\|_{\mathfrak{H}^*}$$

Dimostrazione
La dimostrazione, non utile per i nostri scopi, può essere trovata in [2] Cap.II.2. ■

Definizione 1 *Sia $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$, $\mathcal{D}(A) \hookrightarrow \mathfrak{H}$. Sia $A^\dagger : \mathcal{D}(A^\dagger) \to \mathfrak{H}$,*

$$\Big(A^\dagger \text{ è l'}\text{Aggiunto di } A\Big) \overset{def}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Big(\mathcal{D}(A^\dagger) = \big\{x \in \mathfrak{H} : \exists\, \tilde{x} : \langle x, Ay \rangle = \langle \tilde{x}, y \rangle, \forall y \in \mathcal{D}(A)\big\},\ A^\dagger x := \tilde{x}\Big)$$

Osservazione 1 Si noti che la definizione è ben posta in quanto $\mathcal{D}(A^\dagger) \neq \emptyset$ poiché $0 \in \mathcal{D}(A^\dagger)$ e $\tilde{x}$, quando esiste, è unico.
Siano infatti $\tilde{x_1}, \tilde{x_2} \in \mathfrak{H}$:

$$\begin{aligned}\langle x, Ay\rangle &= \langle \tilde{x_1}, y\rangle = \langle \tilde{x_2}, y\rangle \quad \forall y \in \mathcal{D}(A)\\ &\Rightarrow \langle \tilde{x_1} - \tilde{x_2}, y\rangle = 0 \quad \forall y \in \mathcal{D}(A)\\ &\Rightarrow \tilde{x_1} - \tilde{x_2} \in \mathcal{D}(A)^\perp = \big(\mathcal{D}(A)^-\big)^\perp \overset{(1)}{=} \mathfrak{H}^\perp = \{0\}\\ &\Rightarrow \tilde{x_1} = \tilde{x_2}\end{aligned}$$

(1) poiché $\mathcal{D}(A) \hookrightarrow \mathfrak{H}$.

Osservazione 2 Un'importante osservazione prima di procedere è che se $A \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ e $\mathcal{D}(A) = \mathfrak{H}$ allora $\mathcal{D}(A^\dagger) = \mathfrak{H}$. Questa è un'immediata applicazione del Teo.2, posto $\phi_x := \langle x, A\,\cdot\rangle$, dato che $\phi_x \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})\ \forall x \in \mathfrak{H}$.

Definizione 2 *Sia $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$, $\mathcal{D}(A) \hookrightarrow \mathfrak{H}$.*

$$\Big(A \text{ è Simmetrico}\Big) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \Big(A \subseteq A^\dagger\Big)$$
$$\Big(A \text{ è Autoaggiunto}\Big) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \Big(A = A^\dagger\Big)$$

Osservazione 3 Quando si parlerà di operatori *Simmetrici* o *Autoaggiunti* si sottointenderà sempre che il dominio di tali operatori sia denso in $\mathfrak{H}$, poiché altrimenti la definizione di *Aggiunto* non sarebbe ben posta (cf. Oss.1).
Un operatore autoaggiunto è anche simmetrico; il vice-versa vale nel caso in cui $\mathcal{D}(A) = \mathfrak{H}$; infatti se A è simmetrico allora:

$$\mathfrak{H} = \mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A^\dagger) \subseteq \mathfrak{H} \Rightarrow \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^\dagger) \Rightarrow A \text{ è autoaggiunto.}$$

Proposizione 4 *Sia $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$, $\mathcal{D}(A) \hookrightarrow \mathfrak{H}$.*

$$\Big(A \text{ è Simmetrico}\Big) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} i) & \langle x, Ay\rangle = \langle Ax, y\rangle,\ \forall x, y \in \mathcal{D}(A) \\ ii) & \langle x, Ax\rangle \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathcal{D}(A) \end{pmatrix}$$

Dimostrazione
i) $(\Rightarrow)$ $\langle x, Ay\rangle = \langle A^\dagger x, y\rangle = \langle Ax, y\rangle,\ \forall x, y \in \mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A^\dagger)$.

i) $(\Leftarrow)$ $\langle x, Ay\rangle = \langle Ax, y\rangle,\ \forall x, y \in \mathcal{D}(A) \Rightarrow \mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A^\dagger)$ e $A^\dagger x = Ax,\ \forall x \in \mathcal{D}(A)$.

ii) $(\Rightarrow)$ $\langle x, Ax\rangle = \langle Ax, x\rangle = \overline{\langle x, Ax\rangle} \Rightarrow \langle x, Ax\rangle \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathcal{D}(A)$.

ii) $(\Leftarrow)$ $\langle x+y, A(x+y)\rangle = \langle A(x+y), x+y\rangle$ poichè è reale; quindi:

$$\langle x, Ax\rangle + \langle x, Ay\rangle + \langle y, Ax\rangle + \langle y, Ay\rangle = \langle Ax, x\rangle + \langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle + \langle Ay, y\rangle$$

tenendo conto dell'ipotesi si ha:
$\langle x, Ay\rangle + \langle y, Ax\rangle = \langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle$; sostituendo a $y \mapsto iy$ si ottiene:
$\langle x, Ay\rangle - \langle y, Ax\rangle = \langle Ax, y\rangle - \langle Ay, x\rangle$; infine, sommando membro a membro:
$\langle x, Ay\rangle = \langle Ax, y\rangle$, $\forall x, y \in \mathcal{D}(A) \Rightarrow A$ è Simmetrico. ■

E' importante ora definire alcune strutture matematiche che sono essenziali per arrivare alla definizione di grafico di un operatore: questo approccio permetterà di ricavare diverse proprietà degli operatori autoaggiunti.

Definizione 3 *Siano* $\big(X, \|\cdot\|_X\big), \big(Y, \|\cdot\|_Y\big)$ *spazi di Banach, definito*

$$\|(x,y)\|_{\oplus}^2 := \|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2, \quad (x,y) \in X \times Y$$

$\big(X \times Y, \|\cdot\|_{\oplus}\big)$ *è detto* Somma Diretta *di* X *e* Y *e si indica con* $X \oplus Y$.

Proposizione 5 $X \oplus Y$ *è uno* Spazio di Banach.

Dimostrazione
E' banale mostrare che $\|\cdot\|_{\oplus}$ è una norma su $X \times Y$, ad eccezione per la disuguaglianza triangolare dimostrata in seguito.
Siano $x_1, x_2 \in X$ e $y_1, y_2 \in Y$ (tutte le norme verranno indicate con $\|\cdot\|$ per non appesantire la notazione: sarà chiaro dal contesto di quale norma si tratti):

$$\begin{aligned}\|(x_1,y_1)+(x_2,y_2)\|^2 &= \|(x_1+x_2, y_1+y_2)\|^2 = \|x_1+x_2\|^2 + \|y_1+y_2\|^2 \\ &\leq \big(\|x_1\|+\|x_2\|\big)^2 + \big(\|y_1\|+\|y_2\|\big)^2\end{aligned}$$

Per le disuguaglianze triangolari in X e Y. Ora verifichiamo che:

$$\big(\|x_1\|+\|x_2\|\big)^2 + \big(\|y_1\|+\|y_2\|\big)^2 \leq \big(\|(x_1,y_1)\| + \|(x_2,y_2)\|\big)^2 \tag{2.1}$$

da cui seguirà immediatamente la tesi.

$$\begin{aligned}\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \|y_1\|^2 + \|y_2\|^2 + 2\|x_1\|\|x_2\| + 2\|y_1\|\|y_2\| \leq \\ \leq \|(x_1,y_1)\|^2 + \|(x_2,y_2)\|^2 + 2\|(x_1,y_1)\|\|(x_2,y_2)\| = \\ = \|x_1\|^2 + \|y_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \|y_2\|^2 + 2\sqrt{\big(\|x_1\|^2+\|y_1\|^2\big)\big(\|x_2\|^2+\|y_2\|^2\big)}\end{aligned}$$

Semplificando ed elevando al quadrato ambo i membri:

$$\big(\|x_1\|\|x_2\| + \|y_1\|\|y_2\|\big)^2 \leq \big(\|x_1\|^2+\|y_1\|^2\big)\big(\|x_2\|^2+\|y_2\|^2\big)$$

sviluppando e semplificando ancora:

$$2\|x_1\|\|x_2\|\|y_1\|\|y_2\| \leq \|x_1\|^2\|y_2\|^2 + \|x_2\|^2\|y_1\|^2$$

ovvero:

$$\big(\|x_1\|\|y_2\| - \|x_2\|\|y_1\|\big)^2 \geq 0$$

che risulta un'identità.

Da ultimo occorre dimostrare che $X \oplus Y$ è completo.
Sia (x_n, y_n) una successione di Cauchy in $X \oplus Y$:

$$\begin{aligned}\|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)\|^2 &= \|(x_n - x_m, y_n - y_m)\|^2 = \\ &= \|x_n - x_m\|^2 + \|y_n - y_m\|^2 \geq \|x_n - x_m\|^2\end{aligned}$$

quindi (x_n) è una successione di Cauchy in X e analogamente (y_n) lo è in Y $\Rightarrow \exists x \in X, y \in Y : x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x,\ y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$. Ora:

$$\|(x_n, y_n) - (x, y)\|^2 = \|x_n - x\|^2 + \|y_n - y\|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Per cui $(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x, y) \in X \oplus Y$. Avendo dimostrato che ogni successione di Cauchy è convergente allora è dimostrata la completezza. ■

Definizione 4 *Siano X, Y spazi di Banach, sia $A \in \mathfrak{L}(X, Y)$, si definisca*

$$\mathcal{G}(A) := \big\{(x, y) \in X \oplus Y : x \in \mathcal{D}(A),\ y = Ax\big\} \quad \text{Grafico di } A$$

Osservazione 4 $\mathcal{G}(A)$ è un sottospazio vettoriale di $X \oplus Y$, per la linearità di A.

Definizione 5 *Siano X, Y spazi di Banach, $A \in \mathfrak{L}(X, Y)$,*

$$\begin{aligned}\Big(A \text{ è Chiuso}\Big) &\overset{def}{\iff} \Big(\mathcal{G}(A) \text{ è Chiuso}\Big) \\ \Big(A \text{ è Chiudibile}\Big) &\overset{def}{\iff} \Big(\exists A^- \in \mathfrak{L}(X, Y) : \mathcal{G}(A^-) = \mathcal{G}(A)^-\Big)\end{aligned}$$

e A^- è detto Chiusura *di A.*

Osservazione 5 *Sia $A \in \mathfrak{L}(X, Y)$,*

$$\Big(A \text{ è Chiudibile}\Big) \Rightarrow \Big(\big(B \in \mathfrak{L}(X, Y) \text{ Chiuso} : A \subseteq B \subseteq A^-\big) \Rightarrow \big(B = A^-\big)\Big)$$

Ovvero: la chiusura di un operatore, quando esiste, è la sua più piccola estensione chiusa (se si considera $\subseteq$ come relazione d'ordine parziale tra operatori).
Dimostrazione
Sia B chiuso:

$$A \subseteq B \subseteq A^- \Rightarrow \mathcal{G}(A) \subseteq \mathcal{G}(B) \subseteq \mathcal{G}(A^-) \Rightarrow$$
$$\mathcal{G}(A)^- \subseteq \mathcal{G}(B)^- = \mathcal{G}(B) \subseteq \mathcal{G}(A^-)^- = \mathcal{G}(A)^- \Rightarrow B = A^-. \blacksquare$$

Definizione 6 *Siano* $\big(\mathfrak{H}_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1\big), \big(\mathfrak{H}_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2\big)$ *spazi di Hilbert, definito*

$$\big\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\big\rangle_\oplus := \langle x_1,y_1\rangle_1 + \langle x_2,y_2\rangle_2, \qquad (x_1,x_2),(y_1,y_2) \in \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$$

$\big(\mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_\oplus\big)$ *è detto* Somma Diretta *di* $\mathfrak{H}_1$ *e* $\mathfrak{H}_2$ *e si indica con* $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$.

Proposizione 6 $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ *è uno* Spazio di Hilbert.

Dimostrazione
Che $\langle\cdot,\cdot\rangle_\oplus$ sia un prodotto scalare è immediato. La completezza dello spazio deriva dal fatto che la metrica indotta dal prodotto scalare è quella della somma diretta di due spazi normati la quale risulta completa per la Prop.5. $\blacksquare$

Definizione 7 *Sia* $U \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$,

$$\Big(U \text{ è Unitario}\Big) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} i) & \mathcal{D}(U) = \mathcal{R}(U) = \mathfrak{H} \\ ii) & \langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle \quad \forall x, y \in \mathfrak{H} \end{pmatrix}$$

Lemma 1 *Sia* $\mathfrak{H}$ *spazio di Hilbert,* $L \subseteq \mathfrak{H}$,

$$\Big(U \text{ è Unitario}\Big) \Rightarrow \Big(U\big(L^\perp\big) = U(L)^\perp\Big)$$

Dimostrazione
Sia $x \in U(L)^\perp \Rightarrow \langle x, Uy\rangle = 0,\ \forall y \in L$;

$$\begin{aligned} U \text{ è SU} \quad &\Rightarrow \quad \exists z \in \mathfrak{H} : x = Uz \\ &\Rightarrow \quad \langle Uz, Uy\rangle = \langle z, y\rangle = 0,\ \forall y \in L \\ &\Rightarrow \quad z \in L^\perp \Rightarrow x \in U\big(L^\perp\big) \\ &\Rightarrow \quad U(L)^\perp \subseteq U\big(L^\perp\big) \end{aligned}$$

Sia $x \in U\big(L^\perp\big)$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \exists y \in L^\perp : x = Uy \\ &\Rightarrow \quad 0 = \langle z, y\rangle = \langle Uz, Uy\rangle = \langle Uz, x\rangle\ \forall z \in L \\ &\Rightarrow \quad x \in U(L)^\perp \Rightarrow U\big(L^\perp\big) \subseteq U(L)^\perp. \blacksquare \end{aligned}$$

Definizione 8 *Si definisca* $\tau \in \mathfrak{L}\big(\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}\big)$,

$$\tau(x,y) := (-y,x), \quad (x,y) \in \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H} \quad \text{Operatore di Rotazione}$$

Osservazione 6 E' semplice verificare che per l'operatore τ vale:

$$\begin{array}{ll} i) & \tau^2 = -\mathbb{I} \\ ii) & \tau \text{ è Unitario} \end{array}$$

Proposizione 7 *Sia* $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H}), \mathcal{D}(A) \hookrightarrow \mathfrak{H}$,

$$\begin{array}{ll} i) & A^\dagger \text{ è Chiuso } \textit{e vale } \mathcal{G}\big(A^\dagger\big) = \big(\tau\mathcal{G}(A)\big)^\perp \\ ii) & \big(A \textit{ è Chiudibile}\big) \Longleftrightarrow \big(\mathcal{D}(A^\dagger) \hookrightarrow \mathfrak{H}\big) \textit{ e vale } A^- = (A^\dagger)^\dagger \end{array}$$

Dimostrazione
i) Si considerino:

$$\tau\big(\mathcal{G}(A)\big) = \big\{(-Ax,x), x \in \mathcal{D}(A)\big\}, \quad \mathcal{G}\big(A^\dagger\big) = \big\{(y, A^\dagger y), y \in \mathcal{D}(A^\dagger)\big\}$$

sia $(y,z) \in \mathcal{G}\big(A^\dagger\big) \Rightarrow (y,z) = (y, A^\dagger y)$ allora:

$$\big\langle (y, A^\dagger y), (-Ax, x) \big\rangle = \langle y, -Ax \rangle + \langle A^\dagger y, x \rangle = \langle A^\dagger y, x \rangle - \langle y, Ax \rangle \overset{(1)}{=} 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A)$$

(1) per definizione di aggiunto $\Rightarrow (y,z) \in \big(\tau\mathcal{G}(A)\big)^\perp \Rightarrow \mathcal{G}\big(A^\dagger\big) \subseteq \big(\tau\mathcal{G}(A)\big)^\perp$
Sia ora $(x,y) \in \big(\tau\mathcal{G}(A)\big)^\perp$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow & \big\langle (x,y), (-Az, z) \big\rangle = \langle x, -Az \rangle + \langle y, z \rangle = 0 \quad \forall z \in \mathcal{D}(A) \\ \Rightarrow & \langle y, z \rangle = \langle x, Az \rangle \quad \forall z \in \mathcal{D}(A) \\ \Rightarrow & y = A^\dagger x \Rightarrow (x,y) \in \mathcal{G}\big(A^\dagger\big) \\ \Rightarrow & \big(\tau\mathcal{G}(A)\big)^\perp \subseteq \mathcal{G}\big(A^\dagger\big) \end{array}$$

Si conclude quindi che $\mathcal{G}\big(A^\dagger\big) = \big(\tau\mathcal{G}(A)\big)^\perp$ ed è chiuso poiché è il complemento ortogonale di un sottospazio.

ii)$(\Rightarrow)$ Sia $y \in \mathcal{D}(A^\dagger)^\perp$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow & \langle x, y \rangle = 0, \ \forall x \in \mathcal{D}(A^\dagger) \\ \Rightarrow & \big\langle (0,y), (-A^\dagger x, x) \big\rangle = \langle 0, -A^\dagger x \rangle + \langle y, x \rangle = 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}(A^\dagger) \\ \Rightarrow & (0,y) \in \big(\tau\mathcal{G}(A^\dagger)\big)^\perp \overset{(2)}{=} \Big(\tau\big(\tau\mathcal{G}(A)\big)^\perp\Big)^\perp \overset{(3)}{=} \Big(\tau\tau\mathcal{G}(A)^\perp\Big)^\perp \overset{(4)}{=} \\ = & \big(\mathcal{G}(A)^\perp\big)^\perp \overset{(5)}{=} \mathcal{G}(A)^- \overset{(6)}{=} \mathcal{G}(A^-) \\ \Rightarrow & y = A^- 0 = 0 \\ \Rightarrow & \mathcal{D}(A^\dagger)^\perp = \{0\} \Rightarrow \mathcal{D}(A^\dagger) \hookrightarrow \mathfrak{H} \end{array}$$

(2) per la Prop.7-i); (3) per il Lem.1; (4) per l'Oss.6-i).
Poiché $\mathcal{D}(A^\dagger) \hookrightarrow \mathfrak{H}$ è lecito allora definire $(A^\dagger)^\dagger$:

$$\mathcal{G}\big((A^\dagger)^\dagger\big) \overset{(7)}{=} \big(\tau\mathcal{G}(A^\dagger)\big)^\perp \overset{(8)}{=} \mathcal{G}(A^-)$$

(7) per la Prop.7-i); (8) per la (6). Si conclude dunque che $A^- = (A^\dagger)^\dagger$.

$ii)(\Leftarrow)$ Poiché $\mathcal{D}(A^\dagger) \hookrightarrow \mathfrak{H}$ è lecito definire $(A^\dagger)^\dagger$:

$$\mathcal{G}\big((A^\dagger)^\dagger\big) \overset{(7)}{=} \big(\tau\mathcal{G}(A^\dagger)\big)^\perp \overset{(9)}{=} \mathcal{G}(A)^-$$

(9) per la (5); dunque A è chiudibile e $(A^\dagger)^\dagger$ è la sua chiusura. ■

Teorema 3 (delle Categorie di Baire) *Sia X uno spazio metrico completo,*

$$\left(\begin{array}{c} \{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}, F_n \subseteq X \ \textit{chiuso} \ \forall n \in \mathbb{N} : \\ X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \end{array}\right) \Longrightarrow \Big(\exists n_0 \in \mathbb{N}, O \ \textit{aperto} : O \subseteq F_{n_0}\Big)$$

Dimostrazione
Si consideri F_1.
Se $F_1 = X$ allora, essendo X anche aperto, non vi è nulla da dimostrare.
Se $F_1 \neq X \Rightarrow \mathcal{C}(F_1)$ è aperto e $\exists x_1 \in X, \delta_1 \in \mathbb{R} : S(x_1, \delta_1)^- \cap F_1 = \emptyset$.
Se $S(x_1, \delta_1) \subset F_2$, la dimostrazione è conclusa.
Altrimenti $\exists x_2 \in X, \delta_2 \leq \delta_1/2 : S(x_2, \delta_2) \subset S(x_1, \delta_1), S(x_2, \delta_2)^- \cap F_2 = \emptyset$.
Iterando il procedimento:

$$S(x_n, \delta_n) \subset S(x_{n-1}, \delta_{n-1}),\ S(x_n, \delta_n)^- \cap F_n = \emptyset,\ \delta_n \leq \delta_1/n$$

Se il processo non avesse termine, si andrebbe incontro ad un assurdo:

$$d(x_n, x_m) < \delta_m \leq \delta_1/m,\ \forall n > m$$

quindi (x_n) è una successione di Cauchy e, essendo X completo:

$$\exists x \in X : x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in S(x_j, \delta_j)^- \ \ \forall j \in \mathbb{N} \Rightarrow x \notin F_j \ \ \forall j \in \mathbb{N}$$

ma ciò è assurdo in quanto $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = X$. Per cui:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : S(x_{n_0}, \delta_{n_0}) \subset F_{n_0+1}. \ ■$$

Teorema 4 (di Banach-Steinhaus) *Siano X, Y spazi di Banach,*

$$\left(\begin{array}{c} \{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda},\ A_\lambda \in \mathfrak{B}(X,Y)\ \forall \lambda \in \Lambda \\ \forall x \in X,\ \sup_{\lambda\in\Lambda} \|A_\lambda x\| =: M_x < +\infty \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\sup_{\lambda\in\Lambda} \|A_\lambda\| < +\infty\right)$$

Dimostrazione
Sia $S_{\lambda,n} := \{x \in X : \|A_\lambda x\| \leq n\}$.
L'applicazione $\Phi_\lambda : X \to \mathbb{R}$, $\Phi_\lambda(x) := \|A_\lambda x\|$ è continua poiché $\Phi_\lambda = \|\cdot\| \circ A_\lambda$ è composizione di funzioni continue. Dunque si ha che $S_{\lambda,n}$ è chiuso perché retroimmagine di un chiuso tramite funzione continua: $S_{\lambda,n} = \Phi^{-1}([0,n])$.
Segue che $F_n := \bigcap_{\lambda\in\Lambda} S_{\lambda,n}$ è chiuso.
Sia $x \in X$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \exists n_x \in \mathbb{N} : n_x > M_x \\
&\Rightarrow \quad \|A_\lambda x\| \leq M_x < n_x \quad \forall \lambda \in \Lambda \\
&\Rightarrow \quad x \in F_{n_x} \Rightarrow X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \\
&\overset{(1)}{\Rightarrow} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, x_0 \in X, \delta_0 \in \mathbb{R} : S(x_0, \delta_0) \subset F_{n_0}
\end{aligned}$$

(1) per il Teo.3.
Sia $y \in X : \|y\| < \delta_0 \Rightarrow x := x_0 + y \in S(x_0, \delta_0)$, ora:

$$\begin{aligned}
\|A_\lambda y\| &= \|A_\lambda(x - x_0)\| = \|A_\lambda x - A_\lambda x_0\| \leq \\
&\leq \|A_\lambda x\| + \|A_\lambda x_0\| \leq n_0 + n_0 = 2n_0 \quad \forall \lambda \in \Lambda
\end{aligned}$$

Sia $z \in X, z \neq 0$ allora:

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{z}{\|z\|} \frac{\delta_0}{2} \right\| = \frac{\delta_0}{2} < \delta_0 \quad &\Rightarrow \quad \left\| A_\lambda \frac{z}{\|z\|} \frac{\delta_0}{2} \right\| \leq 2n_0 \\
&\Rightarrow \quad \|A_\lambda z\| \leq \frac{4n_0}{\delta_0} \|z\| \\
&\Rightarrow \quad \|A_\lambda\| \leq \frac{4n_0}{\delta_0} \quad \forall \lambda \in \Lambda
\end{aligned}$$

dato che n_0, δ_0 sono indipendenti da ogni λ; da cui l'asserto. ■

Lemma 2 *Sia* $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$,

$$\begin{pmatrix} A \text{ è } Chiuso \\ A \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H}) \end{pmatrix} \Longrightarrow \big(\mathcal{D}(A) \text{ è } Chiuso\big)$$

Dimostrazione
Sia (x_n) una successione di Cauchy in $\mathcal{D}(A)$ convergente a $x \in \mathfrak{H}$. Allora:

$$\|Ax_n - Ax_m\| \leq \|A\| \|x_n - x_m\|$$

per cui (Ax_n) è una successione di Cauchy

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \exists y \in \mathfrak{H} : Ax_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y \\
&\Rightarrow \quad (x_n, Ax_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x, y) \\
&\overset{(1)}{\Rightarrow} \quad (x, y) \in \mathcal{G}(A) \Rightarrow y = Ax \\
&\Rightarrow \quad x \in \mathcal{D}(A) \Rightarrow \mathcal{D}(A) \text{ è chiuso}
\end{aligned}$$

(1) poiché $\mathcal{G}(A)$ è chiuso. ■

Lemma 3 *Sia* $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$,

$$\begin{pmatrix} \mathcal{D}(A) = \mathfrak{H} \\ A \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H}) \end{pmatrix} \Longrightarrow \left(A^\dagger \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H}),\ \|A\| = \|A^\dagger\| \right)$$

Dimostrazione
Si ha:

$$\|A^\dagger x\|^2 = \langle A^\dagger x, A^\dagger x\rangle \overset{(1)}{=} \langle x, AA^\dagger x\rangle \leq \|x\|\|AA^\dagger x\| \leq \|x\|\|A\|\|A^\dagger x\| \quad \forall x \in \mathfrak{H}$$

$\Rightarrow \|A^\dagger\| \leq \|A\|$; (1) perché $\mathcal{D}(A) = \mathfrak{H}$.
Poichè, per l'Oss.2, $\mathcal{D}(A^\dagger) = \mathfrak{H}$, si può ripetere lo stesso procedimento iniziando con Ax si ottiene: $\|A\| \leq \|A^\dagger\|$. ■

Teorema 5 (del Grafico Chiuso) *Sia* $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$,

$$\begin{pmatrix} A \text{ è Chiuso} \\ \mathcal{D}(A) \text{ è Chiuso} \end{pmatrix} \Longrightarrow \left(A \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H}) \right)$$

Dimostrazione
Poiché $\mathcal{D}(A)$ è un sottospazio chiuso ed è esso stesso uno spazio di Hilbert, non risulta restrittivo porre $\mathcal{D}(A) = \mathfrak{H}$.
Sia $\Phi_y : \mathfrak{H} \to \mathbb{C}$, $\Phi_y(x) := \langle y, Ax\rangle$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \Phi_y(x) \overset{(1)}{=} \langle A^\dagger y, x\rangle \quad \forall y \in \mathcal{D}(A^\dagger) \Rightarrow \Phi_y \in \mathfrak{H}^* \quad \forall y \in \mathcal{D}(A^\dagger) \\
&\wedge \qquad |\Phi_y(x)| \leq \|y\|\|Ax\| \leq \|Ax\| < +\infty,\ \forall y \in \mathfrak{H} : \|y\| \leq 1 \\
&\overset{(2)}{\Rightarrow} \quad \exists C \in \mathbb{R} : \|\Phi_y\| \leq C,\ \forall y \in \mathcal{D}(A^\dagger),\ \|y\| \leq 1 \\
&\Rightarrow \quad \|A^\dagger\| = \sup_{\substack{y \in \mathcal{D}(A^\dagger) \\ \|y\|=1}} \|A^\dagger y\| \overset{(3)}{=} \sup_{\substack{y \in \mathcal{D}(A^\dagger) \\ \|y\|=1}} \|\Phi_y\| \leq C \\
&\Rightarrow \quad A^\dagger \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})
\end{aligned}$$

(2) per il Teo.4; (3) perché dalla (1) è evidente che, per il Teo.2, $\|\Phi_y\| = \|A^\dagger y\|$.
Per il Lem.2 $\mathcal{D}(A^\dagger)$ è chiuso e, poiché $\mathcal{D}(A^\dagger) \hookrightarrow \mathfrak{H}$ per la Prop.7-*ii*)($\Rightarrow$), $\mathcal{D}(A^\dagger) = \mathfrak{H}$.
Inoltre, sempre per la Prop.7-*ii*), $A = (A^\dagger)^\dagger$ e quindi, per il Lem.3, $A \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$. ■

Corollario 1 *Sia* $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$,

$$\begin{pmatrix} A \text{ è Autoaggiunto} \\ \mathcal{D}(A) = \mathfrak{H} \end{pmatrix} \Longrightarrow \Big(A \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})\Big)$$

Dimostrazione
A è autoaggiunto allora, per la Prop.7-i), $\mathcal{G}(A) = \mathcal{G}(A^\dagger)$ è chiuso e dunque, essendo $\mathcal{D}(A) = \mathfrak{H}$ chiuso, per il Teo.5, $A \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$. ■

Lemma 4 *Sia* $A, B \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$, $\mathcal{D}(A) \hookrightarrow \mathfrak{H}$,

$$\Big(A \subseteq B\Big) \Longrightarrow \Big(A^\dagger \supseteq B^\dagger\Big)$$

Dimostrazione
Si ha:

$$\begin{aligned} A \subseteq B \quad &\Rightarrow \quad \mathcal{G}(A) \subseteq \mathcal{G}(B) \Rightarrow \tau\mathcal{G}(A) \subseteq \tau\mathcal{G}(B) \\ &\Rightarrow \quad \big(\tau\mathcal{G}(A)\big)^\perp \supseteq \big(\tau\mathcal{G}(B)\big)^\perp \overset{(1)}{\Rightarrow} \mathcal{G}(A^\dagger) \supseteq \mathcal{G}(B^\dagger) \\ &\Rightarrow \quad A^\dagger \supseteq B^\dagger \end{aligned}$$

(1) per la Prop.7-i). ■

Corollario 2 *Sia* $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$, $\mathcal{D}(A) \hookrightarrow \mathfrak{H}$,

$$\Big(A \text{ è Autoaggiunto}\Big) \Longrightarrow \Big(A \text{ è Simmetrico Massimale}\Big)$$

Dimostrazione
Sia $B \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$ simmetrico : $A \subseteq B$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad A = A^\dagger \overset{(1)}{\supseteq} B^\dagger \supseteq B \\ &\Rightarrow \quad B \subseteq A \Rightarrow A = B \end{aligned}$$

(1) per il Lem.4. ■

Teorema 6 *Sia* $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H}), \mathcal{D}(A) = \mathfrak{H}$,

$$\Big(a \text{ è } un\text{' Osservabile}\Big) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} A \text{ è Autoaggiunto} \\ A \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H}) \end{pmatrix}$$

Dimostrazione
($\Rightarrow$) Dall'Ass.3, per la Prop.4, A risulta simmetrico; per l'Oss.3, A è autoaggiunto. Per il Corol.1, A è limitato.

($\Leftarrow$) Per l'Oss.3 e la Prop.4, A soddisfa le condizioni dell'Ass.3. Infine, poichè $\mathcal{D}(A) = \mathfrak{H}$, A risulta automaticamente massimale. ■

Dunque, se includessimo la condizione $\mathcal{D}(A) = \mathfrak{H}$ negli Assiomi, ammetteremmo che a *tutte* le osservabili fisiche siano associati operatori autoaggiunti *limitati*. Ci si chiede quindi cosa ciò comporti fisicamente: se le conseguenze siano accettabili oppure no.

Il valore di aspettazione di certe grandezze fisiche non è a priori limitato superiormente o inferiormente. Si prenda come esempio l'atomo di Idrogeno: sperimentalmente si ha che esiste uno *stato fondamentale* di energia E_0, ovvero lo stato legato con energia E più negativa: $E_0 = \inf E > -\infty$, ma non si hanno limitazioni sulle energie positive (stati non legati detti di *scattering*): $\sup E = +\infty$. O anche considerando come osservabile la coordinata x_j relativa ad un asse della posizione di una particella, chiaramente: $\sup |x_j| = +\infty$. Si dimostra ora che tutto ciò è in contrasto con la condizione di limitatezza dell'operatore associato alle suddette osservabili. Sia infatti a un'osservabile e A l'operatore ad essa associato: se $A \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, allora

$$\big|\mathbb{E}_\psi(A)\big| = \big|\langle\psi, A\psi\rangle\big| \leq \|\psi\|\|A\psi\| \leq \|A\|\|\psi\|^2 = \|A\| < +\infty$$

essendo $\|\psi\| = 1$ per l'Ass.1, da cui:

$$\sup_{\substack{\psi\in\mathfrak{H} \\ \|\psi\|=1}} \big|\mathbb{E}_\psi(A)\big| \leq \|A\| < +\infty$$

La condizione di limitatezza dell'operatore implica quindi la limitatezza dell'insieme dei valori di aspettazione dell'osservabile associata. E' per questo necessario rilasciare la condizione $\mathcal{D}(A) = \mathfrak{H}$, ed ammettere $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathfrak{H}$, studiata nel capitolo successivo. Quest'ultimo fatto è la causa di molte complicanze tecniche nella MQ: se, ad esempio, A, B sono operatori definiti su un sottospazio di $\mathfrak{H}$, il solo considerare $A + B$ può essere difficile; infatti $\mathcal{D}(A + B) = \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$ che può essere uguale a $\{0\}$ anche nel caso in cui entrami i domini siano densi in $\mathfrak{H}$.

Capitolo 3

Operatori Densamente Definiti

Si concede quindi che il dominio di definizione di un operatore associato ad un'osservabile sia un sottoinsieme dello spazio di Hilbert, a patto che esso sia denso in questo. Un'altra condizione richiesta è che l'operatore non abbia ulteriori estensioni, altrimenti non vi sarebbe motivo fisico per cui l'estensione stessa non possa essere presa come operatore da associare all'osservabile data. Mentre nel capitolo precedente la difficoltà era il mostrare la limitatezza dell'operatore, in questo caso la parte articolata sarà riuscire a mostrarne l'autoaggiunzione; per farlo si passerà attraverso gli operatori non-negativi (cf. Def.13) e una loro estensione (cf. Teo.10), legata al completamento di un particolare spazio di Hilbert (cf. Def.14). Al termine si giungerà al teorema che sancisce il noto legame tra osservabili ed operatori autoaggiunti (cf. Teo.11).

Definizione 9 *Sia $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$ simmetrico,*

$$\Big(A \text{ è Massimale}\Big) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \Big(\big(B \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H}) \textit{ simmetrico} : A \subseteq B\big) \Rightarrow \big(A = B\big) \Big)$$

Osservazione 7 Dall'Ass.2 e dalla Prop.4 è immediato che:

$$\Big(a \text{ è un'Osservabile}\Big) \Longrightarrow \Big(A \text{ è Simmetrico Massimale}\Big)$$

Lemma 5 *Sia $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$, $\mathcal{D}(A) \hookrightarrow \mathfrak{H}$ simmetrico,*

$$\Big(\exists \alpha \in \mathbb{C} : \mathcal{R}(A+\alpha) = \mathcal{R}(A+\overline{\alpha}) = \mathfrak{H}\Big) \Rightarrow \Big(A \text{ è Autoaggiunto}\Big)$$

Dimostrazione
Sia $x \in \mathcal{D}(A^\dagger) \Rightarrow (A^\dagger + \overline{\alpha})x \in \mathfrak{H}$;

$$\mathcal{R}(A+\overline{\alpha}) = \mathfrak{H} \Rightarrow \exists y \in \mathcal{D}(A+\overline{\alpha}) = \mathcal{D}(A) : (A^\dagger + \overline{\alpha})x \overset{(1)}{=} (A+\overline{\alpha})y$$

ora:

$$
\begin{aligned}
\langle x,(A+\alpha)z\rangle &= \langle x,Az\rangle+\alpha\langle x,z\rangle=\langle A^\dagger x,z\rangle+\langle\overline{\alpha}x,z\rangle=\\
&= \langle(A^\dagger+\overline{\alpha})x,z)\rangle \overset{(1)}{=} \langle(A+\overline{\alpha})y,z\rangle \overset{(2)}{=}\\
&= \langle(A^\dagger+\overline{\alpha})y,z\rangle=\langle y,(A+\alpha)z\rangle \quad \forall z\in\mathcal{D}(A)\\
&\Rightarrow \langle x-y,(A+\alpha)z\rangle=0 \quad \forall z\in\mathcal{D}(A)\\
&\Rightarrow x-y\in\mathcal{R}(A+\alpha)^\perp=\mathfrak{H}^\perp=\{0\}\\
&\Rightarrow x=y\Rightarrow x\in\mathcal{D}(A)\Rightarrow\mathcal{D}(A^\dagger)\subseteq\mathcal{D}(A)\\
&\Rightarrow \mathcal{D}(A)=\mathcal{D}(A^\dagger)\Rightarrow A=A^\dagger
\end{aligned}
$$

(2) perché $y\in\mathcal{D}(A)\subseteq\mathcal{D}(A^\dagger)$. ■

Prima di procedere è ben rammentare alcune definizioni e teoremi.

Definizione 10 *Sia E uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ e sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare,*

$$\big(E,\langle\cdot,\cdot\rangle\big) \text{ \textit{è detto Spazio} Pre-Hilbertiano}$$

Quindi E, visto come spazio metrico con una metrica indotta dalla norma indotta a sua volta dal prodotto scalare, può essere *non completo*, ovvero possono esistere successioni di Cauchy che non ammettono limite in E. Per questo c'è la necessità di introdurre il concetto di *completamento* di uno spazio metrico, esplicato in seguito. Sarà utile ricordare dapprima la definizione e le proprietà di una particolare funzione tra spazi metrici: l'*isometria*.

Definizione 11 *Siano (X,d_X) e (Y,d_Y) due spazi Metrici,*

$$\Big(f:X\to Y \text{ \textit{è una} Isometria}\Big) \overset{def}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Big(d_Y\big(f(x_1),f(x_2)\big)=d_X(x_1,x_2)\ \forall x_1,x_2\in X\Big)$$

e X,Y sono detti Isometrici *se f è* SU.

Osservazione 8 *Sia $f:X\to Y$ una isometria,*

$$
\begin{array}{ll}
i) & f \text{ \textit{è uniformemente continua}}\\
ii) & f \text{ \textit{è} 1-1}\\
iii) & \Big(f \text{ \textit{è} SU}\Big)\Rightarrow\Big(f^{-1} \text{ \textit{è una isometria}}\Big)
\end{array}
$$

Dimostrazione

$i)$ fissata $\varepsilon > 0$ basta prendere $\delta_\varepsilon = \varepsilon$ e si ha:

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2) < \varepsilon \ \forall x_1, x_2 : d_X(x_1, x_2) < \delta_\varepsilon$$

$ii)$ Sia $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 0 = d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$iii)$ f è SU per ipotesi e 1-1 per la $ii) \Rightarrow \exists f^{-1} : Y \to X$;
siano ora $y_1, y_2 \in Y$, poiché f è SU, $\exists x_1, x_2 \in X : y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$; quindi:

$$d_X\left(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)\right) = d_X(x_1, x_2) \overset{(1)}{=} d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_Y(y_1, y_2)$$

(1) perché f è una isometria. ■

Definizione 12 *Sia X uno spazio Metrico non completo,*

$$\left(\tilde{X} \text{ \textit{è un} Completamento \textit{di} } X\right) \overset{def}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(\tilde{X} \text{ \textit{è uno spazio Metrico} Completo, } \exists f : X \to \tilde{X} \text{ \textit{Isometria} } : f(X) \hookrightarrow \tilde{X}\right)$$

Teorema 7 *Sia X uno spazio Metrico non completo,*

$$\begin{array}{ll} i) & \exists \tilde{X} \text{ Completamento \textit{di} } X \\ ii) & \left(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2 \text{ \textit{completamenti di} } X\right) \Rightarrow \left(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2 \text{ \textit{sono} isometrici}\right) \end{array}$$

Ovvero il completamento di X esiste ed è unico a meno di isometrie. Nonostante la dimostrazione sia articolata, essa verrà fornita perché vi risulteranno elementi fondamentali per la comprensione del seguito.

Dimostrazione

$i)$ Si prenda l'insieme delle successioni di Cauchy in X, che verranno indicate con (x_n), e si consideri la seguente relazione d'equivalenza:

$$\Big((x_n) \sim (y_n)\Big) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \Big(\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0\Big)$$

E' evidente che la definizione è ben posta (la proprietà transitiva è palese utilizzando la disuguaglianza triangolare: $d(x_n, z_n) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)$). Si consideri ora l'insieme delle classi d'equivalenza così individuate:

$$\tilde{X} := \Big\{ [(x_n)] : (x_n) \text{ successione di Cauchy in } X \Big\}$$

Dotiamo ora $\tilde{X}$ di una distanza:

$$\tilde{d}\big([(x_n)], [(y_n)]\big) := \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$$

Verifichiamo che la definizione è ben posta.
Per prima cosa dimostriamo che $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ esiste sempre.
$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n)$ e invertendo n con m si ha:

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m)$$

da cui, poiché (x_n) e (y_n) sono successioni di Cauchy, risulta che $(d(x_n, y_n))$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$ e quindi convergente.
Ora dimostriamo che $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ è indipendente dagli elementi che rappresentano la classe.
Siano $(x'_n) \sim (x_n)$ e $(y'_n) \sim (y_n)$; si ha:
$d(x'_n, y'_n) \leq d(x'_n, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y'_n)$ e invertendo i termini primati con quelli non primati:

$$|d(x'_n, y'_n) - d(x_n, y_n)| \leq d(x'_n, x_n) + d(y'_n, y_n)$$

da cui è evidente che

$$\lim_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$$

Quindi $(\tilde{X}, \tilde{d})$ è uno spazio metrico la cui completezza verrà mostrata in seguito.

Ora costruiamo l'isometria $\Phi : X \to \tilde{X}$ definendo: $\Phi(x) := [(x_n = x)]$ ovvero la classe di equivalenza rappresentata dalla successione con termini costanti pari a x, in cui quindi vi sono le successioni che hanno x come limite. Si vede che Φ è una Isometria:

$$\tilde{d}(\Phi(x), \Phi(y)) = \tilde{d}\big([(x_n = x)], [(y_n = y)]\big) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x, y) = d(x, y)$$

Vediamo ora che $\Phi(X) \hookrightarrow \tilde{X}$.
Sia $[(x_n)] \in \tilde{X}$ e sia $\big(\Phi(x_m)\big)$ successione in $\Phi(X)$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \tilde{d}\big([(x_n)], \Phi(x_m)\big) = \tilde{d}\big([(x_n)], [(y_n = x_m)]\big) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_m) \\
&\Rightarrow \quad \lim_{m\to\infty} \tilde{d}\big([(x_n)], \Phi(x_m)\big) = \lim_{m,n\to\infty} d(x_n, x_m) \overset{(1)}{=} 0 \\
&\Rightarrow \quad \tilde{X}\text{-}\lim_{m\to\infty} \Phi(x_m) = [(x_n)]
\end{aligned}$$

(1) perché (x_n) è di Cauchy. Essendo quindi ogni elemento di $\tilde{X}$ limite di una successione in $\Phi(X)$ allora $\Phi(X) \hookrightarrow \tilde{X}$.

Mostriamo ora la completezza di $\tilde{X}$.
Sia $(\tilde{x}_n)$ una successione di Cauchy in $\tilde{X}$, poiché $\Phi(X) \hookrightarrow \tilde{X}$ si ha che:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in X : \tilde{d}(\tilde{x}_n, \Phi(x_n)) < \frac{1}{n}$$

e si vede che (x_n) è una successione di Cauchy in X:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) = \tilde{d}(\Phi(x_n), \Phi(x_m)) &\leq \tilde{d}(\Phi(x_n), \tilde{x}_n) + \tilde{d}(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) + \tilde{d}(\tilde{x}_m, \Phi(x_m)) \leq \\ &\leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \tilde{d}(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) \xrightarrow[n,m\to\infty]{(2)} 0 \end{aligned}$$

(2) in quanto $(\tilde{x}_n)$ è di Cauchy in $\tilde{X}$. Quindi è possibile definire: $\tilde{x} := [(x_n)] \in \tilde{X}$ e

$$\begin{aligned} \tilde{d}(\tilde{x}_n, \tilde{x}) &\leq \tilde{d}(\tilde{x}_n, \Phi(x_n)) + \tilde{d}(\Phi(x_n), \tilde{x}) \leq \\ &\leq \frac{1}{n} + \lim_{m\to\infty} d(x_n, x_m) \xrightarrow[n\to\infty]{(3)} 0 \\ &\Rightarrow \tilde{X}\!-\!\lim_{n\to\infty} \tilde{x}_n = \tilde{x} \end{aligned}$$

(3) perché (x_n) è di Cauchy in X. Avendo quindi visto che ogni successione di Cauchy è convergente allora $(\tilde{X}, \tilde{d})$ è uno spazio metrico completo.

ii) Siano $\Phi_i : X \to X_i$ isometrie e $X_i := \Phi_i(X) \hookrightarrow \tilde{X}_i,\ i \in \{1, 2\}$.
Occorre dimostrare che $\tilde{X}_1$ e $\tilde{X}_2$ sono isometrici.
Si ha che Φ_i è 1-1 e SU quindi $\exists\, \Phi_i^{-1} : X_i \to X$ anch'essa isometria, per l'Oss.8-*iii*).
Si definisce $\Phi_{ki} := \Phi_k \circ \Phi_i^{-1} : X_i \to X_k,\ i \neq k$ che è un'isometria.
Essendo $X_i \hookrightarrow \tilde{X}_i$, Φ_{ki} è estendibile con continuità a tutto $\tilde{X}_i$: $\tilde{\Phi}_{ki} : \tilde{X}_i \to \tilde{X}_k$.
L'estensione rimane isometrica: siano $x, y \in \tilde{X}_i$ e $(x_n), (y_n)$ successioni in X_i convergenti rispettivamente a x, y allora

$$\begin{aligned} \tilde{d}_i(x, y) &= \tilde{d}_i\big(\lim x_n, \lim y_n\big) = \lim \tilde{d}_i(x_n, y_n) \overset{(4)}{=} \\ &= \lim \tilde{d}_k(\Phi_{ki}(x_n), \Phi_{ki}(y_n)) = \tilde{d}_k\big(\lim \Phi_{ki}(x_n), \lim \Phi_{ki}(y_n)\big) = \\ &\overset{(5)}{=} \tilde{d}_k(\tilde{\Phi}_{ki}(x), \tilde{\Phi}_{ki}(y)) \end{aligned}$$

(4) perché Φ_{ki} è isometrica; (5) per definizione di estensione di Φ_{ki}. Ora:

$$\big(\tilde{\Phi}_{ik} \circ \tilde{\Phi}_{ki}\big)(x_n) = (\Phi_{ik} \circ \Phi_{ki})\,(x_n) = \mathrm{id}_{X_i}(x_n) = x_n$$

Facendo il limite per $n \to \infty$ e considerando la continuità di $\tilde{\Phi}_{ik} \circ \tilde{\Phi}_{ki}$, si ha:
$\big(\tilde{\Phi}_{ik} \circ \tilde{\Phi}_{ki}\big)(x) = x$, ovvero $\tilde{\Phi}_{ik} \circ \tilde{\Phi}_{ki} = \mathrm{id}_{\tilde{X}_i}$; per l'arbitrarietà dell'indice i si ottiene che: $\tilde{\Phi}_{ik} = \tilde{\Phi}_{ki}^{-1}$ e quindi $\tilde{\Phi}_{ki}$ è un'isometria SU tra $\tilde{X}_i$ e $\tilde{X}_k$ i quali sono pertanto isometrici.
■

In realtà, quello che a noi interessa è il completamento di uno spazio pre-hilbertiano, ma, poiché tale spazio è anche uno spazio metrico, basterà fare delle semplici considerazioni aggiuntive: occorrerà dotare il completamento $\tilde{X}$ di una struttura di tipo spazio vettoriale e di un prodotto scalare compatibile con la distanza definita nella dimostrazione precedente.

Teorema 8 *Sia* $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ *uno spazio pre-Hilbertiano,*

$$\exists\, \mathfrak{H} \text{ \textit{spazio di} Hilbert} : \mathfrak{H} \text{ \textit{è} Completamento \textit{di} } E$$

Dimostrazione
Essendo $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ anche uno spazio metrico, per il Teo.7, esiste un suo completamento $\mathfrak{H}$ (i cui elementi sono classi di equivalenza delle successioni di Cauchy in E). Occorre dimostrare quindi che $\mathfrak{H}$ può essere reso uno spazio di Hilbert. Per prima cosa rendiamolo uno spazio vettoriale.
Siano $[(x_n)], [(y_n)] \in \mathfrak{H}$:

$$\alpha[(x_n)] + \beta[(y_n)] := [(\alpha x_n + \beta y_n)],\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

Sfruttando la norma in E e la relativa disuguaglianza triangolare è semplice dimostrare che la definizione è ben posta, ovvero che $(\alpha x_n + \beta y_n)$ è anch'essa una successione di Cauchy in E e che $[(\alpha x_n + \beta y_n)]$ non dipende dagli elementi rappresentativi delle classi $[(x_n)], [(y_n)]$. Si definisce ora il seguente prodotto scalare in $\mathfrak{H}$:

$$\big\langle [(x_n)], [(y_n)] \big\rangle := \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n \rangle$$

Vediamo che la definizione è ben posta. Per le proprietà del prodotto scalare in E e del limite è evidente che risulta un prodotto scalare in $\mathfrak{H}$. Dimostriamo che $\big(\langle x_n, y_n\rangle\big)$ è una successione di Cauchy:

$$\begin{aligned}
|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_m, y_m\rangle| &= |\langle x_n - x_m + x_m, y_n - y_m + y_m\rangle - \langle x_m, y_m\rangle| = \\
&= |\langle x_n - x_m, y_n - y_m\rangle + \langle x_n - x_m, y_m\rangle + \langle x_m, y_n - y_m\rangle| \leq \\
&\leq \|x_n - x_m\|\|y_n - y_m\| + \|x_n - x_m\|\|y_m\| + \\
&+ \|x_m\|\|y_n - y_m\| \xrightarrow[n\to\infty]{(1)} 0
\end{aligned}$$

(1) perché $(x_n), (y_n)$ sono successioni di Cauchy e quindi limitate. Analogamente si può dimostrare che $\lim_{n\to\infty}\langle x_n, y_n\rangle$ è indipendente dalla scelta degli elementi rappresentativi della classe. Rimane da verificare la compatibilità della definizione di distanza con quella del Teo.7.

$$\begin{aligned}
d_{\tilde{E}}\big([(x_n)], [(y_n)]\big)^2 &= \lim_{n\to\infty} d_E(x_n, y_n)^2 = \lim_{n\to\infty} \langle x_n - y_n, x_n - y_n\rangle = \\
&= \big\langle [(x_n - y_n)], [(x_n - y_n)] \big\rangle = \big\langle [(x_n)] - [(y_n)], [(x_n)] - [(y_n)] \big\rangle = \\
&= d_{\mathfrak{H}}\big([(x_n)], [(y_n)]\big)^2
\end{aligned}$$

Dunque $\big(\mathfrak{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ è uno spazio di Hilbert. ■

Si può ora procedere con il seguito.

Definizione 13 *Sia* $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$, $\mathcal{D}(A) \hookrightarrow \mathfrak{H}$ *simmetrico,*

$$\Big(A \text{ è Non-Negativo}, A \geq 0\Big) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \Big(\langle x, Ax\rangle \geq 0,\ \forall x \in \mathcal{D}(A)\Big)$$

Proposizione 8 *Sia* $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$, $\mathcal{D}(A) \hookrightarrow \mathfrak{H}$ *simmetrico,*

$$\Big(A \geq 0,\ \langle x, y\rangle_A := \langle x, (A + \mathbb{I})y\rangle\ x, y \in \mathcal{D}(A)\Big) \Rightarrow$$

$$\Big(\big(\mathcal{D}(A), \langle\cdot,\cdot\rangle_A\big) \text{ \textit{è uno Spazio} Pre-Hilbertiano}\Big)$$

Dimostrazione
Occorre dimostrare che $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ è un prodotto scalare su $\mathcal{D}(A)$.
i)

$$\langle x, x\rangle_A = \langle x, (A + \mathbb{I})x\rangle = \langle x, Ax\rangle + \langle x, x\rangle \geq 0$$

ii)

$$\langle x, x\rangle_A = 0 \Rightarrow \langle x, Ax\rangle + \langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow \langle x, Ax\rangle = \langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$$

iii) $\langle x, \cdot\rangle_A = \langle x, (A + \mathbb{I})\cdot\rangle$ è palesemente lineare.
iv)

$$\begin{aligned}
\langle y, x\rangle_A &= \langle y, (A + \mathbb{I})x\rangle = \langle y, Ax\rangle + \langle y, x\rangle = \\
&= \langle A^\dagger y, x\rangle + \langle y, x\rangle = \langle (A^\dagger + \mathbb{I})y, x\rangle \overset{(1)}{=} \\
&= \langle (A + \mathbb{I})y, x\rangle = \overline{\langle x, (A + \mathbb{I})y\rangle} = \overline{\langle x, y\rangle}_A
\end{aligned}$$

(1) poiché $y \in \mathcal{D}(A), A \subseteq A^\dagger$; quindi $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ è Hermitiano. ■

Osservazione 9 Vale $\|x\| \leq \|x\|_A\ \forall x \in \mathcal{D}(A)$, infatti:

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle \leq \langle x, x\rangle + \langle x, Ax\rangle = \langle x, (A + \mathbb{I})x\rangle = \|x\|_A^2$$

Ciò implica che ogni successione convergente in $\big(\mathcal{D}(A), \langle\cdot,\cdot\rangle_A\big)$ converga, con lo stesso limite, anche in $\big(\mathcal{D}(A), \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ e che quindi il primo spazio ha una topologia *più fine* del secondo (ovvero contiene più aperti).

Definizione 14 *Sia* $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$, $\mathcal{D}(A) \hookrightarrow \mathfrak{H}$ *simmetrico. Si definisce* $\big(\mathfrak{H}_A, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\tilde{A}}\big)$ *come il* Completamento *dello spazio pre-Hilbertiano* $\big(\mathcal{D}(A), \langle\cdot,\cdot\rangle_A\big)$.

Teorema 9 *Sia* $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$, $\mathcal{D}(A) \hookrightarrow \mathfrak{H}$ *simmetrico. Allora:*
$\exists\, \Psi : \mathfrak{H}_A \xrightarrow{\text{1-1}} \mathfrak{H}$ *ovvero* $\mathfrak{H}_A$ *è* Isomorfo *ad un sottoinsieme di* $\mathfrak{H}$ *e, in questo senso, si può scrivere* $\mathfrak{H}_A \subseteq \mathfrak{H}$.

Dimostrazione
Coerentemente alle notazioni utilizzate nella dimostrazione del Teo.7, si pone:

$$\Phi : \mathcal{D}(A) \to \mathfrak{H}_A, \quad \Phi(x) := [(x_n = x)] \quad \text{Isometria}$$

Norme, prodotti scalari e distanze etichettati con una tilde ed una A saranno relativi a $\mathfrak{H}_A$, quelli etichettati solo con una A relativi a $\big(\mathcal{D}(A), \langle\cdot,\cdot\rangle_A\big)$ e quelli non etichettati relativi a $\big(\mathfrak{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$. Ricordando che:

$$\mathfrak{H}_A = \big\{[(x_n)] : (x_n) \text{ successione di Cauchy in } \big(\mathcal{D}(A), \langle\cdot,\cdot\rangle_A\big)\big\}$$

Si definisce:

$$\Psi : \mathfrak{H}_A \to \mathfrak{H}, \quad \Psi\big([(x_n)]\big) := \mathfrak{H}-\lim_{n\to\infty} x_n$$

Vediamo che la definizione è ben posta.
Si prenda (x_n) elemento rappresentativo della classe di equivalenza $[(x_n)]$, esso è una successione di Cauchy in $\big(\mathcal{D}(A), \langle\cdot,\cdot\rangle_A\big)$ e quindi, per l'Oss.9, lo è anche in $\big(\mathfrak{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$.
Dunque, per la completezza di $\mathfrak{H}$, $\exists! x \in \mathfrak{H} : x = \mathfrak{H}-\lim_{n\to\infty} x_n$.
Ora mostriamo che tale limite è indipendente dall'elemento rappresentativo scelto.
Siano $(x'_n) \sim (x_n)$

$$\begin{aligned} &\overset{(1)}{\Rightarrow} \quad \|x'_n - x_n\|_A \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} \|x'_n - x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ &\Rightarrow \quad \mathfrak{H}-\lim_{n\to\infty} x'_n = \mathfrak{H}-\lim_{n\to\infty} x_n = x \end{aligned}$$

(1) per definizione di $\sim$ (cf. Dim. Teo.7); (2) per l'Oss.9.
A questo punto occorre dimostrare che Ψ è 1-1, ovvero che:

$$\Big(\Psi\big([(x_n)]\big) \overset{(3)}{=} \Psi\big([(y_n)]\big)\Big) \Rightarrow \Big([(x_n)] = [(y_n)]\Big) \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} \Big(\|x_n - y_n\|_A \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\Big)$$

Si definisca $(z_n) := (x_n - y_n)$, $\big(\Phi(z_n)\big)$ è una successione di Cauchy in $\mathfrak{H}_A$:

$$\begin{aligned} \|\Phi(z_n) - \Phi(z_m)\|_{\tilde{A}} &= \tilde{d}_A\big(\Phi(z_n), \Phi(z_m)\big) \overset{(4)}{=} d_A(z_n, z_m) = \\ &= \|z_n - z_m\|_A = \|x_n - x_m - (y_n - y_m)\|_A \leq \\ &\leq \|x_n - x_m\|_A + \|y_n - y_m\|_A \xrightarrow[n,m\to\infty]{(5)} 0 \end{aligned}$$

(4) perché Φ è un'Isometria; (5) perché (x_n), (y_n) sono di Cauchy.
Per la completezza di $\mathfrak{H}_A$,

$$\exists! \tilde{z} \in \mathfrak{H}_A : \; \mathfrak{H}_A-\lim_{n\to\infty} \Phi(z_n) \overset{(6)}{=} \tilde{z}$$

Inoltre sappiamo che:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{H}-\lim_{n\to\infty} x_n &= \Psi\big([(x_n)]\big) \overset{(3)}{=} \Psi\big([(y_n)]\big) = \mathfrak{H}-\lim_{n\to\infty} y_n \\
&\Rightarrow \mathfrak{H}-\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0 \Rightarrow \|x_n - y_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\
&\Rightarrow \|z_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{(7)} 0
\end{aligned}$$

Sia ora $z \in \mathcal{D}(A)$:

$$\langle \Phi(z), \tilde{z} \rangle_{\tilde{A}} \overset{(8)}{=} \lim_{n\to\infty} \langle \Phi(z), \Phi(z_n) \rangle_{\tilde{A}} \overset{(9)}{=} \lim_{n\to\infty} \langle z, z_n \rangle_A$$

(8) per la (6), (9) per la definizione di prodotto scalare nella Dim. Teo.8. Ora:

$$\begin{aligned}
\langle z, z_n \rangle_A &= \langle z, (A+\mathbb{I})z_n \rangle = \langle (A+\mathbb{I})z, z_n \rangle \le \|(A+\mathbb{I})z\|\|z_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{(10)} 0 \\
&\overset{(11)}{\Rightarrow} \langle \Phi(z), \tilde{z} \rangle_{\tilde{A}} = 0 \quad \forall z \in \mathcal{D}(A) \\
&\Rightarrow \tilde{z} \in \Phi\big(\mathcal{D}(A)\big)^{\perp} \overset{(12)}{=} \mathfrak{H}_A{}^{\perp} = \{0\} \\
&\Rightarrow 0 = \tilde{z} \overset{(6)}{=} \mathfrak{H}_A-\lim_{n\to\infty} \Phi(z_n) \\
&\Rightarrow \|\Phi(z_n)\|_{\tilde{A}} \xrightarrow[n\to\infty]{(13)} 0
\end{aligned}$$

(10) per la (7); (11) per la (10) e la (9); (12) perché $\Phi\big(\mathcal{D}(A)\big) \hookrightarrow \mathfrak{H}_A$. Ma:

$$\begin{aligned}
\|\Phi(z_n)\|_{\tilde{A}}^2 &= \langle \Phi(z_n), \Phi(z_n) \rangle_{\tilde{A}} \overset{(14)}{=} \langle z_n, z_n \rangle_A = \|z_n\|_A^2 \\
&\Rightarrow \|x_n - y_n\|_A = \|z_n\|_A \xrightarrow[n\to\infty]{(15)} 0
\end{aligned}$$

(14) cf. (9); (15) per la (13). ■

Osservazione 10 D'ora in poi quando si parlerà di $x, y \in \mathfrak{H}_A \subseteq \mathfrak{H}$ si intenderà propriamente $x, y \in \Psi\big(\mathfrak{H}_A\big) \subseteq \mathfrak{H}$ e si scriverà $\langle x, y \rangle_{\tilde{A}} \overset{not}{:=} \big\langle \Psi^{-1}(x), \Psi^{-1}(y) \big\rangle_{\tilde{A}}$. Varrà inoltre:

$$\Big(\|x\| \le \|x\|_{\tilde{A}},\ \forall x \in \mathfrak{H}_A \Big)$$

il che implica anche che se una successione in $\mathfrak{H}_A$ è convergente allora converge anche in $\mathfrak{H}$ con lo stesso limite.

Dimostrazione
Sia $x \in \mathfrak{H}_A \subseteq \mathfrak{H}$ e $[(x_n)] := \Psi^{-1}(x)$, che è ben definito perché Ψ è 1-1 (cf. Teo.9),

$$\begin{aligned} \|x\|^2_{\tilde{A}} &= \big\|[(x_n)]\big\|^2_{\tilde{A}} = \big\langle [(x_n)], [(x_n)] \big\rangle_{\tilde{A}} = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, x_n \rangle_A \overset{(1)}{\geq} \\ &\geq \lim_{n\to\infty} \langle x_n, x_n \rangle = \big\langle \mathfrak{H} - \lim_{n\to\infty} x_n,\ \mathfrak{H} - \lim_{n\to\infty} x_n \big\rangle \overset{(2)}{=} \\ &= \big\langle \Psi\big([(x_n)]\big), \Psi\big([(x_n)]\big) \big\rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2 \end{aligned}$$

(1) per l'Oss.9; (2) per definizione di Ψ (cf. Teo.14). ■

Teorema 10 *Sia $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$, $\mathcal{D}(A) \hookrightarrow \mathfrak{H}$ simmetrico,*

$$\Big(A \geq 0\Big) \Rightarrow \Big(\exists \tilde{A} \geq 0 : A \subseteq \tilde{A},\ \mathcal{R}\big(\tilde{A} + \mathbb{I}\big) = \mathfrak{H}\Big)$$

Dimostrazione
Si definisca l'operatore $\tilde{A} : \mathfrak{H}_A \to \mathfrak{H}$,

$$\mathcal{D}\big(\tilde{A}\big) := \big\{x \in \mathfrak{H}_A :\ \exists \tilde{x} \in \mathfrak{H} : \langle y, x \rangle_{\tilde{A}} \overset{(1)}{=} \langle y, \tilde{x} \rangle, \forall y \in \mathfrak{H}_A\big\},\ \tilde{A}x := \tilde{x} - x$$

La definizione è ben posta in quanto $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathfrak{H}_A, \mathcal{D}(A) \hookrightarrow \mathfrak{H} \Rightarrow \mathfrak{H}_A \hookrightarrow \mathfrak{H}$, quindi $\tilde{x}$, quando esiste, è unico.
Sia poi $x \in \mathcal{D}(A), y \in \mathfrak{H}_A$,

$$\begin{aligned} &\overset{(2)}{\Rightarrow} \exists (y_n) \text{ succ. in } \mathcal{D}(A) : \mathfrak{H}_A - \lim_{n\to\infty} y_n = y \\ &\Rightarrow \langle y, x \rangle_{\tilde{A}} = \lim_{n\to\infty} \langle y_n, x \rangle_A = \lim_{n\to\infty} \langle y_n, (A + \mathbb{I})x \rangle = \\ &= \big\langle \mathfrak{H} - \lim_{n\to\infty} y_n, (A + \mathbb{I})x \big\rangle \overset{(3)}{=} \langle y, (A + \mathbb{I})x \rangle \\ &\Rightarrow \tilde{x} = (A + \mathbb{I})x \Rightarrow \mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}\big(\tilde{A}\big) \\ &\Rightarrow \tilde{A}x = (A + \mathbb{I})x - x = Ax \\ &\Rightarrow A \subseteq \tilde{A} \end{aligned}$$

(2) perché $\mathcal{D}(A) \hookrightarrow \mathfrak{H}_A$; (3) poiché $y = \mathfrak{H}_A\text{–}\lim_{n\to\infty} y_n = \mathfrak{H}\text{–}\lim_{n\to\infty} y_n$ per l'Oss.10.
Sia ora $x \in \mathfrak{H}_A$,

$$\begin{aligned} \langle x, \tilde{A}x \rangle &= \langle x, \tilde{x} - x \rangle = \langle x, \tilde{x} \rangle - \langle x, x \rangle \overset{(4)}{=} \\ &= \langle x, x \rangle_{\tilde{A}} - \langle x, x \rangle = \|x\|^2_{\tilde{A}} - \|x\|^2 \overset{(5)}{\geq} 0 \\ &\Rightarrow \tilde{A} \geq 0 \end{aligned}$$

(4) per la (1); (5) per l'Oss.10.
Sia infine $\tilde{x} \in \mathfrak{H}$,

$$\begin{aligned} |\langle \tilde{x}, y\rangle| &\leq \|\tilde{x}\|\|y\| \overset{(6)}{\leq} \|\tilde{x}\|\|y\|_{\tilde{A}} \quad \forall y \in \mathfrak{H}_A \\ &\Rightarrow \langle \tilde{x}, \cdot\rangle \in \mathfrak{H}_A^* \\ &\overset{(7)}{\Rightarrow} \exists! x \in \mathfrak{H}_A : \langle \tilde{x}, y\rangle = \langle x, y\rangle_{\tilde{A}} \quad \forall y \in \mathfrak{H}_A \\ &\overset{(8)}{\Rightarrow} x \in \mathcal{D}(\tilde{A}) \Rightarrow \tilde{A}x = \tilde{x} - x \\ &\Rightarrow (\tilde{A} + \mathbb{I})x = \tilde{x} \Rightarrow \mathcal{R}\big(\tilde{A} + \mathbb{I}\big) = \mathfrak{H} \end{aligned}$$

(6) per l'Oss.10; (7) per il Teo.2; (8) per la (1). ■

Corollario 3 *Sia* $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$, $\mathcal{D}(A) \hookrightarrow \mathfrak{H}$,

$$\Big(A^2 \text{ è Simmetrico Massimale}\Big) \Longrightarrow \Big(A \text{ è Autoaggiunto}\Big)$$

Dimostrazione
Sia $x \in \mathcal{D}(A^2)$,

$$\begin{aligned} \langle x, A^2 x\rangle &= \langle x, AAx\rangle \overset{(1)}{=} \langle A^\dagger x, Ax\rangle \overset{(2)}{=} \langle Ax, Ax\rangle \geq 0 \\ &\Rightarrow A^2 \geq 0 \\ &\overset{(3)}{\Rightarrow} \exists \tilde{B} \geq 0 : A^2 \subseteq \tilde{B},\ \mathcal{R}(\tilde{B} + \mathbb{I}) = \mathfrak{H} \\ &\overset{(4)}{\Rightarrow} \mathcal{R}(A^2 + \mathbb{I}) = \mathfrak{H},\ A^2 = \tilde{B} \\ &\Rightarrow \forall y \in \mathfrak{H} \quad \exists x \in \mathcal{D}(A^2) : y = (A^2 + \mathbb{I})x = \\ &= (A + i)(A - i)x = (A - i)(A + i)x \\ &\overset{(5)}{\Rightarrow} \forall y \in \mathfrak{H} \quad \exists \tilde{x} \equiv (A \pm i)x \in \mathcal{D}(A) : (A \mp i)\tilde{x} = y \\ &\Rightarrow \mathcal{R}(A \pm i) = \mathfrak{H} \\ &\overset{(6)}{\Rightarrow} A = A^\dagger \end{aligned}$$

$(1), (2)$ in quanto $\mathcal{D}(A^2) \subseteq \mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A^\dagger)$; (3) per il Teo.10; (4) poiché, per ipotesi, A^2 è simmetrico massimale; (5) poiché $(A \pm i)x \in \mathcal{D}(A)$, in quanto $x \in \mathcal{D}(A^2)$; (6) per il Lem.5. ■

Teorema 11 *Sia* $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$,

$$\Big(a \text{ \textit{è un'} Osservabile}\Big) \Longleftrightarrow \Big(A \text{ è Autoaggiunto}\Big)$$

Dimostrazione
($\Rightarrow$) Dall'Ass.3, per la Prop.4, A risulta simmetrico. Se a è un'osservabile, per l'Ass.2, lo è anche a^2 ed ha come operatore associato A^2. Essendo A^2 un operatore associato ad un'osservabile, per l'Oss.7, deve essere simmetrico massimale. Per il Corol.3, A è autoaggiunto.
($\Leftarrow$) Per l'Oss.3, A è simmetrico e l'Ass.3 è soddisfatto, per la Prop.4. Per il Corol.2, A è simmetrico massimale e soddisfa i requisiti dell'Ass.2. ■

Il Teo.11 è importante perchè garantisce che gli assiomi proposti nel Cap.1 siano compatibili con uno dei pilastri concettuali della MQ: il fatto che vi sia una corrispondenza biunivoca tra osservabili ed operatori autoaggiunti. Nella nostra trattazione ciò è risultato come teorema a partire da assiomi *più deboli* rispetto a quelli tradizionali, nel senso che verrà esplicato in seguito. Dagli Ass.2,3 è immediato che a osservabili corrispondano operatori simmetrici massimali (cf. Oss.7). Si potrebbe essere indotti a pensare che operatori simmetrici massimali siano autoaggiunti, come è noto il viceversa (cf. Teo.2). In tal caso sarebbe una sottigliezza matematica parlare di operatori simmetrici massimali o di operatori autoaggiunti, sebbene, comunque, la necessità della presenza dei primi negli assiomi della MQ possa essere giustificata più facilmente (cf. inizio Cap.3). Tuttavia si ha che:

Osservazione 11 Sia $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H}), \mathcal{D}(A) \hookrightarrow \mathfrak{H}$,

$$\Big(A \textit{ Simmetrico Massimale}\Big) \not\Rightarrow \Big(A \textit{ Autoaggiunto}\Big)$$

Per dimostrare questa affermazione è sufficiente la teoria degli indici di difetto degli operatori simmetrici (cf. [3] Cap.10.1).

Definizione 15 *Sia $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$ simmetrico, si definiscono:*

$$n_{\pm} := \dim\big(\mathcal{N}(A^{\dagger} \mp i)\big) \quad \text{Indici di Difetto } \textit{di } A$$

Teorema 12 *Sia $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$ simmetrico e chiuso. Allora:*

$$\begin{array}{ll} i) & \Big(n_+ = n_- = 0\Big) \Longleftrightarrow \Big(A \textit{ è Autoaggiunto}\Big) \\ ii) & \Big(n_+ = 0 \vee n_- = 0,\ n_+ \neq n_-\Big) \Longrightarrow \Big(A \textit{ è Simmetrico Massimale}\Big) \end{array}$$

Lemma 6 *Sia $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$, $\mathcal{D}(A) \hookrightarrow \mathfrak{H}$,*

$$\Big(A \textit{ è Simmetrico Massimale}\Big) \Longrightarrow \Big(A \textit{ è Chiuso}\Big)$$

Dimostrazione
Per ipotesi A è simmetrico $\Rightarrow \mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A^\dagger) \Rightarrow \mathcal{D}(A^\dagger) \hookrightarrow \mathfrak{H} \Rightarrow A$ è chiudibile per la Prop.7$-ii$). Essendo A^- la più piccola estensione chiusa di A per l'Oss.5 e $A \subseteq A^\dagger$ con $A^\dagger$ chiuso per la Prop.7$-i$), allora $A^- \subseteq A^\dagger$. Per cui A^- è un'estensione simmetrica di A e, essendo A simmetrico massimale, $A = A^-$. ■

Corollario 4 *Sia $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H})$, $\mathcal{D}(A) \hookrightarrow \mathfrak{H}$,*

$$\left(\begin{array}{c} A \text{ è } \textit{Simmetrico Massimale} \\ n_+ = 0 \vee n_- = 0,\ n_+ \neq n_- \end{array} \right) \Longrightarrow \Big(A \text{ non è } \textit{Autoaggiunto} \Big)$$

Dimostrazione
Se per assurdo A fosse autoaggiunto, essendo A simmetrico massimale e quindi chiuso per il Lem.6, varrebbe il Teo.12$-i$)($\Leftarrow$) da cui $n_+ = n_- = 0$ il che è assurdo perché per ipotesi $n_+ \neq n_-$. ■

Si è quindi mostrato come poter trovare un operatore simmetrico massimale non autoaggiunto. Da cui il fatto che imporre che un operatore sia simmetrico massimale è *più debole* rispetto alla condizione che sia autoaggiunto. Sono le particolari proprietà (fisiche) delle osservabili, enunciate nell'Ass.2, che permettono, nonostante quanto detto, di arrivare al Teo.11 e "recuperare" la condizione dell'autoaggiunzione degli operatori associati alle osservabili stesse.

Capitolo 4

Conclusioni

A partire da assiomi *più deboli*, più fondamentali e più fisicamente giustificabili, si è arrivati ad introdurre nella MQ gli importanti concetti di misura di probabilità, vista come valore d'aspettazione di una particolare funzione di un'osservabile ($\mathbb{E}_\psi\big(\chi_\Omega(A)\big)$, cf. Cap.1, Ass.3); di equazione di Schrödinger, vista come equazione che descrive, in forma differenziale, l'evoluzione di una funzione d'onda e deducibile dal gruppo unitario ad un parametro fortemente continuo che descrive la dinamica del sistema quantistico (cf. Cap.1, Ass.4); di operatore autoaggiunto (cf. Cap.2,3).

Ci si è soffermati in particolare su quest'ultimo e si è mostrato come operatori associati alle osservabili non possono in generale essere definiti su tutto lo spazio di Hilbert; infatti, in tal caso, sarebbero autoaggiunti e limitati (cf. Teo.6), in contrasto con l'evidenza fisica che l'insieme dei valori misurati di certe grandezze non è limitato superiormente o inferiormente (cf. Cap.2). A seguito di ciò ci si è chiesti quali fossero le condizioni più ragionevoli da imporre sul dominio di tali operatori e sugli operatori stessi, arrivando alla definizione di *Operatori Simmetrici Massimali* (cf. Def.9) e al loro ruolo centrale negli assiomi della MQ (cf. Oss.7).

Si è sviluppata la teoria degli operatori non-negativi, soffermandoci in particolare sulla loro possibile estensione, attraverso il completamento $\mathfrak{H}_A$ dello spazio pre-Hilbertiano del dominio dell'operatore equipaggiato con un opportuno prodotto scalare (cf. 14, Teo.10). Si è utilizzata la suddetta teoria osservando che il quadrato di un operatore associato ad un'osservabile è non-negativo (oltre ad essere a sua volta un'osservabile) e, attraverso la caratterizzazione degli operatori autoaggiunti (i.e. i criteri di autoaggiunzione, cf. Lem.5), si è arrivati a a concludere che gli operatori autoaggiunti sono in corrispondenza biunivoca con le osservabili fisiche (cf. Teo.11). Si è infine mostrato, tramite la teoria degli indici di difetto degli operatori simmetrici, come la condizione che un operatore sia simmetrico massimale sia più debole di imporre la sua autoaggiunzione (cf. Teo.2).

Glossario delle Notazioni

MQ	Meccanica Quantistica
$\mathfrak{H}$	spazio di Hilbert
$\sim$	è equivalente a
$[\,\cdot\,]$	classe di equivalenza
$\mathrm{Card}(\cdot)$	cardinalità di un insieme
$\ell^2(\mathbb{N})$	spazio di Hilbert delle successioni quadrato-sommabili
$\mathcal{D}(\cdot)$	dominio di un operatore
$\hookrightarrow$	è denso in
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	prodotto scalare
$\chi_\Omega(\cdot)$	funzione caratteristica dell'insieme Ω
$\mathbb{I}$	operatore identità
$\mathfrak{H}-\lim$	limite nella topologia/metrica/norma di $\mathfrak{H}$
$\mathfrak{L}(X,Y)$	insieme degli operatori lineari da X a Y spazi normati
$\mathfrak{L}(\mathfrak{H})$	$=\mathfrak{L}(\mathfrak{H},\mathfrak{H})$
$\wedge$	"e" logico
$\vee$	"o" logico
$A^\dagger$	operatore aggiunto di A
$M^\perp$	complemento ortogonale dell'insieme M
M^-	chiusura dell'insieme M
$\overline{z}$	complesso coniugato di z
$(\cdot,\cdot)$	coppia ordinata
A^-	chiusura dell'operatore A
$\mathcal{R}(\cdot)$	Range di un operatore
$\mathcal{C}(\cdot)$	complementare di un insieme
SU	suriettivo
1-1	iniettivo
$S(x,\delta)$	sfera aperta di centro x e raggio δ
$\mathfrak{B}(X,Y)$	insieme degli operatori che $\in\mathfrak{L}(X,Y)$ e limitati
$\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$	$=\mathfrak{B}(\mathfrak{H},\mathfrak{H})$
$\mathfrak{H}^*$	$=\mathfrak{B}(\mathfrak{H},\mathbb{C})$ duale topologico di $\mathfrak{H}$
$\mathcal{N}(\cdot)$	Nucleo di un operatore

Bibliografia

[1] Gerald Teschl. *Mathematical Methods in Quantum Mechanics*. American Mathematical Society, 2009.

[2] Michael Reed, Barry Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol I.Functional Analysis*. Academic Press, Inc.

[3] Michael Reed, Barry Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol II.Fourier Analysis, Self-Adjointness*. Academic Press, Inc.

[4] A.Galindo, P.Pascual. *Quantum Mechanics I*. Springer-Verlag.

[5] P.A.M. Dirac. *The Principles of Quantum Mechanics*. Clarendon Press, Oxford, IV edizione, 1958.