

**ALMA MATER STUDIORUM - UNIVERSITÀ DI BOLOGNA**

**FACOLTÀ DI LETTERE E FILOSOFIA**

**Corso di laurea in Scienze Filosofiche**

# **Logiche modali e logiche *independence friendly***

**Tesi di laurea in**

**Logica**

**Relatore: Prof. Giovanna Corsi**

**Correlatore: Prof. Rossella Lupacchini**

**Presentata da: Francesco Antonio Genco**

**Terza Sessione**

**Anno accademico  
2011/2012**



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>4</b>
<b>1 Le logiche IF, i quantificatori di Henkin e la teoria dei giochi</b>	<b>10</b>
1.1 Quantificatori diramati e scelte indipendenti . . . . .	10
1.2 Logiche IF . . . . .	23
1.2.1 Formule IF non consuete . . . . .	30
1.2.2 Alcune proprietà delle logiche IF . . . . .	33
<b>2 IFMLm</b>	<b>40</b>
2.0.3 Sintassi per logica MLm . . . . .	40
2.0.4 La traduzione da MLm alla logica del primo ordine . .	41
2.0.5 Le sottoformule nella traduzione di Mlm . . . . .	42
2.0.6 Gestione delle dipendenze in IFMLm . . . . .	43
2.1 La semantica composizionale di IFMLm . . . . .	45
2.1.1 Le strutture, le loro parti e gli assegnamenti . . . . .	45
2.1.2 Sottoformule . . . . .	47
2.1.3 Semantica dei trionfi per IFMLm . . . . .	48
2.1.4 Esempi di valutazione . . . . .	49
<b>3 Sintassi e semantica di IFML</b>	<b>56</b>
3.1 La sintassi IFML . . . . .	56
3.1.1 La sintassi ML . . . . .	56
3.1.2 Modalità . . . . .	58
3.1.3 La traduzione da ML alla logica del primo ordine . . .	59
3.1.4 Sottoformule nella traduzione di ML . . . . .	60
3.1.5 Gestione delle dipendenze in IFML . . . . .	61
3.2 La semantica composizionale di IFML . . . . .	63
3.2.1 Le strutture, le loro parti e gli assegnamenti . . . . .	63

3.2.2	Sottoformule . . . . .	65
3.2.3	Semantica dei trionfi . . . . .	66
3.2.4	Esempi di valutazione . . . . .	68
3.3	Notazione breve modale . . . . .	77
3.4	Traduzione con quantificatori compatti . . . . .	79
3.5	Formule IFML non consuete . . . . .	84
<b>4</b>	<b>Proprietà di IFML</b>	<b>87</b>
4.1	Schemi di equivalenza . . . . .	87
4.2	Downward closure . . . . .	90
4.3	Upward closure . . . . .	93
4.4	Espressività di IFML . . . . .	101
4.5	Decidibilità . . . . .	106
	<b>Conclusione</b>	<b>116</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>120</b>

# Ringraziamenti

Come ogni cosa, questo testo deve la sua esistenza e forma a un'enorme serie di condizioni. Molte persone hanno concorso, con il loro tempo e il loro impegno, al processo che giunge a compimento con queste pagine, e tutte meriterebbero di essere ringraziate; dato che farne una lista completa non è possibile tenterò di ricordare coloro che più evidentemente hanno contribuito.

Ringrazio la professoressa Giovanna Corsi, relatrice per questa tesi, che mi ha guidato e seguito con pazienza e impegno per tutta la durata del lavoro; il professor Maurizio Matteuzzi e il dottor Francesco Bianchini, senza il consiglio dei quali non sarei riuscito a studiare quello che ho studiato; il professor Giorgio Sandri e il professor Libero Verardi che mi hanno convinto, inconsapevolmente, a prendere la strada che sto seguendo. Ringrazio per le letture che più mi hanno affascinato e formato il professor Manlio Iofrida; la professoressa Rossella Lupacchini, correlatrice per questa tesi; il professor Maurizio Malaguti; il professor Giovanni Matteucci e la professoressa Eva Picardi. Ringrazio Simonetta Manservisi, molti gravosi e oscuri problemi sono stati risolti solo grazie a lei. Sono immensamente grato a tutta la mia famiglia; ringrazio mio padre e mia madre, in particolare, per aver permesso che studiassi e per aver sempre accettato le mie scelte. Non posso ringraziare tutti gli amici che vorrei ringraziare, e non vi riuscirei potendo. Ringrazio, nonostante questo, Emanuele per avermi ascoltato, Federico per avermi fatto comprendere l'importanza dei ringraziamenti, Francesco per le discussioni sulla grafica e Jacopo per le regole.

Bologna  
Marzo, 2013.

Francesco Antonio Genco

# Introduzione

Le logiche *independence friendly*, o più semplicemente IF, estendono linguaggi predicativi del primo ordine, ad esempio quello relativo alla logica del primo ordine o a suoi frammenti, e ne aumentano il potere espressivo introducendo un dispositivo che agisce su operatori e quantificatori; l'applicazione di questo dispositivo permette di eliminare la dipendenza di un quantificatore o di un operatore da un quantificatore che lo precede e, quindi, di modificare la gerarchia propria delle formule classiche. Mentre i quantificatori di una formula del primo ordine sono linearmente ordinati, la dipendenza all'interno di una formula *independence friendly* può presentarsi come ordine parziale.

Il tentativo di spezzare l'ordine lineare interno alle formule classiche ha caratterizzato, prima delle ricerche sulle logiche qui discusse, gli studi sui quantificatori diramati. Henkin per primo ha sviluppato l'idea di formule in cui la quantificazione è sottoposta a gerarchie non lineari e svincolate rispetto all'ordine sintattico esplicito. I *quantificatori parzialmente ordinati*, o *diramati*, introdotti da Henkin sono raggruppamenti di quantificatori classici ordinati parzialmente da una relazione di dipendenza; così come con le logiche IF si può esprimere l'indipendenza delle variabili quantificate, con i quantificatori diramati si possono esprimere selettivamente le singole dipendenze tra queste.

La prima semantica a essere applicata alle logiche *independence friendly* trae concetti e tecniche dalla teoria dei giochi. Questa semantica, che chiameremo anche *game-teoretica*, vale anche per le formule classiche e presenta il pregio di essere molto intuitiva e di mostrare un punto di vista interessante e diretto sulle formule stesse. Per valutare una formula secondo questo metodo bisogna pensare alla stessa come al materiale da gioco per una partita tra due competitori che si confrontino al fine di verificarla, l'uno, e di falsificarla, l'altro. Alcuni operatori e quantificatori segnalano il momento di agire per uno dei due contendenti, altri per l'altro; le mosse consistono nello scegliere

re sottoformule e nell'assegnare variabili; le dipendenze tra quantificatori e operatori rappresentano la conoscenza sulla storia della partita disponibile a ciascun giocatore. Osservando la valutazione e la struttura di una formula in questo modo risulta facile comprendere e interpretare le modifiche alla dipendenza classica che si possono trovare in formule IF. Se la dipendenza di un quantificatore verso un altro rappresenta il fatto che il giocatore che agisce sul primo conosce ciò che è avvenuto relativamente al secondo, per rendere conto dell'eliminazione di una dipendenza è sufficiente nascondere al giocatore parte dell'informazione relativa alla storia della partita. Un ulteriore passo di generalizzazione garantisce che la verità di una formula non dipenda dal risultato di una singola partita ma, come vedremo nel dettaglio più avanti, dall'esistenza di strategie che possano garantire la vittoria a uno dei due giocatori. Questo riflette il fatto ovvio che l'abilità dei giocatori o la loro scelta di eseguire una mossa fortunata non possono essere indicatori di una certa natura della formula: essa è vera solamente se è sempre possibile compiere scelte che la verifichino, nonostante tutto quello che possa accadere.

La forma normale di Skolem è un secondo metodo per mostrare efficacemente la differenza tra ordini lineari e ordini parziali di quantificatori. Mentre nel portare a forma normale di Skolem una formula classica del primo ordine una variabile quantificata esistenzialmente viene sostituita da una funzione di tutte le variabili quantificate universalmente che la precedono, nel farlo per una formula IF la funzione relativa a una variabile quantificata esistenzialmente dipende solo dalle variabili verso le quali non sia stata indicata l'indipendenza di questa. In breve, le dipendenze funzionali introdotte nella forma skolemizzata di una formula corrispondono esattamente alle dipendenze tra quantificatori che nelle formule IF possono essere eliminate.

Nonostante le variabili esplicitamente indicate nelle formule IF siano variabili individuali del primo ordine le logiche IF hanno un potere espressivo che supera quello della logica del primo ordine; questo accade anche per le logiche che ammettono l'uso dei quantificatori diramati. La possibilità di creare linee di dipendenza di variabili equivale alla dichiarazione di funzioni; il maggior controllo che la gestione delle dipendenze offre nelle logiche IF conduce alla possibilità di definire e dare condizioni più severe alle funzioni dichiarate implicitamente. Per fare un esempio, alcune formule IF possono esprimere requisiti di cardinalità verso i domini; questi requisiti necessitano almeno del potere del secondo ordine per poter essere espressi.

I pregi delle logiche IF sono, in un certo senso, compensati dalla complessità della loro sintassi e della loro semantica. La struttura di una formula IF

è composta per sovrapposizione di due strati di costruzione: il primo consiste in una formula generata secondo le regole della logica del primo ordine, il secondo è l'apparato per indicare i rapporti di indipendenza. Un fattore che complica questa sintassi è il rapporto di dipendenza tra il dispositivo e l'organizzazione della formula intera. Mentre il dispositivo agisce su una singola variabile a cui è applicato, come esso venga formulato dipende dall'intera formula. Esiste, dunque, un rapporto tra la formazione delle singole parti dell'apparato per le indipendenze e l'articolazione della formula intera; questo rapporto previene la possibilità di trovare una struttura modulare nella sintassi delle formula IF. Una conseguenza di questo rapporto impedisce la divisione in formule ben formate di una formula: non tutte le sottoformule di una formula, infatti, sono formule ben formate. Questo avviene perché i dispositivi per l'indipendenza potrebbero far riferimento a variabili che nella sottoformula non compaiono.

Dato l'intreccio di connessioni interne alla formula che non seguono precisamente la gerarchia dell'albero sintattico, anche la semantica presenta problemi rispetto alla composizionalità. La semantica derivata dalla teoria dei giochi non è, infatti, composizionale e bisogna adottare una articolata semantica che usi classi di equivalenza su insiemi di assegnamenti per averne una che lo sia. Una semantica di questo secondo tipo fu introdotta da Hodges nel 1997 e in questo scritto ne useremo una versione di Sevenster per le logiche modali *independence friendly*.

L'introduzione nell'ambito delle logiche modali del dispositivo per le indipendenze verrà trattato analizzando la logica IFML introdotta da Sevenster nell'articolo *Decidability of independence-friendly modal logic*<sup>1</sup>. Questa logica costruita aggiungendo l'apparato IF a una logica modale proposizionale condivide alcuni degli aspetti principali delle logiche IF pur presentando numerose differenze, non tutte legate alla sua componente modale. In particolare le formule IFML si generano traducendo, tramite traduzione standard, formule modali proposizionali e applicandovi i dispositivi per indipendenze.

Diverse caratteristiche rilevanti delle logiche IF non modali sono condivise da IFML. Le sottoformule di una formula, ad esempio, non sono sempre formule ben formate; la semantica presenta le stesse difficoltà riguardo alla composizionalità; l'espressività è maggiore rispetto alla logica modale sottostante, senza indicazione delle indipendenze. IFML si distingue però rispetto alla logica IF generata tramite la grammatica della logica del primo ordine

---

<sup>1</sup>[Sevenster 2010].



sotto diversi rispetti. Il ruolo e la distribuzione delle variabili libere ne sono un esempio: derivando direttamente dalla grammatica di base rispondono all'esigenza di rappresentare il punto per il quale la formula modale vale; si vedrà che questa caratteristica influisce in maniera rilevante sulla forma dei modelli usati per valutare la soddisfacibilità di una formula e sull'analisi dei rapporti che intercorrono tra loro. La logica IFML è meno espressiva delle logiche IF predicative. Anche questo è dovuto agli aspetti modali della logica, infatti la traduzione di una formula modale contiene solo quantificatori con guardia; a differenza delle logiche non modali, ogni variabile quantificata di IFML è inserita in una rete di relazioni che la collega ad almeno una delle altre variabili. Una differenza che non riguarda la componente modale di IFML appare, invece, nelle regole sull'applicazione dei dispositivi per le indipendenze; a differenza di molte delle logiche IF il linguaggio di IFML ammette indicazioni di indipendenze estremamente libere per quanto concerne la loro applicazione: ogni genere di quantificatore e operatore può essere reso indipendente da ogni variabile dichiarata da qualsiasi quantificatore della formula. La rilevanza di questa differenza ha portato alcuni a parlare di logiche *slash*, piuttosto che di logiche IF, per i linguaggi che adottano queste norme; il termine '*slash*' deriva dal simbolo del dispositivo usato per indicare l'indipendenza da un insieme di variabili.

Questo testo ha il fine di analizzare da diversi punti di vista la logica IFML e di presentare i percorsi di studio che hanno condotto a concepirne l'idea e a svilupparne l'analisi. Si presenterà e discuterà, in seguito, parte di quello che può essere considerato l'albero genealogico della logica IFML; si tenterà, inoltre, di mostrare, chiarire e connettere numerose questioni che riguardano i metodi di rappresentazione dell'indipendenza nei diversi formalismi considerati, i requisiti e le conseguenze di tale rappresentazione e i nessi che legano questi formalismi.

Nel primo capitolo sono presentate le origini, le motivazioni e il funzionamento delle logiche *independence friendly* in generale. Anzitutto compare una breve introduzione sui quantificatori di Henkin; la posizione iniziale di questo argomento è dovuta al fatto che questo genere di quantificatori rappresentano il punto di origine dei successivi studi sull'indipendenza tra variabili e, quindi, delle ricerche sulle logiche che verranno discusse in seguito. Si esporranno, nella stessa sezione, le osservazioni di carattere linguistico che hanno contribuito a motivare l'avanzamento di questi studi. In questa parte si porrà attenzione a fornire un punto di vista chiaro e ampio sulle intuizioni e sulle questioni che hanno condotto alle diverse formalizzazioni dell'indi-

pendenza. Dopo questa sezione si trova quella in cui vengono presentate e discusse la sintassi e la semantica della logica IF. Oltre a esporre e spiegare i meccanismi e le idee sottostanti a tale logica si è riservata qualche pagina ad alcuni risultati concernenti le interazioni tra i valori di verità, i connettivi e alcuni tipi particolari di formula. Successivamente vengono mostrati e discussi alcuni comportamenti inconsueti che si presentano nelle formule IF per via della semantica che si usa per esse; questi rappresentano effetti collaterali, criticati da qualcuno, del sistema semantico necessario a esprimere le indipendenze. A chiusura di questo capitolo sono esposti teoremi e dimostrazioni concernenti alcune delle proprietà principali delle logiche IF.

Il secondo capitolo è completamente dedicato all'esposizione e al chiarimento della sintassi e della semantica di una versione di IFML dotata di una sola modalità (IFMLm). Questa logica servirà ad analizzare dettagliatamente ogni aspetto della generazione delle formule IFML e della loro valutazione su strutture relazionali. Le operazioni, costruzioni e definizioni che riguardano questo linguaggio rispecchiano perfettamente le corrispondenti che riguardano invece IFML; l'unica differenza, una consistente semplificazione della sintassi e dell'apparato modale, si è ritenuta utile alla comprensione dei passaggi resi oscuri dalle difficoltà dovute alla generalizzazione. In questo capitolo compaiono, inoltre, diversi esempi di valutazione di formule IFMLm; anche questi sono di grande interesse per quello che riguarda la comprensione di IFML perché le formule prese qui in considerazione possono essere intese, senza difficoltà, come casi particolari dell'uso di quel linguaggio, più generale di IFMLm.

Il capitolo terzo, centrale per l'analisi di IFML, riguarda la sua sintassi e la sua semantica. Questo si sviluppa parallelamente al capitolo precedente e si può leggere come una generalizzazione di quello. Alcuni dei chiarimenti che avrebbero potuto trovare posto in questo capitolo sono stati omessi per via della sostanziale identità con considerazioni già esposte per IFMLm; nonostante questo, il contenuto esposto non risente di mancanze e rappresenta un'unità a sé stante. A conclusione di questo capitolo viene ripreso il discorso iniziato nella sezione sulle particolarità delle logiche IF; si tenta di esaminare le linee di continuità tra il ruolo dei quantificatori IF e l'uso che si fa dei quantificatori in IFML. Questa parte conclusiva risulta di grande interesse, soprattutto in vista dei risultati presenti nel capitolo successivo, per la comprensione di uno degli aspetti essenziali della differenza tra le logiche *independence friendly* modali e non modali: i vincoli sui quantificatori.

L'ultimo capitolo racchiude una raccolta di teoremi e dimostrazioni; sono

stati scelti al fine di mostrare le proprietà caratteristiche della logica IFML con particolare riguardo alla distanza che la separa dai linguaggi modali proposizionali, da una parte, e dai linguaggi IF non modali, dall'altra. Questo capitolo contiene una sezione dedicata ad argomenti concernenti l'espressività, una che riguarda le trasformazioni che conservano il valore di verità delle formule, una sulla chiusura rispetto ai sottoinsiemi delle squadre di assegnamenti e una sulla chiusura rispetto all'unione. In conclusione si è riproposta, in forma completa, la dimostrazione di Sevenster sulla decidibilità di IFML.

# Capitolo 1

## Le logiche IF, i quantificatori di Henkin e la teoria dei giochi

### 1.1 Quantificatori diramati e scelte indipendenti

Henkin in un articolo del 1961<sup>1</sup> ha introdotto i *quantificatori parzialmente ordinati*<sup>2</sup>. Un altro nome comunemente usato per indicarli è *branching quantifiers*, che tradurremo d'ora in avanti con *quantificatori diramati*. Il seguente è un esempio di quantificatore diramato:

$$\left( \begin{array}{cc} \forall x_1 & \exists y_1 \\ \forall x_2 & \exists y_2 \end{array} \right) \phi(x_1, y_1, x_2, y_2).$$

In questo è indicato, oltre a ciò che normalmente significano i simboli logici che contiene, che in  $\phi(x_1, x_2, y_1, y_2)$  la variabile  $y_1$  dipende solo da  $x_1$ , mentre la variabile  $y_2$  solo da  $x_2$ . Rispettando l'uso dei quantificatori classici riuniti dal quantificatore diramato e interpretando  $y_1$  e  $y_2$  come valori direttamente ed esclusivamente dipendenti da  $x_1$  e  $x_2$ , rispettivamente, l'espressione precedente può essere riscritta equivalentemente come la formula del secondo ordine

$$\exists f \exists g \forall x_1 \forall x_2 \phi(x_1, x_2, f(x_1), g(x_2)).$$

---

<sup>1</sup>[Henkin 1961].

<sup>2</sup>[Blass/Gurevich 1986].

I quantificatori diramati permettono di superare il potere espressivo della logica del primo ordine dotata di soli quantificatori classici. Andrzej Ehrenfeucht, infatti, ha dimostrato la non-assiomatizzabilità della logica del primo ordine con quantificatori di Henkin<sup>3</sup> e, in seguito, in due articoli del 1970<sup>4</sup> si è dimostrato che essa è equivalente al frammento  $\Sigma_1^1$  della logica del secondo ordine: la logica esistenziale del secondo ordine, consistente di tutte le formule del secondo ordine che quantificano le variabili del secondo ordine solo esistenzialmente.

I quantificatori introdotti da Henkin risultano di grande interesse per il presente testo perché rappresentano una prima forma di riflessione sui rapporti di dipendenza all'interno di una formula. Come si vedrà anche nella parte di questo capitolo dedicata alle proprietà delle logiche *independence friendly* c'è un forte collegamento tra queste logiche e i quantificatori diramati. Le logiche *independence friendly* consistono in un formalismo per esprimere rapporti di indipendenza all'interno di una formula.

Un modo di intendere l'indipendenza all'interno di una formula è quello di considerarla indipendenza tra scelte; per indipendenza di una scelta verso qualche cosa si intende la necessità di compierla non avendo alcuna informazione riguardo alla cosa. Le scelte cui si fa qui riferimento ricadono sotto quel tipo particolare di scelta che riguarda l'attribuzione di valori alle variabili.

Una forma di indipendenza di questo tipo la si è potuta osservare nelle formule con quantificatori di Henkin. Come si è detto nella formula

$$\left( \begin{array}{cc} \forall x_1 & \exists y_1 \\ \forall x_2 & \exists y_2 \end{array} \right) \phi(x_1, y_1, x_2, y_2)$$

$y_2$ , ad esempio, è indipendente da  $x_1$ . In generale le variabili situate in righe diverse di uno stesso quantificatore di Henkin sono indipendenti tra loro.

Anche le quantificazioni nel linguaggio naturale possono essere considerate usando il concetto di scelta; è possibile, infatti, interpretare le espressioni come 'esiste un  $X$  che è  $P$ ', 'c'è un  $X$  che è  $P$ ' o 'qualche  $X$  è  $P$ ' come asserzioni del fatto che può essere scelto un  $X$  in modo che esso sia  $P$ ; le espressioni del tipo 'tutti gli  $X$  sono  $P$ ' o 'ogni  $X$  è  $P$ ' possono, invece, essere considerate proposizioni che asseriscono che qualsiasi  $X$  venga scelto, esso sarà un  $P$ . Questi esempi riguardano solo alcune delle numerose costruzioni del linguaggio naturale che vengono considerate quantificatori; dato che non

---

<sup>3</sup>Questo risultato è riportato in [Henkin 1961].

<sup>4</sup>[Enderton 1970] e [Walkoe 1970].

ci occuperemo di tale linguaggio se non in maniera indiretta, abbiamo preferito menzionare solo alcune espressioni riconducibili direttamente ai simboli  $\forall$  ed  $\exists$  del linguaggio della logica predicativa.

Per quanto riguarda il calcolo predicativo, l'impiego di scelte come mezzo di interpretazione ammette una formalizzazione di grande interesse e particolarmente fertile di risultati. La soddisfazione di una formula predicativa classica può essere, infatti, considerata una partita tra due giocatori che competono per dimostrare la verità della formula stessa scegliendo i valori da attribuire alle variabili; la teoria dei giochi, come si vedrà meglio più avanti, fornisce una cornice ideale per formalizzare questa interpretazione della logica predicativa.

L'idea di studiare il processo di valutazione degli enunciati di un linguaggio tramite scelte ha condotto alla possibilità di analizzare le caratteristiche dell'organizzazione delle singole scelte relativamente ai diversi linguaggi. Nella logica del primo ordine, ad esempio, ogni operatore che possa essere riferito a una scelta dipende da tutti quelli che lo precedono; tale scelta, di conseguenza, dipende dalle scelte precedenti. Questa dipendenza consiste nella possibilità di determinare la scelta tramite i valori delle scelte riferite agli operatori precedenti. Questo rapporto diretto tra l'ordine sintattico degli operatori e la dipendenza tra le scelte, che comporta la presenza di un ordine lineare tra queste ultime, può essere rotto. Superando i confini dalla logica del primo ordine si riescono a esprimere rapporti di indipendenza tra gli operatori logici e quindi si possono imporre ordini parziali tra le scelte relative a essi che non assecondino l'ordine sintattico della formula.

Dal punto di vista della teoria dei giochi la valutazione di una formula con quantificatori indipendenti rappresenta una partita a informazione imperfetta. Un gioco a informazione perfetta, infatti, è un gioco in cui ogni giocatore conosce tutte le mosse già eseguite da ogni altro giocatore. Considerando gli assegnamenti delle variabili come mosse del gioco, è chiaro che l'ignoranza riguardo a un assegnamento già stabilito è proprio un caso di informazione imperfetta.

Oltre che per le rilevanti possibilità espressive cui si ha accesso tramite essa, l'indipendenza degli operatori logici interessa alcune questioni riguardanti il linguaggio naturale. Alcuni problemi di formalizzazione che quest'ultimo presenta sembrano suggerire l'utilità di un particolare uso dei quantificatori parzialmente ordinati. Nonostante non vi siano argomenti indiscutibili a

favore di un tale progetto, Hintikka <sup>5</sup> è stato in grado di presentare casi che sollevano dubbi sulla questione e legittimano, quindi, l'interesse verso le ricerche che seguono questa via di sperimentazione.

Portare prove convincenti della presenza di rapporti di indipendenza nel linguaggio naturale non è banale, quantomeno non lo è dal punto di vista della logica formale. Nell'articolo del 1973 di Hintikka *Quantifiers vs. quantification theory* si tenta di raggiungere questo obiettivo inserendosi nella discussione sulla formalizzazione del linguaggio naturale interna all'ambito della linguistica. Qui si cercherà di riportare alcune riflessioni esposte da Hintikka nell'articolo; ci si limiterà, però, a quelle che riguardano le costruzioni formali discusse nel presente scritto.

I primi due enunciati che prendiamo in considerazione vengono menzionati nell'articolo riguardo al rapporto tra l'ordine dei quantificatori nel linguaggio naturale e il loro ordine nelle sue formalizzazioni<sup>6</sup>. Il primo di questi due è

(42) John has not shown any of his paintings to some of his friends.<sup>7</sup>

Esso corrisponde all'incirca a «John non ha mostrato nessuno dei suoi dipinti a qualcuno dei suoi amici». Le situazioni che rappresentano un modello per questa frase sono quelle in cui John ha  $n$  amici e ha mostrato 0 quadri a un numero  $m$ , tale che  $0 < m < n$ , di suoi amici. Per rappresentare l'enunciato in maniera fedele è necessario compiere una forzatura rispetto alla sintassi, oppure, se si vuole mantenere l'ordine originale delle parole, è necessario poter esprimere l'indipendenza tra quantificatori. Formalizzando direttamente, infatti, si ottiene la formula

(43)  $(y) [y \text{ is a painting of John's} \rightarrow (\exists x)(x \text{ is a friend of John's} \wedge \text{John has not shown } y \text{ to } x)]$ .<sup>8</sup>

Questa però, quanto al significato, non corrisponde all'enunciato in linguaggio naturale. Si supponga, infatti, che John abbia 10 amici e abbia dipinto 10 quadri. Ogni amico di John, inoltre, se è l'amico  $p$ -esimo allora non ha mai visto il quadro  $p$ -esimo. In questo caso nessun quadro è stato visto da ogni amico, ma non è vero che qualche amico non abbia mai visto nessun quadro; ognuno di essi, infatti, li ha visti tutti tranne uno.

---

<sup>5</sup>[Hintikka 1973].

<sup>6</sup>[Hintikka 1973], pp. 346-347.

<sup>7</sup>[Hintikka 1973], p. 346.

<sup>8</sup>[Hintikka 1973], p. 346.

È necessario, perché la formalizzazione corrisponda alla versione in linguaggio naturale, invertire la posizione delle quantificazioni, adeguare i connettivi e formalizzare nel modo seguente:

$$(44) (\exists x)[x \text{ is a friend of John's} \wedge (y)(y \text{ is a painting of John's} \rightarrow \text{John has not shown } y \text{ to } x)].^9$$

Hintikka, a riguardo, sostiene che

The most natural explanation of the actually preferred reading (44) of (42) is to assume that the two quantifiers in (42) are independent.<sup>10</sup>

Non esiste alcun conflitto tra sintassi naturale e formalizzazione logica se si introduce nel linguaggio formale di traduzione la possibilità di rendere indipendenti i connettivi. Facendo così si può formalizzare semplicemente anteponendo i due connettivi all'intera formula in modo che non risultino dipendenti l'uno dall'altro in alcuna maniera:

$$\left. \begin{array}{l} (\exists x) \\ (y) \end{array} \right\} [x \text{ is a friend John's} \wedge (y \text{ is a painting of John's} \rightarrow \text{John has not shown } y \text{ to } x)].^{11}$$

Adottiamo qui la scrittura che usa Hintikka per esprimere l'indipendenza dei quantificatori; si deve leggere e intendere il quantificatore a inizio formula similmente a come si farebbe per un quantificatore diramato in cui '∀x' è sostituito da '(x)'.

Per dimostrare che il caso appena presentato non deve nulla alle regole per la negazione Hintikka discute anche l'enunciato

John has shown all his paintings to some of his friends.<sup>12</sup>

Osservandolo si rileva che presenta le stesse caratteristiche del precedente ma non contiene negazioni che possano imporre ostacoli alla generalizzazione del caso. Una traduzione diretta e rispondente all'intuizione comune è quindi

---

<sup>9</sup>[Hintikka 1973], p. 346.

<sup>10</sup>[Hintikka 1973], p. 347.

<sup>11</sup>[Hintikka 1973], p. 347.

<sup>12</sup>[Hintikka 1973], p. 347.



$$\left. \begin{array}{l} (\exists x) \\ (y) \end{array} \right\} [x \text{ is a friend of John's } \wedge (y \text{ is a painting of John's } \rightarrow \text{John has} \\ \text{shown } y \text{ to } x)].$$

Questo potrebbe essere sufficiente a mostrare che la formalizzazione del linguaggio naturale nel linguaggio classico della logica del primo ordine è in alcuni casi imprecisa, a meno che non si intervenga in modo ponderato durante il processo di formalizzazione. Più precisamente, gli esempi sembrano mostrare che non vi sia una regola unica e definita per decidere dell'ordine di dipendenza che i quantificatori devono manifestare nella formalizzazione di un enunciato del linguaggio naturale. Una regola rigorosa di questi tipo può essere formulata con l'accettazione dell'ordinamento parziale dei quantificatori. Esula lo scopo di questo testo la discussione dettagliata delle tecniche di formalizzazione dei quantificatori; non è difficile scorgere in questi e nei seguenti esempi, tuttavia, dei rapporti regolari tra la divisione che i verbi reggenti impongono ai loro oggetti e la divisione delle gerarchie nei quantificatori.

I casi considerati fino ad ora mostrano delle difficoltà che riguardano il processo di formalizzazione del linguaggio naturale; ve ne sono altri, però, che interessano l'esistenza stessa di una traduzione. La questione sollevata da questi ultimi è assai più radicale e controversa; non si tratta infatti di presentare un metodo più diretto e fedele per formalizzare il linguaggio naturale, ma di mostrare l'irriducibilità di quest'ultimo alla logica del primo ordine. L'uso dei quantificatori diramati per formalizzare il linguaggio naturale mostrato fin qui non ha prodotto formule che non fossero traducibili al primo ordine. L'espressività del linguaggio naturale non ha, quindi, fatto ingresso nella discussione. Gli esempi che seguono tentano, invece, un'analisi del potere espressivo di alcune particolari espressioni del linguaggio naturale.

Il primo enunciato discusso da Hintikka<sup>13</sup> a riguardo è

- (30) Every writer likes a book of his almost as much as every critic dislikes some book he has reviewed.<sup>14</sup>

Una sua versione in italiano, in cui i verbi sono tradotti liberamente per semplicità, potrebbe essere: «Ogni scrittore ama un proprio libro quasi quanto ogni critico odia qualche libro che ha recensito». Hintikka sostiene riguardo

---

<sup>13</sup>[Hintikka 1973], pp. 342-344.

<sup>14</sup>[Hintikka 1973], p. 342.

a esso che rappresenta un caso di quantificazione parzialmente ordinata nel linguaggio naturale:

In a first-order translation the quantifiers would have to be linearly ordered, which creates the kind of dependence which is not presupposed in (30).<sup>15</sup>

Secondo questa visione, la formalizzazione corretta di questa frase è

$$\left. \begin{array}{l} (x) \\ (z) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} (\exists y) \\ (\exists u) \end{array} \right\} [(x \text{ is a writer} \wedge z \text{ is a critic}) \rightarrow (y \text{ is a book} \wedge x \text{ has authored } y \wedge u \text{ is a book} \wedge z \text{ has reviewed } u \wedge x \text{ likes } y \text{ almost as much as } z \text{ dislikes } u)].^{16}$$

La differenza rilevante rispetto alla formalizzazione attraverso il linguaggio del primo ordine risiede nel rapporto tra i due libri,  $y$  e  $u$ , e le due persone,  $z$  e  $x$  rispettivamente. In particolare, mentre il rapporto di dipendenza di  $y$  da  $x$  e di  $u$  da  $z$  sussiste in entrambe le formalizzazioni, nel linguaggio con quantificatori diramati è possibile escludere qualsiasi rapporto tra il libro scritto dall'autore e il critico, ovvero tra  $y$  e  $z$ , e tra il libro recensito dal critico e l'autore, ovvero tra  $u$  e  $x$ . Per riprodurre fedelmente il significato dell'enunciato, secondo Hintikka, è necessario non imporre vincoli di dipendenza che non siano già asseriti nella versione in linguaggio naturale.

Nel linguaggio del primo ordine sono possibili almeno due versioni dell'enunciato. Ognuna delle due corrisponde a un ordine di dipendenza delle variabili; proprio quell'ordine che non è espresso nella formalizzazione con quantificatori ordinati parzialmente. La prima delle due è

$$(x) [x \text{ is a writer} \rightarrow (\exists y) (y \text{ is a book} \wedge x \text{ has authored } y \wedge (z) (z \text{ is a critic} \rightarrow (\exists u) (u \text{ is a book} \wedge z \text{ has reviewed } u \wedge x \text{ likes } y \text{ almost as much as } z \text{ dislikes } u)))]^{17}$$

In questa si mantiene l'ordine dell'enunciato naturale e si impone, quindi, la dipendenza di  $z$  e  $u$  da  $x$  e  $y$ .

Queste ultime due formule risultano soddisfatte in situazioni diverse. Si consideri, ad esempio, il seguente enunciato:

---

<sup>15</sup>[Hintikka 1973], p. 342.

<sup>16</sup>[Hintikka 1973], p. 342.

<sup>17</sup>[Hintikka 1973], p. 342.

Every writer likes his latest book almost as much as every critic dislikes the first book by that writer he had to review.<sup>18</sup>

Lo traduciamo, assecondando la versione in italiano del precedente, nel modo seguente: «Ogni scrittore ama il proprio ultimo libro quasi quanto ogni critico odia il primo libro che ha dovuto recensire di quello scrittore». Se questo enunciato è vero, la formalizzazione nel linguaggio del primo ordine è soddisfacibile. La dipendenza espressa nella formula del primo ordine, infatti, consente di scegliere il valore di  $u$  a seconda del valore che è stato assegnato a  $x$ . L'espressione 'il primo libro che ha dovuto recensire di quello scrittore' rappresenta la variabile  $u$  della formula e indica, di fatto, la dipendenza di  $u$  da  $x$ , rappresentata a sua volta dall'espressione 'quello scrittore'.

La verità di questa ultima frase in linguaggio naturale non garantisce, invece, la soddisfacibilità della formalizzazione in cui la variabile  $y$  dipende solo da  $x$  e la variabile  $u$  dipende solo da  $z$ .

Un enunciato che indica uno stato di cose rispetto al quale è vero anche il primo e rende soddisfacibile la formalizzazione che usa un ordine parziale sui quantificatori è

Every writer likes his first book almost as much as every critic dislikes the latest book he reviewed.

Seguendo la versione in italiano data dei precedenti enunciati, questo potrebbe corrispondere al seguente: «Ogni scrittore ama il proprio primo libro quasi quanto ogni critico odia l'ultimo libro che ha recensito». Se la situazione descritta è vera, è evidente che per soddisfare l'enunciato originale non è necessario presupporre alcuna dipendenza tra variabili, eccetto le relazioni tra  $y$  e  $x$  e tra  $v$  e  $z$  che non sono mai state messe in dubbio. Questa situazione rappresenta effettivamente un modello per tale enunciato, la formalizzazione al primo ordine è invece, quanto alla propria soddisfacibilità, intrinsecamente dipendente da rapporti tra variabili introdotti durante la formalizzazione.

Hintikka nota che gli esempi proposti potrebbero sollevare dubbi riguardanti il rapporto espresso in '*... likes ... almost as much as ... dislikes ...*'<sup>19</sup>. Si potrebbe obiettare che la formalizzazione corretta di espressioni di questo genere dovrebbe usare delle variabili per le quantità di apprezzamento da paragonare. Per evitare il problema vengono aggiunti altri esempi, del tutto simili ai precedenti, che non presentino queste difficoltà; questi potranno

---

<sup>18</sup>[Hintikka 1973], p. 343.

<sup>19</sup>[Hintikka 1973], pp. 345-346.

servire a chiarire ulteriormente le considerazioni precedentemente riportate. I tre enunciati che seguono presentano le esatte caratteristiche dei precedenti tre.

Some book by every author is referred to in some essay by every critic.<sup>20</sup>

The bestselling book by every author is referred to in the obituary essay on him by every critic.<sup>21</sup>

The bestselling book by every author is referred to in the longest essay by every critic.<sup>22</sup>

Il primo si può tradurre «Qualche libro di ogni autore è citato in qualche saggio di ogni critico»; il secondo «Il libro più venduto di ogni autore è citato nel saggio di ogni critico per la morte dell'autore»; il terzo «Il libro più venduto di ogni autore è citato nel saggio più lungo di ogni critico». Tra queste frasi sussistono gli stessi rapporti che sussistono tra quelle della serie precedente. È chiaro, infatti, che ogni situazione che sia un modello per la terza lo è anche per la prima. Anche la seconda proposizione sembra rappresentare una situazione che possa essere considerata un modello per la prima. Questo però è vero solo se la prima proposizione viene formalizzata al primo ordine imponendo, quindi, una dipendenza non asserita tra le variabili relative al libro, all'autore, al saggio e al critico. In altre parole, è evidente anche in questa serie di esempi che la seconda frase impone una dipendenza tra la scelta del saggio e la scelta dell'autore che non viene asserita nella prima delle tre.

Una terza serie di frasi interessanti in linguaggio naturale include

Some relative of each villager and some relative of each townsman hate each other<sup>23</sup>,

che si può tradurre con: «Qualche parente di ogni paesano e qualche parente di ogni cittadino si odiano a vicenda»; e

---

<sup>20</sup>[Hintikka 1973], p. 345.

<sup>21</sup>[Hintikka 1973], p. 346.

<sup>22</sup>[Hintikka 1973], p. 345.

<sup>23</sup>[Hintikka 1973], p. 344.

The eldest relative of each villager and that relative of each townsman who is closest in age to the villager hate each other<sup>24</sup>,

traducibile come: «Il parente più anziano di ogni paesano e il parente di ogni cittadino che è più vicino d'età al paesano si odiano a vicenda». Queste due frasi differiscono per la relazione tra il paesano e il parente del cittadino asserito nella seconda e assente nella prima. Come negli altri esempi questo rapporto dovrebbe poter non essere presupposto qualora si voglia formalizzare la prima proposizione, e ciò non è possibile al primo ordine.

Un enunciato che descriva un modello per la prima proposizione e che non presupponga nessuna dipendenza tra la famiglia del paesano e il parente del cittadino è descritto dal seguente enunciato: «Il parente più anziano di ogni paesano e il parente più giovane di ogni cittadino si odiano a vicenda».

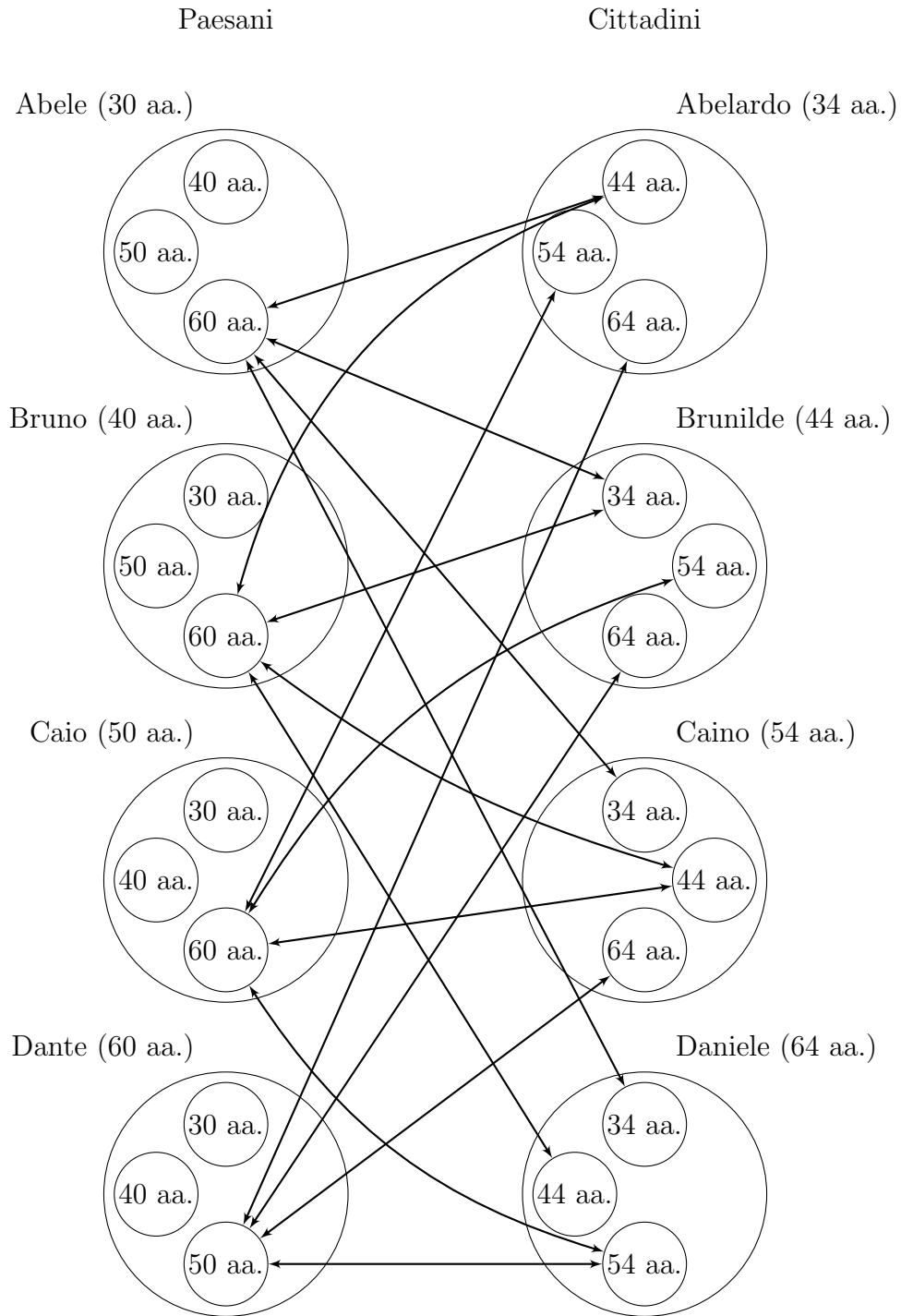
Per quest'ultimo esempio mostriamo una rappresentazione grafica, essa può essere facilmente adattata alle altre due serie di frasi. Il dominio nel quale interpretiamo le frasi è composto da quattro paesani, quattro cittadini, i rispettivi parenti e una relazione di odio reciproco. Le circonferenze maggiori e dotate di nomi rappresentano gli abitanti del paese, a sinistra, e della città, a destra. All'interno della circonferenza di ogni abitante è contenuta un circonferenza piccola per ognuno dei suoi parenti; di questi ultimi indichiamo solo l'età. Le frecce rappresentano la relazione di odio tra parenti. Lo schema 1 si riferisce alla penultima proposizione, lo schema 2 all'ultima.

Si noti che in questi schemi gli insiemi sono ordinati per età. Nel primo le frecce congiungono il parente anziano di ogni paesano con il parente di ogni cittadino che occupa nel proprio insieme all'incirca la stessa posizione che il paesano occupa nel proprio. In altre parole, per ogni freccia si sceglie il punto di arrivo nell'insieme di destra valutando l'età del paesano che dà il nome all'insieme di sinistra. Nel secondo schema, invece, ogni freccia congiunge il parente anziano di un paesano con il parente più giovane di ogni cittadino; la scelta degli elementi collegati dalle frecce, in questo caso, dipende esclusivamente dalla posizione di ogni singolo elemento all'interno dell'insieme che lo contiene. In generale, la differenza tra i due schemi consiste nei rapporti tra elementi e insiemi rispetto alle frecce: nel primo schema la scelta dell'elemento di destra di una freccia dipende da entrambi gli insiemi collegati dalla freccia, nel secondo schema la scelta dell'elemento di destra di una freccia dipende esclusivamente dall'insieme che lo contiene.

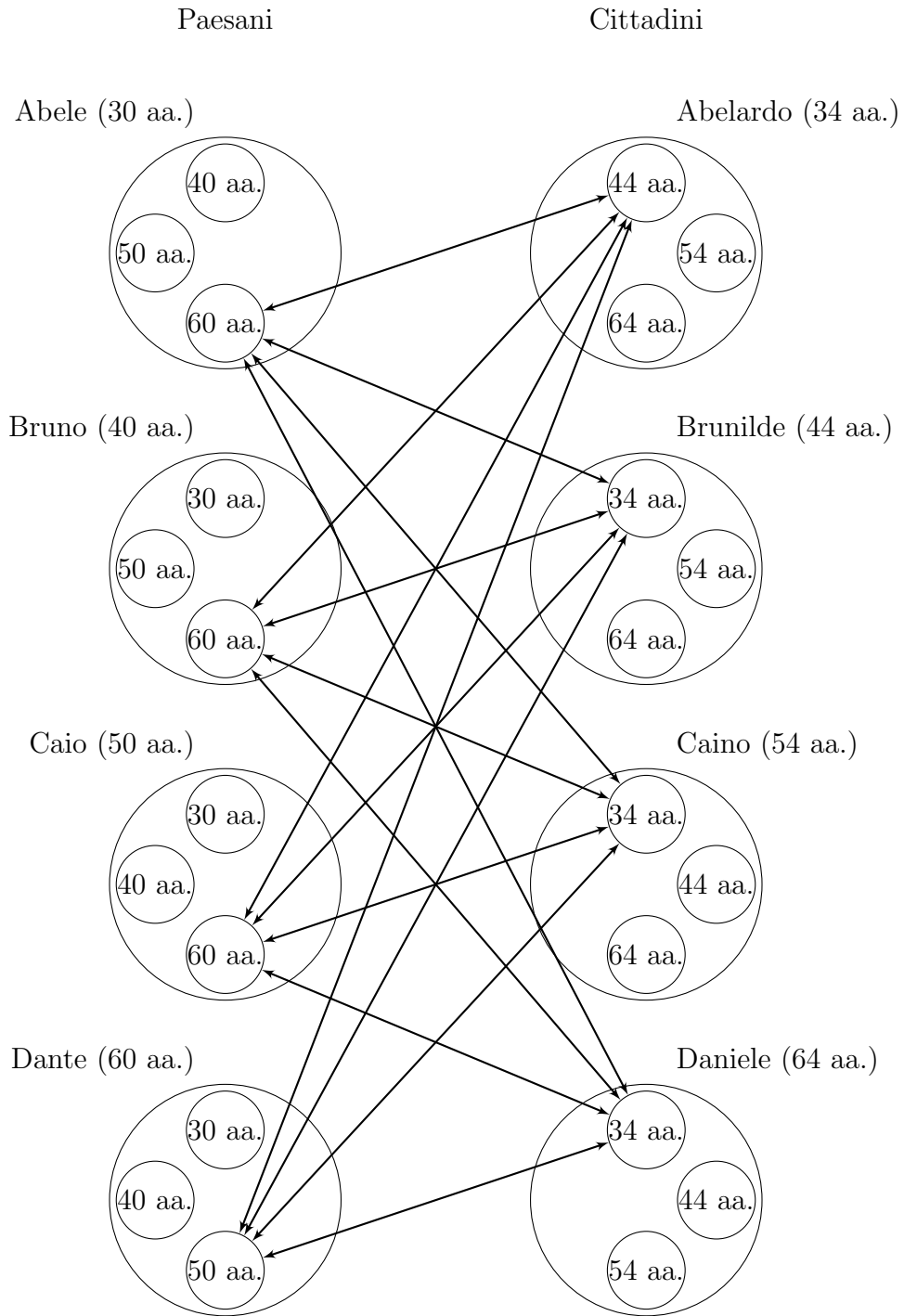
---

<sup>24</sup>[Hintikka 1973], p. 344.

**Schema 1.**



**Schema 1.**



Gli insiemi di parenti che compongono il dominio scelto sono pensati come se contenessero tutti gli abitanti del luogo in cui abita il parente a loro comune. Questa condizione non vizia in alcun modo l'esempio: si può liberamente considerare ciascun elemento di ciascun insieme come un individuo riguardo al quale non sia formulata alcuna supposizione.

Hintikka suggerisce anche che numerosi casi interessanti per quello che riguarda i problemi di formalizzazione che stiamo discutendo possono essere ricavati dalle proposizioni sugli insiemi di insiemi<sup>25</sup>. Ad esempio, si osservi la proposizione espressa in

Some element of each  $a$  contains some element of each  $b$ .<sup>26</sup>

Se  $a$  e  $b$  sono insiemi di insiemi essa rappresenta una situazione del tutto simile a quelle discusse negli esempi precedenti. Si noti che gli enunciati di questo genere risultano di grande interesse anche perché possono essere usati per astrarre enunciati che esprimano altre relazioni, ad esempio quelli menzionati fino ad ora. Un vocabolario per queste proposizioni riguardanti gli insiemi di insiemi è stato studiato da Russell<sup>27</sup>.

L'articolo *Quantifiers vs. quantification theory* riporta a titolo di esempio un ulteriore caso di quantificazione indipendente nel linguaggio naturale<sup>28</sup>. Questo è piuttosto generale, riguarda infatti i quantificatori contenuti in strutture composte da 'di' annidati. Un enunciato di questo tipo in italiano è

Qualche barbaro di qualche famiglia di ogni tribù di ogni popolazione odia qualche legionario di qualche centuria di ogni coorte di ogni legione romana.

Per non presupporre alcuna dipendenza tra termini, che non sia asserita esplicitamente, è necessario formalizzare la frase con una formula dalla forma

$$\left. \begin{array}{cccc} (x_1) & (x_2) & (\exists y_1) & (\exists y_2) \\ (z_1) & (z_2) & (\exists w_1) & (\exists w_2) \end{array} \right\} \phi(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2, w_1, w_2).$$

Per avere un'intuizione più specifica della questione si potrebbe pensare al caso in cui esista una connessione tra la centuria cui appartiene un legionario

---

<sup>25</sup>[Hintikka 1973], p. 345.

<sup>26</sup>Una traduzione di questa frase è la seguente: «Qualche elemento di ogni  $a$  contiene qualche elemento di ogni  $b$ ».

<sup>27</sup>[Russell 1903]. Ne è segnalata l'edizione del 1938 in [Hintikka 1973], p. 344.

<sup>28</sup>[Hintikka 1973], pp. 348-349.



e i luoghi in cui ha combattuto; se questo fosse vero si potrebbe trovare una dipendenza tra i luoghi di origine delle tribù barbare cui potrebbe aver fatto dei torti e la centuria in cui combatteva. La frase che si sta analizzando, però, non ammette che tali dipendenze siano essenziali alla soddisfazione di essa. Perché questo risulti chiaro si noti che tale frase potrebbe proprio voler dare a intendere che le centurie romane o le genti barbare si spostassero frequentemente e che, quindi, alcune centurie avessero avuto a che fare in qualche modo con ogni tribù di ogni popolazione. Volendo assecondare questo senso della frase non si può pensare di valutarla scegliendo per ogni tribù una centuria per una sua relazione, ad esempio geografica, con tale tribù.

## 1.2 Logiche IF

Per generare le formule del linguaggio IF è sufficiente estendere il linguaggio della logica del primo ordine tramite un meccanismo per la gestione delle dipendenze.

*Se  $\phi$  è una formula del linguaggio della logica del primo ordine, allora si ottiene una formula IF se si eseguono le seguenti azioni:*

1. *Sostituire ogni operatore logico  $O$  in  $\phi$  con  $(O/\emptyset)$ .*
2. *Se  $(\exists x/W)$  dipende da  $(\forall y_1 \dots y_n/V)$ , si può aggiungere  $y_h$  a  $W$  con  $1 \leq h \leq n$ .*
3. *Se  $(\forall x/W)$  dipende da  $(\exists y_1 \dots y_n/V)$ , si può aggiungere  $y_h$  a  $W$  con  $1 \leq h \leq n$ .*
4. *Se  $(\forall x/W)$  dipende da  $(\exists y_1 \dots y_n/V)$ , si può aggiungere  $y_h$  a  $W$  con  $1 \leq h \leq n$ .*
5. *Se  $(\wedge/W)$  dipende da  $(\exists y_1 \dots y_n/V)$ , si può aggiungere  $y_h$  a  $W$  con  $1 \leq h \leq n$ .*

La prima formulazione di una semantica per logiche IF è nata dal confronto tra l'uso dei quantificatori nella logica del primo ordine e le dinamiche di un gioco a due partecipanti<sup>29</sup>. Questa semantica applica la teoria dei giochi per valutare una *fbf* considerando le strategie di due giocatori che competano per

<sup>29</sup>[Mann/Sandu/Sevenster 2011] e [Sandu 1997].

il valore di verità della stessa; le possibilità di vittoria dell'uno o dell'altro concorrono a stabilire la verità, o meno, della formula.

I due concorrenti, I e II, si sfidano ipoteticamente a un gioco semantico sulla formula. Per ogni formula  $\phi$ , per ogni modello  $M$  e per ogni assegnamento  $g$ , ristretto alle sole variabili libere di  $\phi$ , esiste un gioco  $G(\phi, M, g)$  su  $M$ . All'inizio della partita, I svolge il ruolo di verificatore e II quello di falsificatore. Riducendo la formula, l'apparizione come operatore più esterno di uno dei simboli nell'insieme  $\{ \exists x, \exists x/\{y_1, \dots, y_k\}, \forall x, \forall x/\{y_1, \dots, y_k\}, \vee, \vee/\{y_1, \dots, y_k\}, \wedge, \wedge/\{y_1, \dots, y_k\}, \neg \}$  indica il momento in cui uno dei due giocatori deve compiere una delle sue mosse o in cui qualche altro evento del gioco avviene. Le regole che stabiliscano cosa debba succedere sono le seguenti:

1. Se  $\phi$  è una formula atomica nessuno compie alcuna mossa in  $G(\phi, M, g)$ .
2. Il simbolo  $\neg$  fa sì che si invertano i ruoli dei due giocatori: chi era verificatore diventa falsificatore e chi era falsificatore diventa verificatore.
3. I simboli  $\exists x$  e  $\exists x/\{y_1, \dots, y_k\}$  indicano che il verificatore deve scegliere quale individuo di  $M$  debba essere l'interpretazione di  $x$ .
4. I simboli  $\forall x$  e  $\forall x/\{y_1, \dots, y_k\}$  indicano che il falsificatore deve scegliere quale individuo di  $M$  debba essere l'interpretazione di  $x$ .
5. I simboli  $\vee$  e  $\vee/\{y_1, \dots, y_k\}$  indicano che il verificatore deve scegliere uno dei due disgiunti.
6. I simboli  $\wedge$  e  $\wedge/\{y_1, \dots, y_k\}$  indicano che il falsificatore deve scegliere uno dei due congiunti.

Una partita del gioco  $G(\phi, M, g)$  è una sequenza di scelte conformi alle regole appena esposte; essa termina quando sono state interpretate tutte le variabili di  $\phi$ . Sia  $\phi(x_1, \dots, x_n)$  la formula iniziale con tutte le sue variabili non interpretate elencate tra parentesi tonde e siano  $a_1, \dots, a_n$  tutte le scelte di interpretazione compiute durante la partita. Se  $M \models \phi(a_1, \dots, a_n)$ , allora il giocatore che svolge il ruolo di verificatore alla fine della partita ha vinto; se invece non vale  $M \models \phi(a_1, \dots, a_n)$ , ha vinto il giocatore che svolge il ruolo di falsificatore alla fine della partita.

La verità della formula non dipende dal risultato delle partite; è la possibilità, di uno dei due giocatori, di avere la certezza della vittoria che ne

definisce il valore di verità. Questa possibilità sarebbe, più precisamente, l'esistenza di un procedimento che conduca con certezza il giocatore alla vittoria; per definirla rigorosamente si ricorre al concetto di *strategia*. Formalmente una *strategia* per un giocatore del gioco  $G(\phi, M, g)$  è un insieme  $F$  di funzioni. Ogni funzione  $f_Q \in F$  corrisponde alla mossa, del giocatore che possiede la strategia, per il simbolo  $Q$  in  $\phi$ . La funzione  $f_Q$  applicata a una  $n$ -upla di tutte le scelte già compiute da tutti e due i giocatori ha come valore l'oggetto in cui il giocatore deve interpretare la variabile della quale  $Q$  impone l'interpretazione. La funzione  $f_Q$  è così definita:

**Definizione 1.1** *Si supponga che  $Q$  abbia la forma  $(P/Q_1, \dots, Q_n)$  e che dipenda dalle costanti logiche  $Q_1, \dots, Q_n, Q_{n+1}, \dots, Q_m$ ; si supponga che per ogni  $Q_j$  si possa scegliere da un insieme  $O_j$  come interpretare la variabile e si supponga che per  $P$  si possa scegliere dall'insieme  $O$ . La funzione  $f_Q$  è*

$$f_Q : \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 1, \dots, n}}^m O_j \rightarrow O.$$

**Definizione 1.2** *Una **strategia** per un giocatore del gioco  $G(\phi, M, g)$  è **vincente** se e solo se tale giocatore usandola per il gioco  $G(\phi, M, g)$  vince necessariamente ogni partita.*

È chiaro dalla definizione di strategia e dalla premessa che per le formule IF non vale la legge del terzo escluso; potrebbe non esistere, infatti, alcuna strategia vincente per nessuno dei due giocatori. Indichiamo che una formula IF  $\phi$  è vera in  $M$  rispetto a un assegnamento  $g$  tramite la scrittura  $(M, g) \models_{GTS} \phi^+$ , che è falsa in  $M$  rispetto a un assegnamento  $g$  tramite  $(M, g) \models_{GTS} \phi^-$ .

**Definizione 1.3**

1.  $(M, g) \models_{GTS} \phi^+$  se e solo se esiste una strategia vincente per il giocatore I nel gioco  $G(\phi, M, g)$ .
2.  $(M, g) \models_{GTS} \phi^-$  se e solo se esiste una strategia vincente per il giocatore II nel gioco  $G(\phi, M, g)$ .

**Definizione 1.4** *Il valore di verità di una formula IF  $\phi$  in un modello  $M$  è*

$$\|\phi\|^M = 1, \text{ se } M \models_{GTS} \phi^+ \text{ e non } M \models_{GTS} \phi^-$$

$$\|\phi\|^M = 0, \text{ se } M \models_{GTS} \phi^- \text{ e non } M \models_{GTS} \phi^+$$

$$\|\phi\|^M = ?, \text{ se non } M \models_{GTS} \phi^+ \text{ e non } M \models_{GTS} \phi^-$$

*I simboli ‘1’ e ‘0’ corrispondono come ovvio alla verità e alla falsità, mentre il simbolo ‘?’ indica che la formula ha valore di verità indefinito.*

Segue immediatamente dalla definizione di strategia che non possono esistere sia una strategia vincente per I che una strategia vincente per II per lo stesso gioco; non è possibile, quindi, che la stessa formula in  $M$  sia vera e allo stesso tempo falsa.

Dato che non vale la legge del terzo escluso per le formule IF è interessante considerare quale sia lo schema di valutazione soddisfatto dai connettivi booleani di queste.

**Proposizione 1.1** *Sia  $\phi$  una formula IF. Per ogni modello  $M$  vale*

$$M \models_{GTS} (\neg\phi)^+ \text{ sse } M \models_{GTS} \phi^-$$

$$M \models_{GTS} (\neg\phi)^- \text{ sse } M \models_{GTS} \phi^+$$

$$M \models_{GTS} (\phi \vee \psi)^+ \text{ sse } M \models_{GTS} \phi^+ \text{ oppure } M \models_{GTS} \psi^+$$

$$M \models_{GTS} (\phi \vee \psi)^- \text{ sse } M \models_{GTS} \phi^- \text{ e } M \models_{GTS} \psi^-$$

$$M \models_{GTS} (\phi \wedge \psi)^+ \text{ sse } M \models_{GTS} \phi^+ \text{ e } M \models_{GTS} \psi^+$$

$$M \models_{GTS} (\phi \wedge \psi)^- \text{ sse } M \models_{GTS} \phi^- \text{ oppure } M \models_{GTS} \psi^-.$$

Servirà in seguito conoscere le proprietà della negazione sulle formule IF, con il seguente teorema ne dimostriamo la natura di negazione duale.

**Teorema 1.1** Sia  $\lambda^*$  la formula duale di  $\lambda$ . Per ogni formula IF  $\phi$ , modello  $M$  e assegnamento  $g$

$$(M, g) \models_{GTS} (\neg\phi)^+ \Leftrightarrow (M, g) \models_{GTS} (\phi^*)^+.$$

*Dimostrazione.* La formula duale di  $\phi$  sarà, come di consueto, la formula in cui ogni costante logica di  $\phi$  è sostituita dalla sua duale, ogni sottoformula atomica non negata viene negata e ogni sottoformula atomica negata viene rimpiazzata dalla stessa sottoformula non negata.

È vero  $(M, g) \models_{GTS} (\neg\phi)^+$  se e solo se il giocatore I ha una strategia vincente in  $G(\neg\phi, M, g)$ , ovvero se e solo se il giocatore II ne ha una per  $G(\phi, M, g)$ , dato che  $\neg$  inverte il ruolo dei due giocatori. Dobbiamo quindi dimostrare che il giocatore I ha una strategia vincente per  $G(\phi^*, M, g)$  se e solo se il giocatore II ne ha una per  $G(\phi, M, g)$ .

È chiaro che uno dei giocatori possiede una strategia per  $G(\phi^*, M, g)$  se e solo se la stessa strategia permette all'altro giocatore di vincere  $G(\phi, M, g)$ . Lo scambio tra quantificatori esistenziali e universali, infatti, inverte l'ordine in cui i giocatori eseguono le proprie mosse e comporta uno scambio delle variabili che essi devono interpretare; gli atomi che dovevano essere verificati da I in  $\phi^*$  dovranno essere falsificati da II in  $\phi$ , gli atomi che dovevano essere falsificati da I in  $\phi^*$  dovranno essere verificati da II in  $\phi$ . Lo scambio tra disgiunzioni e congiunzioni insieme alla negazione degli atomi, invece, comporta l'inversione del valore di verità delle formule in cui compaiono. Si può dimostrare per induzione sulla complessità della formula che questo è vero. Valgono le seguenti proposizioni:

- La formula  $\phi^* = P(k_1, \dots, k_m)$  è vera se e solo se  $\phi = \neg P(k_1, \dots, k_m)$  è falsa; la formula  $\phi^* = \neg P(k_1, \dots, k_m)$  è vera se e solo se  $\phi = P(k_1, \dots, k_m)$  è falsa. In questi casi le strategie sono insiemi vuoti e cambia solo il vincitore.

Qui con  $P$  si indica un predicato qualsiasi, con  $x$  una variabile e con  $k_1, \dots, k_n$  delle costanti. Supponiamo che per ogni formula  $\psi$  tale che  $subf(\psi)$  ha  $n$  o meno elementi valga la proprietà enunciata dal teorema; dimostriamo che essa vale, allora, anche per tutte le formule  $\phi$  tali che  $subf(\phi)$  ha  $n + 1$  elementi.

- Il giocatore II ha una strategia vincente per  $G(\phi, M, g)$  con

$$\phi = (\exists x/W)(\psi)$$

se e solo se esiste una strategia di II per  $G(\psi, M, g)$  che sia vincente a prescindere dalla scelta che II farà per  $x$ . Se esiste questa seconda strategia, per ipotesi di induzione, I può usare la stessa per vincere  $G(\psi^*, M, g)$  e quindi per vincere

$$G((\forall x/W)(\psi^*), M, g),$$

ma

$$G((\forall x/W)(\psi^*), M, g) = G(\phi^*, M, g).$$

- Il giocatore II ha una strategia vincente per  $G(\phi, M, g)$  con

$$\phi = (\forall x/W)(\psi)$$

se e solo se esiste una strategia di II per  $G(\psi, M, g)$  che sia vincente unita un certo assegnamento che II stesso può scegliere per  $x$ . Se esiste questa seconda strategia, per ipotesi di induzione, I può usare la stessa per vincere  $G(\psi^*, M, g)$  e quindi per vincere

$$G((\exists x/W)(\psi^*), M, g)$$

unendo a essa l'assegnamento che II sceglierebbe per  $x$ , ma

$$G((\exists x/W)(\psi^*), M, g) = G(\phi^*, M, g).$$

- Il giocatore II ha una strategia vincente per  $G(\phi, M, g)$  con

$$\phi = \psi(\vee/W)\psi'$$

se e solo se esiste una strategia di II per  $G(\psi, M, g)$  e una per  $G(\psi', M, g)$ . Se esistono queste due strategie, per ipotesi di induzione, I può usarle per vincere sia  $G(\psi^*, M, g)$  sia  $G(\psi'^*, M, g)$  e quindi per vincere

$$G(\psi^*(\wedge/W)\psi'^*, M, g),$$

ma

$$G(\psi^*(\wedge/W)\psi'^*, M, g) = G(\phi^*, M, g).$$

- Il giocatore II ha una strategia vincente per  $G(\phi, M, g)$  con

$$\phi = \psi(\wedge/W)\psi'$$

se e solo se esiste una strategia di II per  $G(\psi, M, g)$  o per  $G(\psi', M, g)$ . Se esiste una di queste strategie, per ipotesi di induzione, I può usarla per vincere  $G(\psi^*, M, g)$  o  $G(\psi'^*, M, g)$  e quindi per vincere

$$G(\psi^*(\vee/W)\psi'^*, M, g)$$

a fronte di una sua scelta corretta per  $\vee$ , ma

$$G(\psi^*(\vee/W)\psi'^*, M, g) = G(\phi^*, M, g).$$

Per la direzione opposta, invece, valgono le seguenti proposizioni.

- Il giocatore I ha una strategia vincente per  $G(\phi^*, M, g)$  con

$$\phi^* = (\forall x/W)(\psi^*)$$

se e solo se esiste una strategia di I per  $G(\psi^*, M, g)$  che sia vincente a prescindere dalla scelta che II farà per  $x$ . Se esiste questa seconda strategia, per ipotesi di induzione, II può usare la stessa per vincere  $G(\psi, M, g)$  e quindi per vincere

$$G((\exists x/W)(\psi), M, g),$$

ma

$$G((\exists x/W)(\psi), M, g) = G(\phi, M, g).$$

- Il giocatore I ha una strategia vincente per  $G(\phi^*, M, g)$  con

$$\phi = (\exists x/W)(\psi^*)$$

se e solo se esiste una strategia di I per  $G(\psi^*, M, g)$  che sia vincente unita un certo assegnamento che I stesso può scegliere per  $x$ . Se esiste questa seconda strategia, per ipotesi di induzione, II può usare la stessa per vincere  $G(\psi, M, g)$  e quindi per vincere

$$G((\forall x/W)(\psi^*), M, g)$$

unendo a essa l'assegnamento che I sceglierebbe per  $x$ , ma

$$G((\forall x/W)(\psi), M, g) = G(\phi, M, g).$$

- Il giocatore I ha una strategia vincente per  $G(\phi^*, M, g)$  con

$$\phi^* = \psi^*(\wedge/W)\psi'^*$$

se e solo se esiste una strategia di I per  $G(\psi^*, M, g)$  e una per  $G(\psi', M, g)$ . Se esistono queste due strategie, per ipotesi di induzione, II può usarle per vincere sia  $G(\psi, M, g)$  sia  $G(\psi', M, g)$  e quindi per vincere

$$G(\psi(\vee/W)\psi', M, g),$$

ma

$$G(\psi(\vee/W)\psi', M, g) = G(\phi, M, g).$$

- Il giocatore I ha una strategia vincente per  $G(\phi^*, M, g)$  con

$$\phi^* = \psi^*(\vee/W)\psi'^*$$

se e solo se esiste una strategia di I per  $G(\psi^*, M, g)$  o per  $G(\psi', M, g)$ . Se esiste una di queste strategie, per ipotesi di induzione, II può usarla per vincere  $G(\psi, M, g)$  o  $G(\psi', M, g)$  e quindi per vincere

$$G(\psi(\wedge/W)\psi', M, g)$$

a fronte di una sua scelta corretta per  $\wedge$ , ma

$$G(\psi(\wedge/W)\psi', M, g) = G(\phi, M, g).$$

### 1.2.1 Formule IF non consuete

In questa sezione si cercherà di raccogliere alcune delle considerazioni proposte da diversi studi<sup>30</sup> su alcune particolarità delle formule IF. In particolare si discuterà di alcuni rapporti, estranei alla logica del primo ordine, tra le quantificazioni presenti in una formula e la verità di questa.

#### La segnalazione

Un aspetto interessante delle logiche IF riguarda la segnalazione delle variabili<sup>31</sup>. Il termine ‘segnalazione’ deriva dalla semantica *game-teoretica*. Si ha

<sup>30</sup>In particolare [Mann/Sandu/Sevenster 2011] e [Janssen 2002].

<sup>31</sup>[Mann/Sandu/Sevenster 2011], pp. 111-113; [Janssen 2002].



una segnalazione quando un giocatore, per vincere, interpreta una variabile esclusivamente per registrare un valore da usare successivamente. Solitamente questo metodo è applicabile quando la prima variabile non influirebbe sul risultato del gioco se non servisse da segnale. Intuitivamente una segnalazione serve a rendere indirettamente disponibile un valore anche quando è bloccato direttamente. Una formula vera solo grazie a una segnalazione è

$$\forall x \exists y (\exists z / \{x\})(x = z).$$

È evidente che la scelta di  $z$  dovrebbe avvenire indipendentemente dall'assegnazione di  $x$ . La presenza di  $y$ , tuttavia, permette di copiare il valore di  $y$  per assegnarlo a  $z$ , che potrà quindi avere un valore uguale a quello assegnato a  $x$ ; in questo modo nonostante non si possa sapere come sia stata assegnata la variabile  $x$  si è, di fatto, certi che  $z$  venga assegnata come questa.

I casi in cui avviene una segnalazione possono essere diversi, in generale è sufficiente inserire un quantificatore visibile, come quello per  $y$  nell'esempio precedente, dopo un quantificatore bloccato, come è quello per  $x$ , in modo che si possa vedere l'assegnazione del secondo attraverso quella del primo. Ovviamente bloccare anche il quantificatore visibile impedirebbe la segnalazione, la formula

$$\forall x \exists y (\exists z / \{x, y\})(x = z)$$

non è soddisfacibile esattamente come non lo è la formula del tutto priva di segnalazione

$$\forall x (\exists z / \{x\})(x = z).$$

Le segnalazioni possono avvenire anche tramite variabili che svolgono un ruolo anche al di fuori della segnalazione purché siano sufficientemente libere rispetto all'oggetto cui devono essere assegnate, ad esempio in

$$\forall x \exists y \exists z (\exists k / \{x\})(y = z \wedge x = k)$$

le variabili  $y$  e  $z$  possono segnalare il valore per  $k$ . Usando la strategia che consiste nel copiare il valore di  $x$  per assegnare  $y$  e nel copiare il valore di  $y$  per assegnare  $z$ , si può soddisfare la formula assegnando la variabile  $k$  allo stesso modo della variabile  $z$  o della variabile  $y$ . In

$$\forall x \forall y \exists z (\exists k / \{x\})(y = z \wedge x = k),$$

invece, questo non può avvenire perché  $z$  deve copiare  $y$  e non è detto che sia uguale a  $x$  per segnalarne l'assegnamento a  $k$ .

Un aspetto interessante delle logiche IF che emerge chiaramente dagli esempi precedenti è che la quantificazione vacua agisce in modo completamente diverso per la logica del primo ordine e per IF. Mentre al primo ordine l'aggiunta di qualsiasi quantificatore vacuo non muta in nessun modo il valore della formula; nelle logiche *independence friendly* l'uso strategico di questi quantificatori può, invece, apportare cambiamenti essenziali alla soddisfacibilità della formula.

### Doppia quantificazione

Una seconda differenza nei confronti della logica classica riguarda la quantificazione delle variabili che sono appena state quantificate, come nella formula:

$$\forall x \exists y \exists y P(x, y)$$

o nella formula

$$\forall x \exists y \forall y P(x, y).$$

Nella logica del primo ordine si considera solo l'ultimo quantificatore che riguardi la variabile che è stata quantificata più volte consecutive. Nelle logiche *independence friendly* questo non è sempre vero. L'importanza che hanno le informazioni sugli assegnamenti già avvenuti si ripercuote anche sull'effetto delle riquantificazioni immediatamente successive; tramite esse, infatti, è possibile trasmettere valori di assegnamenti bloccati. Gli unici casi in cui le riquantificazioni immediate sono ridondanti, come dimostrato in *Independence-friendly logic: A game-theoretic approach*<sup>32</sup> per la semantica tratta dalla teoria dei giochi, sono quelli in cui l'ultimo quantificatore possiede più informazioni rispetto agli altri per compiere la propria scelta e quelli in cui l'ultimo quantificatore non ha informazioni riguardanti i precedenti. Si noti che perché sussista la prima condizione l'ultimo quantificatore deve avere accesso, in generale, a tutte le informazioni note ai precedenti: non è sufficiente che esso possa usare un numero maggiore di informazioni. A riguardo si osservi la formula

$$\forall x \exists y \forall z (\exists k / \{x, y\}) (\exists k / \{z\}) (P_1(x, y) \wedge P_2(z, k)).$$

In questo caso il secondo quantificatore esistenziale ha accesso al valore di un numero maggiore di variabili rispetto al primo; non ha, però, accesso

---

<sup>32</sup>[Mann/Sandu/Sevenster 2011], p. 111.

all'unico valore importante per la scelta che esso stesso comporta: il valore dell'assegnamento per  $z$ . Il primo quantificatore per  $k$  è, quindi, essenziale alla soddisfacibilità della formula. Ovviamente supponendo che il valore di  $P_2(z, k)$  dipenda dai valori di  $z$  e  $k$ .

### Riquantificazione

In un articolo del 2002 Janssen si interroga sull'effettiva efficacia delle logiche IF. In particolare egli discute la loro efficacia per la formalizzazione di situazioni che comportino scelte indipendenti. Nel fare questo rileva, tra le altre cose, che il riutilizzo di nomi di variabili, anche come permesso nella logica del primo ordine, modifica il significato delle formule IF. L'esempio che, a riguardo, porta Janssen sono le formule

$$\forall x \forall y \exists z (z = x \wedge \exists v (v = y \wedge (z = 4 \vee z \neq 4)))$$

e

$$\forall x \forall y \exists z (z = x \wedge \exists x (x = y \wedge (z = 4 \vee z \neq 4))).$$

La prima e la seconda formula interpretate secondo la logica classica sono equivalenti:  $\forall x$  lega esclusivamente la variabile  $x$  in  $\exists z (z = x)$  ed  $\exists x$  quantifica la successiva  $(x = y)$  che dipende anche da  $\forall y$ . Secondo la semantica IF, invece, mentre la prima formula è equivalente alla versione classica, nella seconda il giocatore I, il verificatore, quando deve scegliere uno dei due disgiunti di  $(z = 4 \vee z \neq 4)$  non può usare il valore della variabile  $x$  quantificata da  $\forall x$  perché esso è stato sostituito dal valore scelto per soddisfare  $\exists x (x = y)$ .

### 1.2.2 Alcune proprietà delle logiche IF

In questa parte sono esposte alcune proprietà logiche e metalogiche delle logiche IF. Introduciamo, anzitutto, un concetto che risulterà utile anche più avanti; il teorema immediatamente seguente, infatti, è comune sia alla semantica *game-teoretica* che alla semantica compositiva.

Se  $X$  è un insieme di assegnamenti con il medesimo dominio, chiamiamo  $X$  una squadra di assegnamenti. Se un giocatore, per ogni  $s \in X$ , ha una strategia per  $G(\phi, M, s)$ , allora diciamo che ha una strategia per  $G(\phi, M, X)$ .

**Teorema 1.2 (Non contraddittorietà)** [Mann/Sandu/Sevenster 2011] *Sia  $\phi$  una formula IF,  $M$  una struttura e  $X$  una squadra di assegnamenti il cui dominio contenga le variabili libere di  $\phi$ . Valgono contemporaneamente sia  $M, X \models^+ \phi$  che  $M, X \models^- \phi$  se e solo se  $X = \emptyset$ .*

*Dimostrazione.* Il gioco semantico  $G(\phi, M, \emptyset)$  non ha storie, ovvero non ci sono  $n$ -uple su cui definire la funzione per la strategia, quindi la strategia vuota è vincente per entrambi i giocatori. Se  $X$  non è vuoto è impossibile che entrambi i giocatori abbiano una strategia vincente per  $G(\phi, M, X)$ . *Q.E.D.*

Questo teorema è rilevante anche perché alcuni casi della definizione della semantica composizionale richiedono che la squadra di assegnamenti vuota soddisfi qualsiasi formula; in questo testo si vedrà una variazione di questo requisito per la disgiunzione nelle formule IFML.

Mostriamo ora alcune proprietà metalogiche delle logiche IF. Per iniziare riportiamo un teorema di Walkoe<sup>33</sup> che enuncia e mostra la traducibilità tra la logica esistenziale del secondo ordine e la logica del primo ordine con quantificatori di Henkin. Questa dimostrazione servirà a chiarire alcuni dei teoremi seguenti e, in generale, a mostrare uno dei passaggi del percorso di traduzione che collega le logiche IF a  $\Sigma_1^1$ .

Walkoe chiama  $H$  la logica con quantificazione parzialmente ordinata finita che usa i quantificatori di Henkin;  $H'$  è il sottoinsieme di questa che contiene le formule prenesse  $Q\phi$ , in cui  $\phi$  è una formula del primo ordine senza quantificatori e  $Q$  è un quantificatore parzialmente ordinato finito. Presentiamo il teorema di Walkoe<sup>34</sup> in cui si dimostra l'equivalenza di ogni formula  $\Sigma_1^1$  con una formula  $H'$ .

Dopo aver esposto il teorema nella forma originale si cercherà di fornire una spiegazione che faciliti la generalizzazione che esso prospetta. La tecnica qui impiegata per esprimere le formule del secondo ordine tramite quantificatori di Henkin risulta di grande interesse in quanto costituisce un rapporto diretto tra la logica del secondo ordine e le logiche independence friendly.

**Teorema 1.3** [Walkoe 1970] *In qualsiasi linguaggio  $L$  del secondo ordine che non abbia predicati o simboli di funzione del terzo ordine, ogni proposizione  $\Sigma_1^1$  è equivalente a una proposizione  $Q\psi$  di  $H'$ .*

---

<sup>33</sup>[Walkoe 1970], pp. 541-542.

<sup>34</sup>[Walkoe 1970].

*Dimostrazione.* Il metodo generale per trovare una proposizione  $Q\psi$  di  $H'$  equivalente alla proposizione  $\Sigma_1^1 \phi$  dovrebbe apparire evidente dal seguente esempio:

Se  $\phi$  è

$$\exists f_0 \exists f_1 \forall \mu_0 \dots \mu_4 \\ P(\mu_0, \dots, \mu_4, f_0(f_1(\mu_2), \mu_4), f_0(\mu_2, \mu_4), f_1(f_1(\mu_0)), f_1(\mu_1), f_1(\mu_2)))$$

possiamo elencare i termini che non siano variabili senza che nessuno di essi preceda i suoi sottotermini. La lista sarà  $f_0(\mu_2, \mu_4)$ ,  $f_1(\mu_1)$ ,  $f_1(\mu_2)$ ,  $f_1(\mu_0)$ ,  $f_0(f_1(\mu_2), \mu_4)$ ,  $f_1(f_1(\mu_0))$ . Sia

$$Q = \begin{pmatrix} \forall \mu_2^0 & \forall \mu_4^0 & \exists w_0^0 \\ & \forall \mu_1^1 & \exists w_1^1 \\ & \forall \mu_2^2 & \exists w_1^2 \\ & \forall \mu_0^3 & \exists w_1^3 \\ \forall x_2^4 & \forall \mu_4^4 & \exists w_0^4 \\ & \forall x_3^5 & \exists \mu_1^5 \\ \forall \mu_0^0 & \forall \mu_1^0 & \forall \mu_3^0 \end{pmatrix}$$

e sia  $\psi$

$$\begin{aligned} & (\mu_2^0 = x_2^4 \wedge \mu_4^0 = \mu_4^4 \rightarrow w_0^0 = w_0^4) \\ & \wedge (\mu_1^1 = \mu_2^2 \rightarrow w_1^1 = w_1^2) \\ & \wedge (\mu_1^1 = \mu_0^3 \rightarrow w_1^1 = w_1^3) \\ & \wedge (\mu_1^1 = x_3^5 \rightarrow w_1^1 = w_1^5) \\ & \wedge [(\mu_1^0 = \mu_1^1 \wedge \mu_2^0 = \mu_2^2 \wedge \mu_0^0 = \mu_0^3 \wedge \mu_4^0 = \mu_4^4 \wedge x_2^4 = w_1^2 \wedge x_3^5 = w_1^3) \\ & \rightarrow P(\mu_0^0, \dots, \mu_4^0, w_0^4, w_0^0, w_1^5, w_1^1, w_1^2)]. \end{aligned}$$

Allora  $Q\psi$  è equivalente a

$$\begin{aligned} & \exists f_0^0 \exists f_1^1 \exists f_1^2 \exists f_1^3 \exists f_0^4 \exists f_1^5 [\forall \mu_2^0 \forall x_2^4 \forall \mu_4^0 \forall \mu_4^4 (\mu_2^0 = x_2^4 \wedge \mu_4^0 = \mu_4^4) \\ & \rightarrow f_0^0(\mu_2^0, \mu_4^0) = f_0^4(x_2^4, \mu_4^4)] \\ & \wedge \forall \mu_1^1 \forall \mu_2^2 (\mu_1^1 = \mu_2^2 \rightarrow f_1^1(\mu_1^1) = f_1^2(\mu_2^2)) \\ & \wedge \forall \mu_1^1 \forall \mu_0^3 (\mu_1^1 = \mu_0^3 \rightarrow f_1^1(\mu_1^1) = f_1^3(\mu_0^3)) \\ & \wedge \forall \mu_1^1 \forall x_3^5 (\mu_1^1 = x_3^5 \rightarrow f_1^1(\mu_1^1) = f_1^5(x_3^5)) \\ & \wedge \forall \mu_1^0 \forall \mu_1^1 \forall \mu_2^0 \forall \mu_2^2 \forall \mu_0^0 \forall \mu_0^3 \forall \mu_4^0 \forall \mu_4^4 \forall x_2^4 \forall x_3^5 \forall \mu_3^0 \\ & [(\mu_1^0 = \mu_1^1 \wedge \mu_2^0 = \mu_2^2 \wedge \mu_0^0 = \mu_0^3 \wedge \mu_4^0 = \mu_4^4 \wedge x_2^4 = f_1^2(\mu_2^2) \wedge x_3^5 = f_1^3(\mu_0^3)) \\ & \rightarrow P(\mu_0^0, \dots, \mu_4^0, f_0^4(x_2^4, \mu_4^4), f_0^0(\mu_2^0, \mu_4^0), f_1^5(x_3^5), f_1^1(\mu_1^1), f_1^2(\mu_2^2))]. \end{aligned}$$

Questo può essere ridotto a

$$\exists f_0^0 \exists f_1^1 \forall \mu_0^0 \dots \forall \mu_4^0 \\ P(\mu_0^0, \dots, \mu_4^0, f_0^0(f_1^1(\mu_2^0), \mu_4^0), f_0^0(\mu_2^0, \mu_4^0), f_1^1(f_1^1(\mu_0^0)), f_1^1(\mu_1^0), f_1^1(\mu_2^0)),$$

che è evidentemente equivalente a  $\phi$ . *Q.E.D.*

Per esplicitare come si possa rendere generale questo procedimento e per chiarirne tutti i passaggi lo discuteremo per esteso.

Anzitutto bisogna notare che sono presi in esame tutti i possibili casi di interrelazione tra funzioni: vi sono funzioni applicate a variabili, funzioni applicate ad applicazioni di altre funzioni e funzioni applicate a proprie applicazioni. Le variabili, inoltre, compaiono sia come argomenti di predicati che come argomenti di funzioni, nelle diverse combinazioni di questi due casi. Questo è sufficiente a esaurire le espressioni e i rapporti tra espressioni che si devono poter rappresentare tramite un quantificatore di Henkin.

Per prima cosa è necessario elencare tutti i termini che non siano variabili della formula; nella lista prodotta ogni termine non deve precedere nessuno dei propri sottotermini. Per formule finite questa operazione è sempre possibile.

Grazie a questo elenco è possibile costruire il quantificatore  $Q$ . In  $Q$  comparirà una riga per ogni elemento della lista, una riga aggiuntiva per gli argomenti dei predicati chiuderà il quantificatore. Tutte le righe tranne l'ultima contengono un solo quantificatore esistenziale, esso deve essere l'ultimo della riga in cui si trova. Ogni riga, eccetto l'ultima, rappresenta un'occorrenza nella formula di una funzione. Nell'esempio le righe con due quantificatori universali si riferiscono a occorrenze della funzione  $f_0$ , le righe con un solo quantificatore universale indicano le applicazioni di  $f_1$ . Ovviamente, le variabili universalmente quantificate sostituiscono gli argomenti delle occorrenze di funzioni, quelle esistenzialmente quantificate, invece, rimpiazzano i valori delle singole applicazioni. Le variabili  $\mu_n^m$  rappresentano i termini che anche nella formula di origine erano variabili, le variabili  $x_n^m$  rappresentano le occorrenze di funzioni che svolgono il ruolo di sottotermini e le variabili  $w_n^m$  i valori delle singole applicazioni delle funzioni.

Gli indici alti delle variabili di  $Q$  indicano a quale elemento della lista dei termini la variabile fa riferimento. Gli indici bassi rappresentano rapporti diversi a seconda dell'oggetto a cui appartengono. Per le variabili  $\mu_n^m$  indicano le variabili corrispondenti nella formula originale; per una variabile  $x_n^m$  indica la riga di  $Q$  connessa all'applicazione di funzione della quale  $x_n^m$  rappresenta il

valore; per una variabile  $w_n^m$ , infine, indica la funzione della formula originale di cui rappresenta il valore.

L'ultima riga di  $Q$  quantifica le variabili relative a variabili della formula originale che non corrispondono a variabili quantificate nella prima riga di  $Q$ . Questo permette di avere un insieme ordinato isomorfo all'insieme delle variabili della formula originale ordinate per apparizione. Tale insieme si ottiene ordinando per  $n$  le variabili  $\mu_n^0$ . È possibile, a questo scopo, anche quantificare una nuova variabile per ogni  $\mu_m$ . È forse più semplice, ma non indispensabile. In questo caso, però, bisogna inserire negli stadi successivi della traduzione tutti i vincoli di uguaglianza aggiuntivi con le variabili già quantificate nelle righe precedenti del quantificatore  $Q$ . Questo avviene, per il caso esemplificato, nei primi quattro congiunti della sottoformula ( $\mu_1^0 = \mu_1^1 \wedge \mu_2^0 = \mu_2^2 \wedge \mu_3^0 = \mu_3^3 \wedge \mu_4^0 = \mu_4^4 \wedge x_2^4 = w_1^2 \wedge x_3^5 = w_1^3$ ).

La formula  $\psi$ , anzitutto, vincola all'uguaglianza le variabili che rappresentano i valori di una stessa funzione della formula originale nel caso fosse applicata a due argomenti uguali. Servono questo scopo i primi quattro congiunti; il primo per  $f_0$ , i rimanenti per  $f_1$ . Ad esempio ( $\mu_2^0 = x_2^4 \wedge \mu_4^0 = \mu_4^4 \rightarrow w_0^0 = w_0^4$ ) impone l'uguaglianza del valore di  $f_0(f_1(\mu_2), \mu_4)$  e di  $f_0(\mu_2, \mu_4)$  nel caso  $\mu_2$  sia uguale a  $f_1(\mu_2)$  e  $\mu_4$ , tradotto in quanto argomento della prima applicazione di  $f_0$ , sia uguale a  $\mu_4$ , tradotto in quanto argomento della seconda applicazione di  $f_0$ .

Nel quinto congiunto si trova un'implicazione tra una congiunzione di vincoli d'uguaglianza e l'applicazione dei predicati. I vincoli espressi in esso sono quelli ricavati dalla disposizione delle funzioni nella formula originale. Dato che in questa compare  $f_0(f_0(\mu_0))$ , ad esempio, in questa sottoformula si pone la condizione  $x_3^5 = w_3^1$ ; la prima variabile di questa uguaglianza, infatti, è quella usata per rappresentare l'argomento dell'applicazione di  $f_0$  più esterna, la seconda quella che indica il valore di  $f_0(\mu_0)$ . Nella parte dedicata ai predicati si usano esclusivamente le variabili  $w_n^m$ , che rappresentano i valori delle funzioni, e le variabili  $\mu_p^0$  corrispondenti alle variabili originali  $\mu_p$ .

**Teorema 1.4** [Sandu 1997] *La logica IF è un'estensione della logica elementare ricorsivamente non assiomaticabile.*

*Dimostrazione.* Sia  $h$  una formula tale che

$$h = \left( \begin{array}{cc} \forall x & \exists y \\ \forall z & \exists w \end{array} \right) \phi(x, z, y, w)$$

dove  $\phi(x, z, y, w)$  è una formula del primo ordine con variabili libere  $x, z, y, w$  e  $\left( \begin{array}{cc} \forall x & \exists y \\ \forall z & \exists w \end{array} \right)$  un quantificatore di Henkin; allora vale

$$h \Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\forall z)(\exists w/\{x\})\phi(x, z, y, w).$$

*Q.E.D*

I fatti esposti nella precedente dimostrazione sono sufficienti grazie ai numerosi risultati dimostrati per la logica del primo ordine con quantificatori di Henkin, alcuni di essi sono citati all'inizio di questo capitolo.

Mentre i teoremi precedenti analizzano un percorso che usa come intermediari i quantificatori di Henkin, il seguente mostra come sia possibile un passaggio diretto tra le logiche IF e la logica esistenziale del secondo ordine.

**Teorema 1.5** [Sandu 1997] *Ogni formula IF è logicamente equivalente a una formula  $\Sigma_1^1$  sul linguaggio IF.*

*Dimostrazione.* Una formula  $\Sigma_1^1$  sul linguaggio IF è una formula della forma  $\exists f_0 \dots \exists f_n \phi(f_0, \dots, f_n, \bar{x})$  in cui  $f_0, \dots, f_n$  sono nuovi simboli di funzioni,  $\bar{x}$  è una sequenza di variabili del primo ordine e  $\phi(f_0, \dots, f_n, \bar{x})$  è una formula del primo ordine in linguaggio IF estesa con  $\{f_0, \dots, f_n\}$ .

Sia  $\phi$  una formula IF qualsiasi. Eseguiamo le seguenti trasformazioni sintattiche:

1. Si porti  $\phi$  a forma normale negata ottenendo la formula  $\phi'$ .
2. Si sostituiscano tutte le occorrenze di  $\forall x/\{y_0, \dots, y_n\}$  e  $\wedge/\{y_0, \dots, y_n\}$  in  $\phi'$  con  $\forall x$  e  $\wedge$ , rispettivamente. Sia chiami la formula risultante  $\phi''$ .
3. Si eseguano le due seguenti operazioni per ottenere  $\phi'''$ :
  - a. Si eliminino tutti i quantificatori dalla forma  $\exists x/\{y_0, \dots, y_n\}$  e si rimpiazzino le variabili  $x$  rimaste libere con  $f(z_1, \dots, z_m)$ , in cui  $z_1, \dots, z_m$  sono tutte le variabili vincolate dai quantificatori da cui dipende  $\exists x/\{y_0, \dots, y_n\}$  tranne  $y_0, \dots, y_n$ . Si aggiunga all'inizio della formula risultante  $\exists f$ .
  - b. Si rimpiazzino ogni occorrenza di  $\psi(\vee/\{y_0, \dots, y_n\})\lambda$  con  $(g(z_0, \dots, z_m) = 1 \wedge \psi) \vee (g(z_0, \dots, z_m) = 2 \wedge \lambda)$  in cui  $z_0, \dots, z_m$  sono tutte le variabili vincolate dai quantificatori universali da cui



dipende  $\psi(\forall/\{y_0, \dots, y_n\})\lambda$  tranne  $y_0, \dots, y_n$ . Si aggiunga all'inizio della formula risultante  $\exists g$ .

Ognuna delle operazioni menzionate preserva la soddisfacibilità definita tramite la teoria dei giochi. Le formule  $\phi$  e  $\phi'$  sono equivalenti per via del teorema sulla natura duale della negazione. Dato che le strategie del giocatore II non riguardano la definizione di verità se la formula è in forma normale negata,  $\phi'$  e  $\phi''$  sono equivalenti; infatti colui che deve verificare la formula, in questo caso, è sempre il giocatore I ed esso deve poter scegliere un assegnamento adeguato in risposta a ogni possibile scelta di II per i  $\forall$  e  $\wedge$  presenti nella formula. Le formule  $\phi''$  e  $\phi'''$ , infine, sono equivalenti a causa della definizione delle funzioni  $f_Q$ . *Q.E.D*

I prossimi due teoremi derivano dal teorema di interpolazione di Craig per le formule  $\Sigma_1^1$  e dalle possibilità di traduzione tra queste formule e le logiche IF. Per questi introduciamo l'espressione  $\psi \models \phi$ ; si indica con essa che se  $M \models \psi^+$  allora  $M \models \phi^+$  per ogni modello  $M$ .

**Teorema 1.6 (Separazione)** [Sandu 1997] *Siano  $K_1$  e  $K_2$  due classi disgiunte di strutture definibili tramite proposizioni IF. Esiste una classe  $K$ , definibile tramite una singola formula del primo ordine, tale che  $K$  contiene  $K_1$  ed è disgiunta rispetto a  $K_2$ .*

Da questo teorema segue una versione indebolita del teorema di interpolazione per la logica IF.

**Corollario (Teorema di interpolazione)** [Sandu 1997] *Sia  $\Phi$  un insieme di proposizioni IF e sia  $\phi$  una formula del primo ordine qualsiasi. Se, secondo la semantica game-teoretica,  $\Phi \models \phi$ , allora esiste una formula  $\lambda$  del primo ordine tale che  $\Phi \models \lambda$  e  $\lambda \models \phi$ .*

# Capitolo 2

## IFMLm

In questo capitolo si definisce un linguaggio modale dotato del connettivo  $\diamond$  e del suo duale  $\square$  per una sola modalità. Verrà usato per costruire una versione semplificata del linguaggio modale *independence friendly* IFML di Sevenster<sup>1</sup>. Per questo linguaggio usiamo il nome di ‘ML monomodale’, o MLm, e il linguaggio definitivo verrà conseguentemente chiamato IFMLm.

### 2.0.3 Sintassi per logica MLm

**Definizione 2.1** *Siano  $p_0, p_1, p_2, \dots$  variabili proposizionali. Tutte le **fbf di MLm**, allora, sono generate dalla seguente grammatica in forma Backus-Naur:*

$$\phi ::= p \mid \neg p \mid \phi \wedge \phi \mid \phi \vee \phi \mid \square \phi \mid \diamond \phi$$

dove  $p$  è una variabile proposizionale.

Alcuni esempi di formule MLm sono i seguenti:

$$\diamond(\square p_1 \wedge \neg p_1) \vee \square p_1,$$

$$\diamond \diamond \neg p_4 \vee \square p_5$$

e

$$\diamond \neg p_3 \vee p_1.$$

Si può dimostrare che non riduce in alcun modo l’espressività del linguaggio la limitazione della negazione ai soli atomi.

---

<sup>1</sup>[Sevenster 2010].

## 2.0.4 La traduzione da MLm alla logica del primo ordine

Il secondo passaggio necessario per definire IFMLm consiste nello stabilire la traduzione standard dal linguaggio MLm appena introdotto a un linguaggio del primo ordine. A seguito di questa operazione diventa possibile definire l'applicazione del dispositivo per rappresentare le indipendenze e, in seguito, definire una semantica composizionale pe IFMLm. La definizione della traduzione standard ( $ST$ ) per le formule di ML monomodale è la seguente.

**Definizione 2.2** *Consideriamo un linguaggio del primo ordine con un simbolo di relazione binaria  $R$ , simboli predicativi unari  $P_0, P_1, P_2, \dots$  e variabili individuali  $x_0, x_1, x_2, \dots$ . Siano  $p_0, p_1, p_2, \dots$  le variabili proposizionali di MLm. Data la variabile  $x_n$ ,  $ST_{x_n}$  è una traduzione dalle fbf di MLm alle fbf del linguaggio del primo ordine:*

$$ST_{x_n}(p_l) = P_l(x_n)$$

$$ST_{x_n}(\neg p_l) = \neg P_l(x_n)$$

$$ST_{x_n}(\psi \vee \psi') = ST_{x_n}(\psi) \vee ST_{x_n}(\psi')$$

$$ST_{x_n}(\psi \wedge \psi') = ST_{x_n}(\psi) \wedge ST_{x_n}(\psi')$$

$$ST_{x_n}(\diamond \psi) = \exists x_{n+1}(R(x_n, x_{n+1}) \wedge ST_{x_{n+1}}(\psi))$$

$$ST_{x_n}(\square \psi) = \forall x_{n+1}(\neg R(x_n, x_{n+1}) \vee ST_{x_{n+1}}(\psi)).$$

Si noti che la traduzione di una formula MLm ha sempre una, e una sola, variabile libera; se  $\lambda$  è una formula IFMLm e  $\lambda = ST_{x_n}(\phi)$ , allora l'unica variabile libera in  $\lambda$  è  $x_n$ .

**Lemma 2.1** *Se la formula IFMLm  $\lambda$  è della forma  $\sigma \vee \sigma'$  o della forma  $\sigma \wedge \sigma'$  e  $\lambda = ST_{x_n}(\phi)$ , allora l'unica variabile libera in  $\sigma$  e  $\sigma'$  è  $x_n$ .*

*Dimostrazione.* Se  $\lambda = \sigma \vee \sigma' = ST_{x_n}(\phi)$ , data la definizione della traduzione standard,  $\lambda = ST_{x_n}(\psi) \vee ST_{x_n}(\psi')$ . Poiché  $ST_{x_n}(\psi) \vee ST_{x_n}(\psi') = \lambda = \sigma \vee \sigma'$  valgono le uguaglianze

$$ST_{x_n}(\psi) = \sigma$$

$$ST_{x_n}(\psi') = \sigma'.$$

Se  $\lambda = \sigma \wedge \sigma' = ST_{x_n}(\phi)$ , data la definizione della traduzione standard,  $\lambda = ST_{x_n}(\psi) \wedge ST_{x_n}(\psi')$ . Poiché  $ST_{x_n}(\psi) \wedge ST_{x_n}(\psi') = \lambda = \sigma \wedge \sigma'$  valgono le uguaglianze

$$ST_{x_n}(\psi) = \sigma$$

e

$$ST_{x_n}(\psi') = \sigma'.$$

In entrambi i casi  $\sigma$  e  $\sigma'$  hanno come unica variabile libera  $x_n$ , dato che  $\sigma = ST_{x_n}(\psi)$  e  $\sigma' = ST_{x_n}(\psi')$ .

## 2.0.5 Le sottoformule nella traduzione di Mlm

Per poter definire correttamente l'uso del dispositivo ‘/W’ è necessario poter distinguere due ruoli distinti che i connettivi proposizionali svolgono nelle formule del primo ordine tradotte da MLm.

La sintassi Mlm assieme alla traduzione  $ST$  definiscono un sottoinsieme dell'insieme di tutte le formule del linguaggio del primo ordine che si è considerato per tale traduzione; sia questo sottoinsieme STMLm. La suddivisione in sottoformule delle formule tradotte è dovuta allo stato di traduzioni di queste, essa deriva dal rapporto tra le parti della formula tradotta e le parti della formula di origine; la struttura di alcune delle formule tradotte, di conseguenza, non corrisponde alla struttura che avrebbero se fossero considerate solamente come formule del linguaggio del primo ordine.

In particolare, la definizione di sottoformula deve rendere conto della diversa condizione dei connettivi  $\vee$  e  $\wedge$  che occorrono per la traduzione di un connettivo modale. Nelle parti di formula dalla forma  $\exists y(R(x, y) \wedge \phi)$  e  $\forall y(\neg R(x, y) \vee \phi)$ , in cui  $\phi$  è una *fbf*,  $R(x, y)$  non è considerato una sottoformula. I blocchi sintattici indivisibili che vengono considerati per la divisione delle sottoformule sono  $\exists y(R(x, y) \wedge \phi)$  e  $\forall y(\neg R(x, y) \vee \phi)$ .

**Definizione 2.3** *Siano  $\phi$  e  $\phi'$  fbf di IFMLm. La funzione *subf* è definita*

così:

$$\text{subf}(P(x)) = \{P(x)\}$$

$$\text{subf}(\neg\phi) = \{\neg\phi\} \cup \text{subf}(\phi)$$

$$\text{subf}(\phi \wedge \phi') = \{\phi \wedge \phi'\} \cup \text{subf}(\phi)$$

$$\text{subf}(\phi \vee \phi') = \{\phi \vee \phi'\} \cup \text{subf}(\phi)$$

$$\text{subf}(\exists y(R(x, y) \wedge \phi)) = \{\exists y(R_m(x, y) \wedge \phi)\} \cup \text{subf}(\phi)$$

$$\text{subf}(\forall y(\neg R(x, y) \vee \phi)) = \{\forall y(\neg R_m(x, y) \vee \phi)\} \cup \text{subf}(\phi)$$

con  $P$  predicato e  $x$  e  $y$  variabili.

Si faccia caso che i blocchi sintattici contenenti  $R(x, y)$  sopra menzionati sono propriamente casi di formule con guardia<sup>2</sup>. Come anticipato, la distinzione tra connettivi che connettono sottoformule e connettivi interni a una guardia risulterà fondamentale per la definizione dell'uso del dispositivo  $\text{'}/W\text{'}$ .

## 2.0.6 Gestione delle dipendenze in IFMLm

Per ottenere le formule IFMLm è necessario, oltre alla grammatica presentata sopra e alla traduzione, inserire un dispositivo per rendere esplicite le dipendenze dei connettivi e dei quantificatori. Questo compito lo svolge il simbolo  $\text{'}/W\text{'}$ , dove  $W$  è un insieme di variabili; questo deve essere applicato a ogni connettivo e quantificatore.

Con l'espressione  $\text{'operatore logico di base'}$  si intende uno dei simboli

$$\vee, \wedge$$

qualora connessa due sottoformule; oppure uno dei simboli

$$\exists x, \forall x.$$

---

<sup>2</sup>Si veda ad esempio [Tulenheimo/Sevenster 2006], p. 485.

Se  $O$  è un operatore logico di base e  $W$  è un insieme contenente variabili individuali, allora  $(O/W)$  è un operatore logico.

**Definizione 2.4** *Se  $\phi$  è una formula ML monomodale tradotta tramite la traduzione standard, allora per ottenere una **formula IFMLm** si seguano le seguenti indicazioni:*

1. *Sostituire ogni operatore logico di base  $O$  in  $\phi$  con  $(O/\emptyset)$ .*
2. *Se  $(O/W)$  è nell'ambito di  $(\exists x/V)$ , è possibile aggiungere  $y$  a  $W$ .*
3. *Se  $(O/W)$  è nell'ambito di  $(\forall x/V)$ , è possibile aggiungere  $y$  a  $W$ .*

*Sia IFMLm' la collezione di tutte le formule ottenute applicando a ogni formula ML tradotta tramite traduzione standard l'operazione indicata in 1. La collezione di tutte le formule IFMLm si ottiene applicando a ogni formula di IFMLm' ogni possibile combinazione di operazioni concessa da 2 e 3 .*

Dalla definizione 2.4 segue che ogni formula ML monomodale cui sia stata applicata l'azione 1, ovvero la sostituzione di ogni operatore  $O$  con  $O/\emptyset$ , è una formula IFMLm; in questo modo si sono formate tutte le formule IFMLm che abbiano solo insiemi di dipendenze vuoti. Aggiungendo un elemento a un insieme di dipendenze di un qualsiasi operatore si ottiene una formula IFMLm se l'elemento aggiunto è quantificato da un quantificatore nel cui ambito si trovi l'operatore. Si noti che dalle formule in IFMLm' che abbiano almeno un operatore nell'ambito di un quantificatore si può ottenere più di una formula appartenente a IFMLm.

Alcuni esempi di formule IFMLm sono i seguenti:

$$[(\forall x_1/\emptyset)[\neg R(x_0, x_1) \vee [(\exists x_2/\emptyset)(R(x_1, x_2) \wedge P_1(x_2))]]],$$

$$[(\forall x_1/\emptyset)[\neg R(x_0, x_1) \vee [(\exists x_2/\{x_1\})(R(x_1, x_2) \wedge P_2(x_2))]]],$$

$$[(\exists x_1/\emptyset)[R(x_0, x_1) \wedge P_3(x_1)]](\wedge/\emptyset)[(\exists x_1/\emptyset)[R(x_0, x_1) \wedge \neg P_3(x_1)]]$$

$$(\wedge/\emptyset)[(\forall x_1/\emptyset)[\neg R(x_0, x_1) \vee ((\exists x_2/\{x_1\})(R(x_1, x_2) \wedge (P_5(x_2) \vee \neg P_5(x_2))))]],$$

$$[(\exists x_1/\emptyset)(R(x_0, x_1) \wedge \neg P_1(x_1))](\vee/\{x_1\})P_1(x_1)$$

e

$$[(\exists x_1/\emptyset)(R(x_0, x_1) \wedge \neg P_2(x_1))](\forall/\{x_1\})P_4(x_1).$$

Si presti attenzione al fatto che, per adesso, non è in discussione il significato delle formule; si vedrà più avanti che l’inserimento di alcuni elementi in alcuni insiemi di dipendenze non modifica in alcun modo la semantica, ma in questi esempi si noti esclusivamente il criterio secondo il quale si possono inserire le variabili negli insiemi.

Laddove un insieme di dipendenze sia uguale all’insieme vuoto si ammetterà la scrittura che omette l’indicazione del dispositivo ‘/W’.

## 2.1 La semantica composizionale di IFMLm

Una semantica composizionale per le logiche IF è stata introdotta da Hodges nel suo articolo *Compositional semantics for a language of imperfect information*<sup>3</sup>. Questa semantica è stata chiamata *trump semantics*, che si potrebbe tradurre con l’espressione ‘semantica delle briscole’, per suggerire una connessione con la teoria dei giochi, accostando il ruolo degli assegnamenti di una strategia sicura alle carte che, in alcuni giochi, hanno un ruolo privilegiato rispetto alle altre quando si deve stabilire quale di esse vinca una mano. Un modo più elegante di tradurre il nome della semantica di Hodges può usare il termine anticamente usato per questo genere di carte: *trionfi*. Nel resto del testo ci si riferirà indistintamente alle semantiche composizionali per IFMLm, IFML e IF con il termine *semantica dei trionfi*.

### 2.1.1 Le strutture, le loro parti e gli assegnamenti

La validità di una formula IFMLm si valuta rispetto a una struttura relazionale di  $R$ .

Le strutture  $\mathfrak{M}$  che si useranno per *IFMLm* sono così composte:  $\mathfrak{M} = (M, (P_l^{\mathfrak{M}})_l, R^{\mathfrak{M}})$ . L’insieme  $M$  è il dominio della struttura; la relazione binaria  $R^{\mathfrak{M}}$  è un sottoinsieme di  $M \times M$ . I  $P_l^{\mathfrak{M}}$  sono sottoinsiemi di  $M$ . Diciamo che  $\mathfrak{M}$  interpreta i simboli  $(P_l)_l$  e  $(R)_0$ .

Un assegnamento  $s$  è una funzione totale da un insieme  $V$  di variabili a  $M$ . Se  $X$  è un insieme di assegnamenti tale che tutti gli assegnamenti  $s \in X$  hanno

---

<sup>3</sup>[Hodges 1997].

il medesimo dominio, allora  $X$  è una squadra di assegnamenti. Il dominio di  $X$ ,  $dom(X)$ , è definito come  $dom(s)$  per ogni  $s \in X$ . Ogni assegnamento, e ogni squadra di assegnamenti, che useremo in questo testo ha dominio finito, questo segue dal fatto che tale dominio è l'insieme di variabili libere di una qualche formula o sottoformula.

Se  $v$  è una variabile e  $b \in M$ , indichiamo con  $s(v/b)$  l'assegnamento  $s'$  tale che  $s'(v) = b$  e  $s'(u) = s(u)$  per ogni  $u \neq v$ . La scrittura  $X[v, M]$  rappresenterà, quindi, la squadra di assegnamenti  $\{s(v/b) : s \in X, b \in M\}$ . Per l'uso che se ne fa nella definizione della semantica di IFMLm, la variabile  $v$  di  $X[v, M]$  non appartiene mai al dominio di  $X$ ; l'insieme  $X[v, M]$ , quindi, è un ampliamento della squadra  $X$  che ne aumenta il dominio e la cardinalità. Per ogni assegnamento  $s \in X$ , infatti, in  $X[v, M]$  ci sono un numero di assegnamenti uguale a  $card(M)$ ; questi si ricavano dagli assegnamenti  $s \in X$  unendo  $\{v\}$  al dominio di  $X$  e facendo sì che ciascun  $s$  assegni alla variabile  $v$  a un elemento diverso di  $M$ .

Sia  $f : X \rightarrow M$  una funzione da una squadra di assegnamenti  $X$  a  $M$ ;  $X[v, f]$  indica la squadra di assegnamenti  $\{s(v/f(s)) : s \in X\}$ . Le funzioni del tipo appena menzionato verranno usate nella definizione della semantica per definire su una nuova variabile gli assegnamenti. Il dominio di  $s$  non conterrà mai  $v$  nei casi che interessano questa semantica e  $f$ , di conseguenza, amplierà  $s$  aggiungendo a esso  $\langle v, f(s) \rangle$ . La squadra  $X[v, f]$  sarà proprio la squadra che contiene tutti gli assegnamenti di  $X$  dopo che hanno subito tale ampliamento tramite  $f$ .

Siano  $s$  e  $t$  due assegnamenti tali che  $dom(s) = dom(t)$  e sia  $W$  un sottoinsieme di  $dom(s)$ , allora  $s \approx_W t$  se  $s(v) = t(v)$  per ogni indice e variabile  $v$  in  $dom(s) - W$ .

Sia  $X$  una squadra di assegnamenti e sia  $W \subseteq dom(X)$ ; una funzione  $f : X \rightarrow M$  del tipo descritto sopra o una funzione  $g : X \rightarrow \{1, 2\}$  è detta *W-uniforme* nel caso in cui per ogni  $s, t \in X$  se  $s \approx_W t$  allora  $f(s) = f(t)$  o  $g(s) = g(t)$ , rispettivamente. Una funzione *W-uniforme*, quindi, deve mappare sullo stesso elemento del codominio gli assegnamenti che differiscano solo per i valori che assegnano alle variabili in  $W$ . In altre parole, una funzione *W-uniforme* non distingue mai due assegnamenti che differiscano solo rispetto a  $W$ . Gli assegnamenti  $s(v/f)$  con  $f$  *W-uniforme* da  $X$  a  $M$ , quindi, saranno ampliamenti che trasformano nello stesso modo tutti gli assegnamenti che differiscono solo rispetto a  $W$ . Una funzione  $g$  da  $X$  a  $\{1, 2\}$ , invece, mapperà nello stesso numero tutti gli assegnamenti che differiscono solo rispetto a  $W$ .

Sia  $X$  è una squadra di assegnamenti, siano le variabili in  $dom(X)$  enu-



merate da  $x_0, \dots, x_n$  e sia  $i \in \text{dom}(X)$  un indice. Sia  $f : X \rightarrow M$  allora  $f$  è una  $R$ -funzione se per ogni  $s \in X$ ,  $(s(x_n), f(s)) \in R$ . Una  $R$ -funzione applicata a un assegnamento  $s$ , quindi, ha come valore il successore rispetto a  $R$  del valore che assume  $s$  applicata all'ultimo elemento, rispetto a  $R$ , del proprio dominio.

Con la scrittura  $X[x, B]_R$  si indicherà l'insieme

$$\{s \in X[x_{n+1}, B] : (s(x_n), s(x_{n+1})) \in R\}.$$

Anche in questo caso le squadre di assegnamenti vengono modificate assecondando  $R$ .

### 2.1.2 Sottoformule

La definizione della funzione  $\text{subf}$ , che genera l'insieme delle sottoformule del suo argomento, per la traduzione di IFMLm deve assecondare il comportamento degli operatori modali rispetto alle sottoformule. Dato che nel passaggio da IFMLm alla sua traduzione tali operatori vengono sostituiti da quantificatori è necessario adeguare la definizione di  $\text{subf}$  per questi casi, come avviene per IFMLm<sup>4</sup>.

**Definizione 2.5** Una **sottoformula IFMLm** è un qualsiasi elemento dell'insieme  $\text{subf}(\phi)$  per una qualche  $\text{fbf } \phi$  IFMLm.

**Definizione 2.6** Siano  $\phi$  e  $\phi'$   $\text{fbf}$  o sottoformule IFMLm. La funzione  $\text{subf}$

---

<sup>4</sup>[Sevenster 2010], p. 418.

è definita così:

$$subf(P(x)) = \{P(x)\}$$

$$subf(\neg\phi) = \{\neg\phi\} \cup subf(\phi)$$

$$subf(\phi(\wedge/W)\phi') = \{\phi(\wedge/W)\phi'\} \cup subf(\phi)$$

$$subf(\phi(\vee/W)\phi') = \{\phi(\vee/W)\phi'\} \cup subf(\phi)$$

$$subf((\exists y/W)(R(x, y)) \wedge \phi) = \{(\exists y/W)(R_m(x, y)) \wedge \phi\} \cup subf(\phi)$$

$$subf((\forall y/W)(\neg R(x, y)) \vee \phi) = \{(\forall y/W)(\neg R_m(x, y)) \vee \phi\} \cup subf(\phi)$$

con  $x, y$  variabili,  $W$  insieme di variabili e  $P$  predicato.

Usando questa definizione di *subf*, i diversi casi di apparizione di un quantificatore per variabili ( $\exists$  e  $\forall$ ) sono correttamente distinti tramite la relazione binaria  $R$ ; infatti si tiene conto delle relazioni presenti nelle formule col ruolo di *guardie* dei quantificatori per variabili individuali.

Si noti che per via delle restrizioni sugli elementi degli insiemi di indipendenze non è sempre vero che una sottoformula di una formula IFMLm è, a sua volta, una formula ben formata IFMLm. Questo varrà anche per le sottoformule delle fbf IFML. Un esempio di questa discrepanza è la presenza necessaria in una formula IFMLm di una variabile libera non contenuta in nessun insieme di indipendenze. In una sottoformula di una formula IFMLm è possibile che ogni variabile sia presente in almeno un insieme di indipendenze della formula.

### 2.1.3 Semantica dei trionfi per IFMLm

**Definizione 2.7** Sia  $\phi$  una formula IFMLm; siano  $\psi$  e  $\psi'$  due occorrenze di sottoformule di  $\phi$  con variabile libera  $x_n$ . Sia  $\mathfrak{M}$  una struttura e  $X$  una squadra di assegnamenti per  $\mathfrak{M}$  tale che tutte le variabili nel dominio di  $X$  siano enumerate in  $x_0, \dots, x_n$ ; per ogni funzione  $g$  e argomento  $z$  sia  $g^{-1}(z)$

la controimmagine di  $\{z\}$ , allora

$\mathfrak{M}, X \models P_l(x_n)$  sse  $s(x_n)$  è in  $P_l^{\mathfrak{M}}$  per ogni  $s \in X$

$\mathfrak{M}, X \models \neg P_l(x_n)$  sse  $s(x_n)$  non è in  $P_l^{\mathfrak{M}}$  per ogni  $s \in X$

$\mathfrak{M}, X \models \psi(\vee/W)\psi'$  sse  $\mathfrak{M}, g^{-1}(1) \models \psi$  e  $\mathfrak{M}, g^{-1}(2) \models \psi'$  per qualche  $g: X \rightarrow \{1, 2\}$  che sia  $W$ -uniforme

$\mathfrak{M}, X \models \psi(\wedge/W)\psi'$  sse  $\mathfrak{M}, X \models \psi$  e  $\mathfrak{M}, X \models \psi'$

$\mathfrak{M}, X \models (\exists x_{n+1}/W)(R(x_n, x_{n+1}) \wedge \theta)$  sse  $\mathfrak{M}, X[x_{n+1}, f] \models \theta$  per qualche  $R^{\mathfrak{M}}$ -funzione  $f: X \rightarrow M$  che sia  $W$ -uniforme

$\mathfrak{M}, X \models (\forall x_{n+1}/W)(\neg R(x_n, x_{n+1}) \vee \theta)$  sse  $\mathfrak{M}, X[x_{n+1}, M]_{R^{\mathfrak{M}}} \models \theta$

Seguendo il funzionamento di queste definizioni si può notare che il sistema di notazione delle dipendenze è superfluo in alcuni casi. Per il quantificatore universale e per la congiunzione non comporta nessuna differenza variare o eliminare gli elementi di  $W$ ; d'ora in poi, quindi, eviteremo di scrivere  $\vee/W$  in questi casi data l'inutilità del simbolo. Come si è già detto per gli insiemi di dipendenze che siano vuoti, se  $\phi$  è una formula IFMLm e  $\phi'$  è il risultato dell'omissione dell'indicazione degli insiemi di dipendenze in  $\phi$  che non influiscano sul valore di questa, allora  $\phi'$  è detta abbreviazione di  $\phi$ .

Come era già stato anticipato in occasione del teorema 1.2, per il caso della congiunzione è indispensabile alla definizione che la squadra di assegnamenti vuota soddisfi qualsiasi formula. È sufficiente, infatti, che solo uno dei due disgiunti sia soddisfacibile; la funzione  $f$ , in questo caso, non mapperebbe in 1 nessun elemento e mapperebbe in 2 tutto  $X$ , o viceversa.

#### 2.1.4 Esempi di valutazione

Per chiarire il funzionamento della definizione della semantica appena data, discutiamo alcune proposizioni e la valutazione della loro soddisfacibilità secondo questa definizione.

Per stabilire la soddisfacibilità di una formula è indispensabile, prima di tutto, che sia data una struttura.

Sia  $\mathfrak{M}_1$  la struttura relazionale

$$(M_1, (P_l^{\mathfrak{M}_1})_l, R^{\mathfrak{M}_1})$$

con

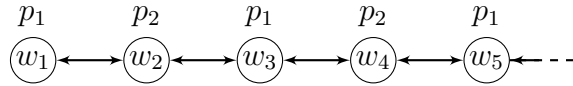
$$M_1 = \{w_1, w_2, w_3, \dots\};$$

$$R^{\mathfrak{M}_1} = \{\langle w_1, w_2 \rangle, \langle w_2, w_1 \rangle, \langle w_2, w_3 \rangle, \langle w_3, w_2 \rangle, \langle w_3, w_4 \rangle, \langle w_4, w_3 \rangle, \langle w_4, w_5 \rangle, \dots\};$$

$$P_1^{\mathfrak{M}_1} = \{w_1, w_3, w_5, \dots\},$$

$$P_2^{\mathfrak{M}_1} = \{w_2, w_4, w_6, \dots\}.$$

Usiamo d'ora in avanti per i diagrammi delle formule IFMLm e IFML i simboli proposizionali al posto dei predicati e delle frecce per indicare le relazioni. La struttura  $\mathfrak{M}_1$  è rappresentata, dunque, dal seguente diagramma:



Valutiamo qualche formula rispetto a questa struttura. Sia  $\phi$  la formula

$$\forall x_1[\neg R(x_0, x_1) \vee [\exists x_2(R(x_1, x_2) \wedge P_1(x_2))]]$$

e sia  $\phi'$ , invece, la formula

$$\forall x_1[\neg R(x_0, x_1) \vee [(\exists x_2/\{x_1\})(R(x_1, x_2) \wedge P_1(x_2))]].$$

Tentiamo di verificare la soddisfacibilità di  $\phi$ . Consideriamo la squadra di assegnamenti  $X = \{\{\langle x_0, w_3 \rangle\}\}$ .

$$\mathfrak{M}_1, X \models \forall x_1[\neg R(x_0, x_1) \vee [\exists x_2(R(x_1, x_2) \wedge P_1(x_2))]]$$

*sse*

$$\mathfrak{M}_1, X[x_1, M_1]_{R^{\mathfrak{M}_1}} \models [\exists x_2(R(x_1, x_2) \wedge P_1(x_2))].$$

La squadra  $X[x_1, M_1]_{R^{\mathfrak{M}_1}}$  è precisamente

$$X' = \{\{\langle x_0, w_3 \rangle, \langle x_1, w_2 \rangle\}, \{\langle x_0, w_3 \rangle, \langle x_1, w_4 \rangle\}\}.$$

A sua volta

$$\mathfrak{M}_1, X' \models [\exists x_2 (R(x_1, x_2) \wedge P_1(x_2))]$$

*sse*

$$\mathfrak{M}_1, X'[x_2, f] \models P_1(x_2)$$

per una qualche  $R^{\mathfrak{M}_1}$ -funzione  $f$  da  $X$  a  $M_1$  che sia  $\emptyset$ -uniforme. La  $\emptyset$ -uniformità non comporta nulla, quindi si può scegliere una qualsiasi  $f$  che rispetti  $R^{\mathfrak{M}_1}$ . Si consideri  $f : X' \rightarrow M_1$  tale che

$$f(\{\langle x_0, w_3 \rangle, \langle x_1, w_2 \rangle\}) = w_1$$

$$f(\{\langle x_0, w_3 \rangle, \langle x_1, w_4 \rangle\}) = w_5.$$

Se si prende una  $f$  così definita,  $X'[x_2, f]$  è la squadra

$$X'' = \{\{\langle x_0, w_3 \rangle, \langle x_1, w_2 \rangle, \langle x_2, w_1 \rangle\}, \{\langle x_0, w_3 \rangle, \langle x_1, w_4 \rangle, \langle x_2, w_5 \rangle\}\}.$$

La squadra  $X''$  soddisfa  $P_1(x_2)$  su  $\mathfrak{M}_1$  poiché  $P_1^{\mathfrak{M}_1} = \{w_1, w_3, w_5, \dots\}$  e i due assegnamenti in  $X''$  associano  $x_2$  a  $w_1$  e  $w_5$ .

La valutazione della formula  $\phi'$  sulla struttura  $\mathfrak{M}_1$  tramite la squadra di assegnamenti  $X = \{\{\langle x_0, w_3 \rangle\}\}$  differisce rispetto a quella di  $\phi$  per il passo relativo al quantificatore esistenziale. Dovendo verificare che

$$\mathfrak{M}_1, X[x_1, M_1]_{R^{\mathfrak{M}_1}} \models [(\exists x_2/x_1)(R(x_1, x_2) \wedge P_1(x_2))]$$

bisogna trovare una  $R^{\mathfrak{M}_1}$ -funzione  $f'$  da  $X$  a  $M_1$  che sia  $\{x_1\}$ -uniforme per la quale

$$\mathfrak{M}_1, (X[x_1, M_1]_{R^{\mathfrak{M}_1}})[x_2, f'] \models P_1(x_2).$$

La differenza consiste nella scelta della funzione  $f$ . La funzione usata per  $\phi$ , infatti, non è  $\{x_1\}$ -uniforme in quanto non mappa nello stesso oggetto l'assegnamento  $\{\langle x_0, w_3 \rangle, \langle x_1, w_2 \rangle\}$  e l'assegnamento  $\{\langle x_0, w_3 \rangle, \langle x_1, w_4 \rangle\}$  nonostante valga che

$$\{\langle x_0, w_3 \rangle, \langle x_1, w_4 \rangle, \langle x_2, w_5 \rangle\} \approx_{\{x_1\}} \{\langle x_0, w_3 \rangle, \langle x_1, w_4 \rangle\}.$$

Una funzione adeguata allo scopo è  $f'$  se

$$f'(\{\langle x_0, w_3 \rangle, \langle x_1, w_2 \rangle\}) = w_3$$

$$f'(\{\langle x_0, w_3 \rangle, \langle x_1, w_4 \rangle\}) = w_3.$$

Scegliendo una funzione  $f'$  così definita, infatti, si ha che

$$(X[x_1, M_1]_{R^{\mathfrak{M}_1}})[x_2, f']$$

è uguale alla squadra

$$\{\{\langle x_0, w_3 \rangle, \langle x_1, w_2 \rangle, \langle x_2, w_3 \rangle\}, \{\langle x_0, w_3 \rangle, \langle x_1, w_4 \rangle, \langle x_2, w_3 \rangle\}\}.$$

Questa squadra di assegnamenti soddisfa  $P_1(x_2)$  su  $\mathfrak{M}_1$ ; l'interpretazione del predicato  $P_1$  è infatti  $P_1^{\mathfrak{M}_1} = \{w_1, w_3, w_5, \dots\}$  e i due assegnamenti in  $(X[x_1, M_1]_{R^{\mathfrak{M}_1}})[x_2, f']$  associano  $x_2$  a  $w_3$ .

Sia  $\mathfrak{M}_2$  la struttura relazionale

$$(M_2, (P_i^{\mathfrak{M}_2})_i, R^{\mathfrak{M}_2})$$

con

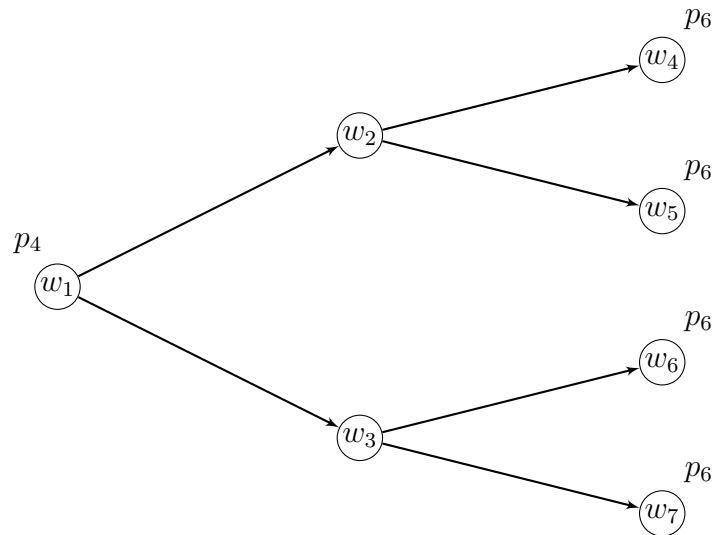
$$M_2 = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7\};$$

$$R^{\mathfrak{M}_2} = \{\langle w_1, w_2 \rangle, \langle w_1, w_3 \rangle, \langle w_2, w_4 \rangle, \langle w_2, w_5 \rangle, \langle w_3, w_6 \rangle, \langle w_3, w_7 \rangle\};$$

$$P_4^{\mathfrak{M}_2} = \{w_1\},$$

$$P_6^{\mathfrak{M}_2} = \{w_4, w_5, w_6, w_7\}.$$

Il diagramma di  $\mathfrak{M}_2$  è questo:



Tentiamo di verificare la soddisfacibilità su  $\mathfrak{M}_2$  della formula

$$[P_4(x_0) \wedge P_6(x_0)] \vee \\ [[P_4(x_0)] \wedge [\forall x_1[-R(x_0, x_1) \vee [(\exists x_2/\{x_1\})[R(x_1, x_2) \wedge P_6(x_2)]]]]].$$

Consideriamo la squadra di assegnamenti  $X = \{\{\langle x_0, w_1 \rangle\}\}$ , sembra la più naturale per soddisfare questa formula su  $\mathfrak{M}_2$ . Data la semantica vale che

$$\mathfrak{M}_2, X \models \\ [P_4(x_0) \wedge P_6(x_0)] \vee \\ [[P_4(x_0)] \wedge [\exists x_1[R(x_0, x_1) \wedge [(\forall x_2/\{x_1\})[-R(x_1, x_2) \vee P_6(x_2)]]]]]$$

sse

$$\mathfrak{M}_2, g^{-1}(1) \models P_4(x_0) \wedge P_6(x_0)$$

e

$$\mathfrak{M}_2, g^{-1}(2) \models \\ [P_4(x_0)] \text{wedge} [\exists x_1[R(x_0, x_1) \wedge [(\forall x_2/\{x_1\})[-R(x_1, x_2) \vee P_6(x_2)]]]]]$$

per qualche funzione  $g$  con dominio  $X$  che sia  $\emptyset$ -uniforme. Sia  $g$  la funzione che non assegna nessun argomento a 1 e ogni elemento di  $X$  a 2. Si tenga presente che ogni formula è soddisfacibile tramite la squadra vuota e che, evidentemente, solo questa può soddisfare  $P_4(x_0) \wedge P_6(x_0)$  nella struttura  $\mathfrak{M}_2$ . Per dimostrare che ogni elemento di  $X$  soddisfa  $[P_4(x_0)] \wedge [\forall x_1[-R(x_0, x_1) \vee [(\exists x_2/\{x_1\})[R(x_1, x_2) \wedge P_6(x_2)]]]]$  devo dimostrare che

$$\mathfrak{M}_2, X \models P_4(x_0)$$

e che vale inoltre

$$\mathfrak{M}_2, X \models [\forall x_1[-R(x_0, x_1) \vee [(\exists x_2/\{x_1\})[R(x_1, x_2) \wedge P_6(x_2)]]]]].$$

La prima relazione vale dato che  $P_4^{\mathfrak{M}_2} = \{w_1\}$  e che  $X = \{\{\langle x_0, w_1 \rangle\}\}$ . Perché valga anche la seconda deve valere che

$$\mathfrak{M}_2, X[x_1, M_2]_{R^{\mathfrak{M}_2}} \models (\exists x_2/\{x_1\})[R(x_1, x_2) \wedge P_6(x_2)].$$

La squadra  $X[x_1, M_2]_{R^{\mathfrak{M}_2}}$  è uguale all'insieme  $X' = \{\{\langle x_0, w_1 \rangle, \langle x_1, w_2 \rangle\}, \{\langle x_0, w_1 \rangle, \langle x_1, w_3 \rangle\}\}$ . Dalla semantica vale la relazione

$$\mathfrak{M}_2, X' \models (\exists x_2/\{x_1\})[R(x_1, x_2) \wedge P_6(x_2)]$$

sse

$$\mathfrak{M}_2, X'[x_2, f] \models P_6(x_2)$$

per qualche  $R_{\mathfrak{M}_2}$ -funzione  $f$  da  $X$  a  $M_2$  che sia  $\{x_1\}$ -uniforme. Si ricordi che la funzione  $f$  deve avere dominio  $X$  e codominio  $M_2$ . Non esiste una funzione che soddisfi tutte queste condizioni. L'impossibilità di distinguere il valore per l'argomento  $\{\langle x_0, w_1 \rangle, \langle x_1, w_2 \rangle\}$  dal valore per l'argomento  $\{\langle x_0, w_1 \rangle, \langle x_1, w_3 \rangle\}$  impedisce la definizione di una funzione che rispetti la relazione  $R$ ; non esiste, infatti, un oggetto al quale sia  $w_2$  che  $w_3$  siano relati.

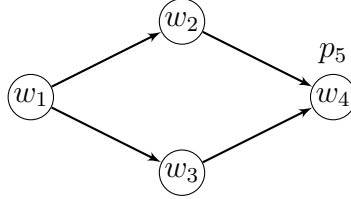
Sia  $\mathfrak{M}_3$  la struttura relazionale

$$(M_3, (P_l^{\mathfrak{M}_3})_l, R^{\mathfrak{M}_3})$$

con

$$\begin{aligned} M_3 &= \{w_1, w_2, w_3, w_4\}; \\ R^{\mathfrak{M}_3} &= \{\langle w_1, w_2 \rangle, \langle w_1, w_3 \rangle, \langle w_2, w_4 \rangle, \langle w_3, w_4 \rangle\}; \\ P_5^{\mathfrak{M}_3} &= \{w_4\}. \end{aligned}$$

La struttura  $\mathfrak{M}_3$  è rappresentata dal diagramma che segue:



Valutiamo su  $\mathfrak{M}_3$  la formula

$$\forall x_1[\neg R(x_0, x_1) \vee [(\exists x_2/\{x_1\})[R(x_1, x_2) \wedge P_5(x_2)]]].$$

Sia  $X = \{\{\langle x_0, w_1 \rangle\}\}$ , verifichiamo che

$$\mathfrak{M}_3, X \models \forall x_1[\neg R(x_0, x_1) \vee [(\exists x_2/\{x_1\})[R(x_1, x_2) \wedge P_5(x_2)]]].$$

Questo è vero se

$$\mathfrak{M}_3, X[x_1, M_3]_{R^{\mathfrak{M}_3}} \models (\exists x_2/\{x_1\})[R(x_1, x_2) \wedge P_5(x_2)].$$



La squadra  $X[x_1, M_3]_{R^{m_3}}$  è uguale all'insieme

$$X' = \{\{\langle x_0, w_1 \rangle, \langle x_1, w_2 \rangle\}, \{\langle x_0, w_1 \rangle, \langle x_1, w_3 \rangle\}\}.$$

Bisogna verificare che

$$\mathfrak{M}_3, X'[x_2, f] \models P_5(x_2)$$

per qualche  $R^{m_3}$ -funzione da  $X$  a  $M_3$  che sia  $\{x_1\}$ -uniforme. Questo è vero se la funzione  $f$  è definita così:

$$\begin{cases} f(\{\langle x_0, w_1 \rangle, \langle x_1, w_2 \rangle\}) = w_4 \\ f(\{\langle x_0, w_1 \rangle, \langle x_1, w_3 \rangle\}) = w_4. \end{cases}$$

La funzione rispetta  $R$  ed è  $\{x_1\}$ -uniforme, nella squadra  $X'[x_2, f]$ , infine, ogni assegnamento associa  $x_2$  a  $w_4$  e  $P_5^{m_3} = \{w_4\}$ .

La formula

$$\forall x_1 [\neg R(x_0, x_1) \vee [(\exists x_2 / \{x_1\}) [R(x_1, x_2) \wedge P_5(x_2)]]]$$

può essere soddisfatta in  $\mathfrak{M}_3$  anche con la squadra di assegnamenti iniziale  $X = \{\{\langle x_0, w_4 \rangle\}\}$ . Questo si verifica perché  $X[x_1, M_3]_{R^{m_3}}$  è uguale a  $\emptyset$ , dato che  $w_4$  non è relato a nessun oggetto tramite  $R$ . La squadra vuota, come si è spiegato, soddisfa qualsiasi formula.

# Capitolo 3

## Sintassi e semantica di IFML

La logica IFML che discutiamo in questo e nel prossimo capitolo sono direttamente prese dall'articolo *Decidability of independence-friendly modal logic* di Sevenster<sup>1</sup>. Allo stesso tempo il linguaggio e la semantica di IFML sono una generalizzazione del linguaggio e della semantica IFMLm presentata nel capitolo precedente.

### 3.1 La sintassi IFML

In questa parte del testo si darà la sintassi di una logica modale independence-friendly. Intuitivamente queste logiche rappresentano un'estensione della logica proposizionale tramite l'aggiunta di connettivi unari modali ( $\langle k \rangle$  e  $[k]$  in cui  $k$  è una modalità) e dell'apparato che indica i rapporti di indipendenza nelle logiche *independence friendly*. Per introdurre questo apparato è necessario passare attraverso la *traduzione standard* del linguaggio modale.

#### 3.1.1 La sintassi ML

**Definizione 3.1** *Siano  $p_0, p_1 \dots$  variabili proposizionali e  $i_0, i_1 \dots$  indici per modalità. Sia  $K = \{k_0, k_1 \dots\}$  un insieme di modalità. Tutte le **fbf di ML**, allora, sono generate dalla seguente grammatica in forma Backus-Naur:*

$$\phi ::= p \mid \neg p \mid \phi \wedge \phi \mid \phi \vee \phi \mid \bigwedge_{i \in I} \phi \mid \bigvee_{i \in I} \phi$$

---

<sup>1</sup>[Sevenster 2010].

$$[k]\phi \mid \langle k \rangle \phi \mid [i]\phi \mid \langle i \rangle \phi,$$

dove  $p$  è una variabile proposizionale;  $i$  è un indice per modalità;  $y, y_1 \dots y_n$  sono variabili individuali;  $k \in K$ ;  $I$  è un sottoinsieme finito di  $K$ .

Questa grammatica rappresenta una comune sintassi per le logiche modali proposizionali. Presenze insolite sono i simboli  $\bigvee_{i \in I}$  e  $\bigwedge_{i \in I}$  e le variabili per modalità. L'uso di questi, però, rispecchia completamente possibilità proprie anche di logiche che non li contemplano. L'utilità particolare di questo apparato emergerà più avanti, per ora ci si accontenti di comprenderne il normale uso sintattico.

Presentiamo qualche esempio affinché risulti completamente chiara la grammatica. Queste sono alcune formule ML producibili:

$$\begin{aligned} &\langle k_1 \rangle (( [k_1] p_1) \wedge \neg p_2) \vee [k_1] p_3, \\ &(\langle k_2 \rangle \neg p_1) \vee ([k_2] \langle k_2 \rangle p_1), \\ &[k_1] [k_2] p_1 \wedge \langle k_2 \rangle \langle k_1 \rangle p_2 \end{aligned}$$

e

$$(\langle k_3 \rangle \langle k_3 \rangle \neg p_4) \vee ([k_3] p_4).$$

Si può dimostrare che non riduce in alcun modo l'espressività del linguaggio la limitazione ai soli atomi della negazione.

Per quanto riguarda le modalità con indici, ovvero  $[i]$  e  $\langle i \rangle$ , si suppone che siano sempre nell'ambito di una congiunzione  $\bigwedge_{i \in I}$  o disgiunzione  $\bigvee_{i \in I}$ . Questa limitazione compare anche in [Sevenster 2010] dove si trova scritto:

Throughout this paper we shall assume that every index  $i$  in  $\langle i \rangle \phi$  and  $[i]\phi$  is bound by a disjunctive or conjunctive quantifier. We are confident that all results reported in the paper can be generalized to the language that is not restricted in this manner.<sup>2</sup>

Formule che contengano questi simboli sono, ad esempio,

$$[\bigvee_{i \in \{k_1, k_2, k_3\}} (( \langle i \rangle p_1) \wedge ([k_4] p_1))], \quad (3.1)$$

---

<sup>2</sup>[Sevenster 2010], p. 417.

$$[ \bigwedge_{i \in \{k_1, k_2\}} [ ( [i] \neg p_1 ) \vee ( [k_2] p_1 ) ] ] \quad (3.2)$$

oppure

$$[ \bigwedge_{i \in \{k_1, k_2, \}} [ [i] ( \bigvee_{i' \in \{k_3, k_4, \}} \langle i' \rangle p_2 ) ] ] . \quad (3.3)$$

### 3.1.2 Modalità

Il linguaggio relativo alla sintassi appena descritta usa, come già indicato, sia variabili modali che connettivi modali. Le variabili si suppongono, come si vede dalla grammatica, sempre vincolate a una quantificazione congiuntiva  $\bigwedge_{i \in I}$  o disgiuntiva  $\bigvee_{i \in I}$  su un insieme finito di modalità.

L'uso di tali variabili non influisce sull'espressività del linguaggio; un linguaggio simile che faccia uso di sole costanti modali è ugualmente espressivo. Ogni formula che contenga una quantificazione su modalità, infatti, può essere facilmente riscritta senza di esse e senza che muti il suo significato. Ad esempio è intuitivamente evidente, se  $k_1, \dots, k_n$  sono modalità, che

$$\bigvee_{i \in \{k_1, \dots, k_n\}} \langle i \rangle \phi \text{ è equivalente a } \langle k_1 \rangle \phi \vee \dots \vee \langle k_n \rangle \phi .$$

Le formule mostrate nel paragrafo precedente, ad esempio, possono essere riscritte senza l'uso di  $\bigwedge_{i \in I}$  o  $\bigvee_{i \in I}$  esplicitando la congiunzione o la disgiunzione per tutti gli elementi degli insiemi di modalità:

(3.1) può essere riscritta come

$$[[ ( \langle k_1 \rangle p_1 ) \wedge ( [k_4] p_1 ) ] \vee [ \langle k_2 \rangle ( p_1 ) \wedge ( [k_4] p_1 ) ] \vee [ ( \langle k_3 \rangle p_1 \wedge ( [k_4] p_1 ) ) ] ] ,$$

(3.2) come

$$[[ ( [k_1] \neg p_1 ) \vee ( [k_2] p_1 ) ] \wedge [ ( [k_2] \neg p_1 ) \vee ( [k_2] p_1 ) ] ]$$

e (3.3) come

$$[ [k_1] [ ( \langle k_3 \rangle p_1 ) \vee ( \langle k_4 \rangle p_1 ) ] \wedge [k_2] [ ( \langle k_3 \rangle p_1 ) \vee ( \langle k_4 \rangle p_1 ) ] ] .$$

Mostreremo lo schema di equivalenza completo dei quantificatori per modalità nella prima sezione del capitolo dedicato alle proprietà di IFML. È importante osservare che gli insiemi di modalità su cui si può quantificare sono necessariamente insiemi finiti ed esplicitamente dichiarati nella formula; a questo particolare si deve la non problematicità, nonché la possibilità stessa, della riscrittura.

### 3.1.3 La traduzione da ML alla logica del primo ordine

Si stabilirà una traduzione da ML a un linguaggio del primo ordine per permettere l'applicazione del dispositivo delle indipendenze e in seguito permettere la definizione una semantica composizionale per IFML.

**Definizione 3.2** *Consideriamo un linguaggio del primo ordine con simboli di relazione binaria  $R_0, R_1, R_2, \dots$ ; simboli predicativi unari  $P_0, P_1, P_2, \dots$ ; variabili individuali  $x_0, x_1, x_2, \dots$ ; indici  $i_0, i_1, i_2, \dots$ . Siano  $p_0, p_1, p_2, \dots$  le variabili proposizionali di ML. Data la variabile  $x_n$ ,  $ST_{x_n}$  è una traduzione dalle fbf di ML alle fbf di questo linguaggio del primo ordine:*

$$ST_{x_n}(P_l) = P_l(x_n)$$

$$ST_{x_n}(\neg p_l) = \neg P_l(x_n)$$

$$ST_{x_n}(\psi \vee \psi') = ST_{x_n}(\psi) \vee ST_{x_n}(\psi')$$

$$ST_{x_n}(\psi \wedge \psi') = ST_{x_n}(\psi) \wedge ST_{x_n}(\psi')$$

$$ST_{x_n}\left(\bigvee_{i \in I} \psi\right) = \bigvee_{i \in I} ST_{x_n}(\psi)$$

$$ST_{x_n}\left(\bigwedge_{i \in I} \psi\right) = \bigwedge_{i \in I} ST_{x_n}(\psi)$$

$$ST_{x_n}(\langle k_m \rangle \psi) = \exists x_{n+1}(R_m(x_n, x_{n+1}) \wedge ST_{x_{n+1}}(\psi))$$

$$ST_{x_n}([k_m] \psi) = \forall x_{n+1}(\neg R_m(x_n, x_{n+1}) \vee ST_{x_{n+1}}(\psi))$$

$$ST_{x_n}(\langle i \rangle \psi) = \exists x_{n+1}(R_i(x_n, x_{n+1}) \wedge ST_{x_{n+1}}(\psi))$$

$$ST_{x_n}([i] \psi) = \forall x_{n+1}(\neg R_i(x_n, x_{n+1}) \vee ST_{x_{n+1}}(\psi))$$

Il simbolo  $R_i$  nella definizione sopra non indica una relazione ma una funzione che mappa le modalità, riportate dal quantificatore che vincola  $i$ , nelle relazioni a esse relative; quindi  $R_i(k_h) = R_h$ .

### 3.1.4 Sottoformule nella traduzione di ML

Anche per la traduzione di ML valgono le considerazioni espote per la traduzione di MLm. Le sottoformule delle formule tradotte devono essere definite tenendo conto delle formule modali d'origine. Le sottoformule relative ai quantificatori devono essere considerate blocchi indivisibili contenenti l'atomo della relazione e il connettivo che lo segue, come nel caso di IFMLm.

**Definizione 3.3** *Siano  $\phi$  e  $\phi'$  fbf di IFML. La funzione  $subf$  è definita così:*

$$subf(P(x)) = \{P(x)\}$$

$$subf(\neg\phi) = \{\neg\phi\} \cup subf(\phi)$$

$$subf(\phi \wedge \phi') = \{\phi \wedge \phi'\} \cup subf(\phi)$$

$$subf(\phi \vee \phi') = \{\phi \vee \phi'\} \cup subf(\phi)$$

$$subf(\bigwedge_{i \in I} \phi) = \{\bigwedge_{i \in I} \phi\} \cup subf(\phi)$$

$$subf(\bigvee_{i \in I} \phi) = \{\bigvee_{i \in I} \phi\} \cup subf(\phi)$$

$$subf(\exists y(R_m(x, y) \wedge \phi)) = \{\exists y(R_m(x, y) \wedge \phi)\} \cup subf(\phi)$$

$$subf(\forall y(\neg R_m(x, y) \vee \phi)) = \{\forall y(\neg R_m(x, y) \vee \phi)\} \cup subf(\phi)$$

$$subf(\exists y(R_i(x, y) \wedge \phi)) = \{\exists y(R_i(x, y) \wedge \phi)\} \cup subf(\phi)$$

$$subf(\forall y(\neg R_i(x, y) \vee \phi)) = \{\forall y(\neg R_i(x, y) \vee \phi)\} \cup subf(\phi)$$

con  $P$  predicato e  $x$  e  $y$  variabili.

Usando questa definizione di *subf*, i diversi casi di apparizione dei connettivi  $\vee$  e  $\wedge$  sono correttamente distinti tramite le relazioni binarie  $R_i$  e  $R_m$ .

### 3.1.5 Gestione delle dipendenze in IFML

Per generare le formule IFML bisogna introdurre un dispositivo per indicare le dipendenze dei connettivi e dei quantificatori. Le logiche *independence friendly*<sup>3</sup> infatti estendono i linguaggi predicativi del primo ordine<sup>3</sup>, o proposizionali modali<sup>4</sup>, tramite un mezzo formale per indicare le dipendenze di quantificatori e connettivi. Questo compito lo svolge il simbolo ‘ $/W$ ’, dove  $W$  è un insieme di variabili; questo deve essere applicato a ogni connettivo e quantificatore.

Con l’espressione ‘operatore logico di base’ si intende uno dei simboli

$$\vee, \wedge$$

qualora connettano due sottoformule; oppure uno dei simboli

$$\bigvee_{i \in I}, \bigwedge_{i \in I}, \exists x, \forall x$$

in cui  $i$  è un indice,  $I$  un insieme di modalità e  $x$  una variabile individuale. Se  $O$  è un operatore logico di base e  $W$  è un insieme contenente variabili individuali, allora  $(O/W)$  è un operatore logico. Parlando di quantificatori si intenderanno, d’ora in poi, i simboli  $\bigvee_{i \in I}, \bigwedge_{i \in I}, \exists x$  e  $\forall x$ .

**Definizione 3.4** *Se  $\phi$  è una formula ML tradotta tramite la traduzione standard, allora per ottenere una **formula IFML** si seguano le seguenti indicazioni:*

1. Sostituire ogni operatore logico  $O$  in  $\phi$  con  $(O/\emptyset)$ .
2. Se  $(O/W)$  è nell’ambito di  $(\bigvee_{i \in I}/V)$ , è possibile aggiungere  $i$  a  $W$ .
3. Se  $(O/W)$  è nell’ambito di  $(\bigwedge_{i \in I}/V)$ , è possibile aggiungere  $i$  a  $W$ .
4. Se  $(O/W)$  è nell’ambito di  $(\exists x/V)$ , è possibile aggiungere  $x$  a  $W$ .

<sup>3</sup>[Mann/Sandu/Sevenster 2011].

<sup>4</sup>[Sevenster 2010] e [Tulenheimo/Sevenster 2006].

5. Se  $(O/W)$  è nell'ambito di  $(\forall x/V)$ , è possibile aggiungere  $x$  a  $W$ .

Sia  $IFML'$  la collezione di tutte le formule ottenute applicando a ogni formula  $ML$  tradotta tramite traduzione standard l'operazione indicata in 1. La collezione di tutte le formule  $IFML$  si ottiene applicando a ogni formula di  $IFML'$  ogni possibile combinazione di operazioni concessa da 2, 3, 4 e 5.

Parafrasando la definizione 3.4, ogni formula  $ML$  cui sia stata applicata l'azione 1, ovvero la sostituzione di ogni operatore  $O$  con  $O/\emptyset$ , è una formula  $IFML$ ; in questo modo si sono formate tutte le formule  $IFML$  che abbiano solo insiemi di dipendenze vuoti. Aggiungendo un elemento a un insieme di dipendenze di un qualsiasi operatore si ottiene una formula  $IFML$  se l'elemento aggiunto è quantificato da un quantificatore nel cui ambito si trovi l'operatore. Si noti che dalle formule in  $IFML'$  che abbiano almeno un operatore nell'ambito di un quantificatore si può ottenere più di una formula appartenente a  $IFML$ . In particolare da ogni formula in  $IFML'$  si possono ricavare  $2^{q(o_1)} \times \dots \times 2^{q(o_n)}$  formule, dove  $o_1, \dots, o_n$  è un'enumerazione di tutti gli operatori logici della formula e la funzione  $q : \{o_1, \dots, o_n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  mappa ogni operatore  $o_m$  nel numero di quantificatori che hanno  $o_m$  nel proprio ambito; in questo conto è compresa anche la formula originale, ottenuta lasciando vuoto ogni insieme di dipendenze.

Alcuni esempi di formule  $IFML$  sono i seguenti:

$$\begin{aligned} & [(\forall x_1/\emptyset)[\neg R_1(x_0, x_1) \vee [(\exists x_2/\emptyset)(R_2(x_1, x_2) \wedge P_1(x_2))]]], \\ & [(\forall x_1/\emptyset)[\neg R_1(x_0, x_1) \vee [(\exists x_2/\{x_1\})(R_2(x_1, x_2) \wedge P_1(x_2))]]], \\ & [(\exists x_1/\emptyset)[R_2(x_0, x_1) \wedge P_1(x_1)](\wedge/\emptyset)[(\exists x_1/\emptyset)[R_2(x_0, x_2) \wedge \neg P_1(x_2)](\wedge/\emptyset) \\ & \quad [(\forall/\emptyset)[\neg R_2(x_0, x_3) \vee ((\exists x_4/\{x_3\})(R_2(x_3, x_4) \wedge (P_5(x_2) \vee \neg P_5(x_2))))]]], \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & [ \bigwedge_{i \in \{k_1, k_2, \}} [(\forall x_1/\emptyset)[\neg R_i(x_0, x_1) \vee \\ & \quad [ \bigvee_{i' \in \{k_3, k_4, \}} (\exists x_2/\{i\})(R_{i'}(x_1, x_2) \wedge P_2(x_2))]]] ]. \end{aligned}$$

Si noti, in questi esempi, il criterio secondo il quale si possono inserire variabili e indici negli insiemi; non è interessante, per ora, il significato delle formule.

Laddove un insieme di dipendenze sia uguale all'insieme vuoto si ammetterà la scrittura che omette l'indicazione del dispositivo  $'/W'$ . Si verificherà più avanti che molte formule  $ML$  sono equivalenti a formule  $IFML$  in cui tutti gli insiemi di dipendenze sono vuoti, adottando la norma di redazione appena proposta queste coppie di formule presentano anche identità di scrittura.



## 3.2 La semantica composizionale di IFML

### 3.2.1 Le strutture, le loro parti e gli assegnamenti

La validità di una formula IFML si valuta rispetto a una struttura relazionale.

Le strutture  $\mathfrak{M}$  che si useranno per IFML sono così composte:  $\mathfrak{M} = (M, (P_l^{\mathfrak{M}})_l, (R_m^{\mathfrak{M}})_m)$ . L'insieme  $M$  è il dominio della struttura; le relazioni binarie  $R_m^{\mathfrak{M}}$  sono sottoinsiemi  $S_m$  di  $M \times M$ . I  $P_l^{\mathfrak{M}}$  sono sottoinsiemi di  $M$ . Diciamo che  $\mathfrak{M}$  interpreta i simboli  $(P_l)_l$  e  $(R_m)_m$ .

Se si intende  $\mathfrak{M}$  come una struttura di mondi, simile a quelle utilizzate da Tarski o da Lewis<sup>5</sup> per la semantica delle logiche modali, le  $R_m^{\mathfrak{M}}$  rappresentano relazioni di accessibilità tra mondi. La traduzione nel linguaggio IF e l'organizzazione della struttura riflettono proprio questa caratterizzazione come anche la semantica che verrà definita ora.

Come già notato in occasione della definizione della traduzione, i simboli  $R_i$  non rappresentano relazioni, ma funzioni che mappano le modalità nelle loro relazioni corrispondenti:  $R_i(k_h) = R_h$ . Conformemente a questo i simboli  $R_i^{\mathfrak{M}}$  mappano le modalità nelle relative relazioni su  $\mathfrak{M}$ :  $R_i^{\mathfrak{M}}(k_h) = R_h^{\mathfrak{M}}$ .

Un assegnamento  $s$  è una funzione totale da un insieme  $V$  di variabili e indici a un insieme  $B$  di oggetti e un insieme  $K$  di modalità. Per ogni indice  $i \in V$ ,  $s(i)$  è una modalità in  $K$ ; per ogni variabile  $x \in V$ ,  $s(x)$  è un oggetto in  $B$ . Se  $X$  è un insieme di assegnamenti tale che tutti gli assegnamenti  $s \in X$  hanno il medesimo dominio, allora  $X$  è una squadra di assegnamenti. Il dominio di  $X$ ,  $dom(X)$ , è definito come  $dom(s)$  per ogni  $s \in X$ . Per ogni assegnamento usato nella definizione della semantica, l'insieme di oggetti  $B$ , menzionato qui sopra, sarà l'insieme dominio della struttura; quindi  $B = M$ .

Se  $v$  è una variabile o un indice e  $b$  un oggetto o una modalità, indichiamo con  $s(v/b)$  l'assegnamento  $s'$  tale che  $s'(v) = b$  e  $s'(u) = s(u)$  per ogni  $u \neq v$ . La scrittura  $X[v, B]$  rappresenterà, quindi, la squadra di assegnamenti  $\{s(v/b) : s \in X, b \in B\}$ .  $X[v, f]$ , invece, indica la squadra di assegnamenti  $\{s(v/f(s)) : s \in X\}$ . Come per IFMLm gli ampliamenti delle squadre di assegnamenti richiesti per valutare una formula tramite le su sottoformule avvengono inserendo nella squadra un insieme di assegnamenti nuovi per ogni oggetto di un insieme, come per  $X[v, B]$ , o tramite funzione, come nel caso di  $X[v, f]$ . Nel primo caso a ogni assegnamento presente nella squadra si sostituisce un insieme di assegnamenti che concordino con quello eliminato

---

<sup>5</sup>[Lewis 1983] e [Lewis 1986].

su tutto e che assegnino alla nuova variabile un elemento di  $B$  diverso per ognuno; nel secondo caso ogni assegnamento della squadra è rimpiazzato da un solo assegnamento che concorda con esso e che assegna la nuova variabile del suo dominio all'oggetto, o alla modalità, indicata dall'applicazione della funzione  $f$  al vecchio assegnamento.

Siano  $s$  e  $t$  due assegnamenti tali che  $dom(s) = dom(t)$  e sia  $W$  un sottoinsieme di  $dom(s)$ , allora  $s \approx_W t$  se  $s(v) = t(v)$  per ogni indice e variabile  $v$  in  $dom(s) - W$ . Sia  $X$  una squadra di assegnamenti, sia  $C$  un insieme qualsiasi e sia  $W \subseteq dom(X)$ ; una funzione  $f : X \rightarrow C$  è  $W$ -uniforme se per ogni  $s, t \in X$  se  $s \approx_W t$  allora  $f(s) = f(t)$ . Si dice che  $f$  è  $W$ -massimale se per ogni  $s, t \in X$ ,  $s \approx_W t$  se e solo se  $f(s) = f(t)$ . Il concetto di  $W$ -uniformità, per qualche insieme  $W$ , equivale in tutto a quello espresso per IFMLm ad eccezione del fatto che coinvolge anche i valori che l'assegnamento attribuisce agli indici. L'idea di  $W$ -massimalità per un insieme  $W$ , invece, è introdotta solo per IFML perché serve per un teorema riguardante la decidibilità di questa logica, la dimostrazione del quale non sarà proposta per IFMLm. Questo concetto comprende le funzioni che, rispetto a quelle  $W$ -uniformi, non si limitano ad attribuire lo stesso valore a tutti gli assegnamenti che concordano su tutto tranne che sugli elementi di  $W$ , ma assegnano quel valore comune solamente agli assegnamenti che concordano su tutto tranne che sugli elementi di  $W$ . In altre parole una funzione  $W$ -massimale attribuisce lo stesso valore a due assegnamenti solamente se differiscono solo rispetto a indici e variabili contenute in  $W$ .

Sia  $X$  è una squadra di assegnamenti, siano le variabili in  $dom(X)$  enumerate da  $x_0, \dots, x_n$  e sia  $i \in dom(X)$  un indice. Sia  $f : X \rightarrow B$ , con  $B$  insieme qualsiasi. Sia  $S$  una relazione binaria su un insieme di cui  $B$  è sottoinsieme; allora  $f$  è una  $S$ -funzione se per ogni  $s \in X$ ,  $(s(x_n), f(s)) \in S$ . Se, invece,  $S_i$  è una funzione che mappa alcune modalità  $k \in K$ , con  $K$  insieme qualsiasi, in relazioni binarie  $S_i(k)$  su un insieme di cui  $B$  è sottoinsieme; allora  $f$  è una  $S_i$ -funzione se per ogni  $s \in X$ ,  $(s(x_n), f(s)) \in S_i(s(i))$ . Per dare un'intuizione di queste proprietà si può dire che una  $S$ -funzione adeguata applicata a un assegnamento  $s$  ha come valore il successore rispetto a  $S$  del valore che assume  $s$  applicata all'ultimo elemento, rispetto a  $S$ , del proprio dominio. Una  $S_i$ -funzione ha la medesima caratteristica, ma asseconda la relazione in cui  $S_i$  mappa la modalità che  $s$  assegna a  $i$ .

Con la scrittura  $X[x, B]_S$  si indicherà l'insieme

$$\{s \in X[x_{n+1}, B] : (s(x_n), s(x_{n+1})) \in S\},$$

con  $X[x, B]_{S_i}$  l'insieme

$$\{s \in X[x_{n+1}, B] : (s(x_n), s(x_{n+1})) \in S_i(s(i))\}.$$

Anche in questo caso si sta esprimendo il fatto che le squadre di assegnamenti vengono modificate assecondando le relazioni indicate.

### 3.2.2 Sottoformule

La definizione della funzione *subf*, che genera l'insieme delle sottoformule del suo argomento, per la traduzione di IFML deve assecondare il comportamento degli operatori modali rispetto alle sottoformule. Dato che nel passaggio da IFML alla sua traduzione tali operatori vengono sostituiti da quantificatori è necessario adeguare la definizione di *subf* per questi casi, come avviene per IFML<sup>6</sup>.

**Definizione 3.5** *Una sottoformula IFML è un qualsiasi elemento dell'insieme  $subf(\phi)$  per una qualche fbf  $\phi$  IFML.*

**Definizione 3.6** *Siano  $\phi$  e  $\phi'$  fbf o sottoformule IFML. La funzione *subf* è*

---

<sup>6</sup>[Sevenster 2010], p. 418.

definita così:

$$subf(P(x)) = \{P(x)\}$$

$$subf(\neg\phi) = \{\neg\phi\} \cup subf(\phi)$$

$$subf(\phi(\wedge/W)\phi') = \{\phi(\wedge/W)\phi'\} \cup subf(\phi)$$

$$subf(\phi(\vee/W)\phi') = \{\phi(\vee/W)\phi'\} \cup subf(\phi)$$

$$subf(\bigwedge_{i \in I} \phi) = \{\bigwedge_{i \in I} \phi\} \cup subf(\phi)$$

$$subf(\bigvee_{i \in I} \phi) = \{\bigvee_{i \in I} \phi\} \cup subf(\phi)$$

$$subf((\exists y/W)(R_m(x, y)) \wedge \phi) = \{(\exists y/W)(R_m(x, y)) \wedge \phi\} \cup subf(\phi)$$

$$subf((\forall y/W)(\neg R_m(x, y)) \vee \phi) = \{(\forall y/W)(\neg R_m(x, y)) \vee \phi\} \cup subf(\phi)$$

$$subf((\exists y/W)(R_i(x, y)) \wedge \phi) = \{(\exists y/W)(R_i(x, y)) \wedge \phi\} \cup subf(\phi)$$

$$subf((\forall y/W)(\neg R_i(x, y)) \vee \phi) = \{(\forall y/W)(\neg R_i(x, y)) \vee \phi\} \cup subf(\phi)$$

con  $x, y$  variabili,  $W$  insieme di variabili e indici e  $P$  predicato.

Usando questa definizione di *subf*, i diversi casi di apparizione di un quantificatore per variabili ( $\exists$  e  $\forall$ ) sono correttamente distinti tramite le relazioni binarie  $R_i$  e  $R_m$ . Come in IFMLm la suddivisione delle formule ben formate in sottoformule rispecchia il ruolo di *guardia* che alcune relazioni svolgono nelle formule IFML.

### 3.2.3 Semantica dei trionfi

**Definizione 3.7** Sia  $\phi$  una formula IFML; siano  $\psi$  e  $\psi'$  due occorrenze di sottoformule di  $\phi$  con variabile libera  $x_n$ . Sia  $\mathfrak{M}$  una struttura e  $X$  una

squadra di assegnamenti per  $\mathfrak{M}$  tale che tutte le variabili nel dominio di  $X$  siano enumerate in  $x_0, \dots, x_n$ ; per ogni funzione  $g$  e argomento  $z$  sia  $g^{-1}(z)$  la controimmagine di  $\{z\}$ , allora

$$\mathfrak{M}, X \models P_l(x_n) \text{ sse } s(x_n) \text{ è in } P_l^{\mathfrak{M}} \text{ per ogni } s \in X$$

$$\mathfrak{M}, X \models \neg P_l(x_n) \text{ sse } s(x_n) \text{ non è in } P_l^{\mathfrak{M}} \text{ per ogni } s \in X$$

$$\mathfrak{M}, X \models \psi(\vee/W)\psi' \text{ sse } \mathfrak{M}, f^{-1}(1) \models \psi \text{ e } \mathfrak{M}, f^{-1}(2) \models \psi' \text{ per qualche } f : X \rightarrow \{1, 2\} \text{ che sia } W\text{-uniforme}$$

$$\mathfrak{M}, X \models \psi(\wedge/W)\psi' \text{ sse } \mathfrak{M}, X \models \psi \text{ e } \mathfrak{M}, X \models \psi'$$

$$\mathfrak{M}, X \models (\bigvee_{i \in I}/W)\psi \text{ sse } \mathfrak{M}, X[i, f] \models \psi \text{ per qualche } f : X \rightarrow I \text{ che sia } W\text{-uniforme}$$

$$\mathfrak{M}, X \models (\bigwedge_{i \in I}/W)\psi \text{ sse } \mathfrak{M}, X[i, I] \models \psi$$

$$\mathfrak{M}, X \models (\exists x_{n+1}/W)(R_m(x_n, x_{n+1}) \wedge \theta) \text{ sse } \mathfrak{M}, X[x_{n+1}, f] \models \theta \text{ per qualche } R_m^{\mathfrak{M}}\text{-funzione } f : X \rightarrow M \text{ che sia } W\text{-uniforme}$$

$$\mathfrak{M}, X \models (\exists x_{n+1}/W)(R_i(x_n, x_{n+1}) \wedge \theta) \text{ sse } \mathfrak{M}, X[x_{n+1}, f] \models \theta \text{ per qualche } R_i^{\mathfrak{M}}\text{-funzione } f : X \rightarrow M \text{ che sia } W\text{-uniforme}$$

$$\mathfrak{M}, X \models (\forall x_{n+1}/W)(\neg R_m(x_n, x_{n+1}) \vee \theta) \text{ sse } \mathfrak{M}, X[x_{n+1}, M]_{R_m^{\mathfrak{M}}} \models \theta$$

$$\mathfrak{M}, X \models (\forall x_{n+1}/W)(\neg R_i(x_n, x_{n+1}) \vee \theta) \text{ sse } \mathfrak{M}, X[x_{n+1}, M]_{R_i^{\mathfrak{M}}} \models \theta$$

Seguendo il funzionamento di queste definizioni si può notare che il sistema di notazione delle dipendenze è superfluo in alcuni casi. Per il quantificatore universale, per il quantificatore congiuntivo e per la congiunzione non comporta nessuna differenza variare o eliminare gli elementi di  $W$ ; d'ora in poi,

quindi, eviteremo di scrivere ‘ $/W$ ’ in questi casi data l’inutilità del simbolo. Come si è già detto per gli insiemi di dipendenze che siano vuoti, se  $\phi$  è una formula IFML, o tradotta da IFML, e  $\phi'$  è il risultato dell’omissione dell’indicazione degli insiemi di dipendenze in  $\phi$  che non influiscano sul valore di questa, allora  $\phi'$  è detta abbreviazione di  $\phi$ .

Come mostrato nel teorema 1.2, per il caso della congiunzione è indispensabile alla definizione che la squadra di assegnamenti vuota soddisfi qualsiasi formula. È sufficiente, infatti, che solo uno dei due disgiunti sia soddisfacibile; la funzione  $f$ , in questo caso, non mapperebbe in 1 nessun argomento e mapperebbe in 2 tutto  $X$ , o viceversa.

### 3.2.4 Esempi di valutazione

Come abbiamo fatto per IFMLm nel capitolo precedente, presentiamo anche per la semantica di IFML qualche esempio di proposizione e valutazione della sua soddisfacibilità. Le principali differenze che si possono riscontrare riguardano il numero di relazioni delle strutture, che è connesso al numero di modalità distinte nelle formule, e la presenza dei quantificatori per modalità  $\bigvee_{i \in I}$  e  $\bigwedge_{i \in I}$ . Si cercherà, nei seguenti esempi, di mostrare alcuni casi che mostrino queste differenze e di evitare formule equivalenti a formule IFMLm, nonostante queste possano essere generate e valutate anche con IFML.

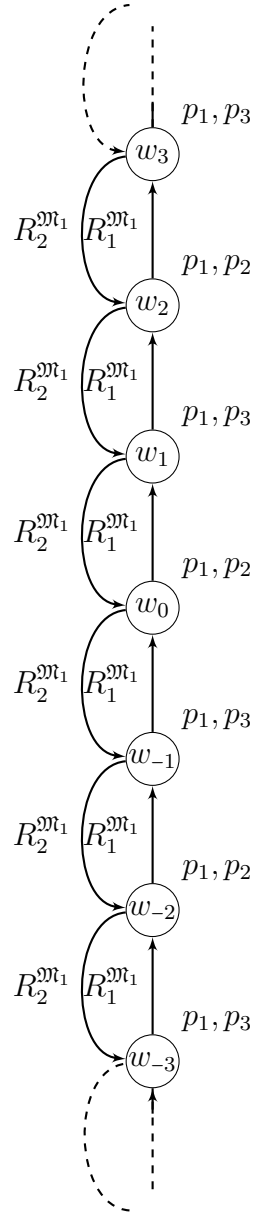
Sia  $\mathfrak{M}_1$  la struttura relazionale

$$(M_1, (P_l^{\mathfrak{M}_1})_l, (R_m^{\mathfrak{M}_1})_m)$$

con

$$\begin{aligned} M_1 &= \{\dots, w_{-3}, w_{-2}, w_{-1}, w_0, w_1, w_2, w_3, \dots\}; \\ R_1^{\mathfrak{M}_1} &= \{\langle w_{-3}, w_{-2} \rangle, \langle w_{-2}, w_{-1} \rangle, \langle w_{-1}, w_0 \rangle, \langle w_0, w_1 \rangle, \langle w_1, w_2 \rangle, \langle w_2, w_3 \rangle, \dots\}, \\ R_2^{\mathfrak{M}_1} &= \{\langle w_{-2}, w_{-3} \rangle, \langle w_{-1}, w_{-2} \rangle, \langle w_0, w_{-1} \rangle, \langle w_1, w_0 \rangle, \langle w_2, w_1 \rangle, \langle w_3, w_2 \rangle, \dots\}; \\ P_1^{\mathfrak{M}_1} &= \{\dots, w_{-3}, w_{-2}, w_{-1}, w_0, w_1, w_2, w_3, \dots\}, \\ P_2^{\mathfrak{M}_1} &= \{\dots, w_{-4}, w_{-2}, w_0, w_2, w_4, \dots\}, \\ P_3^{\mathfrak{M}_1} &= \{\dots, w_{-5}, w_{-3}, w_{-1}, w_1, w_3, w_5, \dots\}. \end{aligned}$$

Distinguiamo tramite etichette le diverse relazioni presenti tra gli oggetti della struttura e per il resto adottiamo la notazione usata per i diagrammi degli esempi precedenti. La struttura  $\mathfrak{M}_1$  è rappresentata dal seguente diagramma:



Valutiamo la formula  $\phi$  rispetto a questa struttura. Sia

$$\phi = \bigwedge_{i \in \{1,2\}} [(\exists x_1 / \emptyset)(R_i(x_0, x_1) \wedge P_1(x_1))].$$

Verifichiamo la soddisfacibilità di  $\phi$ . Consideriamo la squadra di assegnamenti  $X = \{\{\langle x_0, w_0 \rangle\}\}$ .

$$\mathfrak{M}_1, X \models \bigwedge_{i \in \{1,2\}} [(\exists x_1/\emptyset)(R_i(x_0, x_1) \wedge P_1(x_1))]$$

*sse*

$$\mathfrak{M}_1, X[i, \{1, 2\}] \models (\exists x_1/\emptyset)(R_i(x_0, x_1) \wedge P_1(x_1)).$$

La squadra  $X[i, \{h, k\}]$  è

$$X' = \{\{\langle x_0, w_3 \rangle, \langle i, 1 \rangle\}, \{\langle x_0, w_3 \rangle, \langle i, 2 \rangle\}\}.$$

Secondo la definizione della semantica IFML

$$\mathfrak{M}_1, X' \models (\exists x_1/\emptyset)(R_i(x_0, x_1) \wedge P_1(x_1))$$

*sse*

$$\mathfrak{M}_1, X'[x_1, f] \models P_1(x_1)$$

per una qualche  $R_i^{\mathfrak{M}_1}$ -funzione  $f$  da  $X$  a  $M_1$  che sia  $\emptyset$ -uniforme. La  $\emptyset$ -uniformità non comporta nulla, quindi si può scegliere una qualsiasi  $f$  che rispetti  $R_i^{\mathfrak{M}_1}$ . Si consideri  $f : X' \rightarrow M_1$  tale che

$$f(\{\langle x_0, w_3 \rangle, \langle i, 1 \rangle\}) = w_1$$

$$f(\{\langle x_0, w_3 \rangle, \langle i, 2 \rangle\}) = w_1.$$

Se si prende una  $f$  così definita,  $X'[x_1, f]$  è la squadra

$$X'' = \{\{\langle x_0, w_3 \rangle, \langle i, 1 \rangle, \langle x_1, w_1 \rangle\}, \{\langle x_0, w_3 \rangle, \langle i, 2 \rangle, \langle x_1, w_1 \rangle\}\}.$$

La squadra  $X''$  soddisfa  $P_1(x_1)$  su  $\mathfrak{M}_1$  poiché

$$P_1^{\mathfrak{M}_1} = \{\dots, w_{-3}, w_{-2}, w_{-1}, w_0, w_1, w_2, w_3, \dots\}$$

e i due assegnamenti in  $X''$  associano  $x_1$  a  $w_1$ .

Valutiamo anche la formula  $\phi'$  rispetto alla struttura  $M_1$ . Sia

$$\phi' = \bigvee_{i \in \{1,2\}} [(\exists x_1/\emptyset)(R_i(x_0, x_1) \wedge P_2(x_1))](\vee/\{i\})[P_2(x_0)].$$



Sia  $X$  la squadra di assegnamenti  $\{\{\langle x_0, w_0 \rangle\}\}$ .

$$\mathfrak{M}_1, X \models \bigvee_{i \in \{1,2\}} [[(\exists x_1/\emptyset)(R_i(x_0, x_1) \wedge P_2(x_1))](\vee/\{i\})[P_2(x_0)]]$$

*sse*

$$\mathfrak{M}_1, X[i, \{1, 2\}] \models [(\exists x_1/\emptyset)(R_i(x_0, x_1) \wedge P_2(x_1))](\vee/\{i\})[P_2(x_0)].$$

La squadra  $X[i, \{h, k\}]$  è uguale alla squadra

$$X' = \{\{\langle x_0, w_3 \rangle, \langle i, 1 \rangle\}, \{\langle x_0, w_3 \rangle, \langle i, 2 \rangle\}\}.$$

Di conseguenza vale che

$$\mathfrak{M}_1, X' \models [(\exists x_1/\emptyset)(R_i(x_0, x_1) \wedge P_2(x_1))](\vee/\{i\})[P_2(x_0)]$$

*sse*

$$\mathfrak{M}_1, f^{-1}(1) \models (\exists x_1/\emptyset)(R_i(x_0, x_1) \wedge P_2(x_1)) \text{ e } \mathfrak{M}_1, f^{-1}(2) \models P_2(x_0)$$

per una qualche funzione  $f$   $\{i\}$ -uniforme da  $X'$  a  $\{1, 2\}$ . Si consideri  $f : X' \rightarrow \{1, 2\}$  tale che

$$f(\{\langle x_0, w_0 \rangle, \langle i, 1 \rangle\}) = 2$$

$$f(\{\langle x_0, w_0 \rangle, \langle i, 2 \rangle\}) = 2.$$

La funzione  $f$  ha un solo valore, quindi è necessariamente  $W$ -uniforme per qualsiasi insieme  $W$ . La squadra di assegnamenti vuota soddisfa qualsiasi formula,  $f^{-1}(1) = \emptyset$ , quindi

$$\mathfrak{M}_1, f^{-1}(1) \models (\exists x_1/\emptyset)(R_i(x_0, x_1) \wedge P_2(x_1)).$$

Inoltre da  $f^{-1}(1) = \{\{\langle x_0, w_3 \rangle, \langle i, 1 \rangle\}, \{\langle x_0, w_3 \rangle, \langle i, 2 \rangle\}\}$  segue che la formula  $P_2(x_0)$  è soddisfatta poiché  $P_2^{\mathfrak{M}_1} = \{\dots, w_{-4}, w_{-2}, w_0, w_2, w_4, \dots\}$  e i due assegnamenti in  $X'$  associano  $x_0$  a  $w_0$ .

Sia  $\mathfrak{M}_2$  la struttura relazionale

$$(M_2, (P_l^{\mathfrak{M}_2})_l, (R_m^{\mathfrak{M}_2})_m)$$

con

$$M_2 = \{w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8\};$$

$$R_1^{\mathfrak{M}_2} = \{\langle w_2, w_6 \rangle, \langle w_3, w_7 \rangle\},$$

$$R_2^{\mathfrak{M}_2} = \{\langle w_0, w_1 \rangle, \langle w_0, w_2 \rangle, \langle w_1, w_4 \rangle\},$$

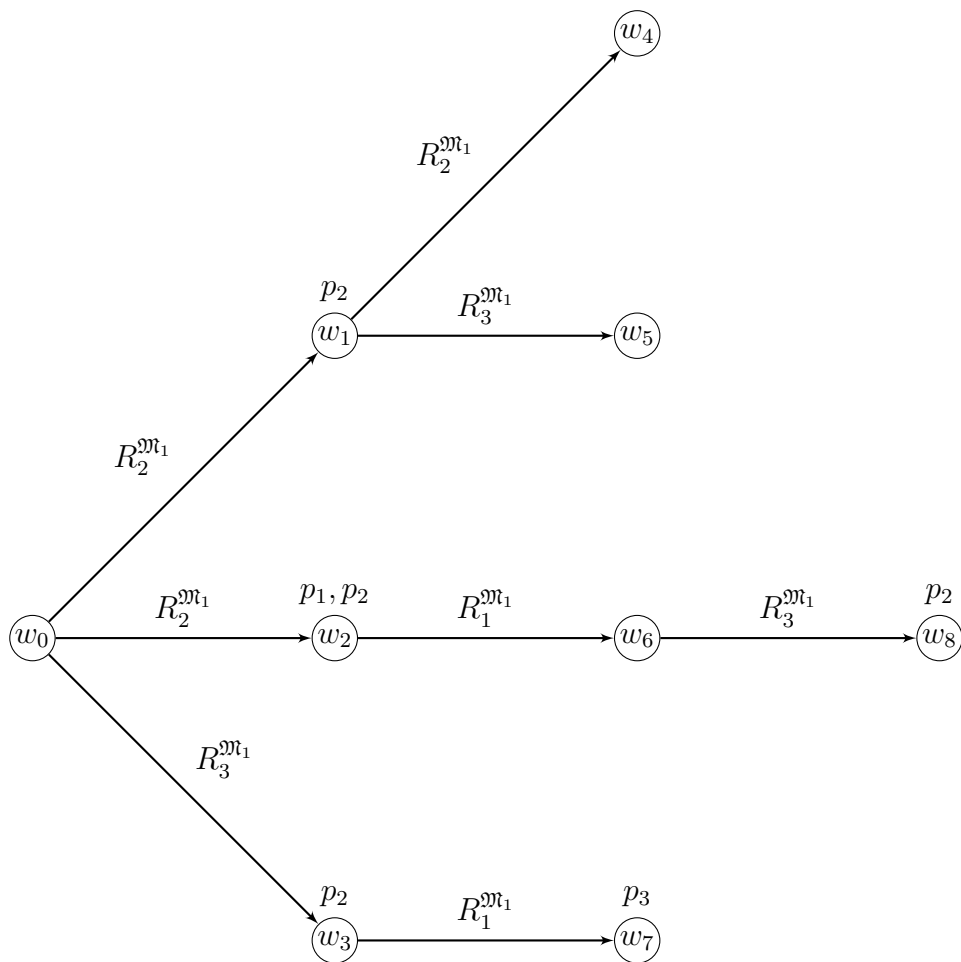
$$R_3^{\mathfrak{M}_2} = \{\langle w_1, w_5 \rangle, \langle w_6, w_8 \rangle, \langle w_0, w_3 \rangle\};$$

$$P_1^{\mathfrak{M}_2} = \{w_2\},$$

$$P_2^{\mathfrak{M}_2} = \{w_1, w_2, w_3\},$$

$$P_3^{\mathfrak{M}_2} = \{w_7, w_8\}.$$

Seguendo le norme per il precedente, il diagramma di  $\mathfrak{M}_2$  è



Verifichiamo la soddisfacibilità su  $\mathfrak{M}_2$  della formula  $\phi$

$$[\forall x_1(\neg R_3(x_0, x_1) \vee \neg P_2(x_1))] \vee \\ [\forall x_1(\neg R_3(x_0, x_1) \vee ((\exists x_2/\{x_1\})(R_1(x_1, x_2) \wedge P_3(x_2))))].$$

Consideriamo la squadra di assegnamenti  $X = \{\{\langle x_0, w_0 \rangle\}\}$ . Vale che

$$\mathfrak{M}_2, X \models \\ [\forall x_1(\neg R_3(x_0, x_1) \vee \neg P_2(x_1))] \vee \\ [\forall x_1(\neg R_3(x_0, x_1) \vee ((\forall x_2/\{x_1\})(\neg R_1(x_1, x_2) \vee P_3(x_2))))]$$

sse

$$\mathfrak{M}_2, f^{-1}(1) \models \\ [\forall x_1(\neg R_3(x_0, x_1) \vee \neg P_2(x_1))]$$

e

$$\mathfrak{M}_2, f^{-1}(2) \models \\ [\forall x_1(\neg R_3(x_0, x_1) \vee ((\exists x_2/\{x_1\})(R_1(x_1, x_2) \wedge P_3(x_2))))]$$

per qualche funzione  $f : X \rightarrow \{1, 2\}$  che sia  $\emptyset$ -uniforme. Sia  $f$  tale che assegna l'unico elemento di  $X$  a 2. La squadra vuota soddisfa qualsiasi formula, quindi

$$\mathfrak{M}_2, f^{-1}(1) \models [\forall x_1(\neg R_3(x_0, x_1) \vee \neg P_2(x_1))].$$

Verifichiamo che

$$\mathfrak{M}_2, f^{-1}(2) \models [\forall x_1(\neg R_3(x_0, x_1) \vee ((\exists x_2/\{x_1\})(R_1(x_1, x_2) \wedge P_3(x_2))))].$$

Dato che  $f^{-1}(2) = X$ , questo è vero se

$$\mathfrak{M}_2, X[x_1, M_2]_{R_3^{\mathfrak{M}_2}} \models \neg R_3(x_0, x_1) \vee [(\exists x_2/\{x_1\})(R_1(x_1, x_2) \wedge P_3(x_2))].$$

La squadra  $X[x_1, M_2]_{R_3^{\mathfrak{M}_2}}$  è uguale alla squadra  $X' = \{\{\langle x_0, w_0 \rangle, \langle x_1, w_3 \rangle\}\}$  e quindi bisogna verificare che

$$\mathfrak{M}_2, X'[x_2, g] \models P_3(x_2)$$

per qualche  $R_1^{\mathfrak{M}_2}$ -funzione  $\{x_1\}$ -uniforme  $g$  da  $X'$  a  $M_2$ . Se definiamo  $g$  in modo che assegni all'unico elemento di  $X'$  l'oggetto  $w_7$  la formula  $P_3(x_2)$  è soddisfatta da  $X'[x_2, g]$  su  $\mathfrak{M}_2$  perché  $P_3^{\mathfrak{M}_2} = \{w_7, w_8\}$  e  $R_1^{\mathfrak{M}_2}(w_3, w_7)$ .

Consideriamo anche la squadra di assegnamenti  $Y = \{\{\langle x_0, w_1 \rangle\}\}$  per la formula  $\phi$ . Vale in questo caso che

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_2, Y \models & \\ & [\forall x_1 (\neg R_3(x_0, x_1) \vee \neg P_2(x_1))] \vee \\ & [\forall x_1 (\neg R_3(x_0, x_1) \vee ((\forall x_2 / \{x_1\}) (\neg R_1(x_1, x_2) \vee P_3(x_2)))))] \\ \text{sse} & \\ \mathfrak{M}_2, f^{-1}(1) \models & \\ & [\forall x_1 (\neg R_3(x_0, x_1) \vee \neg P_2(x_1))] \\ e & \\ \mathfrak{M}_2, f^{-1}(2) \models & \\ & [\forall x_1 (\neg R_3(x_0, x_1) \vee ((\exists x_2 / \{x_1\}) (R_1(x_1, x_2) \wedge P_3(x_2)))))] \end{aligned}$$

per una funzione  $f$   $\emptyset$ -uniforme che mappa  $Y$  nell'insieme  $\{1, 2\}$ . In questo caso scegliamo  $f$  in modo che dia il valore 1 all'unico assegnamento in  $Y$ . Date le proprietà della squadra vuota vale

$$\mathfrak{M}_2, f^{-1}(2) \models [\forall x_1 (\neg R_z(x_0, x_1) \vee ((\exists x_2 / \{x_1\}) (R_1(x_1, x_2) \wedge P_3(x_2))))].$$

Rimane da verificare che

$$\mathfrak{M}_2, f^{-1}(1) \models [\forall x_1 (\neg R_3(x_0, x_1) \vee \neg P_2(x_1))].$$

Questo è vero se vale che

$$\mathfrak{M}_2, X \models [\forall x_1 (\neg R_3(x_0, x_1) \vee \neg P_2(x_1))];$$

che, a sua volta, vale se

$$\mathfrak{M}_2, X[x_1, M_2]_{R_3^{m_2}} \models \neg P_2(x_1).$$

Questo è vero perché la squadra di assegnamenti  $X[x_1, M_2]_{R_3^{m_2}}$  è uguale all'insieme  $\{\{\langle x_0, w_1 \rangle, \langle x_1, w_5 \rangle\}\}$  e, dato che  $P_2^{m_2} = \{w_1, w_2, w_3\}$ , non vale  $P_2(x_1)$ .

Una squadra di assegnamenti per la quale non vale  $\phi$  su  $\mathfrak{M}_2$  è  $Z = \{\{\langle x_0, w_6 \rangle\}\}$ . Per soddisfarla bisogna scegliere necessariamente di soddisfare il secondo disgiunto; infatti in tutti i punti relati con  $w_6$  tramite  $R_3$  vale  $p_2$ . Nel tentativo di verificare

$$\mathfrak{M}_2, Z \models [\forall x_1 (\neg R_z(x_0, x_1) \vee ((\exists x_2 / \{x_1\}) (R_1(x_1, x_2) \wedge P_3(x_2))))],$$

però, si deve verificare che

$$\mathfrak{M}_2, Z[x_1, M_2]_{R_3^{m_2}} \models (\exists x_2 / \{x_1\}) [R_1(x_1, x_2) \wedge P_3(x_2)],$$

con  $Z[x_1, M_2]_{R_3^{m_2}} = \{\langle x_0, w_6 \rangle, \langle x_1, w_8 \rangle\} = Z'$ . deve quindi esistere una  $R_1^{m_2}$ -funzione  $\{x_1\}$ -uniforme  $f : Y' \rightarrow M_2$  per la quale valga

$$\mathfrak{M}_2, Z'[x_2, f] \models P_3(x_2),$$

ma tale funzione non esiste perché non esistono punti relati a  $w_8$  tramite  $R_1$  in cui valga  $p_3$ .

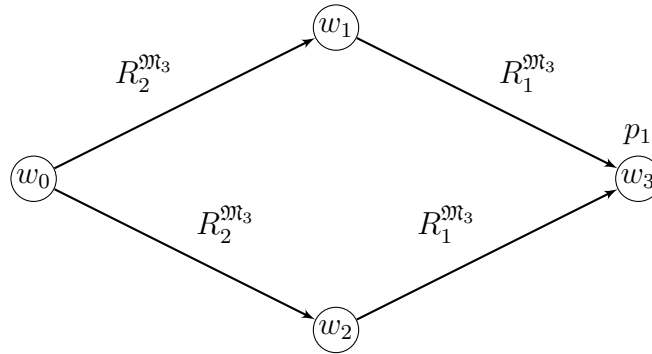
Sia  $\mathfrak{M}_3$  la struttura relazionale

$$(M_3, (P_l^{m_3})_l, (R_m^{m_3})_m)$$

con

$$\begin{aligned} M_3 &= \{w_0, w_1, w_2, w_3\}; \\ R_1^{m_3} &= \{\langle w_1, w_3 \rangle, \langle w_2, w_3 \rangle\}, \\ R_2^{m_3} &= \{\langle w_0, w_1 \rangle, \langle w_0, w_2 \rangle\}; \\ P_1^{m_3} &= \{w_3\}. \end{aligned}$$

La struttura  $\mathfrak{M}_3$  è rappresentata dal diagramma che segue:



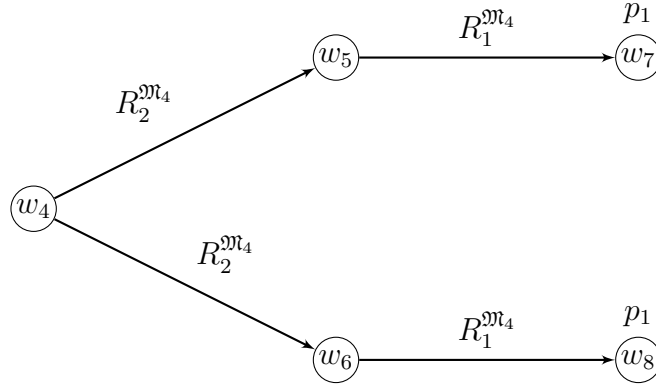
Sia, inoltre,  $\mathfrak{M}_4$  la struttura relazionale

$$(M_4, (P_l^{m_4})_l, (R_m^{m_4})_m)$$

con

$$\begin{aligned}
 M_4 &= \{w_4, w_5, w_6, w_7, w_8\}; \\
 R_1^{\mathfrak{M}_4} &= \{\langle w_5, w_7 \rangle, \langle w_6, w_8 \rangle\}, \\
 R_2^{\mathfrak{M}_4} &= \{\langle w_4, w_5 \rangle, \langle w_4, w_6 \rangle\}; \\
 P_1^{\mathfrak{M}_4} &= \{w_7, w_8\}.
 \end{aligned}$$

La struttura  $\mathfrak{M}_4$  è rappresentata dal diagramma che segue:



Valutiamo su  $\mathfrak{M}_3$  e  $\mathfrak{M}_4$  la formula

$$\forall x_1[\neg R_2(x_0, x_1) \vee [(\exists x_2/\{x_1\})[R_1(x_1, x_2) \wedge P_1(x_2)]]].$$

Sia  $X = \{\{\langle x_0, w_0 \rangle\}\}$ , deve valere che

$$\mathfrak{M}_3, X \models \forall x_1[\neg R_2(x_0, x_1) \vee [(\exists x_2/\{x_1\})[R_1(x_1, x_2) \wedge P_1(x_2)]]].$$

È così se

$$\mathfrak{M}_3, X[x_1, M_3]_{R_2^{\mathfrak{M}_3}} \models (\exists x_2/\{x_1\})[R_1(x_1, x_2) \wedge P_1(x_2)].$$

La squadra  $X[x_1, M_3]_{R_2^{\mathfrak{M}_3}}$  è uguale all'insieme

$$X' = \{\{\langle x_0, w_0 \rangle, \langle x_1, w_1 \rangle\}, \{\langle x_0, w_0 \rangle, \langle x_1, w_2 \rangle\}\}.$$

È quindi necessario che valga

$$\mathfrak{M}_3, X'[x_2, f] \models P_1(x_2)$$

per qualche  $R_1^{\mathfrak{M}_3}$ -funzione da  $X'$  a  $M_3$  che sia  $\{x_1\}$ -uniforme. Scegliamo  $f$  in modo che associ entrambi gli assegnamenti in  $X'$  il punto  $w_3$ . La funzione  $f$  è  $\{x_1\}$ -uniforme e asseconda la relazione  $R_1$ . Ogni elemento della squadra  $X'[x_2, f]$  associa  $x_2$  a  $w_3$  e  $P_1^{\mathfrak{M}_3} = \{w_3\}$ .

Sia, invece,  $Y = \{\{\langle x_0, w_4 \rangle\}\}$ . Anzitutto bisogna verificare che

$$\mathfrak{M}_4, Y \models \forall x_1 [\neg R_2(x_0, x_1) \vee [(\exists x_2 / \{x_1\}) [R_1(x_1, x_2) \wedge P_1(x_2)]]].$$

Questo vale se

$$\mathfrak{M}_4, Y[x_1, M_4]_{R_2^{\mathfrak{M}_4}} \models (\exists x_2 / \{x_1\}) [R_1(x_1, x_2) \wedge P_1(x_2)].$$

È vera l'uguaglianza

$$Y[x_1, M_4]_{R_2^{\mathfrak{M}_4}} = \{\{\langle x_0, w_4 \rangle, \langle x_1, w_5 \rangle\}, \{\langle x_0, w_4 \rangle, \langle x_1, w_6 \rangle\}\} = Y'.$$

Quindi, per qualche  $R_1^{\mathfrak{M}_4}$ -funzione  $g : Y' \rightarrow M_4$  che sia  $\{x_1\}$ -uniforme, deve valere che

$$\mathfrak{M}_3, X'[x_2, g] \models P_1(x_2).$$

Una funzione  $g$  di questo tipo, però, non esiste perché per assecondare  $R_1$  è necessario che la funzione attribuisca due valori diversi ai due assegnamenti in  $Y'$ : se  $x_1$  è assegnato a  $w_5$ ,  $x_2$  deve essere assegnato a  $w_7$ ; se  $x_1$  è assegnato a  $w_6$ ,  $x_2$  deve essere assegnato a  $w_8$ . La funzione  $g$ , però, non è  $\{x_1\}$ -uniforme se fa questo, infatti i due assegnamenti in  $Y'$  concordano su tutto tranne che su  $x_1$ .

### 3.3 Notazione breve modale

Introduciamo ora una notazione modale che serva ad abbreviare le formule IFML in formule contenenti connettivi modali che presentino gli stessi rapporti di indipendenza.

È di fondamentale importanza distinguere nettamente la notazione che verrà presentata ora dal linguaggio modale ML di cui si è data la grammatica sopra. Il linguaggio ML è un passaggio indispensabile per la produzione e definizione delle formule IFML, è definito formalmente e rappresenta la base modale a cui è stato aggiunto, a seguito della traduzione standard, il meccanismo di rappresentazione delle indipendenze per creare IFML. La notazione

che viene introdotta in questa sezione, al contrario, è superflua e introdotta esclusivamente per comodità e chiarezza dell'esposizione; questa permette di rappresentare, attraverso i simboli comunemente usati per le logiche modali, le formule IFML definitive, ovvero formule ML tradotte tramite traduzione standard in cui sono state esplicitate le indipendenze.

In questa notazione si useranno i simboli  $\diamond_n^{k_m}$  e  $\square_n^{k_m}$  per indicare l' $n$ -esima occorrenza, nella formula, di un connettivo modale della possibilità o della necessità per la modalità  $k_m$ . Gli indici  $i$ , per le modalità, resteranno rappresentati come tali nella forma  $\diamond_n^i$  e  $\square_n^i$ . I quantificatori di una formula IFML permettono sempre di stabilire quali siano i connettivi modali tradotti durante la traduzione standard e osservando le relazioni vincolate ai quantificatori è sempre possibile sapere a quale modalità o indice si riferiscano. Il resto della notazione imita il linguaggio IFML per quello che riguarda la rappresentazione delle indipendenze e il linguaggio ML rispetto alle proposizioni. Laddove gli insiemi di indipendenze siano vuoti in notazione breve vengono omessi.

Grazie a questa notazione si riesce ad abbreviare e rendere molto più leggibile una qualsiasi formula IFML e allo stesso tempo sono esprimibili tutti i rapporti di indipendenza tra occorrenze di operatori modali. È posta in evidenza, inoltre, la struttura modale delle formule in cui è espressa l'indipendenza.

Supponendo che ogni relazione  $R_n$  sia relata alla modalità  $k_n$ , mostriamo alcune trascrizioni di formule IFML in notazione breve modale.

La formula

$$[(\forall x_1/\emptyset)[\neg R_1(x_0, x_1) \vee [(\exists x_2/\emptyset)(R_2(x_1, x_2) \wedge P_1(x_2))]]]$$

viene trascritta come

$$\square_1^{k_1} \diamond_2^{k_2} p_1;$$

la formula

$$[(\forall x_1/\emptyset)[\neg R_1(x_0, x_1) \vee [(\exists x_2/\{x_1\})(R_2(x_1, x_2) \wedge P_1(x_2))]]]$$

come

$$\square_1^{k_1} (\diamond_2^{k_2}/\{1\})p_1;$$

e la formula

$$\left[ \bigwedge_{i \in \{k_1, k_2\}} [(\forall x_1/\emptyset)[\neg R_i(x_0, x_1) \vee [(\exists x_2/\emptyset)(R_i(x_1, x_2) \wedge P_1(x_2))]]] \right]$$



$$[\bigvee_{i' \in \{k_3, k_4\}} (\exists x_2 / \{i\})(R_{i'}(x_1, x_2) \wedge P_2(x_2))]]]$$

come

$$[\bigwedge_{i \in \{k_1, k_2\}} [\Box_1^i [\bigvee_{i' \in \{k_3, k_4\}} (\Diamond_2^{i'} \{i\}) p_2]]].$$

### 3.4 Traduzione con quantificatori compatti

Oltre alla notazione breve modale adottata da Sevenster e riportata nella sezione precedente, potrebbe risultare interessante e utile alla comprensione delle formule IFML un secondo metodo di scrittura. Mentre le formule brevi generate dal precedente metodo riproducono la rappresentazione dell'indipendenza all'interno del paradigma modale proposizionale, il metodo che stiamo per presentare ha l'intento di produrre, invece, formule predicative tradotte da IFML in cui siano rappresentati in modo compatto i quantificatori con guardie. Invece di tornare alla scrittura modale dopo aver applicato i dispositivi per le indipendenze alla traduzione di ML, si riuniscono, mantenendo un linguaggio del primo ordine, le guardie all'interno di quantificatori appositamente costruiti; tali quantificatori sono formati in modo da poter esprimere anche le indipendenze qualora fosse necessario. Una elaborazione di questo tipo permette di avere una definizione classica di sottoformula e l'unione di tutti gli elementi anomali del linguaggio di IFML nei quantificatori. Per poter rappresentare in questo modo le formule IFML è necessario introdurre un nuovo genere di quantificatori, li chiameremo *quantificatori indipendenti con guardia (QIG)*. Ci sono due QIG: uno esistenziale e uno universale; questi corrispondono all'operatore della possibilità  $\Diamond$  e a quello della necessità  $\Box$ . Un *quantificatore indipendente con guardia* esistenziale è

$$\langle x : y/W \rangle_R$$

in cui  $x$  e  $y$  sono variabili individuali,  $R$  una relazione e  $W$  un insieme di variabili e indici. Un *quantificatore indipendente con guardia* universale, invece, è

$$[x : y/W]_R$$

in cui  $x$  e  $y$  sono sempre variabili individuali,  $R$  una relazione e  $W$  un insieme di variabili e indici. Per fare un esempio, la scrittura  $\langle x_{n+1} : x_n/W \rangle_{R_k} \psi$  equivale alla formula IFML  $\phi = (\exists x_{n+1}/W)(R_k(x_n, x_{n+1}))$  se  $\psi$  è una sottoformula legittima di  $\phi$  che non contiene alcun quantificatore per variabili individuali.

Intuitivamente  $\langle x_{n+1} : x_n/W \rangle_{R_k}$  è un quantificatore esistenziale indipendente dalle variabili e dagli indici in  $W$  e con un atomo  $R_k(x_n, x_{n+1})$  per guardia. Perché questa scrittura sia completamente definita riguardo al suo uso bisogna presentare una nuova traduzione da ML alla logica che usa i *quantificatori indipendenti con guardia* e una semantica per questa traduzione:

$$T_{x_n}(P_l) = P_l(x_n)$$

$$T_{x_n}(\neg p_l) = \neg P_l(x_n)$$

$$T_{x_n}(\psi \vee \psi') = T_{x_n}(\psi) \vee T_{x_n}(\psi')$$

$$T_{x_n}(\psi \wedge \psi') = T_{x_n}(\psi) \wedge T_{x_n}(\psi')$$

$$T_{x_n}\left(\bigvee_{i \in I} \psi\right) = \bigvee_{i \in I} T_{x_n}(\psi)$$

$$T_{x_n}\left(\bigwedge_{i \in I} \psi\right) = \bigwedge_{i \in I} T_{x_n}(\psi)$$

$$T_{x_n}(\langle k_m \rangle \psi) = \langle x_{n+1} : x_n/\emptyset \rangle_{R_m} T_{x_{n+1}}(\psi)$$

$$T_{x_n}([k_m] \psi) = [x_{n+1} : x_n/\emptyset]_{R_m} T_{x_{n+1}}(\psi)$$

$$T_{x_n}(\langle i \rangle \psi) = \langle x_{n+1} : x_n/\emptyset \rangle_{R_i} T_{x_{n+1}}(\psi)$$

$$T_{x_n}([i] \psi) = [x_{n+1} : x_n/\emptyset]_{R_i} T_{x_{n+1}}(\psi)$$

È evidente che la traduzione appena definita corrisponde alla traduzione standard che Sevenster fornisce per IFML<sup>7</sup>. Gli insiemi di indipendenze sono, come prevedibile, vuoti; l'inserimento delle variabili e degli indici negli insiemi segue un adattamento delle regole già indicate per IFML:

*Sia  $\phi$  una formula ML tradotta tramite  $T_{x_0}$*

---

<sup>7</sup>[Sevenster 2010].

1. Sostituire ogni operatore logico  $O$  in  $\phi$  con  $(O/\emptyset)$ .
2. Se  $(O/W)$  è nell'ambito di  $(\bigvee_{i \in I}/V)$ , è possibile aggiungere  $i$  a  $W$ .
3. Se  $(O/W)$  è nell'ambito di  $(\bigwedge_{i \in I}/V)$ , è possibile aggiungere  $i$  a  $W$ .
4. Se  $(O/W)$  è nell'ambito di  $\langle x : y/V \rangle_R$ , è possibile aggiungere  $x$  a  $W$ .
5. Se  $(O/W)$  è nell'ambito di  $[x : y/V]_R$ , è possibile aggiungere  $x$  a  $W$ .
6. Se  $\langle w : z/W \rangle_{R'}$  è nell'ambito di  $(\bigvee_{i \in I}/V)$ , è possibile aggiungere  $i$  a  $W$ .
7. Se  $\langle w : z/W \rangle_{R'}$  è nell'ambito di  $(\bigwedge_{i \in I}/V)$ , è possibile aggiungere  $i$  a  $W$ .
8. Se  $\langle w : z/W \rangle_{R'}$  è nell'ambito di  $\langle x : y/V \rangle_R$ , è possibile aggiungere  $x$  a  $W$ .
9. Se  $\langle w : z/W \rangle_{R'}$  è nell'ambito di  $[x : y/V]_R$ , è possibile aggiungere  $x$  a  $W$ .
10. Se  $[w : z/W]_{R'}$  è nell'ambito di  $(\bigvee_{i \in I}/V)$ , è possibile aggiungere  $i$  a  $W$ .
11. Se  $[w : z/W]_{R'}$  è nell'ambito di  $(\bigwedge_{i \in I}/V)$ , è possibile aggiungere  $i$  a  $W$ .
12. Se  $[w : z/W]_{R'}$  è nell'ambito di  $\langle x : y/V \rangle_R$ , è possibile aggiungere  $x$  a  $W$ .
13. Se  $[w : z/W]_{R'}$  è nell'ambito di  $[x : y/V]_R$ , è possibile aggiungere  $x$  a  $W$ .

in cui  $R$  è una relazione o una funzione che mappa le modalità nelle relazioni e  $R'$  è la stessa o un'altra relazione o funzione del medesimo tipo.

Sia  $LQIG$  l'insieme delle formule tradotte da ML usando la traduzione  $T$  a cui sono state applicate le indipendenze seguendo le regole appena date. La semantica di una formula LQIG è la seguente:

*Sia  $\phi \in LQIG$ ; siano  $\psi$  e  $\psi'$  due occorrenze di sottoformule di  $\phi$  con variabile libera  $x_n$ . Sia  $\mathfrak{M}$  una struttura e  $X$  una squadra di assegnamenti per  $\mathfrak{M}$  tale*

che tutte le variabili nel dominio di  $X$  siano enumerate in  $x_0, \dots, x_n$ ; per ogni funzione  $g$  e argomento  $z$  sia  $g^{-1}(z)$  la controimmagine di  $\{z\}$ , allora

$$\mathfrak{M}, X \models P_l(x_n) \text{ sse } s(x_n) \text{ è in } P_l^{\mathfrak{M}} \text{ per ogni } s \in X$$

$$\mathfrak{M}, X \models \neg P_l(x_n) \text{ sse } s(x_n) \text{ non è in } P_l^{\mathfrak{M}} \text{ per ogni } s \in X$$

$$\mathfrak{M}, X \models \psi(\vee/W)\psi' \text{ sse } \mathfrak{M}, f^{-1}(1) \models \psi \text{ e } \mathfrak{M}, f^{-1}(2) \models \psi' \text{ per qualche } f : X \rightarrow \{1, 2\} \text{ che sia } W\text{-uniforme}$$

$$\mathfrak{M}, X \models \psi(\wedge/W)\psi' \text{ sse } \mathfrak{M}, X \models \psi \text{ e } \mathfrak{M}, X \models \psi'$$

$$\mathfrak{M}, X \models (\bigvee_{i \in I} /W)\psi \text{ sse } \mathfrak{M}, X[i, f] \models \psi \text{ per qualche } f : X \rightarrow I \text{ che sia } W\text{-uniforme}$$

$$\mathfrak{M}, X \models (\bigwedge_{i \in I} /W)\psi \text{ sse } \mathfrak{M}, X[i, I] \models \psi$$

$$\mathfrak{M}, X \models \langle x_{n+1} : x_n/W \rangle_{R_m} \theta \text{ sse } \mathfrak{M}, X[x_{n+1}, f] \models \theta \text{ per qualche } R_m^{\mathfrak{M}}\text{-funzione } f : X \rightarrow M \text{ che sia } W\text{-uniforme}$$

$$\mathfrak{M}, X \models \langle x_{n+1} : x_n/W \rangle_{R_i} \theta \text{ sse } \mathfrak{M}, X[x_{n+1}, f] \models \theta \text{ per qualche } R_i^{\mathfrak{M}}\text{-funzione } f : X \rightarrow M \text{ che sia } W\text{-uniforme}$$

$$\mathfrak{M}, X \models [x_{n+1} : x_n/W]_{R_m} \theta \text{ sse } \mathfrak{M}, X[x_{n+1}, M]_{R_m^{\mathfrak{M}}} \models \theta$$

$$\mathfrak{M}, X \models [x_{n+1} : x_n/W]_{R_i} \theta \text{ sse } \mathfrak{M}, X[x_{n+1}, M]_{R_i^{\mathfrak{M}}} \models \theta$$

Confrontando due percorsi analoghi dalla traduzione alla valutazione, uno per una formula IFML e uno per una formula con QIG, è immediato notare che sono completamente equivalenti. Un pregio dei quantificatori QIG è certamente la semplificazione del concetto di sottoformula e del suo uso per

la definizione degli operatori. Per IFML si è dovuto dare una definizione di sottoformula di una formula tradotta da ML, questo per poter distinguere gli operatori logici veri e propri da quelli contenuti nelle guardie; adottando i *quantificatori indipendenti con guardia* questo non è necessario e la scomposizione in sottoformule segue i criteri classici relativi ai quantificatori e agli operatori. La definizione di sottoformula di una fbf LQIG è, infatti, la seguente: *Una sottoformula di una formula LQIG è un qualsiasi elemento dell'insieme  $subf(\phi)$  per una qualche fbf  $\phi$  LQIG.*

Siano  $\phi$  e  $\phi'$  fbf o sottoformule LQIG. La funzione  $subf$  è definita così:

$$subf(P(x)) = \{P(x)\}$$

$$subf(\neg\phi) = \{\neg\phi\} \cup subf(\phi)$$

$$subf(\phi(\wedge/W)\phi') = \{\phi(\wedge/W)\phi'\} \cup subf(\phi)$$

$$subf(\phi(\vee/W)\phi') = \{\phi(\vee/W)\phi'\} \cup subf(\phi)$$

$$subf((\bigwedge_{i \in I}/W)\phi) = \{(\bigwedge_{i \in I}/W)\phi\} \cup subf(\phi)$$

$$subf((\bigvee_{i \in I}/W)\phi) = \{(\bigvee_{i \in I}/W)\phi\} \cup subf(\phi)$$

$$subf(\langle y : x/W \rangle_{R_m} \phi) = \{\langle y : x/W \rangle_{R_m} \phi\} \cup subf(\phi)$$

$$subf([y : x/W]_{R_m} \phi) = \{[y : x/W]_{R_m} \phi\} \cup subf(\phi)$$

$$subf(\langle y : x/W \rangle_{R_i} \phi) = \{\langle y : x/W \rangle_{R_i} \phi\} \cup subf(\phi)$$

$$subf([y : x/W]_{R_i} \phi) = \{[y : x/W]_{R_i} \phi\} \cup subf(\phi)$$

con  $x, y$  variabili,  $W$  insieme di variabili e indici e  $P$  predicato.

Credo che il principale vantaggio delle formule di LQIG sia l'unione di chiarezza e semplicità di trattamento. La notazione modale paga il guadagno in

brevità e leggibilità in termini di uso delle formule; infatti esse sono abbreviazioni, non formule ben formate, e presentano grosse difficoltà rispetto alla formulazione di una sintassi propria a causa delle indicazioni delle occorrenze dei connettivi modali. Il possesso da parte delle formule LQIG di definizioni proprie per le sottoformule e per la semantica esclude le complicazioni associate alla trascrizione da fbfd ad abbreviazione.

È interessante considerare, inoltre, una versione dei *quantificatori indipendenti con guardia* in cui si rappresentino le dipendenze di essi piuttosto che le loro indipendenze; questo cambiamento di prospettiva li renderebbe quantificatori diramati modali rappresentati su una dimensione. In questo testo si è scelto, a riguardo, di rimanere fedeli ai metodi propri delle logiche *independence friendly* per mantenere un legame della rappresentazione che aiutasse il paragone tra i QIG e i linguaggi qui analizzati. Una scelta che condivide la stessa motivazione riguarda le indicazioni di indipendenza dei connettivi e dei quantificatori per modalità: anch'esse sono rimaste invariate rispetto alla logica di Sevenster per motivi di esposizione.

### 3.5 Formule IFML non consuete

Il linguaggio IFML definito e analizzato nell'articolo di Sevenster <sup>8</sup> possiede minor espressività rispetto alle logiche IF; l'autore stesso scrive:

In this paper we study how the 'independence-friendly force' and the 'modal force' determine the computational complexity of our IF modal logic. First-order logic itself is undecidable. The independence-friendly force typically increases complexity: Extending first-order logic by the slash device yields IF logic, which is highly undecidable. The modal force, on the other hand, decreases complexity: Modal logic is decidable.

The first main result of this paper shows that our IF modal logic is decidable [...].<sup>9</sup>

La logica IFML, a causa delle limitazioni alla quantificazione sulle variabili individuali, perde parte dell'espressività delle logiche *independence friendly* non modali. Si faccia caso che il superiore potere espressivo delle logiche

---

<sup>8</sup>[Sevenster 2010].

<sup>9</sup>[Sevenster 2010], p. 416.

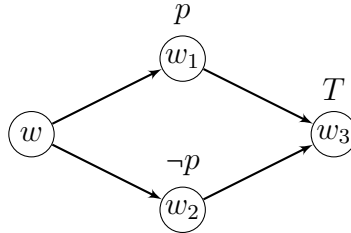
IF rispetto alla logica del primo ordine è dovuto completamente ai meccanismi relativi alla quantificazione. Le variabili quantificate in una formula IFML possiedono tutte una guardia, in particolare sono relate ad almeno una delle variabili che le precedono. Nonostante questo si vedrà che il potere espressivo di IFML supera quello delle logiche modali classiche e che diverse caratteristiche proprie di IF si presentano anche in IFML.

Una particolarità che si potrebbe considerare comune alle logiche IF modali e a quelle non modali è il meccanismo della segnalazione. Dato che vengono interpretate attraverso quantificazioni, anche le modalità permettono di segnalare valori. La segnalazione tra modalità, però, è meno immediata di quella tra variabili individuali; non è possibile, infatti, inserire connettivi modali solo per segnalare valori, ognuno di essi modifica in ogni caso la soddisfacibilità della formula, a prescindere dalla segnalazione. Indichiamo nei seguenti esempi tramite l'espressione ' $T$ ' la formula  $p \vee \neg p$ , quando verrà usata in questo testo sarà vera in ogni mondo.

La formula

$$(\diamond_1^{k_1} p) \wedge (\diamond_2^{k_1} \neg p) \wedge (\Box_3^{k_1} (\diamond_4^{k_1} / \{3\}) T)$$

è soddisfacibile, se  $k_1$  indica la relazione di accessibilità, solo in una struttura troncata dalla forma:

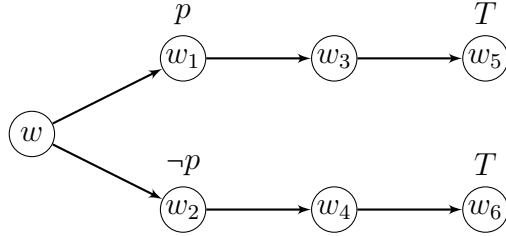


Una struttura ad albero non è sufficiente a causa del blocco verso il mondo scelto per soddisfare  $\Box_3^{k_1}$ ; perché esista il mondo indicato dall'ultimo connettivo della possibilità e perché possa essere raggiunto da qualsiasi mondo scelto per  $\Box_3^{k_1}$  esso deve essere unico.

Tramite segnalazione è possibile modificare la formula in modo da renderla soddisfacibile anche in un albero:

$$(\diamond_1^{k_1} p) \wedge (\diamond_2^{k_1} \neg p) \wedge (\Box_3^{k_1} \diamond_4^{k_1} (\diamond_5^{k_1} / \{3\}) T);$$

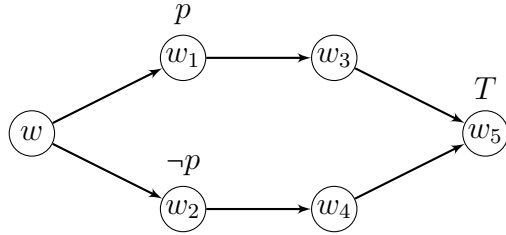
è vero però che, diversamente dalla segnalazione di variabili individuali, questo tipo di segnalazione modifica in maniera rilevante tutta la struttura definita dalla formula. Quest'ultima, infatti, è vera in strutture diverse:



Bloccando anche il segnale, come nel caso di variabili, si ripropone la difficoltà nel soddisfare la formula, che in questo caso consiste nell'unicità del mondo in cui vale  $T$ .

$$[(\diamond_1^{k_1} p) \wedge (\diamond_2^{k_1} \neg p) \wedge (\square_3^{k_1} \diamond_4^{k_1} (\diamond_5^{k_1} / \{3, 4\}) T)].$$

Questa formula è soddisfacibile su strutture simili a quella immediatamente precedente, ma che abbiano un unico mondo in cui vale  $T$  che sia raggiungibile:



Si noti che il cambiamento da  $\diamond_{k_1}$  a  $\diamond_{k_2}$  modifica solo i rapporti di indipendenza, dato che si era posto che sia  $k_1$  che  $k_2$  indicassero la relazione di accessibilità.

I casi in cui le riquantificazioni sono ridondanti per la semantica a trionfi, come per la semantica tratta dalla teoria dei giochi, sono quelli in cui la quantità di valori di assegnamenti che possono essere usati per definire la funzione richiesta dalla definizione della semantica per soddisfare le sottoformule con  $\vee$ ,  $\forall_{i \in I}$  e  $\exists$ . Anche per questa semantica per definire la funzione relativa all'ultimo quantificatore si devono poter usare tutti gli argomenti che si possono usare per quelle relative ai precedenti: non è sufficiente che si possa usare un numero maggiore di argomenti.



# Capitolo 4

## Proprietà di IFML

### 4.1 Schemi di equivalenza

Come abbiamo già detto e mostrato in alcuni esempi, l'uso di variabili modali alle costanti modali non aumenta il potere espressivo del linguaggio; allo stesso modo le variabili modali possono imitare qualsiasi formula che contenga costanti modali. Il seguente schema per ML mostra in che modo:

$$\bigwedge_{i \in \{k_0, \dots, k_n\}} \langle i \rangle \phi \text{ sse } \langle k_0 \rangle \phi \wedge \dots \wedge \langle k_n \rangle \phi,$$

$$\bigwedge_{i \in \{k_0, \dots, k_n\}} [i] \phi \text{ sse } [k_0] \phi \wedge \dots \wedge [k_n] \phi,$$

$$\bigvee_{i \in \{k_0, \dots, k_n\}} \langle i \rangle \phi \text{ sse } \langle k_0 \rangle \phi \vee \dots \vee \langle k_n \rangle \phi \text{ e}$$

$$\bigvee_{i \in \{k_0, \dots, k_n\}} [i] \phi \text{ sse } [k_0] \phi \vee \dots \vee [k_n] \phi;$$

con  $k_0, \dots, k_n$  modalità.

Usando la notazione breve modale per ricondurre la scrittura a una forma modale classica lo schema diventa il seguente:

$$\bigwedge_{i \in \{k_0, \dots, k_n\}} \diamond_1^i \phi \text{ sse } \diamond_1^{k_0} \phi \wedge \dots \wedge \diamond_m^{k_n} \phi,$$

$$\bigwedge_{i \in \{k_0, \dots, k_n\}} \square_1^i \phi \text{ sse } \square_1^{k_0} \phi \wedge \dots \wedge \square_m^{k_n} \phi,$$

$$\bigvee_{i \in \{k_0, \dots, k_n\}} \diamond_1^i \phi \text{ sse } \diamond_1^{k_0} \phi \vee \dots \vee \diamond_m^{k_n} \phi \text{ e}$$

$$\bigvee_{i \in \{k_0, \dots, k_n\}} \square_1^i \phi \text{ sse } \square_1^{k_0} \phi \vee \dots \vee \square_m^{k_n} \phi;$$

con  $k_0, \dots, k_n$  modalità e  $m \geq n + 1$  numero di occorrenza.

**Proposizione 4.1** [Sevenster 2010] *Sia  $\phi$  una formula IFML; sia*

$$\psi = (\exists y/W)(R_k(x, y) \wedge \theta)$$

*un'occorrenza di un sottoformula di  $\phi$  e sia  $i$  un indice che non compare in  $\phi$ ; sia*

$$\psi' = \bigvee_{i \in \{k\}} (\exists y/W)(R_i(x, y) \wedge \theta);$$

*sia  $\phi'$  la formula che risulta dalla sostituzione di  $\psi$  con  $\psi'$  in  $\phi$ . Le formule  $\phi$  e  $\phi'$  equivalenti. Sia invece  $\lambda$  una formula IFML; sia*

$$\sigma = (\forall y/W)(\neg R_k(x, y) \vee \theta)$$

*un'occorrenza di una sottoformula di  $\lambda$  e sia  $i$  un indice che non compare in  $\lambda$ ; sia*

$$\sigma' = \bigwedge_{i \in \{k\}} (\forall y/W)(\neg R_i(x, y) \vee \theta);$$

*sia  $\lambda'$  la formula che risulta dalla sostituzione di  $\sigma$  con  $\sigma'$  in  $\lambda$ . Le formule  $\lambda$  e  $\lambda'$  sono equivalenti.*

La proposizione 4.1 enuncia l'equivalenza tra alcune sottoformule determinate da quantificatori per modalit  che quantificano su insiemi di un elemento e le sottoformule ricavate da queste eliminando il quantificatore e sostituendo a  $R_i$  la relazione connessa all'unica modalit  nell'insieme del quantificatore.

Questa equivalenza viene rilevata solo per le formule con  $\exists$  vincolato da  $\bigvee_{i \in I}$  e con  $\forall$  vincolato da  $\bigwedge_{i \in I}$  per l'uso che si farà di questa proposizione. Sarà, infatti, usata per non dover considerare i casi delle dimostrazioni per induzione che riguardano  $\langle k_m \rangle$  e  $[k_m]$ .

**Proposizione 4.2** [Sevenster 2010] *Sia  $\phi$  una formula IFML; sia  $\psi = (\theta \vee (\exists x/W)\theta')$  un'occorrenza di una sottoformula di  $\phi$ , in cui  $\theta$  è un atomo, o un atomo negato, che non contiene la variabile  $x$ ; sia  $\psi' = (\exists x/W)(\theta \vee \theta')$ ; sia  $\phi'$  la formula che risulta dalla sostituzione di  $\psi$  con  $\psi'$  in  $\phi$ . Le formule  $\phi$  e  $\phi'$  sono equivalenti.*

**Proposizione 4.3** [Sevenster 2010] *Sia  $\phi$  una formula IFML; sia*

$$\psi = (Qv/W)(Q'v'/W')\theta$$

*un'occorrenza di una sottoformula di  $\phi$  con*

$$v \in W',$$

$$Qv \in \{ \bigvee_{i \in I}, \bigwedge_{i \in I}, \exists x, \forall x, \}$$
 e

$$Q'v' \in \{ \bigvee_{i' \in I'}, \bigwedge_{i' \in I'}, \exists x', \forall x' \};$$

*sia*

$$\psi' = (Q'v'/W' - \{v\})(Qv/W)\theta;$$

*sia  $\phi'$  la formula che risulta dalla sostituzione di  $\psi$  con  $\psi'$  in  $\phi$ . Le formule  $\phi$  e  $\phi'$  sono equivalenti.*

Le due precedenti proposizioni riguardano alcuni casi di commutatività tra quantificatori e tra quantificatori esistenziali per variabili individuali e disgiunzioni. La seconda proposizione chiede che non vi siano conflitti con altri quantificatori per la stessa variabile. Per la prima proposizione, invece, è necessario che il secondo quantificatore sia indipendente dal primo; in questo caso è sufficiente eliminare la variabile del primo dall'insieme delle indipendenze del secondo e spostare quest'ultimo davanti all'altro.

**Proposizione 4.4** [Sevenster 2010] *Sia  $\phi$  una formula del primo ordine abbreviazione della formula IF  $\phi'$ . Se ogni variabile in  $\phi$  è quantificata al massimo una volta, allora  $\phi$  e  $\phi'$  sono equivalenti.*

La precedente proposizione deve il requisito riguardante il numero di quantificazioni di ogni singola variabile ad alcune delle caratteristiche delle formule

IFML discusse nel capitolo precedente; queste proprietà, a loro volta, derivano direttamente da caratteristiche della semantica IF discusse nello studio di Janssen sull'interpretazione di queste logiche<sup>1</sup>.

## 4.2 Downward closure

Questa proprietà è stata introdotta in [Hodges 1997] per la logica del primo ordine IF; la dimostriamo qui per le logiche IFML. Prima di dimostrare il teorema, proviamo alcuni lemmi che useremo in esso.

**Lemma 4.1** *Sia  $X$  una squadra di assegnamenti e  $Y$  un suo sottoinsieme. Per ogni insieme  $D$ ,  $Y[v, D]$  è sottoinsieme di  $X[v, D]$ .*

*Dimostrazione.* Che  $v$  e gli elementi di  $B$  siano indici o variabili la scrittura  $X[v, D]$  rappresenta l'insieme di assegnamenti  $\{s(v/d) : s \in X, d \in D\}$ . Dato che  $s$  appartiene a  $X$  per ogni  $s \in Y$ , l'insieme  $Y[v, D] = \{s(v/d) : s \in Y, d \in D\}$  è sottoinsieme di  $X[v, D]$ . *Q.E.D*

**Lemma 4.2** *Sia  $X$  una squadra di assegnamenti e  $Y$  un suo sottoinsieme; sia  $f$  una funzione con dominio  $X$  e  $f'$  la funzione con dominio  $Y$  definita esattamente come  $f$ . L'insieme  $Y[v, f]$  è sottoinsieme di  $X[v, f]$ .*

*Dimostrazione.* La squadra di assegnamenti  $X[v, f]$  è l'insieme  $\{s(v/f(s)) : s \in X, d \in D\}$ . Dato che  $s$  appartiene a  $X$  per ogni  $y \in Y$ , l'insieme  $Y[v, f] = \{s(v/f(s)) : s \in Y, d \in D\}$  è sottoinsieme di  $X[v, f]$ . *Q.E.D*

**Lemma 4.3** *Sia  $X$  una squadra di assegnamenti e  $Y$  un suo sottoinsieme. Per ogni insieme  $D$  e per ogni relazione  $S$ ,  $Y[v, D]_S$  è sottoinsieme di  $X[v, D]_S$ .*

*Dimostrazione.* Se il dominio di  $X$  è enumerato in  $x_0, \dots, x_n$  la scrittura  $X[v, D]_S$  indica l'insieme  $\{s \in X[x_{n+1}, D] : (s(x_n), s(x_{n+1})) \in S\}$ . Dato che il dominio di  $Y$  è il medesimo,  $Y[v, D]_S$  rappresenta l'insieme  $\{s \in Y[x_{n+1}, D] : (s(x_n), s(x_{n+1})) \in S\}$ . Abbiamo dimostrato che  $Y[x_{n+1}, D] \subseteq X[x_{n+1}, D]$ , ne segue che  $Y[v, D]_S \subseteq X[v, D]_S$ . *Q.E.D*

**Lemma 4.4** *Sia  $X$  una squadra di assegnamenti e  $Y$  un suo sottoinsieme; sia  $f$  una  $W$ -uniforme con dominio  $X$ ; sia  $f'$  la funzione con dominio  $Y$  definita esattamente come  $f$ . La funzione  $f'$  è  $W$ -uniforme.*

---

<sup>1</sup>[Janssen 2002].

*Dimostrazione.* La funzione  $f$  è  $W$ -uniforme, quindi per ogni  $s, t \in X$  se  $s \approx_W t$  allora  $f(s) = f(t)$ ; e  $s \approx_W t$  se  $s(v) = t(v)$  per ogni indice e variabile  $v$  in  $\text{dom}(s) - W$ . Per  $f'$  i casi sono tre:  $s, t \in Y$ ;  $s, t \notin Y$ ;  $s \in Y$  e  $t \notin Y$ . Nel primo caso anche in  $Y$  è rispettata la relazione e conservata la  $W$ -uniformità, nel secondo caso gli assegnamenti non sono nel dominio di  $f'$  e nel terzo caso non sarà definito  $f'(t)$ , quindi il requisito di uguaglianza con  $f'(s)$  non è necessario. In tutti e tre i casi  $f'$  asseconda le definizioni di  $W$ -uniformità. *Q.E.D*

**Lemma 4.5** *Sia  $X$  una squadra di assegnamenti e  $Y$  un suo sottoinsieme; sia  $f$  una  $S$ -funzione con dominio  $X$ ; sia  $f'$  la funzione con dominio  $Y$  definita esattamente come  $f$ . La funzione  $f'$  è una  $S$ -funzione.*

*Dimostrazione.* La funzione  $f$  è una  $S$ -funzione, quindi se il dominio di  $X$  è enumerato in  $x_0, \dots, x_n$ , allora  $(s(x_n), f(s)) \in S$  per ogni  $s \in X$ . Anche il dominio di  $Y$  è enumerato in  $x_0, \dots, x_n$  e se  $s \in Y$  allora  $s \in X$ . Per qualsiasi  $s' \in Y$ , quindi, vale che  $(s'(x_n), f(s')) \in S$ . *Q.E.D*

**Teorema 4.1 (Downward closure)** *Sia  $\phi$  una sottoformula di una formula IFML. Sia  $\mathfrak{M}$  una struttura e  $X$  una squadra di assegnamenti tali che  $\mathfrak{M}, X \models \phi$ , allora  $\mathfrak{M}, Y \models \phi$  per ogni  $Y$  sottoinsieme di  $X$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\mathfrak{M}$  una struttura qualsiasi con dominio  $M$ ; siano  $\phi$  una sottoformula di una formula IFML e  $X$  una squadra di assegnamenti, tali che  $\mathfrak{M}, X \models \phi$ ; sia  $Y$  un sottoinsieme qualsiasi di  $X$ .

- Se  $Y = X$ , allora segue che  $Y \models \phi$ . Se  $Y = \emptyset$ , anche in questo caso  $Y \models \phi$ , dato che  $\emptyset \models \psi$  per ogni sottoformula di una formula IFML  $\psi$ .
- Sia  $Y \subset X$ . È facile dimostrare che se  $X$  e  $\mathfrak{M}$  soddisfano un atomo, negato o meno, anche qualsiasi  $Y$  lo fa; i requisiti che le definizioni della semantica impongono a  $X$ , infatti, valgono per tutti gli assegnamenti  $s$  tali che  $s \in X$  e quindi, dato che tutti gli elementi di  $Y$  sono anche elementi di  $X$ , valgono per tutti gli assegnamenti  $s'$  tali che  $s' \in Y$ .

Per completare l'argomento per induzione, dimostriamo che se per ogni sottoformula  $\phi'$ , tale che  $\text{subf}(\phi')$  ha  $n$  o meno elementi, vale la proprietà enunciata dal teorema; allora essa vale anche per tutte le sottoformule  $\phi$  tali che  $\text{subf}(\phi)$  ha  $n + 1$  elementi.

---

<sup>2</sup>Si noti che, essendo  $\approx_W$  simmetrica, nell'ultimo dei tre casi non importa quale assegnamento, tra  $s$  e  $t$ , appartiene a  $Y$ .

- Se  $\phi$  è una sottoformula dalla forma

$$\psi(\wedge/W)\psi';$$

$\mathfrak{M}, X \models \phi$  se e solo se  $\mathfrak{M}, X \models \psi$  e  $\mathfrak{M}, X \models \psi'$ . Poiché ogni  $Y \subseteq X$  è tale che  $\mathfrak{M}, Y \models \psi$  e  $\mathfrak{M}, Y \models \psi'$  per ipotesi d'induzione, segue dalla definizione della semantica che  $\mathfrak{M}, Y \models \phi$ .

- Se  $\phi$  è una sottoformula dalla forma

$$\psi(\vee/W)\psi';$$

$\mathfrak{M}, X \models \phi$  se e solo se  $\mathfrak{M}, f^{-1}(1) \models \psi$  e  $\mathfrak{M}, f^{-1}(2) \models \psi'$  per qualche  $f : X \rightarrow \{1, 2\}$  che sia *W-uniforme*. Sia  $f'$  la funzione definita esattamente come  $f$ , ma solo per gli elementi di  $Y$ . La controimmagine  $f'^{-1}$  della funzione  $f'$  ha per valori sottoinsiemi dei sottoinsiemi di  $X$  che genera  $f^{-1}$ . Per ipotesi d'induzione,  $\mathfrak{M}, f'^{-1}(1) \models \psi$  e  $\mathfrak{M}, f'^{-1}(2) \models \psi'$ . Da questo e dalla definizione della semantica segue che  $\mathfrak{M}, Y \models \phi$ .

- Se  $\phi$  è una sottoformula dalla forma

$$(\bigwedge_{i \in I}/W)\psi;$$

$\mathfrak{M}, X \models \phi$  se e solo se  $\mathfrak{M}, X[i, I] \models \psi$ , quindi se  $\mathfrak{M}, \{s(v/i) : s \in X, i \in I\} \models \psi$ . Si consideri  $Y[i, I] = \{s(v/i) : s \in Y, i \in I\}$ . Dato che  $Y \subseteq X$ ,  $Y[i, I] \subseteq X[i, I]$  e, per ipotesi d'induzione,  $\mathfrak{M}, Y[i, I] \models \psi$ . Da questo segue, per la definizione della semantica, che  $\mathfrak{M}, Y \models (\bigwedge_{i \in I}/W)\psi$ .

- Se  $\phi$  è una sottoformula dalla forma

$$(\forall y/W)(\neg R_i(x, y) \vee \psi)$$

il caso è molto simile al precedente. La differenza di rilievo è che la squadra di assegnamenti  $X$  viene ampliata in  $X[y, M]_{R_i^{\mathfrak{M}}}$ . Estendendo  $Y$  con gli stessi metodi si genera  $Y[y, M]_{R_i^{\mathfrak{M}}}$  che è sottoinsieme di  $X[y, M]_{R_i^{\mathfrak{M}}}$ . Data l'ipotesi di induzione  $\mathfrak{M}, Y[y, M]_{R_i^{\mathfrak{M}}} \models \psi$ , quindi  $\mathfrak{M}, Y \models (\forall y/W)(\neg R_i(x, y) \vee \psi)$ .

- Se  $\phi$  è una sottoformula dalla forma

$$(\bigvee_{i \in I}/W)\psi;$$

$\mathfrak{M}, X \models \phi$  se e solo se  $\mathfrak{M}, X[i, f] \models \psi$  per qualche funzione  $f : X \rightarrow I$  che sia *W-uniforme*. L'estensione di  $Y$  in  $Y[i, f']$ , con  $f'$  uguale a  $f$  ma definita solo per gli elementi di  $Y$ , soddisfa  $\psi$  data l'ipotesi d'induzione. Essendo  $f'$  *W-uniforme*, segue che  $\mathfrak{M}, Y \models \phi$ .

- Se  $\phi$  è una sottoformula dalla forma

$$(\exists y/W)(R_i(x, y) \wedge \theta)$$

il caso assomiglia al precedente. Procedendo come prima, il risultato dell'estensione  $Y[y, f']$  è sottoinsieme di  $X[y, f]$ ; l'ipotesi di induzione si può, quindi, applicare per dedurre che anche  $Y$  con  $\mathfrak{M}$  soddisfa  $\phi$ .

È dimostrato che se  $Y \subseteq X$  e  $\mathfrak{M}, X \models \phi$  allora  $\mathfrak{M}, Y \models \phi$  per ogni sottoformula  $\phi$  tale che  $subf(\phi)$  ha uno o due elementi. Se ogni sottoformula  $\phi$  tale che  $subf(\phi)$  ha  $n$  o meno elementi possiede questa proprietà, la possiedono anche tutte le sottoformule  $\phi'$  tali che  $subf(\phi')$  ha  $n + 1$  elementi. Per ogni sottoformula di una formula IFML  $\phi$ , quindi, se  $Y \subseteq X$  e  $\mathfrak{M}, X \models \phi$  allora  $\mathfrak{M}, Y \models \phi$ . *Q.E.D.*

### 4.3 Upward closure

Dimostriamo una seconda proprietà di chiusura delle squadre di assegnamenti che riguarda l'unione delle squadre di assegnamenti. Tale proprietà garantisce che se due squadre di assegnamenti soddisfano una formula IFML, allora anche la loro unione la soddisfa. Diversamente dalla proprietà precedente questa vale esclusivamente per formule ben formate IFML; varrebbe, in effetti, anche per le sottoformule se si considerassero solo squadre di assegnamenti prodotte attraverso la definizione della semantica partendo da assegnamenti per la formula IFML che contiene la sottoformula. Ovviamente questa distinzione deve essere fatta perché non sempre le sottoformule di una fbf IFML sono a loro volta formule ben formate; può darsi, infatti, che i quantificatori cui si riferiscono alcuni insiemi di indipendenze non compaiano nella sottoformula. Le squadre di assegnamenti per una formula, inoltre, hanno sempre dominio di una sola variabile; svolgendo le definizioni della semantica per queste, di conseguenza, si introducono altri assegnamenti in maniera prestabilita e controllabile, anche se non sempre deterministica<sup>3</sup>.

<sup>3</sup>Si pensi alle funzioni richieste dalle definizioni per  $\forall$ ,  $\forall_{i \in I}$  e  $\exists$ .

Cercando di verificare la soddisfacibilità di una sottoformula, invece, è possibile considerare qualsiasi squadra di assegnamenti che abbia come dominio l'insieme delle variabili libere della sottoformula; facendo questo si possono costruire squadre di assegnamenti che non possiedano la proprietà che si sta discutendo.

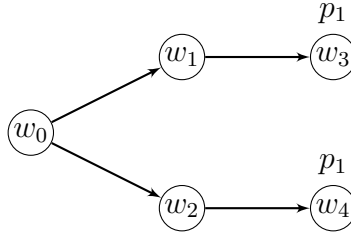
Presentiamo di seguito un controesempio per le sottoformule. Sia  $\mathfrak{M}$  una struttura relazionale

$$(M, (P_l^{\mathfrak{M}})_l, (R_0^{\mathfrak{M}})_0)$$

con

$$\begin{aligned} M &= \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}; \\ R_0^{\mathfrak{M}} &= \{\langle w_1, w_2 \rangle, \langle w_1, w_3 \rangle, \langle w_2, w_4 \rangle, \langle w_3, w_5 \rangle\}; \\ P_1^{\mathfrak{M}} &= \{w_4, w_5\}. \end{aligned}$$

Il diagramma seguente la rappresenta seguendo le convenzioni usate per gli esempi di valutazione:



Sia  $\psi$  la sottoformula

$$(\exists x_2 / \{x_1\})[R_0(x_1, x_2) \wedge P_1(x_2)]$$

abbreviata in

$$(\diamond_2^{k_0} / \{1\})p_1;$$

questa è una sottoformula perfettamente legittima, ad esempio della formula ben formata  $\phi$ :

$$\forall x_1[\neg R_0(x_0, x_1) \vee [(\exists x_2 / \{x_1\})[R_0(x_1, x_2) \wedge P_1(x_2)]]]$$

abbreviata in

$$\square_1^{k_0}(\diamond_2^{k_0} / \{1\})p_1.$$



Senza vincoli relativi a  $\phi$  per la scelta delle squadre di assegnamenti si potrebbero proporre gli insiemi:

$$X = \{\{\langle x_0, w_0 \rangle, \langle x_1, w_1 \rangle\}\},$$

$$Y = \{\{\langle x_0, w_0 \rangle, \langle x_1, w_2 \rangle\}\}.$$

In questo caso sia  $X$  che  $Y$  soddisfano  $\psi$  su  $\mathfrak{M}$ , infatti esiste una  $R_0^{\mathfrak{M}}$ -funzione  $\{x_1\}$ -uniforme per ciascuno di essi per assegnare a  $x_2$  il giusto oggetto di  $M$ . Questa funzione può essere trovata perché, nonostante l'indipendenza asserita, sia  $X$  che  $Y$  hanno un solo elemento. L'unione di  $X$  e  $Y$ , però, non mantiene questa caratteristica ed esclude la possibilità di trovare una funzione adeguata; non esiste, infatti, una  $R_0^{\mathfrak{M}}$ -funzione  $\{x_1\}$ -uniforme da  $X \cup Y$  a  $M$ . Se si considerassero però le squadre di assegnamenti che soddisfano in  $\mathfrak{M}$  la formula ben formata  $\phi$ , invece,  $X$  e  $Y$  non sarebbero neanche distinte in quanto rispetto alla prima variabile assegnata, l'unica libera in  $\phi$ , concordano. Anche seguendo le operazioni richieste dalla semantica per verificare con  $\psi$  la soddisfacibilità di  $\phi$  non si produrrebbe mai più di una squadra contenente un solo assegnamento.

Più in generale, la dimostrazione vale anche per le sottoformule se le squadre  $X$  e  $Y$  considerate sono disgiunte e non contengono assegnamenti tali che se  $r \in X$  e  $s \in Y$  non vale mai  $r \approx_W s$  per ogni  $W$  considerato. Questa condizione è soddisfatta da tutte le squadre generate per valutare una formula. L'unione delle squadre per le formule, infatti, elimina la possibilità di ambiguità di ampliamento nel caso queste non fossero disgiunte e il fatto che non si cambi mai gli assegnamenti rispetto alla variabile libera della formula permette di distinguere sempre gli assegnamenti mutuati da una o dall'altra squadra. Si faccia caso al fatto che qualsiasi insieme di indipendenze presente in una formula non contiene mai la variabile libera di questa.

Introduciamo una nozione formale per rappresentare le trasformazioni che una squadra può subire durante il processo di valutazione delle sottoformule di una formula.

**Definizione 4.1** *Una squadra di assegnamenti  $X'$  è **discende** da una squadra di assegnamenti  $X$  rispetto alla fbf  $\phi$  e alla struttura  $\mathfrak{M}$  se  $X'$  è prodotta applicando a  $X$  una delle seguenti procedure:*

- Se esiste una sottoformula di  $\phi$  dalla forma  $\psi(\vee/W)\psi'$  sostituisci  $X$  con  $f^{-1}(1)$  oppure con  $f^{-1}(2)$  per qualche funzione  $f : X \rightarrow \{1, 2\}$  che sia  $W$ -uniforme.

- Se esiste una sottoformula di  $\phi$  dalla forma  $\psi(\wedge/W)\psi'$  sostituisci  $X$  con  $X$ .
- Se esiste una sottoformula di  $\phi$  dalla forma  $(\bigvee_{i \in I}/W)\psi$  sostituisci  $X$  con  $X[i, f]$  per qualche  $f : X \rightarrow I$  che sia  $W$ -uniforme.
- Se esiste una sottoformula di  $\phi$  dalla forma  $(\bigwedge_{i \in I}/W)\psi$  in  $subf(\phi)$  sostituisci  $X$  con  $X[i, I]$ .
- Se esiste una sottoformula di  $\phi$  dalla forma  $(\exists x_{n+1}/W)(R_m(x_n, x_{n+1}) \wedge \theta)$  in  $subf(\phi)$  sostituisci  $X$  con  $X[x_{n+1}, f]$  per qualche  $R_m^{\mathfrak{M}}$ -funzione  $f : X \rightarrow M$  che sia  $W$ -uniforme.
- Se esiste una sottoformula di  $\phi$  dalla forma  $(\exists x_{n+1}/W)(R_i(x_n, x_{n+1}) \wedge \theta)$  in  $subf(\phi)$  sostituisci  $X$  con  $X[x_{n+1}, f]$  per qualche  $R_i^{\mathfrak{M}}$ -funzione  $f : X \rightarrow M$  che sia  $W$ -uniforme.
- Se esiste una sottoformula di  $\phi$  dalla forma  $(\forall x_{n+1}/W)(\neg R_m(x_n, x_{n+1}) \vee \theta)$  in  $subf(\phi)$  sostituisci  $X$  con  $X[x_{n+1}, M]_{R_m^{\mathfrak{M}}}$ .
- Se esiste una sottoformula di  $\phi$  dalla forma  $(\forall x_{n+1}/W)(\neg R_i(x_n, x_{n+1}) \vee \theta)$  in  $subf(\phi)$  sostituisci  $X$  con  $X[x_{n+1}, M]_{R_i^{\mathfrak{M}}}$ .

Se  $X'$  discende da  $X$  e  $X''$  discende da  $X'$ , allora  $X''$  discende da  $X$ . Fissata una fbf  $\phi$  chiamiamo **iniziali** le squadre di assegnamenti il cui dominio contiene solo l'unica variabile libera di  $\phi$ .

**Proposizione 4.5** *Se una squadra di assegnamenti  $X'$  viene generata durante una valutazione di una squadra di assegnamenti  $X$  rispetto a una formula ben formata IFML  $\phi$  su una struttura  $\mathfrak{M}$ , allora  $X'$  discende da  $X$  rispetto a  $\phi$  e alla struttura  $\mathfrak{M}$ .*

Di seguito dove non sar  ambiguo ci limiteremo a parlare di squadre *discendenti* e *iniziali* senza specificare rispetto a quale fbf e a quale struttura lo siano. Si noti che le squadre *discendenti* sono pi  delle squadre effettivamente usate nella valutazione di una squadra *iniziale* per una formula su una struttura. Tra di esse compaiono anche squadre che non potrebbero mai essere generate in una tale valutazione. Le squadre *discendenti* in pi  e quelle impossibili, per , non creeranno problemi all'uso che si fa di questi concetti in questo testo.

**Lemma 4.6** *Prese due squadre di assegnamenti  $X$  e  $Y$  tali che  $X \cap Y \neq \emptyset$ , esiste sempre una squadra di assegnamenti  $Z$  tale che  $X \cup Z = X \cup Y$  e  $X \cap Z = \emptyset$ .*

*Dimostrazione.* Siano  $X$  e  $Y$  due squadre di assegnamenti con almeno un elemento in comune. Dimostriamo che l'insieme  $Z = Y - X = \{k : k \in Y \text{ e } k \notin X\}$  soddisfa il teorema. L'insieme  $X \cap Z$  è l'insieme degli elementi che appartengono sia a  $X$  che a  $Z$ ; per costruzione di  $Z$  tale intersezione è definita come  $\{k : k \in Y \text{ e } k \notin X \text{ e } k \in X\}$ . Dato che non vi sono elementi che appartengano e insieme non appartengano a uno stesso insieme  $X \cap Z = \emptyset$ . L'insieme  $X \cup Z$ , d'altra parte, è uguale a  $\{k : (k \in Y \text{ e } k \notin X) \text{ oppure } (k \in X)\}$  ovvero a  $\{k : (k \in Y \text{ oppure } k \in X)\}$ , che è proprio l'insieme  $X \cup Y$ . *Q.E.D.*

**Lemma 4.7** *Siano  $X$  e  $Y$  due squadre di assegnamenti iniziali tali che  $\mathfrak{M}, X \models \phi$  e  $\mathfrak{M}, Y \models \phi$  con  $\phi$  formula ben formata IFML e  $\mathfrak{M}$  struttura; valga inoltre che  $X \cap Y = \emptyset$ . Sia  $X'$  una qualunque squadra di assegnamenti che discende da  $X$  rispetto a  $\phi$  e a  $\mathfrak{M}$ . Sia  $Y'$  una qualunque squadra di assegnamenti che discende da  $Y$  rispetto a  $\phi$  e a  $\mathfrak{M}$ .  $X' \cup Y' = \emptyset$ ; inoltre per ogni assegnamento  $r \in X'$  e per ogni assegnamento  $s \in Y'$  vale che  $r \not\#_W s$  per ogni insieme di indipendenze  $W$  in  $\phi$ .*

*Dimostrazione.* Non vi sono trasformazioni elencate nella definizione di *discendenza* che modifichino gli assegnamenti relativamente alle variabili già presenti nel dominio di una squadra di assegnamenti. Se  $X$  e  $Y$  non hanno neanche un assegnamento in comune vuol dire che ogni assegnamento di  $X$  è distinto da ogni assegnamento di  $Y$  per almeno una coppia che l'assegnamento contiene; tale coppia, dato che contiene una variabile presente nel dominio delle squadre di assegnamenti, non potrà essere eliminata da nessuna delle operazioni della definizione di *discendenza*. Se  $X$  e  $Y$  soddisfano  $\phi$  in  $\mathfrak{M}$  avranno nel dominio una sola variabile, l'unica libera in  $\phi$ . Questa variabile non potrà mai, date le regole di indicazione delle indipendenze nelle formule IFML, essere inserita in un insieme di indipendenze. Per ogni assegnamento della squadra l'oggetto associato a questa variabile, inoltre, non verrà mai cambiato da una delle operazioni della definizione di *discendenza*.

**Teorema 4.2 (Upward closure)** *Sia  $\phi$  una formula ben formata IFML; sia  $\mathfrak{M}$  una struttura; siano  $X$  e  $Y$  due squadre di assegnamenti tali che  $\mathfrak{M}, X \models \phi$  e  $\mathfrak{M}, Y \models \phi$ . Vale che  $\mathfrak{M}, X \cup Y \models \phi$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\mathfrak{M}$  una struttura qualsiasi con dominio  $M$ ; sia  $\phi$  una formula IFML; siano  $X$  e  $Y$  due squadre di assegnamenti col medesimo dominio tali che  $\mathfrak{M}, X \models \phi$  e  $\mathfrak{M}, Y \models \phi$ .

Data la proprietà della *downward closure* e il lemma 4.6 possiamo supporre che  $X \cap Y = \emptyset$ . Se così non fosse, infatti, si potrebbe sempre trovare un sottoinsieme  $Z$  di  $Y$  senza elementi in comune con  $X$  che soddisfa  $\phi$  e tale che  $X \cup Z = X \cup Y$ . Dimostrando che  $\mathfrak{M}, X \cup Z \models \phi$  si dimostrerebbe anche che  $\mathfrak{M}, X \cup Y \models \phi$ .

Dato il lemma 4.7 si può enunciare con certezza che se due squadre di assegnamenti sono disgiunte, qualsiasi due squadre *discendenti* da esse rispetto a  $\phi$  e  $\mathfrak{M}$  saranno disgiunte a loro volta. Dal lemma 4.7 e dal fatto che una sottoformula di  $\phi$  non conterrà mai insiemi di indipendenze che non siano già in  $\psi$  segue che per qualsiasi assegnamento  $r \in X'$ , con  $X'$  *discendente* di  $X$  rispetto a  $\phi$  e  $\mathfrak{M}$ , e  $s \in Y'$ , con  $Y'$  *discendente* di  $Y$  rispetto a  $\phi$  e  $\mathfrak{M}$ , vale che  $r \not\#_W s$  per ogni insieme di indipendenze  $W$  che compaia in qualsiasi sottoformula di  $\phi$ .

Siano, quindi,  $X'$  e  $Y'$  due squadre di assegnamenti tali che  $X' \cup Y' = \emptyset$  e valga per qualsiasi assegnamento  $r \in X'$  e  $s \in Y'$  che  $r \not\#_W s$  per ogni insieme di indipendenze  $W$  che si userà. Sappiamo ora che qualsiasi due squadre *discendenti* da  $X$  e  $Y$ , rispettivamente, soddisfano questi requisiti. Sia  $\psi$  una sottoformula di  $\phi$  qualsiasi. Dimostriamo per induzione sul numero di sottoformule di  $\psi$  che se  $\mathfrak{M}, X' \models \psi$  e  $\mathfrak{M}, Y' \models \psi$  vale che  $\mathfrak{M}, X' \cup Y' \models \psi$ .

- Se  $\psi$  è una sottoformula dalla forma

$$(-)P_l(x)$$

$\mathfrak{M}, (X' \cup Y') \models \psi$  se e solo se per tutti gli assegnamenti  $s \in (X' \cup Y')$  vale  $s(x) \in P_l^{\mathfrak{M}}$ . Dato che  $\mathfrak{M}, X' \models \psi$  e  $\mathfrak{M}, Y' \models \psi$  e data la definizione della semantica questo è vero per tutti gli assegnamenti  $r \in X'$  e  $t \in Y'$ . Poiché ogni assegnamento in  $X' \cup Y'$  appartiene anche a  $X'$  o a  $Y'$  vale che  $\mathfrak{M}, (X' \cup Y') \models \psi$ .

Per completare l'argomento per induzione, dimostriamo che se per ogni sottoformula  $\phi'$ , tale che  $\text{subf}(\phi')$  ha  $n$  o meno elementi, vale che  $\mathfrak{M}, X' \models \psi$  e  $\mathfrak{M}, Y' \models \psi$  comporta che  $\mathfrak{M}, X' \cup Y' \models \psi$ , allora vale anche per tutte le sottoformule  $\phi$  tali che  $\text{subf}(\phi)$  ha  $n + 1$  elementi. Per ogni singolo caso dimostriamo anche che nel verificare  $\mathfrak{M}, (X' \cup Y') \models \psi$  usiamo l'unione dei *discendenti* di  $X'$  e  $Y'$  che soddisfano le sottoformule di  $\psi$ .

- Se  $\psi$  è una sottoformula dalla forma

$$\sigma(\wedge/W)\sigma';$$

$\mathfrak{M}, (X' \cup Y') \models \psi$  se e solo se  $\mathfrak{M}, (X' \cup Y') \models \sigma$  e  $\mathfrak{M}, (X' \cup Y') \models \sigma'$ . Dato che  $\mathfrak{M}, X' \models \psi$  e  $\mathfrak{M}, Y' \models \psi$  vale che  $\mathfrak{M}, X' \models \sigma$  e  $\mathfrak{M}, Y' \models \sigma$  e che  $\mathfrak{M}, X' \models \sigma'$  e  $\mathfrak{M}, Y' \models \sigma'$ . Per ipotesi d'induzione, allora,  $\mathfrak{M}, (X' \cup Y') \models \sigma$  e  $\mathfrak{M}, (X' \cup Y') \models \sigma'$  e quindi  $\mathfrak{M}, (X' \cup Y') \models \psi$ .

- Se  $\psi$  è una sottoformula dalla forma

$$\psi(\vee/W)\psi';$$

$\mathfrak{M}, (X' \cup Y') \models \psi$  se e solo se  $\mathfrak{M}, f^{-1}(1) \models \sigma$  e  $\mathfrak{M}, f^{-1}(2) \models \sigma'$  per qualche  $f : (X' \cup Y') \rightarrow \{1, 2\}$  che sia *W-uniforme*. Dato che  $\mathfrak{M}, X' \models \psi$  e  $\mathfrak{M}, Y' \models \psi$  esistono due funzioni *W-uniformi*  $g$ , con dominio  $X'$ , e  $h$ , con dominio  $Y'$ , tali che  $\mathfrak{M}, g^{-1}(1) \models \sigma$  e  $\mathfrak{M}, g^{-1}(2) \models \sigma'$  e  $\mathfrak{M}, h^{-1}(1) \models \sigma$  e  $\mathfrak{M}, h^{-1}(2) \models \sigma'$ . Sia  $f$  la funzione definita come

$$f(s) = \begin{cases} g(s) & \text{se } s \in X' \\ h(s) & \text{se } s \in Y' \end{cases}$$

Dato che  $X' \cap Y' = \emptyset$  la funzione  $f$  è ben definita su  $X' \cup Y'$  e ha codominio  $\{1, 2\}$ . È, inoltre, *W-uniforme*; per ipotesi, infatti, non ci sono  $r \in X'$  e  $s \in Y'$  tali che  $r \not\#_W s$  e se  $r$  e  $s$  appartengono entrambi a  $X'$  o entrambi a  $Y'$  è certo che  $f(r) = f(s)$  data la definizione di  $f$  e dato che  $g$  e  $h$  sono *W-uniformi*. Per ipotesi di induzione e dato che  $f^{-1}(1) = g^{-1}(1) \cup h^{-1}(1)$  e  $f^{-1}(2) = g^{-1}(2) \cup h^{-1}(2)$  vale che  $\mathfrak{M}, f^{-1}(1) \models \sigma$  e  $\mathfrak{M}, f^{-1}(2) \models \sigma'$  e che  $\mathfrak{M}, (X' \cup Y') \models \psi$ .

- Se  $\psi$  è una sottoformula dalla forma

$$(\bigwedge_{i \in I}/W)\sigma;$$

$\mathfrak{M}, (X' \cup Y') \models \psi$  se e solo se  $\mathfrak{M}, (X' \cup Y')[i, I] \models \sigma$ , quindi se  $\mathfrak{M}, \{s(v/i) : s \in (X' \cup Y'), i \in I\} \models \sigma$ . Dato che  $\mathfrak{M}, X' \models \psi$  e  $\mathfrak{M}, Y' \models \psi$  vale che  $\mathfrak{M}, X'[i, I] \models \sigma$  e che  $\mathfrak{M}, Y'[i, I] \models \sigma$ . È banalmente vero che  $X'[i, I] \cup Y'[i, I] = (X' \cup Y')[i, I]$ . Per ipotesi di induzione, quindi,  $\mathfrak{M}, (X' \cup Y')[i, I] \models \sigma$  e da ciò  $\mathfrak{M}, (X' \cup Y') \models \psi$ .

- Se  $\psi$  è una sottoformula dalla forma

$$(\forall y/W)(\neg R_i(x, y) \vee \sigma)$$

il caso è molto simile al precedente. La differenza di rilievo è che la squadra di assegnamenti  $(X' \cup Y')$  viene ampliata in  $(X' \cup Y')[y, M]_{R_i^m}$ . Nonostante il fatto che l'ampliamento debba assecondare  $R_i^m$  resta vero che  $(X' \cup Y')[y, M]_{R_i^m}$  è l'unione di  $X'[y, M]_{R_i^m}$  e  $Y'[y, M]_{R_i^m}$ . Per ipotesi di induzione, quindi,  $\mathfrak{M}, (X' \cup Y')[i, I]_{R_i^m} \models \sigma$  e da ciò segue  $\mathfrak{M}, (X' \cup Y') \models \psi$ .

- Se  $\psi$  è una sottoformula dalla forma

$$(\bigvee_{i \in I}/W)\sigma;$$

$\mathfrak{M}, (X' \cup Y') \models \psi$  se e solo se  $\mathfrak{M}, (X' \cup Y')[i, f] \models \sigma$  per qualche funzione  $f : (X' \cup Y') \rightarrow I$  che sia  $W$ -uniforme. Dato che  $\mathfrak{M}, X' \models \psi$  e  $\mathfrak{M}, Y' \models \psi$  esistono due funzioni  $g$  e  $h$   $W$ -uniformi tali che  $\mathfrak{M}, X'[i, g] \models \sigma$  e  $\mathfrak{M}, Y'[i, h] \models \sigma$ . Sia  $f$  la funzione definita come

$$f(s) = \begin{cases} g(s) & \text{se } s \in X' \\ h(s) & \text{se } s \in Y' \end{cases}$$

Dato che  $X' \cap Y' = \emptyset$  la funzione  $f$  è ben definita su  $X' \cup Y'$  e ha codominio  $I$ . È, inoltre,  $W$ -uniforme; per ipotesi, infatti, non ci sono  $r \in X'$  e  $s \in Y'$  tali che  $r \not\#_W s$  e se  $r$  e  $s$  appartengono entrambi a  $X'$  o entrambi a  $Y'$  è certo che  $f(r) = f(s)$  data la definizione di  $f$  e dato che  $g$  e  $h$  sono  $W$ -uniformi. Dato che  $X'$  e  $Y'$  sono disgiunti  $(X' \cup Y')[i, f]$  è l'unione di  $X'[i, g]$  e  $Y'[i, h]$ . Per ipotesi di induzione, quindi,  $\mathfrak{M}, (X' \cup Y')[i, f] \models \sigma$  e da ciò segue  $\mathfrak{M}, (X' \cup Y') \models \psi$ .

- Se  $\psi$  è una sottoformula dalla forma

$$(\exists y/W)(R_i(x, y) \wedge \theta)$$

il caso assomiglia al precedente. Vale che  $\mathfrak{M}, (X' \cup Y') \models \psi$  se e solo se  $\mathfrak{M}, (X' \cup Y')[y, f] \models \sigma$  per qualche  $R_i^m$ -funzione  $f : (X' \cup Y') \rightarrow M$  che sia  $W$ -uniforme. Dato che  $\mathfrak{M}, X' \models \psi$  e  $\mathfrak{M}, Y' \models \psi$  esistono due  $R_i^m$ -funzioni  $g$  e  $h$   $W$ -uniformi tali che  $\mathfrak{M}, X'[i, g] \models \sigma$  e  $\mathfrak{M}, Y'[i, h] \models \sigma$ . Sia  $f$  la funzione definita come

$$f(s) = \begin{cases} g(s) & \text{se } s \in X' \\ h(s) & \text{se } s \in Y' \end{cases}$$

Dato che  $X' \cap Y' = \emptyset$  la funzione  $f$  è ben definita su  $X' \cup Y'$  e ha codominio  $I$ . È, inoltre,  $W$ -uniforme; per ipotesi, infatti, non ci sono  $r \in X'$  e  $s \in Y'$  tali che  $r \#_W s$  e se  $r$  e  $s$  appartengono entrambi a  $X'$  o entrambi a  $Y'$  è certo che  $f(r) = f(s)$  data la definizione di  $f$  e dato che  $g$  e  $h$  sono  $W$ -uniformi. La funzione  $f$  è una  $R_i^m$ -funzione, infatti per ogni singolo assegnamento si comporta esattamente come  $g$  o come  $h$  che lo sono. Dato che  $X'$  e  $Y'$  sono disgiunti  $(X' \cup Y')[y, f]$  è l'unione di  $X'[y, g]$  e  $Y'[y, h]$ . Per ipotesi di induzione, quindi,  $\mathfrak{M}, (X' \cup Y')[y, f] \models \sigma$  e da ciò segue  $\mathfrak{M}, (X' \cup Y') \models \psi$ .

Prese due qualsiasi squadre di assegnamenti  $X'$  e  $Y'$  *discendenti* da  $X$  e  $Y$ , per ogni sottoformula  $\psi$  di  $\phi$  vale che se  $\mathfrak{M}, X' \models \psi$  e  $\mathfrak{M}, Y' \models \psi$  allora  $\mathfrak{M}, X' \cup Y' \models \psi$ . È sempre vero, inoltre, che se provo che  $\mathfrak{M}, X' \cup Y' \models \psi$  usando  $X''$  e  $Y''$  *discendenti* di  $X'$  e  $Y'$ , allora lo provo usando una squadra  $Z$  *discendente* di  $X' \cup Y'$  e unione di  $X''$  e  $Y''$ . È possibile, quindi, data una serie di valutazioni per dei *discendenti* di  $X$  e  $Y$ , rispetto a sottoformule  $\phi$  su  $\mathfrak{M}$ , usare le unioni dei diversi *discendenti* per creare una serie di valutazioni per  $X \cup Y$  essendo certi che ogni unione sia un *discendente* di  $X \cup Y$  producibile valutando  $X \cup Y$  su  $\phi$ . In altre parole siamo certi che l'unione di due *discendenti* di  $X$  e  $Y$  per una certa sottoformula sia un *discendente* di  $X \cup Y$  per la stessa sottoformula. *Q.E.D.*

## 4.4 Espressività di IFML

Risultati interessanti che riguardino l'espressività di alcune logiche modali independence friendly si possono trovare nei lavori di Tulenheimo e Sevenster<sup>4</sup>. Per riuscire a riportare i teoremi che interessano l'argomento che si sta trattando è necessario introdurre alcune definizioni e qualche concetto nuovo; questa introduzione agli strumenti usati nelle dimostrazioni è indispensabile nonostante non verranno riportati esattamente i teoremi contenuti nelle opere citate ma un adattamento di essi adeguato al linguaggio e alla formulazione usati fino a qui. In questa sezione vi è una rielaborazione delle idee di Tulenheimo e Sevenster<sup>5</sup> finalizzata all'adeguamento delle stesse per IFML. Alcuni passaggi delle dimostrazioni che non dipendono dal linguaggio di riferimento non sono stati svolti completamente dato che la tecnica originale

<sup>4</sup>In particolare [Tulenheimo 2005] e [Tulenheimo/Sevenster 2006].

<sup>5</sup>[Tulenheimo/Sevenster 2006].

rimane adeguata; per ognuno di questi passaggi si sono indicati in nota i riferimenti per reperire la loro giustificazione.

**Definizione 4.2** Sia  $\tau$  un alfabeto qualsiasi per la logica del primo ordine. Sia  $V$  un qualsiasi insieme finito di variabili contenute in  $\tau$  tale che  $\text{card}(V) = n$ . L'insieme di tutte le formule del primo ordine con alfabeto  $\tau$  nelle quali compaiono solo le variabili in  $V$  è un **frammento a  $n$  variabili** della logica del primo ordine per l'alfabeto  $\tau$ :  $FO^n(\tau)$ .

**Definizione 4.3** Il **frammento con guardia** della logica del primo ordine rispetto a un alfabeto  $\tau$ ,  $GF(\tau)$ , è definito come segue:

Sia  $V$  l'insieme di tutte le variabili di  $\tau$ .

A. Formule Atomiche:

1. Se  $x_1, x_2 \in V$  allora  $x_1 = x_2$  è una formula.
2. Se  $R \in \tau$  è  $n$ -ario e  $x_1, \dots, x_n \in V$  allora  $R(x_1, \dots, x_n)$  è una formula.

B. Formule Complesse

1. Se  $\phi$  e  $\psi$  sono formule allora  $\neg\phi$  e  $\phi \wedge \psi$  sono formule.
2. Siano  $x_1, \dots, x_n \in V$ ; sia  $G$  una formula atomica; sia  $\phi$  una formula le cui variabili libere sono elementi dell'insieme contenente le variabili libere di  $G$ . La stringa  $\exists x_1 \dots x_n (G \wedge \phi)$  è una formula.

La sottoformula atomica  $G$  in  $\exists x_1 \dots x_n (G \wedge \phi)$  è chiamata **guardia** del quantificatore  $\exists x_1 \dots x_n$ .

**Definizione 4.4** Sia  $R \in \tau$  e sia  $\mathfrak{M}$  una struttura con dominio  $M$  definita usando l'alfabeto  $\tau$ . Un insieme finito e non vuoto  $Z \subseteq M$  è  **$R$ -vivo** in  $\mathfrak{M}$  se ha un solo elemento o se esiste un insieme  $X \in R^{\mathfrak{M}}$  tale che  $Z \subseteq X$ . Un insieme finito e non vuoto  $Z \subseteq M$  è  **$\tau$ -vivo** in  $\mathfrak{M}$  se esiste  $R \in \tau$  tale che  $Z$  è  $R$ -vivo in  $\mathfrak{M}$ .

La nozione di insieme  $R$ -vivo determina gli insiemi contenenti un solo elemento o contenenti solo elementi che siano relati tra loro tramite  $R$ ; in altre parole, tutti gli elementi dell'insieme devono essere contenuti in una stessa  $n$ -upla di  $R$ .

**Definizione 4.5** Un  **$\tau$ -isomorfismo parziale finito** tra due strutture  $\mathfrak{M}$  e  $\mathfrak{N}$ , definite usando  $\tau$ , è una funzione parziale iniettiva finita  $f : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$  tale



che, per ogni  $R \in \tau$  di arietà  $n$  e per ogni  $\{a_1, \dots, a_n\}$  sottoinsieme del dominio di  $f$ , valga che  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in R^{\mathfrak{M}}$  se e soltanto se  $\langle f(a_1), \dots, f(a_n) \rangle \in R^{\mathfrak{N}}$ .

**Definizione 4.6** Una  $\tau$ -bisimulazione con guardie tra due strutture  $\mathfrak{M}$  e  $\mathfrak{N}$ , definite usando  $\tau$ , è un insieme  $F$  non vuoto di  $\tau$ -isomorfismi parziali finiti tra  $\mathfrak{M}$  e  $\mathfrak{N}$  tale che per ogni  $f \in F$  se  $f : X \rightarrow Y$  allora:

1. *Zig*: Per ogni insieme  $Z$   $\tau$ -vivo in  $\mathfrak{M}$  esiste una funzione  $g \in F$  con dominio  $Z$  tale che  $g(x) = f(x)$  per ogni  $x \in (X \cap Z)$ .
2. *Zag*: Per ogni insieme  $W$   $\tau$ -vivo in  $\mathfrak{N}$  esiste una funzione  $g \in F$  con immagine  $W$  tale che  $g^{-1}(x) = f^{-1}(x)$  per ogni  $x \in (Y \cap W)$ .

**Definizione 4.7** Sia  $\models_{PO}$  la soddisfazione per le formule del primo ordine. Se  $\phi$  è una formula del primo ordine con alfabeto  $\tau$  che ha variabili libere  $x_1, \dots, x_k$  allora  $\phi$  è **invariante rispetto alle  $\tau$ -bisimulazioni con guardie** se per ogni struttura  $\mathfrak{M}$  e  $\mathfrak{N}$ , per ogni  $\tau$ -bisimulazione con guardie  $F : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$ , per ogni funzione  $f \in F$ , per ogni  $\{m_1, \dots, m_k\}$  sottoinsieme del dominio di  $f$  vale:  $\langle \mathfrak{M}, m_1, \dots, m_k \rangle \models_{PO} \phi$  se e solo se  $\langle \mathfrak{N}, f(m_1), \dots, f(m_k) \rangle \models_{PO} \phi$ .

**Proposizione 4.6** Una qualsiasi formula  $\phi$  del primo ordine è invariante rispetto alle  $\tau$ -bisimulazioni con guardie se e solo se  $\phi$  è logicamente equivalente a una formula di  $GF(\tau)$ .

**Teorema 4.3** Per ogni  $n < \omega$ , fissato un alfabeto  $\tau$ ,  $IFML \not\leq FO^2(\tau)$ .

*Dimostrazione.* Sia  $n \geq 2$  e sia  $\phi_n$  la formula

$$\forall x_1 [\neg R(x_0, x_1) \vee \\ [((\exists x_2 / \{x_1\})(R(x_1, x_2) \wedge T)) \vee \dots \vee ((\exists x_2 / \{x_1\})(R(x_1, x_2) \wedge T))]]$$

in cui il numero di sottoformule  $((\exists x_2 / \{x_1\})(R(x_1, x_2) \wedge T))$  disgiunte è  $n-1$ . Una formula  $\phi_n$  rispetto a una struttura asserisce che esiste una partizione  $P$  dell'insieme degli oggetti assegnati a  $x_1$  tale che la cardinalità di  $P$  è  $n-1$  e tale che, per ogni insieme  $X \in P$ , tutti gli elementi di  $X$  hanno un successore rispetto a  $R$  comune. Le condizioni di verità di  $\phi_n$  possono essere espresse dalla formula del primo ordine  $\phi'_n$

$$\exists z_1 \dots z_{n-1} \forall y [R(x, y) \rightarrow [R(y, z_1) \vee \dots \vee R(y, z_{n-1})]]$$

Tramite il *pebble game*  $G_m^n(\mathfrak{M}, a, \mathfrak{N}, b)$  si può dimostrare che  $\phi'_n \notin FO^n(\tau)$ <sup>6</sup>. Dato qualsiasi  $n < \omega$  è possibile produrre una formula IFML che non abbia equivalenti in  $FO^n(\tau)$ . *Q.E.D.*

**Corollario** *Per le logiche ML e IFML vale  $ML < IFML$ .*

*Dimostrazione.* Fissato un alfabeto  $\tau$  la logica ML è traducibile in  $FO^2(\tau)$  mentre IFML non lo è. Da un punto di vista sintattico se  $\phi \in ML$  allora  $\phi \in IFML$ . Da un punto di vista semantico si rammenti l'equivalenza, a meno di riquantificazioni, enunciata nella proposizione 4.4. Da queste premesse concludiamo che  $ML < IFML$ .<sup>7</sup>

**Teorema 4.4** *Fissato un alfabeto  $\tau$  non esiste una traduzione di IFML in  $GF(\tau)$  che conservi la verità delle formule.*

*Dimostrazione.* Sia  $R$  un simbolo per relazioni binarie. Siano  $\mathfrak{M}$  una struttura relazionale

$$(M, \emptyset, R^{\mathfrak{M}})$$

con

$$\begin{aligned} M &= \{a, b, c, d_1, d_2\}; \\ R^{\mathfrak{M}} &= \{\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, d_1 \rangle, \langle c, d_2 \rangle\}. \end{aligned}$$

Sia  $\mathfrak{N}$  una struttura relazionale

$$(N, \emptyset, R^{\mathfrak{N}})$$

con

$$\begin{aligned} N &= \{a', b', c', d'\}; \\ R^{\mathfrak{N}} &= \{\langle a', b' \rangle, \langle a', c' \rangle, \langle b', d' \rangle, \langle c', d' \rangle\}. \end{aligned}$$

Sia  $F$  l'insieme di funzioni:

$$\begin{aligned} &\{ \{\langle a, a' \rangle\}, \{\langle b, b' \rangle\}, \{\langle c, c' \rangle\}, \{\langle d_1, d' \rangle\}, \{\langle d_2, d' \rangle\}, \\ &\{\langle a, a' \rangle, \langle b, b' \rangle\}, \{\langle a, a' \rangle, \langle c, c' \rangle\}, \{\langle b, b' \rangle, \langle d_1, d' \rangle\}, \{\langle c, c' \rangle, \langle d_2, d' \rangle\} \}. \end{aligned}$$

Dimostriamo che l'insieme  $F$  è una  $\{R\}$ -bisimulazione con guardie. L'insieme  $F$  non è vuoto e ogni suo elemento è un  $\{R\}$ -isomorfismo parziale finito tra

<sup>6</sup>[Tulenheim/Sevenster 2006], p. 492.

<sup>7</sup>Per un'altra versione della dimostrazione si veda [Tulenheim 2003], pp. 487-489.

$\mathfrak{M}$  e  $\mathfrak{N}$ . Restano da dimostrare le proprietà *Zig* e *Zag* per tutti gli elementi  $f : X \rightarrow Y$  di  $F$  e tutti gli insiemi  $Z$   $\{R\}$ -*vivi* in  $\mathfrak{M}$  e tutti gli insiemi  $W$   $\{R\}$ -*vivi* in  $\mathfrak{N}$ . Gli insiemi  $\{R\}$ -*vivi* in  $M$  sono:

$$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d_1\}, \{d_2\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, d_1\}, \{c, d_2\}.$$

Gli insiemi  $\{R\}$ -*vivi* in  $N$  sono:

$$\{a'\}, \{b'\}, \{c'\}, \{d'\}, \{a', b'\}, \{a', c'\}, \{b', d'\}, \{c', d'\}.$$

Anzitutto si noti che per ogni  $f, g \in F$  non avviene, per nessun  $x \in M$  su cui  $f$  e  $g$  siano definite, che  $f(x) \neq g(x)$ . La proprietà *Zig* è quindi banalmente dimostrabile per ogni  $f$  mostrando che per ogni insieme  $Z$   $\{R\}$ -*vivo* in  $M$  esiste una funzione in  $F$  che ha per dominio  $Z$ . Considerando le funzioni inverse delle funzioni  $f \in F$  si nota, invece, che non tutte concordano sull'argomento  $d'$ . È banalmente vero per le funzioni che non hanno nel codominio  $d'$  che vale la proprietà *Zag* per ogni insieme  $\{R\}$ -*vivo* in  $N$ ; i motivi di questo sono gli stessi enunciati per la proprietà *Zig*. Le funzioni

$$\{\langle d_1, d' \rangle\}, \{\langle b, b' \rangle, \langle d_1, d' \rangle\},$$

però, soddisfano l'una per l'altra la richiesta della proprietà *Zag* e le funzioni

$$\{\langle d_2, d' \rangle\}, \{\langle c, c' \rangle, \langle d_2, d' \rangle\}$$

fanno ugualmente. Ovviamente si dà per scontato che per ogni funzione si possa scegliere quella stessa funzione nel caso che l'insieme  $\{R\}$ -*vivo* sia il dominio o il codominio di questa. L'insieme  $F$  è, in conclusione, una  $\{R\}$ -*bisimulazione con guardie* tra  $\mathfrak{M}$  e  $\mathfrak{N}$ . Vale inoltre che  $\mathfrak{M}, \{\langle x_0, a \rangle\}$  e  $\mathfrak{N}, \{\langle x_0, a' \rangle\}$  soddisfano esattamente le stesse formule  $GF(\{R\})$  con variabile libera  $x_0$ <sup>8</sup>. Non vale, però, che

$$\mathfrak{M}, \{\langle x_0, a \rangle\} \models \forall x_1 [\neg R(x_0, x_1) \vee [(\exists x_2 / \{x_1\})(R(x_1, x_2) \wedge T)].$$

La logica IFML non è traducibile, per nessun alfabeto  $\tau$ , in  $GF(\tau)$ . *Q.E.D.*

---

<sup>8</sup>[Tuleneimo 2003], pp. 494.

## 4.5 Decidibilità

In [Sevenster 2010] viene dimostrata la decidibilità del problema della soddisfacibilità di una formula IFML. Per questa dimostrazione Sevenster usa il concetto di *witness system*: una  $n$ -upla  $(w, S_0, \dots, S_m)$  in cui  $w$  è una funzione e  $S_0, \dots, S_m$  sono relazioni. La funzione  $w$  deve mappare sottoformule in squadre di assegnamenti che soddisfano la definizione della semantica per esse. Le relazioni  $S_0, \dots, S_m$  devono corrispondere alle modalità indicate nella formula. Se il *witness system* è coerente e non assegna due sottoformule in modo che generino contraddizione, allora la formula è soddisfacibile. Per dimostrare questo Sevenster usa un algoritmo che percorre l'albero semantico della formula.

**Definizione 4.8** *Sia  $\phi$  una formula IFML con modalità  $K$ ; sia  $B$  un insieme di oggetti; sia  $w$  una funzione che connette ogni sottoformula di  $\phi$  con una squadra di assegnamenti in  $B$ ; sia  $S_h \subseteq (B) \times (B)$  una relazione binaria in  $B$  per ogni  $k_h \in K$ . La  $n$ -upla  $(w, S_0, \dots, S_m)$  è un **witness system** per  $\phi$  (in  $B$ ) se esiste un assegnamento  $s$  in  $B$  tale che  $w(\phi) = \{s\}$ ,  $s$  è definito solo su  $x_0$  e inoltre*

*se  $w(\psi(\vee/W)\psi') = X$  allora esiste una funzione  $f : X \rightarrow \{1, 2\}$  che sia  $W$ -uniforme e tale che  $w(\psi) = f^{-1}(1)$  e  $w(\psi') = f^{-1}(2)$*

*se  $w(\psi \wedge \psi') = X$  allora  $w(\psi) = X$  e  $w(\psi') = X$*

*se  $w(\bigvee_{i \in I} /W)\psi) = X$  allora esiste una funzione  $f : X \rightarrow I$  che sia*

*$W$ -uniforme e tale che  $w(\psi) = X[i, f]$*

*se  $w(\bigwedge_{i \in I} \psi) = X$  allora  $w(\psi) = X[i, I]$*

*se  $w((\exists y/W)(R_i(x, y) \wedge \psi)) = X$  allora esiste una  $S_i$ -funzione  $f : X \rightarrow B$  che sia  $W$ -uniforme e tale che  $w(\psi) = X[y, f]$*

*se  $w((\forall y/W)(\neg R_i(x, y) \vee \psi)) = X$  allora  $w(\psi) = X[y, B]_{S_i}$*

L'assegnamento  $s$  è definito solo su  $x_0$  perché è l'unica variabile libera della formula; quell'unica variabile che un assegnamento che soddisfa una formula ben formata deve assegnare.

**Definizione 4.9** Un *witness system* per  $\phi$  è **chiuso** se esistono  $\psi = P(x)$  e  $\psi' = \neg P(x')$  sottoformule di  $\phi$  e un assegnamento  $s \in w(\psi)$  e un assegnamento  $s' \in w(\psi')$  tali che  $s(x) = s'(x')$ . Un *witness system* non chiuso è **aperto**.

**Definizione 4.10** Un **assegnamento in  $w$**  è un qualsiasi assegnamento  $s$  che sia in una squadra di assegnamenti  $w(\psi)$  per qualche sottoformula  $\psi$  di  $\phi$ .

**Teorema 4.5** Se esiste un *witness system* per  $\phi$  aperto, allora  $\phi$  è soddisfacibile.

*Dimostrazione* Sia  $(w, (S_m)_{m \in K})$  un *witness system* aperto per  $\phi$  in  $B$ ; sia

$$\mathfrak{M} = (M, (P_n^{\mathfrak{M}})_n, (R_m^{\mathfrak{M}})_m)$$

la struttura definita da

$$\begin{aligned} M &= B, \\ R_m^{\mathfrak{M}} &= S_m \end{aligned}$$

e

$$P_n^{\mathfrak{M}} = \bigcup_{\psi} \{s(x) : s \in w(\psi)\}$$

in cui  $\psi$  è una sottoformula dalla forma  $P_n(x)$ . Stabiliamo induttivamente che, per ogni  $\psi$  sottoformula di  $\phi$ ,  $\mathfrak{M}, w(\psi) \models \psi$ .

- Se  $\psi = P(x)$ ;  $\mathfrak{M}, w(\psi) \models \psi$  se e solo se  $s(x) \in P_n^{\mathfrak{M}}$  per ogni  $s \in w(\psi)$ . Si supponga per assurdo che esista un  $s \in w(\psi)$  tale che  $s(x) \notin P_n^{\mathfrak{M}}$ . Per la definizione di *witness system*, allora, dovrebbe esistere una sottoformula  $\psi' = \neg P(x')$  in  $\phi$  e un assegnamento  $s' \in w(\psi')$  tale che  $s'(x') = s(x)$ . Il *witness system* sarebbe chiuso, contro l'ipotesi.  $\perp$
- Se  $\psi = \neg P(x)$ ;  $\mathfrak{M}, w(\psi) \models \psi$  se e solo se  $s(x) \notin P_n^{\mathfrak{M}}$  per ogni  $s \in w(\psi)$ . Si supponga per assurdo che esista un  $s \in w(\psi)$  tale che  $s(x) \in P_n^{\mathfrak{M}}$ . Per la definizione di *witness system*, allora, dovrebbe esistere una sottoformula  $\psi' = P(x')$  in  $\phi$  e un assegnamento  $s' \in w(\psi')$  tale che  $s'(x') = s(x)$ . Il *witness system* sarebbe chiuso, contro l'ipotesi.  $\perp$

Per sviluppare la dimostrazione induttiva, si supponga ora che per ogni formula  $\sigma$  tale che  $\text{subf}(\sigma)$  contiene  $n$  elementi o meno,  $w(\sigma) \models \sigma$ . Dimostriamo ora che, per ogni  $\psi$  tale che  $\text{subf}(\psi)$  contiene  $n + 1$  elementi,  $w(\psi) \models \psi$ .

- Se  $\psi = \lambda(\vee/W)\lambda'$ ;  $\mathfrak{M}, w(\psi) \models \psi$  se e solo se  $\mathfrak{M}, f^{-1}(1) \models \lambda$  e  $\mathfrak{M}, f^{-1}(2) \models \lambda'$  per qualche  $f : w(\psi) \rightarrow \{1, 2\}$  che sia  $W$ -uniforme. Si supponga per assurdo che non esista una tale  $f$ . Per la definizione di *witness system*, allora, non sarebbe vero che  $w(\lambda(\vee/W)\lambda') = w(\psi)$ ; ma dato che  $\psi = \lambda(\vee/W)\lambda'$ , non sarebbe vero che  $w(\psi) = w(\psi)$ .  $\perp$
- Se  $\psi = \lambda(\wedge/W)\lambda'$ ;  $\mathfrak{M}, w(\psi) \models \psi$  se e solo se  $\mathfrak{M}, w(\psi) \models \lambda$  e  $\mathfrak{M}, w(\psi) \models \lambda'$ . Si supponga per assurdo che questo non sia vero. Per la definizione di *witness system*  $w(\psi) = w(\lambda) = w(\lambda')$ . Segue quindi che  $\mathfrak{M}, w(\lambda) \not\models \lambda$  e  $\mathfrak{M}, w(\lambda') \not\models \lambda'$ . Dato che si è supposto che, per tutte le formule  $\sigma$  tali che  $\text{subf}(\sigma)$  contiene meno elementi rispetto a  $\text{subf}(\psi)$ ,  $\mathfrak{M}, w(\sigma) \models \sigma$ ; e dato che  $\text{subf}(\lambda)$  e  $\text{subf}(\lambda')$  contengono meno elementi di  $\text{subf}(\sigma)$ , per come  $\sigma$  è definita; allora, contrariamente a quanto dedotto sopra, non sarebbe vero  $\mathfrak{M}, w(\lambda) \models \lambda$  né  $\mathfrak{M}, w(\lambda') \models \lambda'$ .  $\perp$
- Se  $\psi = (\bigvee_{i \in I}/W)\lambda$ ;  $\mathfrak{M}, w(\psi) \models \psi$  se e solo se  $\mathfrak{M}, w(\psi)[i, f] \models \lambda$  per qualche  $f : w(\psi) \rightarrow I$  che sia  $W$ -uniforme. Si supponga per assurdo che non esista una tale  $f$ . Per la definizione di *witness system*, allora, non sarebbe vero che  $w((\bigvee_{i \in I}/W)\lambda) = w(\psi)$ ; ma dato che  $\psi = (\bigvee_{i \in I}/W)\lambda$ , non sarebbe vero che  $w(\psi) = w(\psi)$ .  $\perp$
- Se  $\psi = (\bigwedge_{i \in I}/W)\lambda$ ;  $\mathfrak{M}, w(\psi) \models \psi$  se e solo se  $\mathfrak{M}, w(\psi)[i, I] \models \lambda$ . Si supponga per assurdo che questo non sia vero. Dato che, per la definizione di *witness system*,  $w(\psi)[i, I] = w(\lambda)$ , allora  $\mathfrak{M}, w(\lambda) \not\models \lambda$ . Dato che si è supposto che, per tutte le formule  $\sigma$  tali che  $\text{subf}(\sigma)$  contiene meno elementi rispetto a  $\text{subf}(\psi)$ ,  $\mathfrak{M}, w(\sigma) \models \sigma$ ; e dato che  $\text{subf}(\lambda)$  contiene meno elementi di  $\text{subf}(\sigma)$ , per come  $\sigma$  è definita; allora, contrariamente a quanto dedotto sopra, non sarebbe vero  $\mathfrak{M}, w(\lambda) \models \lambda$ .  $\perp$
- Se  $\psi = ((\exists y/W)(R_i(x, y) \wedge \lambda))$ ;  $\mathfrak{M}, w(\psi) \models \psi$  se e solo se  $\mathfrak{M}, w(\psi)[n_{n+1}, f] \models \lambda$  per qualche  $R_i^{\mathfrak{M}}$ -funzione  $f : w(\psi) \rightarrow M$  che sia  $W$ -uniforme. Si supponga per assurdo che non esista una tale funzione. Per la definizione di *witness system*, allora, non è vero che  $w(\psi) = w((\exists y/W)(R_i(x, y) \wedge \lambda))$ ; poiché  $\psi = ((\exists y/W)(R_i(x, y) \wedge \lambda))$ , non sarebbe vero che  $w(\psi) = w(\psi)$ .  $\perp$

- Se  $\psi = ((\forall y/W)(\neg R_i(x, y) \vee \lambda))$ ;  $\mathfrak{M}, w(\psi) \models \psi$  se e solo se  $\mathfrak{M}, w(\psi)[y, M]_{R_i^{\mathfrak{M}}} \models \lambda$ . Si supponga per assurdo che questo non sia vero. Dato che, per la definizione di *witness system*,  $w(\psi)[y, M]_{R_i^{\mathfrak{M}}} = w(\lambda)$ , allora  $\mathfrak{M}, w(\lambda) \not\models \lambda$ . Dato che si è supposto che, per tutte le formule  $\sigma$  tali che  $subf(\sigma)$  contiene meno elementi rispetto a  $subf(\psi)$ ,  $\mathfrak{M}, w(\sigma) \models \sigma$ ; e dato che  $subf(\lambda)$  contiene meno elementi di  $subf(\sigma)$ , per come  $\sigma$  è definita; allora, contrariamente a quanto dedotto sopra, non sarebbe vero  $\mathfrak{M}, w(\lambda) \models \lambda$ .  $\perp$

Abbiamo dimostrato che  $\mathfrak{M}, w(\psi) \models \psi$  per tutte le formule  $\psi$  tali che  $subf(\psi)$  ha uno o due elementi; inoltre, se ogni formula  $\psi$  tale che  $subf(\psi)$  ha  $n$  o meno elementi possiede questa proprietà, la possiedono anche tutte le formule  $\psi'$  tali che  $subf(\psi')$  ha  $n + 1$  elementi. Segue da questo che ogni formula IFML possiede tale proprietà; se esiste, quindi un *witness system* aperto per  $\psi$  allora  $\psi$  è soddisfacibile. *Q.E.D.*

**Teorema 4.6** *Sia  $\phi$  una formula IFML. Se  $\phi$  è soddisfacibile in una struttura  $\mathfrak{M} = (M, (P_l^{\mathfrak{M}})_l, (R_m^{\mathfrak{M}})_m)$ , allora esiste un *witness system* per  $\phi$  aperto.*

*Dimostrazione* Per prima cosa mostriamo un algoritmo non deterministico che produca un albero semantico per ogni formula IFML tradotta che riceva in input. Quando nell'algoritmo si usa l'espressione 'per qualche' si intende riferirsi a una scelta non deterministica.

---

**Algoritmo 1.**

---

**Input:** una formula IFML  $\phi$  con variabili  $x_0, \dots, x_n$  e simboli di relazione  $R_1, \dots, R_m$ .

**Output:** un witness system  $(w, S_0, \dots, S_m)$ .

**Dichiarazioni:** insiemi  $N_0, \dots, N_n, T$ ; relazioni binarie  $S_0, \dots, S_m$ ; una funzione  $w$  con dominio  $subf(\phi)$ .

Per qualche oggetto  $b$ ,  $w(\phi) \leftarrow \{(x_0, b)\}$  e  $N_0 \leftarrow \{b\}$

**Per  $h$  che vada da 0 a  $n$  esegui**

▷ **Per ogni** sottoformula  $\psi$  di  $\phi$  con variabile libera  $x_h$  sulla quale  $w$  è definita **esegui**

▷▷ **se**  $\psi = \lambda(\vee/W)\lambda'$  e  $w$  non è definita per  $\lambda$  e  $\lambda'$  **allora**  
 $w(\lambda) \leftarrow f^{-1}(1)$  e  $w(\lambda') \leftarrow f^{-1}(2)$ , per qualche  $f : w(\psi) \rightarrow \{1, 2\}$

▷▷ **se**  $\psi = \lambda \wedge \lambda'$  e  $w$  non è definita su  $\lambda$  e  $\lambda'$  **allora**  
 $w(\lambda) \leftarrow w(\psi)$  e  $w(\lambda') \leftarrow w(\psi)$

▷▷ **se**  $\psi = (\bigvee_{i \in I}/W)\lambda$  e  $w$  non è definita su  $\lambda$  **allora**  
 $w(\lambda) \leftarrow w(\psi)[i, f]$  per qualche  $f : X \rightarrow I$  che sia  $W$ -uniforme

▷▷ **se**  $\psi = (\bigwedge_{i \in I}/W)\lambda$  e  $w$  non è definita su  $\lambda$  **allora**  
 $w(\lambda) \leftarrow w(\psi)[i, I]$

---



- 
- ▷▷ **se**  $\psi = (\exists x_{h+1}/W)(R_i(x_h, x_{h+1}) \wedge \lambda)$  e  $w$  non è definita su  $\lambda$   
**allora**  
 sia  $N^f$  un insieme che ha tanti elementi nuovi quanti sono gli  
 assegnamenti in  $X$ ,  
 $N_h \leftarrow N_{h+1} \cup N^f$ ,  
 $w(\lambda) \leftarrow w(\psi)[x_{h+1}, f]$  per ogni  $f : X \rightarrow N^f$  che sia  
 $W$ -massimale  
**per ogni**  $s \in w(\psi)$  **esegui**  
 aggiungi  $(s(x_h), f(s))$  a  $S_l$  con  $l$  indice della modalità  
 $s(i) = k_l$
- ▷ **Per ogni** sottoformula  $\psi$  di  $\phi$  con variabile libera  $x_h$  sulla quale  
 $w$  è definita **esegui**
- ▷▷ **se**  $\psi = \forall x_{h+1}(\neg R(x_h, x_{h+1}) \vee \lambda)$  e  $w$  non è definito su  $\lambda$  **allora**  
 sia  $S_i$  la funzione che assegna  $S_l$  alla modalità  $k_l$  per  $0 \leq l \leq m$   
 $w(\lambda) \leftarrow w(\psi)[x_{h+1}, N_{h+1}]_{S_i}$
- 

**Proposizione 4.7** *Sia  $(w, (S_m)_m)$  un witness system risultante dall'algoritmo 1 sulla formula IFML  $\phi$ . Allora*

1. per ogni  $\psi$  sottoformula di  $\phi$  con con variabile libera  $x_h$  e con  $s \in w(\psi)$ ,  
 $s(x_h)$  sarà in  $N_h$ ;
2. per ogni  $0 \leq h < h' \leq n$ , gli insiemi  $N_h$ ,  $N_{h'}$  e  $T$  sono tutti mutuamente  
 disgiunti;
3. per ogni  $(a, b) \in S_m$  esiste un  $h$  tale che  $0 \leq h < n$  e  $a \in N_h$  e  $b \in N_{h+1}$ .

*Dimostrazione.* Si veda l'algoritmo 1.

Gli insiemi  $N^f$  indicano i nuovi oggetti che, tramite  $f$ , gli assegnamenti già in  $X$  associano alle variabili non ancora assegnate. Questi insiemi vengono generati nei cicli del quantificatore esistenziale per essere riutilizzati nei cicli del quantificatore universale. Il numero di oggetti in ciascuno di essi non deve essere superato dal numero di valori distinti di  $f$ ; dato che questo numero è evidentemente inferiore o uguale al numero di assegnamenti già in  $X = w(\psi)$ , si può semplicemente usare questo numero in qualità di limite superiore del codominio di  $f$ .

Seguendo il metodo di Sevenster<sup>9</sup> bisogna introdurre la funzione  $\pi$  che interpreta gli oggetti della struttura del *witness system* generato dall'algoritmo 1 nella struttura che soddisfa  $\phi$ ; essa rappresenta il tramite tra  $\mathfrak{M}$  e  $w(\phi)$ . La funzione  $\pi$ , quindi, rappresenta ogni oggetto del *witness system* in un oggetto della struttura e lascia immutate le modalità. Si userà nel seguente lemma la composizione  $\pi \circ s$  di  $\pi$  e un qualche assegnamento  $s$ ; il valore dell'applicazione di questa sarà quindi  $\pi \circ s(x) = \pi(s(x))$  per ogni variabile  $x$  nel dominio di  $s$ ,  $\pi \circ s(i) = s(i)$  per ogni indice  $i$  nel dominio di  $s$ . La scrittura  $\pi \circ X$ , con  $X$  squadra di assegnamenti, indicherà l'insieme  $\{\pi \circ s : s \in X\}$ .

**Lemma 4.8** *Se  $\phi$  è una formula IFML soddisfacibile su strutture  $\mathfrak{M} = (M, (P_l^{\mathfrak{M}})_l, (R_m^{\mathfrak{M}})_m)$  esiste un witness system aperto per  $\phi$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\mathfrak{M}$  una struttura e  $s = \{(x_0, c)\}$  una squadra di assegnamenti tale che  $\mathfrak{M}, s \models \phi$ ; sia  $b$  l'oggetto menzionato nell'algoritmo 1 e sia  $\pi(b) = c$ ; allora

$$\mathfrak{M}, \pi \circ w(\psi) \models \psi$$

per ogni  $\psi$  sottoformula di  $\phi$ . Lo si dimostra per induzione sulla complessità inversa di  $\psi$ . Una formula  $\sigma$  è più complessa di una formula  $\psi$  se e solo se  $\psi$  è sottoformula di  $\sigma$ .

- Se

$$\psi = \phi$$

dato che  $\mathfrak{M}, \{s\} \models \phi$  e  $\pi \circ w(\phi) = \{s\}$  è ovvio.

Supponiamo che per ogni sottoformula  $\sigma$  di  $\phi$  che sia più complessa di  $\psi$  o uguale a  $\psi$  valga  $\mathfrak{M}, \pi \circ w(\sigma) \models \sigma$  e dimostriamo che  $\mathfrak{M}, \pi \circ w(\psi) \models \psi$ .

- Se

$$\psi = \lambda(\vee/W)\lambda'$$

per ipotesi di induzione  $\mathfrak{M}, \pi \circ w(\psi) \models \psi$ . Esiste, quindi, una funzione  $f : \pi \circ w(\psi) \rightarrow \{1, 2\}$  *W-uniforme* tale che  $\mathfrak{M}, f^{-1}(1) \models \lambda$  e  $\mathfrak{M}, f^{-1}(2) \models \lambda'$ . Rendiamo deterministica la scelta rendendo  $w(\lambda) = \{s \in w(\psi) : f(\pi \circ s) = 1\}$  e agendo dualmente per  $w(\lambda')$ . Dato che  $\pi \circ w(\lambda) = f^{-1}(1)$  e  $\pi \circ w(\lambda') = f^{-1}(2)$  abbiamo dimostrato la tesi per questo caso.

---

<sup>9</sup>[Sevenster 2010].

- Se

$$\psi = \lambda \wedge \lambda'$$

per ipotesi di induzione  $\mathfrak{M}, \pi \circ w(\psi) \models \psi$ . La squadra di assegnamenti  $\pi \circ w(\psi)$  deve soddisfare su  $\mathfrak{M}$  anche  $\lambda$  e  $\lambda'$ ; dato che l'algoritmo uguaglia  $w(\lambda) = w(\lambda') = w(\psi)$  si ottiene  $\pi \circ w(\lambda) \models \lambda$ ,  $\pi \circ w(\lambda') \models \lambda'$  ed è dimostrata la tesi per questo caso.

- Se

$$\psi = \left( \bigvee_{i \in I} / W \right) \lambda$$

per ipotesi di induzione  $\mathfrak{M}, \pi \circ w(\psi) \models \psi$ . Esiste allora una funzione  $W$ -uniforme  $f : \pi \circ w(\psi) \rightarrow I$  tale che  $\mathfrak{M}, \pi \circ w(\psi)[i, f] \models \lambda$ . Sia  $g$  una funzione  $W$ -massimale e stabiliamo che  $w(\lambda) = w(\psi)[i, g]$ . Per ogni  $s \in w(\psi)$  sia  $\pi(g(s)) = f(\pi \circ s)$ . Dato che  $g$  è  $W$ -massimale non ci sono assegnamenti  $s$  e  $s'$  tali che  $g(s) = g(s')$  mentre  $f(\pi \circ s) \neq f(\pi \circ s')$ . Per ogni assegnamento  $s \in w(\psi)$  valgono le uguaglianze

$$(\pi \circ s) \cup \{(i, f(\pi \circ s))\} = (\pi \circ s) \cup \{(i, \pi(g(s)))\} = \pi \circ (s \cup \{(i, g(s))\}).$$

Di conseguenza  $(\pi \circ w(\psi))[i, f] = \pi \circ (w(\psi)[i, g])$ . Dato che  $w(\lambda) = w(\psi)[i, g]$ ,  $\mathfrak{M}, \pi \circ w(\lambda) \models \lambda$  ed è dimostrata la tesi per questo caso.

- Se

$$\psi = \bigwedge_{i \in I} \lambda$$

per ipotesi di induzione  $\mathfrak{M}, \pi \circ w(\psi) \models \psi$ . Quindi vale  $\pi \circ w(\psi)[i, I] \models \lambda$ . Dato che l'algoritmo stabilisce che  $w(\lambda) = w(\psi)[i, I]$  vale anche  $\pi \circ w(\lambda) \models \lambda$  e si è dimostrata la tesi per questo caso.

- Se

$$\psi = (\exists x_{h+1} / W)(R_i(x_h, x_{h+1}) \wedge \lambda)$$

per ipotesi di induzione  $\mathfrak{M}, \pi \circ w(\psi) \models \psi$ . Esiste quindi un  $R_i^{\mathfrak{M}}$ -funzione  $f : \pi \circ w(\psi) \rightarrow M$   $W$ -uniforme tale che  $(\pi \circ w(\psi))[x_{h+1}, f] \models \lambda$ . Sia  $g : w(\psi) \rightarrow N^g$  una funzione  $W$ -massimale tramite la quale definiamo  $w(\lambda) = w(\psi)[x_{h+1}, g]$ . La funzione  $g$  è una  $S_i$ -funzione dato il ciclo 'per ogni' più interno. Per ogni  $s \in w(\psi)$  sia  $\pi(g(s)) = f(\pi \circ s)$ . Dato che  $g$  è  $W$ -massimale non ci sono assegnamenti  $s$  e  $s'$  tali che  $g(s) = g(s')$

mentre  $f(\pi \circ s) \neq f(\pi \circ s')$ . Per ogni assegnamento  $s \in w(\psi)$  valgono le uguaglianze

$$\begin{aligned} (\pi \circ s) \cup \{(x_{h+1}, f(\pi \circ s))\} &= \\ &= (\pi \circ s) \cup \{(x_{h+1}, \pi(g(s)))\} \\ &= \pi \circ (s \cup \{(x_{h+1}, g(s))\}). \end{aligned}$$

Di conseguenza  $(\pi \circ w(\psi))[x_{h+1}, f] = \pi \circ (w(\psi)[x_{h+1}, g])$ . Dato che  $w(\lambda) = w(\psi)[x_{h+1}, g]$ ,  $\mathfrak{M}, \pi \circ w(\lambda) \models \lambda$  e la tesi è dimostrata per questo caso.

- Se

$$\psi = (\forall x_{h+1}/W)(\neg R_i(x_h, x_{h+1}) \vee \lambda)$$

per ipotesi di induzione  $\mathfrak{M}, \pi \circ w(\psi) \models \psi$ . Vale quindi che  $\mathfrak{M}, \pi \circ w(\psi)[x_{h+1}, M]_{R_i^m} \models \lambda$ . È necessario dimostrare che  $\mathfrak{M} \circ w(\lambda) \models \lambda$  e, secondo l'algoritmo 1, che

$$w(\lambda) = w(\psi)[x_{h+1}, N_{h+1}]_{S_i} \quad (4.1)$$

in cui  $S_i$  è la funzione che mappa la modalità  $k_l$  nella relazione  $S_l$  della  $h$ -esima reiterazione dell'algoritmo. L'algoritmo genera un insieme di oggetti  $N_{j_{h+1}}$  costruito sopra ai precedenti  $N_{j_h}$  considerando solo le variabili vincolate da una relazione  $S_i$ . Quando ha inizio il ciclo del quantificatore universale per le variabili vincolate dalle relazioni  $S_i$  l'insieme  $N_{j_{h+1}}$  che serve al momento è già completo. Altre iterazioni  $h' > h$  dell'algoritmo non estendono la relazione  $S_l$  con coppie  $(a, b) \in N_{j_h} \times N_{j_{h+1}}$ . Sia  $\pi(N_{j_i}) = \{\pi(a) : a \in N_{j_i}\}$ ; sia  $\pi(S_l) = \{(\pi(a), \pi(b)) : (a, b) \in S_l\}$  e sia  $\pi(S_i)$  la funzione che assegna  $\pi(S_l)$  a  $k_l$ ; allora  $\pi \circ (w(\psi)[x_{h+1}, N_{j_{h+1}}]) = (\pi \circ w(\psi))[x_{h+1}, \pi(N_{j_{h+1}})]$ . Facendo sì che questi insiemi assecondino la relazione si ottiene l'equivalenza

$$\pi \circ (w(\psi)[x_{h+1}, N_{j_{h+1}}]_{S_i}) = (\pi \circ w(\psi))[x_{h+1}, \pi(N_{j_{h+1}})]_{\pi(S_i)}. \quad (4.2)$$

Chiaramente  $\pi(N_{j_{h+1}}) \subseteq M$ . Per ogni  $(a, b) \in S_l$  vale che  $(\pi(a), \pi(b)) \in R_i^m$ , e quindi che  $\pi(S_l) \subseteq R_i^m$ . Di conseguenza

$$(\pi \circ w(\psi))[x_{h+1}, \pi(N_{j_{h+1}})]_{\pi(S_i)} \subseteq (\pi \circ w(\psi))[x_{h+1}, M]_{R_i^m}. \quad (4.3)$$

Unendo quest'ultima inclusione (3.3) con (3.1) e (3.2) deriviamo che  $\pi \circ w(\lambda) \subseteq (\pi \circ w(\psi))[x_{h+1}, M]_{R_i^m}$ . Segue dalla proprietà della *downward closure* (teorema 4.1) che  $\mathfrak{M}, w(\lambda) \models \lambda$  ed è dimostrata la tesi per questo caso.

Dato che  $\mathfrak{M}, \pi \circ w(\psi) \models \psi$  è stato dimostrato per ogni possibile  $\psi$  sottoformula di  $\phi$ ; segue che se  $\phi$  è soddisfacibile su una struttura con  $P$  finito esiste un *witness system* aperto per essa. *Q.E.D.*

# Conclusione

Il presente lavoro si è posto l'obiettivo di presentare in maniera chiara e documentata le principali e più fondamentali caratteristiche delle logiche modali *independence friendly*, e insieme di descrivere l'ambito all'interno del quale sono sorte le motivazioni e le tecniche di rappresentazione proprie di queste logiche. Per tutto il testo si è cercato di rendere conto dettagliatamente, per quanto possibile, dei punti di contatto e delle differenze presenti tra IFML, le logiche IF non modali e le logiche modali proposizionali classiche. Uno dei principali obiettivi metodologici che si è cercato di raggiungere in questo lavoro è stata l'esposizione particolareggiata e la chiarificazione dei meccanismi di basso livello rilevanti nei confronti delle questioni teoriche di maggior interesse. La discussione del rapporto che sussiste tra le logiche in cui è rappresentata esplicitamente la dipendenza e la logica predicativa del secondo ordine, la presentazione della semantica composizionale e l'analisi delle possibilità espressive e dei limiti delle logiche modali *independence friendly* sono stati gli argomenti per i quali si è cercato di mantenere più stretto il contatto con i procedimenti e con le giustificazioni tecniche, in modo da rendere conto fin nei minimi dettagli dei motivi pragmatici su cui sono fondati i risultati teorici. Le spiegazioni di concetti, nozioni e strumenti usati durante le dimostrazioni e le definizioni perseguono lo stesso scopo: la considerazione più completa possibile di tutti i punti di vista che possono spiegare i passaggi minimi che costituiscono le basi del funzionamento di alto livello delle logiche studiate. Si è cercato, in conclusione, di dichiarare il ruolo e il significato di ogni elemento dei meccanismi basilari rispetto alle dinamiche generali delle logiche, e di dare una spiegazione nei termini di questi meccanismi per ogni caratteristica teorica e metateorica della logica. In questo modo si è cercato di creare un passaggio fluido, e senza salti qualitativi, tra il funzionamento dei dispositivi logici e alcune tendenze generali dell'intero complesso della logica. Questo sembra risultare di particolare interesse dati gli oggetti

considerati nel testo: le logiche IF nascono grazie a idee semplici e operano con meccanismi logici basilari, ma mostrano proprietà, anomale rispetto alle logiche classiche, di grande rilievo e profondità.

Nel primo capitolo, cercando di analizzare l'insieme di studi e idee che hanno maggiormente contribuito a far nascere l'interesse per gli elementi portanti delle logiche *independence friendly* e per gli strumenti che servono a esse, si è rilevato il rapporto simmetrico tra i meccanismi delle logiche IF e i quantificatori di Henkin; questo si manifesta se si considera che i primi permettono di indicare in modo esplicito l'indipendenza all'interno di una formula mentre i secondi rappresentano direttamente le dipendenze. Una interpretazione di questo tipo, di fatto, è suggerita anche da Feferman in *What kind of logic is Independence Friendly logic?*<sup>10</sup>. Il rapporto tra logiche IF e logiche con quantificatori di Henkin, si è visto, non è interessante esclusivamente in sé, ma apporta un considerevole numero di risultati sulle logiche IF grazie alla letteratura già esistente che riguarda i quantificatori diramati. Direttamente da questo accostamento deriva l'equivalenza tra IF e  $\Sigma_1^1$ , anche se si possono impostare traduzioni dirette; e, tramite la skolemizzazione al secondo ordine, i dispositivi IF relativi ai quantificatori guadagnano una rappresentazione chiara e intuitiva.

Non si difende in questo testo l'idea che le logiche IF permettano di paragonare l'espressività di alcune logiche del secondo ordine restando al primo ordine. Hintikka sembra sostenere qualcosa del genere affermando che le logiche IF siano logiche del primo ordine per via del tipo di entità quantificate in esse<sup>11</sup>. La possibilità però di connettere, grazie allo studio di queste logiche, l'ordinamento dei quantificatori e le gerarchie di dipendenze tra variabili all'espressività e all'ordine di una logica è indiscussa. Si spera di aver svelato e chiarito, in questo testo, il fitto intreccio di rapporti che lega questi distinti aspetti di una logica, o almeno di aver fornito qualche indicazione utile a farlo. Il rapporto tra linee gerarchiche di variabili e funzioni di interpretazione non è certamente immediato e comprensibile in tutti i suoi risvolti, ma la considerazione delle logiche IF, delle logiche IF modali e della relazione tra di esse fornisce interessanti e utili punti di vista sulla questione. Una formula classica del primo ordine, infatti, corrisponde a un'unica funzione di assegnamento delle sue variabili: perché questa possa essere soddisfatta è sufficiente che esista una sola funzione con determinate caratteristiche. Perché

---

<sup>10</sup>[Feferman 2006].

<sup>11</sup>[Hintikka 2002], p. 409.

sia soddisfacibile una formula del secondo ordine deve esistere una funzione di assegnamento per le variabili individuali, ma devono esistere anche tutte le funzioni quantificate esistenzialmente nella formula stessa. Si è mostrato che l'introduzione delle indipendenze all'interno di una formula del primo ordine può portare alla necessità, per soddisfare la formula, dell'esistenza di più di una funzione. La rottura dell'unica catena di quantificatori linearmente ordinata nei rami di un ordine parziale esclude, in certi casi, la possibilità di definire una sola funzione che indichi l'assegnazione di tutte le variabili; questo riproduce una condizione simile a quella delle formule del secondo ordine in cui si dichiara l'esistenza di almeno una funzione. Sono risultati interessanti, a riguardo, anche gli effetti dell'introduzione della componente modale nella logica IF. Per via dei vincoli agli assegnamenti imposti dalle guardie, necessarie in una traduzione di una logica proposizionale, la potenza espressiva della logica viene notevolmente ridotta e le possibilità di controllo sui modelli di una formula aumentano. Il risultato di queste differenze è evidente nella dimostrazione della decidibilità del problema della soddisfacibilità delle formule IFML; in questa si rileva che un modello qualsiasi di una tale formula deve rispettare una struttura predefinita tramite le guardie sui quantificatori e che tale struttura può essere sfruttata per giudicare automaticamente della sua decidibilità. La strutturazione richiesta agli insiemi di oggetti che soddisfano la formula impedisce anche la definizione implicita di più funzioni come avviene nelle formule IF non modali; è questa che fa sì che la complessità e l'espressività di IFML siano minori rispetto a quelle di IF.

Una caratteristica comune a tutte le logiche IF che influisce considerevolmente su numerose questioni di vario tipo è la mancanza di composizionalità della sintassi. Sia il concetto di sottoformula che la semantica risentono fortemente di questa mancanza. Hodges è riuscito ad architettare un metodo efficace per valutare la soddisfacibilità delle formule in modo composizionale e si possono, in effetti, dimostrare le relazioni tra il valore delle formule e il valore delle loro sottoformule, tra la struttura di una formula e la struttura delle sue sottoformule. Resta, però, problematica la scomposizione di una formula, si pensi ad esempio alla dimostrazione di proprietà quali la *upward closure* di IFML. Le difficoltà che sorgono riguardo alla composizionalità sembrano riguardare un certo carattere storico della composizione e valutazione delle formule delle logiche IF; la storicità di tali formule risiede nella stretta dipendenza della loro struttura sintattica e dei loro meccanismi di valutazione dal procedimento di formazione o scomposizione della formula stessa. L'attribuzione delle indipendenze ai quantificatori e agli operatori



avviene sulla formula ben formata e dipende dalla forma compiuta di essa; questo impone alla strutturazione e al processo di scomposizione della formula una direzione e un ordine, che ha come inizio la formula completa e deve coprire tutti i passaggi intermedi. Alcune dimostrazioni *a fortiori* possono assumere una forma dimostrativa classica per induzione, ma non sempre ci sono le condizioni perché questo sia possibile; le sottoformule IF e IFML infatti non sempre sono fbf e ovviamente l'induzione sulla complessità delle formule risente di questo. Si tenga conto che l'aggettivo 'storico' non è un termine casuale; la semantica *game-teoretica*, infatti, è incentrata sul concetto di *strategia*, e una strategia è una funzione che ha per dominio le possibili *storie* di un gioco: le sequenze di mosse che potrebbero descrivere la parte di partita già giocata. Il fatto che le logiche IF traggano ispirazione da un preciso punto di vista sulle formule logiche sembra avere un effetto molto più profondo del previsto. Sembra difficile accettare, come Hintikka sostiene, che IF «[...] is simply the natural unrestricted first-order logic»<sup>12</sup> e che sia semplicemente frutto di una liberalizzazione della logica del primo ordine<sup>13</sup>. La dipendenza che risuona, negata, nel nome '*independence friendly*' appare quindi essenzialmente legata al processo di valutazione della formula; essa conserva in sé un forte nesso con il carattere dinamico di questo processo. Più che una modifica alla struttura formale che viene valutata, quella apportata dai dispositivi IF, sembra una modifica ai modi della valutazione.

---

<sup>12</sup>[Hintikka 2002], p. 408.

<sup>13</sup>[Hintikka 2002], p. 410.

# Bibliografia

- [Blackburn/Seligman 1995] P. Blackburn e J. Seligman, *Hybrid languages*, «Journal of logic, language and information», 4(1995)3, pp. 251-272.
- [Blass/Gurevich 1986] A. Blass e Y. Gurevich, *Henkin quantifiers and complete problems*, «Annals of pure and applied logic», 32(1986), pp. 1-16.
- [Enderton 1970] H. B. Enderton, *Finite partially-ordered quantifiers*, «Mathematical logic quarterly», 16(1970)8, pp. 393-397.
- [Feferman 2006] S. Feferman, *What kind of logic is Independence Friendly logic?*, in R. E. Auxier e L. E. Hahn (a cura di), *The philosophy of Jaakko Hintikka*, Peru: Open Court, 2006, pp. 453-469.
- [Goldblatt 1992] R. Goldblatt, *Logics of time and computation* (1987), Stanford: Center for the study of language and information, 1992<sup>2</sup>.
- [Henkin 1961] L. Henkin, *Some remarks on infinitely long formulas*, in *Infinitistic methods: proceedings of the Symposium on Foundations of Mathematics, Warsaw, 2-9 September 1959*, Oxford: Pergamon Press, pp. 167-183.
- [Hintikka 1973] J. Hintikka, *Quantifiers vs. quantification theory*, «Dialectica», 27(1973)3-4, pp. 329-358.
- [Hintikka 1996] J. Hintikka, *The principles of mathematics revisited*, Oxford: Oxford University Press, 1996.
- [Hintikka 2002] J. Hintikka, *Hyperclassical logic (a.k.a. IF logic) and its implications for logical theory*, «Bulletin of symbolic logic», 8(2002)3, pp. 404-423.

- [Hodges 1997] W. Hodges, *Compositional semantics for a language of imperfect information*, «Logic journal of the IGPL», 5(1997)4, pp. 539-563.
- [Huges/Cresswell 1996] G. E. Huges e M. J. Cresswell, *A new introduction to modal logic*, New York: Routledge, 1996.
- [Janssen 2002] M. V. Janssen, *Independent choices and the interpretation of IF logic*, «Journal of logic», 11(2002)3, pp. 367-387.
- [Lewis 1983] D. Lewis, *Philosophical papers*, 2 voll., New York: Oxford University Press, 1983, vol. I.
- [Lewis 1986] D. Lewis, *Philosophical papers*, 2 voll., New York: Oxford University Press, 1986, vol. II.
- [Mann/Sandu/Sevenster 2011] A. L. Mann, G. Sandu e M. Sevenster, *Independence-friendly logic: A game-theoretic approach*, New York: Cambridge University Press, 2011.
- [Russell 1903] B. Russell, *The principles of mathematics*, Cambridge: Cambridge University Press, 1903.
- [Sandu 1997] G. Sandu, *The logic of informational independence and finite models*, «Logic journal of the IGPL», 5(1997)1, pp. 79-95.
- [Sevenster 2006] M. Sevenster, *Branches of imperfect information: Logic, games and computation*, tesi Ph. D., ILLC - Universiteit van Amsterdam, 2006.
- [Sevenster 2010] M. Sevenster, *Decidability of independence-friendly modal logic*, «The review of symbolic logic», 3(2010)3, pp. 415-441.
- [Tulenheimo 2003] T. Tulenheimo, *On IF modal logic and its expressive power*, in P. Balbiani, N.-Y. Suzuki, F. Wolter e M. Zakharyashev (a cura di), *Advances in modal logic, vol. 4*, London: King's College Publications, 2003, pp. 475-498.
- [Tulenheimo 2005] T. Tulenheimo, *Independence-friendly modal logic: Studies in its expressive power and theoretical relevance*, tesi Ph. D., University of Helsinki, 2005.

- [Tulenheimo 2009] T. Tulenheimo, *Independence friendly logic*, Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2009:  
<<http://plato.stanford.edu/archives/sum2009/entries/logic-if>>.
- [Tulenheimo/Sevenster 2006] T. Tulenheimo e M. Sevenster, *On modal logic, IF logic and IF modal logic*, in I. Hodkinson e Y. Venema (a cura di), *Advances in modal logic*, London: College Publications, 2006, vol. VI, pp. 481-501.
- [Väänänen 1993-1994] J. Väänänen, *A short course on finite model theory*, University of Helsinki:  
<[math.helsinki.fi/logic/people/jouko.vaananen/shortcourse.pdf](http://math.helsinki.fi/logic/people/jouko.vaananen/shortcourse.pdf)>.
- [Walkoe 1970] W. J. Jr. Walkoe, *Finite partially-ordered quantification*, «Journal of symbolic logic», 35(1970), pp. 535-555.