Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

IL MODELLO IPERBOLICO DEL FLUIDO PERFETTO BAROTROPICO E IL PROBLEMA DELL'INSTABILITA' GRAVITAZIONALE SECONDO JEANS

Tesi di Laurea in Meccanica dei Sistemi Complessi

Relatore:
Chiar.ma Prof.
FRANCA FRANCHI

Presentata da:
GIULIA CARIGI

II Sessione
2012-2013

Alla mia famiglia.

Indice

Introduzione

Nei primi anni del ventesimo secolo, Sir James H. Jeans studiò la propagazione di una fluttuazione di densità di piccola ampiezza in una nube di gas omogenea, infinita spazialmente, in quiete e autogravitante, dotata, cioè, di potenziale Newtoniano di autogravità. Il risultato fondamentale del suo lavoro è il famoso *criterio di Jeans* per l'insorgenza dell'instabilità gravitazionale. Questo criterio ci dà una soglia minima per il numero d'onda della perturbazione, sotto la quale l'ampiezza può crescere esponenzialmente, portando al collasso gravitazionale del mezzo. Il criterio di Jeans può essere espresso anche come relazione tra masse; così il mezzo può diventare instabile quando la sua massa supera un valore critico, detto massa di Jeans.

Lo studio della stabilità di uno stato di equilibrio è di grande importanza non solo nella meccanica classica, ma anche nell'ambito astrofisico; quest'analisi ci permette, infatti, di ottenere informazioni quantitative e qualitative sul sistema in esame. Ad esempio Laplace, nel 1802, mostrò che gli anelli di Saturno non possono essere schematizzati come corpi rigidi, come in molti credevano all'epoca, perchè altrimenti il loro moto dovrebbe essere instabile.

In ambito astrofisico l'analisi delle instabilità dei sistemi stellari può essere semplificata grazie alle analogie con altri tipi di sistemi, come ad esempio i fluidi perfetti barotropici autogravitanti, già presi in esame da Jeans. Più generalmente un mezzo interstellare è descritto da un plasma magnetoidrodinamico (con effetti magnetici sia ideali che non, a seconda della legge di Ohm classica o generalizzata), realisticamente non isotermo in cui, eventualmente, si possa tenere conto anche di effetti collisionali di rilassamento, sia termici che viscosi. È compito della ricerca attuale proporre modellamenti matematici sempre più complessi, ma senz'altro più coerenti non solo con la realtà astrofisica ma

anche con le evidenze osservative da satellite: in questo contesto astrofisici e matematici possono lavorare insieme.
In studi più recenti Chandrasekhar ha analizzato la presenza di una rotazione, uniforme o no, e/o di un campo magnetico sull'analisi classica di Jeans, e più recentemente Carlevaro e Montani hanno discusso gli effetti stabilizzanti di una viscosità del tipo Navier-Stokes.
In questo lavoro di tesi, dopo una breve introduzione agli strumenti matematici utilizzati, abbiamo preso in considerazione il modello classico del gas perfetto barotropico in versione 3D; per questo modello iperbolico quasi lineare, compatibile quindi con la propagazione di onde di discontinuità non lineari, abbiamo studiato la propagazione di onde sonore di piccola ampiezza attorno ad un suo stato costante, di quiete o no. Abbiamo anche evidenziato le analogie tra la propagazione di onde iperboliche non lineari e quelle lineari di piccola ampiezza.
Con riferimento ad una nube di gas infinita spazialmente e autogravitante, abbiamo poi presentato un nuovo modello, detto di Eulero-Poisson, che è del secondo ordine e non è più iperbolico, a causa della presenza dell'equazione ellittica di Poisson. La sua linearizzazione attorno ad uno stato di quiete costante ci permette di fornire l'analisi classica di Jeans, mettendo anche in risalto le differenze con la propagazione delle onde sonore di piccola ampiezza ottenute nella versione linearizzata del modello di base di Eulero. Seguendo poi il procedimento di Carlevaro e Montani in [10] e di Chandrasekhar in [11], abbiamo discusso dettagliatamente l'influenza di effetti viscosi e di una rotazione uniforme sul criterio di Jeans.
Abbiamo inoltre messo in risalto le ragioni matematiche del cosiddetto inganno di Jeans, aggiungendo anche proposte, sia matematiche che fisiche, per poterlo aggirare.
Molto recentemente Chavanis e Sire (p.e. in [12]) hanno studiato l'effetto del processo chemiotattico sulla stabilità di una distribuzione omogenea infinita di cellule. La chemiotassi è uno dei più comuni meccanismi di aggregazione di organismi viventi; sotto opportune condizioni però tale processo può portare al cosiddetto collasso chemiotattico.
Come parte conclusiva di questa tesi, abbiamo quindi ritenuto opportuno sottolineare le forti analogie tra il modello idrodinamico proposto da Chavanis e Sire per l'aggregazione chemiotattica e il modello di Eulero-Poisson per un gas perfetto barotropico autogravitante. In particolare è molto interessante l'analogia fra il collasso chemiotattico e quello

gravitazionale.

Per le notazioni e definizioni legate alla Meccanica dei Continui ci siamo riferite ai testi di Gurtin [4] e di Ruggeri [3]; da Ruggeri abbiamo anche preso gli strumenti matematici collegati alla teoria di propagazione ondosa, non lineare e lineare.
Per quanto riguarda gli elementi di base sulle equazioni alle derivate parziali, abbiamo attinto dai testi di John [1] e di Renardy e Rogers [2].
Per gli aspetti astrofisici collegati al problema dell'instabilità gravitazionale, oltre al classico libro di Chandrasekhar [11] e all'articolo più recente di Carlevaro e Montani [10], ci siamo basate sul testo di Binney e Tremaine [7], considerato da tutti la Bibbia della dinamica galattica.
Infine per descrivere un modello matematico per il processo chemiotattico, abbiamo fatto riferimento a uno degli articoli di Chavanis e Sire sull'argomento, [12].

Capitolo 1

Introduzione alle equazioni differenziali alle derivate parziali

1.1 Notazioni e simboli principali

Seguendo [1] e [2], cominciamo con alcune semplici definizioni di base.

Definizione 1.1. Dato il dominio regolare $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, una equazione differenziale alle derivate parziali, poi PDE (Partial Differential Equation), per una funzione $u(x)$ di classe $\mathbf{C}^k(\Omega, \mathbb{R})$, con $k > 1$, è una relazione della forma

$$\varphi(x, u(x), Du(x), ..., D^k u(x)) = 0 \tag{1.1}$$

dove φ è una funzione assegnata della variabile $x \in \Omega$, della funzione incognita u e di un numero finito di sue derivate parziali fino all'ordine k.

L'*ordine* di una PDE è l'ordine massimo di derivazione per la funzione incognita. Una *soluzione* di (1.1) è una funzione, con la regolarità corrispondente all'ordine, che, sostituita insieme alle sue derivate parziali, risolve identicamente l'equazione (1.1) $\forall x \in \Omega$.

Definizione 1.2. Una PDE scalare si dice:

1. *lineare* se della forma
$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x),$$

per opportune funzioni a_α e f, continue nelle loro dipendenze;

2. *semilineare* se della forma

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha u + a_0(D^{k-1}, ..., Du, u, x) = 0,$$

3. *quasi-lineare* se della forma

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(D^{k-1}, ..., Du, u, x) D^\alpha u + a_0(D^{k-1}, ..., Du, u, x) = 0,$$

4. *non lineare* se non presenta dipendenza lineare rispetto alle derivate di ordine massimo.

Ad esempio una PDE del primo ordine quasi lineare in due variabili indipendenti $(x, y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, per definizione, sarà della forma

$$a(\cdot)u_x + b(\cdot)u_y = c(\cdot) \tag{1.2}$$

con $(\cdot) = (x, y, u(x, y))$ e $a, b, c \in \mathbf{C}(\Omega', \mathbb{R}), \quad \Omega' \subseteq \mathbb{R}^3$ e $u \in \mathbf{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$.
Se $c = 0$, la (1.2) è detta *omogenea.* In ambito fisico matematico, se y è positivo assume il ruolo di tempo, e la (1.2) modella un fenomeno unidimensionale.

La definizione di soluzione e la 1.2 si estendono in modo naturale alle PDE vettoriali in cui la funzione incognita è $\mathbf{u} = (u_1, ..., u_n) \in \mathbf{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Una PDE del primo ordine quasi lineare in $\mathbb{R}^n$ in due variabili indipendenti (x, y), nella direzione y (vedi [3]), si può ridurre alla forma:

$$\mathbf{u}_y + A(x, y, \mathbf{u}(x, y))\mathbf{u}_x = \mathbf{B}(x, y, \mathbf{u}(x, y)) \tag{1.3}$$

dove:

- A è una matrice d'ordine n di elementi $a_{i,j} = a_{i,j}(x, y, \mathbf{u}) \in \mathbf{C}(\Omega', \mathbb{R})$, $\Omega' \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$ ed è detta *matrice rappresentativa* dell'equazione;

- $\mathbf{B}$(x,y,$\mathbf{u}$) è un campo vettoriale, almeno continuo, a n componenti ed è detto *termine noto* dell'equazione; quando $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ l'equazione è detta *omogenea.*

1.2 PDE e curve caratteristiche

1.2.1 PDE scalari

Consideriamo una PDE scalare del primo ordine quasi-lineare in due variabili indipendenti (x, y) della forma (1.2).
Le funzioni a, b, c in (1.2) identificano un vettore di $\mathbb{R}^3$, indicato con $\mathbf{d} = (a, b, c)$ e detto *vettore caratteristico* della PDE.
La funzione incognita u in (1.2) individua una superficie Σ in $\mathbb{R}^3$ di equazione cartesiana $z = u(x, y)$. Si può dimostrare che il vettore caratteristico $\mathbf{d}$ è, punto per punto, ortogonale alla mappa di Gauss della superficie Σ.

Definizione 1.3. Una curva γ di $\mathbb{R}^3$ è detta ***curva caratteristica*** della PDE (1.2) se, punto per punto, è tangente alla direzione individuata da $\mathbf{d}$, vettore caratteristico dell'equazione.

Definizione 1.4. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^2$, $\gamma \subset \Omega$ una curva regolare descritta in termini cartesiani dalla relazione $x = \phi(y)$ con la condizione $\dfrac{dx}{dy} = \phi'(y) \neq 0 \quad \forall y > 0$; quando y ha il ruolo di tempo $\phi'(y)$ è dimensionalmente una velocità.
Siano Ω^I e Ω^{II} aperti di $\mathbb{R}^2$ t.c. $\Omega^I \cap \Omega^{II} = \emptyset$ e $\Omega^I \cup \Omega^{II} = \Omega \setminus \gamma$.
Dati la funzione u definita su Ω e $P_\gamma = (\phi(y), y)$, definiamo la funzione ***salto*** di u lungo γ

$$[u] := \lim_{P \to P_\gamma^{II}} u(P) - \lim_{P \to P_\gamma^{I}} u(P), \tag{1.4}$$

dove con P_γ^I, P_γ^{II} indichiamo che il limite è rispettivamente da Ω^I e Ω^{II}.
Osserviamo che, poichè P_γ dipende da y, $[u]$ è una funzione di y.

Definizione 1.5. Sia $\gamma \subset \Omega$ una curva di equazione $x = \phi(y), \quad \phi'(y) \neq 0$.
γ si dice *curva di discontinuità del primo ordine* rispetto la funzione $u = u(x, y)$ se:

(i) $u \in \mathbf{C}^1(\Omega^I \cup \gamma)$ e $u \in \mathbf{C}^1(\Omega^{II} \cup \gamma)$, dove $\Omega^I \cap \Omega^{II} = \emptyset$ e $\Omega^I \cup \Omega^{II} = \Omega \setminus \gamma$;

(ii) $[u] = 0 \quad \forall P_\gamma \in \gamma$;

(iii) $[u_x] \neq 0, [u_y] \neq 0, \quad \forall P_\gamma \in \gamma$.

Osservazione 1. Dalla relazione di compatibilità

$$\frac{d[u]}{dy} = \phi'(y)[u_x] + [u_y]$$

si ha che $[u_y] = -\phi'(y)[u_x] \quad \forall P_\gamma \in \gamma$.
Usiamo la notazione $\delta(y) := [u_x](y)$ per indicare l'*ampiezza di discontinuità.*

Osservazione 2. La definizione 1.4 si può estendere a qualsiasi ordine di discontinuità.

Teorema 1.2.1. *Le curve caratteristiche di* (1.2) *sono tutte e sole le curve di discontinuità del primo ordine rispetto* $u(x, y)$*, interpretabili, quando* y *ha il ruolo di tempo, come fronti d'onda che si muovono con velocità* $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{a}{b}$.

1.2.2 PDE vettoriali del primo ordine

Consideriamo ora un sistema di PDE del primo ordine quasi lineare in $\mathbb{R}^n$ in due variabili indipendenti (x, t), nella direzione tempo rappresentato in forma vettoriale da (1.3).

Definizione 1.6. Il sistema (equazione vettoriale) (1.3) si dice *iperbolico* se gli autovalori della matrice A sono tutti reali; se sono anche tutti distinti il sistema è detto *strettamente* o *fortemente iperbolico.*

Per ogni autovalore λ reale di A, integrando l' equazione differenziale ordinaria (o.d.e.) del primo ordine

$$\frac{dx}{dt} = \lambda,$$

si ottiene una famiglia di curve caratteristiche reali ad un parametro.
Sia $\gamma \subset \Omega$ una curva di equazione $\phi(x, t) = cost$, $\phi_x \neq 0$ e definiamo $\lambda = -\dfrac{\phi_t}{\phi_x}$.
Da $\frac{d}{dt}\phi(x, t) = 0$ si ha

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\phi_t}{\phi_x},$$

dove abbiamo omesso per semplicità le dipendenze in ϕ.
Quindi, in analogia con la precedente definizione, per il teorema di Cramer, γ è una curva caratteristica se e solo se $det(A - \lambda I) = 0$.

Definizione 1.7. Sia $\gamma \subset \Omega$ una curva di equazione $\phi(x,t) = cost$, $\phi_x \neq 0$.
γ si dice *curva di discontinuità del primo ordine* per u, funzione incognita di (1.3), se:

(i) $u \in \mathbf{C}^1(\Omega^I \cup \gamma)$ e $u \in \mathbf{C}^1(\Omega^{II} \cup \gamma)$ dove $\Omega^I \cap \Omega^{II} = \emptyset$ e $\Omega^I \cup \Omega^{II} = \Omega \setminus \gamma$;

(ii) $[\mathbf{B}]=\mathbf{0}$

(iii) $[\mathbf{u}_t] = 0 \quad \forall P_\gamma \in \gamma$;

(iv) $[\mathbf{u}_\phi] \neq \mathbf{0} \quad \forall P_\gamma \in \gamma$.

Osservazione 3. Un sistema sarà fortemente iperbolico se e solo se esistono esattamente n famiglie di curve caratteristiche reali e distinte, descritte dalle o.d.e. del primo ordine

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_k \quad k = 1, ..., n \quad \lambda_h \neq \lambda_k \quad \forall h \neq k;$$

o, equivalentemente, se e solo se il sistema è compatibile con la propagazione di n onde di discontinuità del primo ordine, dette onde iperboliche, che si muovono lungo l'asse x, rispettivamente con velocità $\lambda_1, ..., \lambda_n$.

Nello spazio il fronte d'onda di discontinuità altro non è che una superficie mobile $\Sigma(t)$. Tale superficie è descritta localmente dall'equazione

$$f(\mathbf{x}, t) = 0 \tag{1.5}$$

con $f \in \mathbf{C}^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\nabla f \neq 0$ e ha mappa di Gauss $\mathbf{n} = \dfrac{\nabla f}{\| \nabla f \|}$.
Osserviamo che (1.5) implica

$$\frac{df}{dt}(\mathbf{x}, t) = 0$$

quindi

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} f \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = 0 \tag{1.6}$$

da cui, tenendo conto delle definizione di $\mathbf{n}$, si ottiene la relazione

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = -\frac{f_t}{\| \nabla_{\mathbf{x}} f \|}.$$

Posto $\lambda = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$, λ viene detta *velocità normale d'avanzamento* del fronte d'onda.

Definizione 1.8. Se $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ è una qualsiasi funzione incognita, scalare o vettoriale, presente nel sistema di PDE e $k \geq 1$ è un intero, Σ si definisce *superficie di discontinuità* d'ordine k per $\mathbf{u}$, se almeno una derivata parziale di $\mathbf{u}$ d'ordine k, è discontinua attraverso Σ (con valori limiti definiti e continui su entrambi i lati di Σ), mentre $\mathbf{u}$ e le sue derivate parziali di ordine inferiore a k risultano continue (con $\mathbf{u}$ di classe $\mathbf{C}^k$ su entrambi i lati di Σ).

Considerato δ, un operatore differenziale normale tale che

$$\delta u = \left[\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right],$$

per una superficie di discontinuità del prim'ordine possiamo applicare le seguenti regole di sostituzione formale (cfr. [3]):

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] &\longrightarrow -\lambda \delta u \\
[\nabla u] &\longrightarrow \delta u \mathbf{n} \\
[\nabla \cdot u] &\longrightarrow \delta u \cdot \mathbf{n} \\
[\nabla \times u] &\longrightarrow \mathbf{n} \times \delta u \\
[\nabla \mathbf{u}] &\longrightarrow \delta \mathbf{v} \otimes \mathbf{n}
\end{aligned}$$

con l'ovvio significato dei simboli introdotti.

1.3 Stabilità delle soluzioni e onde dispersive

Lavoriamo su equazioni in due variabili indipendenti (x, y), dove y ha il significato di tempo, cioè $y = t > 0$.

Definizione 1.9. Una soluzione u_e si dice di *equilibrio stabile secondo Ljapunov* se

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon) > 0 : \quad \forall u(x, 0) \in B(u_e, \delta(\epsilon)) \qquad \|u(x, t) - u_e\| < \epsilon \quad \forall t$$

Inoltre u_e si dirà *asintoticamente* o *fortemente stabile secondo Ljapunov* se

$$\lim_{t \to +\infty} u(x, t) = u_e$$

Definizione 1.10. Funzioni della forma, separata nelle dipendenze spazio-tempo,

$$u(x,t) = u_1 e^{i(kx-\omega t)} \tag{1.7}$$

dove

- $k \in \mathbb{R}$ è detto *numero d'onda*;
- ω, reale o complesso, è detta *frequenza*;
- $u_1 \in \mathbb{R}_0$ è detta *ampiezza della soluzione.*

sono dette ***onde dispersive*** o modi normali di Fourier.

La frequenza ω è funzione del numero d'onda k mediante una relazione, detta *equazione di dispersione* $\omega = \omega(k)$, che è strettamente legata al modello considerato.
Nel caso in cui $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ la definizione (1.7) diventa:

$$u(\mathbf{x},t) = u_1 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} \tag{1.8}$$

dove ora $\mathbf{k}$ è un vettore reale, detto *vettore d'onda.*

Definizione 1.11. La grandezza $v_f = \dfrac{\omega}{k}$ è detta *velocità di fase*; nel caso multidimensionale $v_f = \dfrac{\omega}{|\mathbf{k}|}$.

Osservazione 4. Il comportamento nel tempo t della soluzione del tipo (1.7), equivalentemente (1.8), è governato da $\sigma := -i\omega$ detto *parametro di stabilità.* Si avrà che

- se $\omega \in \mathbb{R}$, allora $\sigma \in \mathbb{C}$, in particolare è un immaginario puro, quindi $u(x,t)$ avrà sempre un comportamento oscillatorio anche nella dipendenza da t;
- se $\omega \in \mathbb{C}$,

  $$\omega = Re(\omega) + iIm(\omega)$$
  $$-i\omega = -iRe(\omega) + Im(\omega)$$

  quindi condizione *sufficiente* affinchè $u(x,t)$ abbia una crescita di tipo esponenziale in t è che $Im(\omega) > 0$.

Per studiare la stabilità lineare di una soluzione di base u_0 ricerchiamo una legge di evoluzione temporale per una sua generica perturbazione istantanea $\delta u(x,t)$ 'piccola'. Se il sistema è linearizzato attorno a tale soluzione costante, vale il principio di sovrapposizione, cioè è possibile rappresentare una qualsiasi perturbazione in componenti di Fourier come (1.7) e studiare l'evoluzione separatamente di ciascuna di esse; la soluzione sarà poi la somma delle singole evoluzioni.
Si procede quindi col determinare e discutere analiticamente l'equazione di dispersione $\omega = \omega(k)$ per trovare il parametro di stabilità σ. Nello specifico, $\sigma \in \mathbb{C}$ corrisponde alla stabilità 'neutra', $\sigma \in \mathbb{R}^+$ ad una situazione di instabilità, mentre $\sigma \in \mathbb{R}^-$ porta alla stabilità asintotica con legge di decadimento esponenziale.

Considerando $\delta u(\mathbf{x},t)$, perturbazione di una generica funzione u del tipo onda dispersiva

$$\delta u = u_1 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)},$$

valgono le seguenti identità:

- se u è un campo scalare:

$$\begin{aligned}\nabla \delta u &= \delta u i\mathbf{k}\\ \nabla^2 \delta u &= -|\mathbf{k}|^2 \delta u\end{aligned}$$

- se u è un campo vettoriale:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \delta\mathbf{u} &= \delta\mathbf{u} \cdot i\mathbf{k}\\ \nabla \times \delta\mathbf{u} &= i\mathbf{k} \times \delta\mathbf{u}\\ \nabla \delta\mathbf{u} &= \delta\mathbf{u} \otimes i\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Capitolo 2

I modelli matematici

La propagazione di onde e lo sviluppo di instabilità nei fluidi sono sempre intimamente collegati. L'origine delle onde acustiche risiede nel fatto che, quando in una regione di gas uniformemente distribuito viene generata una compressione, l'eccesso di pressione che si produce tende a riportare il sistema in condizioni di equilibrio e il sistema inizia a oscillare intorno a tale condizione. Tuttavia, se la regione contiene abbastanza materia, va tenuto conto anche dell'aumento di forza gravitazionale prodotto dalla compressione, aumento che tende ad attirare altro gas. Mentre nella propagazione delle onde sonore nell'atmosfera l'effetto gravitazionale è sempre del tutto trascurabile, si può pensare che la compressione di estese regioni del mezzo interstellare freddo possa creare effetti gravitazionali che superino la spinta espansiva della pressione termica. Queste considerazioni vennero sviluppate nel 1902 in un lavoro fondamentale da Jeans (cfr. [5]), che portò alla dimostrazione dell'esistenza dell'instabilità di Jeans.

Risulta quindi utile presentare le proprietà del modello classico di Eulero del gas perfetto barotropico (anche detto modello P, cfr [2]), introducendo poi via via nuovi effetti speciali che ne modificheranno le proprietà matematiche e fisiche. Per semplicità ci mettiamo nel regime termodinamico adiabatico, anzi isentropico.

2.1 Modello di Eulero

Il modello di Eulero, o modello P, o del primo suono (vedi p.e. [2], [3]) è descritto da un'equazione differenziale alle derivate parziali vettoriale quasi lineare omogenea in cui la funzione incognita è

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} \rho(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix},$$

dove $\rho(\mathbf{x}, t)$ è la densità del fluido e $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ è la sua velocità, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ e $t > 0$.
La pressione del fluido p è legata alla densità incognita ρ mediante una relazione detta *equazione di stato*; ad esempio, per un gas perfetto politropico, l'equazione di stato è la seguente

$$p(\rho) = A\rho^\gamma,$$

dove $\gamma = \dfrac{c_p}{c_v} > 1$ è detto invariante adiabatico e A è un parametro positivo; γ e A sono entrambi costanti.
Considereremo più generalmente fluidi barotropici per i quali la pressione è funzione di classe $\mathbf{C}^1$ della sola densità, con la condizione fenomenologica che $p'(\rho) > 0$; infatti $p'(\rho) = c_s^2(\rho)$, ove $c_s(\rho)$ è la velocità del suono nel fluido considerato, dipendente solo dalla densità ρ. Nel caso politropico, si ha $p'(\rho) = A\gamma p^{\gamma-1}$ quindi $c_s^2(\rho) = \dfrac{\gamma p}{\rho}$
Le equazioni del modello P sono (cfr. [3], [4])

$$\begin{cases} \rho_t + \nabla\rho \cdot \mathbf{v} + \rho\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \mathbf{v}_t + \dfrac{p'(\rho)}{\rho}\nabla\rho + (\nabla\mathbf{v})\mathbf{v} = \mathbf{0} \end{cases} \tag{2.1}$$

La prima equazione è scalare ed è detta *di continuità* e equivale alla forma locale del principio di conservazione della massa; la seconda, vettoriale, è l'*equazione del moto di Eulero* e rappresenta la forma locale del principio di conservazione della quantità di moto per un fluido perfetto barotropico.
Tale modello è sempre iperbolico e quindi è compatibile con la propagazione di onde di discontinuità del prim'ordine che sono longitudinali e vengono dette ***onde sonore***; queste onde sono genuinamente non lineari (cfr [3]). Si hanno anche ***onde trasversali di contatto*** corrispondenti a velocità di propagazione nulla, che risultano sempre eccezionali secondo Lax.

In forma 1D si ha $\mathbf{u}(x,t) = \binom{\rho(x,t)}{v(x,t)}$ e il modello è descritto dal seguente sistema quasi lineare omogeneo in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \rho_t + \rho_x v + \rho v_x = 0 \\ v_t + \dfrac{p'(\rho)}{\rho}\rho_x + v_x v = 0 \end{cases}$$

La sua forma vettoriale risulta

$$\mathbf{u}_y + A(x,t,\mathbf{u}(x,t))\mathbf{u}_x = \mathbf{B}(x,t,\mathbf{u}(x,t))$$

dove la matrice caratteristica A è così definita

$$A = \begin{pmatrix} v & \rho \\ \dfrac{p'(\rho)}{\rho} & v \end{pmatrix}.$$

L'equazione caratteristica diventa

$$(v-\lambda)^2 = p'(\rho),$$

La condizione fisica $p'(\rho) > 0$ assicura la realtà degli autovalori

$$\lambda^{\pm} = v \pm \sqrt{p'(\rho)},$$

cioè delle velocità di propagazione.

Le proprietà di propagazione ondosa in ambito 3D sono state studiate dettagliatamente in Appendice A.1.

2.1.1 Onde sonore di piccola ampiezza e stabilità lineare dello stato base.

In primo luogo concentriamo la nostra attenzione su una soluzione di base costante

$$\mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} \rho_0 \\ \mathbf{v}_0 \end{pmatrix},$$

con $\rho_0 > 0$ e $\mathbf{v}_0 \neq 0$.

Consideriamo poi una perturbazione, dipendente da $\mathbf{x}$ e t, da questo stato di equilibrio:

$$\delta\mathbf{u} = \delta\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \begin{pmatrix} \delta\rho \\ \delta\mathbf{v} \end{pmatrix} \neq 0,$$

che richiediamo 'piccola' e del tipo onda dispersiva, come descritta nel paragrafo 1.2, cioè

$$\delta\rho = \rho_1 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}, \qquad \rho_1 \neq 0, \tag{2.2}$$

$$\delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}, \qquad \mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}, \tag{2.3}$$

e indichiamo con $\mathbf{u}_1 = \binom{\rho_1}{\mathbf{v}_1}$ il relativo vettore ampiezza costante.
Come si è già evidenziato, soluzioni di questo tipo possono essere ricercate solo in modelli lineari o linearizzati attorno ad uno stato base. Visto che non siamo di fronte a un modello lineare, procediamo a linearizzare le equazioni (2.1) in un intorno dello stato $(\rho_0, \mathbf{v}_0)$, trascurando i termini non lineari in $\delta\rho$, $\delta\mathbf{v}$ e nelle loro derivate, dopo aver sviluppato in serie di Taylor $p'(\rho_0 + \delta\rho)$. Dal sistema

$$\begin{cases} (\rho_0 + \delta\rho)_t + \nabla(\rho_0 + \delta\rho) \cdot (\mathbf{v}_0 + \delta\mathbf{v}) + (\rho_0 + \delta\rho)\nabla \cdot (\mathbf{v}_0 + \delta\mathbf{v}) = 0 \\ (\mathbf{v}_0 + \delta\mathbf{v})_t + \dfrac{p'(\rho_0 + \delta\rho)}{\rho_0 + \delta\rho}\nabla(\rho_0 + \delta\rho) + (\nabla(\mathbf{v}_0 + \delta\mathbf{v}))(\mathbf{v}_0 + \delta\mathbf{v}) = \mathbf{0} \end{cases}$$

dopo alcuni calcoli, otteniamo le seguenti equazioni linearizzate per le perturbazioni $\delta\rho$, $\delta\mathbf{v}$

$$\begin{cases} \delta\rho_t + \nabla\delta\rho \cdot \mathbf{v}_0 + \rho_0\nabla \cdot \delta\mathbf{v} = 0 \\ \rho_0(\delta\mathbf{v}_t + \mathbf{v}_0\nabla\delta\mathbf{v}) + p'(\rho_0)\nabla\delta\rho = \mathbf{0} \end{cases} \tag{2.4}$$

Applicando le identità viste al paragrafo 1.3, il sistema (2.4) diventa

$$\begin{cases} \delta\rho_t + \delta\rho i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0 + \rho_0\delta\mathbf{v} \cdot i\mathbf{k} = 0 \\ \rho_0(\delta\mathbf{v}_t + (\delta\mathbf{v} \otimes i\mathbf{k})\mathbf{v}_0) + p'(\rho_0)\delta\rho i\mathbf{k} = \mathbf{0} \end{cases} \tag{2.5}$$

Tenendo conto delle relazioni

$$\delta\rho_t = -i\omega\delta\rho \quad e \quad \delta\mathbf{v}_t = -i\omega\delta\mathbf{v}$$

ed esplicitando l'operazione diade

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\mathbf{w} := (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u},$$

il sistema (2.5) si riduce alla forma

$$\begin{cases} \delta\rho(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0 - i\omega) + \rho_0\delta\mathbf{v} \cdot i\mathbf{k} = 0 \\ \rho_0\delta\mathbf{v}(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0 - i\omega) + p'(\rho)\delta\rho i\mathbf{k} = \mathbf{0} \end{cases}$$

Ricordando le (2.2) e (2.3), eliminiamo il fattore esponenziale, otteniamo il seguente sistema di Cramer omogeneo nel vettore costante (piccola) ampiezza $\mathbf{u}_1 = (\rho_1, \mathbf{v}_1)$

$$\begin{cases} \rho_1(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_0 - \omega) + \rho_0\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{k} = 0 \\ \mathbf{v}_1(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_0 - \omega) + \dfrac{p'(\rho_0)}{\rho_0}\rho_1\mathbf{k} = \mathbf{0} \end{cases} \tag{2.6}$$

Indichiamo con $\mathbf{n}$ il versore normale al fronte d'onda, tale che $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$, $k = |k|$, e introduciamo due versori trasversali $\mathbf{t}_1$ e $\mathbf{t}_2$ tali che

$$\mathbf{t}_i\cdot\mathbf{t}_j = \delta_{ij} \quad e \quad \mathbf{t}_i\cdot\mathbf{n} = 0, \quad i,j = 1,2.$$

Si ha allora la decomposizione unica $\mathbf{v} = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} + \sum_i(\mathbf{v}\cdot\mathbf{t}_i)\mathbf{t}_i$.
Proiettando l'equazione vettoriale in (2.6) lungo $\mathbf{n}$, $\mathbf{t}_1$ e $\mathbf{t}_2$, si ottiene

$$\begin{cases} \rho_1(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_0 - \omega) + \rho_0\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{k} = 0 \\ \mathbf{v}_1\cdot\dfrac{\mathbf{k}}{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_0 - \omega) + \dfrac{p'(\rho_0)}{\rho_0}\rho_1\mathbf{k}\cdot\dfrac{\mathbf{k}}{k} = 0 \\ \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{t}_1(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_0 - \omega) = 0 \\ \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{t}_2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_0 - \omega) = 0 \end{cases}$$

Per il teorema di Cramer, condizione necessaria e sufficiente affinchè tale sistema algebrico in $\mathbb{R}^4$ abbia soluzione non identicamente nulla è che il determinante della matrice dei coefficienti sia nullo, cioè

$$\begin{vmatrix} \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_0 - \omega & \rho_0 k & 0 & 0 \\ \frac{p'(\rho_0)}{\rho_0}k & \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_0 - \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_0 - \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_0 - \omega \end{vmatrix} = 0. \tag{2.7}$$

Dalla (2.7) otteniamo l'equazione di dispersione

$$(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_0 - \omega)^2\left[(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_0 - \omega)^2 - p'(\rho_0)k^2\right] = 0. \tag{2.8}$$

I casi che si prospettano sono allora due:

- $\omega = \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_0$ (soluzione reale doppia)
  In questo caso $\rho_1 = 0$ e $\mathbf{v}_1$ è ortogonale alla direzione individuata dal vettore d'onda

$\mathbf{k}$. Le onde generate, dette *onde di contatto* o *materiali*, si propagano con velocità di fase uguale alla componente lungo la direzione di $\mathbf{k}$ della velocità imperturbata

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{\mathbf{k}}{k} \cdot \mathbf{v}_0.$$

Il vettore $\mathbf{v}_1$ è tangente al piano dell'onda e l'onda non trasporta perturbazioni di densità e dunque di pressione. Per lo stato di quiete $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ si ha la soluzione multipla $\omega = 0$, corrispondente ad un *modo stazionario*.

- $\omega^{\pm} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0 \pm c_s(\rho_0)k$ (soluzioni reali semplici)
  In questo caso $\mathbf{v}_1$ è parallelo alla direzione individuata dal vettore d'onda e vi sono due onde longitudinali, dette *onde sonore*, caratterizzate da variazioni di densità e quindi di pressione, che si muovono rispetto al fluido con velocità rispettivamente $c_s(\rho_0)$ e $-c_s(\rho_0)$. In particolare, se $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$, la velocità di fase coincide con la velocità di propagazione del suono nel fluido considerato, cioè

  $$v_f^{\pm} = \frac{\omega^{\pm}}{k} = \pm c_s(\rho_0).$$

  I valori reali di ω garantiscono la stabilità neutra, non asintotica, della soluzione di base costante. Vista l'iperbolicità del modello, e quindi la sua compatibilità con la propagazione di onde d'accelerazione longitudinali (onde di discontuità del prim'ordine o onde iperboliche non costanti), le velocità di fase delle onde sonore di piccola ampiezza (costanti) corrispondono proprio alle velocità delle onde sonore tipiche del modello date da $v_s^{\pm} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \pm \sqrt{p'(\rho)}$.

2.2 Modello di Eulero-Poisson

Consideriamo una nube di gas omogenea, in quiete, spazialmente infinita e vogliamo studiare sotto quali condizioni diventa instabile, per la presenza di una forza di autogravità di potenziale $\phi(\mathbf{x}, t)$.
Lo stato del gas barotropico è descritto ora dalla funzione incognita

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} \rho(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \\ \phi(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix}$$

Vista la presenza del potenziale di autogravità come funzione incognita aggiuntiva rispetto a quelle del modello P, dobbiamo aggiungere un'ulteriore equazione, l'*equazione ellittica di Poisson* che lega il potenziale di autogravità alla densità del gas. Il nuovo modello, detto di Eulero-Poisson, è descritto dal seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} \rho_t + \nabla\rho \cdot \mathbf{v} + \rho\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \mathbf{v}_t + (\nabla\mathbf{v})\mathbf{v} = -\dfrac{p'(\rho)}{\rho}\nabla\rho - \nabla\phi \\ \nabla^2\phi = 4\pi G\rho \end{cases} \tag{2.9}$$

dove G è la costante di gravitazione universale.
Osserviamo che il sistema (2.9) non è più del prim'ordine come (2.1), ma del secondo, a causa proprio dell'equazione di Poisson, e proprio per questa equazione perde il suo carattere di iperbolicità.

2.2.1 The Jeans swindle: rivendicazioni matematiche e astrofisiche

Sir James Jeans nel 1902 (cfr [5], [6]) diede la prima descrizione quantitativa della frammentazione di un gas in quiete, infinito, uniforme, autogravitante. La consistenza del modello matematico che costruì è da allora oggetto di discussione nel mondo scientifico. Infatti per lo studio dell'evoluzione di una perturbazione di una soluzione base di (2.9), come visto per il modello P, è necessario che tale soluzione *esista*, cioè che soddisfi le equazioni. Formalmente la difficoltà da affrontare è che, se la densità $\rho_0 > 0$ e la pressione del mezzo $p(\rho_0)$ sono costanti non nulle, e la velocità $\mathbf{v}_0$ è costante o nulla, segue dall'equazione di Eulero che

$$\nabla\phi_0 = \mathbf{0}.$$

D'altra parte, l'equazione di Poisson richiede che

$$\nabla^2\phi_0 = 4\pi G\rho_0.$$

Le due richieste sono incompatibili a meno che $\rho_0 = 0$, condizione fisicamente assurda.
Binney e Tremaine (cfr.[7]) osservano che è possibile rimuovere tale inconsistenza *assumendo* che l'equazione di Poisson descriva solo la relazione tra le fluttuazioni della

densità e del potenziale ϕ perturbato, mentre il potenziale non perturbato è nullo. È proprio questa assunzione che costituisce il cosiddetto l'*inganno di Jeans* in quanto, in generale, non sembrano esserci giustificazioni formali di questa restrizione.
Altre posizioni, come quella di Ershkovich A.I. (cfr.[8]) difendono il lavoro di Jeans asserendo che il modello costruito è estremamente interessante, consistente, ma non realistico così come, d'altra parte, lo sono i modelli dei fluidi ideali o dei gas perfetti per i quali però non si parla mai di *inganno*.
Per giustificarne la consistenza, Ershkovich parte dall'equazione dell'idrostatica per un gas uniforme a riposo in condizione d'equilibrio:

$$\nabla p_0 = \rho_0 \mathbf{g} \tag{2.10}$$

Prendendo $p_0 = cost$ e $\rho_0 = cost > 0$ si può concludere che un mezzo uniforme non può essere in equilibrio statico. Ma per il modello omogeneo e *infinito* preso in esame da Jeans l'equazione (2.10) porterebbe a $\mathbf{g} = \mathbf{0}$. Quindi si avrebbe il risultato non realistico, ma ovvio, che la forza gravitazionale risultante in ogni punto di un gas omogeneo infinito è nulla, cioè non c'è gravità all'equilibrio.
Altre rivendicazioni a carattere matematico sono state sviluppate da Kiessling (cfr. [9]) proprio in occasione del centenario della pubblicazione del primo lavoro di Jeans. Kiessling evidenzia che qualsiasi problema matematico dovrebbe risiedere nella validità delle equazioni lineari ottenute linearizzando le equazioni del modello attorno ad uno stato di base costante, in quanto il procedimento che da tali equazioni porta poi alla relazione di dispersione è estremamente chiaro e ragionevole.
L'idea di fondo del lavoro di Kiessling per superare l'inganno di Jeans è quella di considerare dei limiti e delle forze gravitazionali Newtoniane che svaniscono quando la densità di massa è costante; tali forze però derivano da un potenziale non Newtoniano, che quindi non soddisfa l'equazione di Poisson. Per lo stesso limite l'equazione di Poisson descrive la relazione tra la densità perturbata e il potenziale Newtoniano perturbato, così che non è più necessario assumerlo a priori (vedi Binney-Tremaine [7]). Ci sono vari modi per fissare tale limite: Kiessling sceglie di seguire l'approccio già intrapreso da Einsten che, per aprire la strada all'utilizzo della costante cosmologica $\Lambda \in \mathbb{R}^+$ nella relatività generale, mise in evidenza come l'introduzione di tale costante possa risolvere il problema non relativistico affrontato da Jeans. Si inizia la discussione con un universo nonrelativisti-

co con costante cosmologica Λ e successivamente lo si rende semplicemente Newtoniano passando al limite $\Lambda \longrightarrow 0$. Einstein propose di sostituire l'equazione ellittica di Poisson per il potenziale d'autogravità Newtoniano ϕ

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$$

con un'equazione non omogenea del tipo Helmholtz per il nuovo potenziale Ψ, detto di Einstein,

$$\nabla^2\Psi - \Lambda\Psi = 4\pi G\rho, \tag{2.11}$$

dove Λ è proprio la costante cosmologica.
L'equazione localmente ha soluzione $\Psi(\mathbf{x}, t)$ lineare in $\rho(\mathbf{x}, t)$; il limite di tale soluzione per $\Lambda \longrightarrow 0$ è naturalmente $\phi(\mathbf{x}, t)$, potenziale che soddisfa l'equazione di Poisson.
Data una 'piccola' perturbazione della densità d'equilibrio $\rho_0 = cost > 0$, $\rho = \rho_0 + \delta\rho$, per la linearità della soluzione di (2.11), il potenziale di Einstein per ρ risulta essere

$$\Psi = \Psi_0 + \psi$$

dove Ψ_0 è il potenziale di Einstein in corrispondenza della densità di base ρ_0 e ψ è soluzione di $\nabla^2\psi - \Lambda\psi = 4\pi G\delta\rho$.
Infine, verificando che il limite di ψ per $\Lambda \longrightarrow 0$ esiste ed è il potenziale d'autogravità Newtoniano $\delta\phi$ per $\delta\rho$, si avrà che l'equazione di Poisson lega *effettivamente* la variazione di potenziale alla variazione di densità, come si è recentemente ipotizzato (cfr. [7]).
Un altra possibilità per superare l'inganno di Jeans è quella di modificare l'equazione di Poisson nel seguente modo

$$\nabla^2\phi = 4\pi G(\rho - \overline{\rho})$$

così che lo stato di base $\rho_0 = \overline{\rho} > 0$, $\mathbf{v}_0 = 0$ e $\phi_0 = cost$ risulta effettivamente soluzione del modello di Eulero-Poisson. La quantità $\overline{\rho}$ può essere interpretata come la densità elettronica della nube considerata o la densità della materia oscura.

Legittimazioni più o meno corrette, a parte, da un punto di vista fisico e matematico è generalmente riconosciuto che l'inganno è giustificato in alcune circostanze fisiche in cui il campo gravitazionale è controbilanciato non solo dal gradiente di pressione, ma ad esempio da un campo magnetico e/o dalla forza centrifuga, dovuta alla rotazione del mezzo, uniforme o no.

2.3 Modellamenti matematici in presenza di altri effetti speciali

2.3.1 Modello di Navier-Stokes-Poisson

Si parte dal classico modello linearmente viscoso di Navier-Stokes compressibile (con le classiche notazioni, cfr. [4]),

$$\begin{cases} \rho_t + \nabla\rho \cdot \mathbf{v} + \rho\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \rho(\mathbf{v}_t + (\nabla\mathbf{v})\mathbf{v}) = -p'(\rho)\nabla\rho + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu\nabla^2\mathbf{v} \end{cases} \tag{2.12}$$

dove λ è la viscosità di volume e μ è la viscosità di taglio (shear viscosity); si definisce la viscosità di profondità (bulk viscosity) come

$$\zeta = \lambda + \frac{2}{3}\mu.$$

I coefficienti di viscosità μ e ζ sono parametri positivi (per il secondo Principio della Termodinamica) generalmente non costanti, ma dipendenti dai parametri di stato del fluido; in particolare (cfr.[10]) si può assumere che la viscosità di profondità sia una funzione della densità della forma:

$$\zeta = z\rho^s,$$

dove z è un parametro positivo costante che definisce l'intensità dell'effetto viscoso e s è costante.

Aggiungendo nel sistema (2.12), riscritto in termini di μ e ζ, la presenza dell'autogravità si ottiene il seguente modello, più generale di quello di Eulero-Poisson

$$\begin{cases} \rho_t + \nabla\rho \cdot \mathbf{v} + \rho\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \rho(\mathbf{v}_t + (\nabla\mathbf{v})\mathbf{v}) = -p'(\rho)\nabla\rho - \rho\nabla\phi + (\zeta + \frac{1}{3}\mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu\nabla^2\mathbf{v} \\ \nabla^2\phi = 4\pi G\rho \end{cases} \tag{2.13}$$

Per lo studio di questo modello terremo in considerazione un recente articolo di Carlevaro e Montani (cfr. [10]), in cui si è discusso della presenza degli effetti viscosi sull'instabilità di Jeans.

Osservazione 5. Se si è interessati a modelli omogenei, potremmo non tenere conto della viscosità di taglio supponendo $\mu = 0$ nel sistema (2.13). La viscosità di taglio infatti rappresenta la dissipazione d'energia dovuta allo scorrimento di uno strato di materia sull'altro, assente se il mezzo è omogeneo.
In presenza però di piccole disomogeneità tale viscosità va presa in considerazione, anche se ci si aspetterebbe che il responsabile dell'instabilità del mezzo sia più l'effetto della compressione e rarefazione di alcune regioni, piuttosto che dell'attrito tra i diversi strati.

2.3.2 Modello di Eulero-Poisson in presenza della forza di Coriolis.

Consideriamo ora un gas omogeneo, infinito spazialmente, in rotazione uniforme con velocità angolare $\mathbf{w}$. L'unica equazione del sistema (2.9) ad essere modificata è ancora l'equazione del moto di Eulero; al secondo membro si deve infatti aggiungere il contributo dell'accelerazione di Coriolis, così definita:

$$a_C = 2\mathbf{w} \times \mathbf{v}$$

Il modello da studiare diventa

$$\begin{cases} \rho_t + \nabla\rho \cdot \mathbf{v} + \rho\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \rho\mathbf{v}_t + \rho(\nabla\mathbf{v})\mathbf{v} = -p'(\rho)\nabla\rho - \rho\nabla\phi + 2\rho\mathbf{v} \times \mathbf{w} \\ \nabla^2\phi = 4\pi G\rho \end{cases} \tag{2.14}$$

L'effetto della presenza di una rotazione uniforme sull'instabilità gravitazionale è stata studiata approfonditamente da Chandrasekhar (cfr. [11]); si può dimostrare che il criterio di Jeans non è generalmente modificato dalla presenza di una rotazione uniforme, anzi, in certi casi tale presenza diventa un importante effetto di freno per il collasso gravitazionale, anche in presenza simultanea di un campo magnetico (cfr.[11]).

Capitolo 3

Instabilità classica di Jeans

Cominciamo la nostra discussione sull'instabilità gravitazionale con il caso di un gas omogeneo, infinito spazialmente e in quiete, descritto dal modello standard di Eulero-Poisson; il nostro scopo è lo studio dettagliato della propagazione di una piccola perturbazione istantanea di uno stato d'equilibrio costante. Lo stato di equilibrio sia dato da $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$, $\rho_0 > 0$ e ϕ_0, tale che $\nabla\phi_0 = \mathbf{0}$.
Facendo uso del cosiddetto inganno di Jeans, assumiamo che l'equazione di Poisson descriva solo la relazione tra le perturbazioni della densità e del potenziale di autogravità. Le equazioni lineari che governano le piccole perturbazioni $\delta\rho$, $\delta\mathbf{v}$ e $\delta\phi$ sono le seguenti

$$\begin{cases} \delta\rho_t + \rho_0 \nabla \cdot \delta\mathbf{v} = 0 \\ \rho_0 \delta\mathbf{v} + p'(\rho_0)\nabla\delta\rho = -\rho_0 \nabla\delta\phi \\ \nabla^2\delta\phi = 4\pi G\delta\rho \end{cases} \tag{3.1}$$

Richiediamo ora che le perturbazioni siano del tipo onde dispersive, cioè $\delta\rho(x,t) = \rho_1 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$, $\mathbf{v}(x,t) = \mathbf{v}_1 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$ e $\delta\phi(x,t) = \phi_1 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$, essendo ρ_1, $\mathbf{v}_1$ e ϕ_1 le ampiezze costanti non nulle delle fluttuazioni.
Procedendo come per il modello P otteniamo il sistema

$$\begin{cases} \delta\rho_t + \rho_0 \delta\mathbf{v} \cdot i\mathbf{k} = 0 \\ \rho_0 \delta\mathbf{v} + p'(\rho_0)\delta\rho i\mathbf{k} = -\rho_0 \delta\phi i\mathbf{k} \\ -|\mathbf{k}|^2\delta\phi = 4\pi G\delta\rho \end{cases}$$

che, facendo uso delle identità $\delta\rho_t = -i\omega\delta\rho$ e $\delta\mathbf{v}_t = -i\omega\delta\mathbf{v}$, diventa

$$\begin{cases} -\omega\delta\rho + \rho_0\delta\mathbf{v}\cdot\mathbf{k} = 0 \\ -\rho_0\omega\delta\mathbf{v} + p'(\rho_0)\delta\rho\mathbf{k} = -\rho_0\delta\phi\mathbf{k} \\ -|\mathbf{k}|^2\delta\phi = 4\pi G\delta\rho \end{cases}$$

Quindi le ampiezze costanti delle perturbazioni sono governate dal seguente sistema

$$\begin{cases} -\omega\rho_1 + \rho_0\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{k} = 0 \\ -\rho_0\omega\mathbf{v}_1 + p'(\rho_0)\rho_1\mathbf{k} = -\rho_0\phi_1\mathbf{k} \\ -|\mathbf{k}|^2\phi_1 = 4\pi G\rho_1 \end{cases} \tag{3.2}$$

Il sistema (3.2) è un sistema algebrico lineare e omogeneo nella incognita $\mathbf{u}_1 = (\rho_1, \mathbf{v}_1, \phi_1)$ in $\mathbb{R}^5$; per il teorema di Cramer, condizione necessaria e sufficiente affinchè abbia soluzione diversa dalla ovvia è che la matrice associata sia singolare.
Come in precedenza consideriamo il versore normale all'onda dispersiva

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{k}$$

e indichiamo con $\mathbf{t}_1$ e $\mathbf{t}_2$ due versori, tra loro ortogonali, nel piano tangente; usando la decomposizione $\mathbf{v} = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} + \sum_i(\mathbf{v}\cdot\mathbf{t}_i)\mathbf{t}_i$ e proiettando la seconda equazione del sistema (3.2) lungo $\mathbf{n}$, $\mathbf{t}_1$ e $\mathbf{t}_2$, si ottiene un sistema la cui matrice associata è

$$\begin{vmatrix} -\omega & \rho_0 k & 0 & 0 & 0 \\ \frac{p'(\rho_0)}{\rho_0}k & -\omega & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega & 0 \\ 4\pi G & 0 & 0 & 0 & k^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Con un po' di algebra si arriva all'equazione di dispersione

$$\omega^2(\omega^2 + 4\pi G\rho_0 - p'(\rho_0)k^2) = 0.$$

Escludendo la soluzione stazionaria $\omega = 0$ si ricava la seguente legge di dispersione per ω, ricordando anche che $p'(\rho_0) = c_s^2(\rho_0)$,

$$\omega^2 = c_s^2(\rho_0)(k^2 - k_J^2), \tag{3.3}$$

dove

$$k_J = \sqrt{\frac{4\pi G\rho_0}{p'(\rho_0)}}$$

è il cosiddetto ***numero d'onda critico di Jeans***.

Osserviamo allora che la stabilità dell'equilibrio dipenderà solo dal vettore d'onda $\mathbf{k}$, in particolare dal suo modulo. Infatti:

- per tutti i numeri d'onda $k < k_J \Longrightarrow \omega^2 < 0 \Longrightarrow \omega \in \mathbb{C}$.
  In particolare ω è un immaginario puro, $\omega = i\gamma$, $\gamma \in \mathbb{R}$, quindi la dipendenza dal tempo della perturbazione di densità è proporzionale a $e^{\pm\gamma t}$: vi è una crescita/decrescita esponenziale dell'ampiezza della perturbazione che conduce da una parte all'instabilità del mezzo, dall'altra alla scomparsa della perturbazione; questo comunque è sufficiente per assicurare l'instabilità.

- per tutti i numeri d'onda $k > k_J \Longrightarrow \omega^2 > 0 \Longrightarrow \omega \in \mathbb{R}$.
  Il comportamento nel tempo della perturbazione di densità è oscillatorio. Si formano delle onde, dette *onde gravitazionali di Jeans*, che si propagano lungo la direzione individuata dal vettore d'onda con velocità di fase $v_J = v_f^{\pm} = \pm c_s(\rho_0) \left(1 - \left(\frac{k_J}{k}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ detta proprio ***velocità di Jeans***. Osserviamo che

  $$\lim_{k \to k_J} v_J^{\pm} = 0,$$

  cioè, in questo caso, siamo in presenza di onde stazionarie (materiali). D'altraparte

  $$\lim_{k \to \infty} v_J^{\pm} = \pm c_s(\rho_0),$$

  quindi le fluttuazioni si comportano sempre più come pure onde sonore che si propagano nel mezzo.

Il risultato di Jeans descrive il fatto che una fluttuazione di densità del tipo onda dispersiva con vettore d'onda $\mathbf{k}$, all'interno di un gas omogeneo in quiete con densità $\rho_0 > 0$, rende gravitazionalmente instabile il mezzo se

$$k < k_J. \tag{3.4}$$

La condizione (3.4) è detta ***criterio di Jeans*** per l'insorgenza del collasso gravitazionale.
In termini di lunghezza d'onda, tenendo conto della relazione $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, si definisce la ***lunghezza di Jeans*** come $\lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} = \sqrt{\frac{\pi p'(\rho_0)}{G\rho_0}}$ e il criterio si legge

$$\lambda > \lambda_J,$$

cioè, quando le regioni di compressione corrispondono a dimensioni sufficientemente grandi, l'aumento di gravità nella compressione prevale sulla spinta della pressione e quindi la perturbazione cresce esponenzialmente e la nube collassa. Definita poi la ***massa di Jeans*** come la massa di una sfera di raggio λ_J del gas originale

$$M_J = \frac{4}{3}\pi\lambda_J^3\rho_0 = \frac{4}{3}\pi^{\frac{5}{2}}\left(\frac{p'(\rho_0)}{G}\right)^{\frac{3}{2}}\rho_0^{-\frac{1}{2}},$$

il criterio di Jeans sarà

$$M > M_J.$$

La massa di Jeans è quindi la massa critica da superare per avere il collasso gravitazionale in un mezzo omogeneo. Il gas cosmico può dunque frammentarsi in nubi di massa uguale o inferiore alla massa di Jeans, che possono a loro volta collassare e dar luogo alla formazione di cluster di stelle, per arrivare, alla fine del processo, alla formazione di una protostella. In astronomia si prende in considerazione questo principio come alla base della formazione di stelle e galassie a partire dai gas primordiali.
Per quanto riguarda la genesi delle stelle, sostituendo i dati tipici del gas interstellare, si ottiene che le nubi instabili devono avere masse $M > 10^5 M_\odot$, dove $M_\odot$ è la massa del Sole, $M_\odot = 1.9891 \times 10^{30}$ kg; questi valori corrispondono alla massa degli ammassi stellari. Quindi gli ammassi stellari sono i primi prodotti della frammentazione; successivamente, a seguito dell'aumento di densità, il limite di Jeans si riduce e l'ammasso a sua volta risulta instabile e può frammentarsi in singole stelle. La formazione stellare risulterebbe quindi un processo gerarchico. Bisogna però ricordare che il gas interstellare non è omogeneo, come ipotizzato, e che nella realtà risente della presenza di campi magnetici, rotazioni, uniformi o meno e/o effetti viscosi; queste componenti cambiano quantitativamente il processo descritto, che può essere comunque considerato generalmente valido qualitativamente.

Capitolo 4

Analisi dell'instabilità gravitazionale in presenza di effetti aggiuntivi

4.1 L'effetto della viscosità sul criterio di Jeans: modello di Navier-Stokes-Poisson

Analizziamo nel dettaglio come la presenza della viscosità modifica l'analisi classica di Jeans; possiamo anticipare che gli effetti viscosi sono noti effetti dissipativi, e quindi ci si può aspettare che siano stabilizzanti.
Seguendo Carlevaro e Montani (cfr. [10]), tralasciamo ora la viscosità di taglio μ per concentrarci sulla viscosità di profondità ζ; in pratica, per quanto riguarda l'evoluzione di una fluttuazione nella densità, in un fluido omogeneo gli effetti dell'attrito fra gli strati sono trascurabili rispetto a quelli dovuti alla viscosità di profondità.
Il sistema (2.13) quando $\mu = 0$ si riduce alla forma

$$\begin{cases} \rho_t + \nabla\rho \cdot \mathbf{v} + \rho\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \rho(\mathbf{v}_t + (\nabla\mathbf{v})\mathbf{v}) = -p'(\rho)\nabla\rho - \rho\nabla\phi + \zeta\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) \\ \nabla^2\phi = 4\pi G\rho \end{cases} \tag{4.1}$$

Perturbiamo con piccole perturbazioni del tipo onde dispersive lo stato di base costante in quiete $\rho_0 > 0$, $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ e ϕ_0 t.c. $\nabla\phi_0 = \mathbf{0}$, cioè consideriamo

$$\rho_0 + \delta\rho; \quad \mathbf{v}_0 + \delta\mathbf{v}; \quad \phi_0 + \delta\phi.$$

Sostituendo tali perturbazioni in (4.1) e linearizzando otteniamo

$$\begin{cases} \delta\rho_t + \rho_0\nabla\cdot\delta\mathbf{v} = 0 \\ \rho_0\delta\mathbf{v}_t + p'(\rho_0)\nabla\delta\rho + \rho_0\nabla\delta\phi - \zeta_0\nabla(\nabla\cdot\delta\mathbf{v}) = \mathbf{0} \\ \nabla^2\delta\phi = 4\pi G\delta\rho \end{cases} \tag{4.2}$$

dove $\zeta_0 = \zeta(\rho_0) = z\rho_0^s$.

Cercando, come al solito, perturbazioni del tipo onde dispersive, tramite sostituzioni formali e derivazione rispetto al tempo otteniamo

$$\begin{cases} -\omega\delta\rho + \rho_0\delta\mathbf{v}\cdot\mathbf{k} = 0 \\ -\omega\rho_0\delta\mathbf{v} + p'(\rho_0)\delta\rho\mathbf{k} + \rho_0\delta\phi\mathbf{k} - \zeta_0(\delta\mathbf{v}\cdot\mathbf{k})i\mathbf{k} = \mathbf{0} \\ -k^2\delta\phi = 4\pi G\delta\rho \end{cases} \tag{4.3}$$

Il sistema algebrico che governa le piccole ampiezze è il seguente

$$\begin{cases} -\omega\rho_1 + \rho_0\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{k} = 0 \\ p'(\rho_0)\rho_1\mathbf{k} - \omega\rho_0\mathbf{v}_1 - i\zeta_0(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{k})\mathbf{k} + \rho_0\phi_1\mathbf{k} = \mathbf{0} \\ 4\pi G\rho_1 + k^2\phi_1 = 0 \end{cases} \tag{4.4}$$

Supponiamo $\omega \neq 0$, proiettiamo lungo la direzione del fronte d'onda $\mathbf{k}$ la seconda equazione e teniamo conto delle relazioni

$$\rho_1 = \frac{\rho_0}{\omega}\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{k} \tag{4.5}$$

$$\phi_1 = -\frac{4\pi G}{k^2}\rho_1 = -\frac{4\pi G\rho_0}{k^2\omega}\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{k} \tag{4.6}$$

Imponendo che il determinante della matrice associata al sistema ottenuto sia nullo si ricava la seguente relazione di dispersione

$$\rho_0\omega^2 + i\zeta_0k^2\omega + \rho_0(4\pi G\rho_0 - p'(\rho_0)k^2) = 0. \tag{4.7}$$

La condizione $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{k} \neq 0$ è soddisfatta se e solo se ω soddisfa l'equazione di dispersione (4.7). Tale equazione è algebrica di secondo grado e le soluzioni sono date da

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2\rho_0}\left(-i\zeta_0 k^2 \pm \sqrt{\Delta}\right) \tag{4.8}$$

con

$$\Delta = -\zeta_0^2 k^4 - 4\rho_0^2(4\pi G\rho_0 - c_s^2 k^2)$$

dove $c_s^2 = p'(\rho_0)$.
Osserviamo subito che se

$$4\pi G\rho_0 - c_s^2 k^2 > 0,$$

cioè per ogni numero d'onda

$$k < \sqrt{\frac{4\pi G\rho_0}{c_s^2}} = k_J,$$

sicuramente $\Delta < 0$; quindi i due modi di Fourier corrispondenti hanno frequenza $\omega_{1,2} \in \mathbb{C}$ e questo genera instabilità.
Nel caso limite $k^2 = k_J^2$, l'equazione (4.7), oltre al caso $\omega = 0$, porge $\omega = \dfrac{-i\zeta_0 k_J^2}{\rho_0}$, $\zeta_0 > 0$; in questo caso il parametro di stabilità

$$\sigma = -i\omega = \frac{-\zeta_0 k_J^2}{\rho_0} \in \mathbb{R}^-$$

e il modo di Fourier è stabile, in particolare esponenzialmente stabile.
Se invece $k > k_J$ avremo che

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow k_1 < k < k_2$$

con

$$k_{1,2} = \frac{\sqrt{2}\rho_0 c_s}{\zeta_0}\left(1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{k_J\zeta_0}{\rho_0 c_s}\right)^2}\right), \quad k_1 < k_2.$$

Fisicamente dobbiamo richiedere che i numeri d'onda $k_{1,2}$ siano reali positivi, quindi che

$$1 - \left(\frac{k_J\zeta_0}{\rho_0 c_s}\right)^2 > 0$$

Questa richiesta definisce una soglia di interesse fisico per il coefficiente di viscosità iniziale del mezzo

$$\zeta_0 < \frac{\rho_0 c_s}{k_J} =: \zeta_c.$$

Posta questa condizione, i casi possibili sono tre:

- $k < k_J$
  Allora $\Delta = -D^2$ e $D^2 > \zeta^2 k^4$. Così

$$-i\omega_1 t = \frac{1}{2\rho_0}\left(-\zeta_0 k^2 - D\right) t < 0 \tag{4.9}$$

$$-i\omega_2 t = \frac{1}{2\rho_0}\left(-\zeta_0 k^2 + D\right) t > 0 \tag{4.10}$$

- $k_J < k < k_1 \vee k > k_2$
  Allora $\Delta = -D^2$ e $D^2 < \zeta^2 k^4$. Così

$$-i\omega_1 t = \frac{1}{2\rho_0}\left(-\zeta_0 k^2 - D\right) t < 0 \tag{4.11}$$

$$-i\omega_2 t = \frac{1}{2\rho_0}\left(-\zeta_0 k^2 + D\right) t < 0 \tag{4.12}$$

- $k_1 < k < k_2$
  Allora $\Delta > 0$, così

$$-i\omega_{1,2} t = \left(\frac{-\zeta_0 k^2}{2\rho_0} \mp \frac{i\sqrt{\Delta}}{2\rho_0}\right) t \tag{4.13}$$

I casi (4.9), (4.11) e (4.12) corrispondono a una decrescita esponenziale nel tempo della perturbazione di densità; (4.10) è l'unico caso che porta a una crescita esponenziale nel tempo dell'ampiezza della perturbazione, quindi a una condizione di instabilità, per cui il criterio di Jeans resta valido anche in presenza di effetti viscosi. Infine (4.13) è responsabile di un comportamento oscillatorio smorzato dell'ampiezza.
Osserviamo quindi che, per gli effetti dissipativi, il puro comportamento oscillatorio risultato dall'analisi classica di Jeans è scomparso.
L'analisi matematica del problema ci conferma quanto ci si aspettava intuitivamente: la viscosità del mezzo offre una resistenza alla propagazione della perturbazione che può anche annullarla, ma abbiamo verificato che non modifica la soglia critica di Jeans per l'insorgenza di instabilità, bensì l'evoluzione nel tempo della perturbazione.

4.2 Modello di Eulero-Poisson in presenza della forza di Coriolis

Dimostriamo infine che il criterio di Jeans non è generalmente influenzato dalla presenza di una rotazione uniforme.
Partiamo dal sistema linearizzato per le perturbazioni $(\delta\rho, \delta\mathbf{v}, \delta\phi)$ dello stato base $\rho_0 = costante > 0$, $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ e ϕ_0 t.c. $\nabla\phi_0 = \mathbf{0}$:

$$\begin{cases} \delta\rho_t + \rho_0 \nabla \cdot \delta\mathbf{v} = 0 \\ \rho_0 \delta\mathbf{v}_t + p'(\rho_0)\nabla\delta\rho = -\rho_0\nabla\delta\phi + 2\rho_0\delta\mathbf{v} \times \mathbf{w} \\ \nabla^2\delta\phi = 4\pi G\delta\rho \end{cases} \tag{4.14}$$

Semplificando opportunamente, al solito, con il calcolo delle derivate temporali e le sostituzioni formali, il corrispondente sistema per le ampiezze $(\rho_1, \mathbf{v}_1, \phi_1)$ è il seguente:

$$\begin{cases} -\omega\rho_1 + \rho_0\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_1 = 0 \\ -\omega\rho_0\mathbf{v}_1 + p'(\rho_0)\rho_1\mathbf{k} = -\rho_0\phi_1\mathbf{k} - 2i\rho_0\mathbf{v}_1 \times \mathbf{w} \\ -|\mathbf{k}|^2\phi_1 = 4\pi G\rho_1 \end{cases} \tag{4.15}$$

Seguendo Chandrasekhar (cfr.[11]), consideriamo perturbazioni $(\delta\rho, \delta\mathbf{v}, \delta\phi)$ che si propagano lungo uno degli assi di riferimento, ad esempio l'asse z il cui versore sarà $\widehat{\mathbf{k}} := \dfrac{\mathbf{k}}{k}$, così $\mathbf{k} = (0, 0, k)$, ma manteniamo del tutto generica la velocità angolare $\mathbf{w}$.
Il sistema (4.15) diventa (omettendo per semplicità il pedice delle incognite):

$$\begin{cases} -\omega\rho + \rho_0 k v_{\widehat{k}} = 0 \\ p'(\rho_0)\rho k - \omega\rho_0\mathbf{v} + 2i\rho_0\mathbf{v} \times \mathbf{w} + \rho_0\phi k = \mathbf{0} \\ 4\pi G\rho + k^2\phi = 0 \end{cases} \tag{4.16}$$

Tenendo conto di

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 = (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{i}, \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{j}, \mathbf{v}_1 \cdot \widehat{\mathbf{k}}) = (v_i, v_j, v_{\widehat{k}})$$
$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 = (\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{i}, \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{j}, \mathbf{w}_1 \cdot \widehat{\mathbf{k}}) = (w_i, w_j, w_{\widehat{k}})$$

si ha

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{w}_1 = \mathbf{v} \times \mathbf{w} = (v_j w_{\widehat{k}} - v_{\widehat{k}} w_j)\mathbf{i} - (v_i w_{\widehat{k}} - v_{\widehat{k}} w_i)\mathbf{j} + (v_i w_j - v_j w_i)\widehat{\mathbf{k}}. \tag{4.17}$$

Proiettando l'equazione del moto lungo $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\widehat{\mathbf{k}}$, dopo qualche semplice passaggio, da (4.16) si ottiene il seguente sistema scalare di Cramer

$$\begin{cases} -\omega\rho + \rho_0 k v_{\widehat{k}} = 0 \\ -\omega v_i = 2i(v_j w_{\widehat{k}} - v_{\widehat{k}} w_j) \\ -\omega v_j = 2i(v_{\widehat{k}} w_i - v_i w_{\widehat{k}}) \\ -\omega v_{\widehat{k}} + \dfrac{p'(\rho_0)}{\rho_0} k\rho = -k\phi + 2i(v_i w_j - v_j w_i) \\ 4\pi G\rho + k^2\phi = 0 \end{cases} \tag{4.18}$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè si abbiano perturbazioni non tutte nulle è che

$$\begin{vmatrix} -\omega & 0 & 0 & \rho_0 k & 0 \\ 0 & -\omega & -2iw_{\widehat{k}} & 2iw_j & 0 \\ 0 & 2iw_{\widehat{k}} & -\omega & -2iw_i & 0 \\ \frac{p'(\rho_0)}{\rho_0}k & -2iw_j & 2iw_i & -\omega & k \\ 4\pi G & 0 & 0 & 0 & k^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Sviluppando il determinante si ottiene un'equazione biquadratica della forma

$$\omega^4 - \omega^2(p'(\rho_0)k^2 + 4|\mathbf{w}|^2 - 4\pi G\rho_0) + 4w_{\widehat{k}}^2(p'(\rho_0)k^2 - 4\pi G\rho_0) = 0. \tag{4.19}$$

Dall'equazione (4.19) segue che ci sono, in generale, due modi in cui un'onda si può propagare attraverso il mezzo; così, se ω_1^2 e ω_2^2 denotano le frequenze di questi due modi, allora si ha:

$$\begin{cases} \omega_1^2 + \omega_2^2 = p'(\rho_0)k^2 + 4|\mathbf{w}|^2 - 4\pi G\rho_0 \\ \omega_1^2\omega_2^2 = 4w_{\widehat{k}}^2(p'(\rho_0)k^2 - 4\pi G\rho_0) \end{cases} \tag{4.20}$$

La classica condizione di Jeans

$$k^2 < \frac{4\pi G\rho_0}{p'(\rho_0)} = k_J^2$$

è sufficiente perchè una delle due frequenze risulti immaginaria; in questo caso generale la condizione per la instabilità gravitazionale non è influenzata dalla presenza della rotazione uniforme.

Osservazione 6. Se $w_{\widehat{k}} = 0$, cioè il vettore velocità angolare è ortogonale al vettore d'onda, l'equazione (4.19) si riduce alla forma

$$\omega^4 - \omega^2(p'(\rho_0)k^2 + 4|\mathbf{w}|^2 - 4\pi G\rho_0) = 0$$

da cui, escludendo il caso stazionario $\omega = 0$, si ricava

$$\omega^2 = p'(\rho_0)k^2 + 4|\mathbf{w}|^2 - 4\pi G\rho_0.$$

La condizione di instabilità

$$p'(\rho_0)\left(k^2 + 4\frac{|\mathbf{w}|^2 - \pi G\rho_0}{p'(\rho_0)}\right) < 0$$

non potrà essere mai soddisfatta se

$$|\mathbf{w}|^2 > \pi G\rho_0.$$

Nel caso $|\mathbf{w}|^2 < \pi G\rho_0$, si può definire un nuovo numero d'onda critico

$$\overline{k}_J^2 := \frac{4(\pi G\rho_0 - |\mathbf{w}|^2)}{c_s^2(\rho_0)} < k_J^2$$

per cui, per effetto della rotazione uniforme la condizione per l'insorgenza dell'instabilità gravitazionale diventa $k^2 < \overline{k}_J^2$ o, equivalentemente $\lambda > \overline{\lambda}_J > \lambda_J$.
In questo caso la presenza di $\mathbf{w}$ 'aiuta la stabilità', in quanto ritarda il momento per l'insorgenza del collasso.

Capitolo 5

Analogie con l'analisi del collasso chemiotattico

La chemiotassi è uno dei più semplici meccanismi per l'aggregazione di specie biologiche. Il temine si riferisce ad una situazione, in ambito medico o biologico, dove gli organismi (p.e. batteri, amebe, cellule endoteliali etc.) si muovono verso alte concentrazioni di una sostanza chimica che esse stesse rilasciano. L'aggregazione chemiotattica è descritta dal modello di Keller-Segel del 1970: questi autori considerano un sistema di equazioni del tipo avvezione-diffusione consistente in due PDE paraboliche accoppiate (cfr. [1]); le incognite di tale sistema sono la concentrazione della specie u e quella della sostanza chimica rilasciata v.

Un aspetto importante dei modelli di chemiotassi è l'insorgenza del collasso chemiotattico; questo termine si riferisce al fatto che, sotto opportune circostanze, l'intera popolazione dovrebbe concentrarsi in un singolo punto (spora) in un tempo finito. In termini matematici, questo significa la formazione di una singolarità del tipo delta di Dirac (vedi [2]).

In pratica il collasso porta all'aggregazione degli organismi in clusters o in strutture a reticolato, in analogia con quanto avviene nell'universo dopo il collasso gravitazionale di un corpo celeste.

Il modello Keller-Segel può descrivere la formazione di cluster, ma fallisce per quanto riguarda la formazione dei reticolati. Questo tipo di struttura corrisponde all'organizzazione spontanea delle cellule endoteliali durante la vasculogenesi, un processo in atto durante lo sviluppo embrionale. Sono così stati sviluppati modelli più generali della chemiotassi (cfr.[12]) nell'ambito dell'idrodinamica, tenendo però conto della presenza di una forza d'attrito. Per piccoli attriti si ottiene proprio un modello idrodinamico della chemiotassi simile al sistema di Eulero-Poisson che descrive un gas barotropico autogravitante (sezione 2.2). Studiando la stabilità di una distribuzione infinita e omogenea di cellule contro il collasso chemiotattico si evidenziano forti analogie con l'analisi classica di Jeans del sistema di Eulero-Poisson, che potrebbero anche suggerire modifiche alla struttura matematica del modello di E.-P. in grado di superare il cosiddetto inganno di Jeans, e anche in linea con le osservazioni precedentemente fatte in 2.2.1. Il modello chemiotattico considerato da Chavanis-Sire in [12] è descritto dal seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} \rho_t + \nabla\rho \cdot \mathbf{v} + \rho\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \mathbf{v}_t + \dfrac{p'(\rho)}{\rho}\nabla\rho + (\nabla\mathbf{v})\mathbf{v} = -\nabla c - \xi\mathbf{v} \\ \nabla^2 c = \lambda(\rho - \overline{\rho}) \end{cases} \tag{5.1}$$

dove

- $\rho(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ sono rispettivamente la densità e la velocità della distribuzione di cellule;
- $c(\mathbf{x}, t)$ è la concentrazione della sostanza chimica secreta dall'organismo;
- $\overline{\rho}$ è la densità media;
- $-\xi\mathbf{v}$ è la forza d'attrito, con $\xi > 0$;
- λ è una costante positiva.

La presenza della forza d'attrito, interpretabile fisicamente come un freno, non influenza l'insorgenza dell'instabilità, ma solo l'evoluzione della perturbazione, così come accadeva al modello di Eulero-Poisson, con l'introduzione di effetti viscosi.
Osserviamo che la concentrazione c svolge ora il ruolo che era del potenziale gravitazionale ϕ. Infatti se le interazioni biologiche hanno sempre bisogno di una sostanza che le trasporti, il passaggio dell'informazione sarà influenzato dal grado di concentrazione del

mezzo. Allo stesso modo, ma in forma astratta, le interazioni a distanza tra i corpi, nella teoria Newtoniana, trovano proprio nel campo gravitazionale il loro mezzo di trasporto e il potenziale ne sostituisce la concentrazione.
Una differenza sostanziale tra i due modelli in esame è che per il modello chemiotattico non si presenta l'inganno di Jeans. Infatti una distribuzione di cellule infinita omogenea con $\rho = \overline{\rho}$, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ e c t.c. $\nabla c = \mathbf{0}$ è effettivamente una soluzione stazionaria costante del problema, al contrario di quanto accade nell'analisi classica di Jeans.
Procedendo al solito modo, da (5.1) arriviamo alla seguente legge di dispersione

$$\omega^2 + i\xi\omega + \lambda\overline{\rho} - c_s^2(\overline{\rho})k^2 = 0$$

dove $k = |\mathbf{k}|$, di soluzioni

$$\omega_{\pm} = \frac{-i\xi \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

con

$$\Delta = -\xi^2 - 4\lambda\overline{\rho} + 4c_s^2k^2.$$

Osserviamo che Δ sarà sicuramente negativo se $-4\lambda\overline{\rho} + 4c_s^2k^2 < 0$, cioè

$$k < \sqrt{\frac{\lambda\overline{\rho}}{c_s^2}} =: k_c.$$

Questa soglia critica ha lo stesso ruolo del numero d'onda di Jeans nell'analisi delle instabilità gravitazionali.

Se $k > k_c$ avremo che

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow k < k_1 \quad o \quad k > k_2$$

con

$$k_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{\xi^2 + 4\lambda\overline{\rho}}{4c_s^2}}, \quad k_1 < k_2$$

Matematicamente k_1 non può essere il modulo di un vettore d'onda in quanto negativo, quindi la condizione si riduce a $k > k_2$. Ora si prosegue un'analisi del tutto parallela a quella fatta nel caso in cui erano presenti effetti viscosi nell'analisi di Jeans dalla quale ottenendo le seguenti situazioni:

- per tutti i numeri d'onda $k < k_c$: ω_+ porta alla crescita esponenziale nel tempo dell'ampiezza della perturbazione di densità conducendo al collasso chemiotattico, mentre ω_- alla decrescita esponenziale dell'ampiezza nel tempo;

- per tutti i numeri d'onda $k_c < k < k_2$: sia ω_+ che ω_- portano a una decrescita esponenziale, quindi alla stabilità del mezzo;

- per tutti i numeri d'onda $k > k_2$: la perturbazione avrà un comportamento oscillatorio smorzato nel tempo.

In conclusione, in analogia con quanto descritto in corrispondenza del collasso gravitazionale, una distribuzione di cellule che collassa può dunque frammentarsi in cellule sempre più piccole che possono, a loro volta, collassare e dar luogo alla formazione di un cluster di cellule; alla fine del processo si arriva alla formazione di una protocellula.

Conclusioni

Riassumiamo i principali risultati ottenuti.

- Il modello P per il gas perfetto barotropico è un modello iperbolico quasi lineare, compatibile con la propagazione di onde. Perturbando un suo stato di base costante con fluttuazioni del tipo onde dispersive si prospettano due casi: si possono generare onde materiali o di contatto, che non trasportano perturbazione di densità, o onde sonore di piccola ampiezza che si muovono rispetto al fluido con velocità costante $\pm c_s(\rho_0)$.

- Considerando anche gli effetti autogravitanti, il sistema di PDE che descrive il modello perde il suo carattere d'iperbolicità per la presenza dell'equazione ellittica di Poisson e inoltre diventa del secondo ordine. Dall'analisi spettrale lineare di tale modello si ottiene il criterio classico di Jeans: se il numero d'onda della perturbazione è inferiore alla soglia critica k_J, l'ampiezza cresce esponenzialmente nel tempo portando all'instabilità del mezzo; in caso contrario si generano delle onde, dette onde gravitazionali di Jeans, che si possono confrontare con le precedenti onde sonore di piccola ampiezza.

- Abbiamo poi verificato che la presenza della viscosità del tipo Navier-Stokes lascia inalterato il criterio di Jeans, anche se il puro comportamento oscillatorio dell'ampiezza viene sostituito da un modo oscillatorio smorzato. Questo risultato stabilizzante era comunque prevedibile per gli effetti dissipativi indotti dalla presenza della viscosità.

  Procedendo in modo analogo, abbiamo dimostrato che anche la presenza di una rotazione uniforme non modifica generalmente il criterio di Jeans: anzi, sotto opportune condizioni, 'aiuta la stabilità', ritardando il tempo per l'insorgenza dell'instabilità gravitazionale. Ci aspettiamo che la presenza contemporanea di entrambi gli effetti possa essere ancora stabilizzante, lasciando sempre invariata la soglia critica di Jeans.

- Infine, con riferimento ad un modello matematico idrodinamico per la chemiotassi e nell'ambito dello stesso procedimento matematico, la discussione analitica delle condizioni sufficienti per l'insorgenza del cosiddetto collasso chemiotattico presenta analogie evidenti, anche di terminologie, con quella precedente legata al collasso gravitazionale.

Possiamo quindi concludere che, a partire da Jeans, proseguendo con Chandrasekhar e con molti altri autori, il problema dell'instabilità gravitazionale ha sempre suscitato un grande interesse nella comunità scientifica, sia da un punto di vista matematico che astrofisico; a tutt'oggi questo meccanismo continua ad essere un argomento di grande dibattito, soprattutto perchè si pensa che possa non solo spiegare la formazione delle stelle e quella dei pianeti giganti, ma anche motivare la forte presenza di materia oscura nel nostro universo. Un argomento ancora aperto per la ricerca attiva del settore è proprio la costruzione di modellamenti matematici sempre più complessi e realistici per la descrizione di una nube di gas del mezzo interstellare, che tengano conto non solo degli effetti magnetici e di quelli termici, ma anche di eventuali rilassamenti, sia termici che viscosi, manifestati dalle evidenze osservative.

Appendice A

Appendice

A.1 Iperbolicità del modello P in versione 3D

Dimostriamo che il modello

$$\begin{cases} \rho_t + \nabla\rho \cdot \mathbf{v} + \rho\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \mathbf{v}_t + \dfrac{p'(\rho)}{\rho}\nabla\rho + (\nabla\mathbf{v})\mathbf{v} = \mathbf{0} \end{cases} \tag{A.1}$$

è iperbolico, studiando la propagazione di onde di discontinuità 3D.
Scriviamo (A.1) per le funzioni salto:

$$\begin{cases} [\rho_t] + [\nabla\rho] \cdot \mathbf{v} + \rho\,[\nabla \cdot \mathbf{v}] = 0 \\ [\mathbf{v}_t] + \dfrac{p'(\rho)}{\rho}\,[\nabla\rho] + [\nabla\mathbf{v}]\,\mathbf{v} = \mathbf{0} \end{cases} \tag{A.2}$$

Effettuiamo le sostituzioni formali della sezione 1.1

$$\begin{cases} -\lambda\delta\rho + \delta\rho\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} + \rho\delta\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \\ -\lambda\delta\mathbf{v} + \dfrac{p'(\rho)}{\rho}\delta\rho\mathbf{n} + (\delta\mathbf{v} \otimes \mathbf{n})\mathbf{v} = \mathbf{0} \end{cases} \tag{A.3}$$

Chiamiamo velocità di propagazione del fronte d'onda la quantità

$$U = \lambda - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}$$

e riscriviamo (A.3) in termini di tale grandezza, ricordando anche che $(\delta\mathbf{v} \otimes \mathbf{n})\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\delta\mathbf{v}$:

$$\begin{cases} -U\delta\rho + \rho\delta\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \\ -\rho U\delta\mathbf{v} + p'(\rho)\delta\rho\mathbf{n} = \mathbf{0} \end{cases} \tag{A.4}$$

Rispetto al sistema di riferimento intrinseco $(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{n})$, (A.4) diventa:

$$\begin{cases} -U\delta\rho + \rho\delta\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \\ -\rho U\delta\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} + p'(\rho)\delta\rho = 0 \\ -\rho U\delta\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_1 = 0 \\ -\rho U\delta\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_2 = 0 \end{cases} \tag{A.5}$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè (A.5) abbia soluzione $\delta\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ è che:

$$\begin{vmatrix} -U & \rho & 0 & 0 \\ \dfrac{c_s^2(\rho)}{\rho} & -U & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho U & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho U \end{vmatrix} = 0$$

da cui si ottiene l'equazione caratteristica

$$(\rho U)^2(U^2 - c_s^2(\rho)) = 0$$

Le soluzioni sono

$$U = 0 \Longrightarrow \lambda = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \tag{A.6}$$

$$U = \pm c_s^2(\rho) \Longrightarrow \lambda^{\pm} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \pm c_s^2 \tag{A.7}$$

Le velocità sono reali, quindi il modello è classificabile come iperbolico, non strettamente perchè la soluzione $U = 0$ è doppia. Le onde s'accelerazione generate da (A.6) sono onde materiali o di contatto, hanno infatti velocità nulla, non trasportano discontinuità in $\delta\rho$ e $\delta\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ e sono trasversali; le onde d'accelerazione generate da (A.7) sono le classiche onde sonore o di compressione e sono longitudinali: trasportano discontinuità in $\delta\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ e quindi anche in $\delta\rho$.

A.2 Procedimento alternativo per l'analisi classica di Jeans: riduzione ad una sola equazione

Partendo dal modello di Eulero-Poisson per le perturbazioni

$$\delta\rho = \rho_1 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}, \qquad \rho_1 \neq 0 \tag{A.8}$$

$$\delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}, \qquad \mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0} \tag{A.9}$$

$$\delta\phi = \phi_1 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}, \qquad \phi_1 \neq 0 \tag{A.10}$$

possiamo arrivare all'equazione di dispersione, anche senza passare per il calcolo diretto del determinante del sistema di Cramer associato al sistema.
Il procedimento è molto semplice per il modello unidimensionale, descritto dal sistema lineare nelle due variabili indipendenti (x, t)

$$\begin{cases} \delta\rho_t + \rho_0 \delta v_x = 0 \\ \rho_0 \delta v_t + p'(\rho_0)\delta\rho_x = -\rho_0 \delta\phi_x \\ \delta\phi_{xx} = 4\pi G \delta\rho \end{cases} \tag{A.11}$$

dove δv è l'unica componente di $\delta\mathbf{v}$ lungo p.e. l'asse x, coincidente con la direzione del fronte d'onda.
Derivando rispetto al tempo t la prima equazione e rispetto a x la seconda, ed eliminando con l'equazione di Poisson $\delta\phi_{xx}$, si ha

$$\begin{cases} \delta\rho_{tt} + \rho_0 \delta v_{xt} = 0 \\ \rho_0 \delta v_{xt} + p'(\rho_0)\delta\rho_{xx} = -4\pi G \rho_0 \delta\rho \end{cases}$$

L'ulteriore eliminazione di δv_{xt} fra le due porge

$$\delta\rho_{tt} - p'(\rho_0)\delta\rho_{xx} - 4\pi G \rho_0 \delta\rho = 0 \tag{A.12}$$

In assenza dell'autogravità si trova il modello prototipo iperbolico delle onde sonore di piccola ampiezza $\delta\rho_{tt} - c_s^2(\rho_0)\delta\rho_{xx} = 0$.
Cercando soluzioni $\delta\rho = \rho_1 \exp(i(kx - \omega t))$, $\rho_1 \neq 0$, ed eliminando l'esponenziale si ottiene l'equazione di dispersione

$$-\omega^2 + c_s^2(\rho_0)k^2 - 4\pi G \rho_0 = 0,$$

che coincide con il risultato trovato al Capitolo 3.
Nel caso 3D, si può procedere sul sistema

$$\begin{cases} \delta\rho_t + \rho_0 \nabla \cdot \delta\mathbf{v} = 0 \\ \rho_0 \delta\mathbf{v}_t + p'(\rho_0)\nabla\delta\rho = -\rho_0\delta\phi \\ \nabla^2\delta\phi = 4\pi G\delta\rho \end{cases} \tag{A.13}$$

nel seguente modo: si deriva parzialmente rispetto al tempo la prima equazione e si considera l'operatore divergenza sulla seconda; tenendo conto della costanza dei coefficienti, si ottiene il nuovo sistema

$$\begin{cases} \delta\rho_{tt} + \rho_0 (\nabla \cdot \delta\mathbf{v})_t = 0 \\ \rho_0 \nabla \cdot \delta\mathbf{v}_t + p'(\rho_0)\nabla^2\delta\rho = -\rho_0\nabla^2\delta\phi \\ \nabla^2\delta\phi = 4\pi G\delta\rho \end{cases} \tag{A.14}$$

Usando l'equazione di Poisson per eliminare $\nabla^2\delta\phi$ e procedendo all'ulteriore eliminazione di $(\nabla \cdot \delta\mathbf{v})_t$ fra le restanti equazioni si ottiene subito l'equazione cercata in $\delta\rho$

$$\delta\rho_{tt} - p'(\rho_0)\nabla^2\rho = 4\pi G\rho_0\delta\rho \tag{A.15}$$

In assenza dell'autogravità, $\delta\rho$ soddisfa l'equazione iperbolica delle onde sonore di piccola ampiezza in versione 3D $\delta\rho_{tt} - c_s^2(\rho_0)\nabla^2\delta\rho = 0$.

Bibliografia

[1] John, F., Partial Differential Equations, Appl. Math. Sci., 1, Springer, 1986.

[2] Renardy,M. and Rogers, R.C., An introduction to Partial Differatial Equation, Texts Appl. Math. 13, 2004.

[3] Ruggeri, T., Introduzione alla termomeccanica dei continui, Mondussi Editore, 2007.

[4] Gurtin,M.E. An introduction to continuum mechanics, Mat. in Sci. and Engn., 158, Academic Press USA, 1981.

[5] Jeans, J.H., The stability of a spherical nebula, Phylos. Trans. Roy. Soc. (London), Ser.A 199, 1902.

[6] Jeans, J.H., Astronomy and Cosmogony, Cambrige 1929.

[7] Binney, J. and Tremaine, S., Galactic dynamics, pp 283 e seguenti, Princeton University Press, Princeton, 1987 (second edition 2008).

[8] A.I.Ershkovich, The Jeans Swindle: the end of a myth?, Department of Geophysics and Planetary Sciences, Tel Aviv University, preprint 2011.

[9] Kiessling, M. k.-H., The Jeans Swindle, A true story- mathematically speaking, Adv. Appl. Math., 31, 138-139, 2003.

[10] Carlevaro, N. and Montani, G., Jeans instability in the presence of viscous effects, Int. J. of Mod. Phys. D., 1257,1272, 2009.

[11] Chandrasekhar, S., Hydrodynamics and hydromagnetic stability, pp 588-591, Oxford : Clarendon Press, 1981.

[12] Chavanis, P-H. and Sire, C., Jeans type analysis of chemotactic collapse, Physica A: Statistical Mech. and its Appl., 387, 4033-4052, 2008.

Ringraziamenti

Vorrei ringraziare la mia relatrice, Prof.ssa Franchi, per la sua grande passione, la gentilezza e la professionalità che mi ha sempre mostrato, sia a lezione sia, soprattutto, durante lo sviluppo di questo lavoro.
Grazie Simone, perchè sai sempre come riaccendermi il sorriso e per essere stato al mio fianco anche in questo percorso.
Ringrazio Alessandra per essere, giorno per giorno, mia amica e consigliera.
Chiara, Ilaria, Lorenzo e Stefano per condividere con me gioie e vittorie, sconfitte e dolori, passati e, spero, futuri, grazie.
Inoltre ringrazio Prof. Mancini per aver mantenuto e sempre stimolato la mia passione, è anche grazie a lei se sono arrivata qui.