

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica
Curriculum Applicativo

Spazi Spline Generalizzate e Modellazione Geometrica

Tesi di Laurea Magistrale in Analisi Numerica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Giulio Casciola

Presentata da:
Cristina Treré

Sessione II
Anno Accademico 2012-2013

Indice

Ringraziamenti	iii
Elenco delle figure	v
Introduzione	vii
1 Sistemi e Spazi di Tchebycheff	1
1.1 Proprietà sugli zeri	5
1.2 Variation Diminishing	7
1.3 Iterpolazione	7
1.4 Esempi di spazi di Tchebycheff	9
2 Tchebycheff-spline	13
2.1 Proprietà aggiuntive	16
3 L-spline	19
3.1 Spline Trigonometriche	23
3.2 Spline Iperboliche	27
3.3 UE-spline	31
4 Formule ricorrenti per basi B-spline	33
4.1 Algoritmo 1	34
4.1.1 Esempi	38
4.2 Algoritmo 2	44
4.3 Spazi spline trasformati	48
4.4 UE-spline	50
4.5 Confronto delle formule ricorrenti	51

5	Knot-Insertion	65
5.1	Knot-Insertion come conversione di base	66
5.1.1	Knot-Insertion nel caso polinomiale, trigonometrico e iperbolico	69
5.1.2	Esempio numerico	71
5.2	Knot-Insertion derivante da formule ricorrenti	76
5.3	Metodo alternativo	81
5.4	Knot-Insertion nelle UE-spline	83
5.5	Knot-Insertion come strumento teorico	89
6	Approccio alternativo alla teoria spline	95
6.1	Definizioni preliminari	95
6.1.1	Esempio numerico	98
6.2	B-basi	101
6.2.1	Esempi B-base	104
6.3	Spazio dei polinomi generalizzato	106
6.3.1	Formula ricorrente	108
6.4	Teoria spline	110
7	Conclusioni	115
A	Libreria	119
	Bibliografia	123

Ringraziamenti

Desidero ringraziare il Professor Giulio Casciola, per la grande disponibilità e cortesia dimostratemi durante tutta la stesura delle tesi. Con grande passione e pazienza ha saputo guidarmi alla scoperta di questa affascinante materia stimolandomi a migliorare sempre più.

Un grazie poi va a Luca, per aver camminato al mio fianco dall'inizio alla fine di questo lungo percorso con il suo incrollabile sostegno.

Un sentito ringraziamento anche ai miei genitori Tiziana e Giancarlo e a mia sorella Elisa, che hanno saputo gioire delle mie vittorie e darmi forza nelle sconfitte.

Un ultimo ringraziamento è per i miei amici e per i compagni di studi, per essermi stati vicini e avermi aiutato nei momenti di sconforto.

Elenco delle figure

4.1	B-spline polinomiali normalizzate di ordine 3 definite su una partizione a nodi semplici	39
4.2	B-spline polinomiali normalizzate di ordine 3 definite su una partizione a nodi coincidenti	40
4.3	B-spline trigonometriche normalizzate di ordine 3 e scalate per formare una partizione dell'unità, definite su una partizione a nodi semplici	41
4.4	B-spline trigonometriche normalizzate di ordine 3 scalate per formare una partizione dell'unità, definite su una partizione a nodi coincidenti	42
4.5	B-spline iperboliche normalizzate di ordine 3 scalate per formare una partizione dell'unità, definite su una partizione a nodi semplici	43
4.6	B-spline iperboliche normalizzate di ordine 3 scalate per formare una partizione dell'unità, definite su una partizione a nodi coincidenti	43
4.7	B-spline polinomiale normalizzata di ordine 3 definita su una partizione a nodi semplici	55
4.8	Confronto tra la formula ricorrente classica e la formula ricorrente integrale UE, nel caso trigonometrico di ordine 3	57
4.9	Funzioni di Transizione trigonometriche di grado 2 definite su una partizione a nodi semplici	58
4.10	Confronto tra la formula ricorrente classica e le funzioni di Transizione, nel caso trigonometrico di ordine 3	60

4.11	Confronto tra la formula ricorrente classica e la formula ricorrente integrale UE, nel caso iperbolico di ordine 3	62
4.12	Funzioni di Transizione iperboliche di grado 2 definite su una partizione a nodi semplici	62
4.13	Confronto tra la formula ricorrente classica e le funzioni di Transizione, nel caso iperbolico di ordine 3	64
5.1	Curva costruita interattivamente su uno spazio spline polinomiale di ordine 3 e dimensione 6	72
5.2	KI su una curva costruita interattivamente e definita nello spazio spline polinomiale di ordine 3 e dimensione 6	73
5.3	Curva costruita interattivamente su uno spazio spline trigonometrico di ordine 3 e dimensione 6	74
5.4	KI su una curva costruita interattivamente e definita nello spazio spline trigonometrico di ordine 3 e dimensione 6	74
5.5	Curva costruita interattivamente su uno spazio spline iperbolico di ordine 3 e dimensione 6	75
5.6	KI su una curva costruita interattivamente e definita nello spazio spline iperbolico di ordine 3 e dimensione 6	75
5.7	Idea base del KI	82
5.8	Knot-Insertion per UE-spline	89
6.1	Proprietà di una curva costruita su uno spazio spline trigonometrico di ordine dispari	99
6.2	Proprietà di una curva costruita su uno spazio spline trigonometrico di ordine pari	99
6.3	Proprietà di una curva costruita su uno spazio spline iperbolico di ordine dispari	100
6.4	Proprietà di una curva costruita su uno spazio spline iperbolico di ordine pari	100

Introduzione

In questo elaborato si illustrano due metodi differenti per introdurre e trattare gli spazi di funzioni spline generalizzate, avendo come punto di riferimento il caso spline polinomiale ben noto in letteratura. In particolare, la motivazione del lavoro svolto è di analizzare gli spazi di spline generalizzate utili per la modellazione geometrica, una branca della geometria computazionale che studia l'insieme dei metodi e degli algoritmi che permettono di rappresentare modelli matematici astratti corrispondenti ad oggetti reali. In questo ambito, gli spazi spline in cui si decide di lavorare devono possedere importanti caratteristiche sulle quali si focalizza la nostra attenzione.

Vediamo le linee guida che differenziano i due metodi.

Il primo approccio descritto è quello più classico e datato, che ha come maggiore esponente Larry L. Schumaker [Sch07]. Partendo dai concetti base di sistema di Tchebycheff e dalle proprietà essenziali di cui godono, si studia la naturale generalizzazione dello spazio spline polinomiale: lo spazio Tchebycheff-spline. Successivamente continuando a generalizzare, si introducono spazi di funzione definiti a tratti come elementi del nucleo di un operatore differenziale lineare, detti spazi L-spline. In questo ambiente si costruisce una base con le caratteristiche essenziali nella modellazione geometrica, detta base B-spline. Si studiano in seguito i vari strumenti a disposizione, come le formule ricorrenti per calcolare efficientemente la base B-spline e l'algoritmo di Knot-Insertion. Inoltre, proprio tra questa classe di spazi, si trovano gli spazi spline trigonometrici e iperbolici di notevole importanza nell'ambito del design geometrico. Il secondo approccio, strutturato in maniera opposta, è più recente e ha come maggiore esponente Juan M. Peña [Peñ99]. In questo caso si parte considerando una base che soddisfa le proprietà volute e si costruisce geometricamente

uno spazio spline in modo che su ogni intervallo esista una base di quel tipo. Nello specifico si lavora con un tipo di base più generale rispetto alla base B-spline detto B-base.

Analizziamo nel dettaglio la struttura dei capitoli di cui si compone la nostra trattazione.

Nel capitolo 1 introduciamo il concetto di sistema di Tchebycheff ed evidenziamo alcune utili caratteristiche che soddisfano questi particolari sistemi. In particolare analizziamo alcune proprietà sugli zeri, la proprietà di Variation Diminishing e il ruolo che assumono tali sistemi nei problemi di interpolazione. Nel capitolo 2, grazie a questi concetti preliminari, definiamo il primo spazio di funzioni spline generalizzate: lo spazio di Tchebycheff-spline. Ai fini della modellazione geometrica, costruiamo una base detta base B-spline a supporto compatto, positiva e normalizzata. Di più questa base è così utilizzata nell'ambito numerico, in quanto: è ben condizionata, è possibile stimare il numero di zeri e gode della proprietà di Variation Diminishing. Tuttavia questo tipo di spazio di spline generalizzate può essere ulteriormente ampliato considerando spazi di funzioni a tratti i cui elementi sono dati dal nucleo di un operatore differenziale. Questo tipo di spazi spline sono chiamati spazi L-spline e sono definiti ed analizzati nel capitolo 3. Anche in questo caso ci occupiamo di trovare una base utile nella modellazione geometrica e costruiamo la rispettiva base B-spline. Sempre in questo capitolo, studiamo come casi particolari di spazi L-spline, gli spazi spline trigonometrici e iperbolici, molto importanti in questa trattazione. Nell'ultima sezione si introducono le UE-spline, una classe di spline più ampia che estende e unifica molti tipi di spline utilizzate nell'ambito della modellazione geometrica.

I capitoli 4 e 5 sono invece incentrati su due importanti strumenti: le formule ricorrenti per calcolare le funzioni base B-spline e l'algoritmo di Knot-Insertion. In particolare nel capitolo 4 si studiano in quali spazi possono essere costruite le formule ricorrenti con cui poter calcolare in modo computazionalmente efficiente la base B-spline. Inoltre si esplicitano tali espressioni nel caso polinomiale, trigonometrico, iperbolico e UE. Nel capitolo 5 si illustrano diversi procedimenti più o meno generali per ricavare esplicitamente l'algoritmo di Knot-Insertion,

molto utile sia nelle applicazioni che nell'ambito teorico. Infatti nell'ultima sezione di questo capitolo, si mostra come grazie al Knot-Insertion è possibile dimostrare la proprietà di Variation Diminishing e la totalmente positività della matrice di collocazione della base spline.

Nel capitolo 6, è analizzato il secondo approccio alla teoria spline in cui l'idea cardine è di costruire una base già con le proprietà necessarie nell'ambito della modellazione geometrica. Tale base è chiamata B-base e, tramite una costruzione geometrica, è possibile estenderla anche a spazi spline.

Infine, riportiamo le conclusioni di questo lavoro di tesi e una breve spiegazione di tutte le funzioni MATLAB utilizzate per effettuare esempi numerici e simbolici.

Capitolo 1

Sistemi e Spazi di Tchebycheff

In questo capitolo si introducono le definizioni e i concetti preliminari che saranno utili durante la trattazione dell'argomento principale: gli spazi di funzioni spline generalizzate.

Durante tutto l'elaborato si utilizzano le seguenti nozioni base.

Definizione 1.1. Siano I un intervallo di \mathbb{R} e $t_1 < \dots < t_n$ in I . Preso $\{u_i : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ (o } \mathbb{C}) \mid u_i \in C(I)\}_{i=1,\dots,n}$ un insieme di funzioni, chiamiamo matrice di collocazione di $\{u_1, \dots, u_n\}$

$$M \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \\ t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(t_1) & \dots & u_n(t_1) \\ u_1(t_2) & \dots & u_n(t_2) \\ \dots & \dots & \dots \\ u_1(t_n) & \dots & u_n(t_n) \end{bmatrix} = [u_i(t_j)]_{i,j=1,\dots,n}$$

e indichiamo il suo determinante con

$$D \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \\ t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} = \det M \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \\ t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix}.$$

Definizione 1.2. Siano I un intervallo di \mathbb{R} e $t_1 \leq \dots \leq t_n$ in I , ossia esplicitando le molteplicità $\underbrace{\tau_0 = \dots = \tau_0}_{l_0 \text{ volte}} < \dots < \underbrace{\tau_d = \dots = \tau_d}_{l_d \text{ volte}}$. Preso $\{u_i :$

$I \rightarrow \mathbb{R}$ (o \mathbb{C}) $\{u_i \in C^{m-1}(I)\}_{i=1,\dots,n}$ un insieme di funzioni, chiamiamo matrice di collocazione estesa di $\{u_1, \dots, u_n\}$

$$M \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \\ t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(\tau_0) & \dots & u_n(\tau_0) \\ u_1'(\tau_0) & \dots & u_n'(\tau_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(l_0-1)}(\tau_0) & \dots & u_n^{(l_0-1)}(\tau_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ u_1(\tau_d) & \dots & u_n(\tau_d) \\ u_1'(\tau_d) & \dots & u_n'(\tau_d) \\ \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(l_d-1)}(\tau_0) & \dots & u_n^{(l_d-1)}(\tau_0) \end{bmatrix} = [D^{d_i} u_j(t_i)]_{i,j=0,\dots,n}$$

ove $d_i = \max\{j : t_i = \dots = t_{i-j}\}$ per ogni $i = 1, 2, \dots, n$. Indichiamo inoltre il suo determinante con

$$D \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \\ t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} = \det M \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \\ t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix}.$$

Le proprietà del determinante della matrice di collocazione di un insieme di funzioni continue, permettono di classificare le funzioni nell'ambito della teoria degli spazi di Tchebycheff.

Definizione 1.3. $U_n = \{u_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ (o \mathbb{C}) $\mid u_i \in C(I)\}_{i=1,\dots,n}$ si dice sistema di Tchebycheff (T-sistema) su I se e solo se

$$D \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \\ t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} > 0 \quad \forall t_1 < \dots < t_n \text{ in } I.$$

Definizione 1.4. $U_n = \{u_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ (o \mathbb{C}) $\mid u_i \in C(I)\}_{i=1,\dots,n}$ si dice sistema di Tchebycheff completo (CT-sistema) su I se e solo se $\forall k = 1, \dots, n$ $U_k = \{u_i\}_{i=1,\dots,k}$ è un T-sistema su I .

Definizione 1.5. $U_n = \{u_i : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ (o } \mathbb{C}) \mid u_i \in C(I)\}_{i=1, \dots, n}$ si dice sistema di Tchebycheff completo e ordinato (OCT-sistema) su I se e solo se $\forall k = 1, \dots, n$ $U_k = \{u_{i_\nu}\}_{\nu=1, \dots, k}$ è un T-sistema su $I \forall 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$.

In contrapposizione, le proprietà del determinante della matrice di collocazione estesa, permettono di classificare le funzioni nell'ambito della teoria degli spazi di Tchebycheff estesi.

Definizione 1.6. $U_n = \{u_i : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ (o } \mathbb{C}) \mid u_i \in C^{n-1}(I)\}_{i=1, \dots, n}$ si dice sistema di Tchebycheff esteso (ET-sistema) su I se e solo se

$$D \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \\ t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} > 0 \quad \forall t_1 \leq \dots \leq t_n \text{ in } I.$$

Definizione 1.7. $U_n = \{u_i : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ (o } \mathbb{C}) \mid u_i \in C^{n-1}(I)\}_{i=1, \dots, n}$ si dice sistema di Tchebycheff esteso completo (ECT-sistema) su I se e solo se $\forall k = 1, \dots, n$ $U_k = \{u_i\}_{i=1, \dots, k}$ è un ET-sistema su I .

Definizione 1.8. Dati $w_k \in C^{n-k}(I)$ con $k = 0, \dots, m$ positivi e $a \in I$, ponendo

$$\begin{aligned} u_1(x) &= w_1(x) \\ u_2(x) &= w_1(x) \int_a^x w_2(s_2) ds_2 \\ &\dots \\ u_m(x) &= w_1(x) \int_a^x w_2(s_2) \int_a^{s_2} \dots \int_a^{s_{m-1}} w_m(s_m) ds_m \dots ds_2 \end{aligned}$$

si ha che $U_m = \{u_i\}_{i=1, \dots, m}$ è un ECT-sistema su I detto canonico.

Proposizione 1.1. Se $\{u_i\}_{i=1, \dots, m}$ è un ECT-sistema canonico su I m -dimensionale, allora esiste una funzione

$$u_{m+1}(x) = w_1(x) \int_a^x w_2(s_2) \int_a^{s_2} \dots \int_a^{s_m} w_{m+1}(s_{m+1}) ds_{m+1} \dots ds_2$$

tale che $U_{m+1} = \{u_i\}_{i=1, \dots, m+1}$ è un ECT-sistema canonico $(m+1)$ -dimensionale.

Definizione 1.9. Date u_1, \dots, u_n funzioni in $C^{n-1}(I)$, la matrice Wronskiana di $\{u_1, \dots, u_n\}$ è data da

$$WM(u_1, \dots, u_n)(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) & \dots & u_n(t) \\ u_1'(t) & \dots & u_n'(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n-1)}(t) & \dots & u_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} = [D^{i-1}u_j(t)]_{i,j=1, \dots, n}$$

per ogni $t \in I$. Il determinante ad essa associato

$$W(u_1, \dots, u_n)(t) = \det [D^{i-1}u_j(t)]_{i,j=1, \dots, n}$$

è detto determinante Wronskiano.

Teorema 1.2. Un insieme $\{u_1, \dots, u_n\}$ di funzioni $C^{n-1}(I)$ è un ECT-sistema su I se e solo se i loro determinanti Wronskiani sono positivi per ogni $t \in I$, ovvero

$$W(u_1, \dots, u_k)(t) > 0 \quad \forall t \in I, \forall k = 1, \dots, n.$$

Definizione 1.10. $U_n = \{u_i : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ (o } \mathbb{C}) \mid u_i \in C^{n-1}(I)\}_{i=1, \dots, n}$ si dice sistema di Tchebycheff esteso completo e ordinato (OCET-sistema) su I se e solo se $\forall k = 1, \dots, n$ $U_k = \{u_{i_\nu}\}_{\nu=1, \dots, k}$ è un ET-sistema su I $\forall 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$.

Definizione 1.11. $U_n = \{u_i : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ (o } \mathbb{C}) \mid u_i \text{ limitata}\}_{i=1, \dots, n}$ si dice sistema di Tchebycheff debole (WT-sistema) su I se u_1, \dots, u_n sono linearmente indipendenti e vale

$$D \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \\ t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} \geq 0 \quad \forall t_1 \leq \dots \leq t_n \text{ in } I.$$

Ai vari tipi di sistemi di Tchebycheff appena visti, sono associati degli spazi vettoriali.

Definizione 1.12. Sia \mathcal{U}_m uno spazio vettoriale m -dimensionale su \mathbb{R} (o \mathbb{C}) di funzioni $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ (o \mathbb{C}). \mathcal{U}_m si dice T-spazio su I se esiste $U_m = \{u_i \in \mathcal{U}\}_{i=1,\dots,m}$ T-sistema su I . In maniera analoga si definiscono anche tutti gli altri possibili tipi di spazi associati ai particolari sistemi di Tchebycheff visti in precedenza.

1.1 Proprietà sugli zeri

In questa sezione vediamo come le proprietà sugli zeri e sui cambi di segno identificano in maniera univoca i sistemi di Tchebycheff.

Notazione 1.1. Sia I un intervallo di \mathbb{R} , f una funzione sufficientemente regolare definita su I e a_1, \dots, a_n una sequenza di numeri reali. Indicheremo con:

$$\begin{aligned} Z_I(f) &= \text{numero di zeri distinti di } f \text{ su } I \\ Z_I^r(f) &= \text{numero di zeri di } f \text{ su } I, \text{ contando le molteplicità fino a } r \\ S^-(a_1, \dots, a_n) &= \text{numero di cambi di segno nella sequenza finita } a_1, \dots, a_n, \\ &\quad \text{ignorando gli zeri} \\ &= \#\{i \in \{1, \dots, n-1\} \mid a_i a_{i+1} < 0\} \\ S_I^- f &= \text{numero di cambi di segno di } f \text{ su } I, \text{ ignorando gli zeri} \\ &= \sup_n \{S^-[f(t_1), \dots, f(t_n)] \mid t_1 < t_2 < \dots < t_n \in I\} \end{aligned}$$

Definizione 1.13. Si dice che $t_0 \in I$ come radice di f ha molteplicità k se e solo se $f^{(l)}(t_0) = 0$ per $l = 0, \dots, k-1$ e $f^{(k)}(t_0) \neq 0$.

Proposizione 1.3. *Se U_n è un T -sistema n -dimensionale su I , allora per ogni $u(x) = \sum_{i=1}^n c_i u_i(x)$ non identicamente nulla si ha*

$$Z_I\left(\sum_{i=1}^n c_i u_i(x)\right) \leq n - 1$$

Viceversa, se $U_n = \{u_i\}_{i=1, \dots, n}$ è un insieme di funzioni $C(I)$ tale che ogni $u(x) = \sum_{i=1}^n c_i u_i(x)$ non identicamente nulla ammette al più $n - 1$ zeri distinti in I , allora U o $\tilde{U} = \{u_1, \dots, u_{m-1}, -u_m\}$ è un T -sistema.

Proposizione 1.4. *Se U_n è un ET -sistema n -dimensionale su I , allora per ogni $u(x) = \sum_{i=1}^n c_i u_i(x)$ non identicamente nulla si ha*

$$Z_I^{n-1}\left(\sum_{i=1}^n c_i u_i(x)\right) \leq n - 1$$

Viceversa, se $U_n = \{u_i\}_{i=1, \dots, n}$ è un insieme di funzioni linearmente indipendenti e $C^{n-1}(I)$ tale che ogni $u(x) = \sum_{i=1}^n c_i u_i(x)$ non identicamente nulla ammette al più $n - 1$ zeri in I contati con molteplicità fino $n - 1$, allora U o $\tilde{U} = \{u_1, \dots, u_{m-1}, -u_m\}$ è un ET -sistema.

La caratterizzazione appena vista dei T -sistemi in termini di zeri, per i WT -sistemi è fatta in termini di cambi di segno.

Proposizione 1.5. *Se U_n è un WT -sistema n -dimensionale su I composto da funzioni linearmente indipendenti, allora per ogni $u(x) = \sum_{i=1}^n c_i u_i(x)$ non identicamente nulla si ha*

$$S_I^-\left(\sum_{i=1}^n c_i u_i(x)\right) \leq n - 1$$

Viceversa, se $u(x) = \sum_{i=1}^n c_i u_i(x)$ non identicamente nulla ammette al più $n - 1$ cambi di segno su I , allora U o $\tilde{U} = \{u_1, \dots, u_{m-1}, -u_m\}$ è un WT -sistema.

1.2 Variation Diminishing

In questa sezione vediamo per quali tipi di sistemi di Tchebycheff vale la proprietà di Variation Diminishing. Tale caratteristica è essenziale nell'ambito della modellazione geometrica, come vedremo nei capitoli successivi.

Teorema 1.6. *Dato U un OCT-sistema n -dimensionale su I , si ha che per ogni $u(x) = \sum_{i=1}^n a_i u_i(x)$ non identicamente nulla vale la proprietà di Variation Diminishing ossia*

$$Z_I\left(\sum_{i=1}^n a_i u_i\right) \leq S^-(a_1, \dots, a_n).$$

Teorema 1.7. *Dato U un OCET-sistema n -dimensionale su I , si ha che per ogni $u(x) = \sum_{i=1}^n a_i u_i(x)$ non identicamente nulla vale la proprietà di Variation Diminishing ossia*

$$Z_I^{n-1}\left(\sum_{i=1}^n a_i u_i\right) \leq S^-(a_1, \dots, a_n).$$

Teorema 1.8. *Dato U un OCWT-sistema n -dimensionale su I , si ha che per ogni $u(x) = \sum_{i=1}^n a_i u_i(x)$ non identicamente nulla vale la proprietà di Variation Diminishing ossia*

$$S_I^-\left(\sum_{i=1}^n a_i u_i\right) \leq S^-(a_1, \dots, a_n).$$

1.3 Iterpolazione

L'iterpolazione è un metodo standard utilizzato nell'ambito numerico per approssimare una funzione. Gli spazi di Tchebycheff e di Tchebycheff estesi hanno un ruolo fondamentale in questo tipo di problemi, quindi riportiamo alcuni risultati essenziali.

Definizione 1.14. Dato \mathcal{U} un sottospazio di $C(I)$ n -dimensionale, $f \in C(I)$ e $t_1 < \dots, < t_n$ punti in I , il problema dell'interpolazione alla Lagrange consiste nel determinare una funzione $u \in \mathcal{U}$ in modo che

$$u(t_j) = f(t_j) \quad j = 1, \dots, n.$$

Teorema 1.9. Dato \mathcal{U} uno spazio di funzioni continue su I n -dimensionale, le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- Per ogni $f \in C(I)$ e per ogni $t_1 < \dots < t_n$ in I , il problema di interpolazione alla Lagrange ha un'unica soluzione in \mathcal{U}
- \mathcal{U} è un T -spazio.

Teorema 1.10. Dato \mathcal{U} uno spazio di funzioni continue su I n -dimensionale, le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- Per ogni $f \in C(I)$ e per ogni $t_1 < \dots < t_k$ in I con $k \leq n$, il problema di interpolazione alla Lagrange ha un'unica soluzione in \mathcal{U}
- \mathcal{U} è un CT -spazio.

Definizione 1.15. Dato \mathcal{U} un sottospazio di $C(I)$ n -dimensionale, sia $f \in C(I)$ e siano $t_1 \leq \dots \leq t_n$ punti in I . Supponiamo che la funzione f e le funzioni in \mathcal{U} siano sufficientemente differenziabili e definiamo

$$d_j = \max\{i : t_j = \dots = t_{j-i}\} \quad \text{per ogni } j = 1, 2, \dots, n$$

Il problema dell'interpolazione alla Hermite consiste nel determinare una funzione $u \in \mathcal{U}$ in modo che

$$u^{(d_j)}(t_j) = f^{(d_j)}(t_j) \quad j = 1, \dots, n.$$

Teorema 1.11. Dato \mathcal{U} uno spazio di funzioni $C^{n-1}(I)$ su I n -dimensionale, le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- Per ogni $f \in C^{n-1}(I)$ e per ogni $t_1 \leq \dots \leq t_n$ in I , il problema di interpolazione alla Hermite ha un'unica soluzione in \mathcal{U}
- \mathcal{U} è un ET-spazio.

Teorema 1.12. Dato \mathcal{U} uno spazio di funzioni $C^{n-1}(I)$ su I n -dimensionale, le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- Per ogni $f \in C^{n-1}(I)$ e per ogni $t_1 \leq \dots \leq t_k$ in I con $k \leq n$, il problema di interpolazione alla Hermite ha un'unica soluzione in \mathcal{U}
- \mathcal{U} è un ECT-spazio.

1.4 Esempi di spazi di Tchebycheff

Analizziamo diversi tipi di esempi di spazi di Tchebycheff allo scopo di avere una visione più concreta dei concetti puramente teorici introdotti nelle sezioni precedenti.

Esempio 1.1. Un esempio di T-sistema è \mathbb{P}_n , lo spazio dei polinomi di grado n

$$\mathbb{P}_n = \left\{ p : I \rightarrow \mathbb{R} \mid p(t) = \sum_{j=0}^n a_j t^j, \quad a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Infatti si vede facilmente che il determinante di Vandermore è positivo

$$D \begin{pmatrix} 1 & t & \dots & t^n \\ t_1 & t_2 & \dots & t_{n+1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (t_j - t_i) > 0 \quad \forall t_1 < \dots < t_{n+1} \text{ in } I.$$

Esempio 1.2. Dato $[a, b] \subseteq [-\pi, \pi]$ e $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, chiamiamo spazio dei polinomi trigonometrici di grado n

$$Q_n = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f(t) = a_0 + \sum_{j=1}^n (a_j \cos(jt) + b_j \sin(jt)) \right\}$$

Tale spazio è un T-sistema.

Infatti, ogni $f \in Q_n$ si può rappresentare come

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n ((a_j - ib_j)e^{ijt} + (a_j + ib_j)e^{-ijt})$$

in quanto vale l'uguaglianza

$$\cos(jt) + i\sin(jt) = e^{ijt}.$$

Definendo quindi $z = e^{it}$, si ha

$$f(t) = z^{-n}p(z)$$

ove $p(z)$ è un polinomio di grado $2n$ a coefficienti complessi. D'altra parte ogni polinomio $p \neq 0$ ha al massimo $2n$ zeri distinti, quindi anche la funzione f ha al massimo $2n$ zeri distinti in $[a, b]$. Utilizzando il risultato 1.3 visto in precedenza, si ha che Q_n è un T-sistema $(2n + 1)$ -dimensionale.

Esempio 1.3. Utilizzando la proposizione 1.3 si può dimostrare che su $[0, 2\pi]$ le funzioni $\{1, \cos x\}$ non possono essere un T-sistema in quanto il numero totale di zeri è maggiore di 1. Tuttavia è importante sottolineare che il concetto di T-sistema dipende fortemente dall'intervallo di definizione considerato, infatti lo stesso sistema su $[0, \pi]$ forma un T-sistema.

Con la stessa idea, si può dimostrare anche che le funzioni $\{1, \cos x, \sin x\}$ non possono formare un OCET-sistema su $[0, \pi]$.

Esempio 1.4. Lo spazio dei polinomi è un OCT-sistema su $(0, \infty)$. Infatti se $u_i = t^{i-1}$ per $i = 1, \dots, n$, allora per ogni $1 \leq p \leq m$ si ha

$$D \begin{pmatrix} u_{i_1} & \dots & u_{i_p} \\ t_1 & \dots & t_p \end{pmatrix} > 0 \quad \text{per ogni} \quad \begin{matrix} 0 < t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_p \\ 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq m \end{matrix}.$$

Per i dettagli della verifica si veda [Sch07].

Esempio 1.5. Dato $U = \{u_i\}_{i=1,\dots,n}$ un T-sistema su un intervallo I , si ha che U è un WT-sistema su ogni sottointervallo J di I . Infatti per ogni insieme di punti $t_1 < \dots < t_n$ in J , il determinante

$$D \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \\ t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix}$$

è sicuramente positivo.

Esempio 1.6. Sia $U = \{u_i\}_{i=1,\dots,n}$ un T-sistema su un intervallo I e J un sottointervallo di I . Definite le funzioni $\{\tilde{u}_i\}_{i=1,\dots,n}$

$$\tilde{u}_i(x) = \begin{cases} u_i(x) & x \in I \setminus J \\ 0 & x \in J \end{cases}$$

si ha che $\tilde{U} = \{\tilde{u}_i\}_{i=1,\dots,n}$ è un WT-sistema su I di dimensione n . Per i dettagli della dimostrazione si veda [Sch07].

Esempio 1.7. Utilizzando direttamente la definizione 1.11 di WT-sistema, si vede che $U = \{1, x_+^0\}$ su $I = [-1, 1]$ è un WT-sistema. Infatti $D \geq 0$ per ogni $-1 \leq t_1 < t_2 \leq 1$.

Esempio 1.8. Un esempio di ECT-sistema è \mathbb{P}_n , lo spazio dei polinomi di grado n . Infatti, ponendo

$$\begin{aligned} w_1(t) &= 1 \\ w_i(t) &= i - 1, \quad i = 2, \dots, n + 1 \end{aligned}$$

e utilizzando la definizione 1.8 di ECT-sistema in forma canonica, si ottengono le funzioni

$$u_i(t) = (t - a)^{i-1}, \quad i = 1, \dots, n + 1$$

Dato che $\{u_1, \dots, u_{n+1}\}$ formano una base per \mathbb{P}_n , si ha che \mathbb{P}_n è un ECT-sistema.

Esempio 1.9. Un esempio di ECT-sistema è E_n , lo spazio esponenziale definito a partire da $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$ numeri reali

$$E_n = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f(t) = \sum_{i=1}^n a_i e^{\alpha_i t}, \quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Infatti, ponendo

$$\begin{aligned} w_1(t) &= e^{\alpha_1 t} \\ w_i(t) &= e^{(\alpha_i - \alpha_{i-1})t}, \quad i = 2, \dots, n \end{aligned}$$

e utilizzando la definizione 1.8 di ECT-sistema in forma canonica, si ottengono le funzioni

$$u_i(t) = \sum_{j=1}^i a_{ij} e^{\alpha_j t}, \quad i = 1, \dots, n$$

dove $a_{ii} \neq 0 \forall i = 1, \dots, n$. Dato che $\{u_1, \dots, u_n\}$ formano una base per E_n , si ha che E_n è un ECT-sistema.

Capitolo 2

Tchebycheff-spline

Grazie ai concetti introdotti nel capitolo precedente, in questo capitolo si definisce e analizza il primo spazio di funzioni spline generalizzate: lo spazio Tchebycheff-spline.

Definizione 2.1. Sia \mathcal{U}_m un ECT-spazio m -dimensionale su $[a, b]$, $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} = b\}$ una partizione di $[a, b]$ e $M = (m_1, \dots, m_k)$ un vettore di interi positivi tali che $1 \leq m_i \leq m$ per ogni $i = 1, 2, \dots, k$. Chiamiamo spazio Tchebycheff-spline con nodi x_1, x_2, \dots, x_k di molteplicità m_1, m_2, \dots, m_k

$$S(\mathcal{U}_m, M, \Delta) = \left\{ \begin{array}{l} s : \exists s_0, \dots, s_k \in \mathcal{U}_m \text{ t.c.} \\ \bullet s|_{(x_i, x_{i+1})} = s_i \quad i = 0, \dots, k \\ \bullet D^{j-1} s_{i-1}(x_i) = D^{j-1} s_i(x_i) \quad j = 1, \dots, m - m_i; i = 1, \dots, k \end{array} \right\}$$

Osservazione 1. L'ipotesi che \mathcal{U}_m sia un ECT-spazio su $[a, b]$, può essere allgerita seguendo l'idea esposta nell'articolo [CLM05]. Infatti, è sufficiente richiedere che tale proprietà valga sull'intervallo aperto (a, b) .

Questo spazio spline è la naturale generalizzazione del ben noto spazio spline polinomiale. Infatti basta scegliere come ECT-spazio, lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale di m . Inoltre come nel caso polinomiale sfruttan-

do l'ipotesi che \mathcal{U}_m è un ECT-spazio, possiamo dimostrare il seguente teorema.

Teorema 2.1. $S(\mathcal{U}_m, M, \Delta)$ è uno spazio lineare di dimensione $m + K$ ove $K = \sum_{i=1}^k m_i$.

Analizzata la dimensione dello spazio, costruiamo una base introducendo le funzione $\{g_j(x, y)\}_{j=1, \dots, m}$ associate alla funzione di Green.

Definizione 2.2. Sia \mathcal{U}_m un ECT-spazio con una base data da un ECT-sistema canonico $\{u_i\}_{i=1, \dots, m}$ con pesi $\{w_i\}_{i=1, \dots, m}$. Definiamo per $j = 1, 2, \dots, m$

$$g_j(x, y) = \begin{cases} h_j(x, y) & x \geq y \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ove

$$h_j(x, y) = w_1(x) \int_y^x w_2(s_2) \int_y^{s_2} \dots \int_y^{s_{j-1}} w_j(s_j) ds_j \dots ds_2.$$

Teorema 2.2. *Le funzioni*

$$\rho_{i,j}(x) = \{g_{m-j+1}(x, x_i)\}_{j=1, \dots, m; i=0, \dots, k} \quad \text{con } m = m_0$$

formano una base per $S(\mathcal{U}_m, M, \Delta)$ chiamata one-sided basis.

La base one-sided appena costruita è utile nell'ambito teorico ma non è utilizzabile nelle applicazioni numeriche, in quanto non possiede un supporto locale. Di conseguenza si cerca di costruire una base alternativa per $S(\mathcal{U}_m, M, \Delta)$ che sia simmetrica e a supporto locale. E' necessario a tale scopo fare alcune premesse.

Definizione 2.3. Dato $\{u_i\}_{i=1,\dots,m}$ un ECT-sistema in forma canonica con pesi w_1, \dots, w_m , $U_m^* = \{u_i^*\}_{i=1,\dots,m}$ si dice ECT-sistema canonico duale se

$$\begin{aligned} u_1^*(x) &= 1 \\ u_2^*(x) &= \int_a^x w_m(s_m) ds_m \\ &\dots \\ u_m^*(x) &= \int_a^x w_m(s_m) \int_a^{s_m} \dots \int_a^{s_3} w_2(s_2) ds_2 \dots ds_m. \end{aligned}$$

In particolare si ha che $\mathcal{U}_m^* = \text{span}(U_m^*)$ è il nucleo dell'operatore $L_m^* = D_m^* \dots D_0^*$ dove

$$\begin{aligned} D_0^* f &= f \\ D_i^* f &= \frac{1}{w_{m-i+1}} Df \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Definizione 2.4. Siano U_m un ECT-sistema in forma canonica, u_{m+1} la sua naturale estensione a un ECT-sistema U_{m+1} e f una funzione sufficientemente differenziabile. Definiamo la differenza divisa di ordine m rispetto U_{m+1} come

$$[t_i, t_2, \dots, t_{m+1}]_{U_{m+1}} f = \frac{D \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_m & f \\ t_1 & \dots & t_m & t_{m+1} \end{pmatrix}}{D \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_m & u_{m+1} \\ t_1 & \dots & t_m & t_{m+1} \end{pmatrix}}$$

Teorema 2.3. Sia $\Delta_e = \{y_i\}_{i=0,\dots,2m+K}$ una partizione estesa di $[a, b]$ tale che $b < y_{2m+K}$. Considerando i punti $y_i \leq y_{i+1} \leq \dots \leq y_{i+m}$, si definiscono le B-spline associate ad essi come

$$Q_i(x) = (-1)^m [y_i, \dots, y_{i+m}]_{U_{m+1}}^* g_m(x, y) \quad i = 1, 2, \dots, m + K$$

Si ha che $\{Q_i\}_{i=1,\dots,m+K}$ è una base per $S(\mathcal{U}_m, M, \Delta)$ detta base B-spline. Inoltre per ogni $i = 1, 2, \dots, m + K$ risultano verificate le seguenti proprietà:

- $Q_i(x) = 0 \quad x < y_i \text{ e } x > y_{i+m}$
- $Q_i(x) > 0 \quad y_i < x < y_{i+m}$.

Nelle applicazioni è utile lavorare con una base normalizzata. Infatti le B-spline $\{Q_i\}_{i=1, \dots, m+K}$ appena introdotte possono avere ampiezze differenti che dipendono dalla partizione nodale che si considera, ad esempio nell'intervallo $[y_i, y_{i+1}]$ la B-spline Q_i può essere estremamente grande o estremamente piccola. Computazionalmente parlando, questo comportamento non è accettabile quindi si introduce una normalizzazione che non implica tuttavia la proprietà di partizione dell'unità.

Definizione 2.5. Le B-spline normalizzate sono definite come

$$N_i(x) = \alpha_i Q_i(x)$$

ove

$$\alpha_i = \frac{D_{U_{m+1}^*}(y_i, \dots, y_{i+m}) D_{U_{m-1}^*}(y_{i+1}, \dots, y_{i+m-1})}{D_{U_m^*}(y_{i+1}, \dots, y_{i+m}) D_{U_m^*}(y_i, \dots, y_{i+m-1})}.$$

2.1 Proprietà aggiuntive

La base B-spline è molto utilizzata nell'ambito numerico in quanto oltre alle proprietà già viste, possiede importanti caratteristiche.

1. CONDIZIONAMENTO:

La base B-spline è ben condizionata.

2. ZERI:

Per ogni $s \in S(\mathcal{U}_m, M, \Delta)$ non banale si ha che il numero totale di zeri di

s su \mathbb{R} contati con molteplicità, deve essere minore o uguale a $m + K - 1$. E' bene sottolineare che lavorando con funzioni spline, non si hanno solamente zeri isolati ma anche intervalli di zeri, che possono essere di tre forme differenti: $(-\infty, x_p)$, (x_p, x_q) o (x_q, ∞) . In questo contesto, anche gli intervalli di zero contribuiscono con una ben precisa molteplicità che dipende dalle caratteristiche dello spazio spline considerato. In particolare tiene conto dell'ordine m , della partizione nodale Δ e del vettore delle molteplicità M .

Di più si ha che il numero di zeri delle derivate delle B-spline soddisfa:

$$Z_{(y_i, y_{i+m})}(L_j Q_i) \leq j \quad i = 1, \dots, m + K; j = 0, \dots, m - 1.$$

3. VARIATION DIMINISHING

Siano $\{B_i\}_{i=1, \dots, N}$ le B-spline associate ai nodi $y_1 \leq \dots \leq y_{m+N}$ definite come $B_i = (-1)^m Q_i$. Siano $t_1 \leq \dots \leq t_N$ e $d_i = \max\{j : t_i = \dots = t_i - j\}$ per ogni $i = 1, \dots, N$. Considerando il problema dell' interpolazione alla Hermite $L_{d_i} s(t_i) = v_i$ si costruisce la matrice

$$M \begin{pmatrix} B_1 & \dots & B_N \\ t_1 & \dots & t_N \end{pmatrix} = [L_{d_j} B_j(t_i)]_{i,j=1, \dots, N}$$

il cui determinante è indicato con

$$D \begin{pmatrix} B_1 & \dots & B_N \\ t_1 & \dots & t_N \end{pmatrix} = \det M \begin{pmatrix} B_1 & \dots & B_N \\ t_1 & \dots & t_N \end{pmatrix}.$$

Teorema 2.4. *Il determinante*

$$D \begin{pmatrix} B_1 & \dots & B_N \\ t_1 & \dots & t_N \end{pmatrix}$$

è non negativo. In particolare è positivo se e solo se

$$t_i \in \sigma_i \quad i = 1, \dots, N$$

ove

$$\sigma_i = \begin{cases} [y_i, y_{i+m}) & \text{se } y_i = \dots = y_{i+m-1} \\ (y_i, y_{i+m}) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Questo dimostra che la base B-spline $\{B_i\}_{i=1,\dots,m+K}$ dello spazio $S(\mathcal{U}_m, M, \Delta)$ è un WT-sistema.

Teorema 2.5. Data la base B-spline $\{B_i\}_{i=1,\dots,m+K}$ dello spazio $S(\mathcal{U}_m, M, \Delta)$, per ogni scelta di $1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_p \leq N$ e $t_1 < \dots < t_p$ si ha

$$D \begin{pmatrix} B_1 & \dots & B_N \\ t_1 & \dots & t_N \end{pmatrix} \geq 0$$

In particolare è strettamente positivo se e solo se

$$t_i \in (y_{\nu_i}, y_{\nu_i+m}) \cup \{x : L_{d_i} B_{\nu_i}(x) \neq 0\} \quad i = 1, \dots, p.$$

Questo dimostra che la base B-spline $\{B_i\}_{i=1,\dots,m+K}$ dello spazio $S(\mathcal{U}_m, M, \Delta)$ è un OCWT-sistema.

Ora, visto che si è dimostrato che le B-spline formano un OCWT-sistema, possiamo concludere che vale la proprietà di Variation Diminishing:

$$S_{(a,b)}^- \left(\sum_{i=1}^{m+K} c_i B_i \right) \leq S^-(c_1, \dots, c_{m+K})$$

per ogni c_1, \dots, c_{m+K} tali che non siano tutti zero.

Concludiamo il capitolo mostrando un esempio di spazio Tchebycheff-spline molto utilizzato nell'ambito applicativo.

Esempio 2.1. Lo spazio spline esponenziale $S(\mathcal{U}_m, M, \Delta)$, definito considerando m parametri $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m$ e ponendo

$$\mathcal{U}_m = \text{span} \{e^{\alpha_1 x}, \dots, e^{\alpha_m x}\}$$

è uno spazio Tchebycheff-spline. Infatti nell'esempio 1.9 visto in precedenza, si dimostra che \mathcal{U}_m è un ECT-sistema.

Capitolo 3

L-spline

Nel capitolo precedente si sono esaminati spazi di spline generalizzate i cui tratti appartengono a spazi di Tchebycheff estesi e completi. In questo capitolo si considerano invece spazi di funzioni definiti a tratti come elementi del nucleo di un operatore differenziale lineare.

Notazione 3.1. *Durante la trattazione si utilizzano i concetti di:*

- *operatore differenziale lineare di ordine m definito sull'intervallo $I = [a, b]$*

$$L(f) = D^m f + \sum_{i=0}^{m-1} a_i(X) D^i f \quad a_i \in C^i([a, b])$$

- *nucleo di L*

$$N_L = \{f \in L_1^m([a, b]) : Lf(x) = 0, \quad a \leq x \leq b\}$$

- *spazi di funzioni a valori reali e limitate sull'intervallo I*

$$B(I) = \{f \mid f \text{ a valori reali e } |f(x)| < \infty \forall x \in I\}.$$

Dai capitoli precedenti è noto come lavorare con ECT-sistemi sia molto vantaggioso. Sotto quest'ottica siamo interessati a sapere se e quando un nucleo forma un ECT-sistema. Il seguente teorema risponde proprio a tale domanda.

Teorema 3.1. *Dato l'operatore differenziale L definito su $I = [a, b]$, esiste una costante $\delta > 0$ per cui per ogni J , sottointervallo di I tale che $|J| < \delta$, si ha che N_L è un ECT-spazio su J .*

Definizione 3.1. Sia $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} = b\}$ una partizione di $I = [a, b]$ e $M = (m_1, \dots, m_k)$ un vettore di interi positivi tali che $1 \leq m_i \leq m$ per ogni $i = 1, 2, \dots, k$. Posto $I_i = [x_i, x_{i+1})$ $i = 0, \dots, k-1$, $I_k = [x_k, x_{k+1}]$, chiamiamo spazio L-spline con nodi x_1, x_2, \dots, x_k di molteplicità m_1, m_2, \dots, m_k

$$S(N_L, M, \Delta) = \left\{ \begin{array}{l} s \in B(I) \text{ t.c.} \\ \bullet s|_{I_i} \in N_L \quad i = 0, \dots, k \\ \bullet D_-^{j-1} s(x_i) = D_+^{j-1} s(x_i) \quad j = 1, \dots, m - m_i \quad i = 1, \dots, k \end{array} \right\}$$

Teorema 3.2. $S(N_L, M, \Delta)$ è uno spazio lineare di dimensione $m + K$ ove $K = \sum_{i=1}^k m_i$.

Come nel caso delle Tchebycheff-spline, cerchiamo di definire una base one-sided per $S(N_L, M, \Delta)$ usando la funzione di Green associata all'operatore differenziale L . A tale scopo facciamo alcune premesse.

Definizione 3.2. Gli operatori L_j^* definiti come

$$\begin{aligned} L_0^* &= Id \\ L_j^* f &= (-1)^j D^j f + (-1)^{j-1} D^{j-1} (a_{m-1} f) + \dots + a_{m-j} f \end{aligned}$$

sono detti operatori aggiunti parziali di L ed in particolare $L^* = L_m^*$ è chiamato operatore aggiunto di L .

Proposizione 3.3. *La funzione di Green associata all'operatore L è*

$$G_L(x, y) = \begin{cases} \sum_{i=1}^m u_i(x)u_i^*(y) & x \geq y \\ 0 & x \leq y \end{cases}$$

ove $\{u_1, \dots, u_m\}$ è una base di N_L e $\{u_1^*, \dots, u_m^*\}$ sono le funzioni aggiunte definite come segue

$$\begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ \vdots \\ u_m^* \end{pmatrix} = WM^{-1}(u_1, \dots, u_m) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Teorema 3.4. *Una base one-sided per lo spazio $S(N_L, M, \Delta)$ è data da*

$$B_{i,j}(x) = L_{j-1}^* G_L(x, x_i) \quad j = 1, \dots, m; i = 0, \dots, k.$$

Come già detto nel caso delle Tchebycheff-spline, la base one-sided è utile nell'ambito teorico ma non è utilizzabile nelle applicazioni numeriche, in quanto non possiede un supporto locale. Si definisce quindi la base B-spline simmetrica e a supporto locale.

Teorema 3.5. *Data $\Delta_e = \{y_i\}_{i=1, \dots, 2m+K}$ una partizione nodale estesa di $[a, b]$, per ogni $i = 1, \dots, m + K$ sia $\mathcal{U}^* = \text{span}\{u_1^*, \dots, u_m^*\}$ un ET-spazio su un intervallo contenente $[y_i, y_{i+m}]$. Si definisce*

$$Q_i(x) = D \begin{pmatrix} y_i & \cdots & y_{i+m-1} & y_{i+m} \\ u_i^* & \cdots & u_m^* & G_L(x, \cdot) \end{pmatrix}$$

Si ha che $\{Q_i\}_{i=1, \dots, m+K}$ è una base per $S(N_L, M, \Delta)$ detta base B-spline ed è tale che per ogni $i = 1, 2, \dots, m + K$

$$Q_i(x) = 0 \quad x < y_i \text{ e } x > y_{i+m}.$$

Il problema di queste basi appena costruite è che, in questo caso più generale, non c'è un modo naturale per normalizzare. A tale scopo si deve quindi imporre un'ulteriore condizione descritta nella definizione seguente.

Definizione 3.3. Preso n tale che $h = (b - a)/n < \delta/4$ dove δ è la costante definita nel teorema 3.1, definiamo $a = z_{-1}, b = z_{n+1} = z_{n+2}, z_\nu = a + \nu h$ per $\nu = 0, 1, \dots, n$ e $J_\nu = [z_{\nu-1}, z_\nu]$ per $\nu = 0, 1, \dots, n$. Poiché $|J_\nu| < \delta$, il teorema citato pocanzi ci assicura che esiste un ECT-sistema $U_{m,\nu}$ su J_ν . Sia $U_{m,\nu}^*$ l'ECT-sistema duale ad esso associato e $g_{m,\nu}(x, y)$ la rispettiva funzione di Green. Data $\Delta_e = \{y_i\}_{i=1, \dots, 2m+K}$ una partizione estesa associata allo spazio spline $S(N_L, M, \Delta)$ con $y_1 = \dots = y_m = a$ e $b = y_{m+K+1} = \dots = y_{2m+K}$, allora fissato $0 \leq \nu \leq n - 1$, per ogni i tale che $z_\nu \leq y_i < z_{\nu+1}$ definisco la i -esima B-spline normalizzata associata ai nodi y_i, \dots, y_{i+m} come segue

$$N_i(x) = (-1)^m \alpha_i [y_i, \dots, y_{i+m}]_{U_{m,\nu}^*} g_{m,\nu}(x, y)$$

ove

$$\alpha_i = \frac{D_{U_{m+1}^*}(y_i, \dots, y_{i+m}) D_{U_{m-1}^*}(y_{i+1}, \dots, y_{i+m-1})}{D_{U_m^*}(y_{i+1}, \dots, y_{i+m}) D_{U_m^*}(y_i, \dots, y_{i+m-1})}$$

Affinchè la definizione sia ben posta è necessario che tutti i punti y_i, \dots, y_{i+m} stiano nell'intervallo J_ν .

Teorema 3.6. $\{N_i\}_{i=1, \dots, m+K}$ sono le uniche, a meno di una costante moltiplicativa, B-spline normalizzate che formano una base per $S(N_L, M, \Delta)$. Inoltre si ha

- $N_i(x) = 0$ $x < y_i$ e $x > y_{i+m}$
- $N_i(x) > 0$ $y_i < x < y_{i+m}$

Osservazione 2. Sono ben condizionate

3.1 Spline Trigonometriche

Analizziamo ora un caso particolare di L-spline importante nell'ambito delle applicazioni: le spline trigonometriche

Definizione 3.4. Si definisce lo spazio m -dimensionale \mathcal{T}_m come

$$\mathcal{T}_m = \begin{cases} \text{span}\{v_1, \dots, v_m\} & m = 2r \\ \text{span}\{u_1, \dots, u_m\} & m = 2r + 1 \end{cases}$$

ove

$$\{v_1, \dots, v_m\} = \{\cos(x), \sin(x), \dots, \cos[(2r-1)x], \sin[(2r-1)x]\}$$

$$\{u_1, \dots, u_m\} = \{1, \cos(2x), \sin(2x), \dots, \cos(2rx), \sin(2rx)\}$$

Proposizione 3.7. \mathcal{T}_m è un ET-spazio su ogni intervallo I di lunghezza $|I| < \pi$.

Definizione 3.5. Sia $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} = b\}$ una partizione di $I = [a, b]$ e $M = (m_1, \dots, m_k)$ un vettore di interi positivi tali che $1 \leq m_i \leq m$ per ogni $i = 1, 2, \dots, k$. Posto $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ $i = 0, \dots, k-1$, $I_k = [x_k, x_{k+1}]$, chiamiamo spazio delle spline trigonometriche di ordine m con nodi x_1, x_2, \dots, x_k di molteplicità m_1, m_2, \dots, m_k

$$S(\mathcal{T}_m, M, \Delta) = \left\{ \begin{array}{l} s : \exists s_0, \dots, s_k \in \mathcal{T}_m \text{ t.c.} \\ \bullet s|_{I_i} = s(x) \quad i = 0, \dots, k \\ \bullet D^{j-1} s_{i-1}(x_i) = D^{j-1} s_i(x_i) \quad j = 1, \dots, m - m_i; i = 1, \dots, k \end{array} \right\}$$

Osservazione 3. Lo spazio \mathcal{T}_m è il nucleo dell'operatore differenziale lineare

$$L_m = \begin{cases} (D^2 + (2r-1)^2) \dots (D^2 + 1) & m = 2r \\ (D^2 + (2r)^2) \dots (D^2 + 2^2) D & m = 2r + 1 \end{cases}$$

Quindi le spline trigonometriche appena definite, sono un particolare tipo di L-spline e perciò valgono tutte le osservazioni e proprietà viste nella teoria generale delle L-spline.

Teorema 3.8. $S(\mathcal{T}_m, M, \Delta)$ è uno spazio lineare di dimensione $m + K$ ove $K = \sum_{i=1}^k m_i$.

Il prossimo passo ricalcando il procedimento visto in precedenza nel caso più generale, è quello di costruire una base B-spline a supporto locale e simmetrica. A tale scopo facciamo alcune premesse.

Definizione 3.6. Dati $t_1 < t_2 < \dots < t_{m+1}$ con $t_{m+1} - t_1 < \pi$, si definisce differenza divisa trigonometrica di ordine m della funzione f su t_1, \dots, t_{m+1}

$$[t_1, \dots, t_{m+1}]_T f = \begin{cases} \frac{4^{-r} D \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_m & f \\ t_1 & \dots & t_m & t_{m+1} \end{pmatrix}}{D \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_{m+1} \\ t_1 & \dots & t_{m+1} \end{pmatrix}} & m = 2r + 1 \\ \frac{4^{-r} D \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_m & f \\ t_1 & \dots & t_m & t_{m+1} \end{pmatrix}}{D \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_{m+1} \\ t_1 & \dots & t_{m+1} \end{pmatrix}} & m = 2r \end{cases} .$$

Definizione 3.7. Data una sequenza di numeri reali

$$\dots \leq y_{-1} \leq y_0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots$$

si definiscono le B-spline trigonometriche come

$$Q_i^m(x) = \begin{cases} (-1)^m [y_i, \dots, y_{i+m}]_T [\sin(x - y)]_+^{m-1} & \forall i \text{ tale che } y_i < y_{i+m} \\ 0 & \forall i \text{ tale che } y_i = y_{i+m} \end{cases}$$

In particolare, per $m = 1$ e $y_i < y_{i+1}$, le B-spline trigonometriche hanno un'espressione molto semplice

$$Q_i^1(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sin(y_{i+1} - y_i)} & y_i \leq x < y_{i+1} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Proposizione 3.9. *Le B-spline trigonometriche godono delle seguenti proprietà:*

- $Q_i^m(x) = 0$ $x < y_i$ e $x > y_{i+m}$
- $Q_i^m(x) > 0$ $y_i < x < y_{i+m}$.

Teorema 3.10. *Per ogni f tale che $L_m f \in L_1([y_i, y_{i+m}])$ si ha*

$$[y_i, \dots, y_{i+m}]_T f = \frac{1}{(m-1)!} \int_{y_i}^{y_{i+m}} Q_i^m(y) L_m f(y) dy.$$

Questa relazione è chiamata rappresentazione di Peano per le differenze divise trigonometriche.

Le B-spline trigonometriche Q_i^m appena introdotte possono avere ampiezze differenti che dipendono dalla partizione nodale che si considera. Ad esempio nell'intervallo $[y_i, y_{i+1}]$ la B-spline $Q_i^1(x) = \frac{1}{\sin(y_{i+1} - y_i)}$ può essere estremamente grande o estremamente piccola. Computazionalmente parlando, questo comportamento non è accettabile quindi si introduce una normalizzazione che non implica tuttavia la proprietà di partizione dell'unità.

Definizione 3.8. Le B-spline trigonometriche normalizzate sono definite come

$$N_i^m(x) = \sin(y_{i+m} - y_i) Q_i^m(x).$$

Teorema 3.11. *Le B-spline trigonometriche normalizzate $\{N_i^m\}_{i=1, \dots, m+K}$ formano una base per lo spazio delle spline trigonometriche $S(\mathcal{T}_m, M, \Delta)$.*

Per fare in modo che le B-spline trigonometriche formino una partizione dell'unità, proprietà essenziale quando si lavora nell'ambito della modellazione geometrica, è necessario effettuare un'altra modifica.

Proposizione 3.12. *Se $m = 2r + 1$, allora per ogni x tale che $y_i \leq x < y_r$ si ha*

$$\sum_{l+1-m}^r \alpha_l^m N_l^m(x) = 1$$

ove

$$\alpha_i^m = \frac{(-1)^r 2^{2r-1} \alpha_1^i}{\binom{2r-1}{r}} > 0$$

e α_1^i è il termine costante nell'espansione

$$\prod_{\nu=1}^{m-1} \sin(y - y_{i+\nu}).$$

Corollario 3.13. *Nel caso delle B-spline trigonometriche di ordine 3, lo scaling da effettuare per fare in modo che le B-spline abbiano la proprietà di partizione dell'unità, è dato da*

$$\cos(y_{i+2} - y_{i+1}) N_i^3(x).$$

Negli altri casi non è possibile ricavare un'espressione esplicita così semplice dalla proposizione precedente.

Osservazione 4. Si è dimostrata l'esistenza di una partizione dell'unità di questo tipo solo nel caso in cui m è dispari. Nel caso in cui m è pari, lo spazio delle spline trigonometriche non contiene la funzione 1.

3.2 Spline Iperboliche

Un altro caso particolare di L-spline degno di nota solo le spline iperboliche.

Definizione 3.9. Si definisce lo spazio m -dimensionale \mathcal{H}_m come

$$\mathcal{H}_m = \begin{cases} \text{span}\{v_1, \dots, v_m\} & m = 2r \\ \text{span}\{u_1, \dots, u_m\} & m = 2r + 1 \end{cases}$$

ove

$$\{v_1, \dots, v_m\} = \{\cosh(x), \sinh(x), \dots, \cosh[(2r-1)x], \sinh[(2r-1)x]\}$$

$$\{u_1, \dots, u_m\} = \{1, \cosh(2x), \sinh(2x), \dots, \cosh(2rx), \sinh(2rx)\}$$

Teorema 3.14. Lo spazio \mathcal{H}_m è un ECT-spazio.

Definizione 3.10. Sia $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} = b\}$ una partizione di $I = [a, b]$ e $M = (m_1, \dots, m_k)$ un vettore di interi positivi tali che $1 \leq m_i \leq m$ per ogni $i = 1, 2, \dots, k$. Posto $I_i = [x_i, x_{i+1})$ $i = 0, \dots, k-1$, $I_k = [x_k, x_{k+1}]$, chiamiamo spazio delle spline iperboliche di ordine m con nodi x_1, x_2, \dots, x_k di molteplicità m_1, m_2, \dots, m_k

$$S(\mathcal{H}_m, M, \Delta) = \left\{ \begin{array}{l} s : \exists s_0, \dots, s_k \in \mathcal{H}_m \text{ t.c.} \\ \bullet s|_{I_i} = s_i \quad i = 0, \dots, k \\ \bullet D^{j-1} s_{i-1}(x_i) = D^{j-1} s_i(x_i) \quad j = 1, \dots, m - m_i; i = 1, \dots, k \end{array} \right\}$$

Osservazione 5. Lo spazio \mathcal{H}_m è il nucleo dell'operatore differenziale lineare

$$L_m = \begin{cases} (D^2 - (2r-1)^2) \dots (D^2 - 3^2)(D^2 - 1) & m = 2r \\ (D^2 - (2r)^2) \dots (D^2 - 2^2)D & m = 2r + 1 \end{cases}$$

Quindi le spline iperboliche come quelle trigonometriche sono un particolare tipo di L-spline e perciò valgono tutte le osservazioni viste nella teoria generale.

Teorema 3.15. $S(\mathcal{H}_m, M, \Delta)$ è uno spazio lineare di dimensione $m + K$ ove $K = \sum_{i=1}^k m_i$.

Seguendo il procedimento precedente, definiamo anche in questo caso la base B-spline utilizzata nell'ambito numerico.

Definizione 3.11. Dati $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{m+1}$, si definisce differenza divisa iperbolica di ordine m della funzione f su t_1, \dots, t_{m+1}

$$[t_1, \dots, t_{m+1}]_T f = \begin{cases} \frac{{}^{4^r D} \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_m & f \\ t_1 & \dots & t_m & t_{m+1} \end{pmatrix}}{D \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_{m+1} \\ t_1 & \dots & t_{m+1} \end{pmatrix}} & m = 2r + 1 \\ \frac{{}^{4^r D} \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_m & f \\ t_1 & \dots & t_m & t_{m+1} \end{pmatrix}}{D \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_{m+1} \\ t_1 & \dots & t_{m+1} \end{pmatrix}} & m = 2r. \end{cases}$$

Definizione 3.12. Data una sequenza di numeri reali

$$\dots \leq y_{-1} \leq y_0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots$$

si definiscono le B-spline iperboliche come

$$Q_i^m(x) = (-1)^m [y_i, \dots, y_{i+m}]_T [\sinh(x - y)]_+^{m+1} \quad \forall i \text{ tale che } y_i < y_{i+m}$$

$$Q_i^m(x) \equiv 0 \quad \forall i \text{ tale che } y_i = y_{i+m}.$$

In particolare, per $m = 1$ e $y_i < y_{i+1}$, le B-spline iperboliche hanno un'espressione molto semplice

$$Q_i^1(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sinh(y_{i+1} - y_i)} & y_i \leq x < y_{i+1} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Proposizione 3.16. *Se $m \geq 2$ e $y_i < y_{i+m}$, risultano verificate le seguenti proprietà*

- $Q_i^m(x) = 0 \quad x < y_i \text{ e } x > y_{i+m}$
- $Q_i^m(x) > 0 \quad y_i < x < y_{i+m}$
- Negli estremi dell'intervallo (y_i, y_{i+m}) si ha

$$\begin{aligned} (-1)^{k+m-\alpha_i} D_+^k Q_i^m(y_i) &= \begin{cases} = 0 & k = 0, 1, \dots, m-1-\alpha_i \\ > 0 & k = m-\alpha_i, \dots, m-1 \end{cases} \\ (-1)^{m-\beta_{i+m}} D_-^k Q_i^m(y_{i+m}) &= \begin{cases} = 0 & k = 0, 1, \dots, m-1-\beta_{i+m} \\ > 0 & k = m-\beta_{i+m}, \dots, m-1 \end{cases} \end{aligned}$$

ove

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \max\{j : y_i = \dots = y_{i+j-1}\} \\ \beta_{i+m} &= \max\{j : y_{i+m} = \dots = y_{i+m-j+1}\}. \end{aligned}$$

Teorema 3.17. *Sia $L_1^m[a, b] = \{f : D^{m-1}f \text{ è assolutamente continua su } [a, b] \text{ e } D^m f \in L_1[a, b]\}$, allora per ogni f tale che $f \in L_1^m([y_i, y_{i+m}])$ si ha*

$$[y_i, \dots, y_{i+m}]_T f = \frac{1}{(m-1)!} \int_{y_i}^{y_{i+m}} Q_i^m(y) L_m f(y) dy.$$

Questa relazione è chiamata rappresentazione di Peano per le differenze divise iperboliche

Come nel caso trigonometrico, le B-spline iperboliche Q_i^m appena introdotte possono avere ampiezze differenti che dipendono dalla partizione nodale che si considera. Ad esempio nell'intervallo $[y_i, y_{i+1}]$ la B-spline $Q_i^1(x) = \frac{1}{\sinh(y_{i+1}-y_i)}$ può essere estremamente grande o estremamente piccola. Computazionalmente parlando, questo comportamento non è accettabile quindi si introduce una normalizzazione che non implica tuttavia la proprietà di partizione dell'unità.

Definizione 3.13. Le B-spline iperboliche normalizzate sono definite come

$$N_i^m(x) = \sinh(y_{i+m} - y_i) Q_i^m(x).$$

Teorema 3.18. *Le B-spline iperboliche normalizzate $\{N_i^m\}_{i=1,\dots,m+K}$ formano una base per lo spazio delle spline iperboliche $S(\mathcal{H}_m, M, \Delta)$.*

Per fare in modo che le B-spline iperboliche formino una partizione dell'unità, proprietà essenziale quando si lavora nell'ambito della modellazione geometrica, è necessario effettuare un'altra modifica.

Proposizione 3.19. *Se $m = 2r + 1$, allora per ogni x tale che $y_i \leq x < y_r$ si ha*

$$\sum_{l+1-m}^r \alpha_i^m N_i^m(x) = 1$$

ove

$$\alpha_i^m = \frac{(-1)^r 2^{2r-1} \alpha_1^i}{\binom{2r-1}{r}} > 0$$

e α_1^i è il termine costante nell'espansione

$$\prod_{\nu=1}^{m-1} \sinh(y - y_{i+\nu}).$$

Corollario 3.20. *Nel caso delle B-spline iperboliche di ordine 3, lo scaling da effettuare per fare in modo che le B-spline abbiano la proprietà di partizione dell'unità, è dato da*

$$\cosh(y_{i+2} - y_{i+1}) N_i^3(x).$$

Negli altri casi non è possibile ricavare un'espressione esplicita così semplice dalla proposizione precedente.

Osservazione 6. Si è dimostrata l'esistenza di una partizione dell'unità di questo tipo solo nel caso in cui m sia dispari. Nel caso in cui m sia pari, lo spazio delle spline iperboliche non contiene la funzione 1.

3.3 UE-spline

Un altro approccio per trattare la teoria degli spazi spline, è quello di unificare ed estendere alcuni tipi di spline creando una nuova classe più ampia. Tale classe, i cui elementi sono chiamati UE-spline, viene definita sullo spazio $\{\cos \omega t, \sin \omega t, 1, t, \dots, t^l, \dots\}$ ove l è un intero non negativo arbitrario e $\omega = \sqrt{\alpha}$ una frequenza definita attraverso l'uso di un altro parametro $\alpha \in \mathbb{R}$. Come per gli altri spazi di funzioni spline generalizzate, possiamo dare una definizione formale utilizzando lo spazio \mathcal{V}_m^α così definito

$$\mathcal{V}_m^\alpha = \begin{cases} \{1, x, x^2, \dots, x^{m-1}\} & \alpha = 0 \\ \{1, x, x^2, \dots, x^{m-3}, \sin x, \cos x\} & \alpha > 0 \\ \{1, x, x^2, \dots, x^{m-3}, \sinh x, \cosh x\} & \alpha < 0 \end{cases}$$

Definizione 3.14. Sia $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} = b\}$ una partizione di $I = [a, b]$ e $M = (m_1, \dots, m_k)$ un vettore di interi positivi tali che $1 \leq m_i \leq m$ per ogni $i = 1, 2, \dots, k$. Posto $I_i = [x_i, x_{i+1})$ $i = 0, \dots, k-1$, $I_k = [x_k, x_{k+1}]$ chiamiamo spazio UE-spline di ordine m con nodi x_1, x_2, \dots, x_k di molteplicità m_1, m_2, \dots, m_k

$$S(\mathcal{V}_m^\alpha, M, \Delta) = \left\{ \begin{array}{l} s : \forall i = 1, \dots, k \ s_i \in \mathcal{V}_m^{\alpha_i} \text{ e vale} \\ \bullet \ s|_{I_i} = s_i \quad i = 0, \dots, k \\ \bullet \ D^{j-1} s_{i-1}(x_i) = D^{j-1} s_i(x_i) \quad \begin{array}{l} j = 1, \dots, m - m_i; \\ i = 1, \dots, k. \end{array} \end{array} \right\}$$

Il vantaggio delle UE-spline rispetto a tutti gli altri tipi di spline generalizzate, è che si è dimostrata l'esistenza di una base $\{N_{i,m}\}$ con tutte le proprietà utili nella modellazione geometrica. In particolare si parla di

- *cambiamento di forma*: tenendo fissata la partizione nodale, si può variare la forma della base UE-spline variando la sequenza delle frequenze;

- *differenziabilità*: le funzioni base $N_{i,k}(t)$ sono $C^{(k-r_j-1)}$ nel nodo t_j dove r_j indica la molteplicità di t_j nella partizione nodale;
- *derivabilità*: le derivate delle funzioni base possono essere calcolate ricorsivamente mediante la formula

$$N'_{i,k}(t) = \delta_{i,k-1}N_{i,k-1}(t) - \delta_{i+1,k-1}N_{i+1,k-1}(t);$$

- *supporto locale*: le funzione base sono diverse da zero in un preciso intervallo

$$N_{i,k}(t) = 0, \quad t \notin [t_i, t_{i+k}];$$

- *zeri*:

$$N_{i,k}(t) \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_i = t_{i+1} = \dots = t_{i+k};$$

- *positività*:

$$N_{i,k}(t) > 0 \quad t \in (t_i, t_{i+k}) \text{ e } t_{i+k} > t_i$$

ed in particolare l'intervallo $[t_i, t_{i+k})$ è detto supporto della funzione di base i -esima;

- *partizione dell'unità*: le funzioni base formano una partizione dell'unità, ossia

$$\sum_i N_{i,k}(t) = 1 \quad k \geq 3;$$

- *indipendenza lineare*: le funzioni base $N_{i,k}(t)$ con $i = 0, \pm 1, \dots$ sono linearmente indipendenti su $(-\infty, +\infty)$ se la molteplicità di ogni nodo della partizione è minore di $(k + 1)$ ossia se non ci sono funzione nulle tra le $N_{i,k}(t) \forall i = 0, \pm 1, \dots$

Capitolo 4

Formule ricorrenti per basi B-spline

Una delle proprietà più importanti che si cerca di possedere lavorando in uno spazio spline nell'ambito della modellazione geometrica, è quella di avere una base B-spline calcolabile in modo computazionalmente efficiente, per esempio mediante una formula ricorrente. In particolare se consideriamo un generico spazio spline $S(\mathcal{U}_m, M, \Delta)$, si ricerca una formula che permette di calcolare la B-spline B_i^r come combinazione delle B-spline di ordine inferiore B_i^{r-1}, B_{i+1}^{r-1} , in modo che la base $\{B_i^m\}_{i=1, \dots, m+K}$ abbia le proprietà di supporto locale e di non negatività.

In questo capitolo vediamo in quali tipi di spazi spline è possibile trovare questa utile proprietà. In particolare, la forma della relazione ricorsiva cercata, suggerisce due possibilità che descriviamo attraverso due algoritmi proposti e analizzati nelle prime 3 sezioni. Per ulteriori dettagli inerenti a questo approccio si veda [Sch82]. Nella sezione 4.4, invece, si intraprende una strada differente considerando formule ricorrenti non del tipo descritto in precedenza. A tale proposito si esaminano le UE-spline e si descrive una formula integrale per generare in maniera ricorsiva le rispettive funzioni base. Si conclude il capitolo con la sezione 4.5 nella quale si confrontano nel caso polinomiale, trigonometrico e iperbolico, le due differenti formule ricorrenti trovate. In particolare per implementare in maniera efficiente la formula integrale, utilizziamo lo strumento delle funzioni di Transizione introdotto nell'articolo [BCR13].

Con l'ausilio del calcolatore, abbiamo quindi concluso che tutti i metodi visti per trovare le funzioni base B-spline, danno luogo allo stesso risultato.

Notazione 4.1. *Nel trattare un generico spazio spline $S(\mathcal{U}, M, \Delta)$, si considera sempre una partizione nodale estesa, indicata con $\{y_i\}_{i=1,2,\dots,n+m}$, associata al vettore delle molteplicità M e a una partizione nodale interna Δ . Inoltre in questo capitolo si considerano sempre B-spline non normalizzate.*

4.1 Algoritmo 1

Algoritmo 1. Siano $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m$ funzioni $C^{m-2}((0, b-a))$. Si definisce per $i = 1, 2, \dots, n+m-1$

$$B_i^1(x) = \begin{cases} \frac{1}{\phi_1(y_{i+1} - y_i)} & y_i \leq x < y_{i+1} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(il caso $i = n$ si definisce sull'intervallo chiuso $[y_n, y_{n+1}]$), e per $r = 2, 3, \dots, m$ e $i = 1, 2, \dots, n+m-r$ si pone

$$B_i^r(x) = \begin{cases} \frac{\phi_r(x - y_i)B_i^{r-1}(x) + \phi_r(y_{i+r} - x)B_{i+1}^{r-1}(x)}{\phi_r(y_{i+r} - y_i)} & y_i < y_{i+r} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Teorema 4.1. *Le sole classi di spline che possiedono una base B-spline $\{B_i^m\}_{i=1,\dots,n}$ che può essere calcolata mediante una formula ricorrente del tipo descritto nell'algoritmo 1 sono le spline polinomiali, trigonometriche e iperboliche ossia le spline appartenenti agli spazi $S(\mathcal{U}, M, \Delta)$ con $U = \mathbb{P}_m \vee \mathcal{T}_m \vee \mathcal{H}_m$. Durante tutto l'elaborato ci riferiamo a questo tipo di formule con il nome di formule ricorrenti classiche.*

Osservazione 7. È importante sottolineare che questa formula non ci garantisce che le B-spline così ottenute formino una partizione dell'unità. In particolare tale proprietà è soddisfatta direttamente solo nel caso delle B-spline polinomiali normalizzate. Per gli altri casi è necessario moltiplicare le funzioni per delle costanti descritte nel dettaglio nel capitolo 3.

Corollario 4.2. *La formula ricorrente nel caso delle B-spline polinomiali non normalizzate diventa per $r \geq 2$*

$$B_i^r(x) = \begin{cases} \frac{(x - y_i)}{(y_{i+r} - y_i)} B_i^{r-1}(x) + \frac{(y_{i+r} - x)}{(y_{i+r} - y_i)} B_{i+1}^{r-1}(x) & y_i < y_{i+r} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove

$$B_i^1(x) = \begin{cases} 1 & y_i \leq x < y_{i+1} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In modo abbastanza semplice si ottiene una relazione ricorsiva anche per le derivate

$$D_+ B_i^r(x) = \begin{cases} (m-1) \frac{[B_i^{r-1}(x) - B_{i+1}^{r-1}(x)]}{(y_{i+m} - y_i)} & y_i < y_{i+r} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Lo scopo di questa trattazione è lavorare con strumenti utili nell'ambito della modellazione geometrica, quindi come già detto, è necessario normalizzare le B-spline effettuando questa operazione

$$N_i^r(x) = (y_{i+r} - y_i) B_i^r(x).$$

Corollario 4.3. *La formula ricorrente nel caso delle B-spline trigonometriche non normalizzate diventa per $r \geq 2$*

$$B_i^r(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x - y_i)}{\sin(y_{i+r} - y_i)} B_i^{r-1}(x) + \frac{\sin(y_{i+r} - x)}{\sin(y_{i+r} - y_i)} B_{i+1}^{r-1}(x) & y_{i+r} - y_i < \pi \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove

$$B_i^1(x) = \begin{cases} 1 & y_i \leq x < y_{i+1} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In modo abbastanza semplice si ottiene una relazione ricorsiva anche per le derivate

$$D_+ B_i^r(x) = \begin{cases} (m-1) \frac{\cos(x - y_i)}{\sin(y_{i+r} - y_i)} B_i^{r-1}(x) - \frac{\cos(y_{i+r} - x)}{\sin(y_{i+r} - y_i)} B_{i+1}^{r-1}(x) & y_{i+r} - y_i < \pi \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Nel caso in cui si voglia lavorare con le B-spline normalizzate, basta effettuare la seguente modifica

$$N_i^r(x) = \sin(y_{i+r} - y_i) B_i^r(x).$$

Osservazione 8. Dal nostro studio emerge che il vincolo sull'ampiezza del supporto delle funzioni base nel caso trigonometrico non è dovuto all'uso della formula ricorrente ma alla natura stessa delle funzioni base B-spline. Lo spazio spline tuttavia è definito, in quanto le condizioni di esistenza in questo caso prevedono che sia il singolo intervallo nodale a dover avere un'ampiezza minore di π , non l'intero supporto.

Corollario 4.4. *La formula ricorrente nel caso delle B-spline iperboliche non normalizzate diventa per $r \geq 2$*

$$B_i^r(x) = \begin{cases} \frac{\sinh(x - y_i)}{\sinh(y_{i+r} - y_i)} B_i^{r-1}(x) + \frac{\sinh(y_{i+r} - x)}{\sinh(y_{i+r} - y_i)} B_{i+1}^{r-1}(x) & y_i < y_{i+r} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove

$$B_i^1(x) = \begin{cases} 1 & y_i \leq x < y_{i+1} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In modo abbastanza semplice si ottiene una relazione ricorsiva anche per le derivate

$$D_+ B_i^r(x) = \begin{cases} (m-1) \frac{\cosh(x-y_i)}{\sinh(y_{i+r}-y_i)} B_i^{r-1}(x) - \frac{\cosh(y_{i+r}-x)}{\sinh(y_{i+r}-y_i)} B_{i+1}^{r-1}(x) & y_i < y_{i+r} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Nel caso in cui si voglia lavorare con le B-spline normalizzate, basta effettuare la seguente modifica

$$N_i^r(x) = \sinh(y_{i+r} - y_i) B_i^r(x).$$

Considerare solo i tre casi citati nel teorema 4.1 può essere troppo limitativo. Il seguente teorema infatti, mostra che esistono altri spazi spline correlati a quelli citati nel teorema 4.1, con una base B-spline che può essere generata attuando una piccola modifica dell'algoritmo 1.

Teorema 4.5. *Sia ω una funzione positiva $C^{m-2}([a, b])$ e $S(\mathcal{U}, M, \Delta)$ uno spazio spline ove $U = \mathbb{P}_m \vee \mathcal{T}_m \vee \mathcal{H}_m$. Definendo $\tilde{\mathcal{U}} = \{\omega u \mid u \in \mathcal{U}\}$, si ha che $S(\tilde{\mathcal{U}}, M, \Delta)$ possiede una base B-spline $\{\tilde{B}_1^m, \dots, \tilde{B}_n^m\}$ che può essere calcolata mediante una formula ricorrente del tipo descritto nell'algoritmo 1 a condizione che $\tilde{B}_i^1(x) = \omega(x) B_i^1(x)$ per ogni $i = 1, 2, \dots, n + m - 1$.*

Osservazione 9. E' bene sottolineare che ponendo $\tilde{B}_i^1(x) = \omega(x) B_i^1(x)$ per ogni $i = 1, 2, \dots, n + m - 1$, si ottiene

$$\tilde{B}_i^m(x) = \omega(x) B_i^m(x) \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

4.1.1 Esempi

Di seguito, proponiamo tre esempi in cui viene esplicitata l'espressione analitica di alcune funzioni B-spline, utilizzando la formula ricorrente descritta nell'algoritmo 1. In particolare analizziamo la B-spline normalizzata di ordine 3 nel caso polinomiale, trigonometrico e iperbolico. I calcoli sono stati effettuati con l'ausilio delle funzioni MATLAB simboliche `gc_bspl_sym`, `ct_bspl_trigonometriche_sym` e `ct_bspl_iperboliche_sym`. Invece i grafici sono stati creati con la funzione MATLAB `ct_bspl_plot` che richiama a sua volta, a seconda del caso preso in esame, le funzioni `gc_bspl`, `ct_bspl_trigonometriche` e `ct_bspl_iperboliche`. Tuttavia è bene sottolineare che tali funzioni permettono di trattare anche il caso di B-spline non normalizzate, di variare l'ordine e la partizione nodale per ottenere molteplici esempi.

L'ultimo esempio riguarda invece la modifica dell'algoritmo 1, descritta nel teorema 4.5. Tale procedimento ci dà la possibilità di utilizzare formule ricorrenti per spazi che non sono propriamente polinomiali, trigonometrici o iperbolici ma che sono ugualmente utili nelle applicazioni.

Esempio 4.1. Seguendo i passi della formula ricorrente vista nel corollario 4.2, esplicitiamo l'espressione analitica dell' i -esima B-spline polinomiale normalizzata di ordine 3 nei tratti in cui non è nulla. Otteniamo:

$$N_i^3(x) = \begin{cases} \frac{(x - y_i)^2}{(y_{i+2} - y_i)(y_{i+1} - y_i)} & y_i \leq x < y_{i+1} \\ \frac{(x - y_i)(y_{i+2} - x)}{(y_{i+2} - y_i)(y_{i+2} - y_{i+1})} + \frac{(y_{i+3} - x)(x - y_{i+1})}{(y_{i+3} - y_{i+1})(y_{i+2} - y_{i+1})} & y_{i+1} \leq x < y_{i+2} \\ \frac{(y_{i+3} - x)^2}{(y_{i+3} - y_{i+1})(y_{i+3} - y_{i+2})} & y_{i+2} \leq x < y_{i+3} \end{cases}$$

Nella figura 4.1 sono rappresentate graficamente le funzioni B-spline polinomiali appena calcolate associate alla partizione nodale estesa a nodi semplici $\Delta_e = [0 \ 0 \ 0 \ 0.25 \ 0.5 \ 1 \ 1 \ 1]$. Per ottenere questo grafico le B-spline sono state valutate in un vettore di punti dell'intervallo di definizione utilizzando un'implementazione computazionalmente efficiente della formula ricorrente classica

vista in questa sezione. Inoltre si è verificata la proprietà di partizione dell'unità che sappiamo valere sempre nel caso polinomiale.

Consideriamo ora una diversa partizione nodale e vediamo come cambia il

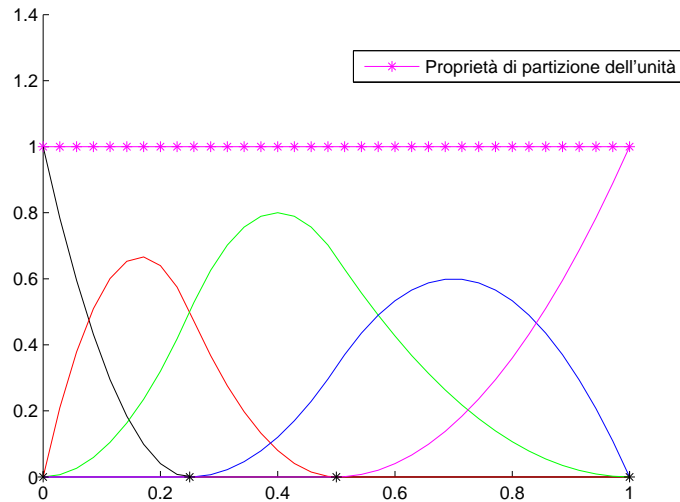


Figura 4.1: Grafico delle funzioni base B-spline polinomiali normalizzate di ordine 3 definite sulla partizione nodale estesa a nodi semplici $\Delta_e = [0 \ 0 \ 0 \ 0.25 \ 0.5 \ 1 \ 1 \ 1]$ ottenuto con le funzioni MATLAB `ct_bspl_plot` e `gc_bsp1` della libreria fornita. Inoltre tale grafico mostra che le B-spline polinomiali normalizzate così calcolate, formano una partizione dell'unità.

grafico della base B-spline polinomiale normalizzata di ordine 3. In particolare nella figura 4.2 sono disegnate le B-spline associate alla partizione nodale estesa a nodi coincidenti $\Delta_e = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]$. Anche in questo caso è ovviamente verificata la proprietà di partizione dell'unità.

Esempio 4.2. Seguendo i passi della formula ricorrente vista nel corollario 4.3, esplicitiamo l'espressione analitica dell' i -esima B-spline trigonometrica normalizzata di ordine 3 nei tratti in cui non è nulla. Otteniamo:

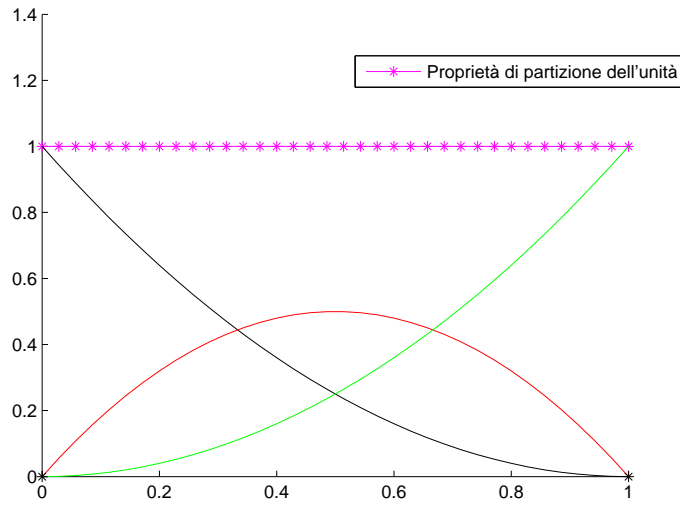


Figura 4.2: Grafico delle funzioni base B-spline polinomiali normalizzate di ordine 3 sulla partizione nodale estesa a nodi coincidenti $\Delta_e = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]$ ottenuto con le funzioni MATLAB `ct_bspl_plot` e `gc_bspl` della libreria fornita. Inoltre tale grafico mostra che le B-spline polinomiali normalizzate così calcolate, formano una partizione dell'unità.

$$N_i^3(x) = \begin{cases} \frac{(\sin(x - y_i))^2}{\sin(y_{i+2} - y_i) \sin(y_{i+1} - y_i)} & y_i \leq x < y_{i+1} \\ \frac{\sin(x - y_i) \sin(y_{i+2} - x)}{\sin(y_{i+2} - y_i) \sin(y_{i+2} - y_{i+1})} + \frac{\sin(y_{i+3} - x) \sin(x - y_{i+1})}{\sin(y_{i+3} - y_{i+1}) \sin(y_{i+2} - y_{i+1})} & y_{i+1} \leq x < y_{i+2} \\ \frac{(\sin(y_{i+3} - x))^2}{\sin(y_{i+3} - y_{i+1}) \sin(y_{i+3} - y_{i+2})} & y_{i+2} \leq x < y_{i+3} \end{cases}$$

Inoltre per soddisfare la proprietà di partizione dell'unità, si modifica l'espressione della B-spline appena trovata come segue

$$\cos(y_{i+2} - y_{i+1}) N_i^3(x).$$

Nella figura 4.3 sono rappresentate graficamente le funzioni B-spline trigonometriche appena calcolate definite sull'intervallo $[0, 1]$ e associate alla partizione nodale estesa a nodi semplici $\Delta_e = [0 \ 0 \ 0 \ 0.25 \ 0.5 \ 1 \ 1 \ 1]$. Per ottenere questo grafico le B-spline sono state valutate in un vettore di punti dell'intervallo di

definizione utilizzando un'implementazione computazionalmente efficiente della formula ricorrente classica vista in questa sezione.

Consideriamo ora una diversa partizione nodale e vediamo come cambia il

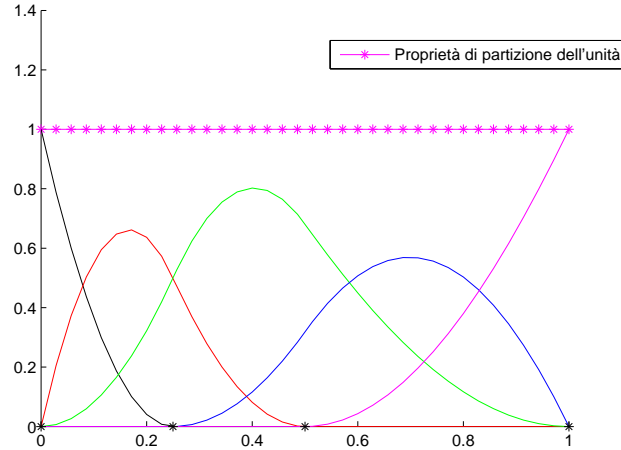


Figura 4.3: Grafico delle funzioni base B-spline trigonometriche normalizzate di ordine 3 e scalate per dare somma 1, definite sulla partizione nodale estesa a nodi semplici $\Delta_e = [0 \ 0 \ 0 \ 0.25 \ 0.5 \ 1 \ 1 \ 1]$. Tale figura è stata ottenuta utilizzando le funzioni MATLAB `ct_bspl_plot` e `ct_bspl_trigonometriche` della libreria fornita.

grafico della base B-spline trigonometrica normalizzata con somma 1 di ordine 3. In particolare nella figura 4.4 sono disegnate le B-spline associate alla partizione nodale estesa a nodi coincidenti $\Delta_e = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]$.

Esempio 4.3. Seguendo i passi della formula ricorrente vista nel corollario 4.4 esplicitiamo l'espressione analitica dell' i -esima B-spline iperbolica normalizzata di ordine 3 nei tratti in cui non è nulla. Otteniamo

$$N_i^3(x) = \begin{cases} \frac{(\sinh(x - y_i))^2}{\sinh(y_{i+2} - y_i) \sinh(y_{i+1} - y_i)} & y_i \leq x < y_{i+1} \\ \frac{\sinh(x - y_i) \sinh(y_{i+2} - x)}{\sinh(y_{i+2} - y_i) \sinh(y_{i+2} - y_{i+1})} + \frac{\sinh(y_{i+3} - x) \sinh(x - y_{i+1})}{\sinh(y_{i+3} - y_{i+1}) \sinh(y_{i+2} - y_{i+1})} & y_{i+1} \leq x < y_{i+2} \\ \frac{(\sinh(y_{i+3} - x))^2}{\sinh(y_{i+3} - y_{i+1}) \sinh(y_{i+3} - y_{i+2})} & y_{i+2} \leq x < y_{i+3} \end{cases}$$

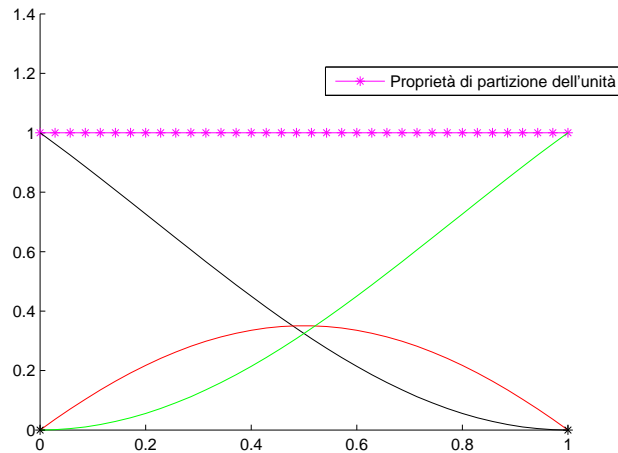


Figura 4.4: Grafico delle funzioni base B-spline trigonometriche normalizzate di ordine 3 e scalate per dare somma 1, definite sulla partizione nodale estesa a nodi coincidenti $\Delta_e = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$. Tale figura è stata ottenuta utilizzando le funzioni MATLAB `ct_bspl_plot` e `ct_bspl_trigonometriche` della libreria fornita.

Inoltre per garantire la proprietà di partizione dell'unità, si modifica l'espressione della B-spline appena trovata come segue

$$\cosh(y_{i+2} - y_{i+1})N_i^3(x).$$

Nella figura 4.5 sono rappresentate graficamente le funzioni B-spline iperboliche appena calcolate definite sull'intervallo $[0, 1]$ e associate alla partizione nodale estesa a nodi semplici $\Delta_e = [0 \ 0 \ 0 \ 0.25 \ 0.5 \ 1 \ 1 \ 1]$. Per ottenere questo grafico le B-spline sono state valutate in un vettore di punti dell'intervallo di definizione utilizzando un'implementazione computazionalmente efficiente della formula ricorrente classica vista in questa sezione.

Consideriamo ora una diversa partizione nodale e vediamo come cambia il grafico della base B-spline iperbolica normalizzata con somma 1 di ordine 3. In particolare nella figura 4.6 sono disegnate le funzioni B-spline associate alla partizione nodale estesa a nodi coincidenti $\Delta_e = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]$.

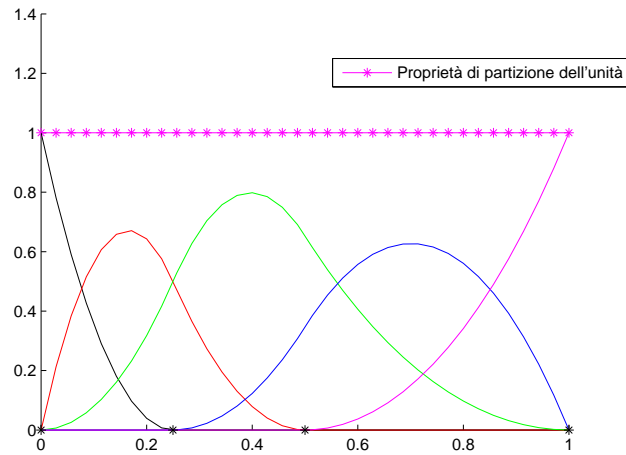


Figura 4.5: Grafico delle funzioni base B-spline iperboliche normalizzate di ordine 3 e scalate per dare somma 1, definite sulla partizione nodale estesa a nodi semplici $\Delta_e = [0 \ 0 \ 0 \ 0.25 \ 0.5 \ 1 \ 1 \ 1]$. Tale figura è stata ottenuta utilizzando le funzioni MATLAB `ct_bsp1_plot` e `ct_bsp1_iperboliche` della libreria fornita.

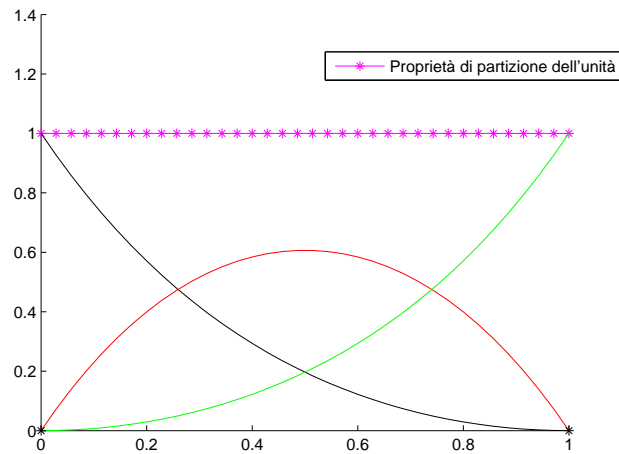


Figura 4.6: Grafico delle funzioni base B-spline iperboliche normalizzate di ordine 3 e scalate per dare somma 1, definite sulla partizione nodale estesa a nodi coincidenti $\Delta_e = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$. Tale figura è stata ottenuta utilizzando le funzioni MATLAB `ct_bsp1_plot` e `ct_bsp1_iperboliche` della libreria fornita.

Vediamo ora un esempio di quanto visto nel teorema 4.5.

Esempio 4.4. Consideriamo lo spazio spline polinomiale $S(\mathbb{P}_m, M, \Delta)$ definito su $[0, 1]$. E' noto che per questo preciso spazio le funzioni ϕ_1, \dots, ϕ_m dell'algoritmo 1 sono tutte coincidenti con l'identità. Ponendo $\omega(x) = x^{\frac{1}{2}}$, si ha che $\tilde{\mathcal{U}} = \{\omega u | u \in \mathbb{P}_m\} = \text{span}\{x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{3}{2}}, \dots, x^{m-\frac{1}{2}}\}$ e lo spazio spline $S(\tilde{\mathcal{U}}, M, \Delta)$ possiede una base B-spline $\{\tilde{B}_1^m, \dots, \tilde{B}_n^m\}$ che può essere calcolata mediante una formula ricorrente del tipo descritto nell'algoritmo 1 a condizione che per ogni $i = 1, 2, \dots, n + m - 1$

$$\tilde{B}_i^1(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{2}} \frac{1}{y_{i+1} - y_i} & y_i \leq x < y_{i+1} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Tramite questa semplice modifica, la base B-spline può essere ottenuta attraverso la formula ricorrente

$$\tilde{B}_i^r(x) = \begin{cases} \frac{(x - y_i)\tilde{B}_i^{r-1}(x) + (y_{i+r} - x)\tilde{B}_{i+1}^{r-1}(x)}{(y_{i+r} - y_i)} & y_i < y_{i+r} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con $r = 2, \dots, m$.

Lo spazio spline $S(\tilde{\mathcal{U}}, M, \Delta)$ appena generato, pur non essendo uno spazio spline propriamente polinomiale, trigonometrico o iperbolico, è comunque utile nelle applicazioni; infatti è strettamente correlato alla soluzione di alcuni tipi di problemi al contorno.

4.2 Algoritmo 2

Algoritmo 2. Siano $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m$ funzioni $C^{m-2}([a, b])$. Si definisce per $i = 1, 2, \dots, n + m - 1$

$$B_i^1(x) = \begin{cases} \frac{1}{\psi_i(y_{i+1}) - \psi_i(y_i)} & y_i \leq x < y_{i+1} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(il caso $i = n$ si definisce sull'intervallo chiuso $[y_n, y_{n+1}]$), e per $r = 2, 3, \dots, m$ e $i = 1, 2, \dots, n + m - r$ si pone

$$B_i^r(x) = \begin{cases} \frac{|\psi_r(x) - \psi_r(y_i)|B_i^{r-1}(x) + |\psi_r(y_{i+r}) - \psi_r(x)|B_{i+1}^{r-1}(x)}{\psi_r(y_{i+r}) - \psi_r(y_i)} & y_i < y_{i+r} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Osservazione 10. Affinchè l'algoritmo 2 produca B-spline che soddisfano le proprietà di supporto locale e di non negatività, le funzioni $\psi_1 \dots \psi_m \in C^{m-2}([a, b])$ devono essere monotone crescenti su $[a, b]$. Possiamo concludere che tali funzioni possono perciò essere scritte in forma integrale utilizzando una funzione peso positiva

$$\psi_i(x) = \psi_i(a) + \int_a^x \omega_i(t) dt \quad a \leq t \leq b$$

con $i = 1, 2, \dots, m$.

Lemma 4.6. *Condizione necessaria affinché per un' arbitraria sequenza di nodi le B-spline B_i^n , costruite ricorsivamente utilizzando l'algoritmo 2, soddisfino le condizioni di continuità nei nodi imposte dalla definizione stessa di spline è che*

$$\psi_i = a_i + c_i \psi_1 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

ove a_i, c_i sono opportune costanti.

Osservazione 11. Utilizzando il lemma precedente, possiamo assumere senza perdere di generalità che

$$\psi_i(x) = \int_a^x w(t)dt \quad i = 1, 2, \dots, m$$

ove w è una funzione positiva in $C^{m-2}([a, b])$. Si noti che si è trascurato il termine costante $\psi_i(a)$ in quanto, nell'algoritmo che si è preso in esame, sono presenti solo differenze di ψ_i , quindi le ψ_i sono tutte integrali di un'unica fissata funzione peso positiva w .

Teorema 4.7. *Le sole classi di spline che possiedono una base B-spline $\{B_i^m\}_{i=1, \dots, n}$ che può essere calcolata mediante una formula ricorrente del tipo descritto nell'algoritmo 2, sono le spline appartenenti allo spazio $S(\mathcal{U}, M, \Delta)$ con $\mathcal{U} = \text{span}\{u_1, \dots, u_m\}$,*

$$u_i(x) = \frac{\left[\int_a^x w(t)dt \right]^{i-1}}{(i-1)!} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

e w è una funzione positiva $C^{m-2}([a, b])$.

Il seguente teorema mostra che, attuando una piccola modifica all'algoritmo 2, si può costruire una più ampia classe di spazi spline che possiede una base B-spline generabile da una formula ricorrente.

Teorema 4.8. *Sia μ una funzione positiva $C^{m-2}([a, b])$ e $S(\mathcal{U}, M, \Delta)$ uno spazio spline definito come nel teorema 4.7. Definendo $\tilde{\mathcal{U}} = \{\mu u \mid u \in \mathcal{U}\}$, si ha che $S(\tilde{\mathcal{U}}, M, \Delta)$ possiede una base B-spline $\{\tilde{B}_1^m, \dots, \tilde{B}_n^m\}$ che può essere calcolata mediante una formula ricorrente del tipo descritto nell'algoritmo 2 a condizione che $\tilde{B}_i^1(x) = \mu(x)B_i^1(x)$ per ogni $i = 1, 2, \dots, n + m - 1$.*

In particolare il prossimo lemma ci mostra che questi spazi spline appena costruiti, non sono altro che spazi Tchebycheff-spline associati a ECT-sistemi con pesi uguali.

Lemma 4.9. *Se $w_2 = w_3 = \dots = w_m = w$ con w una funzione positiva in $C^{m-2}([a, b])$, allora l'ECT-sistema canonico definito univocamente dalla base $\{u_i\}_{i=1, \dots, m}$ in generale della forma*

$$\begin{cases} u_1(x) = w_1(x) \\ u_2(x) = w_1(x) \int_a^x w_2(s_2) ds_2 \\ \dots \\ u_m(x) = w_1(x) \int_a^x w_2(s_2) \int_a^{s_2} \dots \int_a^{s_{m-1}} w_m(s_m) ds_m \dots ds_2 \end{cases}$$

è dato da

$$u_i(x) = w_1(x) \frac{\left[\int_a^x w(t) dt \right]^{i-1}}{(i-1)!} \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Osservazione 12. I due tipi di formule ricorrenti discussi negli algoritmi 1 e 2 sono essenzialmente differenti. Coincidono infatti solo nel caso in cui $\phi_i(x) = \psi_i(x) = x$, in cui si ottengono le B-spline polinomiali.

Di seguito riportiamo un esempio di spazio Tchebycheff-spline associato a un ECT-sistema con pesi uguali.

Esempio 4.5. Consideriamo lo spazio spline $S(\mathcal{U}, M, \Delta)$ ove

$$\mathcal{U} = \text{span} \left\{ \frac{(\sin x)^{i-1}}{(i-1)!} \right\} = \text{span} \{1, \sin(x), \cos(2x), \sin(3x), \dots\}.$$

Tale spazio, è uno spazio Tchebycheff-spline associato a un ECT-sistema con pesi tutti uguali, costruito utilizzando il lemma 4.9 e ponendo $w_1(x) = 1$ e $w(x) = \cos(x)$.

Come esempio, costruiamo ricorsivamente la base B-spline di tale spazio utilizzando l'algoritmo 2. In generale si ha che

$$\psi_i(x) = \int_a^x w(t) dt \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Quindi, in questo caso

$$\begin{aligned} \psi_i(x) &= \psi(x) = \int_a^x w(t) dt \\ &= \sin(x) - \sin(a) \\ &= \sin(x) \end{aligned}$$

e perciò possiamo scrivere che per $i = 1, 2, \dots, n + m - 1$

$$B_i^1(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sin(y_{i+1}) - \sin(y_i)} & y_i \leq x < y_{i+1} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e per $r = 2, 3, \dots, m$ e $i = 1, 2, \dots, n + m - r$

$$B_i^r(x) = \begin{cases} \frac{|\sin(x) - \sin(y_i)| B_i^{r-1}(x) + |\sin(y_{i+r}) - \sin(x)| B_{i+1}^{r-1}(x)}{\sin(y_{i+r}) - \sin(y_i)} & y_i < y_{i+r} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

4.3 Spazi spline trasformati

Le tecniche appena viste riescono ad ampliare la classe degli spazi spline che possiede una formula ricorrente per calcolare una base B-spline. Con lo stesso scopo, analizziamo ora gli spazi spline trasformati, cioè spazi spline ottenuti da altri mediante moltiplicazione di una funzione positiva e/o un cambio di variabile monotono.

Teorema 4.10. *Siano $[a, b]$ e $[c, d]$ due intervalli chiusi, $\rho \in C^{m-2}([c, d])$ una funzione monotona crescente che mappa $[c, d]$ in $[a, b]$ e $\omega \in C^{m-2}([c, d])$ una funzione positiva su $[c, d]$. Sia $\Delta = \{x_i\}_{i=1, \dots, k}$ una partizione di $[a, b]$*

con $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k+1} = b$ e $S(\mathcal{U}, M, \Delta)$ uno spazio spline ove $\mathcal{U} = \text{span} \{u_1, \dots, u_m\}$. Se si pone

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{U}} &= \text{span} \{\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_m\} & \text{con} & \quad \tilde{u}_i(x) = \omega(x)u_i(\rho(x)) & \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \\ \tilde{\Delta} &= \{\tilde{x}_i\}_{i=1, \dots, k} & \text{con} & \quad \tilde{x}_i = \rho^{-1}(x_i) & \quad \forall i = 1, 2, \dots, k \end{aligned}$$

allora lo spazio spline trasformato è dato da

$$S(\tilde{\mathcal{U}}, M, \tilde{\Delta}) = \{\tilde{s}(x) = \omega(x)s(\rho(x)) : s \in S(\mathcal{U}, M, \Delta)\}.$$

Corollario 4.11. Una base dello spazio spline trasformato $S(\tilde{\mathcal{U}}, M, \tilde{\Delta})$ è data da

$$\tilde{B}_i(x) = \omega(x)B_i(\rho(x)) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ove $\{B_1, \dots, B_n\}$ è una base dello spazio spline $S(\mathcal{U}, M, \Delta)$.

Inoltre se $\{B_1, \dots, B_n\}$ gode delle proprietà di supporto locale e di non negatività, queste saranno soddisfatte anche per $\{\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_n\}$ ossia

$$\begin{aligned} \tilde{B}_i(x) &> 0 & \text{se} & \quad \tilde{y}_i < x < y_{i+m} \\ \tilde{B}_i(x) &= 0 & \text{se} & \quad x < \tilde{y}_i \wedge y_{i+m} < x. \end{aligned}$$

Osservazione 13. Se lo spazio $S(\mathcal{U}, M, \Delta)$ ammette una formula ricorrente per calcolare una base B-spline (cioè è uno spazio spline polinomiale, trigonometrico, iperbolico o Tchebycheffiano a pesi costanti), essa può essere usata anche per calcolare una base B-spline dello spazio spline trasformato.

Esempio 4.6. Lo spazio spline $S(\tilde{\mathcal{U}}, M, \Delta)$ definito su $[0, 1]$ con

$$\tilde{\mathcal{U}} = \text{span} \{1, \sinh(x^2), \cosh(2x^2), \sinh(3x^2)\}$$

è un esempio di spazio spline trasformato. Infatti, si ottiene trasformando lo spazio Tchebycheff-spline $S(\mathcal{U}, M, \Delta)$ ove

$$\mathcal{U} = \text{span} \{1, \sinh(x), \cosh(2x), \sinh(3x)\}.$$

4.4 UE-spline

In questo caso, la formula ricorrente con cui determinare una base per la classe delle UE-spline ha una forma integrale, quindi ben diversa dalla formulazione che ricercavamo in precedenza. Questo approccio è sicuramente meno utile dal punto di vista computazionale ma comunque degno di nota. In particolare ha un vantaggio significativo in quanto le B-spline ottenute tramite questo procedimento soddisfano direttamente la proprietà di partizione dell'unità.

Proposizione 4.12. *Siano $\Delta = \{t_i\}_{i=-\infty, \dots, +\infty}$ una sequenza di nodi tale che $t_i \leq t_{i+1}$ e $\omega = \sqrt{\alpha}$ una frequenza definita dal parametro reale $\alpha \leq \min_j (\frac{\pi}{t_{j+1}-t_j})^2$. Una base per lo spazio UE-spline, definito a partire dallo spazio $\{\cos \omega t, \sin \omega t, 1, t, \dots, t^l, \dots\}$ con $t \in [t_i, t_{i+k})$, può essere calcolata mediante la seguente formula ricorrente integrale. Posto*

$$N_{i,2}(t) = \begin{cases} \frac{\sin \omega(t - t_i)}{\sin \omega(t_{i+1} - t_i)} & t_i \leq t < t_{i+1} \\ \frac{\sin \omega(t_{i+2} - t)}{\sin \omega(t_{i+2} - t_{i+1})} & t_{i+1} \leq t < t_{i+2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si ha che $N_{i,k}(t)$, con $k \geq 3$, è definito ricorsivamente come

$$N_{i,k}(t) = \int_{-\infty}^t (\delta_{i,k-1} N_{i,k-1}(s) - \delta_{i+1,k-1} N_{i+1,k-1}(s)) ds$$

ove

$$\delta_{i,k} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} N_{i,k}(t) dt \right)^{-1} \quad i = 0, \pm 1, \dots$$

Nel caso in cui $\omega = 0$, si definisce $\frac{0}{0} = 0$ ed inoltre se $N_{i,k}(t) = 0$ si impone che $\delta_{i,k} N_{i,k}(t)$ sia tale che

$$\int_{-\infty}^t \delta_{i,k} N_{i,k}(t) dt = \begin{cases} 1 & t \geq t_{i+k} \\ 0 & t < t_{i+k}. \end{cases}$$

Osservazione 14. La notazione della proposizione precedente utilizzata nella definizione di $N_{i,2}(t)$, sottointende che nei casi particolari in cui

- $\alpha = 0$

$$N_{i,2}(t) = \begin{cases} \frac{\int_{t_i}^t \cos \omega(s - t_i) ds}{\int_{t_{i+1}}^{t_i} \cos \omega(s - t_i) ds} & t_i \leq t < t_{i+1} \\ \frac{\int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}+t_{i+1}-t} \cos \omega(s - t_{i+1}) ds}{\int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} \cos \omega(s - t_{i+1}) ds} & t_{i+1} \leq t < t_{i+2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- $\alpha < 0$

$$N_{i,2}(t) = \begin{cases} \frac{\sinh |\omega|(t - t_i)}{\sinh |\omega|(t_{i+1} - t_i)} & t_i \leq t < t_{i+1} \\ \frac{\sinh |\omega|(t_{i+2} - t)}{\sinh |\omega|(t_{i+2} - t_{i+1})} & t_{i+1} \leq t < t_{i+2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

4.5 Confronto delle formule ricorrenti

Nel caso polinomiale, trigonometrico e iperbolico abbiamo trovato due differenti formule ricorrenti per calcolare le funzioni base B-spline: la formula ricorrente classica derivante dall'algoritmo 1 e la formula ricorrente integrale UE della proposizione 4.12. In questa sezione, con l'ausilio del calcolatore, verifichiamo che entrambe le formule ricorrenti danno luogo allo stesso risultato.

Verifica 4.1. Le UE-spline contengono al loro interno le spline polinomiali, ottenute ponendo $\alpha = 0$. Verifichiamo che nel caso polinomiale, la relazione

ricorrente integrale UE coincide con quella classica vista in dettaglio nel corollario 4.2 e nell'esempio 4.1. In particolare consideriamo il caso normalizzato di ordine 3.

Il primo passo di questa verifica, consiste nel calcolare l'espressione di $N_{i,3}(t)$ derivante dalla relazione integrale UE. Dalla proposizione 4.12 ricaviamo l'espressione analitica di $N_{i,2}(t)$ data da

$$N_{i,2}(t) = \begin{cases} \frac{\int_{t_i}^t \cos \omega(s - t_i) ds}{\int_{t_i}^{t_{i+1}} \cos \omega(s - t_i) ds} & t_i \leq t < t_{i+1} \\ \frac{\int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}+t_{i+1}-t} \cos \omega(s - t_{i+1}) ds}{\int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} \cos \omega(s - t_{i+1}) ds} & t_{i+1} \leq t < t_{i+2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

che nel caso polinomiale si può semplificare ponendo $w = \sqrt{\alpha} = 0$. Si ottiene così che

$$N_{i,2}(t) = \begin{cases} \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} & t_i \leq t < t_{i+1} \\ \frac{t_{i+2} - t}{t_{i+2} - t_{i+1}} & t_{i+1} \leq t < t_{i+2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La B-spline successiva è definita ricorsivamente come

$$N_{i,3}(t) = \int_{-\infty}^t (\delta_{i,2} N_{i,2}(s) - \delta_{i+1,2} N_{i+1,2}(s)) ds$$

ove

$$\delta_{i,k} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} N_{i,k}(t) dt \right)^{-1} \quad i = 0, \pm 1, \dots$$

Calcoliamo in generale nel caso polinomiale, il valore di $\delta_{i,k}$.

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} N_{i,k}(t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} (t_{i+k} - t_i) [t_i, \dots, t_{i+k}] (x - t)_+^{k-1} dt \\
 &= (t_{i+k} - t_i) \int_{t_i}^{t_{i+k}} [t_i, \dots, t_{i+k}] (x - t)_+^{k-1} dt \\
 &= \frac{(t_{i+k} - t_i)}{k} ([t_i, \dots, t_{i+k}] (x - t)_+^k - [t_i, \dots, t_{i+k}] (x - t_{i+k})_+^k) \\
 &= \frac{(t_{i+k} - t_i)}{k} [t_i, \dots, t_{i+k}] (x - t)_+^k \\
 &= \frac{(t_{i+k} - t_i)}{k}
 \end{aligned}$$

quindi si ha che

$$\delta_{i,k} = \frac{k}{(t_{i+k} - t_i)}.$$

Possiamo di conseguenza scrivere che

$$N_{i,3}(t) = \frac{2}{t_{i+2} - t_i} \int_{-\infty}^t N_{i,2}(s) ds - \frac{2}{t_{i+3} - t_{i+1}} \int_{-\infty}^t N_{i+1,2}(s) ds.$$

Svolgendo gli integrali, ricaviamo l'espressione analitica della B-spline $N_{i,3}(t)$ nei tratti in cui non è identicamente nulla. Otteniamo:

- per $t_i \leq t < t_{i+1}$

$$\begin{aligned}
 N_{i,3}(t) &= \frac{2}{t_{i+2} - t_i} \int_{t_i}^t \frac{s - t_i}{t_{i+1} - t_i} ds \\
 &= \frac{2}{(t_{i+2} - t_i)(t_{i+1} - t_i)} \left(\frac{t^2 - t_i^2}{2} - t_i t + t_i^2 \right) \\
 &= \frac{(t - t_i)^2}{(t_{i+2} - t_i)(t_{i+1} - t_i)}
 \end{aligned}$$

- per $t_{i+1} \leq t < t_{i+2}$

$$\begin{aligned}
N_{i,3}(t) &= \frac{2}{t_{i+2}-t_i} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{s-t_i}{t_{i+1}-t_i} ds + \int_{t_{i+1}}^t \frac{t_{i+2}-s}{t_{i+2}-t_{i+1}} ds \right) - \frac{2}{t_{i+3}-t_{i+1}} \\
&\quad \int_{t_{i+1}}^t \frac{s-t_{i+1}}{t_{i+2}-t_{i+1}} ds \\
&= \frac{2}{t_{i+2}-t_i} \left[\frac{1}{t_{i+1}-t_i} \left(\frac{t_{i+1}^2-t_i^2}{2} - t_i t_{i+1} + t_i^2 \right) + \frac{1}{t_{i+2}-t_{i+1}} (t_{i+2}t - t_{i+2}t_{i+1} \right. \\
&\quad \left. + \frac{t_{i+1}^2-t^2}{2} \right) - \frac{2}{(t_{i+3}-t_{i+1})} \left[\frac{1}{t_{i+2}-t_{i+1}} \left(\frac{t^2-t_{i+1}^2}{2} - t_{i+1}t + t_{i+1}^2 \right) \right] \\
&= \frac{2}{t_{i+2}-t_i} \left[\frac{(t_{i+1}-t_i)^2}{2(t_{i+1}-t_i)} + \frac{2t_{i+2}t-2t_{i+2}t_{i+1}-t^2+t_{i+1}^2}{2(t_{i+2}-t_{i+1})} \right] - \frac{2}{t_{i+3}-t_{i+1}} \left[\frac{(t-t_{i+1})^2}{2(t_{i+2}-t_{i+1})} \right] \\
&= \frac{t_{i+1}-t_i}{(t_{i+2}-t_i)} + \frac{2t_{i+2}t-2t_{i+2}t_{i+1}-t^2+t_{i+1}^2}{(t_{i+2}-t_{i+1})(t_{i+2}-t_i)} - \frac{(t-t_{i+1})^2}{(t_{i+3}-t_{i+1})(t_{i+2}-t_{i+1})} \\
&= \frac{(t-t_i)(t_{i+2}-t)}{(t_{i+2}-t_{i+1})(t_{i+2}-t_i)} + \frac{(t-t_{i+1})(t_{i+3}-t)}{(t_{i+2}-t_{i+1})(t_{i+3}-t_{i+1})}
\end{aligned}$$

- per $t_{i+2} \leq t < t_{i+3}$

$$\begin{aligned}
N_{i,3}(t) &= \frac{2}{t_{i+2}-t_i} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{s-t_i}{t_{i+1}-t_i} ds + \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} \frac{t_{i+2}-s}{t_{i+2}-t_{i+1}} ds \right) - \frac{2}{t_{i+3}-t_{i+1}} \\
&\quad \left(\int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} \frac{s-t_{i+1}}{t_{i+2}-t_{i+1}} ds + \int_{t_{i+2}}^t \frac{t_{i+3}-s}{t_{i+3}-t_{i+2}} ds \right) \\
&= 1 - \frac{2}{t_{i+3}-t_{i+1}} \left[\frac{1}{t_{i+2}-t_{i+1}} \left(\frac{t_{i+2}^2-t_{i+1}^2}{2} - t_{i+1}t_{i+2} + t_{i+1}^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{t_{i+3}-t_{i+2}} \left(t_{i+3}t - t_{i+2}t_{i+3} - \frac{t_{i+2}^2-t^2}{2} \right) \right] \\
&= 1 - \frac{t_{i+2}-t_{i+1}}{t_{i+3}-t_{i+1}} - \frac{t_{i+2}^2-t^2+2t_{i+3}t-2t_{i+2}t_{i+3}}{(t_{i+3}-t_{i+1})(t_{i+3}-t_{i+2})} \\
&= \frac{(t_{i+3}-t)^2}{(t_{i+3}-t_{i+1})(t_{i+3}-t_{i+2})}
\end{aligned}$$

Dai calcoli già effettuati nell'esempio 4.1, possiamo concludere che le due relazioni ricorrenti per il calcolo delle funzioni base B-spline nel caso polinomiale sono equivalenti.

Per completezza nella figura 4.7 riportiamo il grafico della funzione B-spline polinomiale presa in esame, considerandola definita sulla partizione nodale $\Delta = [0 \frac{1}{3} \frac{2}{3} 1]$. In aggiunta sempre sperimentalmente, si è verificata anche la proprietà di partizione dell'unità, che sappiamo vale sempre nel caso polinomiale.

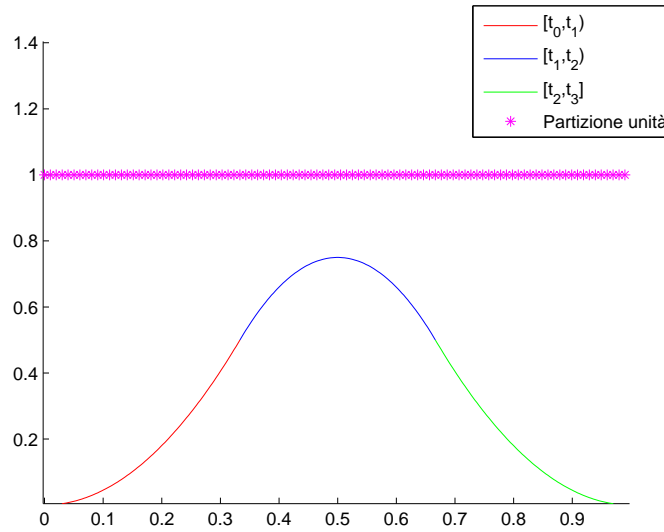


Figura 4.7: Grafico della B-spline polinomiale normalizzata di ordine 3 definita sulla partizione nodale $\Delta = [0 \ \frac{1}{3} \ \frac{2}{3} \ 1]$, ottenuto utilizzando la funzione MATLAB `ct_ftransizione_g2` della libreria fornita. Inoltre tale grafico mostra che le B-spline polinomiali calcolate in questo modo, formano una partizione dell'unità.

Verifica 4.2. Le UE-spline contengono al loro interno le spline trigonometriche, ottenute ponendo $\alpha > 0$ (in particolare $\alpha = 1$). Verifichiamo che nel caso trigonometrico, la relazione ricorrente integrale UE coincide con quella classica vista in dettaglio nel corollario 4.3 e nell'esempio 4.2. Ovviamente sapendo che la formula ricorrente integrale dà luogo a B-spline che soddisfano le proprietà di partizione dell'unità, aggiungiamo direttamente alla formula ricorrente classica la modifica vista per ottenere B-spline con somma 1 e poter confrontare quindi i due risultati. In particolare consideriamo il caso normalizzato di ordine 3 definito su una partizione nodale a nodi semplici.

Il primo passo di questa verifica, consiste nel calcolare l'espressione di $N_{i,3}(t)$ derivante dalla relazione integrale UE. Dalla proposizione 4.12 ricaviamo l'espressione analitica di $N_{i,2}(t)$ data da

$$N_{i,2}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t - t_i)}{\sin(t_{i+1} - t_i)} & t_i \leq t < t_{i+1} \\ \frac{\sin(t_{i+2} - t)}{\sin(t_{i+2} - t_{i+1})} & t_{i+1} \leq t < t_{i+2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e troviamo ricorsivamente la B-spline successiva come

$$N_{i,3}(t) = \int_{-\infty}^t (\delta_{i,2} N_{i,2}(s) - \delta_{i+1,2} N_{i+1,2}(s)) ds$$

ove per definizione

$$\delta_{i,2} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} N_{i,2}(t) dt \right)^{-1}.$$

Svolgendo gli integrali si ottiene che

$$\delta_{i,2} = \frac{\sin(t_{i+1} - t_i) \sin(t_{i+2} - t_{i+1})}{\sin(t_{i+2} - t_{i+1}) + \sin(t_{i+1} - t_i) - \sin(t_{i+2} - t_i)}$$

e che $N_{i,3}(t)$, dove non nulla, ha la seguente espressione analitica

- per $t_i \leq t < t_{i+1}$

$$N_{i,3}(t) = \frac{(1 - \cos(t - t_i)) \sin(t_{i+2} - t_{i+1})}{\sin(t_{i+2} - t_{i+1}) + \sin(t_{i+1} - t_i) - \sin(t_{i+2} - t_i)}$$

- per $t_{i+1} \leq t < t_{i+2}$

$$N_{i,3}(t) = \frac{-\sin(t_{i+2} - t_i) + \sin(t_{i+2} - t_{i+1}) + \sin(t_{i+1} - t_i) \cos(t_{i+2} - t)}{\sin(t_{i+2} - t_{i+1}) + \sin(t_{i+1} - t_i) - \sin(t_{i+2} - t_i)} + \frac{\sin(t_{i+3} - t_{i+2})(-1 + \cos(t - t_{i+1}))}{\sin(t_{i+3} - t_{i+2}) + \sin(t_{i+2} - t_{i+1}) - \sin(t_{i+3} - t_{i+1})}$$

- per $t_{i+1} \leq t < t_{i+2}$

$$N_{i,3}(t) = \frac{-\sin(t_{i+2} - t_i) + \sin(t_{i+2} - t_{i+1}) + \sin(t_{i+1} - t_i)}{\sin(t_{i+2} - t_{i+1}) + \sin(t_{i+1} - t_i) - \sin(t_{i+2} - t_i)} + \frac{\sin(t_{i+3} - t_{i+1}) - \sin(t_{i+3} - t_{i+2}) - \cos(t_{i+3} - t) \sin(t_{i+2} - t_{i+1})}{\sin(t_{i+3} - t_{i+2}) + \sin(t_{i+2} - t_{i+1}) - \sin(t_{i+3} - t_{i+1})}.$$

Per verificare che tale espressione è equivalente a quella trovata nell'esempio 4.2, sono necessari diversi calcoli laboriosi quindi a tale proposito si è creata la funzione MATLAB `ct_confronto_g2`. Nella figura 4.8 sono rappresentate graficamente la B-spline ottenuta con la formula ricorrente classica e la B-spline ottenuta con la formula ricorrente integrale UE. Come si può vedere, i risultati ottenuti sono equivalenti. Per ulteriori conferme, si è considerata anche la funzione differenza che rivela un errore dell'ordine di 10^{-15} , solamente da imputare a errori di arrotondamento dovuti all'uso del calcolatore.

Si noti che rispetto al caso polinomiale, i calcoli necessari per applicare la

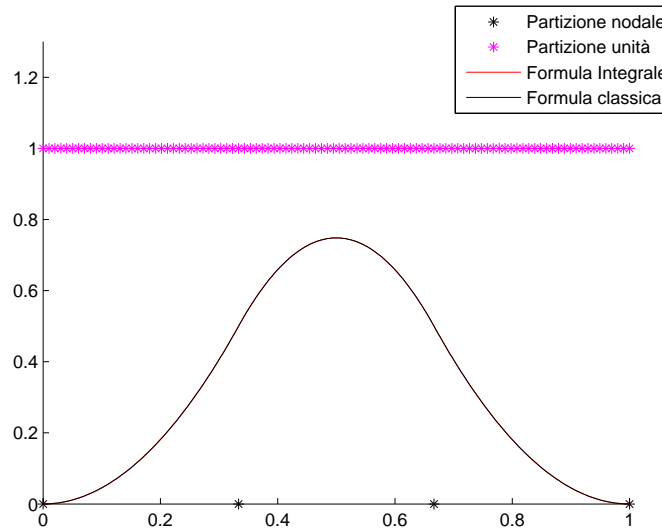


Figura 4.8: Grafico della B-spline trigonometrica di ordine 3 ottenuta con la formula ricorrente classica e di quella ottenuta con la formula ricorrente integrale UE, entrambe definite sulla partizione nodale $\Delta = [0 \frac{1}{3} \frac{2}{3} 1]$. Tale grafico è ottenuto utilizzando la funzione MATLAB `ct_confronto_g2` della libreria fornita.

formula ricorrente integrale sono più complicati ed inoltre dal punto di vista computazionale, implementare numericamente una formula ricorrente che fa uso dell'integrale come quella per le UE-spline, può essere molto dispendioso o produrre risultati instabili per dimensioni del problema abbastanza grandi. Per questo motivo proponiamo un'altra strada per calcolare l'espressione delle B-spline data dalla formula ricorrente integrale. In particolare utilizziamo lo

strumento delle funzioni di Transizione¹, rappresentate per questo caso specifico nelle figura 4.9 (per dettagli si rimanda a [BCR13]).

Anche in questo caso per effettuare i calcoli dell'espressione della B-spline, che

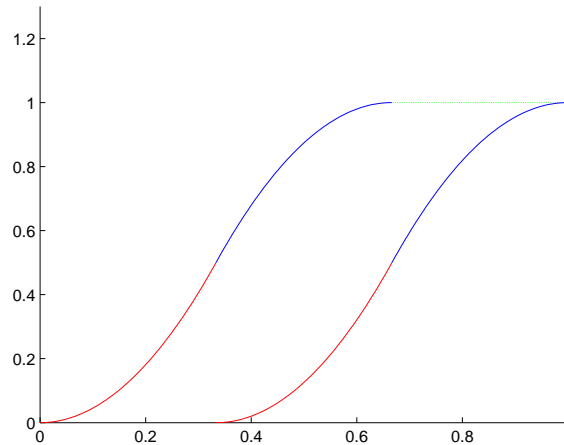


Figura 4.9: Grafico delle funzioni di Transizione trigonometriche di grado 2 definite sulla partizione nodale $\Delta = [0 \frac{1}{3} \frac{2}{3} 1]$, ottenuto utilizzando la funzione MATLAB `ct_fconfronto_g2` della libreria fornita.

consiste nel determinare due funzioni di Transizione e nel farne la differenza, ci affidiamo al calcolatore. In particolare utilizzando nuovamente la funzione MATLAB `ct_ftransizione_g2`, si ottiene:

- per $t_i \leq t < t_{i+1}$

$$N_{i,3}(t) = \frac{2 \sin(2t_{i+1} - 2t_{i+2}) - \sin(2t_i + 2t_{i+1} - 2t_{i+2} - 2t)}{2(\sin(2t_i - 2t_{i+1}) - \sin(2t_i - 2t_{i+2}) + \sin(2t_{i+1} - 2t_{i+2}))} + \frac{\sin(2t_i - 2t_{i+1} + 2t_{i+2} - 2t)}{2(\sin(2t_i - 2t_{i+1}) - \sin(2t_i - 2t_{i+2}) + \sin(2t_{i+1} - 2t_{i+2}))}$$

¹Lo strumento delle funzioni di Transizione si può utilizzare in generale ogni volta che si ha un ECT-spazio in cui è quindi garantita l'esistenza e l'unicità del problema di interpolazione alla Hermite.

- per $t_{i+1} \leq t < t_{i+2}$

$$\begin{aligned}
N_{i,3}(t) &= \frac{\cos(2t) \left(\frac{\sin(2t_i - 2t_{i+1} + 2t_{i+2})}{2} + \frac{\sin(2t_i - 2t_{i+1} + 2t_{i+2})}{2} \right)}{\sin(2t_i - 2t_{i+1}) - \sin(2t_i - 2t_{i+2}) + \sin(2t_{i+1} - 2t_{i+2})} \\
&+ \frac{\sin(2t_{i+1} - 2t_{i+2}) - \sin(2t_i - 2t_{i+2})}{\sin(2t_i - 2t_{i+1}) - \sin(2t_i - 2t_{i+2}) + \sin(2t_{i+1} - 2t_{i+2})} \\
&- \frac{\sin(2t_{i+2} - 2t_{i+3})}{\sin(2t_{i+1} - 2t_{i+2}) - \sin(2t_{i+1} - 2t_{i+3}) + \sin(2t_{i+2} - 2t_{i+3})} \\
&- \frac{\sin(2t_i - 2t_{i+1}) \cos(2t_{i+2} + 2t)}{2(\sin(2t_i - 2t_{i+1}) - \sin(2t_i - 2t_{i+2}) + \sin(2t_{i+1} - 2t_{i+2}))} \\
&- \frac{\sin(2t_{i+2} - 2t_{i+3}) \cos(2t_{i+1} + 2t)}{2(\sin(2t_{i+1} - 2t_{i+2}) - \sin(2t_{i+1} - 2t_{i+3}) + \sin(2t_{i+2} - 2t_{i+3}))} \\
&+ \frac{\cos(2t) \left(\frac{\sin(2t_{i+1} + 2t_{i+2} - 2t_{i+3})}{2} - \frac{\sin(2t_{i+1} - 2t_{i+2} + 2t_{i+3})}{2} \right)}{\sin(2t_{i+1} - 2t_{i+2}) - \sin(2t_{i+1} - 2t_{i+3}) + \sin(2t_{i+2} - 2t_{i+3})} \\
&+ \frac{\cos(2t_{i+2} - 2t) \sin(2t_i - 2t_{i+1})}{2(\sin(2t_i - 2t_{i+1}) - \sin(2t_i - 2t_{i+2}) + \sin(2t_{i+1} - 2t_{i+2}))} \\
&\frac{\cos(2t_{i+1} - 2t) \sin(2t_{i+2} - 2t_{i+3})}{2(\sin(2t_{i+1} - 2t_{i+2}) - \sin(2t_{i+1} - 2t_{i+3}) + \sin(2t_{i+2} - 2t_{i+3}))}
\end{aligned}$$

- per $t_{i+2} \leq t \leq t_{i+3}$

$$\begin{aligned}
N_{i,3}(t) &= - \frac{\sin(2t_{i+1} - 2t_{i+2} + 2t_{i+3} - t) - 2 \sin(2t_{i+1} - 2t_{i+2})}{2(\sin(2t_{i+1} - 2t_{i+2}) - \sin(2t_{i+1} - 2t_{i+3}) + \sin(2t_{i+2} - 2t_{i+3}))} \\
&- \frac{\sin(2t_{i+1} - 2t_{i+2} - 2t_{i+3} + 2t)}{2(\sin(2t_{i+1} - 2t_{i+2}) - \sin(2t_{i+1} - 2t_{i+3}) + \sin(2t_{i+2} - 2t_{i+3}))}.
\end{aligned}$$

Ricordando lo scopo dell'esercizio, rappresentiamo graficamente nella figura 4.10 la B-spline ottenuta con la formula ricorrente classica e la B-spline ottenuta utilizzando le funzioni di Transizione. Come si osserva, i risultati ottenuti sono equivalenti e questo è confermato considerando la funzione differenza. Analogamente a prima, un errore dell'ordine della precisione di macchina è solamente da imputare a errori di arrotondamento.

Alla luce di quanto appena visto, possiamo concludere che nel caso trigonometrico la formula ricorrente classica, la formula ricorrente integrale UE e le funzioni di Transizione danno lo stesso risultato.

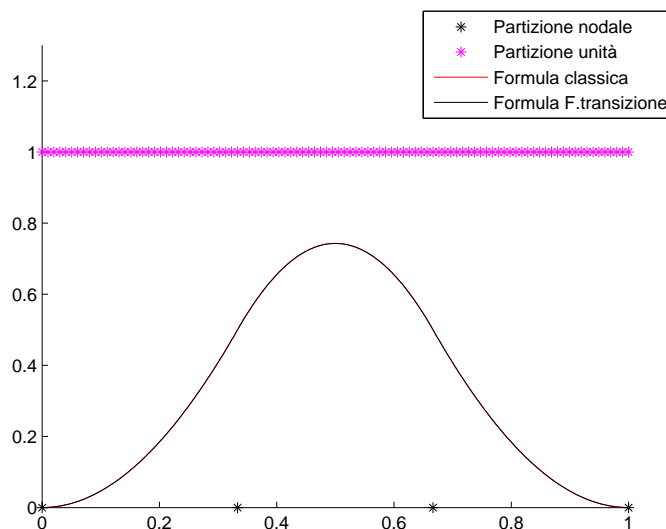


Figura 4.10: Grafico della B-spline trigonometrica di ordine 3 ottenuta con la formula ricorrente classica e di quella ottenuta con le funzioni di Transizione, definite sulla stessa partizione nodale $\Delta = [0 \frac{1}{3} \frac{2}{3} 1]$. Tale grafico è ottenuto utilizzando la funzione MATLAB `ct_confronto_g2` della libreria fornita.

Verifica 4.3. Le UE-spline contengono al loro interno le spline iperboliche, ottenute ponendo $\alpha < 0$ (in particolare $\alpha = -1$). Verifichiamo che nel caso iperbolico la relazione ricorrente integrale UE coincide con quella classica vista in dettaglio nel corollario 4.4 e nell'esempio 4.3. Ovviamente sapendo che la formula ricorrente integrale dà luogo a B-spline che soddisfano le proprietà di partizione dell'unità, aggiungiamo direttamente alla formula del corollario sopra citato la modifica vista per ottenere B-spline con somma 1 e poter confrontare quindi i due risultati. In particolare consideriamo il caso normalizzato di ordine 3 definito su una partizione nodale a nodi semplici.

Il primo passo di questa verifica, consiste nel calcolare l'espressione analitica di $N_{i,3}(t)$ derivante dalla relazione integrale UE, partendo dall'espressione di $N_{i,2}(t)$ vista nella proposizione 4.12. Si ha che

$$N_{i,3}(t) = \int_{-\infty}^t (\delta_{i,2} N_{i,2}(s) - \delta_{i+1,2} N_{i+1,2}(s)) ds$$

ove per definizione

$$\delta_{i,2} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} N_{i,2}(t) dt \right)^{-1}.$$

Svolgendo gli integrali si ottiene che $N_{i,3}(t)$, dove non nulla, ha la seguente espressione analitica

- per $t_i \leq t < t_{i+1}$

$$N_{i,3}(t) = \frac{(1 - \cosh(t - t_i)) \sinh(t_{i+2} - t_{i+1})}{\sinh(t_{i+2} - t_{i+1}) + \sinh(t_{i+1} - t_i) - \sinh(t_{i+2} - t_i)};$$

- per $t_{i+1} \leq t < t_{i+2}$

$$N_{i,3}(t) = \frac{-\sinh(t_{i+2}-t_i)+\sinh(t_{i+2}-t_{i+1})+\sinh(t_{i+1}-t_i)\cosh(t_{i+2}-t)}{\sinh(t_{i+2}-t_{i+1})+\sinh(t_{i+1}-t_i)-\sinh(t_{i+2}-t_i)} + \frac{\sinh(t_{i+3}-t_{i+2})(-1+\cosh(t-t_{i+1}))}{\sinh(t_{i+3}-t_{i+2})+\sinh(t_{i+2}-t_{i+1})-\sinh(t_{i+3}-t_{i+1})};$$

- per $t_{i+1} \leq t < t_{i+2}$

$$N_{i,3}(t) = \frac{-\sinh(t_{i+2}-t_i)+\sinh(t_{i+2}-t_{i+1})+\sinh(t_{i+1}-t_i)}{\sinh(t_{i+2}-t_{i+1})+\sinh(t_{i+1}-t_i)-\sinh(t_{i+2}-t_i)} + \frac{\sinh(t_{i+3}-t_{i+1})-\sinh(t_{i+3}-t_{i+2})-\cosh(t_{i+3}-t)\sinh(t_{i+2}-t_{i+1})}{\sinh(t_{i+3}-t_{i+2})+\sinh(t_{i+2}-t_{i+1})-\sinh(t_{i+3}-t_{i+1})}.$$

Per verificare che tale espressione è equivalente a quella trovata nell'esempio 4.3, sono necessari diversi calcoli laboriosi quindi a tale proposito si utilizza la funzione MATLAB `ct_confronto_g2`, come nel caso trigonometrico. Nella figura 4.11 sono rappresentate graficamente la B-spline ottenuta con la formula ricorrente classica e la B-spline ottenuta con la formula ricorrente integrale UE. Come si può vedere, i risultati ottenuti sono equivalenti. Per ulteriori conferme, si è considerata anche la funzione differenza che rivela un errore dell'ordine di 10^{-15} , solamente da imputare a errori di arrotondamento dovuti all'uso dell'aritmetica finita.

Come nel caso trigonometrico, i calcoli necessari per applicare la formula ricorrente integrale sono complicati ed non stabili dal punto di vista computazionale. Per questo motivo proponiamo anche in questa verifica, l'utilizzo

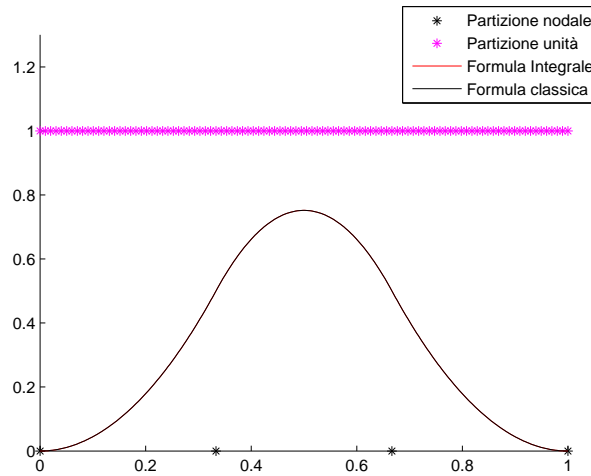


Figura 4.11: Grafico della B-spline iperbolica di ordine 3 ottenuta con la formula ricorrente classica e di quella ottenuta con la formula ricorrente integrale UE, entrambe definite sulla partizione nodale $\Delta = [0 \frac{1}{3} \frac{2}{3} 1]$. Tale grafico è ottenuto utilizzando la funzione MATLAB `ct_confronto_g2` della libreria fornita.

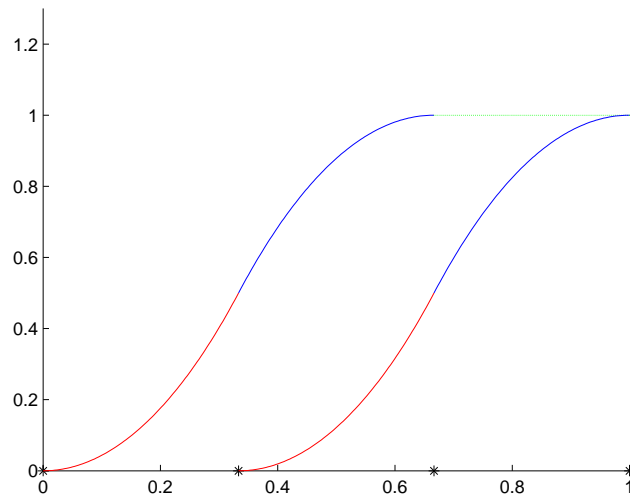


Figura 4.12: Grafico delle funzioni di Transizione iperboliche di grado 2 definite sulla partizione nodale $\Delta = [0 \frac{1}{3} \frac{2}{3} 1]$, ottenuto utilizzando la funzione MATLAB `ct_fconfronto_g2` della libreria fornita.

delle funzioni di Transizione, rappresentate per questo caso specifico nelle figura 4.12 (per dettagli si rimanda a [BCR13]). Utilizziamo nuovamente la funzione MATLAB `ct_ftransizione_g2` per calcolare l'espressione analitica della B-spline, vista come differenza di funzioni di Transizione. Riportiamo di seguito il risultato ottenuto.

- per $t_i \leq t < t_{i+1}$

$$N_{i,3}(t) = \frac{2 \sinh(2t_{i+1}-2t_{i+2}) - \sinh(2t_i+2t_{i+1}-2t_{i+2}-2t)}{2(\sinh(2t_i-2t_{i+1}) - \sinh(2t_i-2t_{i+2}) + \sinh(2t_{i+1}-2t_{i+2}))} + \frac{\sinh(2t_i-2t_{i+1}+2t_{i+2}-2t)}{2(\sinh(2t_i-2t_{i+1}) - \sinh(2t_i-2t_{i+2}) + \sinh(2t_{i+1}-2t_{i+2}))}$$

- per $t_{i+1} \leq t < t_{i+2}$

$$N_{i,3}(t) = \frac{\cosh(2t) \left(\frac{\sinh(2t_i-2t_{i+1}+2t_{i+2})}{2} + \frac{\sinh(2t_i-2t_{i+1}+2t_{i+2})}{2} \right)}{\sinh(2t_i-2t_{i+1}) - \sinh(2t_i-2t_{i+2}) + \sinh(2t_{i+1}-2t_{i+2})} - \frac{\sinh(2t_{i+1}-2t_{i+2}) - \sinh(2t_i-2t_{i+2})}{\sinh(2t_i-2t_{i+1}) - \sinh(2t_i-2t_{i+2}) + \sinh(2t_{i+1}-2t_{i+2})} - \frac{\sinh(2t_{i+2}-2t_{i+3})}{\sinh(2t_{i+1}-2t_{i+2}) - \sinh(2t_{i+1}-2t_{i+3}) + \sinh(2t_{i+2}-2t_{i+3})} - \frac{\sinh(2t_i-2t_{i+1}) \cosh(2t_{i+2}+2t)}{2(\sinh(2t_i-2t_{i+1}) - \sinh(2t_i-2t_{i+2}) + \sinh(2t_{i+1}-2t_{i+2}))} - \frac{\sinh(2t_{i+2}-2t_{i+3}) \cosh(2t_{i+1}+2t)}{2(\sinh(2t_{i+1}-2t_{i+2}) - \sinh(2t_{i+1}-2t_{i+3}) + \sinh(2t_{i+2}-2t_{i+3}))} + \frac{\cosh(2t) \left(\frac{\sinh(2t_{i+1}+2t_{i+2}-2t_{i+3})}{2} - \frac{\sinh(2t_{i+1}-2t_{i+2}+2t_{i+3})}{2} \right)}{\sinh(2t_{i+1}-2t_{i+2}) - \sinh(2t_{i+1}-2t_{i+3}) + \sinh(2t_{i+2}-2t_{i+3})} + \frac{\cosh(2t_{i+2}-2t) \sinh(2t_i-2t_{i+1})}{2(\sinh(2t_i-2t_{i+1}) - \sinh(2t_i-2t_{i+2}) + \sinh(2t_{i+1}-2t_{i+2}))} + \frac{\cosh(2t_{i+1}-2t) \sinh(2t_{i+2}-2t_{i+3})}{2(\sinh(2t_{i+1}-2t_{i+2}) - \sinh(2t_{i+1}-2t_{i+3}) + \sinh(2t_{i+2}-2t_{i+3}))}$$

- per $t_{i+2} \leq t \leq t_{i+3}$

$$N_{i,3}(t) = -\frac{\sinh(2t_{i+1}-2t_{i+2}+2t_{i+3}-t) - 2 \sinh(2t_{i+1}-2t_{i+2})}{2(\sinh(2t_{i+1}-2t_{i+2}) - \sinh(2t_{i+1}-2t_{i+3}) + \sinh(2t_{i+2}-2t_{i+3}))} - \frac{\sinh(2t_{i+1}-2t_{i+2}-2t_{i+3}+2t)}{2(\sinh(2t_{i+1}-2t_{i+2}) - \sinh(2t_{i+1}-2t_{i+3}) + \sinh(2t_{i+2}-2t_{i+3}))}$$

Ricordando lo scopo dell'esercizio, rappresentiamo graficamente nella figura 4.13 la B-spline ottenuta con la formula ricorrente classica e la B-spline ottenuta utilizzando le funzioni di Transizione. Come si osserva, i risultati ottenuti sono equivalenti e questo è confermato considerando la funzione differenza. Analogamente a prima, un errore dell'ordine di 10^{-14} è solamente da imputare a errori di arrotondamento.

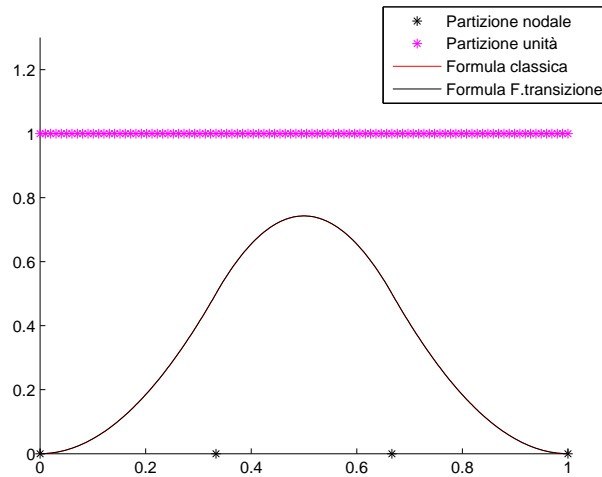


Figura 4.13: Grafico della B-spline iperbolica di ordine 3 ottenuta con la formula ricorrente classica e di quella ottenuta con le funzioni di Transizione, definite sulla stessa partizione nodale $\Delta = [0 \frac{1}{3} \frac{2}{3} 1]$. Tale grafico è ottenuto utilizzando la funzione MATLAB `ct_confronto_g2` della libreria fornita.

Alla luce di quanto appena visto, possiamo concludere che nel caso iperbolico, come in quello trigonometrico, la formula ricorrente classica, la formula ricorrente integrale UE e le funzioni di Transizione danno lo stesso risultato.

Capitolo 5

Knot-Insertion

L'algoritmo di Knot-Insertion (KI) è molto utile sia nelle applicazioni, sia a livello teorico come strumento per dimostrare proprietà fondamentali nell'ambito della modellazione geometrica.

In particolare nelle prime tre sezioni del capitolo si analizzano diversi metodi per costruire esplicitamente tale algoritmo, applicabili a seconda del contesto in cui si sta lavorando. Più nel dettaglio, nella sezione 5.1 si illustra un metodo del tutto generale considerando KI come caso particolare di un problema di cambio di base. Inoltre tenendo presente sempre lo scopo dell'elaborato, si considera nel dettaglio il caso polinomiale, trigonometrico e iperbolico, proponendo anche un esempio di applicazione. Nella sezione 5.2 è invece descritto un procedimento meno generale rispetto al precedente, legato all'uso delle formule ricorrenti per calcolare le funzioni base B-spline. Infine nella sezione 5.3 è proposto un metodo basato sulla definizione di KI, applicabile solo nel caso in cui si fissi lo spazio spline preso in esame.

La sezione 5.4, mette in luce un punto di vista ancora differente. Infatti, si illustra un metodo del tutto generale applicabile a tutte le spline che possono essere catalogate come UE-spline.

Si conclude la dissertazione sul Knot-Insertion, dimostrando la proprietà di Variation Diminishing per tutti gli spazi spline in cui esiste tale strumento e la totaly positive della matrice di collocazione della base spline, aggiungendo l'ipotesi di possedere una base a supporto locale, positiva e con la proprietà di partizione dell'unità.

Definizione 5.1. Sia $\{N_{i,m}(x)\}$ l'insieme delle B-spline associate allo spazio spline $S(\mathcal{U}_m, M, \Delta)$. Il Knot-Insertion consiste nell'inserire uno o più nodi nuovi nella partizione nodale Δ in modo da ottenere un nuovo insieme di B-spline con cui rappresentare in maniera differente lo stesso oggetto. In particolare tale strumento esiste se le B-spline $\{N_{i,m}(x)\}$ possono essere trovate come combinazione non negativa delle nuove B-spline $\{\hat{N}_{i,m}(x)\}$ ottenute considerando lo spazio raffinato $S(\mathcal{U}_m, \hat{M}, \hat{\Delta})$, ossia se si può scrivere $\forall i$

$$N_{i,m}(x) = a_i \hat{N}_{i,m}(x) + b_{i+1} \hat{N}_{i+1,m}(x) \quad a_i, b_{i+1} \geq 0. \quad (5.1)$$

Osservazione 15. L'algoritmo di Knot-Insertion nelle applicazioni, si applica direttamente ai coefficienti che descrivono la spline presa in esame.

In particolare, mantenendo la notazione della definizione precedente, consideriamo la spline $s(x) \in S(\mathcal{U}_m, M, \Delta)$. Effettuiamo KI costruendo un nuovo spazio spline $S(\mathcal{U}_m, \hat{M}, \hat{\Delta})$ definito sulla partizione nodale raffinata $\hat{\Delta}$. Per costruzione si ha che $S(\mathcal{U}_m, M, \Delta) \subset S(\mathcal{U}_m, \hat{M}, \hat{\Delta})$, quindi la spline $s(x)$ può essere rappresentata in due differenti modi:

$$\begin{cases} s(x) = \sum_i c_i N_{i,m}(x) \\ s(x) = \sum_i \hat{c}_i \hat{N}_{i,m}(x). \end{cases}$$

Attraverso queste osservazioni, possiamo dare facilmente una differente formulazione dell'algoritmo KI in modo da legare i coefficienti $\{c_i\}$ e $\{\hat{c}_i\}$. In particolare sostituendo 5.1 nella prima equazione del sistema, si ottiene una relazione di questo tipo

$$\hat{c}_i = \lambda_i c_i + \mu_i c_{i-1} \quad \lambda_i, \mu_i \geq 0. \quad (5.2)$$

che chiameremo algoritmo di Knot-Insertion sui coefficienti.

5.1 Knot-Insertion come conversione di base

In questa sezione analizziamo un primo modo per esplicitare l'algoritmo di Knot-Insertion sui coefficienti. In particolare sottolineiamo che attraverso

questo punto di vista, la tecnica KI si slega dalla definizione e assume una valenza più generale.

L'idea cardine è che il processo di Knot-Insertion può essere visto come caso particolare di un problema di trasformazione tra due basi costruite su differenti partizioni nodali ma aventi lo stesso grado, dove la matrice del cambio di base è bidiagonale e ad elementi positivi.

Senza perdere di generalità analizziamo questo procedimento nel dettaglio considerando un ben preciso spazio spline polinomiale.

Dato lo spazio $S(\mathbb{P}_3, M, \Delta)$ di dimensione $3 + K$, chiamiamo $\{N_{i,3}\}_{i=1,\dots,3+K}$ le corrispondenti B-spline associate alla partizione nodale di partenza $\Delta = \{t_i\}_i$. Costruiamo una nuova partizione nodale $\hat{\Delta} = \Delta \cup \{\hat{t}\} = \{\hat{t}_i\}$ inserendo un nuovo nodo nell'intervallo $t_l \leq \hat{t} < t_{l+1}$ e chiamiamo \hat{M} il nuovo vettore delle molteplicità. Si ottiene quindi un nuovo spazio spline $S(\mathbb{P}_3, \hat{M}, \hat{\Delta})$ in cui le B-spline corrispondenti saranno denotate con $\{\hat{N}_{i,3}\}_{i=1,\dots,3+K+1}$. Ricalcando i passaggi dell'osservazione 15, è chiaro che $S(\mathbb{P}_3, M, \Delta) \subset S(\mathbb{P}_3, \hat{M}, \hat{\Delta})$. Di conseguenza se consideriamo $s(x) \in S(\mathbb{P}_3, M, \Delta)$ si ha che $s(x) \in S(\mathbb{P}_3, \hat{M}, \hat{\Delta})$ e possiamo quindi scrivere la spline $s(x)$ attraverso due differenti rappresentazioni

$$\begin{cases} s(x) = \sum_{i=1}^{3+K} c_i N_{i,3}(x) \\ s(x) = \sum_{i=1}^{4+K} \hat{c}_i \hat{N}_{i,3}(x). \end{cases}$$

Si osserva che avendo inserito $\hat{t} \in [t_l, t_{l+1})$, solo le B-spline che hanno supporto in questo intervallo verranno modificate. In particolare quindi solo le B-spline $N_{l-2,3}, N_{l-1,3}, N_{l,3}$ risentono di questo cambiamento. Chiamiamo \hat{S} la matrice del cambio di base che converte i polinomi della base $\{N_{i,3}\}$ definiti in $[t_l, t_{l+1})$, nei polinomi della base $\{\hat{N}_{i,3}\}$ definiti in $[\hat{t}_l, \hat{t}_{l+1})$.

$$(N_{l-2,3}, N_{l-1,3}, N_{l,3}) = (\hat{N}_{l-2,3}, \hat{N}_{l-1,3}, \hat{N}_{l,3}) \cdot \hat{S}.$$

Analogamente chiamiamo \bar{S} la matrice del cambio di base che converte i polinomi della base $\{N_{i,3}\}$ definiti in $[t_l, t_{l+1})$, nei polinomi della base $\{\hat{N}_{i,3}\}$ definiti in $[\hat{t}_{l+1}, \hat{t}_{l+2})$.

$$(N_{l-2,3}, N_{l-1,3}, N_{l,3}) = (\hat{N}_{l-1,3}, \hat{N}_{l,3}, \hat{N}_{l+1,3}) \cdot \bar{S}.$$

Tramite queste uguaglianze possiamo scrivere:

- se $x \in [t_l, \hat{t})$

$$\begin{aligned}
 s(x) &= (N_{l-2,3}, N_{l-1,3}, N_{l,3}) \cdot \begin{pmatrix} c_{l-2} \\ c_{l-1} \\ c_l \end{pmatrix} \\
 &= (\hat{N}_{l-2,3}, \hat{N}_{l-1,3}, \hat{N}_{l,3}) \cdot \hat{S} \cdot \begin{pmatrix} c_{l-2} \\ c_{l-1} \\ c_l \end{pmatrix} \\
 &= (\hat{N}_{l-2,3}, \hat{N}_{l-1,3}, \hat{N}_{l,3}) \cdot \begin{pmatrix} \hat{c}_{l-2} \\ \hat{c}_{l-1} \\ \hat{c}_l \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

- se $x \in [\hat{t}, t_{l+1},)$

$$\begin{aligned}
 s(x) &= (N_{l-2,3}, N_{l-1,3}, N_{l,3}) \cdot \begin{pmatrix} c_{l-2} \\ c_{l-1} \\ c_l \end{pmatrix} \\
 &= (\hat{N}_{l-1,3}, \hat{N}_{l,3}, \hat{N}_{l+1,3}) \cdot \bar{S} \cdot \begin{pmatrix} c_{l-2} \\ c_{l-1} \\ c_l \end{pmatrix} \\
 &= (\hat{N}_{l-1,3}, \hat{N}_{l,3}, \hat{N}_{l+1,3}) \cdot \begin{pmatrix} \hat{c}_{l-1} \\ \hat{c}_l \\ \hat{c}_{l+1} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Ricordando che $s(x)$ deve essere C^1 nel nodo \hat{t} , si ha che le B-spline $\hat{N}_{l-1,3}, \hat{N}_{l,3}$ sono C^1 in \hat{t} . Imponendo queste condizioni si ottiene un sistema 2×2 omogeneo e non singolare, che ha come unica soluzione quella nulla. Si ha di conseguenza che

$$\begin{aligned}
 \hat{c}_{l-1} &= \hat{c}_{l-1} \\
 \hat{c}_l &= \hat{c}_l
 \end{aligned}$$

Quindi possiamo concludere che la seconda e la terza riga della matrice \hat{S} coincidono rispettivamente con la prima e la seconda riga della matrice \bar{S} . Ne

segue che R , la matrice 4×3 costituita da \hat{S} più l'ultima riga di \bar{S} , è la matrice del cambio di base B-spline. Formalmente possiamo scrivere per $x \in [t_l, t_{l+1})$

$$\begin{aligned} s(x) &= (N_{l-2,3}, N_{l-1,3}, N_{l,3}) \cdot \begin{pmatrix} c_{l-2} \\ c_{l-1} \\ c_l \end{pmatrix} \\ &= (\hat{N}_{l-2,3}, \hat{N}_{l-1,3}, \hat{N}_{l,3}, \hat{N}_{l+1,3}) \cdot R \cdot \begin{pmatrix} c_{l-2} \\ c_{l-1} \\ c_l \end{pmatrix} \\ &= (\hat{N}_{l-2,3}, \hat{N}_{l-1,3}, \hat{N}_{l,3}, \hat{N}_{l+1,3}) \cdot \begin{pmatrix} \hat{c}_{l-2} \\ \hat{c}_{l-1} \\ \hat{c}_l \\ \hat{c}_{l+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Da queste uguaglianze possiamo estrarre esplicitamente la relazione 5.2 che vige tra i nuovi e i vecchi coefficienti delle due diverse rappresentazioni

$$\begin{pmatrix} \hat{c}_{l-2} \\ \hat{c}_{l-1} \\ \hat{c}_l \\ \hat{c}_{l+1} \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} c_{l-2} \\ c_{l-1} \\ c_l \end{pmatrix}.$$

Per poter affermare di aver trovato un'espressione esplicita per l'algoritmo di Knot-Insertion, è necessario che la matrice R sia bidiagonale e ad elementi positivi in modo da poter concludere che i nuovi coefficienti sono una combinazione non negativa dei vecchi. Questo per il caso polinomiale è banale ma in generale è proprio il discriminante per comprendere in quali spazi spline è effettivamente possibile trovare l'algoritmo di Knot-Insertion.

5.1.1 Knot-Insertion nel caso polinomiale, trigonometrico e iperbolico

Lo scopo di questo elaborato è mettere in luce gli spazi spline utili nella modellazione geometrica e mostrare gli strumenti che posso essere utilizza-

ti. A tale scopo seguendo il ragionamento teorico, riportiamo esplicitamente l'espressione dell'algoritmo di KI nel caso polinomiale, trigonometrico e iperbolico.

Dato lo spazio spline $S(\mathcal{U}_m, M, \Delta)$, mantenendo la notazione precedente, si denota con $\{N_{i,m}\}$ la base B-spline definita sulla partizione nodale $\Delta = \{t_i\}$. Effettuiamo Knot-Insertion inserendo un nuovo nodo \hat{t} in Δ precisamente $t_l < \hat{t} \leq t_{l+1}$. Chiamiamo $\hat{\Delta} = \{\hat{t}_i\}$ la partizione raffinata così ottenuta e $\{\hat{N}_{i,m}\}$ la rispettiva base B-spline.

L'algoritmo di KI nel caso polinomiale, trigonometrico e iperbolico è dato da

$$N_{i,m}(x) = \begin{cases} \hat{N}_{i,m} & i \leq l - m \\ a_i \hat{N}_{i,m}(x) + b_{i+1} \hat{N}_{i+1,m}(x) & l - m + 1 \leq i \leq l \\ \hat{N}_{i+1,m}(x) & i \geq l + 1 \end{cases}$$

dove i coefficienti sono

- nel caso polinomiale:

$$a_i = \frac{\hat{t} - \hat{t}_i}{\hat{t}_{i+m} - \hat{t}_i}$$

$$b_{i+1} = \frac{\hat{t}_{i+m+1} - \hat{t}}{\hat{t}_{i+m+1} - \hat{t}_{i+1}}$$

- nel caso trigonometrico:

$$a_i = \frac{\sin(\hat{t} - \hat{t}_i)}{\sin(\hat{t}_{i+m} - \hat{t}_i)}$$

$$b_{i+1} = \frac{\sin(\hat{t}_{i+m+1} - \hat{t})}{\sin(\hat{t}_{i+m+1} - \hat{t}_{i+1})}$$

- nel caso iperbolico:

$$a_i = \frac{\sinh(\hat{t} - \hat{t}_i)}{\sinh(\hat{t}_{i+m} - \hat{t}_i)}$$

$$b_{i+1} = \frac{\sinh(\hat{t}_{i+m+1} - \hat{t})}{\sinh(\hat{t}_{i+m+1} - \hat{t}_{i+1})}$$

In questo modo abbiamo esplicitato la relazione che vige tra la base B-spline riferita alla partizione nodale di partenza e quella riferita alla partizione nodale raffinata. Tuttavia ricordando l'osservazione 15, quando si utilizza l'algoritmo di KI nelle applicazioni numeriche, si applica direttamente ai coefficienti che descrivono la spline presa in esame. Esplicitiamo a tale proposito, l'algoritmo di Knot-Insertion sui coefficienti per il caso polinomiale, trigonometrico e iperbolico. Si ha

$$\hat{c}_i = \begin{cases} c_i & i \leq l - m + 1 \\ a_i c_i + b_i c_{i-1} & l - m + 2 \leq i \leq l \\ c_{i-1} & i \geq l + 1 \end{cases} \quad (5.3)$$

Osservazione 16. Nel caso polinomiale si ha che i coefficienti $\{\hat{c}_i\}$ riferiti alla partizione nodale raffinata, sono sempre combinazione convessa dei coefficienti $\{c_i\}$ riferiti alla partizione nodale iniziale, ossia si ha che $a_i + b_i = 1$. Come descritto nel dettaglio nell'esempio numerico sottostante, questa caratteristica risulta essere essenziale nell'ambito della modellazione geometrica ma non è soddisfatta per le spline trigonometriche e iperboliche.

5.1.2 Esempio numerico

Analizziamo un esempio numerico per avere un'idea più concreta delle caratteristiche dell'algoritmo di Knot-Insertion necessarie nell'ambito della modellazione geometrica. In particolare consideriamo gli spazi spline polinomiali, trigonometrici e iperbolici.

Esempio 5.1. Utilizziamo la funzione MATLAB `ct_pmouseVD_KI` della libreria fornita, per mettere in luce i pregi e i difetti dell'algoritmo di Knot-Insertion degli spazi spline polinomiali, trigonometrici e iperboliche nell'ambito della modellazione geometrica. In particolare tale funzione, permette di definire in maniera interattiva i coefficienti di una curva, costruire la rispettiva poligonale di controllo e la curva derivante. Inoltre, permette di effettuare Knot-Insertion di

uno o più nodi e di visualizzare graficamente i cambiamenti. Infine, la funzione MATLAB rappresenta graficamente le funzioni base B-spline prima e dopo l'inserzione.

Consideriamo come primo caso, lo spazio spline polinomiale di ordine 3 e dimensione 6. Nella figura 5.1 è rappresentata in verde la curva derivante dalla scelta dei punti plottati in blu e definita sulla partizione nodale $\Delta = \{0 \ 0 \ 0 \ 0.25 \ 0.50 \ 0.75 \ 1 \ 1 \ 1\}$. Effettuiamo ora Knot-Insertion, inserendo nella

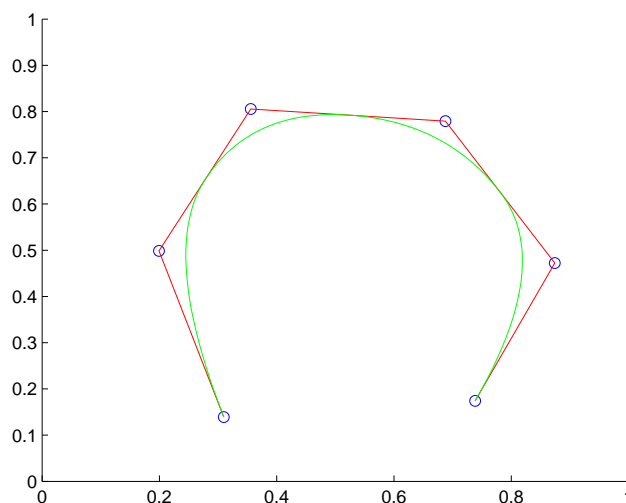


Figura 5.1: Grafico di una curva costruita a partire da punti di controllo inseriti in maniera interattiva, definita su uno spazio spline polinomiale di ordine 3 e dimensione 6. In particolare per ottenere questa figura, si è utilizzata la funzione MATLAB `ct_pmouseVD_KI`.

partizione Δ il nodo 0.3 e rappresentiamo il risultato ottenuto nella figura 5.2. Si osserva che i nuovi punti di controllo, che rappresentano i coefficienti della combinazione lineare che descrive la curva rispetto alla base raffinata, appartengono al segmento che congiunge due punti di controllo dati inizialmente. Possiamo quindi affermare che i coefficienti riferiti alla partizione raffinata sono una combinazione convessa dei coefficienti relativi alla partizione iniziale. Infatti questo si può dimostrare anche a livello teorico, osservando che nel caso polinomiale i coefficienti a_i e b_i della relazione 5.3 soddisfano la condizione

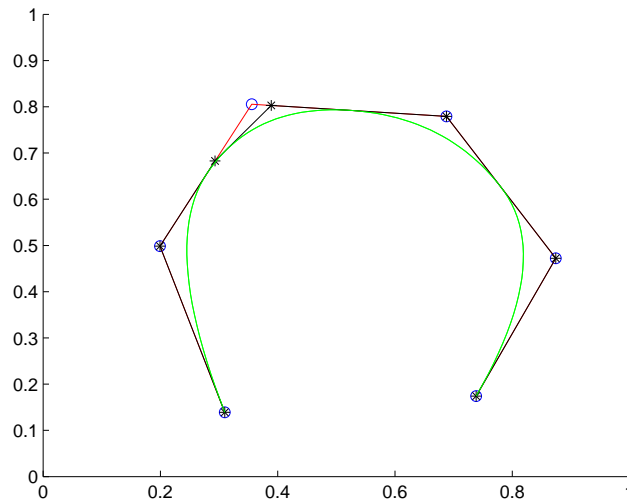


Figura 5.2: Knot-Insertion di un nodo su una curva costruita a partire da punti di controllo inseriti in maniera interattiva, definita su uno spazio spline polinomiale di ordine 3 e dimensione 6. In particolare per ottenere questa figura, si è utilizzata la funzione MATLAB `ct_pmouseVD_KI`.

$a_i + b_i = 1$. Questa caratteristica è essenziale nell'ambito della modellazione geometrica perchè permette di avere importanti proprietà di approssimazione di forma.

Attraverso ulteriori verifiche, abbiamo osservato che tuttavia nel caso trigonometrico e iperbolico questa proprietà non è soddisfatta. Consideriamo ad esempio lo spazio spline trigonometrico di ordine 3 e dimensione 6. Partendo dalla curva ottenuta dalla scelta di determinati punti di controllo, rappresentata graficamente nella figura 5.3, effettuiamo Knot-Insertion del nodo 0.65 nella partizione nodale di partenza $\Delta = \{0 \ 0 \ 0 \ 0.25 \ 0.50 \ 0.75 \ 1 \ 1 \ 1\}$. I risultati ottenuti, rappresentati nella figura 5.4, mostrano come preannunciato come i nuovi punti di controllo non appartengano alla poligonale di controllo riferita alla partizione iniziale. In modo analogo, si ottengono le figure inerenti al caso iperbolico di ordine 3 e dimensione 6. In particolare la figura 5.5 mostra la situazione prima dell'inserzione, mentre la figura 5.6 descrive i risultati ottenuti dopo aver effettuato Knot-Insertion del nodo 0.65.

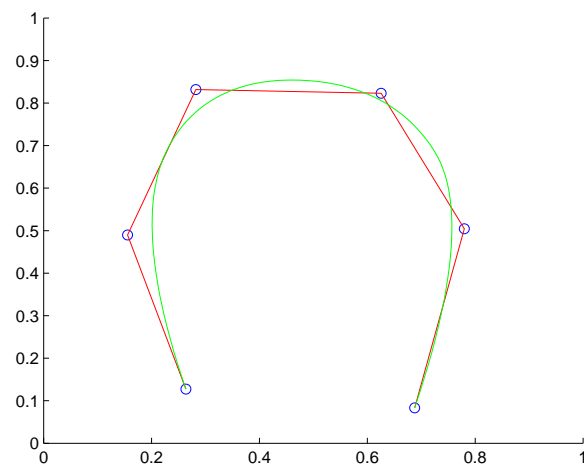


Figura 5.3: Grafico di una curva costruita a partire da punti di controllo inseriti in maniera interattiva, definita su uno spazio spline trigonometrico di ordine 3 e dimensione 6. In particolare per ottenere questa figura, si è utilizzata la funzione MATLAB `ct_pmouseVD_KI`.

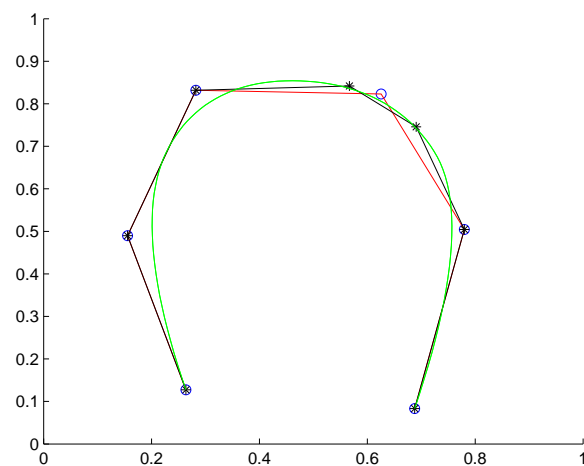


Figura 5.4: Knot-Insertion di un nodo su una curva costruita a partire da punti di controllo inseriti in maniera interattiva, definita su uno spazio spline trigonometrico di ordine 3 e dimensione 6. In particolare per ottenere questa figura, si è utilizzata la funzione MATLAB `ct_pmouseVD_KI`.

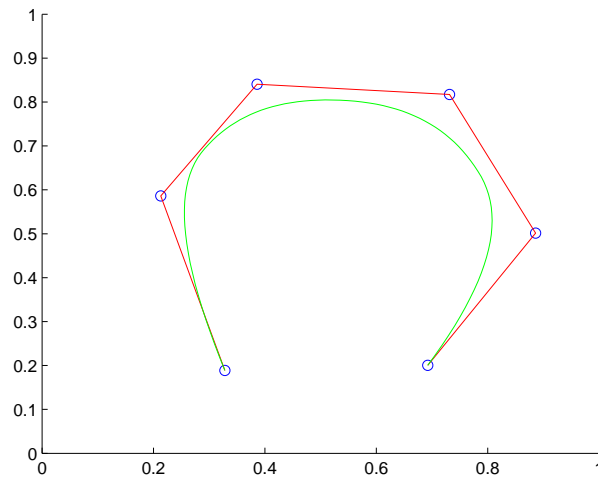


Figura 5.5: Grafico di una curva costruita a partire da punti di controllo inseriti in maniera interattiva, definita su uno spazio spline iperbolico di ordine 3 e dimensione 6. In particolare per ottenere questa figura, si è utilizzata la funzione MATLAB `ct_pmouseVD_KI`.

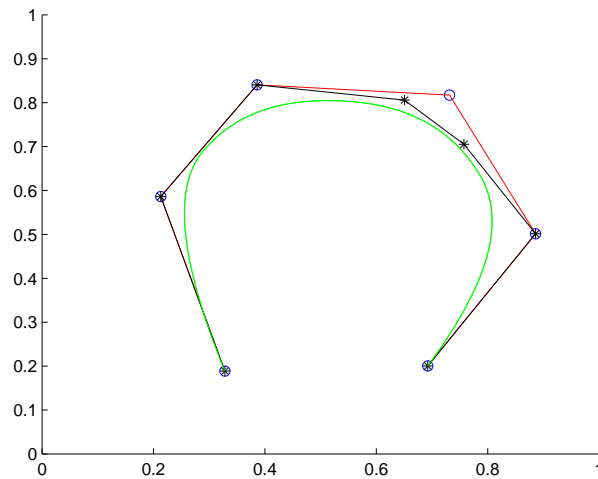


Figura 5.6: Knot-Insertion di un nodo su una curva costruita a partire da punti di controllo inseriti in maniera interattiva, definita su uno spazio spline iperbolico di ordine 3 e dimensione 6. In particolare per ottenere questa figura, si è utilizzata la funzione MATLAB `ct_pmouseVD_KI`.

Questo esempio mostra quindi, che pur avendo trovato esplicitamente un algoritmo di Knot-Insertion, non sempre questo è utilizzabile nell'ambito del design geometrico.

5.2 Knot-Insertion derivante da formule ricorrenti

Negli spazi in cui esiste una formula ricorrente per calcolare le funzioni base B-spline e in cui sappiamo esistere la relazione che permette di effettuare Knot-Insertion, è possibile applicare il seguente procedimento teorico per ricavare in maniera differente la formulazione classica dell'algoritmo KI. In particolare tra gli spazi spline che abbiamo analizzato in questo elaborato, è sicuramente applicabile al caso polinomiale, trigonometrico e iperbolico. Possiamo affermare che questo metodo è effettivamente molto utile, ma nel caso in cui non esista una formula ricorrente, è bene sottolineare che non è lecito concludere che il processo di Knot-Insertion non sia possibile. In particolare in questa sezione analizziamo nel dettaglio il caso polinomiale in cui le funzioni B-spline normalizzate possono essere ricavate in maniera ricorrente attraverso la formula vista nel corollario 4.2.

Consideriamo due partizioni nodali arbitrarie

$$\begin{aligned}\mathbf{t}_k &= \{t_{k+j-m+1}, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots, t_{k+j+1}\} \\ \mathbf{u}_l &= \{u_{l+i-m+1}, \dots, u_l, u_{l+1}, \dots, u_{l+i+1}\}.\end{aligned}$$

Per ogni $j = 0, \dots, m - 1$ denotiamo le m funzioni base B-spline normalizzate di ordine m sul singolo intervallino $[t_k, t_{k+1})$, con $N_{k+j-m+1, m, \mathbf{t}_k}(x)$. In maniera analoga $N_{l+i-m+1, m, \mathbf{u}_l}(x)$ per $i = 0, \dots, m - 1$ rappresentano le m funzioni base B-spline normalizzate di ordine m sul singolo intervallino $[u_l, u_{l+1})$.

Come si è spiegato in precedenza l'idea chiave che sta alla base del Knot-Insertion è quella di esprimere le funzioni base B-spline di una partizione nodale come combinazione lineare delle funzioni base B-spline dell'altra partizione

nodale. Lo scopo è quindi ricavare un'espressione di questo tipo

$$N_{k+j-m+1,m,\mathbf{t}_k}(x) = \sum_{i=0}^{m-1} s_{i,j}^{\mathbf{t}_k,\mathbf{u}_l,m} N_{l+i-m+1,m,\mathbf{u}_j}(x) \quad \forall j = 0, \dots, m-1. \quad (5.4)$$

che in forma matriciale si può riscrivere

$$[N_{k-m+1,m,\mathbf{t}_k}(x), \dots, N_{k,m,\mathbf{t}_k}(x)] = [N_{l-m+1,m,\mathbf{u}_l}(x), \dots, N_{l,m,\mathbf{u}_l}(x)] S^{\mathbf{t}_k,\mathbf{u}_l,m}$$

con $S^{\mathbf{t}_k,\mathbf{u}_l,m} = \{s_{i,j}^{\mathbf{t}_k,\mathbf{u}_l,m}\}_{i,j=0,\dots,m-1}$.

Visto che la relazione precedente è univocamente determinata dagli elementi $s_{i,j}^{\mathbf{t}_k,\mathbf{u}_l,m}$ della matrice del cambio di base, cerchiamo di ottenerne l'espressione utilizzando le relazioni ricorrenti viste per le B-spline normalizzate.

In particolare sostituendo l'espressione 5.4 nella formula ricorrente applicata a $N_{k+j-m+1,m,\mathbf{t}_k}$ ossia in

$$N_{k+j-m+1,m,\mathbf{t}_k} = \frac{x - t_{k+j-m+1}}{t_{k+j} - t_{k+j-m+1}} N_{k+j-m+1,m-1,\mathbf{t}_k} + \frac{t_{k+j+1} - x}{t_{k+j+1} - t_{k+j-m+2}} N_{k+j-m+2,m-1,\mathbf{t}_k} \quad (5.5)$$

si ottiene la seguente relazione

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m-1} s_{i,j}^{\mathbf{t}_k,\mathbf{u}_l,m} N_{l+i-m+1,m,\mathbf{u}_l}(x) = \\ \sum_{i=0}^{m-2} \left[\frac{x - t_{k+j-m+1}}{t_{k+j} - t_{k+j-m+1}} s_{i,j-1}^{\mathbf{t}_k,\mathbf{u}_l,m-1} + \frac{t_{k+j+1} - x}{t_{k+j+1} - t_{k+j-m+2}} s_{i,j}^{\mathbf{t}_k,\mathbf{u}_l,m-1} \right] N_{l+i-m+2,m-1,\mathbf{u}_l}(x) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Analogamente sostituiamo ora nel secondo membro di 5.6 la formula ricorrente applicata a $N_{l+i-m+1,m,\mathbf{u}_l}$ ossia

$$N_{l+i-m+1,m,\mathbf{u}_l} = \frac{x - u_{l+i-m+1}}{u_{l+i} - u_{l+i-m+1}} N_{l+i-m+1,m-1,\mathbf{u}_l} + \frac{u_{l+i+1} - x}{u_{l+i+1} - u_{l+i-m+2}} N_{l+i-m+2,m-1,\mathbf{u}_l} \quad (5.7)$$

Si ricava quindi, tramite alcune piccole accortezze, la seguente uguaglianza

$$\sum_{i=0}^{m-2} \left[s_{i+1,j}^{\mathbf{t}_k, \mathbf{u}_l, m} \frac{x - u_{l+i-m+2}}{u_{l+i+1} - u_{l+i-m+2}} + s_{i,j}^{\mathbf{t}_k, \mathbf{u}_l, m} \frac{u_{l+i+1} - x}{u_{l+i+1} - u_{l+i-m+2}} \right] N_{l+i-m+2, m-1, \mathbf{u}_l}(x) =$$

$$\sum_{i=0}^{m-2} \left[\frac{x - t_{k+j-m+1}}{t_{k+j} - t_{k+j-m+1}} s_{i,j-1}^{\mathbf{t}_k, \mathbf{u}_l, m-1} + \frac{t_{k+j+1} - x}{t_{k+j+1} - t_{k+j-m+2}} s_{i,j}^{\mathbf{t}_k, \mathbf{u}_l, m-1} \right] N_{l+i-m+2, m-1, \mathbf{u}_l}(x)$$

da cui possiamo concludere che $\forall i = 0, \dots, m-2$ e $\forall j = 0, \dots, m-1$ si ha

$$s_{i+1,j}^{\mathbf{t}_k, \mathbf{u}_l, m} \frac{x - u_{l+i-m+2}}{u_{l+i+1} - u_{l+i-m+2}} + s_{i,j}^{\mathbf{t}_k, \mathbf{u}_l, m} \frac{u_{l+i+1} - x}{u_{l+i+1} - u_{l+i-m+2}} =$$

$$\frac{x - t_{k+j-m+1}}{t_{k+j} - t_{k+j-m+1}} s_{i,j-1}^{\mathbf{t}_k, \mathbf{u}_l, m-1} + \frac{t_{k+j+1} - x}{t_{k+j+1} - t_{k+j-m+2}} s_{i,j}^{\mathbf{t}_k, \mathbf{u}_l, m-1}$$

Valutando quest'ultima espressione in $x = u_{l+i-m+2}$ e in $x = u_{l+i+1}$ e risolvendo il sistema composto dalle due uguaglianze ottenute, possiamo trovare la relazione che ci permette di costruire riga per riga tutta la matrice del cambio di base, partendo dal valore iniziale $s_{0,0}^{\mathbf{t}_k, \mathbf{u}_l, 0} = 1$

$$s_{i,j}^{\mathbf{t}_k, \mathbf{u}_l, m} = \frac{1}{t_{k+j+1} - u_{l+i-m+1}} \left\{ (t_{k+j+1} - u_{l+i}) s_{i-1,j}^{\mathbf{t}_k, \mathbf{u}_l, m} + \frac{t_{k+j+1} - t_{k+j-m+1}}{t_{k+j} - t_{k+j-m}} * \right.$$

$$\left. * \left[(u_{l+i} - t_{k+j-m}) s_{i-1,j-1}^{\mathbf{t}_k, \mathbf{u}_l, m} - (u_{l+i-m+1} - t_{k+j-m}) s_{i,j-1}^{\mathbf{t}_k, \mathbf{u}_l, m} \right] \right\}. \quad (5.8)$$

Ragionando in quest'ottica, si è riusciti nell'intento di esprimere le funzioni base B-spline relative alla partizione nodale \mathbf{t}_k come combinazione lineare delle B-spline relative alla partizione \mathbf{u}_l . Nel caso specifico polinomiale possiamo affermare con certezza che la matrice S è sempre bidiagonale e ad elementi positivi e di aver quindi costruito esplicitamente un algoritmo di Knot-Insertion computazionalmente efficiente.

Generalizzando questo procedimento si potrebbe concludere erroneamente che la tecnica del Knot-Insertion vale per ogni spazio che possiede una formula ricorrente per calcolare le funzioni base B-spline. In realtà come già detto, possiamo concludere di aver trovato un algoritmo di questo tipo solo se la matrice S è sempre bidiagonale e ad elementi positivi.

Oltre al caso polinomiale appena visto, altri spazi spline in cui è possibile applicare questo procedimento sono sicuramente gli spazi spline trigonometrici e iperbolici. In particolare ricalcando tutti i passaggi visti, si ha che la relazione che permette di costruire la matrice del cambio di base è data da

- nel caso trigonometrico

$$S_{i,j}^{\mathbf{t}_k, \mathbf{u}_l, m} = \frac{1}{\sin(t_{k+j+1} - u_{l+i-m+1})} \left\{ \sin(t_{k+j+1} - u_{l+i}) S_{i-1,j}^{\mathbf{t}_k, \mathbf{u}_l, m} + \frac{\sin(t_{k+j+1} - t_{k+j-m+1})}{\sin(t_{k+j} - t_{k+j-m})} \left[\sin(u_{l+i} - t_{k+j-m}) S_{i-1,j-1}^{\mathbf{t}_k, \mathbf{u}_l, m} - \sin(u_{l+i-m+1} - t_{k+j-m}) S_{i,j-1}^{\mathbf{t}_k, \mathbf{u}_l, m} \right] \right\}$$

- nel caso iperbolico

$$S_{i,j}^{\mathbf{t}_k, \mathbf{u}_l, m} = \frac{1}{\sinh(t_{k+j+1} - u_{l+i-m+1})} \left\{ \sinh(t_{k+j+1} - u_{l+i}) S_{i-1,j}^{\mathbf{t}_k, \mathbf{u}_l, m} + \frac{\sinh(t_{k+j+1} - t_{k+j-m+1})}{\sinh(t_{k+j} - t_{k+j-m})} \left[\sinh(u_{l+i} - t_{k+j-m}) S_{i-1,j-1}^{\mathbf{t}_k, \mathbf{u}_l, m} - \sinh(u_{l+i-m+1} - t_{k+j-m}) S_{i,j-1}^{\mathbf{t}_k, \mathbf{u}_l, m} \right] \right\}.$$

Esempio 5.2. Consideriamo lo spazio spline polinomiale di grado 3 definito sulla partizione nodale iniziale $\mathbf{t} = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1\}$. Per effettuare un esempio numerico del procedimento teorico appena visto, si inserisce un nuovo nodo in \mathbf{t} . In particolare siamo interessati a verificare numericamente la particolare struttura della matrice del cambio di base S_{pol} che lega le B-spline polinomiali relative alla partizione nodale iniziale alle B-spline ottenute dopo l'inserimento.

Consideriamo quindi le seguenti due partizioni nodali

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1\} \\ \mathbf{u} &= \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.2 \ 0.7 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1\} \end{aligned}$$

e costruiamo la matrice del cambio di base S_{pol} per passare da \mathbf{t} a \mathbf{u} . A tale scopo utilizziamo la funzione MATLAB `bs2bs_global_econ_new_new` della

libreria fornita che implementa in modo efficiente la formula 5.8. Si ottiene la seguente matrice costruita per colonne

$$S_{pol} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.300 & 0.700 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.300 & 0.700 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.375 & 0.625 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Notiamo che, come affermato in precedenza, la matrice è bidiagonale e con elementi positivi. Inoltre la somma degli elementi di ogni riga dà 1 come ben noto dalla teoria spline polinomiale.

Lo stesso esempio può essere effettuato utilizzando le basi B-spline trigonometriche e iperboliche in cui si è già visto esistere KI. A tale scopo si sono create rispettivamente le funzioni MATLAB `ct_bs2bs_global_trig` e `ct_bs2bs_global_ip` da cui otteniamo che anche in questo caso le matrici del cambio di base sono bidiagonali e ad elementi positivi. In particolare si ha che

- nel caso trigonometrico

$$S_{trig} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3512 & 0.7656 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3512 & 0.7656 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4120 & 0.6683 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- nel caso iperbolico

$$S_{ip} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2591 & 0.6455 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2591 & 0.6455 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3429 & 0.5867 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.3 Metodo alternativo

Un'altra strada per trovare esplicitamente l'algoritmo di Knot-Insertion si ottiene direttamente dalla definizione 5.1. L'idea è di ipotizzare che esista KI e di costruire un sistema di equazioni, imponendo le condizioni che dovrebbero legare le B-spline definite sulla partizione iniziale e le B-spline definite sulla partizione raffinata. Se il sistema ha soluzione e i coefficienti del Knot-Insertion così ricavati sono positivi, si può effettivamente concludere che l'algoritmo KI esiste ed ha l'espressione trovata. Questo procedimento è sicuramente molto utile, ma è applicabile solo nel caso in cui si fissi lo spazio spline preso in esame. Per comprendere meglio questo metodo, analizziamo nel dettaglio il caso polinomiale di ordine 3. Per semplificare la procedura, ci si può aiutare osservando la figura 5.7 ottenuta dalla funzione MATLAB `KIgrafico_pol`, nella quale è implementata la procedura seguente.

Consideriamo lo spazio spline polinomiale di ordine 3 definito sulla partizione nodale $\Delta = \{t_i\}$. Costruiamo la B-spline $N_{i,3}(x)$ con supporto sull'intervallo $[t_i, t_{i+3}]$, rappresentata in figura 5.7 con il colore rosso. Supponendo che si possa effettuare KI, inseriamo un nodo u nell'intervallo $[t_{i+1}, t_{i+2}]$ costruendo così la partizione raffinata $\hat{\Delta} = \{\hat{t}_i\}$ e rinominiamo i nodi $\{t_i\} \in \Delta$ utilizzando la seguente regola

$$\hat{t}_j = \begin{cases} t_j & j \leq i + 1 \\ u & j = i + 2 \\ t_{j-1} & j \geq i + 3. \end{cases}$$

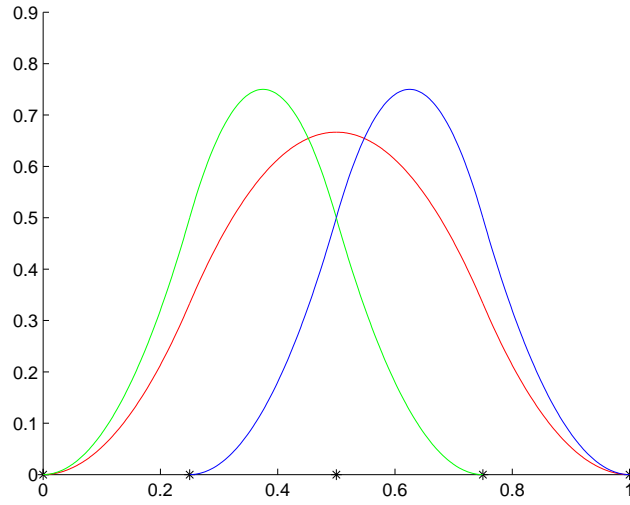


Figura 5.7: Grafico delle funzioni base B-spline polinomiali normalizzate di ordine 3 su due differenti partizione nodali, ottenuto utilizzando la funzione MATLAB `KIgrafico_pol`. In particolare la B-spline rappresentata in rosso è definita sulla partizione iniziale $\Delta = \{0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1\}$ e le B-spline verde e blu sono definite invece su $\hat{\Delta} = \Delta \uplus \frac{2}{4}$, un raffinamento di Δ .

Dalla definizione 5.1 deve valere

$$N_{i,m}(x) = a_i \hat{N}_{i,m}(x) + b_{i+1} \hat{N}_{i+1,m}(x) \quad a_i, b_{i+1} \geq 0.$$

Tuttavia, osservando la figura 5.7, possiamo trasformare questa equazione in un sistema di equazioni considerando i vari intervalli creati dai nodi della partizione $\hat{\Delta}$. Quindi possiamo scrivere

$$\left\{ \begin{array}{ll} N_{i,3}(x) = a_i \hat{N}_{i,3}(x) & x \in [\hat{t}_i, \hat{t}_{i+1}] \\ N_{i,3}(x) = a_i \hat{N}_{i,3}(x) + b_{i+1} \hat{N}_{i+1,3}(x) & x \in [\hat{t}_{i+1}, \hat{t}_{i+2}] \\ N_{i,3}(x) = a_i \hat{N}_{i,3}(x) + b_{i+1} \hat{N}_{i+1,3}(x) & x \in [\hat{t}_{i+2}, \hat{t}_{i+3}] \\ N_{i,3}(x) = b_{i+1} \hat{N}_{i+1,3}(x) & x \in [\hat{t}_{i+3}, \hat{t}_{i+4}] \end{array} \right.$$

Esplicitando le espressioni delle B-spline viste nel capitolo 4, si ottiene che il sistema ha soluzione ed è data da

$$a_i = \frac{\hat{t}_{i+2} - \hat{t}_i}{\hat{t}_{i+3} - \hat{t}_i}$$

$$b_{i+1} = \frac{\hat{t}_{i+4} - \hat{t}_{i+2}}{\hat{t}_{i+4} - \hat{t}_{i+1}}$$

Possiamo quindi concludere che per questo spazio spline polinomiale esiste la tecnica del Knot-Insertion e i coefficienti da utilizzare hanno l'espressione appena trovata. In particolare tale relazione si era già esplicitata in generale nella sottosezione 5.1.1.

Questo metodo è del tutto generale e può quindi essere applicato ad ogni spazio spline. In particolare come ulteriori esempi, nelle funzioni MATLAB `KIgrafico_trig` e `KIgrafico_ip` sono stati implementati il caso trigonometrico e iperbolico di ordine 3. Ricalcando i passaggi visti nel caso polinomiale, si ottiene che l'algoritmo di KI esiste e le espressioni dei coefficienti da utilizzare sono rispettivamente date da

$$a_i = \frac{\sin(\hat{t}_{i+2} - \hat{t}_i)}{\sin(\hat{t}_{i+3} - \hat{t}_i)}$$

$$b_{i+1} = \frac{\sin(\hat{t}_{i+4} - \hat{t}_{i+2})}{\sin(\hat{t}_{i+4} - \hat{t}_{i+1})}$$

e

$$a_i = \frac{\sinh(\hat{t}_{i+2} - \hat{t}_i)}{\sinh(\hat{t}_{i+3} - \hat{t}_i)}$$

$$b_{i+1} = \frac{\sinh(\hat{t}_{i+4} - \hat{t}_{i+2})}{\sinh(\hat{t}_{i+4} - \hat{t}_{i+1})}.$$

come già visto nella sottosezione 5.1.1.

5.4 Knot-Insertion nelle UE-spline

Nel caso delle UE-spline, è sempre possibile effettuare Knot-Insertion. In particolare nella proposizione seguente è descritto un semplice algoritmo in

cui è già esplicitata l'espressione analitica dei coefficienti della combinazione lineare delle B-spline.

Proposizione 5.1. *Sia $\Delta = \{t_i\}_{+\infty}^{-\infty}$ una partizione nodale e $\hat{\Delta} = \{\hat{t}_i\}_{+\infty}^{-\infty}$ una nuova partizione nodale ottenuta dalla precedente inserendo un nodo u di molteplicità $0 \leq r < k$ nell'intervallo $[t_i, t_{i+1})$. Siano $N_{i,k}(t)$ e $\hat{N}_{i,k}(t)$ le rispettive basi definite tramite le formule ricorrenti della proposizione 4.12. Allora per ogni $j, k \geq 2$ si ha*

$$N_{j,k}(t) = \xi_{j,k} \hat{N}_{j,k}(t) + \eta_{j+1,k} \hat{N}_{j+1,k}(t)$$

dove i coefficienti $\xi_{j,k}, \eta_{j,k}$ sono definiti al variare di j, k, r come

- per $k = 2$

$$\xi_{j,2} = \begin{cases} 1 & j \leq i \\ \frac{\sin \omega(u - \hat{t}_i)}{\sin \omega(\hat{t}_{i+2} - \hat{t}_i)} & j = i \\ 0 & j \geq i + 1 \end{cases}$$

$$\eta_{j+1,2} = \begin{cases} 1 & j \leq i, j \neq i - 2 \\ \frac{\sin \omega(\hat{t}_{j+4} - u)}{\sin \omega(\hat{t}_{j+4} - \hat{t}_{j+2})} & j = i - 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- per $0 \leq r < k$

$$\xi_{j,k} = \begin{cases} 1 & j \leq i - k \\ \frac{\delta_{j,k-1}}{\hat{\delta}_{j,k-1}} \xi_{j,k-1} & i - k < j < i - r + 1 \\ 0 & j \geq i - r + 1 \end{cases}$$

$$\eta_{j+1,k} = \begin{cases} 0 & j \leq i - k \\ \frac{\delta_{j+1,k-1}}{\hat{\delta}_{j+2,k-1}} \eta_{j+1,k-1} & i - k < j < i - r + 1 \\ 1 & j \geq i - r + 1 \end{cases}$$

- per $r \geq k$

$$\xi_{j,k} = \begin{cases} 1 & j \leq i - k \\ 0 & j \geq i - k \end{cases}$$

$$\eta_{j+1,k} = \begin{cases} 0 & j \leq i - k \\ 1 & j \geq i - k \end{cases}$$

Inoltre per $i, k \geq 3$ si ha che $\xi_{j,k} + \eta_{j,k} = 1$, quindi si può riscrivere la relazione che lega le due differenti basi come

$$N_{j,k}(t) = \xi_{j,k} \hat{N}_{j,k}(t) + (1 - \xi_{j+1,k}) \hat{N}_{j+1,k}(t) \quad 0 \leq \xi_{j,k} \leq 1.$$

Esempio 5.3. Vediamo come caso particolare, l'espressione esplicita dell'algoritmo di Knot-Insertion UE nel caso polinomiale di ordine 3. Mantenendo la notazione della proposizione precedente, si inserisce un nodo u di molteplicità $r = 0$ nell'intervallo $[t_i, t_{i+1})$. La nuova partizione nodale $\hat{\Delta} = \{\hat{t}_j\}$ così ottenuta, è legata alla partizione iniziale $\Delta = \{t_i\}$ nel seguente modo

$$\hat{t}_j = \begin{cases} t_j & j \leq i \\ u & j = i + 1 \\ t_{j-1} & j \geq i + 2. \end{cases} \quad (5.9)$$

Per esplicitare la relazione che intercorre tra le funzioni base relative alla partizione iniziale e quelle relative alla partizione raffinata, ricaviamo i coefficienti $\xi_{j,3}$ e $\eta_{j+1,3}$ che appaiono nell'espressione

$$N_{j,3}(t) = \xi_{j,3} \hat{N}_{j,3}(t) + \eta_{j+1,3} \hat{N}_{j+1,3}(t).$$

vista nella proposizione precedente.

Il coefficiente relativo a $\hat{N}_{i,3}(t)$ è calcolato come

$$\xi_{j,3} = \begin{cases} 1 & j \leq i - 3 \\ \frac{\delta_{j,2}}{\hat{\delta}_{j,2}} \xi_{j,2} & i - 3 < j < i + 1 \\ 0 & j \geq i + 1 \end{cases}$$

ove nel caso polinomiale in generale $\delta_{j,k} = \frac{k}{t_{j+k} - t_j}$ e $\hat{\delta}_{j,k} = \frac{k}{\hat{t}_{j+k} - \hat{t}_j}$, come già visto nell'esercizio 4.1. Inoltre dalla proposizione precedente si ha che

$$\xi_{j,2} = \begin{cases} 1 & j \leq i \\ \frac{u - \hat{t}_i}{\hat{t}_{i+2} - \hat{t}_i} & j = i \\ 0 & j \geq i + 1. \end{cases}$$

Il coefficiente relativo a $\hat{N}_{j+1,3}(t)$ è invece calcolato come

$$\eta_{j+1,3} = \begin{cases} 0 & j \leq i - 3 \\ \frac{\delta_{j+1,2}}{\hat{\delta}_{j+2,2}} \eta_{j+1,2} & i - 3 < j < i + 1 \\ 1 & j \geq i + 1 \end{cases}$$

ove si è posto

$$\eta_{j+1,2} = \begin{cases} 1 & j \leq i, j \neq i - 2 \\ \frac{\hat{t}_{j+4} - u}{\hat{t}_{j+4} - \hat{t}_{j+2}} & j = i - 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quindi, utilizzando le uguaglianze 5.9, possiamo concludere che la relazione di Knot-Insertion in questo caso particolare è

$$N_{j,3} = \begin{cases} \hat{N}_{j,3} & j \leq i - 3 \\ \frac{u - \hat{t}_j}{\hat{t}_{j+3} - \hat{t}_j} \hat{N}_{j,3} + \frac{\hat{t}_{j+4} - u}{\hat{t}_{j+4} - \hat{t}_{j+1}} \hat{N}_{j+1,3} & i - 2 \leq j \leq i \\ \hat{N}_{j+1,3} & j \geq i + 1 \end{cases}$$

e che coincide con l'espressione generale trovata nella sottosezione 5.1.1.

Esempio 5.4. Consideriamo ora come caso particolare, l'espressione esplicita dell'algoritmo di Knot-Insertion UE nel caso trigonometrico e iperbolico

di ordine 3. Come per l'esempio precedente, manteniamo la notazione della proposizione 5.1 e inseriamo un nodo u di molteplicità $r = 0$ nell'intervallo $[t_i, t_{i+1})$. Visto che in questi due casi, i calcoli da svolgere per trovare i coefficienti $\xi_{j,3}$ e $\eta_{j+1,3}$ sono più lunghi e laboriosi, utilizziamo la funzione MATLAB `coefficienti_UE`, costruita ad hoc.

Per il caso trigonometrico si ottiene che i coefficienti che compaiono nell'espressione

$$N_{j,3}(t) = \xi_{j,3}\hat{N}_{j,3}(t) + \eta_{j+1,3}\hat{N}_{j+1,3}(t).$$

sono dati da

$$\xi_{j,3} = \begin{cases} 1 & j \leq i-3 \\ 1 & j = i-2 \\ \frac{\sin(\hat{t}_i - \hat{t}_{i+2})(\sin(\hat{t}_i - \hat{t}_{i-1}) - \sin(\hat{t}_i - \hat{t}_{i+1}) + \sin(\hat{t}_{i-1} - \hat{t}_{i+1}))}{\sin(\hat{t}_i - \hat{t}_{i+1})(\sin(\hat{t}_i - \hat{t}_{i-1}) - \sin(\hat{t}_i - \hat{t}_{i+2}) + \sin(\hat{t}_{i-1} - \hat{t}_{i+2}))} & j = i-1 \\ \frac{\sin(\hat{t}_{i+2} - \hat{t}_{i+3})(\sin(\hat{t}_i - \hat{t}_{i+1}) - \sin(\hat{t}_i - \hat{t}_{i+2}) + \sin(\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_{i+2}))}{\sin(\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_{i+2})(\sin(\hat{t}_i - \hat{t}_{i+2}) - \sin(\hat{t}_i - \hat{t}_{i+3}) + \sin(\hat{t}_{i+2} - \hat{t}_{i+3}))} & j = i \\ 0 & j \geq i+1 \end{cases}$$

$$\eta_{j+1,3} = \begin{cases} 0 & j \leq i-3 \\ \frac{\sin(\hat{t}_i - \hat{t}_{i-1}) \sin(\hat{t}_i - \hat{t}_{i+2})(\sin(\hat{t}_i - \hat{t}_{i+1}) - \sin(\hat{t}_i - \hat{t}_{i+2}) + \sin(\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_{i+2}))}{\sin(\hat{t}_i - \hat{t}_{i+1}) \sin(\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_{i+2})(\sin(\hat{t}_i - \hat{t}_{i-1}) - \sin(\hat{t}_i - \hat{t}_{i+2}) + \sin(\hat{t}_{i-1} - \hat{t}_{i+2}))} & j = i-2 \\ \frac{\sin(\hat{t}_i - \hat{t}_{i+2})(\sin(\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_{i+2}) - \sin(\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_{i+3}) + \sin(\hat{t}_{i+2} - \hat{t}_{i+3}))}{\sin(\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_{i+2})(\sin(\hat{t}_i - \hat{t}_{i+2}) - \sin(\hat{t}_i - \hat{t}_{i+3}) + \sin(\hat{t}_{i+2} - \hat{t}_{i+3}))} & j = i-1 \\ 1 & j = i \\ 1 & j \geq i+1 \end{cases}$$

Per il caso iperbolico invece, tali coefficienti assumono una forma differente data da

$$\xi_{j,3} = \begin{cases} 1 & j \leq i - 3 \\ 1 & j = i - 2 \\ \frac{\sinh(\hat{t}_i - \hat{t}_{i+2})(\sinh(\hat{t}_i - \hat{t}_{i-1}) - \sinh(\hat{t}_i - \hat{t}_{i+1}) + \sinh(\hat{t}_{i-1} - \hat{t}_{i+1}))}{\sinh(\hat{t}_i - \hat{t}_{i+1})(\sinh(\hat{t}_i - \hat{t}_{i-1}) - \sinh(\hat{t}_i - \hat{t}_{i+2}) + \sinh(\hat{t}_{i-1} - \hat{t}_{i+2}))} & j = i - 1 \\ \frac{\sinh(\hat{t}_{i+2} - \hat{t}_{i+3})(\sinh(\hat{t}_i - \hat{t}_{i+1}) - \sinh(\hat{t}_i - \hat{t}_{i+2}) + \sinh(\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_{i+2}))}{\sinh(\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_{i+2})(\sinh(\hat{t}_i - \hat{t}_{i+2}) - \sinh(\hat{t}_i - \hat{t}_{i+3}) + \sinh(\hat{t}_{i+2} - \hat{t}_{i+3}))} & j = i \\ 0 & j \geq i + 1 \end{cases}$$

$$\eta_{j+1,3} = \begin{cases} 0 & j \leq i - 3 \\ \frac{\sinh(\hat{t}_i - \hat{t}_{i-1}) \sinh(\hat{t}_i - \hat{t}_{i+2})(\sinh(\hat{t}_i - \hat{t}_{i+1}) - \sinh(\hat{t}_i - \hat{t}_{i+2}) + \sinh(\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_{i+2}))}{\sinh(\hat{t}_i - \hat{t}_{i+1}) \sinh(\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_{i+2})(\sinh(\hat{t}_i - \hat{t}_{i-1}) - \sinh(\hat{t}_i - \hat{t}_{i+2}) + \sinh(\hat{t}_{i-1} - \hat{t}_{i+2}))} & j = i - 2 \\ \frac{\sinh(\hat{t}_i - \hat{t}_{i+2})(\sinh(\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_{i+2}) - \sinh(\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_{i+3}) + \sinh(\hat{t}_{i+2} - \hat{t}_{i+3}))}{\sinh(\hat{t}_{i+1} - \hat{t}_{i+2})(\sinh(\hat{t}_i - \hat{t}_{i+2}) - \sinh(\hat{t}_i - \hat{t}_{i+3}) + \sinh(\hat{t}_{i+2} - \hat{t}_{i+3}))} & j = i - 1 \\ 1 & j = i \\ 1 & j \geq i + 1. \end{cases}$$

In questi due casi, a differenza di quello polinomiale, non si ritrova esattamente la relazione vista nella sottosezione 5.1.1 in quanto lavorando con le UE spline, si considerano sempre funzioni base a somma 1 e normalizzate.

E' bene sottolineare inoltre, che non esiste un metodo unico per ricavare l'algoritmo di Knot-Insertion. Infatti, la stessa espressione trovata in questo esercizio si può ricavare anche seguendo ad esempio la strada percorsa nella sezione 5.3. Per effettuare tale confronto si è utilizzata la funzione MATLAB `KIgrafico_UE` che implementa il metodo alternativo citato in precedenza per le UE-spline trigonometriche e iperboliche. Come ipotizzato, tale funzione restituisce le stesse espressioni per i coefficienti del KI e in più rappresenta graficamente (figura 5.8) le B-spline prima e dopo l'inserzione del nodo.

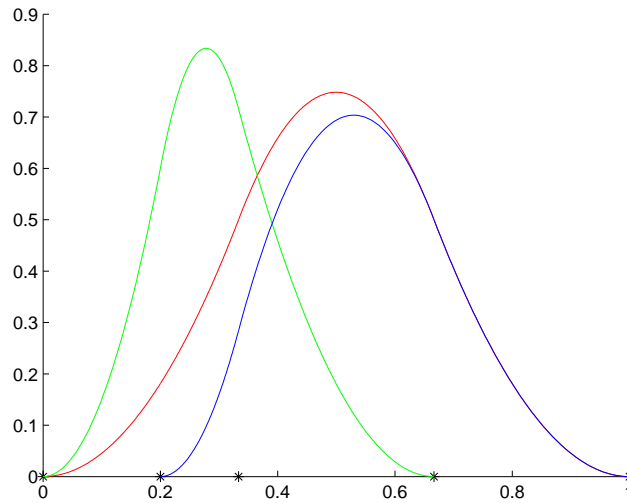


Figura 5.8: Grafico delle B-spline trigonometriche di ordine 3 viste come caso particolare delle UE-spline su due differenti partizione nodali, ottenuto utilizzando la funzione MATLAB `KIgrafico_UE`. In particolare la B-spline rappresentata in rosso è definita sulla partizione iniziale $\Delta = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$ e le B-spline verde e blu sono definite invece su $\hat{\Delta} = \Delta \uplus \frac{1}{5}$, un raffinamento di Δ .

5.5 Knot-Insertion come strumento teorico

Lo strumento Knot-Insertion è molto utile non solo nelle applicazioni, ma anche a livello teorico per dimostrare alcune importanti proprietà.

In questa sezione si dimostrano in particolare due proprietà essenziali nell'ambito della modellazione geometrica, utilizzando un metodo geometrico concettualmente simile per entrambi i casi. Inizialmente si verifica la proprietà di Variation Diminishing per qualsiasi spazio spline in cui è possibile effettuare Knot-Insertion e successivamente si dimostra la proprietà di totally positivity della matrice di collocazione della base spline, aggiungendo l'ipotesi di possedere una base a supporto locale, positiva e con la proprietà di partizione dell'unità.

Teorema 5.2. *In tutti gli spazi spline $S(\mathcal{U}_m, M, \Delta)$ in cui è possibile effettuare*

Knot-Insertion, vale la proprietà di *Variation Diminishing*. Formalmente presa $s(x) \in S(\mathcal{U}_m, M, \Delta)$, essa si può rappresentare come combinazione lineare delle *B-spline* normalizzate ossia $s(x) = \sum_{i=-m+1}^K c_i N_{i,m}(x)$. La proprietà di *Variation Diminishing* afferma che:

$$S^-(s(x)) \leq S^-(\mathbf{c})$$

ove si è posto $\mathbf{c} = (c_{-m+1}, c_{-m+2}, \dots, c_K)$.

Dimostrazione. Ricordando che per definizione

$$S^-(s(x)) = \sup_r \{S^-(s(z_1), \dots, s(z_r))\}$$

si assume che $\{z_i\}_{i=1, \dots, r}$ sia la sequenza di ascisse che verifica la definizione e si costruisce $\tilde{\Delta}$, una nuova partizione nodale ottenuta da Δ inserendo $m - 1$ volte ogni z_i per $i = 1, \dots, r$. Attraverso la tecnica del *Knot-Insertion* ricaviamo l'espressione della nuova base *B-spline* da cui, sostituendola in $s(x) = \sum_{i=-m+1}^K c_i N_{i,m}(x)$, si ottiene anche l'espressione dei nuovi coefficienti $\tilde{\mathbf{c}} = \{\tilde{c}_j\}$.

Avendo inserito ogni z_i esattamente $m - 1$ volte, esiste un $\tilde{c}_j = s(z_i)$ per ogni $i = 1, \dots, r$. Di conseguenza, poiché

$$(s(z_1), \dots, s(z_r)) \subset \tilde{\mathbf{c}},$$

si ha sicuramente che

$$S^-(s(x)) < S^-(\tilde{\mathbf{c}})$$

Per completare la dimostrazione basta verificare che

$$S^-(\tilde{\mathbf{c}}) \leq S^-(\mathbf{c}).$$

A tale scopo procediamo in questo modo. Per ogni $i = 1, \dots, r$ inseriamo nella partizione nodale di partenza il nodo z_i e chiamiamo $\mathbf{c} \cup \hat{\mathbf{c}}$ la nuova successione dei coefficienti. Tuttavia, poiché sappiamo che ogni \hat{c}_l con $l = -m + 1, \dots, K + (i - 1) \times (m - 1)$ è combinazione convessa di due coefficienti

appartenenti al vettore \mathbf{c} , ad esempio di c_{l-1} e c_l , si inserisce \hat{c}_l proprio tra questi due. Di conseguenza per costruzione si ha che

$$S^-(\mathbf{c}) = S^-(\mathbf{c} \cup \hat{\mathbf{c}})$$

cioè il numero di variazioni di segno rimane lo stesso. Ora si estrae da $\mathbf{c} \cup \hat{\mathbf{c}}$ la sottosuccessione $\hat{\mathbf{c}}$ ottenendo quindi che

$$S^-(\hat{\mathbf{c}}) \leq S^-(\mathbf{c} \cup \hat{\mathbf{c}})$$

Procedendo in questo modo fino ad inserire $m - 1$ volte ogni nodo z_i per $i = 1, \dots, r$, si ha che

$$S^-(\tilde{\mathbf{c}}) \leq S^-(\mathbf{c} \cup \tilde{\mathbf{c}}) = S^-(\mathbf{c}) = S^-(\hat{\mathbf{c}}) \leq \dots \leq S^-(\mathbf{c} \cup \hat{\mathbf{c}}) = S^-(\mathbf{c})$$

da cui per transitività si ottiene la tesi. \square

Riportiamo ora due risultati preliminari, necessari per dimostrare la proprietà di totally positive della matrice di collocazione della base UE-spline.

Proposizione 5.3. *Una matrice finita è totally positive se e solo se è il prodotto di matrici bi-diagonali positive.*

Dimostrazione. Si veda l'articolo [dBPC80]. \square

Ricordando l'identità di Cauchy-Binet, possiamo ricavare inoltre il seguente Lemma.

Lemma 5.4. *Se A e B sono due matrici entrambe totally positive (strettamente), allora $C = A * B$ è una matrice totally positive (strettamente).*

Teorema 5.5. *In tutti gli spazi spline di ordine m in cui è possibile effettuare Knot-Insertion e trovare una base $\{N_{i,m}\}$ a supporto locale, positiva e con la proprietà di partizione dell'unità, si ha che la matrice di collocazione è totally positive.*

Dimostrazione. Dalla definizione si ha che la matrice di collocazione per la base spline è

$$U = \begin{pmatrix} N_{0,k}(s_0) & N_{0,k}(s_1) & \dots & N_{0,k}(s_m) \\ N_{1,k}(s_0) & N_{1,k}(s_1) & \dots & N_{1,k}(s_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ N_{k,k}(s_0) & N_{k,k}(s_1) & \dots & N_{k,k}(s_m) \end{pmatrix}$$

dove $\Delta = \{t_j\}_{-\infty}^{+\infty}$ è la partizione nodale di definizione e $s_i \in [t_j, t_{j+1}) \forall i = 0, \dots, m$. Per dimostrare che la matrice U è totally positive, si inseriscono dei nodi multipli nella partizione Δ utilizzando lo strumento del Knot-Insertion. In particolare, inseriamo inizialmente nella partizione Δ il nodo s_0 ripetutamente fino ad arrivare alla molteplicità l_0 . Indichiamo con $H_i^{(s_0)}$ la matrice contenente i coefficienti necessari per effettuare Knot-Insertion del nodo s_0 con molteplicità i visti nella definizione 5.1, ossia

$$H_i^{(s_0)} = \begin{pmatrix} a_{0,k}^{(i)} & b_{1,k}^{(i)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{1,k}^{(i)} & b_{2,k}^{(i)} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{2,k}^{(i)} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{k+i-1,k}^{(i)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{k+i-1,k}^{(i)} & b_{k+i,k}^{(i)} \end{pmatrix}$$

Necessariamente in generale si ha che ogni H_i è totally positive in quanto, per costruzione e definizione stessa di Knot-Insertion, è bidiagonale e composta da elementi non negativi.

Chiamando $\{N_{i,j}^{(1)}\}$ la base dopo l'inserimento del nodo s_0 , possiamo scrivere

$$\begin{pmatrix} N_{0,k}(t) \\ N_{1,k}(t) \\ \dots \\ N_{k,k}(t) \end{pmatrix} = H_1^{(s_0)} \begin{pmatrix} N_{0,k}^{(1)}(t) \\ N_{1,k}^{(1)}(t) \\ \dots \\ N_{k+1,k}^{(1)}(t) \end{pmatrix}$$

In modo analogo, continuando a utilizzare l'algoritmo di Knot-Insertion fino all'inserimento del nodo s_0 con molteplicità l_0 , otteniamo

$$\begin{pmatrix} N_{0,k}(t) \\ N_{1,k}(t) \\ \dots \\ N_{k,k}(t) \end{pmatrix} = \dots = H_1^{(s_0)} \dots H_{l_0}^{(s_0)} \begin{pmatrix} N_{0,k}^{(l_0)}(t) \\ N_{1,k}^{(l_0)}(t) \\ \dots \\ N_{k+l_0,k}^{(l_0)}(t) \end{pmatrix}$$

Inseriamo ora ogni s_i ripetutamente l_i volte fino ad arrivare alla molteplicità massima. Se definiamo la matrice

$$C = \begin{pmatrix} N_{0,k}^{(l_0)}(s_0) & N_{0,k}^{(l_1)}(s_1) & \dots & N_{0,k}^{(l_m)}(s_m) \\ N_{1,k}^{(l_0)}(s_0) & N_{1,k}^{(l_1)}(s_1) & \dots & N_{1,k}^{(l_m)}(s_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ N_{k+l_0,k}^{(l_0)}(s_0) & N_{k+l_1,k}^{(l_1)}(s_1) & \dots & N_{k+l_m,k}^{(l_m)}(s_m) \end{pmatrix}$$

si ha che

$$U = H_1^{(s_0)} \dots H_{l_0}^{(s_0)} H_1^{(s_1)} \dots H_{l_1}^{(s_1)} \dots H_1^{(s_m)} \dots H_{l_m}^{(s_m)} C.$$

Per ipotesi le funzioni base godono delle proprietà di positività e di partizione dell'unità, quindi si ha che nella matrice C una sola funzione per riga è non nulla e in particolare sarà $N_{i,k}^{(l_i)}(s_i) = 1$, in quanto il nodo risulta avere molteplicità massima.

Possiamo concludere di conseguenza che per costruzione C è totally positive. Quindi, utilizzando il lemma 5.4, si può affermare che anche U è totally positive.

□

Proposizione 5.6. *La proprietà di Totally positive implica la proprietà di Variation Diminishing.*

Capitolo 6

Approccio alternativo alla teoria spline

In questo capitolo analizziamo un differente approccio alla teoria spline vista nei capitoli precedenti. Fino ad ora infatti si è definito prima uno spazio spline e si è poi cercata una base con le proprietà utili nella modellazione geometrica. In particolare si è costruita la base B-spline e si sono descritte tutte le utili proprietà che soddisfa come ad esempio avere un supporto locale. L'approccio descritto invece in questo capitolo è strutturato in maniera diversa. Si parte considerando una base che soddisfi le proprietà volute e poi si costruisce geometricamente uno spazio spline in cui su ogni intervallo esista una base di quel tipo. Nello specifico si lavora con un tipo di base più generale rispetto alle B-spline detto B-base.

6.1 Definizioni preliminari

Definizione 6.1. Se le funzioni u_0, \dots, u_n sono non negative e tali che $\sum_{i=0}^n u_i(t) = 1 \forall t \in [a, b]$, si dice che (u_0, \dots, u_n) è un blending system.

Proposizione 6.1. *Un sistema di funzioni (u_0, \dots, u_n) è un blending system se e solo se tutte le matrici di collocazione sono stocastiche ossia non negative*

e tali che la somma su ogni riga sia 1.

Definizione 6.2. Si dice che una curva gode della proprietà di:

- *guscio convesso* se e solo se per ogni poligonale di controllo, la curva giace sempre nel guscio convesso della poligonale considerata;
- *invarianza per affinità* se e solo se applicata una trasformazione affine ad una curva, il risultato può essere costruito dall'immagine affine dei suoi punti di controllo;
- *boundary tangent* se e solo se la poligonale di controllo è tangente nel primo e ultimo punto di controllo;
- *endpoint interpolation* se e solo se il primo punto di controllo coincide con il punto di partenza della curva e l'ultimo punto di controllo con il punto finale della curva.

Osservazione 17. Queste proprietà sono molto utili dal punto di vista della modellazione geometrica. In particolare quando vogliamo applicare una trasformazione geometrica o persino affine a una curva, la proprietà di invarianza per affinità stabilisce che possiamo applicare la trasformazione ai punti di controllo, operazione molto più semplice. In questo modo una volta che i punti di controllo sono stati trasformati, si è ottenuta direttamente la curva trasformata che è l'unica definita da questi nuovi punti.

Proposizione 6.2. *La proprietà di guscio convesso vale se e solo se (u_0, \dots, u_n) è un blending system. Inoltre si ha che per i blending system vale sempre la proprietà di invarianza per affinità.*

Definizione 6.3. Si dice che:

- una matrice è totally positive (strettamente) se tutti i minori sono non negativi (positivi);

- un sistema di funzioni è totally positive (strettamente) se tutte le matrici di collocazione sono totally positive (strettamente);
- un sistema di funzioni (u_0, \dots, u_n) è normalized totally positive (strettamente) se è totally positive (strettamente) e forma una partizione dell'unità ossia $\sum_{i=0}^n u_i(t) = 1$;
- un sistema di funzioni (u_0, \dots, u_n) in $C^n(I)$ con $I \subseteq \mathbb{R}$ è extended totally positive se ogni matrice di collocazione estesa è strettamente positiva.

Teorema 6.3. *Un sistema di funzioni è totally positive se e solo se è un OCT-sistema.*

Teorema 6.4. *Un sistema di funzioni è extended totally positive se e solo se è un OCET-sistema.*

Le seguenti proposizioni mostrano il motivo per cui le basi normalized totally positive sono utilizzate negli ambiti in cui è necessario avere proprietà di approssimazione di forma.

Proposizione 6.5. *Se un blending system soddisfa la proprietà di variation diminishing e di endpoint interpolation è totally positive. Di più se tutte le curve generate da un sistema di funzioni soddisfano la proprietà di guscio convesso, variation diminishing, endpoint interpolation, allora il sistema è normalized totally positive.*

Proposizione 6.6. *Se una base è normalized totally positive, vale la proprietà di Variation Diminishing e perciò la curva imita la forma della poligonale di controllo.*

6.1.1 Esempio numerico

Analizziamo un esempio numerico per avere un'idea più concreta di quali proprietà sono effettivamente essenziali quando si lavora nell'ambito del design geometrico e quali spazi spline visti in precedenza possono essere utilizzati.

Esempio 6.1. Utilizziamo la funzione MATLAB `ct_pmouseVD` della libreria fornita, per mettere in luce i pregi e i difetti degli spazi spline trigonometrici e iperbolici nell'ambito dell'approssimazione di forma. In particolare tale funzione permette di definire interattivamente i coefficienti di una curva, costruire la rispettiva poligonale di controllo e infine di rappresentare graficamente la curva derivante, costruendo le B-spline corrispondenti.

Lo scopo dell'esempio è di mettere in luce come la proprietà di partizione dell'unità sia essenziale nel caso in cui si lavori nell'ambito della modellazione geometrica e si desideri quindi costruire una curva che imita la poligonale di controllo.

Consideriamo come primo caso, lo spazio spline trigonometrico di ordine 3 e dimensione 6. Nella figura 6.1 è rappresentata in verde la curva derivante della scelta dei punti plottati in blu. Come si può vedere la curva gode di tutte le principali proprietà di cui si è parlato durante la trattazione come ad esempio la proprietà di guscio convesso, boundary tangent ed endpoint interpolation ed in particolare approssima quindi la forma della poligonale.

Considerando invece lo spazio spline trigonometrico di ordine 4 e dimensione 6, si può vedere in figura 6.2 come per la curva corrispondente questo non accade. Infatti nel capitolo 3 si è dimostrato come gli spazi spline trigonometrici e iperbolici solo di ordine dispari soddisfino la proprietà di partizione dell'unità e quindi formino un blending system.

Per completezza riportiamo anche le figure inerenti al caso iperbolico pari e dispari. Nello specifico nella figura 6.3 si è considerato lo spazio spline di ordine 3 e dimensione 6, e nella figura 6.4 lo spazio spline di ordine 4 e dimensione 6.

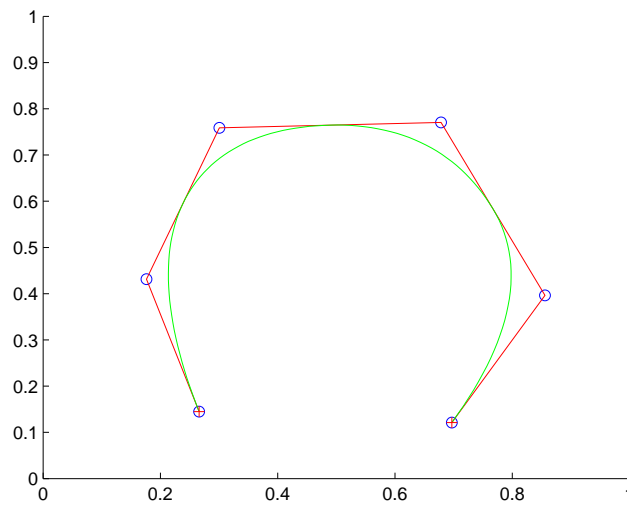


Figura 6.1: Grafico di una curva costruita a partire da punti di controllo inseriti in maniera interattiva. In particolare per ottenere questa figura, si è utilizzata la funzione MATLAB `ct_pmouseVD` considerando lo spazio spline trigonometrico di ordine 3 e dimensione 6.

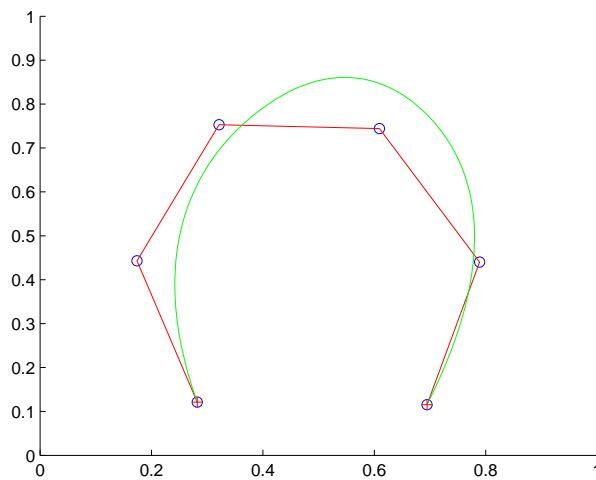


Figura 6.2: Grafico di una curva costruita a partire da punti di controllo inseriti in maniera interattiva. In particolare per ottenere questa figura, si è utilizzata la funzione MATLAB `ct_pmouseVD` considerando lo spazio spline trigonometrico di ordine 4 e dimensione 6.

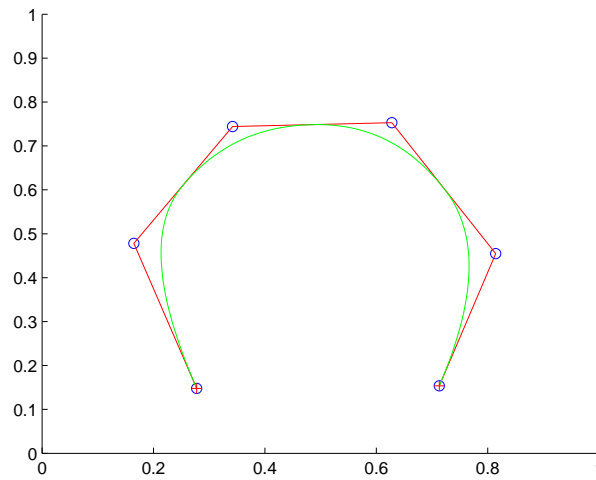


Figura 6.3: Grafico di una curva costruita a partire da punti di controllo inseriti in maniera interattiva. In particolare per ottenere questa figura, si è utilizzata la funzione MATLAB `ct_pmouseVD` considerando lo spazio spline iperbolico di ordine 3 e dimensione 6.

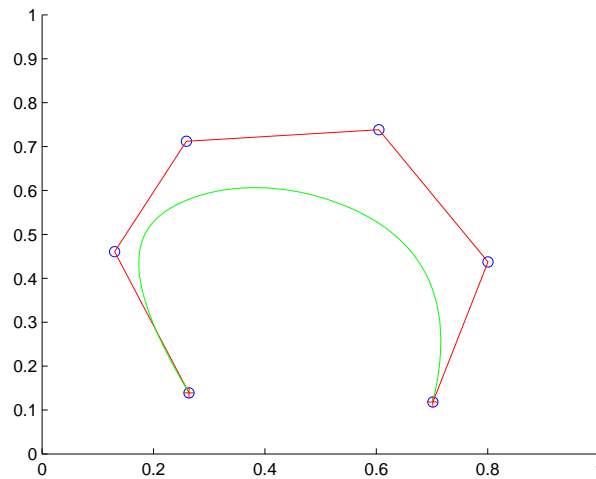


Figura 6.4: Grafico di una curva costruita a partire da punti di controllo inseriti in maniera interattiva. In particolare per ottenere questa figura, si è utilizzata la funzione MATLAB `ct_pmouseVD` considerando lo spazio spline trigonometrico di ordine 4 e dimensione 6.

6.2 B-basi

Nella sezione precedente sono state introdotte le basi normalized totally positive e si è visto come siano correlate a importanti proprietà di approssimazione di forma. Il passo successivo affrontato in questa sezione è l'introduzione del concetto di B-base anch'esso legato a queste proprietà utili nell'ambito della modellazione geometrica.

Definizione 6.4. Data una base totally positive (u_0, \dots, u_n) di uno spazio \mathcal{U} in $I \subseteq \mathbb{R}$, questa si dice B-base se e solo se vale $\forall i \neq j$

$$\inf \left\{ \frac{u_i(t)}{u_j(t)} \mid t \in I, u_j(t) \neq 0 \right\} = 0.$$

E' utile dare anche una definizione alternativa allo scopo di descrivere le proprietà di approssimazione di forma delle B-basi.

Definizione 6.5. Data una base totally positive (u_0, \dots, u_n) di uno spazio \mathcal{U} in $I \subseteq \mathbb{R}$, questa si dice B-base se e solo se per ogni altra base totally positive (v_0, \dots, v_n) di \mathcal{U} , la matrice K del cambio di base

$$(v_0, \dots, v_n) = (u_0, \dots, u_n)K$$

è totally positive.

Analizziamo ora il problema dell'esistenza e unicità delle B-base.

Teorema 6.7. *Se uno spazio di funzioni ha una base totally positive (normalized), allora ha una B-base (normalizzata).*

Teorema 6.8. *Sia (c_0, \dots, c_n) una B-base di uno spazio di funzioni \mathcal{U} . Una base di \mathcal{U} è una B-base se e solo se è della forma $(d_0 c_0, \dots, d_n c_n)$ con $d_i > 0$ per ogni $i = 0, \dots, n$. Di più, se (c_0, \dots, c_n) è una B-base normalizzata, questa*

è l'unica B-base normalizzata dello spazio di funzioni \mathcal{U} ossia ogni altra B-base normalizzata è della forma (d_0c_0, \dots, d_nc_n) con $d_i = 1$ per ogni $i = 0, \dots, n$.

Il prossimo passo è quello di trovare differenti modi per ottenere e descrivere una B-base. Infatti per dimostrare che un sistema di funzioni forma effettivamente una B-base utilizzando la definizione 6.5, è necessario verificare che tutti i minori della matrice di collocazione sono non negativi. Tale operazione risulta per dimensioni grandi inaffrontabile. Per risolvere questa problematica, si introduce la caratterizzazione data nel teorema seguente.

Teorema 6.9. *Sia \mathcal{U} uno spazio definito su un intervallo chiuso $I \subset \mathbb{R}$ tale che possieda una base (normalized) totally positive e (v_0, \dots, v_n) sia una base (normalizzata) di \mathcal{U} formata da funzioni non negative. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- (v_0, \dots, v_n) è una B-base (normalizzata) di \mathcal{U}
- se per ogni $i = 0, \dots, n$ $a_i \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ e $b_i \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sono rispettivamente l'estremo inferiore e superiore dell'intervallo $I_i = \{t \in I \mid v_i(t) \neq 0\}$ allora per ogni $0 \leq j < k \leq n$ si ha

$$\begin{aligned} a_j &\leq a_k \\ b_j &\leq b_k \\ \lim_{t \rightarrow a_j^+} \frac{v_k(t)}{v_j(t)} &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow b_k^-} \frac{v_j(t)}{v_k(t)} &= 0. \end{aligned}$$

Un ulteriore approccio per trattare le B-base è costruttivo. Nella seguente proposizione, infatti, si costruisce una B-base imponendo a un sistema di funzioni le condizioni 6.1.

Proposizione 6.10. *Sia \mathcal{U} uno spazio di funzioni definite su $[a, b]$ $(n+1)$ -dimensionale tale che le funzioni sono C^n in a e b . Se (u_0, \dots, u_n) è un sistema di funzioni*

in \mathcal{U} tale che $\forall i = 0, \dots, n$

$$\begin{aligned}
 u_i^{(j)}(a) &= 0 & j &= 0, \dots, i-1 \\
 u_i^{(i)}(a) &> 0 \\
 u_i^{(j)}(b) &= 0 & j &= 0, \dots, n-i-1 \\
 u_i^{(n-i)}(b) &\neq 0
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

si ha

- (u_0, \dots, u_n) è una base.
- Se \mathcal{U} ha una base totally positive, allora (u_0, \dots, u_n) è una B-base per \mathcal{U} .
- Se \mathcal{U} ha una base normalized totally positive, allora esistono $\alpha_0, \dots, \alpha_n > 0$ tali che $(\alpha_0 u_0, \dots, \alpha_n u_n)$ è una B-base normalizzata su \mathcal{U} .

Tale B-base può poi essere normalizzata nel seguente modo.

Proposizione 6.11. *Sia (u_0, \dots, u_n) una B-base costruita con il metodo della proposizione precedente; $b_i(t) = \alpha_i u_i(t)$ è una B-base normalizzata se e solo se i coefficienti $\alpha_i \forall i = 0, \dots, n$ sono identificati in modo da soddisfare*

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^n b_i(t) &= 1 \\
 \sum_{i=0}^k b_i^{(k)}(a) &= 0 & k &= 1, \dots, n \\
 \sum_{i=0}^k b_{n-i}^{(k)}(b) &= 0 & k &= 1, \dots, n.
 \end{aligned}$$

Pur avendo identificato un modo costruttivo per trovare una B-base, l'ipotesi di totally positive è molto forte e limitativa. Il prossimo passo è quindi quello di togliere tale ipotesi difficile da dimostrare.

Teorema 6.12. *Sia \mathcal{U} uno spazio $C^n([\hat{a}, \hat{b}])$ di dimensione $n+1$ tale che per ogni intervallo $I = [a, b] \subset (\hat{a}, \hat{b})$ si può trovare un sistema di funzioni in \mathcal{U}*

$(u_0, \dots, u_n)_I = (u_{0,I}, \dots, u_{n,I})$ che soddisfa le condizioni 6.1. Allora $(u_0, \dots, u_n)_I$ è un sistema extended totally positive su I e una B-base su $\mathcal{U}(I)$.

Corollario 6.13. *Sia \mathcal{U} uno spazio $C^n([\hat{a}, \hat{b}])$ di dimensione $n + 1$ invariante per traslazione dei parametri. Se per ogni $J = [\hat{a}, b]$ con $b \in (\hat{a}, \hat{b})$ si può trovare un sistema di funzioni $(u_0, \dots, u_n)_J$ in \mathcal{U} tale che soddisfa le condizioni 6.1, allora $(u_0, \dots, u_n)_I$ è un sistema extended totally positive su I e una B-base su $\mathcal{U}(I)$.*

Osservazione 18. Si noti che nei risultati precedenti non si assume che il sistema sia extended totally positive a priori ma è una conseguenza. Tale implicazione ha un'importanza rilevante nelle applicazioni, infatti se si vuole determinare se uno spazio \mathcal{U} è adatto alla modellazione geometrica, tali risultati ci garantiscono una risposta e nel caso affermativo anche una B-base.

Proposizione 6.14. *Le B-base sono le basi che hanno la migliore capacità di approssimare la forma della poligonale di controllo.*

6.2.1 Esempi B-base

Esempio 6.2. Si possono trovare B-basi normalizzate definite nell'intervallo $I_\alpha = [0, \alpha]$ con $\alpha < 2\pi$ per i seguenti spazi:

$$\begin{aligned} P_1 &= \text{span}\{1, t, \cos t, \sin t\} \\ Q &= \text{span}\{1, t, t^2, \dots, \cos t, \sin t\} \\ P_2 &= \text{span}\{1, t, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t\} \\ I &= \text{span}\{1, t, \cos t, \sin t, t \cos t, t \sin t\} \end{aligned}$$

Infatti tutti gli spazi considerati sono invarianti per traslazione dei parametri, quindi si può applicare il corollario 6.13 per trovare una B-base normalizzata con la proprietà di extended totally positive. Possiamo quindi concludere che nel caso di $\alpha < 2\pi$ gli spazi P_1 , Q , P_2 , I sono ET-spazi.

D'altra parte nel caso in cui $\alpha = 2\pi$, non può esistere una B-base normalizzata per nessuno di questi spazi.

Esempio 6.3. Si consideri lo spazio delle funzioni esponenziali E , definito come segue:

$$E = \left\{ \sum_{i=0}^n c_i e^{\lambda_i t} \mid c_i \in \mathbb{R}, i = 0, \dots, n \right\} \quad \lambda_0 < \dots < \lambda_n, t \in \mathbb{R}$$

Si può verificare che la base $(e^{\lambda_0 t}, \dots, e^{\lambda_n t})$ è una B-base.

Esempio 6.4. Il metodo descritto in questo esempio permette di costruire spazi che possiedono una B-base. In particolare tra queste famiglie di spazi troviamo come casi particolari lo spazio dei polinomi esponenziali, trigonometrici e iperbolici.

Prese due funzioni continue e non negative $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, si definisce lo spazio $\mathcal{U} = \text{span}\{u_0, \dots, u_n\}$ su I ove

$$u_i(t) = \binom{n}{i} f^i(t) g^{n-i}(t) \quad i = 0, \dots, n$$

Si ha che (u_0, \dots, u_n) formano una B-base per \mathcal{U} se e solo se la funzione $\frac{f}{g}$ definita in $I_0 = \{t \in I \mid g(t) \neq 0\}$ è crescente e soddisfa

$$\inf \left\{ \frac{f(t)}{g(t)} \mid t \in I_0 \right\} = 0$$

$$\sup \left\{ \frac{f(t)}{g(t)} \mid t \in I_0 \right\} = +\infty.$$

Un esempio ottenuto seguendo questo procedimento, è dato dai polinomi di Bernstein dove $I = (a, b]$ e le funzioni f e g sono definite come

$$f(t) = t - a$$

$$g(t) = b - t$$

Per ulteriori dettagli si rimanda a [Peñ99].

6.3 Spazio dei polinomi generalizzato

In questa sezione costruiamo una base per lo spazio dei polinomi generalizzato $P_{u,v}^n([a, b])$ in modo che sia normalizzata e verifichi la proprietà di totally positive. Inoltre si mostra che tale base è una B-base normalizzata.

Definizione 6.6. Date $u, v \in C^{n+1}([a, b])$, definiamo

$$P_{u,v}^n([a, b]) = \text{span}\{1, x, \dots, x^{n-2}, u(x), v(x)\} \quad x \in [a, b]; n \geq 2$$

Si pone $\dim(P_{u,v}^n) = n + 1$, perciò si chiede che u^{n-1}, v^{n-1} siano linearmente indipendenti.

Ipotesi 6.1. Durante tutta la trattazione si assume che ogni elemento $\psi \in P_{u,v}^n([a, b])$ sia tale che se

$$\psi^{(n-1)}(x_1) = \psi^{(n-1)}(x_2) = 0 \quad x_1, x_2 \in [a, b] \quad x_1 \neq x_2,$$

allora

$$\psi^{(n-1)}(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b].$$

Si noti che questa ipotesi unita al fatto che $\dim(P_{u,v}^n) = n + 1$, equivale a chiedere che $\{u^{(n-1)}, v^{(n-1)}\}$ sia un T-sistema su $[a, b]$.

Allo scopo di costruire una base normalizzata per $P_{u,v}^n([a, b])$ che verifichi la proprietà di totally positive, consideriamo inizialmente $\{\tilde{B}_0, \dots, \tilde{B}_n\}$ una base di $P_{u,v}^n([a, b])$ costruita imponendo che per $l = 0, \dots, n - 1$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_l^{(i)}(a) &= 0 & i = 0, \dots, l - 1 \\ \tilde{B}_l^{(l)}(a) &= 1 \\ \tilde{B}_l^{(i)}(b) &= 0 & i = 0, \dots, n - l - 1 \end{aligned}$$

e per $l = n$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_n^{(i)}(a) &= 0 & i = 0, \dots, n - 1 \\ \tilde{B}_n(b) &= 1. \end{aligned}$$

Il seguente teorema mostra che è possibile scalare le funzioni $\{\tilde{B}_0, \dots, \tilde{B}_n\}$ appena costruite, in modo da ottenere una partizione dell'unità positiva.

Teorema 6.15. *Data la base $\{\tilde{B}_0, \dots, \tilde{B}_n\}$ costruita precedentemente, esistono degli scalari b_l , $l = 0, \dots, n$ tali per cui ponendo*

$$B_l = b_l \tilde{B}_l$$

si ha

$$\sum_{l=0}^n B_l = 1.$$

Quindi, possiamo concludere che $\{B_0, \dots, B_n\}$ è una base normalized positive per lo spazio $P_{u,v}^n([a, b])$ detta anche base di Bernstein. Inoltre

$$B_l(x) \geq 0 \quad x \in [a, b], \quad l = 0, \dots, n.$$

La base di Bernstein appena costruita ha molteplici proprietà degli spazi di Tchebycheff introdotti nel capitolo 1 e in particolare è la B-base normalized dello spazio dei polinomi generalizzato.

Teorema 6.16. *La base $\{B_0, \dots, B_n\}$ è strettamente totally positive in (a, b) e totally positive in $[a, b]$.*

Corollario 6.17. *La base $\{B_0, \dots, B_n\}$ è la B-base normalized per lo spazio $P_{u,v}^n([a, b])$.*

Teorema 6.18. *La base $\{B_0, \dots, B_n\}$ è un OCT-sistema su (a, b) e un OCWT-sistema in $[a, b]$.*

Teorema 6.19. *La base $\{B_0, \dots, B_n\}$ è un OCET-sistema su (a, b) . Inoltre se ogni elemento $\psi \in P_{u,v}^n([a, b])$ è tale che se*

$$\psi^{(n-1)}(x_1) = \psi^{(n)}(x_1) = 0 \quad x_1 \in (a, b),$$

allora

$$\psi^{(n-1)}(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b].$$

si ha che la base di Bernstein è un OCWT-sistema in $[a, b]$.

6.3.1 Formula ricorrente

Descriviamo ora una relazione ricorrente integrale per costruire gli elementi delle base di Bernstein.

Posto

$$U_{0,1,n}(a) = 1$$

$$U_{0,1,n}(b) = 0$$

$$U_{1,1,n}(a) = 0$$

$$U_{1,1,n}(b) = 1$$

definiamo per $k = 2, \dots, n$

$$U_{0,k,n}(x) = 1 - V_{0,k-1,n}(x)$$

$$U_{i,k,n}(x) = V_{i-1,k-1,n}(x) - V_{i,k-1,n} \quad i = 1, \dots, k-1$$

$$U_{k,k,n}(a) = V_{k-1,k-1,n}$$

dove per $i = 0, \dots, k$ e $k = 1, \dots, n-1$

$$V_{i,k,n} = \int_a^x \frac{U_{i,k,n}(t)}{d_{i,k,n}} dt$$

$$d_{i,k,n} = \int_a^b U_{i,k,n}(t) dt.$$

Le funzioni $\{U_{0,k,n}, \dots, U_{k,k,n}\}$ così definite, formano la base di Bernstein per lo spazio

$$\text{span}\{1, x, \dots, x^{k-2}, u^{n-k}(x), v^{n-k}(x)\}.$$

In particolare per ogni $i = 0, \dots, k$ e $k = 1, \dots, n$ si ha che $U_{i,k,n}(x) > 0$, $x \in [a, b]$.

Esempio 6.5. Utilizziamo la formula ricorrente integrale appena vista, per trovare come caso particolare i polinomi di Bernstein di grado 2 definiti sull'intervallo $[a, b]$.

Posto

$$\begin{aligned} U_{0,0,n}(x) &= 1 \\ U_{1,0,n}(x) &= 0 \end{aligned}$$

calcoliamo le funzioni di grado 1

$$\begin{aligned} d_{0,0,n} &= \int_a^b 1 \, dt = b - a \\ V_{0,0,n}(x) &= \frac{1}{b-a} \int_a^x 1 \, dt = \frac{x-a}{b-a} \\ U_{0,1,n}(x) &= 1 - \frac{x-a}{b-a} = \frac{b-x}{b-a} \\ U_{1,1,n}(x) &= \frac{x-a}{b-a}. \end{aligned}$$

Passiamo ora alle funzione di grado 2. Ragionando nello stesso modo si ha

$$\begin{aligned} d_{0,1,n} &= \int_a^b \frac{b-t}{b-a} dt = \frac{1}{b-a} \left(b^2 - ba - \frac{b^2}{2} + \frac{a^2}{2} \right) \\ &= \frac{1}{b-a} \frac{(b-a)^2}{2} = \frac{b-a}{2} \\ V_{0,1,n}(x) &= \int_a^x \frac{2}{b-a} \frac{b-t}{b-a} dt = \frac{2}{(b-a)^2} \left(bx - ba - \frac{x^2}{2} + \frac{a^2}{2} \right) \\ U_{0,2,n} &= 1 - \frac{2}{(b-a)^2} \left(bx - ba - \frac{x^2}{2} + \frac{a^2}{2} \right) \\ &= \frac{b^2 + a^2 - 2ab - 2bx + 2ab + x^2 - a^2}{(b-a)^2} = \frac{(b-x)^2}{(b-a)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{1,1,n} &= \int_a^b \frac{t-a}{b-a} dt = \frac{1}{b-a} \left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} - ab + a^2 \right) \\
&= \frac{(b-a)}{2} \\
V_{1,1,n}(x) &= \int_a^x \frac{t-a}{b-a} \frac{2}{b-a} dt = \frac{2}{(b-a)^2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2} - ax + a^2 \right) \\
&= \frac{(x-a)^2}{(b-a)^2}
\end{aligned}$$

Quindi abbiamo trovato che i polinomi di Bernstein di grado 2 definiti sull'intervallo $[a, b]$ sono

$$\begin{aligned}
U_{1,2,n}(x) &= \frac{2}{b-a} \left(bx - ba - \frac{x^2}{2} + \frac{a^2}{2} \right) - \frac{(x-a)^2}{(b-a)^2} \\
&= \frac{1}{(b-a)^2} \left(-2x^2 + 2ax + 2bx - 2ab \right) \\
&= \frac{2}{(b-a)^2} (b-x)(x-a) \\
U_{2,2,n}(x) &= \frac{(x-a)^2}{(b-a)^2}.
\end{aligned}$$

6.4 Teoria spline

Lo scopo per cui sono state introdotte in questa trattazione le B-base, è quello di vedere un differente approccio alla teoria spline. In particolare in questa sezione, partendo dallo spazio 4-dimensionale

$$P_{u,v}^3([0, 1]) = \text{span}\{1, x, (1-x)^m, x^m\} \quad x \in [0, 1]; m \geq 3,$$

costruiamo lo spazio spline polinomiale generalizzato di ordine 4. Successivamente, attraverso una costruzione geometrica, otteniamo le rispettive funzioni B-spline e i corrispondenti coefficienti di Bezier.

E' importante sottolineare che attraverso questo metodo alternativo, le B-spline sono ottenute con lo stesso costo computazione e mantengono le stesse utili proprietà geometriche.

Definizione 6.7. Presa una sequenza di nodi distinti $x_0 < x_1 < \dots < x_N$ e un vettore di molteplicità $M = \{m_0, m_1, \dots, m_N\}$ tale che $1 \leq m_i \leq 4$ e $m_0 = m_N = 4$, definiamo $h_i = x_{i+1} - x_i$ per ogni $i = 0, \dots, N - 1$ e nell'intervallo $[x_i, x_{i+1}]$ poniamo

$$\begin{aligned} u_i(t) &= (1 - t)^{m_i} \\ v_i(t) &= t^{m_i} \end{aligned}$$

con $t = \frac{(x-x_i)}{h_i}$. Allora, lo spazio spline polinomiale generalizzato di ordine 4 è definito come

$$S_M^3 = \left\{ \begin{array}{l} s \in C^2[0, 1] \text{ t.c. per } x \in [x_i, x_{i+1}], \ i = 0, \dots, N - 1 \\ s(x) = \psi_i(t) \text{ con } t = \frac{(x-x_i)}{h_i} \text{ e } \psi_i \in P_{u,v}^3([0, 1]). \end{array} \right\}$$

Osservazione 19. E' bene sottolineare che per $m > 3$, $P_{u,v}^3([0, 1])$ è un ET-sistema solamente sull'intervallo $(0, 1)$, in quanto negli estremi sono presenti troppi zeri. Considerando l'intervallo chiuso $[0, 1]$, lo spazio risulta essere solo un T-sistema.

Tuttavia, seguendo l'idea dell'articolo [CLM05], è comunque possibile applicare le condizioni di continuità sull'intervallo chiuso, garantendo in ogni caso l'esistenza dello spazio appena definito.

Consideriamo ora la sequenza dei nodi distinti $w_{-3} \leq \dots \leq w_{K+3}$ con $K \geq N$, che si ottiene da $\{x_0, \dots, x_N\}$ esplicitando la molteplicità di ogni nodo. Lo scopo è trovare un insieme di funzioni $\{N_{-1}, \dots, N_{K+1}\}$ con le seguenti proprietà:

- $N_i(x) > 0$ per $x \in (w_{i-2}, w_{i+2})$;
- $N_i(x) = 0$ per $x \notin (w_{i-2}, w_{i+2})$;
- $\sum_{i=-1}^{K+1} N_i(x) = 1$ per $x \in [w_0, w_K]$;
- $N_i(x) \in S_M^3$.

Tali funzioni sono chiamate B-spline, nel senso visto nei capitoli precedenti. Il seguente teorema ci garantisce l'unicità delle B-spline e di più, seguendo i passi della dimostrazione, ci fornisce un metodo costruttivo per crearle.

Teorema 6.20. *Esiste una e una sola sequenza $\{N_{-1}, \dots, N_{K+1}\}$ che soddisfa le proprietà sopra citate.*

Dimostrazione. Denotiamo con $l_{j,k}^{(i)}$, $k = 0, 1, 2, 3$ i punti di controllo di una generica B-spline N_i sull'intervallo $[x_j, x_{j+1}]$. I tratti polinomiali delle B-spline di ordine 4 possono essere descritti dai punti di controllo $(\xi_{j,k}, l_{j,k}^{(i)})$, $k = 0, 1, 2, 3$ ove

$$\xi_{j,0} = x_j$$

$$\xi_{j,1} = x_j + \frac{h_j}{3}$$

$$\xi_{j,2} = x_{j+1} - \frac{h_j}{3}$$

$$\xi_{j,3} = x_{j+1}$$

E' noto che se $m_j = 1$, la B-spline di ordine 4 è C^2 in x_j e di più la retta che connette $(\xi_{j-1,1}, l_{j-1,1}^{(i)})$ con $(\xi_{j-1,2}, l_{j-1,2}^{(i)})$ ha un punto in comune con la retta che congiunge $(\xi_{j,1}, l_{j,1}^{(i)})$ e $(\xi_{j,2}, l_{j,2}^{(i)})$. Denotando tale punto (η, d) , possiamo affermare che

$$\eta = \frac{h_{j-1}}{h_{j-1} - h_j} \xi_{j-1,2} + \frac{h_j}{h_{j-1} - h_j} \xi_{j,1}$$

$$d = \begin{cases} 1 & j = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e che $l_{j-1,3} = l_{j,0}$ è ottenuto come combinazione convessa di $l_{j-1,2}^{(i)}$ e $l_{j,1}^{(i)}$.

Ripetendo questo procedimento su ogni intervallino, si ottiene esplicitamente una base B-spline.

□

Il passo successivo, è quello di ricavare i coefficienti di Bezier. Ogni tratto ψ_i di un elemento $\psi \in S_M^3$ può essere ovviamente rappresentato come

$$\psi_i(x) = \sum_{j=0}^3 b_j^{(i)} B_{j,3} \left(\frac{x - x_i}{h_i} \right)$$

ove $\{B_{0,3}, B_{1,3}, B_{2,3}, B_{3,3}\}$ rappresenta la base di Bernstein cubica.

Si ha che i coefficienti di Bezier $b_j^{(i)}$, possono essere calcolati utilizzando la stessa costruzione geometrica vista nella dimostrazione del teorema precedente. In particolare si applica ripetutamente l'algoritmo precedente alla poligonale che connette i coefficienti B-spline d_{-1}, \dots, d_{N+1} , ottenendo il seguente teorema.

Teorema 6.21. *I coefficienti $b_0^{(i)}, b_1^{(i)}, b_2^{(i)}, b_3^{(i)}$ dell' i -esimo tratto dipendono solo dai quattro coefficienti B-spline $d_{i-1}, d_i, d_{i+1}, d_{i+2}$. In particolare si ha che*

$$b_0^{(i)} = b_3^{(i-1)} = w_i b_2^{(i-1)} + (1 - w_i) b_1^{(i-1)}$$

$$b_1^{(i)} = (1 - \xi_i) d_i + \xi_i d_{i+1}$$

$$b_2^{(i)} = \eta_i d_i + (1 - \eta_i) d_{i+1}$$

ove

$$\xi_i = \frac{\rho_i}{\rho_i + \tau_i + \sigma_i}$$

$$\eta_i = \frac{\sigma_i}{\rho_i + \tau_i + \sigma_i}$$

$$w_i = \frac{\frac{h_i}{m_i}}{\frac{h_{i-1}}{m_{i-1}} \frac{h_i}{m_i}}$$

e si è posto

$$\begin{aligned}\rho_i &= \frac{\left(\frac{h_{i-1}}{m_{i-1}} + \frac{h_i}{m_i}\right) \frac{h_{i-1}}{m_{i-1}-1}}{\frac{h_{i-1}}{m_{i-1}-1} \frac{h_i}{m_i-1}} \\ \sigma_i &= \frac{\left(\frac{h_i}{m_i} + \frac{h_{i+1}}{m_{i+1}}\right) \frac{h_{i+1}}{m_{i+1}-1}}{\frac{h_i}{m_i-1} \frac{h_{i+1}}{m_{i+1}-1}} \\ \tau_i &= h_i - 2 \frac{h_i}{m_i}.\end{aligned}$$

Capitolo 7

Conclusioni

In questa trattazione si è focalizzata l'attenzione sugli spazi spline adatti all'ambito della modellazione geometrica, considerando le molteplici proprietà necessarie e gli strumenti più utili e utilizzati. In particolare si sono presentati due approcci differenti per introdurre e trattare questi tipi di spazi spline generalizzate. In questo capitolo, riassumiamo i risultati ottenuti e indichiamo alcune direzioni nelle quali è possibile sviluppare ulteriori approfondimenti.

Dal primo approccio analizzato, che ha come maggiore esponente Larry L. Schumaker, emerge che gli spazi spline adatti per la modellazione geometrica devono avere una base a supporto locale, positiva, normalizzata e che soddisfi la proprietà di partizione dell'unità. Inoltre per poter effettivamente utilizzare tale base, deve essere calcolabile in modo computazionalmente efficiente, per esempio attraverso l'uso di una formula ricorrente. Queste caratteristiche sappiamo essere presenti negli spazi spline polinomiali, che tuttavia non permettono di rappresentare esattamente molti tipi di curve come le eliche e le cicloidi. Per questo motivo, in questa trattazione si sono analizzati e trovati altri spazi spline adatti al contesto CAGD ¹. In particolare tra le L-spline abbiamo provato che le spline trigonometriche e iperboliche di ordine dispari soddisfano questi requisiti. Il neo di queste affermazioni è che l'esistenza del fattore che fa in modo che la base B-spline soddisfi la proprietà di somma 1, è dimostrata a livello puramente teorico. Infatti siamo riusciti a esplicitare

¹Computer Aided Geometric Design

un'espressione semplice per tale fattore solo nel caso di B-spline di ordine 3. Questo è sicuramente un fattore limitativo nel momento in cui si passa dalla trattazione teorica all'implementazione e all'utilizzo nelle applicazioni.

Gli spazi spline trigonometrici e iperbolici di ordine pari, devono invece essere scartati a priori in quanto in questi casi lo spazio non contiene la funzione 1 quindi non può essere trovato un fattore per trasformare la base B-spline in una che goda della proprietà di partizione dell'unità.

Un ulteriore tipo di spline che può essere impiegata nella modellazione geometrica sono le UE-spline, una classe più ampia di spline che contiene come casi particolari le spline trigonometriche, iperboliche di ordine dispari 3 citate in precedenza. Anche in questo caso è possibile costruire una base con le proprietà volute e si è trovata una formula ricorrente per poter calcolare le funzioni base. La particolarità di questa formula è che dà luogo a funzioni base già normalizzate e con somma 1 ma prevede il calcolo dell'integrale. Come ben noto, dal punto di vista computazionale implementare numericamente una formula ricorrente che fa uso dell'integrazione come quella per le UE-spline, è molto dispendioso e può produrre risultati instabili per dimensioni del problema abbastanza grandi. In questo modo si è risolto il problema precedente del fattore che permette di costruire una base con la proprietà di partizione dell'unità, ma si ha un problema di implementazione. Per risolvere questa problematica e implementare in maniera efficiente la formula ricorrente UE, abbiamo introdotto lo strumento delle funzioni di Transizione che sappiamo restituire proprio le B-spline volute per considerazioni di unicità.

Un ulteriore strumento molto utilizzato e necessario nell'ambito della modellazione geometrica è il Knot-Insertion. In questo elaborato si è riusciti nell'intento di trovare diversi modi generali per ricavare esplicitamente tale algoritmo. Tuttavia, la problematica maggiore da affrontare quando si parla di Knot-Insertion è che non si conosce ancora un criterio per capire a priori se tale algoritmo esiste o meno per un determinato spazio. Nella nostra trattazione abbiamo verificato l'esistenza del KI e ricavato un'espressione esplicita per gli spazi spline trigonometrici, iperbolici e UE.

Oltre che per l'importanza dell'algoritmo in se, sapere che esiste Knot-Insertion

permette di dimostrare due proprietà essenziali nel contesto CAGD: la proprietà di Variation Diminishing e la proprietà di totally positive della matrice di collocazione. Questo conferma e sostiene l'idea di utilizzare gli spazi spline trigonometrici e iperbolici di ordine dispari e gli spazi spline UE nell'ambito della modellazione geometrica.

Nel secondo approccio studiato invece, che ha come maggiore esponente Juan M. Peña, non è necessario ricercare spazi spline aventi una base con le proprietà volute, in quanto in questo caso la base viene costruita ad hoc in modo da verificare direttamente tutte le proprietà essenziali citate in precedenza. Questo tipo di base è detta B-base e ha come caso particolare la base B-spline; in questo modo si ritrovano gli spazi spline trigonometrici e iperbolici. Anche per questo tipo di base più generale, esiste una formula ricorrente che però prevede il calcolo dell'integrale. Questa teoria essendo abbastanza recente, non è ancora sufficientemente sviluppata come l'approccio precedente e non è stato ancora esplicitato un modo efficiente per implementarla. Un altro punto ancora non considerato è l'algoritmo di Knot-Insertion, infatti in questo caso non è ancora stata trovata un'espressione esplicita.

Una direzione in cui è possibile sviluppare e approfondire questo elaborato, oltre ai punti messi in luce precedentemente, è data dal considerare gli spazi spline misti: spazi a tratti in cui in ogni tratto può essere cambiata la tipologia della base presa in esame. In questo modo potrebbe essere possibile ampliare ulteriormente la classe di spazi spline utili nella modellazione geometrica.

Appendice A

Libreria

La libreria fornita contiene tutte le funzioni MATLAB create ed utilizzate durante l'elaborazione della tesi. La maggior parte di questi codici sono stati usati per effettuare esempi riportati nell'elaborato o per effettuare verifiche numeriche e simboliche.

In questa appendice riportiamo le funzioni e gli script principali, seguiti da una breve descrizione.

ARGOMENTO: FORMULE RICORRENTI CLASSICHE

- `gc_bspl(g,t,x,scelta)`, `ct_bspl_trigonometriche(g,t,x,scelta)`, `ct_bspl_iperboliche(g,t,x,scelta)`: codice che calcola le funzioni base B-spline rispettivamente polinomiali, trigonometriche e iperboliche non nulle in un punto (o in un vettore) x implementando in maniera efficiente la formula ricorrente classica secondo uno schema triangolare. Richiede come input oltre ad x , il grado delle B-spline g , la partizione nodale estesa t su cui è definita la base e una variabile *scelta* che permette di scegliere tra il caso normalizzato e il caso non normalizzato. Inoltre per $g = 2$, le funzioni che si riferiscono al caso trigonometrico e iperbolico, effettuano le modifiche necessarie per ottenere la proprietà di partizione dell'unità.
- `ct_bspl_plot`: produce il grafico delle funzioni base B-spline polinomiali-

li, trigonometriche e iperboliche utilizzando le tre funzioni descritte in precedenza.

- `ct_pmouseVD`: permette di definire in maniera interattiva i coefficienti di una curva e di rappresentarla graficamente. In particolare gestisce il caso polinomiale, trigonometrico e iperbolico utilizzando le funzioni sopra elencate per costruire e rappresentare le funzioni base B-spline.
- `gc_bspl_sym`, `ct_bspl_trigonometriche_sym`, `ct_bspl_iperboliche_sym`: codice che determina in forma simbolica rispettivamente le B-spline polinomiali, trigonometriche e iperboliche di grado $g < 5$, sull'intervallo $[t_i, t_{i+1}]$ di una partizione nodale non uniforme.

ARGOMENTO: FORMULA RICORRENTE INTEGRALE PER LE UE-SPLINE

- `ct_confronto_g2`: calcola le funzioni base B-spline UE di grado $g = 2$ come differenza di funzioni di Transizione su una partizione nodale a nodi semplici, nel caso polinomiale, trigonometrico e iperbolico. Successivamente confronta il risultato ottenuto con quello che si ottiene applicando alla stessa situazione le formule ricorrenti classiche e la formula integrale UE.
- `ct_ftransizione_g3`: calcola le funzioni base B-spline UE di grado $g = 3$ come differenza di funzioni di Transizione su una partizione nodale a nodi semplici. In particolare gestisce il caso polinomiale, trigonometrico e iperbolico.
- `ct_ftransizione_nodiMultipli`: calcola l'espressione analitica delle B-spline polinomiali di grado $g = 3$ come differenza di funzioni di Transizione, nel caso di una partizione nodale composta da nodi multipli. In particolare il programma è settato nel caso di un solo nodo multiplo al primo posto, ma si possono ottenere esempi differenti anche con più nodi

multipli contemporaneamente modificando alcune righe. La particolarità di questo script è che tratta la partizione nodale multipla come quella semplice, ossia si considera la seconda funzione di Transizione come shift della precedente. E' bene sottolineare che questa argomentazione vale solo nel caso polinomiale.

- `ct_nodimultipli_senzashift`: calcola l'espressione analitica delle B-spline polinomiali, trigonometriche e iperboliche di grado $g = 3$ come differenza di funzioni di Transizione nel caso di una specifica partizione nodale in cui solo il primo nodo è multiplo, in particolare di molteplicità 2. Tale funzione non considera la seconda funzione di Transizione come shift della precedente, ma la ricalcola nuovamente. Di conseguenza, è applicabile non solo al caso polinomiale ma anche al quello trigonometrico e iperbolico.

ARGOMENTO: KNOT-INSERTION

- `bs2bs_global_econ_new_new(n,t,u)`, `ct_bs2bs_global_trig(n,t,u)`, `ct_bs2bs_global_ip(n,t,u)`: crea la matrice di conversione per passare dalla base B-spline di grado n definita sulla partizione nodale t , alla base B-spline di uguale grado ma riferita alla partizione nodale u . E' settato per B-spline rispettivamente polinomiali, trigonometriche e iperboliche. In aggiunta, se la matrice di cambio di base così ottenuta è bidiagonale e ad elementi positivi, si è trovato l'espressione esplicita dell'algoritmo di KI.
- `KIgrafico_pol`, `KIgrafico_trig`, `KIgrafico_ip`: implementa il metodo alternativo per trovare l'algoritmo di KI visto nella sezione 5.3. In particolare è settato per B-spline di grado $g = 2$ rispettivamente polinomiali, trigonometriche e iperboliche.
- `KIgrafico_UE`: implementa il metodo alternativo per trovare l'algoritmo di KI visto nella sezione 5.3, in particolare è settato per UE-spline di grado $g = 2$ trigonometriche e iperboliche.

-
- `coefficienti_UE`: calcola i coefficienti dell'algoritmo di KI visti nella sezione 5.4, nel caso particolare delle UE-spline trigonometriche e iperboliche.
 - `ct_pmouseVD_KI`: dati in maniera interattiva dei punti di controllo, tale funzione costruisce la poligonale di controllo e la rispettiva curva. Inoltre, è possibile effettuare Knot-Insertion di uno o più nodi e visualizzare graficamente i cambiamenti che si hanno nella poligonale e nella curva. Successivamente, la funzione rappresenta graficamente anche le funzioni base B-spline prima e dopo l'inserzione. Questa funzione è costruita per gestire spazi spline polinomiali, trigonometrici e iperboliche.

Bibliografia

- [BCR13] Carolina Vittoria Beccari, Giulio Casciola, e Lucia Romani. Construction and characterization of non-uniform local interpolating polynomial splines. *J. Comput. Appl. Math.*, 2013. To appear.
- [CLM05] Paolo Costantini, Tom Lyche, e Carla Manni. On a class of weak Tchebycheff systems. *Numer. Math.*, 101(2):333–354, agosto 2005.
- [Cos00] Paolo Costantini. Curve and surface construction using variable degree polynomial splines. *Comput. Aided Geom. Des.*, 17(5):419–446, maggio 2000.
- [CP94] J.M. Carnicer e J.M. Peña. Totally positive bases for shape preserving curve design and optimality of b-splines. *Computer Aided Geometric Design*, 11(6):633 – 654, 1994.
- [CP10] Mainar E. Carnicer, J. M. e J. M. Peña. Optimal bases of spaces with trigonometric functions. *Monografias Matematicas Garcia de Galdeano*, 35, pagine 91–98, 2010.
- [CPn94] J. M. Carnicer e J. M. Peña. Totally positive bases for shape preserving curve design and optimality of b-splines. *Comput. Aided Geom. Des.*, 11(6):633–654, dicembre 1994.
- [CR07] Giulio Casciola e Lucia Romani. A general matrix representation for non-uniform b-spline subdivision with boundary control. *ALMA-DL, Digital Library of the University of Bologna*, 2007.

- [dBD85] Carl de Boor e Ronald A. DeVore. A geometric proof of total positivity for spline interpolation. *Math. Comp.*, 45(172):497–504, ottobre 1985.
- [dBPC80] Carl de Boor, Allan Pinkus, e Winsconsin Univ-Madison Mathematics Research Center. *A Factorization of Totally Positive Band Matrices*. MRC technical summary report. Defense Technical Information Center, 1980.
- [Kva00] B.I. Kvasov. *Methods of Shape-preserving Spline Approximation*. World Scientific, 2000.
- [LW79] Tom Lyche e R. Winther. A stable recurrence relation for trigonometric B-splines. *J. Approx. Theory*, 25(3):266–279, 1979.
- [Lyc85] Tom Lyche. A recurrence relation for Chebyshevian B-splines. *Constr. Approx.*, 1:155–173, 1985.
- [Man90] Mauro Manfredini. Analisi di formule ricorrenti per il calcolo di funzioni L-spline. Tesi di Laurea in Matematica, Università di Bologna, 1990.
- [MPSR01] E. Mainar, J. M. Peña, e J. Sánchez-Reyes. Shape preserving alternatives to the rational bézier model. *Comput. Aided Geom. Des.*, 18(1):37–60, febbraio 2001.
- [Nür89] G. Nürnberger. *Approximation by Spline Functions*. Springer-Verlag, 1989.
- [Peñ97] J. M. Peña. Shape preserving representations for trigonometric polynomial curves. *Comput. Aided Geom. Des.*, 14(1):5–11, gennaio 1997.
- [Peñ99] J.M. Peña. *Shaping Preserving Representations in Computer Aided Geometric Design*. Nova Science Pub Incorporated, 1999.
- [Pin10] A. Pinkus. *Totally Positive Matrices*. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, 2010.

-
- [Sch76] Larry L. Schumaker. On Tchebycheffian spline functions. *J. Approx. Theory*, 18(3):278–303, novembre 1976.
- [Sch82] Larry L. Schumaker. On recursions for generalized splines. *J. Approx. Theory*, 36:16–31, 1982.
- [Sch83] Larry L. Schumaker. On hyperbolic splines. *J. Approx. Theory*, 38:144–166, 1983.
- [Sch07] Larry L. Schumaker. *Spline functions: basic theory*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, terza edizione, 2007.
- [WF08] Guozhao Wang e Mei’e Fang. Unified and extended form of three types of splines. *J. Comput. Appl. Math.*, 216(2):498–508, giugno 2008.
- [WW11] Wei-li Wei e Guozhao Wang. Total positivity of ue spline basis. *Computer Aided Drafting, Design and Manufacturing*, pagine 51–54, 2011.