ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

**SCUOLA DI SCIENZE**
**Corso di Laurea Magistrale in Matematica**

# Analisi di alcune parti del trattato: "Methodus inveniendi lineas curvas"

**Tesi di Laurea in Storia della Matematica**

**Relatore:**
**Chiar.mo Prof.**
**Paolo Freguglia**

**Presentata da:**
**Andrea Tasini**

**I Sessione**
**Anno Accademico 2012-2013**

*"Ma s'io avessi previsto tutto questo, dati causa e pretesto, forse farei lo stesso. "*

*(Fracesco Guccini - L'avvelenata, 1976)*

# Indice

# Elenco delle figure

# Introduzione

*Il calcolo delle variazioni è quell'area della matematica definita dal seguente problema: determinare, in una famiglia assegnata di oggetti, quello che rende minima (oppure massima) una certa grandezza. Gli oggetti in questione possono essere funzioni, curve, superfici o altro*[1]. Talvolta, si richiede di massimizzare o minimizzare un funzionale, quindi una funzione il cui dominio è un insieme di funzioni, che potrebbe essere un funzionale integrale: in questo modo il problema muterebbe nella determinazione di una funzione che massimizzi o minimizzi il valore dell'integrale proposto. Nel calcolo delle variazioni moderno si effettua una distinzione metodologica tra due modalità di approccio alla materia: i *metodi diretti* e i *metodi indiretti*, questi ultimi comunemente chiamati *metodi classici*. Il termine *classico* ha, in realtà, una ragione di carattere storico, date le origini di tale disciplina radicate nel XVIII secolo.

Il presente elaborato ha l'obiettivo di ripercorrere in parte tali origini, tramite l'analisi tecnica di una fondamentale opera pubblicata nel 1744 a Ginevra: il *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetricis in latissimo sensu accepti* di Leonhard Euler. L'opera appena nominata, infatti, è la prima vera raccolta di metodi variazionali nella storia della matematica ed è il fondamentale punto di partenza per il lavoro di ricerca di altri autori in questo nuovo campo, tra i quali spicca il nome di Lagrange. Gli stessi metodi classici consistono nella dimostrazione di condizioni necessarie, per cui le funzioni

[1] cfr. [1].

siano effettivamente minimizzanti o massimizzanti, dedotte da Euler stesso nella sua opera e che verranno proposte nel corso dei prossimi capitoli.

Particolari problemi inerenti al calcolo delle variazioni sono anche i cosiddetti problemi isoperimetrici. Ancora oggi, essi consistono nella ricerca di funzioni che fungano da massimi o minimi per certi integrali, sotto l'ipotesi di isoperimetria, ovvero vincolando il particolare funzionale esprimente la lunghezza o perimetro della curva disegnata dalla funzione ad essere costante. Storicamente, i primi metodi del calcolo delle variazioni furono introdotti proprio per la risoluzione di problemi come quelli sopra descritti; si ricorda tra tutti Jakob Bernoulli e la sua opera [4].

L'elaborato è diviso in quattro capitoli, organizzati come segue. Il primo capitolo riguarda un'introduzione al calcolo differenziale del XVII e funge da contestualizzazione matematica per definire i concetti base dell'analisi infinitesimale del tempo. Viene svolta una breve *summa* del lavoro di tre autori: René Descartes, Pierre de Fermat e Gottfried Wilhelm Leibniz. Si citeranno anche due esempi concernenti tematiche di interesse per il resto dell'elaborato: il calcolo dei massimi relativi (Fermat) e la definizione di differenziale[2].

Contestualizzata la matematica dell'epoca, si procede nel secondo capitolo con i lavori di due autori che, in qualche modo, influenzarono notevolmente l'opera di Euler, analizzata nel seguito dell'elaborato. Johann e Jakob Bernoulli, infatti, sono considerati tra i "fondatori"del calcolo delle variazioni classico, la cui nascita viene fatta risalire alla pubblicazione della soluzione al problema della *brachistocrona* (1697 ripubblicata nel 1742 in [3]). La curva *brachistocrona* (o curva di più rapida discesa da un punto $A$ ad un punto $B$ posti a differenti altezze) è, infatti, un problema variazionale. In questo elaborato verrà proposta un'analisi delle soluzioni di entrambi i fratelli, proprio per fornire al lettore un'idea dei metodi utilizzati in funzione dell'analisi, molto più dettagliata, di quelli euleriani: sono proposti anche diversi confronti in base ai concetti utilizzati dai diversi autori.

[2]tratta da un articolo di Leibniz, di cui è riportata la traduzione in [6] pagg. 283-288

Nel terzo capitolo si passa all'oggetto vero e proprio dell'elaborato, ossia l'opera di Euler. In questa istanza si focalizzerà l'attenzione sui primi due capitoli del *Methodus*, per mostrare un primo importante risultato, matematicamente fondamentale. È proprio in queste pagine che Euler deduce l'equazione che in futuro verrà chiamata *equazione di Eulero-Lagrange*. I metodi classici del calcolo delle variazioni moderno si baseranno su questa equazione, ovviamente reinterpretata con notazioni e nozioni sconosciute all'Autore svizzero, come condizione necessaria per cui una funzione sia massimo o minimo di un dato funzionale integrale. Nell'opera del 1744 l'equazione in questione si presenta nella forma

$$N - \frac{dP}{dx} = 0 \tag{1}$$

dove $N$ e $P$ sono le componenti di una generica forma differenziale $dZ$ per cui $\int Zdx$ è l'integrale da massimizzare o minimizzare. Nel corso del capitolo si mostrerà anche come questa sia equivalente all'*equazione di Eulero-Lagrange* moderna. L'ultimo capitolo, invece, pone l'accento sui capitoli III e V dell'opera, analizzando i metodi *relativi*, come chiamati dall'Autore, e la loro rispettiva applicazione ai *problemi isoperimetrici*. Tali metodi sono definiti come metodi variazionali su classi di funzioni che hanno *proprietà comuni*. In questo senso, l'isoperimetria viene tradotta come *proprietà comune*, riscrivendo l'equazione sopra citata con questa condizione aggiuntiva. Come si vedrà, l'inserimento dell'isoperimetria aggiunge un grado di libertà al problema: come mostra anche Jakob Bernoulli in [4] e come fa notare Goldstine in [13], esso necessita di due variazioni sulla curva per essere risolto. Infine, nell'elaborato verranno analizzati diversi esempi di risoluzione di problemi isoperimetrici proposti da Euler nella sua opera come applicazioni del metodo relativo.

# Capitolo 1

# Introduzione al calcolo differenziale del XVII secolo

## 1.1 La nascita del calcolo: Descartes, Fermat e Leibniz

Durante il '600, numerosi matematici e scienziati discussero riguardo ad un particolare problema: la determinazione di una retta tangente ad una curva passante per un dato punto. Un problema che al giorno d'oggi sembra così elementare, non lo era affatto prima dell'introduzione della geometria analitica e del concetto di derivata. Tra i protagonisti del XVII secolo si ricordano soprattutto gli inventori ed ideatori di metodi per la risoluzione del problema sopra citato, destinato a diventare parte di una teoria molto più ampia: il *calcolo differenziale*. Il filosofo e scienziato francese Renè Descartes pubblicò nel 1637 la sua opera *Discours de la Methode* congiuntamente a tre saggi, l'ultimo dei quali divenne la base della geometria analitica e del calcolo differenziale, introdotti alla fine del secolo. Il suddetto saggio si chiama *Gèometrie* ed è diviso in tre libri. Nel primo viene fornita una descrizione dettagliata dei metodi di algebrizzazione delle curve tramite equazioni. Nel secondo si passa, invece, alla descrizione delle normali ad una curva, quindi delle tangenti[1]. Descartes stesso affermò che quella era la questione che più lo interessava; in [9] è riportata una citazione direttamente dalla *Gèometrie*:

[...] crederò di aver messo qui tutto quello che si richiede per gli elementi delle curve quando avrò dato in modo generale il metodo per tracciare le rette che cadono ad angoli retti su un loro punto preso a piacere. E oso dire che questo è il problema più utile e più generale non solo che io sappia, ma anche che abbia mai desiderato di sapere in Geometria.

Nella sua opera propose un metodo per lo studio delle curve tangenti, probabilmente poco soddisfacente e di difficile applicazione a problemi reali, per le complicazioni create dalla grande quantità di calcoli necessari a portarlo a conclusione. La ricerca di metodi per lo studio delle tangenti più pratici ed elementari di quello di Descartes portò Fermat allo studio dei massimi e minimi di una curva, per poi determinare le sottotangenti, quindi le tangenti, tramite essi. In [2][2] si richiama una controversia nata a causa dell'elaborazione del nuovo metodo di Fermat subito dopo la pubblicazione della *Gèometrie* e si afferma che: "[...] È dunque giustificabile che Descartes considerasse l'opuscolo di Fermat come un'opera proveniente da un ambiente ostile e mirante a sminuire la sua *Gèometrie*, come pure è comprensibile che il suo esame del metodo delle tangenti fosse particolarmente severo e tendesse, più che a impadronirsi di un algoritmo che vedeva come diretto concorrente del suo, a trovarne i punti deboli ed eventualmente a ricondurlo nell'ambito della sua trattazione. ".

Dagli studi portati avanti dai due autori sopra citati si creò un fertile terreno per l'elaborazione di un'importantissima teoria ad opera di G.W.Leibniz: la teoria del *calcolo differenziale*, anch'essa nata come metodo risolutivo al problema della tangente. Di seguito verranno proposti il metodo di Fermat e quello di Leibniz, proprio perchè ritenuti propedeutici alla comprensione di Euler e del suo *Methodus*.

[1]si ritrova una dettagliata descrizione della struttura della *Gèometrie* in [11] pagg. 317–323.

[2]paragrafo 4: Descartes contro Fermat

### 1.1.1 Metodo dei massimi e dei minimi: soluzione di Fermat

Come accennato, nello stesso periodo in cui si discuteva di equazioni di tangenti, Pierre de Fermat propose un manoscritto dal titolo *Methodus ad disquirendam maximam et minima*, risalente a pochi mesi prima della pubblicazione della *Gèometrie*. All'interno si ritrova, tra le altre cose, un metodo per il calcolo dei massimi e dei minimi[3] per semplici "funzioni", dove per funzione si intende in realtà una variabile al più dipendente da un'altra[4]. Presa una curva, che per comodità si dirà avere equazione $f(x)$, sapendo che essa è dotata di massimo $M$ e volendo calcolare il punto $x$ tale per cui $f(x) = M$, si può partire dalla seguente considerazione: preso un punto $A$ tale che $f(A) < M$, esiste un secondo punto $E$ tale che $f(A) = f(E)$[5]. Ciò è abbastanza intuitivo, in quanto in un intorno completo di un massimo relativo in una funzione continua si possono sempre trovare due punti di tale fattura. Da questo segue banalmente che $f(A) - f(E) = 0$, quindi

$$\frac{f(A) - f(E)}{A - E} = 0. \tag{1.1}$$

Supponendo ora di risalire nella curva fino a far coincidere il punto $A$ con il punto di massimo, si avrebbe $A = E$ ed $f(A) = f(E) = M$. Imponendo quindi nella (1.1) la condizione $A = E$ si otterrebbe l'equazione esprimente il valore di $A$ per cui $f(A)$ sia massimo relativo di $f$. Questo metodo è facilmente applicabile a semplici curve. Per esempio, volendo calcolare quale sia tra tutti i rettangoli di perimetro dato quello di area massima, si considerano i rettangoli di perimetro $2B$, di base $A$ e altezza $B - A$ supponendo, senza perdita di generalità, che $B > A$. L'area di un tale rettangolo è pari a

$$(B - A)A = AB - A^2$$

[3] ripreso e reinterpretato all'interno dell'enciclopedia italiana in [2] paragrafo 2: Il metodo dei massimi e minimi di Fermat

[4] il concetto di funzione verrà precisato solo molti anni dopo le pubblicazioni di Fermat e Descartes

[5] cfr. [2], paragrafo 2: si ricava questo metodo dagli scritti di Fermat.

quindi la richiesta è di trovare il punto di massimo della curva di equazione

$$f(A) = AB - A^2. \tag{1.2}$$

Seguendo il metodo sopra citato si ha

$$0 = \frac{f(A) - f(E)}{A - E} = \frac{AB - A^2 - EB - E^2}{A - E} = \frac{B(A - E) - (A - E)(A + E)}{A - E}$$

così

$$\frac{f(A) - f(E)}{A - E} = B - A - E = 0. \tag{1.3}$$

Imponendo a questo punto $A = E$ si ottiene infine la condizione

$$B = 2A \qquad A = \frac{B}{2}$$

che risolve il problema.

### Il metodo dell'*adequatio*

Nell'opera di Fermat, in realtà, si fa riferimento ad un altro metodo, di più ampia applicazione rispetto a quello appena riportato. In [11] e in [9] si ricostruisce, infatti, il cosiddetto *metodo dell'adequazione*[6]. Questo concetto, di origine molto più antica di Fermat stesso, stava ad indicare l'utilizzo di uguaglianze tra due quantità solo approssimativamente uguali. Il metodo precedente può essere per esempio riscritto considerando, invece che due punti $A$ ed $E$ tali che $f(A) = f(E)$, due punti $A$ ed $A + E$ tali che $f(A + E) - f(A) = 0$. In questo modo si semplifica notevolmente, anche se non sembra, la (1.1), poiché non si deve più dividere per $A - E$, bensì solamente per $E$. Quindi, l'equazione si riscrive come

$$\frac{f(A + E) - f(A)}{E} = 0. \tag{1.4}$$

[6]cfr. [11] pag. 325 e [9] pag. 176-177.

**Commento**

L'*adequatio*, come precedentemente accennato, era un concetto già conosciuto prima di Fermat. In [11] si riporta un passo dell'opuscolo di Fermat in cui l'autore francese faceva risalire la validità del suo metodo ad opere dell'antichità, come quelle di Pappo o Apollonio[7]. Mentre era ben chiaro il concetto di *adequatio* e il relativo metodo rimaneva puramente algebrico, si era ben lontani dal concetto di derivazione, nonostante la (1.4) possa sembrare molto simile al rapporto incrementale e la posizione di $E$ in 0 possa apparire come un passaggio al limite del tipo $E \to 0$.[8]

Semplicemente, Fermat utilizzò degli *incrementi* (probabilmente per la prima volta[9]) ponendoli successivamente pari a 0, per creare un'equazione risolvente. Tale metodo è valido per la costanza della curva in un piccolo intorno di un punto stazionario, ma per Fermat era semplicemente l'assimilazione in un punto "singolare"di due punti che, lontani dal massimo, rimarrebbero distinti. La certezza è che tali metodi, a partire da quello cartesiano per finire con gli ultimi citati, hanno creato solide basi per il lavoro di Leibniz e, in senso molto lato, anche per quello di Euler e degli altri pionieri del calcolo delle variazioni. La nuova idea dell'*incremento* sarà infatti ripresa da tutti gli autori seguenti e, per gli scopi di questi elaborato, giocherà un ruolo fondamentale.

### 1.1.2 Il *Nova Methodus* di G.W. Leibniz: definizione dei differenziali

Tutti i metodi alle differenze di Fermat e la teoria della geometria analitica di Descartes vennero studiati da G.W.Leibniz, che fu in grado di scrivere una vera e propria teoria matematica *nuova e semplice* per il calcolo delle

[7]cfr. [11] pag.327

[8]in [11]: *Fermat e, per molto tempo dopo Fermat, nessuno pensò ad una quantità come una funzione; mai Fermat parla di E come di un infinitesimo, mai nessuna forma di limite appare. Il metodo di adequazione è puramente algebrico.*

[9]cfr. [11] pag.326

tangenti, sottotangenti e dei massimi o minimi di date funzioni. In quel periodo, lo stesso matematico e filosofo tedesco fu uno dei co-fondatori di un giornale scientifico molto importante, gli *Acta Eruditorum.* Questo giornale venne pubblicato per la prima volta a Lipsia (città natale di Leibniz) nel 1682 e conteneva le maggiori scoperte scientifiche del tempo, tra le quali spiccano quelle dei fratelli Jakob e Johann Bernoulli e di Euler, di cui si parlerà ampiamente nei prossimi capitoli. Nel 1684, all'interno dello stesso giornale, Leibniz pubblicò un articolo dal titolo *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*, che segnò di fatto la nascita della moderna analisi.

È interessante come vengono introdotti i concetti di *differenziale* e *differenziazione* tramite le comuni regole delle operazioni tra derivate prime, oggi conosciute ed alla base dell'analisi matematica. In [6] si riporta: *Leibniz introduce direttamente le regole di differenziazione, mostra poi come si possano determinare i massimi e i minimi e i flessi delle curve e sottolinea la maggiore semplicità ed efficacia, rispetto agli altri metodi per risolvere il problema delle tangenti, che compete al suo calcolo delle differenze dal considerare direttamente i differenziali invece della sottotangente.*

L'articolo comincia con la definizione geometrica di *differenza* o differenziale di ordinate di una curva. Impostando un sistema di riferimento cartesiano si può ottenere una figura di questo tipo:

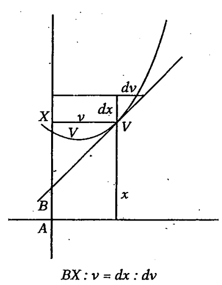



Figura 1.1

considerando come in figura 1.1, si prenda un punto $V$ arbitrario sulla curva e si calcoli la relativa sottotangente $BX$; denominando il segmento $VX$ come $v$ (inteso come ordinata) si ha che, preso un segmento $dx$, le differenze o *differenziale* di $v$, chiamato $dv$, sta a $dx$ come $v$ sta a $BX$.

$$dv : dx = v : BX \tag{1.5}$$

Tale definizione che non ha nulla a che vedere con quella moderna, bensì è puramente geometrica e costruttiva ed è seguita dalle regole del calcolo imposte da Leibniz, che sono pressappoco le stesse della derivazione come è intesa oggi.

**Regole del calcolo**

$$\begin{array}{cc}
\textit{Costante a} & da = 0, \quad dax = adx \\
\textit{Addizione} & z - y + w + x = v \Rightarrow d(z - y + w + x) = dz - dy + dw + dx = dv \\
\textit{Moltiplicazione} & y = xv \Rightarrow dy = dxv = xdv + vdx \\
\textit{Divisione} & z = \frac{v}{y} \Rightarrow dz = d\frac{v}{y} = \frac{vdy - ydv}{y^2} \\
\textit{Potenza} & d(x^a) = ax^{a-1}dx \quad d(\frac{1}{x^a}) = -\frac{adx}{x^{a+1}} \\
\textit{Radice} & d\sqrt[b]{x^a} = \frac{a}{b}dx\sqrt[b]{x^{a-b}}
\end{array}$$

Dato questo *algoritmo* per il calcolo dei differenziali di una qualsiasi variabile o funzione di variabili, si possono ricavare altre informazioni utili agli scopi, per le quali questo metodo è stato estremamente innovativo per l'epoca. Per esempio, per quanto riguarda il calcolo dei massimi o minimi di una funzione, fino ad allora erano stati elaborati metodi come quello di Fermat, ma quest'ultimo era applicabile solo in casi molto particolari. Grazie al metodo di Leibniz, utilizzando i differenziali, si potevano calcolare i massimi e i minimi in quasi ogni caso. Nell'articolo del 1684, come riportato in [6], l'autore effettuò una dissertazione sul comportamento dei segni dei differenziali e ricava un legame con la pendenza della curva, che tutti oggi conoscono. Egli afferma che il differenziale $dz$ in un punto $Z$ di una curva potrà essere una quantità positiva o negativa a seconda di come è direzionata la tangente in $Z$ alla curva stessa. Conseguentemente, dato che le ordinate $v$ possono sia crescere che decrescere, i differenziali $dv$ saranno quantità rispettivamente positive o negative, proprio per la definizione costruttiva data in precedenza. L'autore fa immediatamente notare che nessuno dei due casi si presenta in un punto $M$, massimo relativo della curva; siccome le ordinate $v$ non crescono nè decrescono, risulta intuitivo che il differenziale $dv$ in quel punto, non essendo nè positivo nè negativo, sarà nullo. Di seguito, Leibniz applica lo stesso discorso anche alla concavità della curva in relazione al differenziale al quadrato. Infine, viene mostrato un passaggio fondamentale in cui si spiega come comportarsi con equazioni da differenziare; si vedrà nel seguito dell'elaborato quanto gli autori "post-*Nova methodus*"utilizzino queste tecniche. Per esempio, avendo un'equazione, si può scrivere la relativa equazione differenziale semplicemente sostituendo ogni termine dell'equazione con il suo differenziale, mentre per ogni quantità che concorre alla formazione di un termine si applicheranno semplicemente le regole sopra enunciate.

### Commento

La definizione e costruzione geometrica dei differenziali sarà il punto di partenza per l'oggetto dell'analisi dei prossimi capitoli. Come già affermato, si esporranno di seguito i metodi del calcolo delle variazioni dovuti ad autori come i fratelli Bernoulli e Euler. Tali metodi affondano le proprie radici nel calcolo leibniziano e, come si vedrà, le costruzioni matematiche degli autori saranno quasi totalmente geometriche, date le basi della loro scuola risalenti alla geometria analitica cartesiana. Tuttavia, da queste basi nascono anche alcune ambiguità, che probabilmente risuoneranno nella mente del lettore nel corso dei prossimi paragrafi. Esse derivano dal mancato formalismo nell'utilizzo dei differenziali *infinitesimali*. Il concetto di infinitesimo era già presente tra il '600 ed il '700, ma spesso veniva assimilato ad un concetto geometrico di segmento molto piccolo e non inteso simbolicamente o come limite di una quantità tendente allo 0. Da questo si può notare come gli autori seguenti non hanno discrimine nel considerare differenziali come segmenti o come infinitesimi, e ciò può causare difficoltà nella comprensione dei testi.

# Capitolo 2

# Il calcolo delle variazioni prima di Euler

Il calcolo delle variazioni nacque come disciplina formale solo alla fine del XVII secolo prevalentemente ad opera matematici legati alla scuola del calcolo differenziale leibniziano. In realtà, lo storico e matematico Robert Woodhouse attribuì a I. Newton il primo lavoro inerente alla materia, ossia trattante metodi di massimo o minimo differenti dal solito, nei *Principia*; testualmente: "Il primo problema relativo ad una sorta di massimi o minimi distinti dall'ordinario era stato proposto da Newton nei *Principia*: riguardava i solidi di minima resistenza.[1]"

A tutto il 1600 il calcolo dei massimi e minimi si esauriva con il calcolo di punti stazionari di date funzioni; già P.Fermat e G.W.Leibniz, infatti, trovarono soluzioni e metodi soddisfacenti che segnarono la nascita del calcolo differenziale. Successivamente, tra la fine del XVII e l'inizio del XVIII secolo, i matematici cominciarono a cercare metodi per determinare funzioni che a loro volta erano massimi o minimi di dati funzionali o *forme integrali*, sfruttando una terminologia tipicamente euleriana.

[1] in [14]: *The first problem relative to a species of maxima and minima distinct from the ordinary, was proposed by Newton in the Principia: it was, that of the solid of least resistance.*

## 2.1 La brachistocrona: analisi di due soluzioni

I primi metodi di calcolo delle variazioni vennero formulati dai fratelli Johann e Jakob Bernoulli tra il 1696 e il 1697. Storicamente il primo esempio di tali problemi venne proposto da Johann Bernoulli negli *Acta Eruditorum* redatti a Lipsia nel giugno 1696 ; esso riguardava lo studio della cosiddetta *brachistocrona* o curva di più rapida discesa di un corpo materiale da un punto $A$ ad un punto $B$, posti a differenti altezze. L'enunciato, riportato più tardi anche in [3] richiede:

NUOVO PROBLEMA
i matematici sono invitati a trovarne una soluzione
*Dati due punti $A$ e $B$ in un piano vericale, trovare il percorso $AMB$ per il punto materiale $M$, discendente per la sua stessa gravità, in modo tale che esso si muova dal punto $A$ al punto $B$ nel minor tempo possibile.*[2]

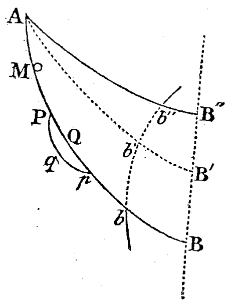



Figura 2.1

Tale problema venne risolto in maniera indipendente da entrambi i fratelli Bernoulli: per quanto riguarda Johann ci si riferisce a [3] per l'originale e a [10] per un'analisi specifica, mentre per Jakob si può ritrovare la sua dimostrazione commentata in [14] o in [10].

[2]in [3] pag. 155: *PROBLEMA NOVUM: ad cujus solutionem Mathematici invitatur. Datis in plano verticali duobus puncti A et B, assignare mobili M viam AMB, per quam gravitate sua descendens, et moveri a puncto A, brevissimo tempore perveniat ad alterum punctum B*

### 2.1.1 La soluzione di Johann Bernoulli: memoria del 1697

Per la sua soluzione matematica, Johann Bernoulli, non trascurando di citarne l'importanza, trae spunto da lavori di autori precedenti, quali Fermat e Huygens che, prima di lui, avevano conferito forti impulsi allo studio dell'ottica. In particolare, Fermat aveva formulato il famoso principio[3] da cui si susseguirono diverse applicazioni, come la legge di Snell sulla rifrazione della luce e Huygens aveva trovato soluzione al problema della tautocrona[4], scoprendo che essa altro non era che la cosiddetta *Cicloide*, che avrebbe risolto anche il problema della brachistocrona.

Sinteticamente, Johann considera un raggio di luce che si muove da un mezzo di densità data ad un secondo di densità differente[5], anche se dotato di particolari proprietà. Sul secondo mezzo l'Autore riferisce testualmente in [3]: "Si consideri ora un mezzo non uniformemente denso, ma per esempio diviso da un'infinità di lamelle orizzontali frapposte all'interno, gli interstizi delle quali sono riempiti con una materia diafana di porosità crescente o decrescente secondo un certo indice; è manifesto ...[6]". In tale contesto, applicando il principio di Fermat e la legge di Snell, il raggio di luce non può

[3]Il *principio di Fermat* appunto, che afferma: *di tutti i possibili cammini che la luce può seguire per andare da un punto ad un altro, essa segue il cammino che richiede il tempo più breve.*

[4]La curva tautocrona: *Curva posta in un piano verticale dotata di proprietà per cui un corpo libero e senza attrito che la percorra fino al punto più basso impiega sempre il medesimo tempo, da qualunque punto della curva sia partito*

[5]si veda [10]

[6]In [3]*Si nunc concipiamus medium non uniformiter densum, sed velut per infinitas lamellas horizontaliter interjectas distinctum, quarum interstitia sint repleta materia diaphana raritatis certa ratione accrescentis vel decrescentis; manifestum est, radium, quem ut globulum consideramus, non emanaturum in linea recta, sed in curva quadam (notante id jam et ipso Hugenio in eodem tractatu de Lumine, sed ipsam curvae naturam minime determinante) quae eius sit naturae, ut globulus per illam decurrens celeritate continue aucta vel diminuita, pro ratione graduum raritatis, brevissimo tempore perveniat a puncto ad punctum*

proseguire il suo cammino in linea retta e ad ogni lamella si rifrangerà, definendo la curva di più rapida discesa ricercata. Per ricavarne un'equazione l'autore si basa sulla seguente figura

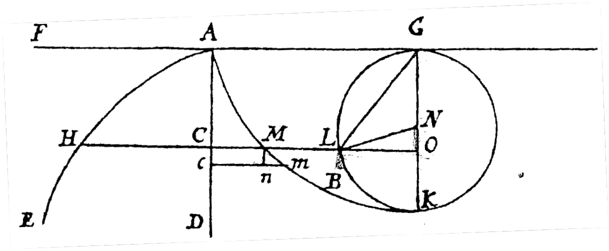



Figura 2.2

costruita considerando la curva $AHE$ di ascissa $AD$ come curva data nella quale ogni applicata[7] indica l'opacità media all'altezza determinata dall'ascissa a cui è riferita. Mentre per opacità si intende un fattore che stabilisce quanto la luce sia in grado di penetrare la lamella o meno. Si prenda ad esempio l'altezza $AC$, la sua applicata $HC$ sarà l'opacità media all'altezza $AC$, o per meglio dire, sarà proporzionale alla velocità del raggio di luce a tale altezza. Saranno così identificate tutte le seguenti variabili: $CH = t$, $AC = x$, $CM = y$, $Cc = dx$, $mn = dy$, $Mm = dz$ e si considera una costante arbitraria $a$. Per come è stata descritta e definita la curva e per i principi stabiliti dalla legge di Snell, presupponendo il percorso della particella di luce da M a m come infinitesimo, lo si può approssimare ad un segmentino retto e, pertanto, chiamato $\theta$ l'angolo di rifrazione in $M$, sussiste la relazione

$$\sin\theta = \frac{mn}{Mm} \tag{2.1}$$

si ha però che il seno dell'angolo di rifrazione deve essere proporzionale alla velocità della particella nel punto $C$ (ossia proporzionale al relativo indice di rifrazione) e quindi dalla (2.1)

$$\frac{dy}{dz} = \frac{t}{a} \tag{2.2}$$

[7]per *applicata* si intende una particolare ordinata riferita ad una data ascissa

dove $a$ è la costante prima definita; in questo caso $\frac{1}{a}$ funge da fattore di proporzionalità. Nel triangolo $mMn$ vale ovviamente la relazione $dz^2 = dx^2 + dy^2$ e quindi si ha

$$\frac{dy^2}{dz^2} = \frac{tt}{aa} \qquad dy^2 = \frac{tt}{aa}dz^2$$

$$dy^2 = \frac{tt}{aa}(dx^2 + dy^2) = \frac{tt}{aa}dx^2 + \frac{tt}{aa}dy^2$$

$$\frac{aa - tt}{aa}dy^2 = \frac{tt}{aa}dx^2 \qquad \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{t^2}{a^2 - t^2}$$

ossia

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t}{\sqrt{a^2 - t^2}}. \tag{2.3}$$

Dall'ultima equazione si prosegue senza più considerare il percorso di una particella di luce e, mantenendo il risultato ottenuto in (2.3), si torna al problema iniziale della caduta di un grave a cui si applica la *legge sulla caduta dei gravi* di G. Galilei[8]. Essa afferma che la velocità di un corpo in caduta libera è proporzionale alla radice quadrata dell'altezza di caduta. La curva $AHE$, che riporta nei suoi punti le velocità del corpo ad ogni istante si rileva essere una parabola di equazione $t = \sqrt{ax}$; sostituendo tale equazione alla (2.3) si ottiene

$$dy = \sqrt{\frac{x}{a - x}}dx. \tag{2.4}$$

Dall'ultimo passaggio la dimostrazione prosegue dimostrando che dall'integrazione della (2.4) si ottiene l'equazione della cicloide.

$$dy = dx\sqrt{\frac{x}{a - x}} = dx\sqrt{\frac{x \cdot x}{x(a - x)}} = dx\frac{x}{\sqrt{ax - x^2}}$$

$$dy = dx\frac{2x}{2\sqrt{ax - x^2}} = \frac{2dx + adx - adx}{2\sqrt{ax - x^2}}$$

[8]lo stesso Johann in [3] dice:*Sumamus jam specialem casum, et quidem hypothesin comunem a GALILAEO primitus introductat et demonstrantam, quod velocitates gravium cadentium sint in ratione subduplicata altitudinum emensarum; in hoc enim proprie quaestionis tenor consistit.*

quindi

$$dy = dx\sqrt{\frac{x}{a-x}} = \frac{1}{2}\frac{adx}{\sqrt{ax-x^2}} - \frac{1}{2}\frac{a-2x}{\sqrt{ax-x^2}} \tag{2.5}$$

l'ultimo rapporto del terzo membro della (2.5) è facilmente integrabile

$$\int \frac{1}{2}\frac{a-2x}{\sqrt{ax-x^2}}dx = \sqrt{ax-x^2}[+const]$$

fornendo un'interpretazione geometrica di $\sqrt{ax-x^2}$ considerando dalla figura 2.2 l'uguaglianza

$$\sqrt{ax-x^2} = LO.$$

$LO$ è proprio il raggio della circonferenza $GLK$, con $a = GK$ e $x = GO$. Il risultato è dimostrabile con uno dei noti teoremi di Euclide

$$\begin{aligned} \sqrt{ax-x^2} &= \sqrt{GK \cdot GO - GO^2} = \sqrt{GO(GK-GO)} = \\ &= \sqrt{GO \cdot KO} = LO \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$LO^2 = GO \cdot KO$$

Nella trattazione di Bernoulli si mostra infine che $\frac{1}{2}\frac{adx}{\sqrt{ax-x^2}}$ è pari proprio al differenziale dell'arco di circonferenza $\widehat{\mathrm{GL}}$. Si può interpretare questo risultato come in [10] considerando un piccolo triangolo differenziale $G'L'L$ di lati $G'L' = dOg$, $L'L = dLO$, $G'L = dLG$. Di conseguenza si ottiene

$$\begin{aligned} d\widehat{\mathrm{GL}} &= \sqrt{dLO^2 + dOG^2} = \\ &= \sqrt{[d(\sqrt{ax-x^2})]^2 + dx^2} = \sqrt{[\frac{adx - sxdx}{2\sqrt{ax-x^2}}]^2 + dx^2} = \\ &= \sqrt{\frac{a^2dx^2 + 4x^2dx^2 - 4axdx^2 + 4axdx^2 - 4x^2dx^2}{(2\sqrt{ax-x^2})^2}} = \\ &= \frac{adx}{2\sqrt{ax-x^2}} \end{aligned} \tag{2.7}$$

infine

$$\widehat{\mathrm{GL}} = \int \frac{adx}{2\sqrt{ax-x^2}}$$

Per i risultati ottenuti si conclude che

$$CM = y = \int dy = \widehat{\mathrm{GL}} - LO$$

comunque vale

$$\begin{aligned} MO &= CO - CM = CO - \widehat{\mathrm{GL}} + LO = \\ &= \widehat{\mathrm{GLK}} - \widehat{\mathrm{GL}} + LO = \\ &= LK + LO \end{aligned} \tag{2.8}$$

e, banalmente, vale anche

$$MO = ML + LO$$

quindi

$$LK = ML. \tag{2.9}$$

Dalla relazione (2.9) si deduce che la circonferenza $GLKO$ produce effettivamente la cicloide $AMK$ come curva minimizzante. La (2.9) esprime esattamente una proprietà della curva cicloide e in [13] si può trovare la sua giustificazione[9]. La trattazione bernoulliana si conclude, pertanto, con la prova dell'unicità di tale soluzione al problema.

### 2.1.2 La soluzione di Jakob Bernoulli: la risposta all'invito del fratello

Pochi mesi dopo la pubblicazione della soluzione analizzata nel precedente paragrafo, avvenuta nel Gennaio dell'anno 1697, Jakob Bernoulli, su espresso invito del fratello, pubblicò la sua personale versione per la soluzione al problema della brachistocrona nel Maggio dello stesso anno. La sua soluzione è prettamente geometrica ed è costituita da un susseguirsi di proporzioni tese a dimostrare che la curva di discesa più rapida sia proprio

[9] si veda [13] pag. 41 (footnote 49)

la *cicloide.* In questo contesto si ritrova anche un importante concetto che Euler formalizzerà nel trattato del 1744 presentato in questo elaborato. In [14] viene descritto quanto segue: *La proprietà appartenente all'intera curva, appartiene anche ad ogni elemento della curva, nel precedente problema, la condizione era che il tempo lungo l'intera curva* $OCD$ *dovesse essere minimo [...] ma nella dimostrazione è presa solo una parte* $CGD$ *ed è assunto che il tempo lungo questa parte sia comunque minimo: così che l'intera curva possa essere determinata determinando una parte o un elemento di essa.*[10]
La proprietà appena descritta fu assunta come vera all'interno della trattazione di Jakob Bernoulli e non venne dimostrata nè formalizzata. Più avanti, Euler avrebbe dimostrato invece una proposizione in cui si affermava che la suddetta proprietà non vale in generale.
La dimostrazione[11] parte da un principio tipico del calcolo differenziale, in particolare del calcolo ordinario di massimi e minimi di funzioni.
Si consideri la figura

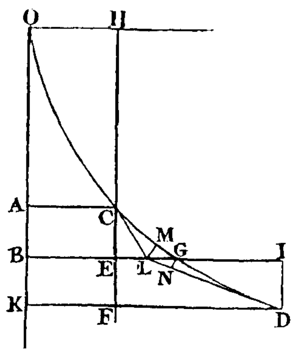



Figura 2.3

[10]in [14]: *That the property appertaining to the whole curve, belongs also to any element of the curve: for the preceding proble, the condition was, that the time down the whole curve OCD should be a minimum [...] but in the demonstration, an element CGD is taken, and it is assumed the the time down this element is also a minimum: so that the whole curve is determined, by determining a portion or element of it.*

[11]in questo elaborato si farà menzione a [14] e [10]

sia $OGD$ la curva, si consideri una porzione di essa $CGD$ e la si divida in due ulteriori parti $CG$ e $GD$. Si prenda un'altra porzione di curva $CLD$ infinitamente vicina a $CGD$ e si divida anch'essa in $CL$ e $LD$. Dato che il tempo di percorrezza lungo $CGD$ deve essere minimo, si può ritenere che in un intorno del minimo le quantità siano costanti, di conseguenza anche il tempo lungo $CLD$ sarà minimo e si ha

$$tCG + tGD = tCL + tLD$$

con $tCG$ che indica il tempo di percorrenza lungo $CG$; di più, considerando il triangoli $CGE$ e $CLE$ come piani inclinati vale la seguente

$$\frac{CE}{CG} = \frac{tCE}{tCG}$$

allo stesso modo

$$\frac{CE}{CL} = \frac{tCE}{tCL}$$

quindi

$$\frac{CE}{CG - CL} = \frac{tCE}{tCG - tCL}$$

considerato che dalle precedenti proporzioni $CG = CE\frac{tCG}{tCE}$ e $CL = CE\frac{tCL}{tCE}$, ne deriva che $\frac{CE}{CG-CL} = \frac{CE}{CE\frac{tCG-tCL}{tCE}}$. Dato che $CLD$ è infinitamente vicina a $CGD$ si ha $CG - CL = MG$ e per la similitudine tra i triangoli $GCE$ e $LMG$

$$\frac{MG}{LG} = \frac{EG}{CG} \qquad \frac{CG}{LG} = \frac{ML}{CE}.$$

Da questa e dalla precedente si deduce

$$\frac{CE}{MG}\frac{MG}{LG} = \frac{tCE}{tCG - tCL}\frac{EG}{CG}$$

quindi

$$\frac{CE}{LG} = \frac{EG \times tCE}{CG \times (tCG - tCL)} \tag{2.10}$$

Analogamente al percorso precedente si può ottenere l'equazione

$$\frac{EF}{LG} = \frac{GI \times tEF}{GD \times (tLD - tGD)} \tag{2.11}$$

dalla quale si considerata la similitudine tra i triangoli $GID$ e $LNG$, tenuto conto che $EF = ID$ e che, data $CLD$ infinitamente vicina a $CGD$, $DN = DG$; con passaggi analoghi ai precedenti si deduce la (2.11).
Dalla figura 2.3 si ha $EF = CE$, quindi si possono eguagliare i secondi membri di (2.10) e (2.11)

$$\frac{EG \times tCE}{GI \times tEF} = \frac{CG \times (tCG - tCL)}{GD \times (tLD - tGD)} \tag{2.12}$$

ma dato che $tCG - tCL = tLD - tGD$[12] si ottiene

$$\frac{EG \times tCE}{GI \times tEF} = \frac{CG}{GD} \tag{2.13}$$

Per la legge della caduta dei gravi, si possono sostituire in (2.13) i tempi di percorrenza, applicandole formule

$$tCE = \frac{CE}{\sqrt{2gHC}} \qquad tEF = \frac{EF}{\sqrt{2gHE}}$$

e si deduce

$$\frac{EG\sqrt{HE}}{GI\sqrt{HC}} = \frac{CG}{GD}. \tag{2.14}$$

La (2.14) esprime una qualità caratteristica delle curve *cicloidi*. In [10], infatti, si considera $CG = ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, $HE = x$, $EG = dy$, $\frac{\sqrt{HC}}{GI}GD = k$: sostituendo tali variabili in (2.14) si ha

$$k\frac{dy}{\sqrt{x}} = ds \tag{2.15}$$

esprimibile come

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{k}{\sqrt{x}}dy$$

per terminare infine con

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{k^2 - x}}. \tag{2.16}$$

La (2.16), se integrata, è proprio l'equazione della cicloide generata da una circonferenza di diametro $k^2 = a$.

[12]Per come è stata costruita la figura e per il principio del calcolo dei minimi sopra citato, si ha che il tempo di percorrenza su $CG + GD$ è uguale a quello su $CL + LD$; di conseguenza $tCG + tGD = tCL + tLD$ e infine $tCG - tCL = tLD - tGD$

### Commento

Il metodo di Jakob è più simile a quello euleriano, riportato nel seguito dell'elaborato. Più precisamente, Euler riprese nella sua opera le prime ipotesi su cui si basa la dimostrazione appena citata. In [7] è infatti dimostrato e formalizzato analiticamente l'asserzione per cui i tempi di percorrenza lungo due curve $CLD$ e $CGD$, differenti tra loro per una piccolissima quantità sono uguali. Generalizzando questo principio, Euler ottenne la base del suo metodo variazionale, cosistente nella costruzione di variazioni e nel loro annullamento con il fine di risalire ad equazioni risolventi. La suddetta idea non è affatto nuova; essa è infatti ripresa dagli ordinari problemi di massimo o minimo affrontati fino a quel momento. In [14] viene mostrato un chiaro esempio. Woodhouse spiega che se si volesse determinare quando un ordinata $y$ sia un minimo, il suo differenziale $dy$ dovrebbe essere posto pari a 0. In sostanza, l'ordinata $y'$ contigua (o consecutiva[13]) di $y$ che normalmente è pari a

$$y \pm \frac{dy}{dx}\Delta x + \frac{d^2y}{2dx^2}(\Delta x)^2 \pm \&c^{14}$$

in questo caso si riduce a

$$y + \frac{d^2y}{2dx^2}(\Delta x)^2 \pm ... \tag{2.17}$$

e se si rende $\Delta x$ infinitamente piccolo, la (2.17) differisce da $y$ solo per una quantità infinitamente piccola del secondo ordine; se, di più, si omettesse $\Delta x$ allora si riotterrebbe l'ordinata iniziale $y$. Detto questo, l'equazione (2.10) nella dimostrazione di Jakob Bernoulli trova un solido fondamento[15].

[13] cfr. prossimo capitolo Ipotesi II

[14] in [14] viene proposta questa scrittura dello sviluppo di Taylor

[15] In [14]: *Of this nature and requering this explanation, is the equality in James Bernoulli's demonstration, when the time through CG+ the time through GD = the time through CL+ the time through LD.*

## 2.2 I Problemi isoperimetrici agli inizi del XVIII secolo

Nel 1697, oltre a rispondere alla sfida di Johann, Jakob Bernoulli pubblicò un secondo problema (sempre negli *Acta Eruditorum*) invitando il fratello a risolverlo. In matematica i cosiddetti problemi isoperimetrici sono una un'area di studio che spesso ha affascinato i pensatori del passato, il cui primo celeberrimo esempio è il *problema di Didone*, riportato nell'*Eneide*, poema epico composta da Publio Virgilio Marone nel I sec. a.C.. Sebbene già fossero note soluzioni ad alcuni dei problemi nominati, esse erano soltanto congetture, in quanto mancava l'apparato teorico necessario a dimostrarle. Successivamente, vennero applicati come metodi risolutivi quelli di stampo vaiazionale. Negli *Acta Eruditorum* del Maggio 1697 apparve così l'enunciato:

"Di tutte le curve isoperimetriche descritte dalla comune base $BN$, trovare $BFN$ tale che un'altra curva $BZN$ contenga il massimo spazio. Sia $PZ$ l'ordinata di $BZN$, essa dovrà essere multipla o sottomiltipla dell'ordinata di $PF$ o dell'arco $\widehat{\mathrm{BF}}$, o comunque che sia proporzionale a $PF$ o all'arco $\widehat{\mathrm{BF}}$.[16]"

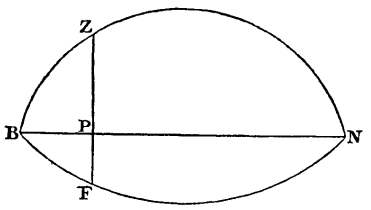



Figura 2.4

[16]in [4]: *Quaeritur ex omnibus isoperimetris, super communi basi $BN$ constitutis, illa $BFN$, quae non ipsa quidem maximum comprehendat spatium, sed faciat, ut aliud curva $BZN$ comprehensum sit maximum, cujus applicata $PZ$ ponitur esse in ratione quavis multiplicata, vel submultiplicata, rectae $PF$ vel arcus $BF$, hoc est, quae sit quotacunque proportionalis ad datam rectam $PF$, curvamve $BF$.*

### 2.2.1 Il metodo di Jakob Bernoulli: *Analysis magni problematis isoperimetrici*, 1701

Il metodo proposto da Jakob nel 1701, pubblicato negli *Acta Eruditorum* (nel maggio dello stesso anno, pag. 213) è particolarmente rilevante per gli scopi di questo elaborato; si vedrà, in seguito, che Euler ne riprese alcune idee per sviluppare il proprio metodo. In [13], Goldstine afferma: "Egli [Jakob Bernoulli] realizzò, a differenza di suo fratello, che la chiave della risoluzione fosse che la presenza di una condizione isoperimetrica richiedesse un altro grado di libertà.[17]". Facendo infatti riferimento alla seguente figura

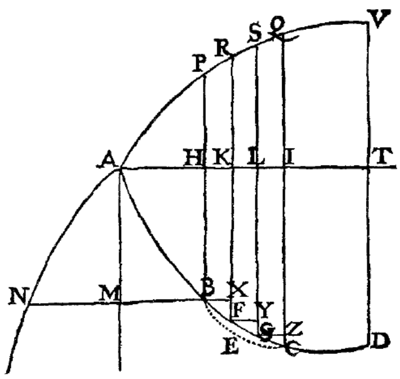



Figura 2.5

si può osservare che si crea una curva variazionale di $BFGC$ facendo variare due segmenti, ossia $FX$ e $GY$. Tali variazioni generano così due condizioni o, come si vedrà nella trattazione di Euler, due equazioni risolventi. Si darà ora una traccia della procedimento di Jakob Bernoulli, il quale consiste di sei teoremi-lemmi, applicati a tre problemi. Osservando la figura 2.5 si possono

[17] [13]: *The key point he realized, which his brother had not, is that the presence of an isoperimetric condition required another degree of freedom.*

denominare nel seguente modo i segmenti:

$$\begin{aligned} HB &= \ x \\ AH &= \ y \\ AB &= \ z \end{aligned}$$

si considerino poi le ordinate $KF$ e $LG$, si pongano pari rispettivamente a $f$ e $g$ e si costruisca la variazione della curva proprio su queste ordinate, come accennato in precedenza. Le variazioni sono rispettivamente $df$ e $dg$ e genereno la curva variazionale richiesta. Analogamente a quanto fatto per la brachistocrona, anche in questo caso si stabilisce una relazione che esprima il fatto che la variazione della curva sia posta uguale a 0. Jakob Bernoulli costruì tale relazione con il teorema II e IV. Si riportano ora in questo elaborato alcuni enunciati[18].

**Teorema 2.1** (Teorema II). *Sia data la retta $AT$ e fuori di essa siano assegnati quattro punti distinti $B, F, G, C$ per i quali passino le rette $BH$, $FK$, $GC$ e $CI$ perpendicolari ad $AT$; inoltre $BX$, $FY$ e $GZ$ siano parallele alla stessa $AT$. Restando fissi i punti estremi $B$ e $C$, i rimanenti comincino a muoversi sopra le rette date per posizione $FK$ e $GL$ con la condizione che la somma $BF+FG+GC$ rimanga costante e sempre medesima. Allora sussiste la seguente proporzione*

$$-\frac{df}{dg} = \frac{CZ \cdot BF \cdot FG - GY \cdot BF \cdot GC}{GY \cdot BF \cdot GC - FX \cdot FG \cdot GC} \tag{2.18}$$

L'equazione (2.18) viene chiamata dallo stesso autore *Aequatio Problematis* e con il teorema IV viene "tradotta in termini infinitesimali". Per farlo occorre enunciare un ulteriore teorema, in particolare il teorema I di [4].

**Teorema 2.2** (Teorema I). *In una qualunque curva, se si assegnano più ordinate contigue reciprocamente, la prima, più piccola delle quali si denoti con $x'$ (o semplicemente $x$) la seconda, più grande, con $x''$, la terza con $x'''$*

[18]si rimanda a [10] per le relative dimostrazioni.

*e così via, risulterà*

$$\begin{aligned} x^{''} &= x + dx \\ x^{'''} &= x + 2dx + ddx \\ x^{iv} &= x + 3dx + 3ddx + dddx \end{aligned} \tag{2.19}$$

A questo punto si effettuano delle posizioni sui segmenti nel seguente modo:

$$\begin{gathered} HB = x; AH = y; AB = z \\ BX = dy' = dy; FY = dy^{''} = dy + ddy; \\ FX = dx' = dx; GY = dx^{''} = dx + ddx; \\ BF = dz' = dz; FG = dz^{''} = dz + ddz; \end{gathered} \tag{2.20}$$

Facendo i conti la (2.18) viene così riscritta come tesi del teorema IV

**Teorema 2.3** (Teorema IV). *Nelle stesse ipotesi del teorema II e con le posizioni sopra riportate si ha*

$$-\frac{df}{dg} = \frac{dz^2ddx + dz^2dddx + dxddx^2}{dz^2ddx + 2dxddx^2}. \tag{2.21}$$

Dopo l'enunciazione di questi e altri teoremi, la trattazione bernoulliana prosegue con la risoluzione di tre problemi, il primo dei quali di seguito. Fraser afferma in [8] che: "Nel problema 1, lui [Jakob] ha applicato il teorema IV per massimizzare o minimizzare l'area sottesa dalla curva $APRSQV$[19]"(si veda figura 2.5). Prima di passare al problema vero e proprio è necessario enunciare un ulteriore teorema

**Teorema 2.4** (Teorema VI). *Siano assegnate due grandezze indeterminate, la minore sia $f$ e la maggiore $g$ superi la prima di un incremento infinitamente piccolo. Di nuovo si considerino due grandezze similmente espresse, per analogia siano $F$ e $G$ e sia inoltre $adF = hdf$ e $adG = idg$, allora si avrà*

$$i = h + dh. \tag{2.22}$$

[19] *In Problem 1 he applied the theorem to maximize or minimize the area under the curve*

Infine si enuncia un'ultima ipotesi per facilitare la risoluzione: date queste due condizioni

1. $dy = BX = FY = GZ = HK = KL = LI = cost$

2. $dz = BF = FG = GC = cost$

o vale l'una o vale l'altra in maniera esclusiva ed esaustiva, nel nostro caso sarà valida la prima, tenendo presente che se $dz \neq FG$ e non costante, allora $FG = dz + ddz$ e così via. Il suddetto problema 1, come riportato in [10], si presenta quindi in tal modo.

**Problema 2.2.1** (Problema 1)**.** *Dati in posizione, tra loro normali, $AT$ e $AM$ e assegnata una curva qualunque $AN$, si chiede di trovare fra tutte le curve isoperimetriche (di data lunghezza) su $AT$ e passanti per i punti $A$ e $D$, quella $ABD$ tale che da ogni punto $B$, [$F$, $G$, $Z$, ecc.] si conducano due rette $BHP$ e $BMN$ tra loro perpendicolari e rispettivamente normali alle $AT$ e $AM$; e sia $MN = HP$ e l'area $ATV$ sotto la curva $APV$ sia massima (o minima).*

*Soluzione.* Sempre in [10]: *L'obiettivo di questo problema è quello di determinare le relazioni tra fra la curva $ABD$, che dobbiamo trovare, e l'assegnata area minima o massima $AVT$. Trovare cioè tra le curve (tra loro isoperimetriche) del tipo $ABD$ quella che corrisponde all'area massima o minima racchiusa dalla curva $APV$.* Si considerino ora:

$$\begin{gathered} HK = KJ = LI = l \\ HB = b; KF = f; LG = g; IC = c; \\ HP = B; KR = F; LS = G; IQ = C; \end{gathered} \tag{2.23}$$

Analogamente a quanto si fece per la brachistocrona, si considera ora solo una porzione dell'area da massimizzare (anch'essa avrà proprietà di massimo o minimo); sia essa PHIQ. Si consideri l'area di questa parte dello spazio intesa come somma delle aree dei rettangoli $PHKR$, $RKLS$, $SLIQ$ aventi ognuno un lato sull'asse $AT$ pari alla costante $dy$, in questo caso denominato $l$. Di conseguenza:

$$HK \cdot HP + KL \cdot KR + LI \cdot IQ = max\, o\, min \tag{2.24}$$

differenziando ora la (2.24), tenuto conto che $HP$ non subisce la variazione a differenza di $F$ e $G$ si ottiene

$$ldF + ldG = 0$$

ossia

$$dF + dG = 0 \tag{2.25}$$

Potendo porsi nelle ipotesi del teorema VI, in quanto $HP$ e $HB$ proporzionali per costruzione, si può scrivere

$$dF = \frac{h}{a}df \qquad dG = \frac{i}{a}dg \tag{2.26}$$

e per la (2.25)

$$hdf + idg = 0 \tag{2.27}$$

Dalla (2.27) e dalla (2.22) si ottiene infine

$$-\frac{df}{dg} = \frac{i}{h} = \frac{h + dh}{h} = 1 + \frac{dh}{h}. \tag{2.28}$$

Dalla (2.21) si ha anche

$$\begin{aligned}-\frac{df}{dg} &= \frac{dz^2ddx + dz^2dddx - dxddx^2}{dz^2ddx + 2dxddx^2} = \frac{dz^2ddx + 2dxddx^2 + dz^2dddx - 3dxddx^2}{dz^2ddx + 2dxddx^2} = \\ &= 1 + \frac{dz^2dddx - 3dxddx^2}{dz^2ddx + 2dxddx^2}\end{aligned} \tag{2.29}$$

confrontando infine la (2.28) e la (2.29) si ottiene

$$\begin{gathered}\frac{dh}{h} = \frac{dz^2dddx - 3dxddx^2}{dz^2ddx + 2dxddx^2} \\ dh \cdot (dz^2ddx + 2dxddx^2) = h \cdot (dz^2dddx - 3dxddx^2)\end{gathered} \tag{2.30}$$

Jakob scrive in [4]: "da cui considerando gli estremi e i medi [dell'equazione] (omettendo tuttavia il prodotto $2dhdxddx^2$, in quanto svanisce a differenza degli altri) risulta l'*Equazione speciale del nostro problema*[20]:"

$$hdz^2dddx - 3hdxddx^2 = dhdz^2ddx \tag{2.31}$$

$\square$

Si è così ricavata un'equazione differenziale del terzo ordine la cui soluzione è la soluzione al problema. Per poter integrare tale equazione è necessario ridurne il grado. Seguendo la dimostrazione in [10] si pone $dzddz = dxddx$ e quindi la (2.31) diventa:

$$hdz^2dddx - 3hdzddzddx - dhdz^2ddx = 0 \tag{2.32}$$

dividendo tutto per dz si ottiene una nuova *Aequatio problematis*

$$hdzdddx - 3hddzddx - dhdzddx = 0^{21} \tag{2.33}$$

ancora del terzo ordine.
Si consideri ora la seguente equazione

$$h^m dz^n ddx^r = cost \tag{2.34}$$

di qui differenziando

$$rh^m dz^n ddx^{r-1}dddx + nh^m dz^{n-1}ddzddx^r + mh^{m-1}dhdz^n ddx^r = 0$$

e dividendo tutto per $h^{m-1}dz^{n-1}ddx^{r-1}$ si ottiene infine

$$rhdzdddx + nhddzddx + mdhddzddx = 0.$$

Per $r = 1$, $n = -3$ e $m = -1$ quella appena scritta è proprio la (2.33) e quindi la (2.34) sarà un suo integrale.

$$h^{-1}dz^{-3}ddx^1 = \frac{ddx}{hdz^3} = cost \tag{2.35}$$

[20] da [4]: *unde extremis et mediis in se invicem ductis (omisso tamen, quod caeterorum respectu evanescit, producto* $2dhdxddx^2$*) resultat* Aeqatio specialis nostri problematis:

[21] si ha infatti che $ddx^2 = (ddx)^2 = ddxddx$ e quindi $3hdxddx^2 = 3h(dxddx)ddx = 3hdzddzddx$.

Ora Jakob sceglie una particolare costante arbitraria da confrontare con il primo membro della (2.35). Ricordando che $dy$ è costante per ipotesi:

$$\frac{ddx}{hdz^3} = \frac{1}{a^2dy} \tag{2.36}$$

con $a$ costante arbitraria. Per abbassare ulteriormente il grado si pone questa sostituzione $dx = \frac{dy}{a}t$ da questa deriva la sua differenziazione

$$ddx = \frac{dtdy}{a}; \tag{2.37}$$

elevando invece tutto al quadrato si ha $a^2dx^2 = t^2dy^2$, quindi, aggiungendo $a^2dy^2$ a destra e a sinistra, $a^2dx^2 + a^2dy^2 = t^2dy^2 + a^2dy^2$. Essendo i segmenti differenziali $dz$, $dy$ e $dx$ molto piccoli si può approssimare $dz$ come un segmento di linea retta e perciò sussiste il teorema di Pitagora per cui $a^2dz^2 = a^2dx^2 + a^2dy^2$. Conseguentemente

$$dz = \frac{\sqrt{a^2 + t^2}dy}{a} \tag{2.38}$$

sostituendo così la (2.38) e la (2.37) alla (2.36)

$$\frac{a^2dt}{\sqrt{a^2 + t^2}(a^2 + t^2)} = \pm\frac{hdy}{a^2} \tag{2.39}$$

ma $\frac{dy}{a} = \frac{dx}{t}$ quindi

$$\frac{a^2dt}{\sqrt{a^2 + t^2}(a^2 + t^2)} = \pm\frac{hdx}{at}. \tag{2.40}$$

Si ricordi ora che nelle (2.23) si aveva $f = FK$ e $HB = b = x$; passando quindi all'infinitesimo e considerando $f$ e $x$ molto vicine tra loro si può porre $df = dx$ e quindi mettendosi nuovamente nelle ipotesi del teorema VI si avrebbe

$$\frac{hdx}{a} = dF \tag{2.41}$$

moltiplicando a destra e a sinistra della (2.40) e sostituendo la (2.41) si ottiene l'equazione del primo ordine desiderata

$$\frac{\pm a^2tdt}{\sqrt{a^2 + t^2}(a^2 + t^2)} = dF. \tag{2.42}$$

Integrando così la (2.42)

$$\begin{aligned} \int dF &= \int \frac{\pm a^2 t dt}{\sqrt{a^2+t^2}(a^2+t^2)} \\ F = B &= k \mp \frac{a^2}{\sqrt{a^2+t^2}} \end{aligned} \tag{2.43}$$

dove l'applicata $F$ viene denominata $p$ in quanto $F = KR$ è la contigua o consecutiva di $HP = MN = B$ per le (2.23), quindi nel passaggio all'infinitesimo esse si assimilano in un sol punto. Quindi segue svolgendo i conti

$$t = \frac{a\sqrt{a^2-(B-k)^2}}{B-k} \tag{2.44}$$

ma sostituendo la $dx = \frac{tdy}{a}$ si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{adx}{dy} &= \frac{a\sqrt{a^2-(B-k)^2}}{B-k} \\ dy &= \frac{(B-k)dx}{\sqrt{a^2-(B-k)^2}} \end{aligned} \tag{2.45}$$

e l'ultima è proprio l'equazione differenziale della curva di massimo o minimo ricercata da Jakob. Ponendo per esempio $k = 0$

$$dy = \frac{Bdx}{\sqrt{a^2-B^2}} \tag{2.46}$$

e quindi

$$dz^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2 + \frac{B^2dx^2}{a^2-B^2} = \frac{a^2dx^2 - B^2dx^2 + B^2dx^2}{a^2-B^2} = \frac{a^2dx^2}{a^2-B^2}$$

$$dz = \frac{adx}{\sqrt{a^2-B^2}} \tag{2.47}$$

### Commento

La soluzione di Jakob presenta alcune particolarità e punti di innovazione che rivoluzionarono gli approcci rispetto ai problemi isoperimetrici. Notevoli sono per esempio le seguenti caratteristiche:

1. l'utilizzo di ordinate contigue, peculiare del calcolo differenziale seicentesco e fondamentale nelle trattazioni euleriane, come si mostrerà in seguito;

2. il funzionale area massimizzato non è affatto quello dell'area sottesa dalla curva isoperimetrica $ABD$, bensì quello di un'area sottesa da una curva avente ordinata proporzionale (o potenza) dell'ordinata di $ABD$; in [13] Goldstine afferma: "Egli [Jakob] ricerca una curva $ABD$, tra tutte quelle aventi base $AT$, di lunghezza fissata, congiungenti i punti $A$ e $B$, tale per cui l'area $APVT$, sottesa da $APV$, sia la maggiore possibile, considerando che l'ordinata $HP = MN$ è una potenza di $HB$[22]."

3. la presenza di due variazioni per creare un ulteriore grado di libertà disponendo, appunto, di una condizione isoperimetrica e di una condizione variazionale (la seconda, per esempio, già presente nella brachistocrona).

Quanto descritto nel punto 1 era tipico della matematica del calcolo differenziale ed avrebbe avuto un ruolo dominante nella teoria del calcolo delle variazioni[23]. All'interno della soluzione di Bernoulli i punti contigui vengono richiamati nel teorema I per esempio, dove vengono denominati con degli apici e dove viene assegnato ad essi un valore. Tale valore sarebbe però uguale a quello di $x$ qualora i differenziali $dx$, $ddx$ ecc... venissero cancellati o portati all'infinitesimo, in questo modo i punti contigui verrebbero assimilati nel punto stesso. Tuttavia, l'aspetto forse più rilevante riguarda il punto 3: nei prossimi capitoli si parlerà infatti del metodo di Euler per la risoluzione di problemi isoperimetrici e di come esso abbia le stesse ipotesi iniziali di quello

[22]in [13]: *He [Jakob] seeks among all the isoperimetrics curves on the base AT of a given fixed lenght joining the points A and B, that one ABD for which the area APVT, under the curve APV, is the largest possible, given that each ordinate $HP = MN$ is a power of HB.*

[23]nell'analisi di Euler dei prossimi capitoli verrà fornita un'esauriente spiegazione sul significato di questa notazione.

di Jakob, per quanto sia differente da quest'ultimo nel resto della trattazione. L'utilizzo della doppia variazione è infatti il punto di partenza del capitolo V dell'opera euleriana in cui si trattano problemi variazionali *relativi*, per i quali le curve tra cui si cerca la soluzione hanno tutte una particolare proprietà comune (come può essere appunto l'isoperimetria) esplicitabile come equazione tramite la seconda variazione.

# Capitolo 3

# Analisi tecnico-storica dell'opera di Euler: l'"equazione di Eulero-Lagrange"

Eulero, nella sua opera, propone una soluzione innovativa a tutti i problemi di calcolo delle variazioni. L'autore studia un metodo per determinare le curve che, data una particolare formula, possiedano la proprietà di essere massimi o minimi rispetto ad essa. L'opera, nella sua parte iniziale, riporta una prima definizione: *il metodo.* (Si veda [7] pag. 1)

> *Il metodo dei massimi e dei minimi applicato alle linee curve* è il metodo per trovare le linee curve che godono di proprietà di massimi e minimi, come altri, diversamente, avevano già proposto.[1]

Il primo capitolo esamina le generalità del problema, cita definizioni preliminari e riporta alcune note che l'Autore sfrutterà nel seguito della sua trattazione. L'obiettivo del candidato sarà quello di analizzare i capitoli dell'opera e inserire nel contesto storico l'importantissimo risultato scientifico raggiunto, tuttora usato e conosciuto in matematica come l'equazione di Eu-

[1] in [7]: *Methodus maximorum et minimorum ad lineas curvas applicata, est methodus inveniendi lineas curvas, quae maximi minimive proprietate quapiam proposita gaudeant.*

lero o Eulero-Lagrange[2] e, in secondo luogo, di sintetizzare ciò che l'Autore propone rispetto ai problemi isoperimetrici.

## 3.1 Generalità e premesse al metodo

Nella prima parte dell'opera Euler annota in uno *Scholion* il valore di alcuni suoi predecessori che avevano già analizzato il problema, quali i fratelli Johann e Jacob Bernoulli.

> Questo metodo ha avuto origine dal secolo precedente, subito dopo la scoperta dell'analisi infinitesimale, coltivata dai fratelli Bernoulli, e da quel tempo ha acquisito i suoi massimi sviluppi.[3]

Euler è molto influenzato dai lavori della fine del secolo precedente ma pone una sostanziale differenza tra la teoria Sua e dei Bernoulli e quelle proposte da tutti i matematici precedenti avventuratisi nell'analisi infinitesimale, da Fermat e Cartesio fino a Leibniz. Le principali differenze stanno nel metodo stesso e negli oggetti della ricerca, infatti prima si proponeva, data una particolare linea curva, di trovare le quantità delle variabili che massimizzavano o minimizzavano la suddetta curva. I metodi euleriani nonchè bernoulliani (che ora verrebbero chiamati di calcolo delle variazioni) propongono di trovare la curva che minimizza o massimizza una data formula (la funzione che massimizza o minimizza un dato funzionale). In questa annotazione vi è un chiaro riferimento al lavoro compiuto dai fratelli Bernuolli sulla curva Brachistocrona come primo vero lavoro in merito a questo tipo di problema, lasciando intendere l'importanza dell'analisi infinitesimale. In [14] si ritrova questo estratto: "In precedenza la relazione tra $y$ e $x$ si suppone sia dat, o in altre parole la funzione $f$ di equazione $y = f(x)$ si suppone sia conociuta; e l'eguagliare $y$ e $y \pm \frac{dy}{dx}\Delta x + \&c...$, o rendere $dy = 0$, ci permette di trovare un

[2]Si veda [8] pag. 105.

[3]in [7]: *Methodus haec jam superiori Seculo, mox post inventam Analysin infinitorum, excoli coepit a Celeb. Fratribus BERNOULLIIS, atque ex eo tempore maxima cepit incrementa.*

particolare valore di $x$ che sostituito in $y = f(x)$ da il massimo o il minimo valore di $y$.[...] In seguito, al contrario, la relazione tra $y$ e $x$ non è data ma cercata, o in altre parole la forma della funzione $f(x)$ è l'oggetto della ricerca.[4]"

L'opera continua definendo due differenti metodi, entrambi analizzati nel corso dell'opera, quello assoluto e quello relativo:

**Definizione 3.1. Metodo dei massimi e minimi assoluto***: tra tutte le curve relative ad una certa ascissa trovare quella per cui, posta una data quantità variabile, ottenga un valore di massimo o minimo.*[5]

**Definizione 3.2. Metodo dei massimi e minimi relativo***: non più tra tutte le possibili curve relative ad una certa determinata, ma rispetto ad alcune che condividono certe proprietà, trovare quella che gode delle proprietà di massimo o minimo rispetto a certe quantità date.*[6]

Si può immediatamente notare l'importanza del secondo metodo per quanto riguarda i cosiddetti *problemi isoperimetrici.* Essi sono infatti problemi che riguardano la massimizzazione o minimizzazione di dati funzionali, ricercando la soluzione non tra tutte le possibili funzioni, ma tra quelle che condividono la proprietà di isoperimetria. Tale questione era già stata proposta da Jakob Bernoulli in [4] agli inizi del XVIII secolo, come analizzato

[4]Testualmente in [14]: *In the former the relation of $y$ to $x$ is supposed to be given, or, in other words, the function $f$ in the equation $y = f(x)$ is supposed to be known; and the proces of equating $y$ and $y \pm \frac{dy}{dx}\Delta x + \&c...$, or making $dy = 0$, enables us to find a particular value of $x$ which substitued in $y = f(x)$ gives the greates or least value of $y$.[...]In the latter calculus, on the contrary, the relation of $y$ to $x$ is not given but sought, or in other words, the form of the function $f(x)$ is the object of investigation.*

[5]in [7]: Methodus maximorum ac minimorum absoluta*, docet inter omnes omnino curvas, ad eandem abscissam relatas, determinare eam, in qua proposita quaedam quantitas variabilis maximum minimumve obtineat valorem.*

[6]in [7]: Methodus maximorum ac minimorum relativa *docet, non inter omnes omnino curvas eidem abscissae respondentes, sed inter eas tantum quae praescriptam quandam proprietatem communem habeant, eam determinare quae maximi minimive proprietate gaudeat.*

nel capitolo precedente.
Proseguendo invece con il trattato eureliano è opportuno esporre le sue scelte strutturali. Il primo capitolo, per esempio, è di fondamentale importanza in quanto si possono ritrovare tutte le nozioni di base e le ipotesi iniziali sulle quali si poggia tutta la trattazione seguente. In particolare vengono esposte due ipotesi ed alcune proposizioni-teoremi dimostrati a partire da esse.

### Ipostesi I

In questa trattazione designamo l'ascissa a cui si riferiscono tutte le curve alla lettera $x$ invece l'applicata alla lettera $y$ e sempre sarà $dy = p\,dx$, $dp = q\,dx$, $dq = r\,dx$, $dr = s\,dx$, $\&c...$[7]

In questo modo tutti i differenziali possono essere sostituiti con altri fino ad arrivare a formule in cui compare il solo differenziale $dx$. Per esempio viene riportata una serie di uguaglianze per mostrare tutte le possibili sostituzioni.

$$\begin{aligned} ddy &= dp\,dx = q\,dx^2 \\ d^3y &= dq\,dx^2 = r\,dx^3 \\ d^4y &= dr\,dx^3 = s\,dx^4 \\ d^5y &= ds\,dx^4 = t\,dx^5 \\ \&c... \end{aligned}$$

Si potrà dunque riportare in funzione di $dx$ ogni formula. Per esempio, si potrà calcolare la lunghezza di un arco $w$[8] e di tutti i suoi differenziali in tal

[7]in [7]: *In hac tractatione abscissam, ad quam omnes curvas referemus, perpetuo littera* x, *applicatam vero littera* y *designabimus. Tum vero, sumptis elementis abscissae aequalibus, semper erit* dy=pdx; dp=qdx; dq=rdx; dr=sdx; & c..

[8]esempio tratto da [7] pag. 9

modo:

$$\begin{aligned} w &= \int \sqrt{(dx^2+dy^2)} \;=\; \int dx\sqrt{(1+pp)} \\ dw &= dx\sqrt{(1+pp)} \\ ddw &= \frac{pq\,dx^2}{\sqrt{(1+pp)}} \\ d^3w &= \frac{pr\,dx^3}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{qq\,dx^3}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Le varie lettere qui utilizzate non rappresentano altro che i differenzili delle variabili di base $x$ e $y$. Sono anch'esse delle variabili, però l'Autore le denominò *determinate*[9]. Successivamente viene definita la protagonista della trattazione euleriana, nota come formula di massimo o minimo, *Maximi minimive formula.*

**Definizione 3.3. Formula di massimo e minimo** *sarà quella quantità [variabile] per la quale la curva richiesta deve generare un valore massimo o minimo*[10]

### Commento

L'idea di *formula* in Euler è legata soprattutto a formule integrali, che oggi si chiamerebbero *funzionali integrali*, che l'Autore si proponeva di massimizzare o minimizzare attraverso l'uso di alcuni metodi. L'integrale, o per meglio dire la *formula integrale*[11] è un concetto già saldamente radicato nella cultura matematico-scientifica del XVIII secolo; mancava però una teoria del calcolo integrale come è oggi conosciuta, formalizzata solo un secolo più tardi da Riemann. Particolare evidenza meritano alcuni aspetti della trattazione:

- l'uso di funzionali integrali, ancora non soggette alla maggior parte di vincoli o regole che, attualmente, sarebbero scontati;

[9] La scrittura sarà spesso del tipo sopra riportato , ma sotto un'altra ottica si avrà per esempio $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{ddy}{dx^2}$ ecc...

[10] in [7]: Maximi minimive Formula*, pro quovis Problemate, nbis erit ea quantitas, quae in curva quaesita maximum minimumve valorem obinere debet..*

[11] in [7] *formula integralis.*

- non esiste una scrittura dell'integrale *definito* tra due estremi anche se, ogniqualvolta viene effettuata un'operazione del genere, essa viene dichiarata a parole;

- subito dopo la definizione delle variabili seguono una serie di proposizioni sulle possibilità di utilizzo del metodo su certe tipologie di *formule*

Nei successivi enunciati compare per la prima volta nel trattato il concetto di formula integrale *determinata* o *indeterminata* (a cui poi verrà applicato il metodo stesso).

### 3.1.1 Proposizioni

Per tutti prossimi enunciati si avrà una comune ipotesi geometrica per la quale la curva richiesta verrà genericamente chiamata $amz$ e farà riferimento ad un'ascissa $AZ$

**Proposizione 3.1.** *Affinchè la curva* amz *sia determinabile e soddisfi più di tutte le altre la proprietà richiesta, la formula* $W$ *di massimo o minimo dovrà essere una quantità integrale indefinita tale che, in caso non venisse dichiarata una relazione esplicita tra* $x$ *e* $y$*, non potrebbe essere integrabile*[12].

#### Commento

Con *Maximi minimive formula* Euler intendeva una qualsiasi formula massimizzabile o minimizzabile. Con quest'ultima proposizione invece chiariva la natura della formula come un integrale indefinito, integrabile solo se è conosciuta una relazione tra le variabili $x$ e $y$[13]. In ogni caso per relazione tra le variabili $x$ e $y$ si intendeva una funzione di qualsiasi tipo, purchè esplicita. Nei corollari e scolii successivi si approfondivano maggiormente alcuni punti.

[12]in [7]: *Ut per maximi minimive formulam W, curva determinetur* amz*, quae prae omnibus reliquis satisfaciat, formula W debet esse quantitas integralis indefinita, quae nisi data assumatur relatio inter x & y, integrari nequeat.*

[13]in [7]: *generatim sine assumta aequatione inter x & y integrationem non admittat.*

$W$ doveva essere la *forma integrale* indefinita $\int Z\,dx$ e la $Z$ doveva essere specificatamente creata affinchè la formula $Z\,dx$ non sia integrabile se non era dichiarata un'equazione tra le variabili $x$ e $y$. Euler inoltre ricorda che la $Z$ non doveva necessariamente essere una forma algebrica o una semplice forma integrale legata all'area di una particolare figura $AaZz$[14]. Per esempio, si poteva chiedere di massimizzare o minimizzare il solido di rotazione generato dall'asse $AZ$ e dalla curva $az$ e, quindi la formula diventava:

$$W = \int y\,dx\sqrt{1+pp}.$$

In questo caso la $Z$ non era solo in funzione della $x$ e della $y$ ma anche della $p$. Più generale infatti poteva essere in funzione di qualsiasi determinata anche se, per quanto descritto in precedenza, doveva essere sempre possibile una riduzione alla forma $Z\,dx$. Bastava che rimanesse sempre nota una relazione (attraverso una funzione) tra la $x$ e la $y$.

**Proposizione 3.2.** *Data la curva amz per la quale la formula $\int Z\,dx$ sia massima o minima e considerando $Z$ come algebrica o determinata nelle $x, y, p, q, r, \&c...$, allora una qualsiasi porzione mn della curva gode delle stesse prerogative della curva intera, ossia, se la si guarda relativamente alla sua ascissa $MN$, il valore della formula $\int Z\,dx$ sarà sempre massimo o minimo.*[15]

Si vuole far notare che questa è una proprietà esclusiva delle formule $Z$ algebriche nelle $x, y, p, q, r, \&c...$; se infatti in $Z$ è contenuta una forma integrale allora vale solo la globalità delle proprietà e non è possibile una restrizione a porzioni più piccole della curva. Di fatti la prossima proposizione

[14] Questa notazione è utilizzata spesso nell'opera: *Ponamus huic Quaestioni satisfacere curvam* amz, *ita ut, quaecunque alia curva ad abscissam definitam AZ referatur, valor formulae W vel siat minor quam pro hac curva, vel major.* Di conseguenza la figura che si trova tra la curva e l'asse $AZ$ sarà la figura $AaZz$.

[15] in [7]: *Si fuerit* amz *curva, in qua valor formulae $\int Z\,dx$ sit maximus vel minimus, atque* Z *sit functio algebraïca seu determinata ipsarum* x,y,p,q,r,& ... *tum ejusdem curvae quaecunque portio* mn *eadem gaudebit praerogativa, ut pro ea ad suam abscissam* MN *relata, valor ipsius $\int Z\,dx$ sit pariter maximus vel minimus.*

dimostra esattamente la non validità della suddetta proprietà per forme non algebriche.

**Proposizione 3.3.** *Data la curva amz corrispondente all'ascissa $AZ$ per la quale la formula $\int Z\,dx$ è massima o minima, se in $Z$ vi è una formula integrale indeterminata allora le proprietà di massimo o minimo non ricadono su una qualsiasi porzione della curva ma solo su tutta la curva riferita all'ascissa $AZ$.*

### Ipotesi II

Se si divide l'ascissa $AZ$ in elementi innumerabili e infinitamente piccoli e tra loro uguali, questi saranno $IK$, $KL$, $LM$ &c... per quelli precedenti al punto $M$, per il quale si era posto $AM = x$ e $MN$, $NO$, $OP$ &c... per quelli seguenti. Ad $AM = x$ corrisponde una funzione $F$ in qualunque variabile, la stessa funzione $F$, poichè è riferita sia ai punti di ascissa seguenti sia a quelli antecedenti, viene così denominata, affinchè sia il valore della stessa funzione nel punto $M$ uguale a $F$, come segue: al posto di $N$ $F'$, al posto di $O$ $F''$, al posto di $P$ $F'''$, al posto di $Q$ $F^{iv}$, al posto di $R$ $F^{v}$, ecc... per i punti conseguenti; al posto di $L$ $F_{'}$, al posto di $K$ $F_{''}$, al posto di $I$ $F_{'''}$, al posto di $H$ $F_{iv}$, ecc... per i punti antecedenti. In questo modo, il valore di funzioni in qualsiasi variabile è indicato comodamente.[16]

La seconda ipotesi è puramente nozionistica, similmente alla prima. A questa seguono diverse tabelle, in [7] pagg. 24-25, in cui vengono riportati vari

[16]in [7]: *Si curva abscissa AZ in elementa innumerabilia infinite parva et inter se aequalia dissecetur, cujusmodi sunt IK, KL, LM, & c... atque portio quaecunque AM vocetur x, cui respondeat functio quaecunque variabilis F, eandem functionem F, quatenus refertur ad puncta abscissa vel sequentia N, O, P, Q, &c... vel antecedentia L, K, I, &c... ita denotabimus, ut sit valor istius functionis qui pro puncto M est =F, ut sequitur: pro* $N = F'$, *pro* $O = F''$, *pro* $P = F'''$, *pro* $Q = F^{iv}$, *pro* $R = F^{v}$ *&c... pro punctis abscisse sequentibus; pro* $L = F_{'}$, *pro* $K = F_{''}$, *pro* $I = F_{'''}$, *pro* $H = F_{iv}$, *&c... pro punctis abscissa atecedentibus. Atque hoc pacto, fine prolixa differentialium scriptione, valor functionis cujuscunque variabilis, qui in quovis abscissa puncto locum obtinet, commode indicabitur.*

esempi tra i quali spicca la nuova notazione per le *applicate*[17] $y$ e le possibili scritture di tutte le determinate $p, q, r, s,$ &c... in funzione delle variabili $x$ e $y$ e dei loro *detivativi.* Seguendo infatti le notazioni leibniziane Euler scrive le forme derivate delle determinate utilizzando apici o pedici e denomina tutti i differenziali con $dx, dy, dp$&c.... L'apice o il pedice indicano dei valori contigui delle variabili *determinate* o *indeterminate* intesi, in questo frangente, in una particolare concezione geometrica, indicando segmenti successivi o precedenti a quello di riferimento, con notazioni riprese dall'*Ipotesi II.* La scrittura sopra citata è definita in questo modo per esempio per l'applicata $y$:

$$y' = y + dy$$

d'altro canto, dalla prima ipotesi, si deduce che, per esempio:

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{y' - y}{dx} = \frac{Nn - Mm}{dx}$$

dove $Nn$ ed $Mm$ sono segmenti verticali di *applicate* che, per costruzione, sono posti proprio uguali ad $y$ ed $y'$ che non è altro che una variazione di $y$ rispetto ad un differenziale $dy$ infinitamente piccolo. In successivi corollari viene definito il ruolo della forma integrale $\int Zdx$ rispetto ai "segmentini"definiti ed introdotti con la seconda ipotesi.

In ultima istanza si trova la quarta proposizione dell'opera che apre la strada verso il metodo vero e proprio definendo l'idea di variazione e valore differenziale. Nel dettaglio:

**Proposizione 3.4.** *Sia* amnoz *la curva relativa alla data ascissa $AZ$, per la quale nella formula $\int Zdx$ si otterrà il valore di massimo o minimo; se venisse tracciata un'altra curva am$\nu$oz differente dalla prima di una quantità infinitamente piccola, allora il valore della formula $\int Zdx$ ottenuto con quest'ultima curva sarà lo stesso.*[18]

[17] in [7] viene usato il termine *applicata* per intendere le ordinate riferite all'ascissa $x$

[18] "*Si* amnoz *fuerit curva ad abscissam datam AZ relata, in qua formula $\int Zdx$ maximum minimumve obtineat valorem; atque alia concipiatur curva am$\nu$oz ab ista infinite parum discrepans, tum valor formula $\int Zdx$ pro utraque curva erit idem.*

La validità di questo teorema è il caposaldo di tutta la trattazione. Come verrà infatti esposto in questo elaborato, il metodo consiste nell'annullare le variazioni generate nella formula $\int Zdx$ dall'incremento $n\nu$. Tutto questo è applicabile per l'ultima proposizione che afferma che $\int Zdx$ dovrà subire una variazione nulla, se la curva *amnoz* considerata è quella con la proprietà di massimo o minimo.
Il primo capitolo del *Methodus* si conclude infine con una definizione legata all'ultima proposizione:

**Definizione 3.4.** *Il* Valore differenziale *corrispondente ad una data formula di massimo o minimo è la differenza tra quei valori che si ottengono quando vengono sostituite nella formula due curve che differiscono per quantità infinitamente piccole.*

Questa definizione è particolarmente importante in quanto può essere letta come una rivisitazione in campo funzionale dei differenziali già adottati da Leibniz [6] e, inoltre, crea le basi definitive per affrontare il vero e proprio metodo euleriano, che a sua volta segna gli albori del calcolo delle variazioni come lo conosciamo oggi.

## 3.2 Il metodo dei massimi e minimi assoluto

Il secondo capitolo dell'opera consiste di una serie di problemi con le relative soluzioni legati al metodo assoluto. È proprio in questo frangente che si raggiunge il risultato fondamentale del trattato. In questo elaborato verranno riportati per intero enunciati e soluzioni.

**Problema 3.2.1.** *Se in una qualsiasi curva amz viene aumentata la applicata $Nn$ di una quantità infinitamente piccola $n\nu$, si trovi l'incremento o il decremento che ricevono le singole quantità determinate appartenenti alla curva*[19]

[19]in [7]: *Si in curva quacunque* amz *una applicata quavis $Nn$ augeatur particula parva $n\nu$; invenire incrementa vel decrementa , quae singulae quantitates determinatae ad curvam pertinentes hinc accipient.*

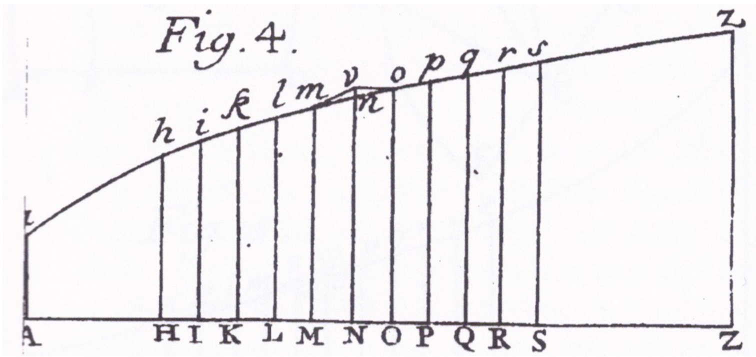
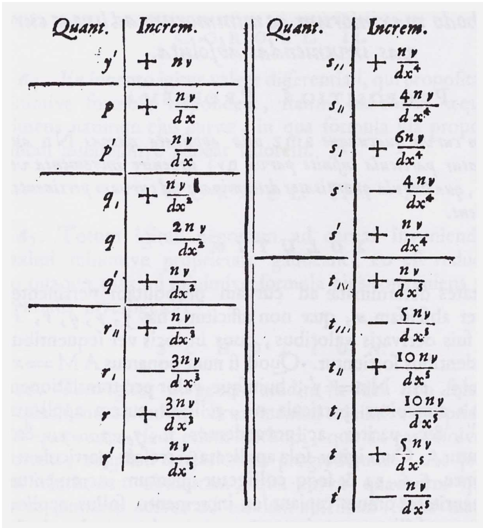



Figura 3.1

*Soluzione.* La soluzione riportata in [7] è particolarmente intuitiva e geometrica. Inizialmente si incrementa semplicemente l'*applicata* $Nn$ da parte di $n$ (si veda la figura (3.1)) di una piccola quantità[20] $n\nu$, comportando così una variazione di $y' = Nn$. Ricordiamo che, in conformità con le notazioni dell'*Ipotesi II*, l'ascissa di riferimento $x$ è il segmento $AM$ e la sua applicata $y$ sarà $Mm$. Seguendo poi la trattazione, le altre applicate non dovranno essere modificate manualmente, ma si vedrà che subiranno un incremento per l'operazione geometrica appena eseguita. Dalle posizioni fatte dall'Autore nel suo precedente capitolo si capisce quanto valga l'incremento delle altre applicate provocato dalla sola variazione della $y'$. Così come $p = \frac{y'-y}{dx}$ cresce di $\frac{n\nu}{dx}$ [21] anche $p' = y'' - y'$ decresce della piccolissima quantità $\frac{n\nu}{dx}$. La soluzione prosegue ricavando tutte le altre variazioni e riportandole su una tabella molto dettagliata presentata in [7] pag. 32.

[20] in [7] *particula*

[21] $p = \frac{y'-y}{dx}$ allora $\frac{(y'+n\nu)-y}{dx} = \frac{y'-y}{dx} + \frac{n\nu}{dx} = p + \frac{n\nu}{dx}$



| Quant. | Increm. | Quant. | Increm. |
|---|---|---|---|
| $y'$ | $+nv$ | $s_{,,,}$ | $+\frac{nv}{dx^4}$ |
| $p$ | $+\frac{nv}{dx}$ | $s_{,,}$ | $-\frac{4nv}{dx^4}$ |
| $p'$ | $-\frac{nv}{dx}$ | $s_{,}$ | $+\frac{6nv}{dx^4}$ |
| $q_{,}$ | $+\frac{nv}{dx^2}$ | $s$ | $-\frac{4nv}{dx^4}$ |
| $q$ | $-\frac{2nv}{dx^2}$ | $s'$ | $+\frac{nv}{dx^4}$ |
| $q'$ | $+\frac{nv}{dx^2}$ | $t_{,,,,}$ | $+\frac{nv}{dx^5}$ |
| $r_{,,}$ | $+\frac{nv}{dx^3}$ | $t_{,,,}$ | $-\frac{5nv}{dx^5}$ |
| $r_{,}$ | $-\frac{3nv}{dx^3}$ | $t_{,,}$ | $+\frac{10nv}{dx^5}$ |
| $r$ | $+\frac{3nv}{dx^3}$ | $t_{,}$ | $-\frac{10nv}{dx^5}$ |
| $r'$ | $-\frac{nv}{dx^3}$ | $t$ | $+\frac{5nv}{dx^5}$ |
| | | $t'$ | $-\frac{nv}{dx^5}$ |

Figura 3.2

$\square$

Se la funzione proposta è una quantità qualunque composta da quelle variabili, allora ci si aspetta che ci sia un incremento anche nelle applicate diverse da $Nn$. Si può pensare così di visualizzare anche gli incrementi delle stesse quantità differenziali sostituendo le *particulae* elencate nella tabella ai differenziali. Se abbiamo, per esempio, una funzione del tipo $y'\sqrt{1+pp}$, prima di tutto la si differenzia: da questa operazione risulta $dy'\sqrt{1+pp}+\frac{y'p\,dp}{\sqrt{1+pp}}$[22]; per l'incremento si sostituirà poi ai differenziali $dy'$ e $dp$ i singoli incrementi delle quantità $y'$ e $p$. Seguendo la tabella questi saranno rispettivamente di $+nv$ e $+\frac{nv}{dx}$, di conseguenza l'incremento del differenziale della funzione proposta è di $+nv\sqrt{1+pp}+\frac{y'p\,\frac{nv}{dx}}{\sqrt{1+pp}}$.

Anche se si può usare con facilità la tabella degli incrementi sulle variabili determinate, nulla si può su quelle indeterminate. Non si potrà quindi applicare il metodo sopra citato allo studio degl'incrementi dei differenziali di formule in cui le variabili oltre la $y$ siano indeterminate -in termini moderni, funzionali integrali.

[22]le regole di differenziazione sono anche in questo caso le semplici regole del calcolo di Leibniz, cfr. Capitolo 1 del presente elaborato.

**Problema 3.2.2.** *Se $Z$ è una funzione algebrica delle sole $x$ e $y$, trovare la curva $az$ per la quale la formula $\int Zdx$ sia massima o minima.*[23]

*Soluzione.* Guardando la figura (3.1) si tenga conto che la formula $\int Zdx$ di massimo o minimo dovrà sempre corrispondere dell'ascissa $AZ$. Dividendo tale ascissa in tante piccole parti (innumerabili ed uguali tra loro[24]) che chiameremo singolarmente $dx$; porremo così $AM = x$ e $Mm = y$ (la sua applicata). Seguendo le posizioni enunciate dall'*Ipotesi II* $MN$ corrisponderà a $Zdx$, $NO$ a $Z'dx$ ecc... Quindi se la curva $az$ è proprio quella richiesta deve essere $Zdx + Z'dx + Z''dx + ...\&c$ sommato a $Z_{\prime}dx + Z_{\prime\prime}dx + ...\&c$ massimo o minimo. Se dunque venisse aumentata la applicata $Nn = y'$ di una piccola quantità $n\nu$, la suddetta somma manterrebbe il suo stesso valore [25] e in tal modo il valore della formula differenziale $\int Zdx$ o della somma dei termini $Z'dx + Z''dx + ...\&c$ insieme a $Z_{\prime}dx + Z_{\prime\prime}dx + ...\&c$ "sparirebbe"(*evanescet*). Dobbiamo quindi ricercare i valori differenziali, generati dalla traslazione del punto $n$ in $\nu$, dei singoli termini che sono e la loro composizione sarà il valore dell'incremento corrispondente alla formula $\int Zdx$, che posto $= 0$ mostrerà l'equazione della curva richiesta. Poichè $Z$ è posto come funzione determinata di $x$ e $y$, il differenziale $dZ$ avrà la forma $Mdx + Ndy$, così che sia $dZ = Mdx + Ndy$. Si potranno inoltre calcolare anche i differenziali dei valori derivati di $Z$.

$$\begin{array}{r|l} dZ' = M'\,dx + N'\,dy' & dZ_{\prime} = M_{\prime}\,dx + N_{\prime}\,dy_{\prime} \\ dZ'' = M''\,dx + N''\,dy'' & dZ_{\prime\prime} = M_{\prime\prime}\,dx + N_{\prime\prime}\,dy_{\prime\prime} \end{array}$$

Trovati i valori differenziati, al posto di $dy'$ si potrà scrivere $n\nu$ e al posto di tutti gli altri termini si dovrà porre 0; rimane diverso da 0 solo il termine $Z'dx$ poichè esso è l'unico in cui appare il termine $dy'$, infatti, seguendo la tabella compilata nel primo problema della sezione, i differenziali delle altre forme derivate di $y$ sono sempre nulli. Si scrive così $n\nu$ al posto di $dy'$ e si

[23]in [7]: *Si fuerit Z functio determinata ipsarum x & y tantum, invenire curvam az, in qua valor formula $\int Zdx$ sit maximus vel minimus.*

[24]*divisa in innumerabilia elementa aequalia* da [7] pag. 34

[25]Per definizione stessa di $\nu$ come *valor differentialis*, si veda definizione (3.4)

ottiene la forma $Z'dx = N'\,dx \cdot n\nu$. Si può porre $N' = N$ poichè $N' = N + dN$ e $dN$ svanisce[26]. Quindi la curva richiesta in cui $\int Zdx$ è massimo o minimo è $Ndx \cdot n\nu = 0$ ossia $N = 0$. □

### Commento

Quanto esposto nell'ultimo problema costituisce il fulcro della teoria del calcolo delle variazioni euleriano e contiene alcune particolarità. I piccoli segmenti identicamente uguali a $dx$ costituiscono tutte le innumerevoli parti di $AZ$ $(MN, NO, OP, ..., LM, KL, IL, ...)$; $AZ$, come ascissa, sarà nella sua totalità in corrispondenza con la formula $\int Zdx$ e rappresenterà tutta la curva. Ne consegue che tutti gli altri segmenti di tale suddivisione, come $MN$ e $NO$ nel precedente problema, sarebbero stati corrispondenti a $Z^{(n)}dx$, secondo l'ordine del segmento considerato. L'Autore sostituiva anche direttamente la formula integrale con la somma di termini del tipo $Z^{(n)}dx$ in quanto corrispondenti alle varie parti che componevano tutta l'ascissa $AZ$[27]. Nel particolare problema si ritrovava una formula integrale dipendente, per ipotesi, dalle sole variabili $x$ e $y$ e, quindi, seguendo la tabella del *Problema I* tutti i termini a parte $dy'$ sparivano. Di fatto la variazione che incrementava l'applicata $Nn$ del segmento $n\nu$ non aveva alcuna influenza sui termini in $dx$ o $dy^{(n)}$ e, per questo, *al posto di tutti i rimanenti differenziali si porrà invero 0*[28].

Euler ricordava infine in un'annotazione che quello proposto era un metodo per trovare la curva di massimo o minimo in un caso speciale e molto semplice. Permanendo dubbi, in alcuni casi è anche facile giudicare la giustezza del risultato studiando l'andamento della curva soluzione.

Gli esempi erano la parte preponderante del trattato e per questo saranno

[26] in [7] *evanescit*

[27] Ricordiamo infatti che, all'epoca, la concezione dell'integrale era, come oggi, quella di una somma infinita di termini ma che, al contrario di oggi, non era formalizzata tramite la teoria dei limiti che comparirà nei trattati matematici meno di un secolo più tardi.

[28] *loco omnium reliquorum differentialium vero 0*; da [7] pag 35

esposti in questo elaborato al seguito di ogni problema, in conformità con quanto fatto dall'Autore in maniera impeccabilmente chiara e concisa.

**Esempio 3.2.1.** *Trovare la curva per cui la formula* $\int (ax - yy)y\,dx$ *abbia il valore massimo o minimo.*

*Svolgimento.* Sarà $Z = axy - y^3$ quindi $dZ = ay\,dx + (ax - 3yy)\,dy$ che sarebbe la forma differenziale del tipo $dZ = Mdx + Ndy$. Dunque si ha

$$M = ay \qquad N = ax - 3yy.$$

Per il risultato sopra trovato si deve porre $N = 0$ e quindi $ax - 3yy = 0$ dunque si ha $yy = \frac{1}{3}ax$ che è l'equazione di una parabola con asse $AZ$, vertice in $A$ e parametro $\frac{1}{3}a$. Possiamo stabilire se sia massimo o minimo e questo si fa per sostituzioni. Esistono più metodi per fare ciò: per esempio sostituiamo la retta $y = 0$ al posto della parabola e si nota che l'integrale si annulla. Mentre con la parabola il valore è positivo. Ciò significa che non può essere un minimo. □

### 3.2.1 L'*equazione di Eulero-Lagrange*

**Problema 3.2.3.** *Se* $Z$ *è una funzione determinata in* $x, y, p$*, tale che sia* $dZ = Mdx + Ndy + Pdp$*, trovare tra tutte le curve possibili quella per la quale la formula* $\int Zdx$ *è massima o minima.*[29]

*Soluzione.* Sia $amz$ la curva in questione e si costruisca il solito incremento $n\nu$ su $y'$. Come nel problema precedente $\int Zdx$ o, per meglio dire, la somma $Z'dx + Z''dx + ...\&c$ e $Z_{\prime}dx + Z_{\prime\prime}dx + ...\&c$ dovranno essere massimi o minimi. La situazione è simile a quella precedentemente considerata con la sola differenza che ora le variabili che subiscono la variazione sono in numero maggiore; nello specifico oltre a $y'$ anche $p$ e $p'$ varieranno a causa dell'incremento generato da $nv$. Allora al posto di $dy'$ si sostituirà $nv$, al posto di $dp$

[29] in [7]: *Si fuerit functio ipsarum* $x, y, p$ *determinata, ita ut sit* $dZ = Mdx + Ndy + Pdp$*; invenire, inter omnes curvas eidem abscissa respondentes, eam in qua sit* $\int Zdx$ *maximum vel minimum.*

si avrà $\frac{nv}{dx}$ e infine al posto di $dp'$, $-\frac{nv}{dx}$. Ora le componenti del differenziale di $\int Zdx$ interessate dalla variazione sono due:

$$dZ = Mdx + Ndy + Pdp \qquad dZ' = M'dx + N'dy' + P'dp'.$$

Da qui si ottiene che le varizioni di $dZ$ e $dZ'$ sono rispettivamente pari a $P \cdot \frac{nv}{dx}$ e $N'\,nv - P'\,\frac{nv}{dx}$, in quanto gli altri differenzialini $dx$ e $dy$ sono eliminabili dato che non subiscono variazioni. Quindi, dalla somma $Z'dx + Z''dx + ...\&c$ e $Z\prime dx + Z\prime\prime dx + ...\&c$, gli unici addendi rimanenti sono $Zdx + Z'dx$ e si ha che la loro variazione è pari a

$$nv \cdot (N'dx - P' + P).$$

Ma essendo invero $P - P' = dP$ e $N = N'$ si ha dunque

$$nv \cdot (N'dx - P' + P) = nv \cdot (Ndx - dP)$$

di conseguenza $Ndx - dP = 0$ ovverosia

$$N - \frac{dP}{dx} = 0. \tag{3.1}$$

□

Dopo la trattazione del problema l'Autore considera alcuni casi particolari ed esempi. Quando si hanno forme del tipo $dZ = Ndy + Pdp$ (ossia non è presente $M$) si può semplificare la formula partendo da (3.1). Dato che $dy = pdx$, si ha infatti che $Ndy - pdP = 0$, equivalentemente $Ndy = pdP$. Da questo risulta:

$$dZ = Ndy + Pdp = pdP + Pdp.$$

Quindi integrando $dZ$ e tenuto conto, tramite le regole di derivazione leibniziane[30], che il secondo membro dell'equazione è proprio la derivata di un prodotto, si avrà infine:

$$Z + C = Pp.$$

Questa potrà essere usata come equazione risolvente nel caso particolare in cui $M = 0$.

[30] cfr. [6].

**Esempio 3.2.2.** *Trovare tra tutte la curva per la quale la formula integrale* $\int \frac{ydy^3}{dy^2+dx^2}$ *sia massima o minima.*

*Svolgimento.* Sapendo che $dy = pdx$ si ha:

$$\int \frac{ydx^3p^3}{p^2dx^2+dx^2} = \int \frac{yp^3dx}{1+pp}$$

Dunque $Z = \frac{yp^3}{1+pp}$ e $dZ = \frac{p^3dy}{1+pp} + \frac{ydp(3pp+p^4)}{(1+pp)^2}$:

$$M = 0 \qquad N = \frac{p^3}{1+pp} \qquad P = \frac{y(3pp+p^4)}{(1+pp)^2}.$$

Per lo scolio precedentemente citato la formula risolvente di tale problema sarà $Z + C = Pp$ e si avrà:

$$\frac{yp^3}{1+pp} + a = \frac{yp(3pp+p^4)}{(1+pp)^2}$$

$$yp^3(1+pp) + a(1+pp)^2 = yp^3(3+p^2)$$

$$yp^3 + yp^5 + a(1+pp)^2 = 3yp^3 + yp^5$$

$$a(1+pp)^2 = 2yp^3$$

da cui infine

$$y = \frac{a(1+pp)^2}{2p^3}$$

□

**Problema 3.2.4.** *Se $Z$ fosse una funzione in $x, y, p, \&q$, così che sia $dZ = Mdx+Ndy+Pdp+Qdq$; trovare, tra tutte le curve corrispondenti alla stessa ascissa, quella per cui la formula $\int Zdx$ sia massima o minima*[31]

*Soluzione.* Si procede similmente al *Problema III* con un'unica accortezza riguardo gli incrementi che in questo caso interessano anche la variabile $q$ e le sue derivate $q'$ e $q_{\prime}$. Conseguentemente i termini interessati dalla variazione

[31] in [7]: *Si $Z$ fuerit functio ipsarum $x, y, p, \&q$, ita ut sit $dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq$; invenire, inter omnes curvas eidem abscissam respondentes. eam in qua sit $\int Zdx$ maximum vel minimum.*

saranno tre, più precisamente $Z_{\prime}dx$, $Zdx$, $Z'dx$. Le forme differenziate di questi termini si presenteranno come segue:

$$\begin{aligned} dZ'dx &= dx(M'dx + N'dy' + P'dp' + Q'dq') \\ dZdx &= dx(Mdx + Ndy + Pdp + Qdq) \\ dZ_{\prime}dx &= dx(M_{\prime}dx + N_{\prime}dy_{\prime} + P_{\prime}dp_{\prime} + Q_{\prime}dq_{\prime}). \end{aligned}$$

Ora, allo stesso modo del precedente problema, si dovranno considerare i soli incrementi rimasti (influenzati dalla traslazione del punto $n$ in $\nu$) e si dovrà porre uguale a 0 la loro somma. Seguendo, come di consueto, la tabella del *Problema I* si può dedurre il seguente schema per definire al meglio le varie sostituzioni degli incrementi al posto dei differenziali[32]:

$$\begin{array}{c|c|c} dy' = +n\nu & dp' = -\frac{n\nu}{dx} & dq' = +\frac{n\nu}{dx^2} \\ dy = 0 & dp = +\frac{n\nu}{dx} & dq = \frac{-2n\nu}{dx^2} \\ dy_{\prime} = 0 & dp_{\prime} = 0 & dq_{\prime} = +\frac{n\nu}{dx^2} \end{array}$$

considerando così la somma degli incrementi dei differenziali e ponendola $= 0$ si avrà che:

$$0 = n\nu \cdot dx(N - \frac{P'}{dx} + \frac{P}{dx} + \frac{Q'}{dx^2} - \frac{2Q}{dx^2} + \frac{Q_{\prime}}{dx^2}).$$

Ma essendo $P' - P = dP$ e $Q' - 2Q + Q_{\prime} = Q_{\prime} + 2dQ_{\prime} + ddQ_{\prime} - 2Q_{\prime} - 2dQ_{\prime} + Q_{\prime} = ddQ_{\prime}$ allora si scriverà:

$$0 = n\nu \cdot dx(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ_{\prime}}{dx^2})$$

l'equazione risolvente risulterà così essere $0 = n\nu \cdot dx(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2})$ ovvero $0 = (N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2})$ in quanto Euler considera come uguali a meno di un piccolissimo difetto le due forme $ddQ_{\prime}$ e $ddQ$. □

Anche in questo caso, come in quello sopra citato, vengono formulati alcuni casi particolari prima di mostrare qualche esempio numerico nel dettaglio. L'Autore considera infatti a parte casi in cui alcune tra le componenti della

[32] lo schema seguente si trova in [7] pag. 57

forma differenziale $dZ$ non compaiano. Per esempio se $N = 0$, ossia nella forma $Z$ non è presente l'applicata $y$, l'equazione risolvente sarebbe presentata come segue:

$$-\frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx} = 0 \qquad \frac{dP}{dx} = \frac{ddQ}{dx}$$

integrando, quindi, ambo i membri si avrà come risultato $C - P + \frac{dQ}{dx} = 0$. Di più se fosse anche $P = 0$ si avrebbe dopo una seconda integrazione un'equazione di questo tipo:

$$Cx + D - Q = 0.$$

Caso più particolare, ma molto simile a quello presentato successivamente al *Problema III*, è quello in cui sia $M = 0$. Di fatti la forma $dZ$ non avrebbe più il termine $Mdx$, che nonostante non compaia nell'equazione risolvente, permette alcune semplificazioni.

$$dZ = Ndy + Pdq + Qdq \qquad dZ - Ndy - Pdp - Qdq \tag{3.2}$$

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} = 0 \tag{3.3}$$

Ora moltiplicando la (3.3) per $dy = pdx$ si ottiene:

$$Ndy - pdP + p\frac{ddQ}{dx} = 0 \tag{3.4}$$

e aggiungendo la (3.2) alla (3.4) si avrà infine $dZ - pdP - Pdp - Qdq + \frac{ddQ}{dx}p = 0$ che, una volta integrata, genererà banalmente una forma semplificata dell'equazione risolvente:

$$Z - pP - p\frac{dQ}{dx} - Qq = 0.$$

**Esempio 3.2.3.** *Trovare la curva, per la quale il valore della formula $\int q^n dx$ sia massimo o minimo.*[33]

[33] in [7]: *Invenire curvam, in qua sit valor hujus formula $\int q^n dx$, seu $\int \frac{ddy^n}{dx^{2n-1}}$, maximus vel minimus.*

*Svolgimento.* In questo caso si ha $Z = q^n$ e la relativa forma differenziale $dZ = nq^{n-1}dq$; saranno quindi tutte le componenti eccetto la $Q$ pari a 0 $(M = 0, N = 0, P = 0)$. L'equazione risolvente sarà quindi

$$\frac{ddQ}{dx^2} = 0.$$

Consideriamo un qualche valore $\alpha$ per cui (integrando dalla precedente equazione) $\frac{dQ}{dx} = \alpha$[34], quindi $dQ = \alpha dx$ e inoltre $Q = q^{n-1} = \alpha x + \beta$. Da questa considerazione se ne deduce che $q = (\alpha x + \beta)^{\frac{1}{n-1}} = \frac{dp}{dx}$, dove l'ultima uguaglianza non è altro che l'*ipotesi I* dell'opera. Integrando nuovamente si ha che

$$p = (\alpha x + \beta)^{\frac{n}{n-1}} + \gamma$$

e infine si giunge all'ultima integrazione in cui viene esplicitata l'applicata $y$:

$$y = (\alpha x + \beta)^{\frac{2n-1}{n-1}} + \gamma x + \delta.$$

Si ricordano infine due casi particolari. Il primo con $n = \frac{1}{2}$ per cui la curva degenera in una retta $y = \gamma x + \delta$ ed il secondo con $n = 1$ in cui non si può agire in quanto la formula $\int qdx$ non è integrale bensì si può porre $dp$ al posto di $qdx$ e la formula risulterà determinata. Di fatti la prova dell'impossibilità di risolvere un tal caso con il *Methodus* è data dal fatto che nell'equazione risolvente è impossibile porre $n = 1$ in quanto si incorrerebbe in una formula priva di senso. □

Alla fine del capitolo dedicato allo studio del metodo assoluto, finora presentato nel dettaglio, si trova un ultimo problema che è opportuno riportare. Nonostante il risultato fondamentale di questa sezione dell'opera sia già stato ricavato nei problemi precedenti, quest'ultima proposizione è la massima generalizzazione che viene fatta dall'Autore mettendo in gioco non più un numero predeterminato, bensì tutte le possibili variabili e possibili vincoli. Sicuramente per l'Autore quest'ultima parte del capitolo è una *summa* di

[34]trattandosi di un differenziale di secondo ordine uguagliato a 0, è banale che lo stesso differenziale al primo ordine sia posto uguale ad una costante, in questo caso $\alpha$

tutto ciò che era stato precedentemente detto e, come è forse intuibile, una generalizzazione dell'equazione risolvente, fatta anche per rendere nota una certa analogia tra tutti i casi. Come si mostrerà a breve, l'equazione finale è formulata come segue:

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \frac{d^5T}{dx^5} + \&c...$$

Questo è semplicemente un ampliamento delle precedenti (che già erano simili tra loro a meno di alcuni addendi) e fa capire che, anche alzando il grado dei differenziali, il problema resta lo stesso ed è affrontato con lo stesso metodo. Subito dopo l'enunciazione del problema e la sua soluzione, Euler mostra infine alcuni casi particolari (sette per essere precisi) non riportati in questo elaborato.

**Problema 3.2.5.** *Trovare la curva, per la quale il valore della formula $\int Zdx$ sia massimo o minimo, considerando che tale funzione $Z$ è presentata in modo che il suo differenziale possa aumentare di un qualsiasi grado, così che sia $dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + Sds + Tdt + \&c...$*[35]

*Soluzione.* La traslazione del punto $n$ in $\nu$ influenza maggiormente gli elementi precedenti ad $N$ piuttosto che i seguenti. In [7], infatti, Euler afferma che "viene influenzato un unico elemento seguente mentre si estende di più nei precedenti, nei quali sono presenti differenziali di ordine più alto[36]", verrà quindi considerata un applicata precedente ad $Nn$, per esempio $Hh$, in modo tale che la variazione generata dall'incremento di $Nn$ in $\nu$ non si protenda al di là di $Hh$; ciò accadrà se i differenziali in $Z$ non si protrarranno oltre il sesto grado. Sarà sufficiente inoltre estendere la scrittura di $dZ$ fino al termine $Tdt$ poichè da queste soluzione si potrà risalire facilmente ad ogni forma di $dZ$ e ad ogni sua scrittura. Sia così definita l'ascissa $AH = x$ e la sua applicata

[35]in [7]: *Invenire curvam, in qua sit valor formula $\int Zdx$ maximus vel minimus, existente $Z$ ejusmodi functione, qua differentialia cujusvis gradus involvat, ita ut sit $dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + Sds + Tdt + \&c....$*

[36]*unicum enim sequentes elementum afficit , at in praecedentia eo ulterius extenditur, quo altiorum ordinum differentialia adsint*

$Hh = y$; i singoli punti dell'ascissa corrisponderanno alle variabili *determinate* $p, q, r, s, t,$ &c... come viene riportato nella seguente tabella estrapolata da [7].

Di seguito sono poi proposti i valori differenziali delle singole variabili rac-

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| H | $y$, | $p$, | $q$, | $r$, | $s$, | $t$ |
| I | $y'$, | $p'$, | $q'$, | $r'$, | $s'$, | $t'$ |
| K | $y''$, | $p''$, | $q''$, | $r''$, | $s''$, | $t''$ |
| L | $y'''$, | $p'''$, | $q'''$, | $r'''$, | $s'''$, | $t'''$ |
| M | $y^{IV}$, | $p^{IV}$, | $q^{IV}$, | $r^{IV}$, | $s^{IV}$, | $t^{IV}$ |
| N | $y^{V}$, | $p^{V}$, | $q^{V}$, | $r^{V}$, | $s^{V}$, | $t^{V}$. |

Figura 3.3

colti in un'altra tabella dallo stesso Autore.

Considerando poi che all'ascissa $AH$ corrisponde il valore della formula

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $dy = 0$ | $dy' = 0$ | $dy'' = 0$ | $dy''' = 0$ | $dy^{IV} = 0$ | $dy^{V} = +n\nu$ |
| $dp = 0$ | $dp' = 0$ | $dp'' = 0$ | $dp''' = 0$ | $dp^{IV} = +\frac{n\nu}{dx}$ | $dp^{V} = -\frac{n\nu}{dx}$ |
| $dq = 0$ | $dq' = 0$ | $dq'' = 0$ | $dq''' = +\frac{n\nu}{dx^2}$ | $dq^{IV} = -\frac{2n\nu}{dx^2}$ | $dq^{V} = +\frac{n\nu}{dx^2}$ |
| $dr = 0$ | $dr' = 0$ | $dr'' = +\frac{n\nu}{dx^3}$ | $dr^{IV} = -\frac{3n\nu}{dx^3}$ | $dr^{IV} = +\frac{3n\nu}{dx^3}$ | $dr^{V} = -\frac{n\nu}{dx^3}$ |
| $ds = 0$ | $ds' = +\frac{n}{dx}$ | $ds'' = -\frac{4n\nu}{dx^4}$ | $ds''' = +\frac{6n\nu}{dx^4}$ | $ds^{IV} = -\frac{4n\nu}{dx^4}$ | $ds^{V} = +\frac{n\nu}{dx^4}$ |
| $dt = +\frac{n\nu}{dx^5}$ | $dt' = -\frac{5n}{dx^5}$ | $dt'' = +\frac{10n\nu}{dx^5}$ | $dt''' = -\frac{10n\nu}{dx^5}$ | $dt^{IV} = +\frac{5n\nu}{dx^5}$ | $dt^{V} = -\frac{n\nu}{dx^5}$ |

Figura 3.4

$\int Zdx$ che non viene in alcun modo influenzato dalla variazione di $n$ in $\nu$, i punti successivi ad $AH$ corrisponderanno ai valori derivati di $Zdx$ come già si è osservato in antecedenti problemi.

$$\begin{array}{c|c} HI & Zdx \\ IK & Z'dx \\ KL & Z''dx \\ LM & Z'''dx \\ MN & Z^{iv}dx \\ NO & Z^{v}dx \end{array}$$

Date tutte queste premesse si possono ricavare le varie espressioni dei valori differenziali "incrementati"di $Zdx$ e dei suoi *derivativi*, sostituendo quanto ricavato nelle precedenti tabelle come segue:

$$dZdx = n\nu \cdot dx(\frac{T}{dx^5}) \tag{3.5}$$

$$dZ'dx = n\nu \cdot dx(\frac{S'}{dx^4} - \frac{T'}{dx^5}) \tag{3.6}$$

$$dZ''dx = n\nu \cdot dx(\frac{R''}{dx^3} - 4\frac{S''}{dx^4} + 10\frac{T''}{dx^5}) \tag{3.7}$$

$$dZ'''dx = n\nu \cdot dx(\frac{Q'''}{dx^2} - 3\frac{R^v}{dx^3} + 6\frac{S'''}{dx^4} - 10\frac{T'''}{dx^5}) \tag{3.8}$$

$$dZ^{iv}dx = n\nu \cdot dx(\frac{P^{iv}}{dx} - 2\frac{Q^{iv}}{dx^2} + 3\frac{R^{iv}}{dx^3} - 4\frac{S^{iv}}{dx^4} + 5\frac{T^{iv}}{dx^5}) \tag{3.9}$$

$$dZ^{v}dx = n\nu \cdot dx(N^v - \frac{P^v}{dx} + \frac{Q^v}{dx^2} - \frac{R^v}{dx^3} + \frac{S^v}{dx^4} - \frac{T^v}{dx^5}) \tag{3.10}$$

A questo punto è semplice fare la somma di tutti gli incrementi delle componenti del tipo $Z^{(n)}dx$ per poi dedurre l'equazione della curva ricercata.

$$n\nu \cdot dx \begin{cases} +N^v \\ \frac{-P^v+P^{iv}}{dx} \\ \frac{Q^v-2Q^{iv}+Q'''}{dx^2} \\ \frac{-R^v+3R^{iv}-3R'''+R''}{dx^3} \\ \frac{S^v-4S^{iv}+6S'''-4S''+S'}{dx^4} \\ \frac{-T^v+5T^{iv}-10T'''+10T''-5T'+T}{dx^5} \end{cases}$$

Dove quest'ultima espressione raccoglie proprio la somma sopra citata.
Si consideri poi che ogni numeratore di tutti i rapporti precedenti può essere

raccolto in un unico valore come segue[37]:

$$-P^v + P^{iv} = -dP^{iv} \tag{3.11}$$

$$Q^v - 2Q^{iv} + Q^{'''} = ddQ^{'''} \tag{3.12}$$

$$-R^v + 3R^{iv} - 3R^{'''} + R^{''} = -d^3R^{''} \tag{3.13}$$

$$S^v - 4S^{iv} + 6S^{'''} - 4S^{''} + S' = d^4S' \tag{3.14}$$

$$-T^v + 5T^{iv} - 10T^{'''} + 10T^{''} - 5T' + T = d^5T \tag{3.15}$$

il valore differenziale della formula $\int Zdx$ sarà quindi dato dall'espressione $n\nu \cdot dx(N^v - \frac{dP^{iv}}{dx} + \frac{ddQ^{'''}}{dx^2} - \frac{d^3R^{''}}{dx^3} + \frac{d^4S'}{dx^4} - \frac{d^5T}{dx^5})$. L'Autore ora spiega che, essendo tutte le componenti omogenee, si possono omettere tutte le scritture all'apice che indicherebbero i *derivativi* e perciò svanisce ogni discrimine tra $N$ e $N^v$ cosiccome tra $dP^{iv}$ e $dP$ ecc...[38]
L'equazione della curva atta a massimizzare o minimizzare la formula $\int Zdx$ con $dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + Sds + Tdt + \&c...$ sarà infine

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \frac{d^5T}{dx^5}$$

$\square$

### 3.2.2 Commento al capitolo II dell'opera

L'esame di quanto finora riportato evidenzia alcuni aspetti meritevoli di nota particolare.

#### **Il problema** (3.2.3) **e l'equazione** (3.1)

L'equazione (3.1)è tuttora utilizzata alla base del moderno calcolo delle variazioni. Nell'analisi matematica moderna, invero, il metodo di Euler

[37]ripreso da [7], l'Autore considera come assunto il passaggio matematico intermedio in quanto deriva direttamente dall'*Ipotesi II* enunciata nella sezione precedente di questo elaborato

[38]in [7]:*Hic autem, quia omnes termini sunt homogenei, signaturae tuto omitti possunt, evaniscit enim discrimen inter* $N^v \& N$, *itemque inter* $dP^{iv} \& dP$, *reliquaque.*

viene denominato talvolta come metodo classico (o indiretto) nel calcolo delle variazioni. Tali metodi, formalmente, si rifanno allo studio dei punti di stazionarietà di un dato funzionale, similmente a quanto fatto da Euler. Richiamando l'introduzione di Giusti al suo libro [12], si pone un funzionale $F$

$$F(u) = \int_{\Omega} f(x, u(x), Du(x))dx$$

tale che $\Omega$ sia un aperto limitato in $\mathbb{R}^n$ e $f$ sia un funzionale $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{mn} \to \mathbb{R}$ con la condizione al bordo per cui $u = u_0$ in $\partial\Omega$.
Tralasciando ora le condizioni iniziali e di regolarità che $f$ deve soddisfare affinchè il problema abbia senso, si ottiene, nel caso $m = n = 1$ (ossia nel caso unidimensionale, studiato anche da Euler) la seguente equazione per lo studio dei minimi o massimi del funzionale $F(u)$

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 0. \tag{3.16}$$

Seguendo le annotazioni dell'Autore, esiste un'analogia con l'equazione ricavata nel problema (3.2.3), per cui, di fatto, l'equazione moderna non è altro che una formalizzazione tramite l'analisi matematica post-Cauchy di quanto già scritto nel 1744 dal matematico svizzero. L'equazione (3.1) contiene le componenti $N$ e $P$ rispettivamente corrispondenti a $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)$ e $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)$ come componenti della forma differenziale $Z$ nell'opera classica o derivate parziali del funzionale $f$ nella matematica moderna. Si evidenzia, pertanto, uno dei tanti esempi di risultati ricavabili per via geometrica e "informale", reinterpretati e formalizzati anche secoli dopo la loro scoperta. Euler aveva trattato la disciplina del calcolo delle variazioni in modo pioneristico e costituisce ancora oggetto di studio e ricerca da parte dei matematici moderni. Per tale motivo l'attuale equazione fondamentale porta il suo nome e quello di un altro grande Autore che diede un notevole contributo alla scoperta.

### I differenziali

I differenziali erano trattati in senso geometrico come veri e propri segmenti giustificando le moltiplicazioni (o qualsiasi altre operazioni) per i $dx$ o $dy$ ecc... che oggi non hanno alcun senso e costituiscono anzi un grave errore proprio per la natura del simbolo stesso. La questione più insidiosa per un lettore moderno è la completa mancanza di differenze tra l'utilizzo geometrico dei differenziali ed il loro utilizzo "analitico", quando si considera tale segmento come infinitesimo o infinitamente piccolo. Oggi i due concetti sono completamente diversi ed esiste uno strumento molto potente in grado di definire al meglio il comportamento di tali segmenti portati a lunghezze infinitesime (il *limite*). Mancando il concetto di limite, Euler parlava di segmenti di lunghezza determinata e finita e di infinitesimi allo stesso modo. Per esempio, nell'ultimo problema presentato nella precedente sezione l'Autore eliminava le scritture all'apice delle componenti differenziali e, conseguentemente, le differenze tra i *derivativi* o segmenti successivi e le componenti stesse. Il passaggio era giusticato dalla transizione all'infinitesimale del segmento $dx$ che portava tutti i punti successivi ad assimilarsi in uno solo, determinando l'inutilità delle scritture all'apice come $N^v$ o $P^{iv}$.
Nel prossimo capitolo si prenderà in esame un altro fondamentale problema trattato nell'opera: l'isoperimetrico. Come si potrà vedere, è necessario accennare a problemi e risultati ottenuti nel capitolo III e IV di [7] per poi continuare con il vero e proprio caso isoperimetrico presentato soprattutto nel capitolo V dell'opera.

# Capitolo 4

# Analisi tecnico-storica dell'opera di Euler: il "problema isoperimetrico"

## 4.1 La variabile indeterminata $\Pi$: generalizzazione del metodo assoluto

Il terzo capitolo dell'opera tratta dello stesso metodo esplicitato nei precedenti capitoli elevato ad un livello più generale. Ora infatti si prendono in considerazione formule di massimo e minimo che contengono al loro interno non solo composizioni algebriche di $x, y, p, q, r, s, t, \&c...$ come in precedenza, ma anche variabili indeterminate, funzioni a loro volta di forme integrali definite tra due estremi di cui il primo è l'origine 0 e il secondo la stessa variabile indeterminata $x$. La nuova variabile viene definita con una lettera greca in questo modo:

$$\Pi = \int [Z]dx.^{1}$$

Il titolo del capitolo significa: "Sulla ricerca di curve con proprietà di massimo o minimo rispetto ad una formula in cui sono presenti quantità indetermina-

[1] si veda [13] pag.73 sezione 2.3

te[2]".

La trattazione di questo nuovo caso si apre con una prima proposizione in cui si pongono le basi per affrontare le nuove tipologie di problematiche, andando a definire come si calcolino ora gli incrementi e creando nuove notazioni. Inutile precisare che in queste condizioni il metodo necessita di un cambiamento sostanziale, in quanto non è possibile applicare quanto appena ricavato, come affermato nelle prime proposizioni.

**Problema 4.1.1.** *Trovare gli incrementi di quantità integrali indeterminate in una qualunque ascissa, dopo aver aumentato un'applicata $Nn$ qualsiasi di una piccola quantità $n\nu$*[3]

*Soluzione.* Sia $AH = x$ un'ascissa e la sua applicata $Hh = y$, sia inoltre presentata una quantità indeterminata integrale $\Pi$ qualunque, tale che la sua formula non ammetta integrazione. Questa quantità sarà preparata appositamente affinchè, corrispondendo all'ascissa $AH$, non venga modificata all'aumentare dell'applicata $Nn$: per essere precisi, ciò accade se i differenziali di $\Pi$ non crescono oltre il quinto grado. Proseguendo con le stesse notazioni dei precedenti casi, se a $\Pi$ corrisponde $H$, il punto $I$ seguente ad $H$ corrisponderà a $\Pi'$, il punto $K$ a $\Pi''$, $L$ a $\Pi'''$ e di seguito gli altri. L'oggetto della ricerca è proprio scoprire quanto valgano gli incrementi e quindi quanto la traslazione di $n$ in $\nu$ influenzi i valori derivati di $\Pi$, ossia $\Pi', \Pi'', \Pi''', \Pi^{iv}, \Pi^{v}, \&c...$: in questo senso invece si avrà che $d\Pi = 0$ in quanto $\Pi$ è corrispondente ad $H$ che non subisce nessuna variazione dalla suddetta traslazione.
Dal momento invece che $\Pi$ è una formula integrale indefinita, ossia $\int [Z]dx$ e $[Z]$ è una funzione nelle variabili $x, y, p, q, r, s$ e $t$ si avrà che $d[Z] = [M]dx + [N]dy + [P]dp + ... + [T]dt$; quindi continuando con queste nuove

[2] *De inventione curvarum maximi minimive proprietate gaudentes praeditarum, si in ipsa maximi minimive formula insunt quantitates indeterminatae.*

[3] in [7]: *Invenire incrementa, qua quantitas integralis indeterminatae in quovis abscissa puncto, ab aucta alicubi una applicata $Nn$ particula $n\nu$ capit.*

notazioni, le forme derivate di Π saranno:

$$\begin{aligned}
\Pi &= \int [Z]dx \\
\Pi' &= \int [Z]dx + [Z]dx \\
\Pi'' &= \int [Z]dx + [Z]dx + [Z']dx \\
\Pi''' &= \int [Z]dx + [Z]dx + [Z']dx + [Z'']dx \\
\Pi^{iv} &= \int [Z]dx + [Z]dx + [Z']dx + [Z'']dx + [Z''']dx.
\end{aligned}$$

Gli incrementi dei singoli $[Z]dx$ sono già noti e si possono visualizzare nel *Problema V* della precedente sezione, considerando che da $[Z^{vi}]dx$ in poi gli incrementini sono tutti nulli per come è definita la stessa funzione $[Z]$. Infine scriviamo gli incrementi su Π e tutte le sue forme derivate.

$$\begin{aligned}
d\Pi =& 0 \\
d\Pi' =& n\nu \cdot dx \cdot \frac{[T]}{dx^5} \\
d\Pi'' =& n\nu \cdot dx(\frac{[S']}{dx^4} - \frac{4[T'] + d[T]}{dx^5}) \\
d\Pi''' =& n\nu \cdot dx(\frac{[R'']}{dx^3} - \frac{3[S''] + d[S']}{dx^4} + \frac{6[T''] + 4d[T'] - d[T]}{dx^5}) \\
d\Pi^{iv} =& n\nu \cdot dx(\frac{[Q''']}{dx^2} - \frac{2[R'''] + d[R'']}{dx^3} + \frac{3[S'''] + 3d[S''] - d[S']}{dx^4} + \\
&+ \frac{4[T'''] + 6d[T''] - 4d[T'] + [dT]}{dx^5}) \\
d\Pi^{v} =& \dots \\
d\Pi^{vi} =& n\nu \cdot dx([N^v] - \frac{d[P^{iv}]}{dx} + \frac{d[Q^{iv}] - d[Q''']}{dx^2} - \frac{d[R^{iv}] - 2d[R'''] + d[R'']}{dx^3} + \\
&+ \frac{d[S^{iv}] - 3d[S'''] + 3d[S''] - d[S']}{dx^4} - \frac{d[T^{iv}] - 4d[T'''] + 6d[T''] - 4d[T'] + d[T]}{dx^5})
\end{aligned}$$

Euler chiude la soluzione del problema spiegando che si possono semplificare queste pesanti notazioni riducendo per esempio tutti i valori allo stesso grado rispetto ad ogni lettera $[P^{iv}], [Q^{'''}], [R^{''}], [S']$ e $[T]$ come segue:

$$
\begin{aligned}
d\Pi =&0\\
d\Pi' =&n\nu \cdot dx \cdot \frac{[T]}{dx^5}\\
d\Pi'' =&n\nu \cdot dx(\frac{[S']}{dx^4} - \frac{4[T] + 5d[T]}{dx^5})\\
d\Pi''' =&n\nu \cdot dx(\frac{[R'']}{dx^3} - \frac{3[S'] + 4d[S']}{dx^4} + \frac{6[T] + 15d[T] + 10dd[T]}{dx^5})\\
d\Pi^{iv} =&n\nu \cdot dx(\frac{[Q''']}{dx^2} - \frac{2[R''] + 3d[R'']}{dx^3} + \frac{3[S'] + 8d[S'] + 6dd[S']}{dx^4} +\\
&+ \frac{4[T] + 15d[T] + 20dd[T] + 10d^3[T]}{dx^5})\\
d\Pi^{v} =& \ldots\\
d\Pi^{vi} =&n\nu \cdot dx([N^v] - \frac{d[P^{iv}]}{dx} + \frac{dd[Q''']}{dx^2} - \frac{d^3[R'']}{dx^3} + \frac{d^4[S']}{dx^4} - \frac{d^5[T]}{dx^5})
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

□

Subito dopo la trattazione di questo problema in cui si pongono le basi notazionali di tutta la sezione, si presentano due problemi in cui si ritrova la classica formula di massimo o minimo $\int Zdx$, che in questo caso differisce della precedente sezione, in quanto è sia determinata che indeterminata e non si può risolvere solamente per equazioni differenziali o per integrazione[4]. Sono chiare a questo punto le intenzioni generalizzatrici dell'Autore. Ci si sposta in problematiche sempre più complesse che comprendono un numero sempre più ampio di casi e, in un certo senso, inglobano quelli precedentemente presentati. Secondo Goldstine (in [13] pag. 74) in questi passaggi si ritrovano le origini della regola dei moltiplicatori che verrà poi sviluppata da Lagrange. Dopo l'enunciazione e risoluzione dei due problemi sarà mostrato anche un esempio proposto da Euler nella sua opera di applicazione dei metodi.

**Problema 4.1.2.** *Sia data $Z$ come funzione della quantità indeterminata $\Pi$ in modo tale che sia $dZ = Ld\Pi$ con $\Pi = \int [Z]dx$ e $d[Z] = [M]dx + [N]dy +$*

[4] in [7] pagg.87-88: *quando quantitas Z non datur, ut hactenus, sive determinate sive indeterminate, sed tantum per aequationem differentialem, cujus integratio omnino non potest absolvi*

*$[P]dp + [Q]dq + [R]dr + \&c...$, trovare la curva $az$ relativa ad una data ascissa $AZ$ per la quale la formula $\int Zdx$ abbia valore massimo o minimo.*[5]

*Soluzione.* Ricordiamo che $Ld\Pi$ è la nuova componente della forma differenziale che dovrebbe rappresentare la parte di $dZ$ indeterminata; nel caso di questo particolare problema è anche l'unica componente perciò $Z$ è una funzione totalmente indeterminata.
Si pone $AH = x$ e la sua applicata $Hh = y$ e si pone anche tutta l'ascissa a cui deve corrispondere la formula di massimo o minimo $AZ = a$, infine si divide il resto dell'ascissa $HZ$ in innumerevoli parti infinitamente piccole $HI, IK, KL, LM, \&c...$ e $\int Zdx + Zdx + Z'dx + Z''dx + Z'''dx + \&c...$ fino al punto di estremo $Z$ dovranno corrispondere rispettivamente ad $AH$, $HI$, $\&c....$ Come al solito si cercano gli incrementi dei valori differenziali generati dalla traslazione di $n$ in $\nu$ e poi si pone la loro somma uguale a 0 per trovare l'equazione della curva richiesta. Poichè la trasformazione originata da $n\nu$ non ha influenza prima di $H$ si ha che $\int Zdx = 0$ similmente a quanto detto sopra e nella precedente sezione.
Riprendendo anche quanto detto nel problema (4.1.1) si avrà:

$$dZdx = Ldx \cdot d\Pi \tag{4.2}$$

$$dZ'dx = L'dx \cdot d\Pi' \tag{4.3}$$

$$dZ''dx = L''dx \cdot d\Pi'' \tag{4.4}$$

$$dZ'''dx = L'''dx \cdot d\Pi''' \tag{4.5}$$

$$dZ^{iv}dx = L^{iv}dx \cdot d\Pi^{iv} \tag{4.6}$$

[5]in [7]: *Si $Z$ fuerit functio quantitatis indeterminata $\Pi$, ita ut sit $dZ = Ld\Pi$, sitque $\Pi = \int [Z]dx$, existente $d[Z] = [M]dx + [N]dy + [P]dp + [Q]dq + [R]dr + \&c...$ invenire curvam $az$ quae pro data abscissa $AZ$ habeat valorem formulae $\int Zdx$ maximum vel minimum.*

e sostituendo poi le (4.1) si ottiene

$$
\begin{aligned}
dZdx =&0\\
dZ'dx =&n\nu \cdot L'dx^2 \cdot \frac{[T]}{dx^5}\\
dZ''dx =&n\nu \cdot L''dx^2(\frac{[S']}{dx^4} - \frac{4[T]+5d[T]}{dx^5})\\
dZ'''dx =&n\nu \cdot L'''dx^2(\frac{[R'']}{dx^3} - \frac{3[S']+4d[S']}{dx^4} + \frac{6[T]+15d[T]+10dd[T]}{dx^5})\\
dZ^{iv}dx =&n\nu \cdot L^{iv}dx^2(\frac{[Q''']}{dx^2} - \frac{2[R'']+3d[R'']}{dx^3} + \frac{3[S']+8d[S']+6dd[S']}{dx^4} +\\
&+\frac{4[T]+15d[T]+20dd[T]+10d^3[T]}{dx^5})\\
dZ^{v}dx =&\ldots\\
dZ^{vi}dx =&n\nu \cdot L^{vi}dx^2([N^v] - \frac{d[P^{iv}]}{dx} + \frac{dd[Q''']}{dx^2} - \frac{d^3[R'']}{dx^3} + \frac{d^4[S']}{dx^4} - \frac{d^5[T]}{dx^5})\\
dZ^{vii}dx =&n\nu \cdot L^{vii}dx^2([N^v] - \frac{d[P^{iv}]}{dx} + \frac{dd[Q''']}{dx^2} - \frac{d^3[R'']}{dx^3} + \frac{d^4[S']}{dx^4} - \frac{d^5[T]}{dx^5})
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

L'incremento totale della somma $Zdx + Z'dx + Z''dx + Z'''dx + \&c...$ sarà quindi, dopo opportuni raccoglimenti e riduzioni allo stesso grado per omogeneizzare la formula, pari a:

$$
\begin{aligned}
&n\nu \cdot dx^2(\frac{L^v[P]^{iv}}{dx} - \frac{[Q''']dL^{iv}+2L^{iv}d[Q''']}{dx^2} + \frac{[R'']ddL'''+3d[R'']dL'''+3L'''dd[R'']}{dx^3} +\\
&-\frac{[S']d^3L''+4d[S']ddL''+6dL''dd[S']+4L''d^3[S']}{dx^4} +\\
&+\frac{[T]d^4L'+5d[T]d^3L'+10ddL'dd[T]+10dL'd^3[T]+5L'd^4[T]}{dx^5})
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

per tutti gli altri termini oltre il quinto grado l'incremento sarà la somma di tutti valori uguali tra loro e per questo sarà pari a:

$$n\nu dx^2([N^v] - \frac{d[P^{iv}]}{dx} + \frac{dd[Q''']}{dx^2} - \frac{d^3[R'']}{dx^2} + \frac{d^4[S']}{dx^4} - \frac{d^5[T]}{dx^5})(L^{vi}+L^{vii}+L^{viii}+L^{ix}+\&c...).$$

Ora l'Autore esegue un'operazione di semplificazione della formula per mezzo di una sostituzione, giustificata invero dal concetto stesso di integrale che si aveva all'epoca: la somma di tutti i *derivativi* come somma di componenti

successive, altro non era che l'integrale della stessa componente, in quanto non vi era differenza alcuna tra differenziale inteso come semplice $dx$ in senso (oggi si direbbe) algebrico ed lo stesso differenziale infinitesimale. Tutto questo in conformità con quanto fatto anche nel precedente capitolo, senza mai peccare di incoerenza scientifica.
Viene infatti così definito l'integrale $\int Ldx$ in corrispondenza dell'ascissa $AH = x$ -in pratica considerando $AH = x$ l'integrale in questione sarebbe $\int_0^x Ldx$. In tal modo viene anche definito come costante $\mathcal{H}$ l'integrale $\mathcal{H} = \int_0^a Ldx$, potendo così denominare come $\mathcal{H} - \int Ldx$ tutta la somma dei derivativi $L^{vi} + L^{vii} + L^{viii} + L^{ix} + \&c...$[6]. A questo punto si attua il solito passaggio di compattamento di tutte le componenti successive in un'unica riferita al differenziale infinitesimo $dx$ e, in questo modo, considerare il valore differenziale riferito ad $HZ$ o $NZ$ è esattamente la stessa cosa. L'Autore, perciò, riduce la somma di tutti i valori differenziali, che dovrebbe comprendere tutti quelli considerati finora in questo problema, ad una formula compatta e riferita a tutta l'ascissa $HZ$ quando $dx$ è infinitesimo, la cui equazione risolvente sarà:

$$[N](\mathcal{H} - \int Ldx) - \frac{d[P](\mathcal{H} - \int Ldx)}{dx} + \frac{dd[Q](\mathcal{H} - \int Ldx)}{dx^2} - \frac{d^3[R](\mathcal{H} - \int Ldx)}{dx^2} +$$
$$+ \frac{d^4[S](\mathcal{H} - \int Ldx)}{dx^4} - \frac{d^5[T](\mathcal{H} - \int Ldx)}{dx^5} = 0$$

□

### Commento

Spiegare matematicamente l'ultima formula ricavata in termini moderni è, in realtà, compito arduo. Nell'odierna analisi matematica, l'enunciato non avrebbe alcun senso e, ancor meno, giusticazione. L'assenza del concetto di limite, come accennato nel commento al capitolo precedente , determina confusione nella traslitterazione delle teorie analitiche settecentesche in teorie moderne matematicamente corrette e formali. Quest'ultimo problema in

[6]ossia la parte rimanente dell'integrale $\mathcal{H}$ riferita all'ascissa $HZ$.

particolare è difficile da rileggere in chiave formale, ma in realtà non rompe in nessun modo i canoni euleriani esplicati finora. Il passaggio più complicato, probabilmente si colloca nella fase di scrittura dell'equazione risolvente, in cui l'Autore rimuove senza fornire spiegazioni [7] tutti i valori differenziali relativi a $Z'dx, Z''dx, Z'''dx, Z^{iv}dx, Z^{v}dx$. Il motivo potrebbe essere sostenuto dal significato di differenziale dell'epoca, in quanto tutte le variazioni legate ai punti successivi si ridurrebbero a 0 portando ad un valore infinitesimo il $dx$, come dedotto alla fine del precedente capitolo.

**Problema 4.1.3.** *Sia data* $\Pi$ *come funzione integrale indeterminata* $\int[Z]dx$ *in modo che sia* $d[Z] = [M]dx + [N]dy + [P]dp + [Q]dq + [R]dr + \&c....$ *Sia* $Z$ *una funzione qualunque di* $\Pi$ *ma anche di altre quantità determinate come* $x, y, p, q, r, s, \&c...$ *in modo che* $dZ = Ld\Pi + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + \&c....$ *Trovare la curva az che, rispetto all'ascissa* $AZ = a$*, generi il valore massimo o minimo della formula* $\int Zdx$*.*

*Soluzione.* L'Autore ripete lo stesso procedimento applicato svariate volte ricordando che in questo caso bisognerà riunire la somma di tutti gli incrementi e porli uguali a 0 per ottenere l'equazione richiesta. Per somma di tutti gli incrementi si intendono sia quelli trovati nella proposizione precedente sia quelli ricavati nella sezione precedente nella proposizione generale. Infatti i valori differenziali delle $Zdx, Z'dx, Z''dx, Z'''dx, \&c...$ ossia le componenti il cui differenziale non è nullo in quanto influenzate dalla traslazione di $n$ in $\nu$(ovviamente considerando l'ascissa $AH = x$ con il punto $H$ precedente[8] ad $N$), saranno scritti in questo modo:

$$dZdx = dx(Ld\Pi + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + \&c...) \tag{4.9}$$

$$dZ'dx = dx(L'd\Pi' + M'dx' + N'dy' + P'dp' + Q'dq' + \&c...) \tag{4.10}$$

$$dZ''dx = dx(L''d\Pi'' + M''dx'' + N''dy'' + P''dp'' + Q''dq'' + \&c.) \tag{4.11}$$

[7]testualmente in [7]: *qui ad hanc formam commodiorem reduci potest*, ossia "che può essere ridotta opportunamente a questa formula"

[8]con questa parola si intende ovviamente in un senso geometrico del termine in cui il prima e il dopo sono dettati dall'essere più a destra o a sinistra dell'ascissa $AZ$ presa come riferimento da Euler, si veda figura 3.1

sostituendo quindi i valori trovati precedentemente troveremo quindi che il valore differenziale della formula $\int Zdx$ lungo tutta l'ascissa $AZ$ sarà:

$$n\nu \cdot dx([N](\mathcal{H} - \int Ldx) - \frac{d[P](\mathcal{H} - \int Ldx)}{dx} + \frac{dd[Q](\mathcal{H} - \int Ldx)}{dx^2} - \\ - \frac{d^3[R](\mathcal{H} - \int Ldx)}{dx^3} + \&c...) + n\nu \cdot dx(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \&c...)$$

e da quella l'equazione richiesta sarà proprio

$$([N](\mathcal{H} - \int Ldx) - \frac{d[P](\mathcal{H} - \int Ldx)}{dx} + \frac{dd[Q](\mathcal{H} - \int Ldx)}{dx^2} - \frac{d^3[R](\mathcal{H} - \int Ldx)}{dx^3} \\ + \&c...) + n\nu \cdot dx(N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \&c...) \tag{4.12}$$

□

Prima di affrontare la prossima sezione e, quindi, il prossimo capitolo dell'opera eureliana è necessario soffermarsi su un problema proposto nel quarto capitolo del *Methodus*. L'Autore nomina questa parte della sua opera *De usu methodi in resolvendis quaestionibus* ed in essa ripone una summa del lavoro fatto fino a quel punto includendo un importante *Scholion* riassuntivo con all'interno la raccolta di tutte le formule ed equazioni ricavate precedentemente. Goldstine in [13] scrive che *è importante notare come già nel 1744 Euler era interessato nell'invarianza delle sue equazioni fondamentali o delle condizioni necessarie (ipotesi)*[9]. In realtà la questione appena citata viene menzionata nei primi passi del capitolo e non verrà trattata in questo elaborato, al contrario del *Problema IV*, propedeutico per la risoluzione di altre questioni proposte nella prossima sezione.

**Problema 4.1.4.** *Trovare l'equazione della curva nelle due variabili $x$ e $y$ in modo tale che, posto $x = a$, sia massima o minima l'espressione $W$, dove tale espressione è una funzione qualunque di più formule integrali $\int Zdx$, $\int Ydx$,*

[9] *It is remarkable that as early as 1744 Euler was concerned with the problem of invariance of his fondamental equation or necessary condition*

*$\int Xdx$, &c.... $Z, Y, X$, &c saranno funzioni qualunque, sia determinate che indeterminate, delle variabili $x, y, p, q$, &c....*[10]

*Soluzione.* Si ponga che una siffatta equazione sia già stata trovata e, posto $x = a$, siano anche rinominate le formule che compongono l'espressione $W$ in tal modo:

$$\int Zdx = A$$
$$\int Ydx = B$$
$$\int Xdx = C$$
$$\&c...$$

L'Autore non dimostra in questa istanza l'esistenza di tale equazione in quanto si può già ritrovare nel *Problema I* dello stesso capitolo quattro di [7] (pagg.129-130). La questione rilevante in questo momento è scoprire come tale equazione si pone nei confronti di una formula di massimo o minimo che a sua volta è composta da diverse forme integrali sommate tra loro. Dall'altro lato invece, se è determinato l'aumento della seconda variabile $y$ di un segmentino $n\nu$ e se le trasformazioni delle singole formule $\int Zdx$, $\int Ydx$, $\int Xdx$, &c... sono state ricavate, allora si dovrà mostrare allo stesso modo anche il valore dell'incremento dell'espresione $W$. Si chiameranno così i valori differenziali dei singoli addendi come $dA, dB, dC$, &c... rispettivamente. Al solito l'equazione ricercata non sarà altro che il valore differenziale originato dall'incremento di $n$ in $\nu$ posto uguale a 0. Questo caso non fa eccezione e quindi l'equazione finale sarà facilmente dedotta da

$$dW = 0.$$

[10]in [7]: *Invenire aequationem inter binas variabiles x&y ita comparatam, ut, posita variabili $x = a$, maximum vel minimumve fiat expressio $W$, quae sit functio quaecunque formularum integralium $\int Zdx$, $\int Ydx$, $\int Xdx$, &c... in quibus denotent $Z, Y, X$, &c... functiones quaecunque ipsarum $x, y, p, q$, &c... sive determinatas, sive indeterminatas.*

Ma $W$ è la somma delle formule integrali, rinominate con le lettere $A, B, C, \&c...$, i cui valori differenziali saranno pari proprio a $dW$. L'equazione risolvente sarà infatti pari a

$$dA + dB + dC + \&c... = 0$$

□

## 4.2 Il metodo dei massimi e minimi relativo

**Definizione 4.1.** *Una proprietà comune è una formula integrale o un espressione indefinita che deve essere ugualmente soddisfatta da tutte le curve che si stanno considerando.*[11]

Il quinto capitolo si apre con tale definizione atta a esplicitare il significato di *proprietà comune*, in quanto sarà proprio questa la locuzione caratteristica di tutta la trattazione a venire. Da qui in poi si comincerà a trattare di un argomento sostanzialmente diverso dal precedente, che in questo elaborato verrà trattato, con un occhio di riguardo, solo verso particolari problemi. Il *methodus relativo* è il metodo di ricerca delle curve di massimo o minimo tra particolari insiemi di curve che condividono le stesse proprietà. Nelle prime righe l'autore ricorda per esempio un celebre problema affrontabile con il metodo proposto: i *problemi isoperimetrici.* Essi sono infatti problemi di massimo e minimo legati ad un vincolo: tutte le curve tra le quali si ricerca quella in grado di massimizzare o minimizzare una data formula devono avere la stessa lunghezza (o lo stesso perimetro). Tali problemi erano stati affrontati precedentemente da Jakob Bernoulli come viene ricordato da Goldstine in [13] e da Fraser in [8] e come visto nei precedenti capitoli dell'elaborato. Euler ripropone infatti la questione sulla base di quanto già fatto dal suo predecessore e riparte dalle stesse basi considerando la variazione di due punti consecutivi sulla curva $az$ presa, al solito, come riferimento, esattamente co-

[11] in [7] pag. 171: *Proprietas communis est Formula integrali, seu expressio indefinita, quae in omnes curvas ex quibus quasitam determinari oportet, aequaliter competit.*

me Jakob Bernoulli.[12]
Nei corollari successivi alla prima definizione si ritrovano i primi passaggi del ragionamento ed alcune nuove notazioni. Per esempio ora bisogna fare una distinzione netta tra due formule con ruoli profondamente differenti. Nei precedenti capitoli, infatti, si lavora con una sola formula, la *Maximi minimive formula*, mentre ora se ne dovrà tenere in considerazione un'ulteriore, esprimente la proprietà comune che dovranno avere le curve oggetto della ricerca. Per rimuovere ogni ambiguità, da ora in poi (seguendo le notazioni di Euler in [7]) si chiamino rispettivamente $A$ e $B$ la formula di massimo o minimo e la *proprietà comune*. Prima di considerare i vari problemi variazionali, Euler scrive alcune note preliminari in cui esplicita il funzionamento generale del Suo metodo in maniera aprioristica, come spesso accade nel trattato. Partendo da un esempio di proprietà comune, come la lunghezza della curva $az$, generalizza la questione e spiega a grandi linee come vanno affrontati questi casi. Ovviamente, afferma Euler in [7], si potranno trovare infinite curve della stessa lunghezza corrispondenti ad una particolare ascissa, ma tra queste se ne dovrà determinare una che massimizzi o minimizzi la formula $A$.
Di seguito si mostra il primo problema del capitolo nel quale si definisce il metodo in generale tramite l'uso di due diverse variazioni e non più di una come in tutti i casi precedenti.

**Problema 4.2.1.** *Delineare in generale il metodo per risolvere i problemi, in cui, tra tutte le curve aventi una stessa proprietà in comune, è richiesta quella che abbia la proprietà di massimo o minimo rispetto ad una formula proposta.*[13]

*Soluzione.* In questo caso non si potrà agire come precedentemente fatto, ossia non basterà aumentare l'applicata $Nn$ di un piccolo segmento $n\nu$ per

[12] In [8] Fraser scrive:*Bernoulli's approach to isoperimetric problems was based on obtaining a comparison arc to a given curve by varying two successive points on it.*

[13] in [7]: *Methodum resolvendi Problematae, in quibus, inter omnes curvas communi quadam proprietate gaudentes, ea requiritur qua maximi minimive cujuspiam propositi proprietate gaudeat, in genere adumbrare.*

calcolare le variazione delle restanti ordinate e, poi, del differenziale della *Maximi minimive formula*. É infatti necessario trovare un modo per poter calcolare la variazione senza turbare o eliminare la condizione di uguaglianza data dalla proprietà comune $B$. Si avranno infatti delle condizioni iniziali (espresse dalla formula $B$ della proprietà comune) che non potranno essere modificate dalle variazioni e che quindi daranno una nuova equazione derivata dall'annullamento di tutte le parti incrementate nel differenziale. Per fare questo non sarà più sufficiente aumentare la sola applicata $Nn$ di $n\nu$ ma, essendo necessarie due condizioni, si aumenteranno due applicate consecutive $Nn$ e $Oo$ di due segmentini infinitamente piccoli $n\nu$ e $o\omega$. Prima di tutto sarà trovato il valore differenziale dell'espressione che contiene la proprietà comune, originato dalla traslazione di $n$ in $\nu$ e di $o$ in $\omega$ e posto uguale a 0; in secondo luogo invece bisognerà mostrare che quel valore differenziale rispetti le condizioni di massimo o minimo e anche qui allo stesso modo di prima si dovrà ricercare tale variazione rispetto alla formula di massimo o minimo e porla uguale a 0, similmente ai casi precedenti. Si otterranno così due equazioni, una dalla proprietà comune, l'altra dall'espressione di massimo o minimo; per entrambi i casi si avrà una forma del tipo $S \cdot n\nu + T \cdot o\omega = 0$. Se da queste rimuovessimo i valori $n\nu$ e $o\omega$ si otterrebbe l'equazione risolvente richiesta, che rappresenta la curva che tra tutte quelle che hanno la proprietà $B$ avrà valore di massimo o minimo rispetto alla formula $A$. □

Dopo questo problema di carattere estremamente generale si passa poi ad una questione più tecnica, caratteristica di ogni precedente sezione: il calcolo degli incrementi dei valori differenziali.

**Problema 4.2.2.** *É proposta una qualsiasi espressione indeterminata, riferita ad una data ascissa $AZ$; trovare il valore differenziale generato dalla traslazione dei punti della curva $n$ e $o$ in $\nu$ e $\omega$ rispettivamente.*[14]

[14] in [7]: *Proposita quacunque expressione indeterminata, qua ad datam abscissa $AZ$ referatur; invenire ejus valorem differentialem, ortum ex translatione binorum curvae punctorum $n$ & $o$ in $\nu$ & $\omega$.*

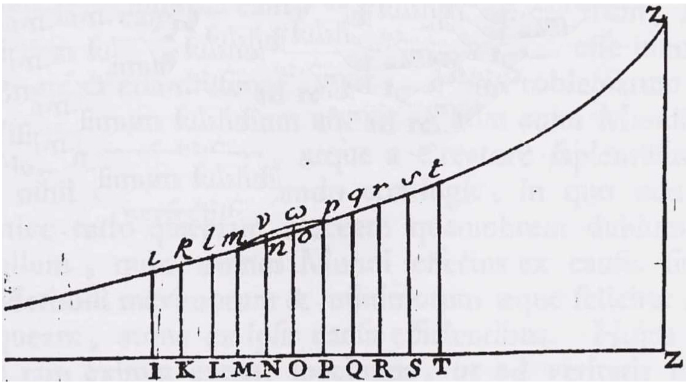



Figura 4.1

*Soluzione.* Poniamo l'ascissa $AI = x$ e l'applicata $Ii = y$, in questo modo sarà $Kk = y', Ll = y'', Mm = y''', Nn = y^{iv}, Oo = y^{v}, Pp = y^{vi}, \&c....$ Di queste applicate soltanto due subiranno l'incremento, come detto in precedenza ($n\nu$ e $o\omega$ corrispondenti a $y^{iv}$ e $y^{v}$). Saranno quindi i valori differenziali di $y^{iv}$ e di $y^{v}$ pari a $n\nu$ e $o\omega$ rispettivamente e tutti gli altri invece saranno uguali a 0. Tutte le altre variabili dipendenti da $y$ subiranno un incremento relativo a quanto detto: per esempio $p = \frac{y'-y}{dx}$ avrà un valore differenziale nullo cosiccome $p'$ e $p''$; $p''' = \frac{y^{iv}-y'''}{dx}$ avrà invece un valore differenziale pari a $\frac{n\nu}{dx}$ mentre $p^{iv} = \frac{y^{v}-y^{iv}}{dx}$ avrà un valore differenziale pari a $\frac{o\omega}{dx} - \frac{n\nu}{dx}$ e così via. Viene poi riportata una tabella contenente tutti gli incrementi dei valori differenziali delle singole variabili e delle loro determinate (nella pagina seguente).

Viene osservato di seguito a questa tabella (in figura 4.2) che l'espressione risolvente rispetto ai nuovi incrementi avrà la seguente forma:

$$I \cdot n\nu + K \cdot o\omega$$

dove $I$ sarebbe l'espressione relativa al problema se ci fosse la sola variazione di $n$ in $\nu$ mentre $K$ avrebbe lo stesso ruolo nel caso in cui l'unico incremento fosse quello di $o$ in $\omega$. Di più si nota come l'espressione di $K$ non è altro che la forma derivata della $I$, ossia non è altro che la $I$ scritta nelle ordinate

$$
\begin{array}{l|l}
d.\, y^{IV} = n\nu & d.\, q'' = \dfrac{n\nu}{dx^2} \\
d.\, y^{V} = o\omega & \\
\hline
d.\, p''' = \dfrac{n\nu}{dx} & d.\, q''' = -\dfrac{2n\nu}{dx^2} + \dfrac{o\omega}{dx^2} \\
d.\, p^{IV} = -\dfrac{n\nu}{dx} + \dfrac{o\omega}{dx} & d.\, q^{IV} = \dfrac{n\nu}{dx^2} - \dfrac{2o\omega}{dx^2} \\
d.\, p^{V} = -\dfrac{o\omega}{dx} & d.\, q^{V} = \dfrac{o\omega}{dx^2} \\
\hline
d.\, r' = +\dfrac{n\nu}{dx^3} & d.\, s = +\dfrac{n\nu}{dx^4} \\
d.\, r'' = -\dfrac{3n\nu}{dx^3} + \dfrac{o\omega}{dx^3} & d.\, s' = -\dfrac{4n\nu}{dx^4} + \dfrac{o\omega}{dx^4} \\
d.\, r''' = +\dfrac{3n\nu}{dx^3} - \dfrac{3o\omega}{dx^3} & d.\, s'' = +\dfrac{6n\nu}{dx^4} - \dfrac{4o\omega}{dx^4} \\
d.\, r^{IV} = -\dfrac{n\nu}{dx^3} + \dfrac{3o\omega}{dx^3} & d.\, s''' = -\dfrac{4n\nu}{dx^4} + \dfrac{6o\omega}{dx^4} \\
d.\, r^{V} = -\dfrac{o\omega}{dx^3} & d.\, s^{IV} = +\dfrac{n\nu}{dx^4} - \dfrac{4o\omega}{dx^4} \\
 & d.\, s^{V} = +\dfrac{o\omega}{dx^4}
\end{array}
$$

&c.

Figura 4.2

seguenti[15] e quindi si ha che

$$K = I' = I + dI$$

di qui l'espressione risolvente oggetto del problema prenderà la forma seguente:

$$n\nu \cdot I + o\omega \cdot I' = n\nu \cdot I + o\omega \cdot (I + dI).$$

□

Di seguito a questo problema viene trascritta una annotazione[16] in cui l'Autore definisce un cambiamento di notazione in conformità con quanto già proposto nel capitolo precedente della sua opera, esposto in questo elaborato nel Problema (4.1.4). Data infatti un'espressione $V$, qualunque ed indeterminata, verrà denotato con $A$ il valore ad essa attribuito relativamente all'ascissa $AZ = a$ e con $n\nu \cdot dA + o\omega \cdot dA'$ il relativo valore differenziale generato dal duplice incremento di $n$ in $\nu$ e di $o$ in $\omega$. Dati questi propositi viene esposto più nel dettaglio il metodo vero e proprio con i relativi esempi.

**Problema 4.2.3.** *Tra tutte le curve relative alla stessa ascissa $AZ = a$ e nelle quali il valore dell'espressione generica $W$ è lo stesso, determinare quella nella quale il valore dell'espressione $V$ è massimo o minimo.*[17]

*Soluzione.* Si ponga la curva in questione delimitata dai punti $az$ come al solito, di conseguenza l'espressione $W$ otterrà, riferita ad essa, il valore determinato $B$. Allo stesso modo il valore dell'espressione di massimo o minimo $V$ relativo all'ascissa $AZ$ verrà chiamato $A$[18]. Si pongano poi in seguito l'ascissa $AI = x$ e l'applicata $Ii = y$ ed entrambe le applicate $Nn$ e $Oo$ dovranno

[15] nel Goldstine in [13] viene espresso questo fatto secondo il quale in $K$ sarebbero presenti tutte le ordinate di $I$ traslate di una in avanti e per questo risulterebbe una la forma derivata dell'altra, in conformità con le notazioni euleriane

[16] Euler, [7] pagg. 183-184

[17] in [7]: *Inter omnes curvas ad eandem datam abscissam $AZ = a$ relatas, in quas idem valor expressionis indefinitae $W$ competit; determinare eam, in qua sit expressio $V$ maximum vel minimum.*

[18] imitando le notazioni di Euler in [7] pagg. 161-162 e come predetto nello scolio pag. 184

aumentare di un piccolo segmento. Come annunciato precedentemente, il metodo consiste nel costruire l'espressione dei valori differenziali generati dal duplice incremento per poi porli uguali a 0. In questo modo si otterranno due equazioni che avranno questa forma:

$$n\nu \cdot dA + o\omega \cdot dA' = 0$$
$$n\nu \cdot dB + o\omega \cdot dB' = 0$$

moltiplicando poi entrambe le equazioni per due diverse quantità $\alpha$ e $\beta$ si otterrà

$$n\nu \cdot \alpha dA + o\omega \cdot \alpha dA' = 0 \tag{4.13}$$
$$n\nu \cdot \beta dB + o\omega \cdot \beta dB' = 0 \tag{4.14}$$

per qualsiasi valore sia costante che variabile di $\alpha$ e $\beta$. Per particolari valori arbitrari (eliminando gli incrementi $n\nu$ e $o\omega$) si ha $\alpha dA + \beta dB = 0$ e $\alpha dA' + \beta dB' = 0$. Viene poi spiegato perché le due quantità $\alpha$ e $\beta$ debbano essere necessariamente due costanti. D'altra parte:

$$\frac{n\nu}{o\omega} = -\frac{dA'}{dA} = -\frac{dB'}{dB}$$

e quindi $\frac{dA'}{dA} = \frac{dB'}{dB}$. Di più da $dA' = dA + ddA$ e $dB' = dB + ddB$ si ha che

$$\frac{ddA}{dA} = \frac{ddB}{dB}.$$

Integrando si ottiene

$$\log dA - \log dB = \log C$$

ossia $dA = CdB$; da questo e dalla relazione (4.13) se ne deduce che $C = -\frac{\beta}{\alpha}$. Quindi grazie a quanto dimostrato con tutti i metodi precedenti si può concludere che la soluzione al problema proposto è facilmente ricavabile calcolando i valori differenziali delle espressioni $V$ e $W$ tramite i risultati esposti nelle altre sezioni, moltiplicare per una costante arbitraria, che in questo caso è rappresentata da $C$ e porre la somma degli elementi appena trovati uguale a 0 per ottenere finalmente l'equazione della curva richiesta.

$\square$

### 4.2.1 Applicazione ai problemi isoperimetrici

In un'annotazione seguente, l'autore osserva un'analogia tra diversi tipi di problemi. Goldstine in [13] rileva che ci sono due classi di problemi praticamente equivalenti, il primo è massimizzare o minimizzare una funzione $V$ nella classe degli archi per cui un altro funzionale $W$ è dato come costante, il secondo è invece l'inverso ossia massimizzare o minimizzare una funzione $W$ nella classe degli archi per cui un altro funzionale $V$ è dato come costante; è ovviamente molto facile notare che entrambi i problemi abbiamo lo stesso insieme di soluzioni [19]
Di più Euler afferma che la soluzione del metodo appena proposto può essere facilmente correlata ad una del metodo precedente, ossia quello assoluto. Difatti questo problema sarebbe analogo se venisse richiesto di trovare, tra tutte le curve relative alla stessa ascissa $AZ$, quella che massimizzi o minimizzi la formula $\alpha V + \beta W$; in questo modo il problema può essere trasformato in modo tale da ricercare la soluzione semplicemente attraverso i valori differenziali generati dal solo segmentino $n\nu$[20]. Si può mostrare subito un esempio di applicazione di questo metodo in cui appare chiara anche l'osservazione appena riportata.

**Esempio 4.2.1.** *Tra tutte le curve della stessa lunghezza congiungenti i punti $a$ e $z$, trovare quella per cui l'area $aAZz$ sia massima o minima*[21]

[19] in [13]: *there are two closely associated problems which are essentially equivalent: the first is to maximize or minimize a function $V$ in the class of arcs for which another functional $W$ has a given constant value; the second is to maximize or minimize $W$ in the class of arcs for which $V$ has a given constant value. It is easy to see that both problems have the same set of extremals.*

[20] in [7], Euler afferma: *congruit enim Problema propositum cum hoc, quo, inter omnes curvas ad eandem abscissam $AZ$ relatas requiritur ea in qua sit ista expressio $\alpha V + \beta W$ maximum vel minimum; atque haec Problemata ex unica particula $n\nu$ oriundos perfici queat*

[21] in [7]: *Inter omnes curvas ejusdem longitudinis puncta $a$ & $z$ jungentes, invenire eam qua maximam vel minimam aream $aAZz$ comprehendat.*

*Svolgimento.* La proprietà comune dovrà essere quindi una condizione isoperimetrica, di fatti la comune lunghezza di tutte le curve prese in considerazione è un chiaro esempio di questa tipologia di problemi. Usando le stesse notazioni precedenti, $W = \int \sqrt{1+pp}dx$ da cui $B = \int_0^a \sqrt{1+pp}dx$. Tenuto conto che, come negli altri casi, l'ascissa $AZ$ può essere posta uguale ad $a$, l'integrale definito dall'espressione $B$, che ricordiamo essere l'espressione di $W$ relativa all'ascissa $AZ$, può essere proprio scritto in chiave moderna nel suddetto modo. L'incremento del valore differenziale di $B$ sarà quindi pari a $-n\nu \cdot d\frac{p}{\sqrt{1+pp}}$. La formula di massimo o minimo sarà invece la semplice formula dell'area equivalente a $V = \int ydx$ anche in questo caso l'espressione $A$ può essere scritta nel seguente modo: $A = \int_0^a ydx$ e l'incremento del suo valore differenziale sarà $n\nu \cdot dx$. Seguendo quindi il metodo enunciato prima nel problema si avrà un'equazione risolvente di questo tipo:

$$dx - bd\frac{p}{\sqrt{1+pp}} = 0$$

dove appunto la somma dei valori differenziale è stata posta uguale a 0 ed uno di loro è stato moltiplicato per una costante arbitraria $b$.
Proseguendo con lo svolgimento all'esempio proposto, si integra ogni addendo dell'equazione sopra mostrata in tale modo:

$$x + c = \frac{bp}{\sqrt{1+pp}}$$

e quindi con dei semplici calcoli

$$p = \frac{x+c}{\sqrt{b^2-(x+c)^2}} = \frac{dy}{dx}.$$

Integrando nuovamente ogni membro dell'ultima uguaglianza si ottiene infine:

$$y = f \pm \sqrt{b^2-(x+c)^2} \qquad b^2 = (y-f)^2 + (x+c)^2.$$

□

É opportuno notare come quella sopra trovata non sia altro che l'equazione generale del cerchio. La conseguenza logica di quanto scoperto è che l'arco di circonferenza congiungente qualsiasi coppia di punti è la linea curva che a parità di lunghezza descrive l'area maggiore o minore. In questo caso valgono sia il maggiore che il minore, Euler osserva infatti che se l'arco fosse posto con concavità verso l'alto rispetto all'ascissa $AZ$ allora l'area sarebbe la minore possibile, mentre al contrario se sarebbe la maggiore possibile. Successivamente si può notare un'ulteriore caratteristica di questa particolare curva.

Facendo riferimento ai punti disegnati in figura, non solo l'arco di circonfe-

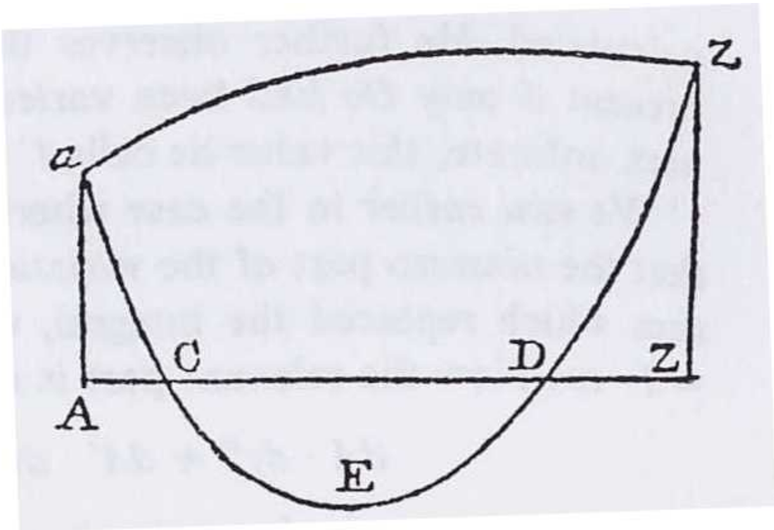



Figura 4.3

renza descrive la massima area $aAZz$, ma, disegnata un'altra curva congiungente $a$ con $z$ e chiamati $C$ e $D$ i punti di intersezione con il segmento $AZ$, anche l'area $aCEDz$ sarà massimizzata dallo stesso arco di circonferenza. Si può mostrare molto facilmente in quanto se l'area $aAZz$ è massima, lo sarà anche $aCEDz = aAZz - aAC - zZD + CED$ visto che $aAC, zZD, CED$ sono tutte costanti una volta fissata la linea $aCEDz$.

**Problema 4.2.4.** *Tra tutte le curve corrispondenti ad una ascissa pari ad a, per le quali la formula* $\Pi = \int [Z]dx$ *assume lo stesso valore, trovare quella per* *cui* $\int Zdx$ *sia massima o minima; considerando che* $d[Z] = [M]dx + [N]dy + [P]dp + [Q]dq + \&c...$ *e* $dZ = Ld\Pi + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + \&c...$[22]

*Soluzione.* Nell'esposizione della soluzione si riprendono dei risultati sopra citati, raggiunti dall'Autore nel capitolo III di [7]. Innanzitutto bisogna ricercare il valore differenziale della proprietà comune, che in questo caso è proprio la formula $\Pi = \int [Z]dx$. Tale valor comune sarà dunque pari a

$$n\nu \cdot dx([N] - \frac{d[P]}{dx} + \frac{dd[Q]}{dx^2} + \&c...)$$

esattamente seguendo il caso esposto in questo elaborato in (3.2.5).
La *maximi minimive formula* sarà invece influenzata dalla presenza di una formula integrale indeterminata al suo interno e per questo seguirà le regole citate a proposito dei problemi del capitolo III di [7]. Il suo valore differenziale sarà pertanto

$$n\nu \cdot dx(N + [N]V - \frac{d(P + [P]V)}{dx} + \frac{dd(Q + [Q]V)}{dx^2} + \&c...)$$

dove $V$ non è altro che $\mathcal{H} - \int_0^x Ldx$ con $\mathcal{H} = \int_0^a Ldx$ esattamente come nelle notazioni usate nei precedenti paragrafi.
Come mostrato nei precedenti problemi di questa sezione, la curva richiesta sarà originata dall'equazione $\alpha A + \beta B = 0$ dove $A$ e $B$ sono rispettivamente i valori differenziali della formula di massimo o minimo e della proprietà comune. Pertanto l'equazione risultante sarà pari a:

$$\begin{aligned} 0 =&\alpha[N] - \alpha\frac{d[P]}{dx} + \alpha\frac{dd[Q]}{dx^2} + \&c... + N + [N]V - \frac{d(P + [P]V)}{dx} + \\ &+ \frac{dd(Q + [Q]V)}{dx^2} + \&c... \end{aligned} \tag{4.15}$$

ossia

$$\begin{aligned} 0 =&N + (\alpha + H - \int Ldx)[N] - \frac{d(P + (\alpha + \mathcal{H} - \int Ldx)[P])}{dx} + \\ &+ \frac{dd(Q + (\alpha + \mathcal{H} - \int Ldx)[Q])}{dx^2} + \&c... \end{aligned} \tag{4.16}$$

[22]in [7]:*Inter omnes curvas ad eandem abscissam = a relatas, qua eandem formulae* $\Pi = \int [Z]dx$ *valorem recipiunt; invenire eam, in qua sit* $\int Zdx$ *maximum vel minimum; existente Z functione simul ipsius* $\Pi$*, ita ut sit* $dZ = Ld\Pi + Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + \&c...$ *atque* $d[Z] = [M]dx + [N]dy + [P]dp + [Q]dq + \&c....$

Essendo $H$ un valore costante e $\alpha$ una costante arbitraria si può raccogliere la somma $\mathcal{H} + \alpha$ in un'unica costante $C$ per ottenere così la curva richiesta:

$$\begin{aligned} 0 =& N + (C - \int Ldx)[N] - \frac{d(P + (C - \int Ldx)[P])}{dx} + \\ &+ \frac{dd(Q + (C - \int Ldx)[Q])}{dx^2} + \&c... \end{aligned} \tag{4.17}$$

□

A questo seguono diversi corollari (come sempre accade nell'opera) di cui due -il corollari V e VI, sono particolarmente importanti per gli scopi dell'elaborato. Si considera infatti una funzione $Z$ sia delle variabili $x, y, p, q, \&c...$ che di un arco di curva $s$. In questo modo la variabile $\Pi$ scritta come integrale indeterminato sarà proprio $s$, ossia l'arco di curva. Si avrà quindi una funzione $Z$ al cui interno compare come variabile l'arco $s = \int \sqrt{1+pp}dx$ e, per applicare il problema sopra citato, questa dovrà essere anche la proprietà comune tra tutte le curve che si stanno studiando. Ora è chiaro che si tratta di una condizione di isoperimetria facilmente affrontabile (più concettualmente che formalmente) applicando con alcuni accorgimenti l'ultimo risultato ottenuto.
Essendo infatti $s = \int \sqrt{1+pp}dx$ si avrà proprio $[Z] = \sqrt{1+pp}$ e perciò $[M] = 0$, $[N] = 0$, $[P] = \frac{p}{\sqrt{1+pp}}$, $[Q] = 0$ ecc... Applicando poi il metodo appena scoperto si deduce che la curva che tra tutte le isoperimetriche massimizza o minimizza la formula $\int Zdx$ avrà la seguente equazione

$$0 = N - \frac{d(P + \frac{(C - \int Ldx)p}{\sqrt{1+pp}})}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} + \&c... \tag{4.18}$$

ovverosia

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ+}{dx^2} + \&c... = \frac{(C - \int Ldx)dp}{dx(1+pp)^{\frac{3}{2}}} - \frac{Lp}{\sqrt{1+pp}} \tag{4.19}$$

dove il secondo membro dell'equazione è originato dalla derivazione fatta su $(C - \int Ldx)[P]$ in quanto

$$\frac{d(\frac{(C - \int Ldx)p}{\sqrt{1+pp}})}{dx} = d(C - \int Ldx) \cdot \frac{p}{dx\sqrt{1+pp}} + (C - \int Ldx)\frac{1}{dx} \cdot d(\frac{p}{\sqrt{1+pp}})$$

$$= \frac{Ldxp}{dx\sqrt{1+pp}} + \frac{(C - \int Ldx)dp}{dx(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Lp}{\sqrt{1+pp}} + \frac{(C - \int Ldx)dp}{dx(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$$

La trattazione prosegue nello *Scholion I* in cui vengono esplicitati dei casi più semplici per i quali non sono presenti alcune componenti della forma differenziale, come per esempio $M$ o $N$. Facendo riferimento all'equazione (4.18) Euler scrive *in hoc latissimo sensu nec integrari nec ad simpliciorem formam se reduci patitur*[23], quindi non è possibile l'integrazione o la riduzione ad una forma più semplice, proprio a causa della presenza della componente $N$. Se invece essa non fosse presente nella formula $dZ$ si avrebbe un caso più semplice in cui sarebbe permessa l'integrazione e si potrebbe eliminare facilmente una pesante derivata

$$A + \frac{(C - \int Ldx)p}{\sqrt{1+pp}} = -P + \frac{dQ}{dx}. \tag{4.20}$$

Considerando invece in un altro caso che fosse la componente $M$ a non essere presente si ottengo dei risultati e delle semplificazioni ancor più interessanti. Di fatti per come è definita $dZ$, se $M = 0$ si avrebbe $Lds = Ldx\sqrt{1+pp} = dZ - Ndy - Pdp - Qdq - \&c...$; di più moltiplicando la (4.18) per $pdx = dy$ si ottiene:

$$pd\frac{(C - \int Ldx)p}{\sqrt{1+pp}} = Ndy - dPp + \frac{pddQ}{dx} + \&c...$$

aggiungendo membro a membro $Ldx\sqrt{1+pp} = dZ - Ndy - Pdp - Qdq - \&c...$ si ottiene poi facilmente

$$Ldx\sqrt{1+pp} + pd\frac{(C - \int Ldx)p}{\sqrt{1+pp}} = dZ - (dPp + Pdp) + \frac{pddQ}{dx} - Qdq + \&c...$$

infine, integrando entrambi i membri dell'equazione

$$\int Ldx\sqrt{1+pp} + pd\frac{(C - \int Ldx)p}{\sqrt{1+pp}} = A + Z - Pp + \frac{pdQ}{dx} - Qq + \&c...$$

La trattazione prosegue al fine di ricavare una formula particolare, applicabile al caso in cui la condizione della proprietà comune sia dettata dall'isoperimetria delle curve. Dall'ultima equazione ottenuta si passa a studiare il primo

[23] si veda [7] pag. 207

membro per cui

$$\int (Ldx\sqrt{1+pp} + pd\frac{(C-\int Ldx)p}{\sqrt{1+pp}}) = \int (Ldx\sqrt{1+pp} + \frac{(C-\int Ldx)pdp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} - \frac{Lppdx}{\sqrt{1+pp}}) = \int (\frac{Ldx(1+pp) - Lppdx}{\sqrt{1+pp}} + \frac{(C-\int Ldx)pdp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}) = \int (\frac{Ldx1}{\sqrt{1+pp}} + \frac{(C-\int Ldx)pdp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}). \tag{4.21}$$

Si può notare come la formula interna all'integrale sia proprio il differenziale di $-\frac{C-\int Ldx}{\sqrt{1+pp}}$ e quindi tornando alle equazioni precedenti si può scrivere:

$$\frac{C-\int Ldx}{\sqrt{1+pp}} = A - Z + Pp + Qq - \frac{pdQ}{dx}. \tag{4.22}$$

Questa è però l'equazione ottenuta quando la solo componente $M$ è pari a 0. Se invece sin dal principio fosse stata pari a 0 anche la componente $N$, ovviamente oltre alla $M$; si potrebbe riconsiderare la (4.20) considerando questa volta -similmente a quanto detto prima- che $dZ = Ldx\sqrt{1+pp} + Pdp + Qdq$ e, di più, moltiplicando per $dp = qdx$ ottenendo così

$$Adp + \frac{(C-\int Ldx)pdp}{\sqrt{1+pp}} = -Pdp + dQq$$

sommando ora membro a membro la forma differenziale $dZ$ e poi integrando:

$$Z + B + Ap + (C - \int Ldx)\sqrt{1+pp} = Qq \tag{4.23}$$

dove: sia $A$ che $B$ sono costanti uscite dalle due diverse integrazioni, $(C - \int Ldx)\sqrt{1+pp} = -\int Ldx\sqrt{1+pp} + \frac{(C-\int Ldx)pdp}{\sqrt{1+pp}}$ e $Qq = \int dQq + Qdq$. Dalla (4.23) si ottiene così

$$C - \int Ldx = \frac{Z + B + Ap + Qq}{\sqrt{1+pp}}.$$

Ma anche dalla (4.20) si aveva che

$$C - \int Ldx = -\frac{A\sqrt{1+pp}}{p} - \frac{P\sqrt{1+pp}}{p} + \frac{dQ\sqrt{1+pp}}{pdx}$$

eguagliando infine i secondi membri di entrambe le equazioni si avrà la forma ridotta della (4.19) nel caso richiesto

$$Adx - Bdy = Zdy - Pdx - Ppdy + dQ + ppdQ - Qpdp \tag{4.24}$$

dove la (4.24) è ricavabile mediante banali calcoli aritmetici.

### Commento

Il problema appena analizzato racchiude forse la massima generalità del metodo relativo, anche se veniva presentato con l'intento di risolvere problemi isoperimetrici. Come all'inizio dell'opera, l'Autore riconosceva l'importanza del lavoro dei suoi predecessori e esplicita la sua volontà di continuare ed ampliare la teoria grazie al suo innovativo metodo.
Il risultato raggiunto nei corollari e scolii, rielaborando l'estrema generalità del problema precedente e adattandolo al caso desiderato, matematicamente parlando risultava entusiasmante. Appare evidente, essendo richiesta l'isoperimetria, che le restrizioni venivano apportate solo sulla proprietà comune e nulla si citava riguardo alla formula di massimo o minimo, contrariamente ai capitoli precedenti, ove si procedeva con le semplificazioni delle formule ricavate. In conclusione, con l'ultima equazione scritta (4.24) si potevano risolvere tutti i problemi di tipo isoperimetrico, ovviamente per come erano concepiti nel XVIII secolo. Il prossimo esempio è anche il primo esempio che l'Autore elencava e riporta specificatamente un'applicazione della (4.24) in un contesto "speciale", in cui la forma differenziale $dZ$ sia dipendente dalla sola lunghezza dell'arco.

**Esempio 4.2.2.** *Tra tutte le curve isoperimetriche definire quella per cui sia la formula $\int s^n dx$ massima o minima, dove $s$ denota la lunghezza dell'arco di curva corrispondente all'ascissa $x$*[24].

*Soluzione.* In questo esempio la *proprietà comune* è proprio la lunghezza dell'arco $s = \int \sqrt{1+pp}dx$ e la formula di massimo e minimo si presenta

[24]in [7]: *Inter omnes curvas isoperimetras; definire eam, in qua sit $\int s^n dx$ maximum vel minimum, denotante $s$ arcum curva abscissa $x$ respondentem.*

proprio nella forma $\int s^n dx$, perciò si applicherà quanto dello nell'ultimo caso. Si avrà così $\int s^n dx = \int Zdx$ e quindi $Z = s^n$, $dZ = ns^{n-1}ds$, $L = ns^{n-1}$, $M = 0$, $N = 0\&c....$ Applicando così la (4.24) so avrà

$$Adx - Bdy = Zdy = s^n dy \qquad Adx = dy(B + s^n)$$

Si potrà ora considerare l'equazione $A^2dx^2 + A^2dy^2 = A^2ds^2$ ricavata moltiplicando $A^2$ alla $dx^2 + dy^2 = ds^2$ ricavata dalla definizione stessa di $ds$

$$ds = \sqrt{1 + pp}dx \qquad ds^2 = (1 + pp)dx^2 \quad ds^2 = dx^2 + \frac{dy^2}{dx^2}dx^2 = dx^2 + dy^2$$[25]

Da quanto appena detto e dalla $A^2dx^2 = dy^2(B + s^n)^2$ si ottiene

$$A^2ds^2 = dy^2((B + s^n)^2 + A^2)$$

di conseguenza

$$dy^2 = \frac{A^2ds^2}{(B + s^n)^2 + A^2}$$

$$dy = \frac{Ads}{\sqrt{(B + s^n)^2 + A^2}} \tag{4.25}$$

Si avrà così infine

$$dx = \frac{(B + s^n)ds}{\sqrt{(B + s^n) + A^2}} \tag{4.26}$$

direttamente da $dx = \frac{dy(B+s^n)}{A}$.

□

[25]Questi passaggi sarebbero oggi matematicamente scorretti per come sono definiti i differenziali ma non lo erano per le notazioni ed i metodi dell'epoca

# Bibliografia

[1] http://www.treccani.it/enciclopedia/calcolo-delle-variazioni_res-a64c5263-9bbd-11e2-9d1b-00271042e8d9_(Enciclopedia-Italiana)/.

[2] http://www.treccani.it/enciclopedia/la-rivoluzione-scientifica-i-domini-della-conoscenza-dalla-geometrie-al-calcolo-il-problema-delle-tangenti-e-le-origini-d_(Storia-della-Scienza)/.

[3] J. Bernoulli. *Opera Omnia, tam antea sparsim edita, quam hactenus inedita. I–IV.* Reprint of the 1742 edition.

[4] J. Bernoulli. Analysis magni problematis isoperimetrici. *Acta eruditorum*, pages 213–218, 1701.

[5] J. Bernoulli. Remarques sur ce qu'on a donné jusqu'ici de solutions des problèmes sur les isoperimetres, avec une nouvelle méthode courte e facile de les resoudre sans calcul, laquelle s'étend aussi à d'autres problèmes qui ont rapport à ceux-là. *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, pages 100–138, 1718.

[6] U. Bottazzini, P. Freguglia, and L. Toti Rigatelli. *Fonti per la storia della matematica.* Sansoni editore, 1992.

[7] L. Eulero. *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti.* Losanna & Ginevra, 1744.

[8] C. G. Fraser. The origins of Euler's variational calculus. *Arch. Hist. Exact Sci.*, 47(2):103–141, 1994.

[9] P. Freguglia. *La geometria fra tradizione e innovazione.* Saggi. Scienze. [Essays. Science]. Bollati Boringhieri, Torino, 1999. Temi e metodi geometrici nell'età della rivoluzione scientifica, 1550–1650. [Geometric topics and methods in the age of scientific revolution, 1550–1650].

[10] P. Freguglia and M. Giaquinta. *Early aspects and techniques of calculus of variations.* Preprint: prossima pubblicazione.

[11] M. Giaquinta. *La forma delle cose, I tomo: Da Talete a Galileo e un po' oltre.* Edizioni di storia e letteratura, Roma, 2010. Idee e metodi in matematica tra storia e filosofia.

[12] E. Giusti. *Metodi diretti nel calcolo delle variazioni.* Unione Matematica Italiana, Bologna, 1994.

[13] H. H. Goldstine. *A history of the calculus of variations from the 17th through the 19th century*, volume 5 of *Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences.* Springer-Verlag, New York, 1980.

[14] R. Woodhouse. *A history of the calculus of variations in the eighteenth century.* Chelsea Publishing Co., New York, 1988. Reprint of the 1810 edition.