

ALMA MATER STUDIORUM UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea in Matematica

**TRIANGOLAZIONI IDEALI  
DEI COMPLEMENTARI DI NODI  
IN  $S^3$**

**Tesi di Laurea Triennale in Topologia**

**Relatore:**  
**Chiar.mo Prof.**  
**Stefano Francaviglia**

**Presentata da:**  
**Alex Casella**

**I Sessione**  
**Anno Accademico 2012/2013**



*A tutti coloro  
che hanno sempre creduto in me,  
anche quando io stesso  
avevo smesso di farlo.*



# Introduzione

La classificazione delle varietà è sempre stato un oggetto di studio molto considerato da parte dei Topologi. Per avere il pieno controllo di uno strumento, è necessario conoscerlo a fondo, studiarlo e classificarlo, ed è questo il motivo di tanto interesse verso l'argomento.

Nel corso dei secoli si raggiunsero molti traguardi importanti al riguardo. Nel 1888 il matematico tedesco Von Dyck diede un teorema di classificazione per le 2-varietà compatte [Dy], mentre Kerékjártò fece luce su quelle non compatte nel 1922 [Ke]. Successivamente, nel 1958, Markov dimostrò che non poteva esistere un algoritmo finito di classificazione per le varietà di dimensione pari o superiore a 4 [Mar].

Ciò che tuttora rimane irrisolto è il problema di classificazione per la dimensione 3. La ricerca di un teorema in tale direzione risale agli inizi del 1900, con Poincaré, che tentò un primo approccio con la famosa Congettura di Poincaré [Sz]. In seguito, nel corso dell'ultimo secolo, l'interesse generale per questo problema aumentò e furono scoperte diverse tecniche descrittive per le 3-varietà, fra cui ad esempio le triangolazioni e le decomposizioni. Per quanto ci fossero dei progressi, il passo decisivo avvenne nel 1982, quando il matematico statunitense William Thurston propose un approccio completamente diverso, che faceva uso di strutture geometriche, e formulò la Congettura di Geometrizzazione [Th]. L'approccio di Thurston consisteva nel prendere una 3-varietà, decomporla in pezzi molto semplici, e studiare le strutture geometriche con cui potevano essere dotati tali pezzetti per dedurre una classificazione. Tale congettura, che comprendeva la Congettura di Poincaré come caso particolare, rappresentava il ponte di collegamento fra le componenti semplificate della varietà ed il mondo delle strutture geometriche. Solamente fra il 2002 e il 2003 tale congettura si rivelò essere un teorema, grazie alla dimostrazione di Grigorij Perelman, e sebbene non rappresentasse ancora il raggiungimento pieno dell'obiettivo, fu comunque riconosciuto come un notevole passo avanti verso la soluzione del problema [Ca-Zh].

L'intento di questa tesi è quello di avvicinarsi al mondo estremamente complesso delle varietà tridimensionali, partendo dalle basi. Nel primo capitolo analizzeremo le  $n$ -varietà. Vedremo le definizioni di  $n$ -varietà

topologica, differenziabile e PL, per poi esaminare le relazioni che le legano. Nel secondo capitolo ci concentreremo in particolare sulle 3-varietà. L'obiettivo principale sarà quello di approcciarsi alle più note tecniche descrittive delle 3-varietà. Parleremo innanzitutto delle triangolazioni mediante complessi simpliciali e  $\Delta$ -complessi, per poi concentrarci maggiormente sulla tecnica della chirurgia topologica. In particolare la vedremo applicata nell'Heegaard Splitting e nella chirurgia di Dehn. Infine presenteremo la tecnica della decomposizione in fattori primi e la decomposizione JSJ, le quali ebbero un ruolo fondamentale negli studi di Thurston

Nel terzo ed ultimo capitolo analizzeremo una generalizzazione della tecnica delle triangolazioni, detta tecnica delle triangolazioni ideali, la quale permette una descrizione efficace delle varietà che si ottengono come componenti dalla JSJ. Questa tecnica fu usata da Thurston per costruire i primi esempi di famiglie non banali di varietà iperboliche e risultò essere la chiave di volta per l'intera teoria delle varietà tridimensionali. Concluderemo poi soffermandoci sulla descrizione di un algoritmo per la costruzione di una triangolazione ideale del complementare di un nodo alternante.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>i</b>
<b>1 <math>n</math>-Varietà</b>	<b>1</b>
1.1 Varietà Topologiche, Differenziabili e PL . . . . .	1
1.1.1 Varietà topologiche . . . . .	1
1.1.2 Varietà differenziabili . . . . .	3
1.1.3 Varietà PL . . . . .	4
1.2 Confronto fra le categorie Top, Diff e PL . . . . .	7
<b>2 Descrizione delle 3-varietà</b>	<b>9</b>
2.1 Triangolazioni . . . . .	9
2.1.1 Grafo duale . . . . .	11
2.2 Chirurgie . . . . .	12
2.2.1 Superfici embedded nelle 3-varietà . . . . .	12
2.2.2 Taglia e incolla . . . . .	14
2.3 Heegaard splitting . . . . .	16
2.4 Chirurgia di Dehn . . . . .	18
2.5 Decomposizione canonica . . . . .	20
2.5.1 Decomposizione in primi . . . . .	20
2.5.2 JSJ-Decomposition . . . . .	22
<b>3 <math>\mathcal{T}_3</math> e triangolazione ideale di complementari di nodi alternanti</b>	<b>27</b>
3.1 Definizione di $\mathcal{T}_3$ e principali caratteristiche . . . . .	27
3.2 3-varietà realizzabili in $\mathcal{T}_3$ . . . . .	29
3.3 Triangolazione del complementare di link alternanti . . . . .	32
3.3.1 CW-complessi finiti . . . . .	32
3.3.2 Realizzazione algoritmica del complementare di un link alternante in $\mathcal{T}_3$ . . . . .	33
	<b>47</b>



# Elenco delle figure

1.1	Esempi di varietà topologiche. . . . .	2
2.1	Triangolazione di un cubo solido e del toro $S^1 \times S^1$ . . . . .	10
2.2	Triangolazione mediante $\Delta$ -complessi del toro $S^1 \times S^1$ . . . . .	11
2.3	Grafo duale di una $S^1 \times S^1 \times S^1$ . . . . .	12
2.4	Esempio di superficie 2-sided e 1-sided. . . . .	14
2.5	Toro tagliato lungo un meridiano. . . . .	15
2.6	Toro e bottiglia di Klein ottenuti da due incollamenti differenti dello stesso cilindro. . . . .	16
2.7	Heegaard splitting di $S^3$ in due tori. . . . .	17
2.8	La somma connessa di due copie di $T_1$ genera un $T_2$ . . . . .	21
2.9	Esempio di disco che taglia via una sfera e di disco che semplifica il toro. . . . .	23
3.1	Link del vertice di un tetraedro. . . . .	29
3.2	Le tre tipologie di intorno di un punto in un poliedro quasi-standard, denotate rispettivamente con I, II e III. . . . .	30
3.3	Stratificazione di un poliedro quasi standard. . . . .	30
3.4	Analogia fra spina standard e grafo duale in una superficie triangolata privata dei vertici. . . . .	31
3.5	Esempi rispettivamente di un nodo banale e di due nodi semplificabili in modo banale. . . . .	33
3.6	Come semplificare un incrocio. . . . .	34
3.7	Vista delle 2-celle vicino ad un incrocio. . . . .	35
3.8	L'intorno quadrato $Q$ che rimuoviamo da $S^2$ e il rettangolo $R$ che incolleremo. . . . .	36
3.9	Il rettangolo $R$ incollato nella posizione corretta. . . . .	36
3.10	Due regioni modificate. . . . .	37
3.11	Come associare l'orientazione dei lati all'orientazione di $g$ . . . . .	38
3.12	Come ottenere la funzione incollamento di una 2-cella. . . . .	38

---

3.13	Un bigono e un esempio di situazione in cui si genera un bigono nella nostra realizzazione. . . . .	39
3.14	Eliminazione di un bigono i cui lati hanno la stessa orientazione. .	39
3.15	Determinazione delle adiacenze rispetto al segmento verticale $g$ . .	41
3.16	Se $G$ non ha tutti incroci alternati, allora avremo certamente almeno una di queste due situazioni. . . . .	42
3.17	Ciò che genera un lato di $g$ con estremi alternati in $B_+$ e $B_-$ rispettivamente. . . . .	43
3.18	Realizzazione di $S_+^2$ con tutti i vertici sullo stesso piano eccetto uno.	44
3.19	Usuale proiezione di $\mathcal{L}^8$ ed aggiunta dei segmenti di tipo $g$ con una orientazione arbitraria. . . . .	44
3.20	Rappresentazione di $\partial B_+$ prima e dopo l'eliminazione dei bigoni.	45
3.21	Rappresentazione di $\partial B_-$ prima e dopo l'eliminazione dei bigoni.	45

# Capitolo 1

## $n$ -Varietà

In questo capitolo introdurremo le varietà  $n$ -dimensionali, distinguendo fra quelle topologiche, differenziabili e PL, per poi esaminare la relazione che c'è tra di esse nel caso specifico della dimensione 3.

### 1.1 Varietà Topologiche, Differenziabili e PL

In questa sezione faremo riferimento a [Ha1], [Le] e [Mau].

#### 1.1.1 Varietà topologiche

**Definizione 1.1.** Uno spazio topologico  $M$  è una **varietà** (topologica) di dimensione  $n$  se:

- (i)  $M$  è Hausdorff;
- (ii)  $M$  è second countable;
- (iii)  $M$  è localmente Euclideo di dimensione  $n$ .

Dove esplicitamente:

**Definizione 1.2.** Uno spazio topologico  $X$  è **Hausdorff** se per ogni  $x, y \in X$  distinti, esistono  $U, V \subseteq X$  intorno di  $x$  e  $y$  tali che  $U \cap V = \emptyset$ .

**Definizione 1.3.** Uno spazio topologico  $X$  è **second countable** se possiede una base numerabile rispetto alla sua topologia, ossia esiste un'insieme numerabile di aperti  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$  tali che per ogni aperto  $U \subseteq X$  contenente un punto  $x$ , esiste un indice  $\beta$  per cui  $x \in U_\beta \subseteq U$ .

**Definizione 1.4.** Uno spazio topologico  $X$  è **localmente Euclideo** di dimensione  $n$  se per ogni  $x \in X$ , esistono  $U \subseteq X$  intorno aperto di  $x$  e  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  tali che  $\phi : U \rightarrow \phi(U)$  sia un omeomorfismo.

Osserviamo che le prime due condizioni sono sostanzialmente delle condizioni tecniche, mentre la terza è la condizione che determina la struttura di varietà topologica.

**Definizione 1.5.** Data una  $n$ -varietà  $M$ , si dice **carta** la coppia  $(U, \phi)$  dove  $U \subseteq M$  è un aperto e  $\phi : U \rightarrow \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$  è un omeomorfismo.

**Esempio 1.1.** La sfera  $S^n$ , lo spazio proiettivo  $\mathbb{R}P^n$  e il toro  $S^1 \times S^1$  sono varietà topologiche.

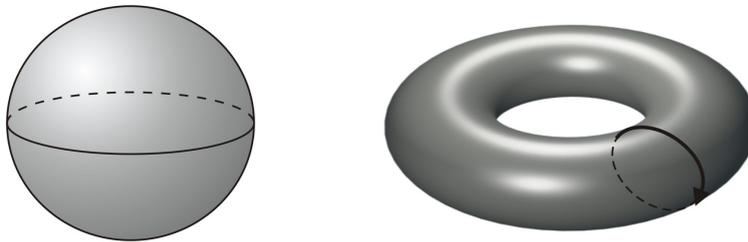


Figura 1.1: Esempi di varietà topologiche.

**Esempio 1.2.** Prodotto di varietà è una varietà. Date le varietà  $m$ -dimensionale  $M$  e  $n$ -dimensionale  $N$ , consideriamo  $M \times N$  con la topologia prodotto. Certamente sarà Hausdorff e second countable, inoltre, se  $(U, \phi)$  è una carta per  $M$  e  $(V, \psi)$  è una carta per  $N$ , allora  $(U \times V, \phi \times \psi)$  è una carta per  $M \times N$ . Allora attraverso un ricoprimento di carte per  $M$  e  $N$  possiamo costruire un'insieme di carte che ricoprono  $M \times N$ . Per induzione si può estendere ad un qualsiasi prodotto finito di varietà topologiche.

Diamo un accenno della nozione di varietà topologiche con bordo.

**Definizione 1.6.** Si definisce **semispazio superiore**  $\mathbb{R}_+^n \subset \mathbb{R}^n$  l'insieme

$$\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$$

**Definizione 1.7.** Si dice varietà topologica  $n$ -dimensionale **con bordo** uno spazio di Hausdorff, second countable in cui ogni punto ha un intorno omeomorfo ad un sottoinsieme aperto di  $\mathbb{R}_+^n$ . Inoltre si dice **bordo** di  $M$ , e si indica  $\partial M$ , l'insieme dei punti corrispondenti a  $\partial \mathbb{R}_+^n$ .

**Oss.** Dal momento che  $\partial \mathbb{R}_+^n$  è omeomorfo a  $\mathbb{R}^{n-1}$ , segue che  $\partial M$  è una  $n - 1$  varietà.

## 1.1.2 Varietà differenziabili

Richiamiamo innanzitutto il concetto di applicazione liscia fra aperti di  $\mathbb{R}^n$ . Siano  $U \subset \mathbb{R}^k$  e  $V \subset \mathbb{R}^l$  insiemi aperti.

**Definizione 1.8.** Un'applicazione  $f : U \rightarrow V$  si dice di **classe  $C^r$** ,  $r \in \mathbb{N}$ , se è continua e tutte le derivate parziali fino al grado  $r$  esistono e sono continue.

Più in generale, dati gli insiemi arbitrari  $X \subset \mathbb{R}^k$  e  $Y \subset \mathbb{R}^l$ , un'applicazione  $f : X \rightarrow Y$  si dice di classe  $C^r$ ,  $r \in \mathbb{N}$ , se per ogni  $x \in X$  esistono un intorno aperto  $U$  di  $x$  ed un'applicazione di classe  $C^r$   $g : U \rightarrow \mathbb{R}^l$  tale che  $f|_{U \cap X} = g|_{U \cap X}$ . In tal caso scriveremo che  $f \in C^r(X, Y)$ , o dove non c'è ambiguità semplicemente  $f \in C^r$ .

**Definizione 1.9.** Un'applicazione  $f : U \rightarrow V$  si dice **liscia**, o  $C^\infty$ , se  $f \in C^r \forall r \in \mathbb{N}$ . Se  $f$  è liscia, biunivoca con inversa liscia, allora si dice essere un **diffeomorfismo**.

*Oss.* Dal momento che una mappa liscia è anche continua, ne segue che ogni diffeomorfismo è anche un omeomorfismo.

Ora, poiché ogni punto di una varietà è contenuto in una carta, è possibile considerare la differenziabilità di una mappa rifacendosi agli aperti delle carte.

**Definizione 1.10.** Siano  $M$  ed  $N$  rispettivamente una  $m$ -varietà e una  $n$ -varietà. Consideriamo le carte  $(\bar{U}, \psi)$  per  $M$  e  $(\bar{V}, \phi)$  per  $N$ . Se  $U \subseteq \psi(\bar{U}) \subseteq \mathbb{R}^m$  e  $V \subseteq \phi(\bar{V}) \subseteq \mathbb{R}^n$  sono due insiemi generici, allora una mappa  $f : M \rightarrow N$  si dice **liscia** se

$$\phi \circ f \circ \psi^{-1} : U \rightarrow V$$

è liscia.

In particolare diremo che  $f$  è un **diffeomorfismo** se  $\phi \circ f \circ \psi^{-1}$  è un diffeomorfismo.

**Definizione 1.11.** Siano  $(U, \phi)$  e  $(V, \psi)$  carte della stessa varietà tali che  $U \cap V \neq \emptyset$ . Una mappa della forma  $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$  si dice **mappa di transizione**.

Le due carte si dicono **compatibili** in modo liscio se la loro mappa di transizione è un diffeomorfismo.

Se  $U \cap V = \emptyset$  diremo ancora che la mappa di transizione è liscia.

*Oss.* Si nota che ogni mappa di transizione è un omeomorfismo.

**Definizione 1.12.** Si dice **atlante** di una varietà  $M$  una collezione di carte i cui domini ricoprono  $M$ . Un'atlante si dice **liscio** se è tale che tutte le carte siano a due a due compatibili in modo liscio.

**Definizione 1.13.** Una funzione  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $M$  varietà dotata di un atlante  $\mathcal{A}$ , si dice **liscia** se per ogni carta  $(U, \phi) \in \mathcal{A}$  la funzione  $f \circ \phi^{-1}$  è liscia.

Può succedere che diversi atlanti forniscano il medesimo insieme di funzioni lisce.

**Teorema 1.1.** Se  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{A}'$  sono atlanti lisci su  $M$ , allora essi determinano lo stesso insieme di funzioni lisce se e solo se  $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$  è un atlante liscio.

**Definizione 1.14.** Due atlanti lisci  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{A}'$  su una varietà  $M$  si dicono **equivalenti** se  $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$  è un atlante liscio. Inoltre questa è una relazione d'equivalenza.

A questo punto esistono due modi equivalenti per descrivere le strutture differenziabili: come una classe di equivalenza di varietà dotate di atlanti lisci, oppure di un atlante massimale. Infatti, dal momento che unione di atlanti è ancora un atlante, esiste un ordinamento parziale fra gli atlanti determinato dalla proprietà di essere un sottoinsieme. Si dirà quindi massimale l'atlante determinato dall'unione di tutti gli atlanti di una stessa classe.

**Definizione 1.15.** Si definisce **struttura differenziabile** su una varietà  $M$  un atlante massimale liscio. Una varietà si dice **differenziabile**, o **liscia**, quando è dotata di una struttura differenziabile.

**Esempio 1.3.** Sono esempi di varietà lisce: i sottoinsiemi aperti di varietà lisce, l'insieme di tutte le matrici, l'insieme delle matrici invertibili come sottoinsieme di tutte le matrici, il prodotto di varietà lisce.

Concludiamo con l'intuitiva nozione di varietà liscia a bordo.

**Definizione 1.16.** Un'atlante liscio per una varietà topologica  $n$ -dimensionale con bordo è un'insieme di carte tali che le mappe di transizione siano estendibili a mappe lisce fra aperti di  $\mathbb{R}^n$ .

Segue analogamente a prima la definizione di atlante massimale liscio per una varietà con bordo e quindi la definizione di varietà differenziabile a bordo.

**Definizione 1.17.** Si dice **varietà differenziabile**, o **liscia**, **a bordo** una varietà topologica a bordo dotata di un'atlante liscio massimale.

### 1.1.3 Varietà PL

In questa sezione daremo la nozione di varietà lineari a tratti, anche dette varietà PL.

**Definizione 1.18.** Dato un'insieme finito di punti  $\{x_1, \dots, x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ , essi si dicono **affinemente indipendenti** se fissato uno qualsiasi di essi  $x_i$ , i vettori  $x_i - x_j$ , con  $j \neq i$ , sono linearmente indipendenti.

**Definizione 1.19.** Sia  $K$  un sottoinsieme dello spazio Euclideo  $\mathbb{R}^n$ . Diremo che  $K$  è un  **$k$ -simpleso** (lineare), e lo indicheremo con  $\sigma^k$  o  $\sigma$  quando non c'è ambiguità, se esso può essere scritto come la chiusura convessa di un insieme finito di  $k+1$  punti affinemente indipendenti  $\{x_0, \dots, x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ .

In particolare chiameremo  $x_0, \dots, x_k$  **vertici** di  $\sigma^k$  e ogni  $q$ -simpleso generato da  $q+1$  vertici di  $\sigma^k$ ,  $q < k$ , si dirà **faccia** di  $\sigma^k$ . Gli 1-simplessi si dicono anche **spigoli**.

**Oss.** Ogni  $n$ -simpleso, con la topologia indotta da  $\mathbb{R}^n$ , è omeomorfo al disco  $n$ -dimensionale  $D^n$ .

**Definizione 1.20.** Si dice **complesso simpliciale**  $K$  un'insieme di semplici di uno stesso spazio  $\mathbb{R}^n$ , tale che:

- ogni faccia appartenente ad un semplice di  $K$ , appartiene anche a  $K$ ;
- ogni intersezione non vuota di due qualsiasi semplici di  $K$  è faccia di entrambi;
- ogni semplice di  $K$  è faccia di un insieme finito di semplici di  $K$ ;
- rispetto alla topologia indotta da  $\mathbb{R}^n$ ,  $A \subset K$  è chiuso se e solo se per ogni semplice  $\sigma \subset K$ ,  $A \cap \sigma$  è chiuso.

Definiamo la **dimensione** di un complesso simpliciale come la dimensione massima dei suoi semplici.

**Definizione 1.21.** Dato un  $n$ -simpleso  $\sigma$ , l'insieme di tutte le facce di dimensione minore di  $n$  si dice **bordo** di  $\sigma$ .

Dato un complesso  $K$  ed un semplice  $\sigma \in K$ , si dice **stella** di  $\sigma$  l'insieme  $st(\sigma, K)$  formato da tutti i semplici di  $K$  contenenti  $\sigma$  e da tutte le loro facce.

Si dice **cintura** di  $\sigma$  l'insieme  $lk(\sigma, K)$  formato dai semplici di  $st(\sigma, K)$  disgiunti da  $\sigma$ .

**Definizione 1.22.** Dati due complessi simpliciali  $L$  e  $K$ , un'**applicazione simpliciale**  $f: K \rightarrow L$  è un'applicazione continua tale che:

- per ogni vertice  $v$  di  $K$ ,  $f(v)$  è un vertice di  $L$ ;
- se  $\sigma$  è un semplice generato dai vertici  $v_1, \dots, v_n$ , allora  $f(\sigma)$  è un semplice generato da  $f(v_1), \dots, f(v_n)$ .

**Definizione 1.23.** Si dice **corpo** di un complesso  $K$  lo spazio topologico  $|K|$ , il cui insieme di punti è l'unione dei simplessi di  $K$ , e la cui topologia è quella indotta dallo spazio Euclideo.

Ogni spazio topologico che si può scrivere come corpo di un complesso si dice **poliedro**.

**Definizione 1.24.** Sia  $f : K \rightarrow L$  un'applicazione simpliciale fra i complessi  $K$  e  $L$ . Si dice **applicazione lineare a tratti**, o **PL**, l'applicazione continua  $|f| : |K| \rightarrow |L|$  definita come segue: per ogni punto  $p \in |K|$ , considero il semplice di minima dimensione  $\sigma$  fra quelli contenenti  $p$ . Detti  $v_0, \dots, v_n$  i vertici di  $\sigma$ , sarà  $p = \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i$  per certi valori  $\lambda_i \in \mathbb{R}^n$ , allora si definisce

$$|f|(p) = \sum_{i=0}^n \lambda_i f(v_i)$$

**Oss.** Data una qualunque applicazione PL  $f : K \rightarrow L$ , si noti che essa è completamente determinata dalla propria restrizione ai vertici.

**Definizione 1.25.** Una **suddivisione** di un complesso  $K$  è un complesso  $L$  tale che  $|L| = |K|$  e ogni semplice di  $L$  è contenuto in un semplice di  $K$ .

Le nozioni relative a complessi simpliciali di maggior interesse sono quelle invarianti per suddivisione.

**Teorema 1.2.** Se due complessi  $K, L$  hanno lo stesso poliedro come corpo, essi ammettono una suddivisione comune.

**Definizione 1.26.** Un complesso  $n$ -dimensionale  $K$  si dice **varietà combinatoria**  $n$ -dimensionale se per ogni vertice  $v$  di  $K$  esiste un'applicazione simpliciale biettiva da un'opportuna suddivisione di  $lk(\sigma, K)$  ad un'opportuna suddivisione del bordo di un  $n$ -simpleso.

Poiché la nozione di varietà combinatoria risulta invariante per suddivisione, è ben data la seguente definizione.

**Definizione 1.27.** Un poliedro  $M = |K|$ , con  $K$   $k$ -complesso simpliciale, si dice  **$k$ -varietà PL** se  $K$  è una varietà combinatoria.

Terminiamo ancora una volta con un accenno alle varietà PL con bordo.

**Definizione 1.28.** Si definisce **varietà combinatoria con bordo**  $n$ -dimensionale un complesso  $n$ -dimensionale  $K$  in cui, per ogni vertice  $v \in K$ ,  $lk(v, K)$  è **PL-omeomorfo** (i.e. esiste un'applicazione PL invertibile la cui inversa è ancora

un'applicazione PL ) o al corpo del bordo di un  $n$ -simpleso, o ad un  $(n-1)$ -simpleso.

In particolare, per ogni vertice  $v \in K$  vi è un omeomorfismo PL

$$f : |st(v, K)| \rightarrow |\overline{\sigma^n}|$$

; per ogni vertice  $v \in K$  per cui  $|lk(v, K)|$  è PL-omeomorfo ad un  $(n-1)$ -simpleso, consideriamo gli  $(n-1)$ -simplessi di  $f^{-1}(\partial\overline{\sigma^n})$  che non fanno parte di  $|lk(v, K)|$ . Tali simplessi, con le loro facce, costituiscono un sotto-complesso di  $K$ , detto **bordo** di  $K$ , che indicheremo con l'usuale espressione  $\partial K$ .

*Oss.*  $\partial K$  è effettivamente una varietà combinatoria  $(n-1)$ -dimensionale.

**Definizione 1.29.** Una **varietà PL con bordo** è il corpo di una varietà combinatoria con bordo  $K$  e si definisce **bordo** di  $|K|$ :

$$\partial|K| := |\partial K|$$

**Definizione 1.30.** Date due varietà PL  $|M|$  e  $|N|$ , di cui  $M$  e  $N$  sono le varietà combinatorie corrispondenti, esse si dicono **PL-equivalenti** se esistono delle suddivisioni  $M'$  di  $M$ ,  $N'$  di  $N$ , e un omeomorfismo PL  $f : |M'| \rightarrow |N'|$ .

## 1.2 Confronto fra le categorie Top, Diff e PL

Diamo innanzitutto un'introduzione elementare del concetto di categoria, la cui teoria si è dimostrata un ottimo linguaggio per esprimere fatti e costruzioni generali di topologia:

**Definizione 1.31.** Una **categoria**  $\mathcal{C}$  consiste dei seguenti dati:

- Una **classe**  $ob(\mathcal{C})$ , ossia una generica collezione di oggetti che possono essere univocamente identificati, detti **oggetti della categoria**;
- Per ogni coppia  $A, B \in ob(\mathcal{C})$ , un insieme  $Hom_{ob(\mathcal{C})}(A, B)$ , detto **insieme dei morfismi da A a B**;
- Per ogni terna di oggetti  $A, B$  e  $C$ , è definita un'operazione binaria:  $Hom(B, C) \times Hom(A, B) \rightarrow Hom(A, C)$ , chiamata **composizione di morfismi** tale che soddisfi gli assiomi di **associatività ed identità**.

Le categorie che sono più note sono quelle in cui possiamo interpretare i morfismi come particolari funzioni fra insiemi, la loro composizione è la usuale composizione di funzioni e l'identità è la canonica identità.

Le  $n$ -varietà di classe  $C^k$  e le applicazioni di classe  $C^k$  fra di esse, formano una categoria per ogni  $k$  fissato. In particolare si indica con **Top** la categoria delle varietà topologiche e delle applicazioni continue, e con **Diff** la categoria delle varietà e applicazioni di classe  $C^\infty$ . Anche i complessi e le applicazioni simpliciali costituiscono rispettivamente gli oggetti e i morfismi di una categoria, così come le varietà PL assieme alle applicazioni PL formano la categoria **PL**.

All'interno di ogni categoria è usuale definire una relazione di equivalenza rispetto agli isomorfismi, ossia dati due oggetti  $A$  e  $B$  essi si dicono equivalenti se e solo se esiste un isomorfismo fra di essi. Questo tipo di relazione ci permette di dare una sorta di classificazione degli oggetti di una categoria, raggruppandoli in base a certe proprietà.

**Esempio 1.4.** *In **Top** due varietà topologiche sono equivalenti se e solo se esiste un omeomorfismo di spazi topologici tra di essi.*

**Oss.** Notiamo che **Top** è, nel senso più intuitivo del termine, una sotto-categoria di **Diff**, per cui ogni varietà differenziabile è anche una varietà topologica. Tuttavia due varietà equivalenti in **Top** non è detto che lo siano in **Diff**, in quanto l'isomorfismo richiesto è in realtà un diffeomorfismo  $C^\infty$  e non un semplice omeomorfismo.

A questo punto ci interessa capire che relazione c'è fra le categorie **Top**, **Diff** e **PL**.

**Teorema 1.3** (Moise). *In dimensione 1, 2 e 3 le relazioni di equivalenza fra le categorie **Top**, **Diff** e **PL** coincidono. In altre parole, dati gli spazi topologici  $A$  e  $B$ , sono equivalenti:*

- (i)  $A$  e  $B$  sono varietà topologiche omeomorfe;
- (ii)  $A$  e  $B$  sono varietà differenziabili diffeomorfe;
- (iii)  $A$  e  $B$  sono varietà PL PL-equivalenti;

**Oss.** In dimensione superiore a 3 tutto ciò non è più vero. Più precisamente vale che, per le dimensioni 4, 5 e 6, **Diff** e **PL** coincidono ancora fra di loro ma si distinguono da **Top**, mentre dalla dimensione 7 in poi anche **Diff** e **PL** si diversificano.

# Capitolo 2

## Descrizione delle 3-varietà

In questo capitolo parleremo dei modi più usuali per descrivere le 3-varietà compatte orientate e daremo le nozioni fondamentali di triangolazione, chirurgia topologica e decomposizione di varietà. In particolare metteremo l'accento sulla chirurgia di Dehn e sulla JSJ-decomposition. D'ora in poi tutte le varietà saranno 3-varietà compatte connesse e orientate a meno di specifiche.

### 2.1 Triangolazioni

Uno dei metodi più duttili per descrivere le varietà è attraverso delle triangolazioni. Per questa sezione rimandiamo a [Mau] e [Ha1].

**Definizione 2.1.** Dato uno spazio topologico  $X$ , si dice **triangolazione simpliciale** di  $X$  una coppia  $(K, f)$  dove  $K$  è un complesso simpliciale e  $f : |K| \rightarrow X$  è un omeomorfismo. Talvolta diremo che  $K$  **triangola**  $X$  o, con un abuso di linguaggio, che  $K$  è una triangolazione di  $X$ .

**Definizione 2.2.** Due triangolazioni simpliciali  $(K, f)$  e  $(L, g)$  di uno stesso spazio topologico  $X$  si dicono **equivalenti** se esiste un omeomorfismo PL  $h : |K| \rightarrow |L|$  che renda commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} |K| & \xrightarrow{f} & X \\ h \downarrow & \nearrow g & \\ |L| & & \end{array}$$

**Teorema 2.1.** Siano  $X$  e  $Y$  spazi topologici con triangolazioni simpliciali  $(K, f)$  e  $(L, g)$  rispettivamente. Se  $f : X \rightarrow Y$  è un PL-omeomorfismo allora esistono una suddivisione  $K'$  di  $K$  e  $L'$  di  $L$  tali che  $f$  risulta definita da un omeomorfismo simpliciale fra  $K'$  e  $L'$ .

*Oss.* Per ciò che è stato visto nel capitolo precedente sappiamo che fino alla dimensione 3 tutte le varietà sono triangolabili, inoltre vale che due triangolazioni simpliciali qualsiasi di una stessa varietà topologica hanno corpi PL-omeomorfi.

**Teorema 2.2.** *Se  $K$  è un complesso che triangola uno spazio compatto, allora  $K$  è un complesso finito.*

La tecnica delle triangolazioni è molto utilizzata nello studio delle varietà topologiche in quanto permette di fare calcoli e dimostrazioni in modo molto semplice. Ne è un esempio il calcolo del gruppo fondamentale di uno spazio triangolabile mediante il gruppo dei lati di una sua triangolazione simpliciale. Tuttavia non è per niente facile trovare la triangolazione di varietà molto complesse, talvolta anche capire se due varietà hanno la stessa triangolazione risulta arduo.

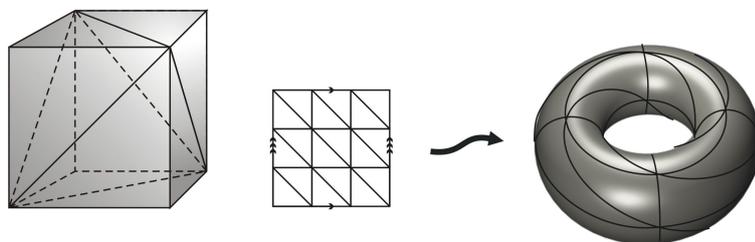


Figura 2.1: Triangolazione di un cubo solido e del toro  $S^1 \times S^1$ .

In seguito useremo una comoda variante del concetto di complesso simpliciale: il  $\Delta$ -complesso.

**Definizione 2.3.** *Si definisce  $\Delta$ -complesso una coppia*

$$K := (\{\sigma_\alpha | \alpha \in A\}, \{\mathcal{F}_j | j \in \{1 \dots n\}\})$$

ove  $\{\sigma_\alpha | \alpha \in A\}$  è un'insieme finito di semplici disgiunti,  $n = \max\{\dim \sigma_\alpha | \alpha \in A\}$  e ogni  $\mathcal{F}_j$  è una partizione dell'insieme delle  $j$ -facce dei semplici di  $\sigma_\alpha$ . Il corpo  $|K|$  è lo spazio quoziente ottenuto da  $\bigcup_{\alpha \in A} \sigma_\alpha$  identificando fra loro le  $j$ -facce appartenenti ad una stessa classe di  $\mathcal{F}_j$  mediante applicazioni affini che conservino l'ordine dei vertici.

*Oss.* Tutte le nozioni introdotte per i complessi simpliciali si estendono ai  $\Delta$ -complessi. In seguito, quando si parlerà di complessi simpliciali, s'intenderà tacitamente che gli stessi concetti si applicano anche ai  $\Delta$ -complessi.

**Teorema 2.3.** *La doppia suddivisione baricentrica di un  $\Delta$ -complesso è isomorfa ad un complesso simpliciale.*

**Definizione 2.4.** Dato uno spazio topologico  $X$ , si dice **triangolazione** di  $X$  una coppia  $(K, f)$  dove  $K$  è un  $\Delta$ -complesso e  $f: |K| \rightarrow X$  è un omeomorfismo. Ancora una volta diremo che  $K$  **triangola**  $X$  o, con un abuso di linguaggio, che  $K$  è una triangolazione di  $X$ .

**Definizione 2.5.** Due triangolazioni  $(K, f)$  e  $(L, g)$  di uno stesso spazio topologico  $X$  si dicono **equivalenti** se esiste un omeomorfismo PL  $h: |K| \rightarrow |L|$  che renda commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} |K| & \xrightarrow{f} & X \\ h \downarrow & \nearrow g & \\ |L| & & \end{array}$$

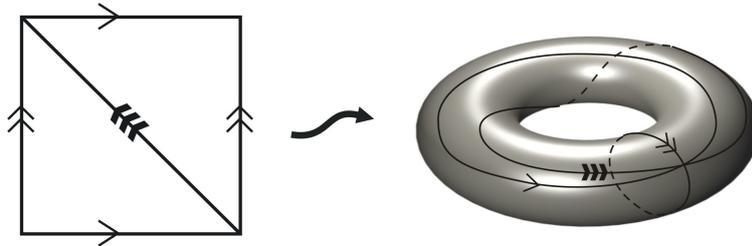


Figura 2.2: Triangolazione mediante  $\Delta$ -complessi del toro  $S^1 \times S^1$ .

### 2.1.1 Grafo duale

Strettamente collegata alle triangolazioni è l'accezione di grafo duale. Per comodità ci limiteremo alle varietà di dimensione 3 e rimandiamo a [Bo-Ad] per maggiori dettagli.

**Definizione 2.6.** Sia  $\sigma$  un complesso simpliciale di dimensione 3. Si definisce **grafo duale** di  $\sigma$  il grafo definito in questo modo: a ogni 3-simplex di  $\sigma$  corrisponde un vertice, e due vertici sono collegati da un lato se i 3-simplex corrispondenti hanno una faccia in comune. In particolare se due 3-simplex hanno  $k$  facce in comune, allora i vertici corrispondenti saranno collegati da  $k$  lati.

**Oss.** Il grafo duale di una 3-varietà è un 1-complesso simpliciale che può essere immerso propriamente (si veda 2.10 per dettagli) nella 3-varietà.

**Oss.** Se  $M$  è una 3-varietà e  $G$  il grafo duale associato ad una triangolazione di  $M$ , allora l'accoppiamento del grafo duale con le mappe di incollamento lungo le facce fornisce una codifica completa della triangolazione di  $M$ .

**Teorema 2.4.** *Il grafo duale di una 3-varietà connessa e **chiusa**, i.e. compatta e senza bordo, è un grafo connesso senza vertici terminali.*

**Esempio 2.1.** *Nella Figura 2.3 possiamo osservare il grafo duale di  $S^1 \times S^1 \times S^1$ , rappresentato come un cubo con le identificazioni opportune sulle facce opposte. I rami dello stesso colore e con lo stesso simbolo sono da considerarsi collegati, per cui si nota che il grafo ottenuto è connesso e senza vertici terminali.*

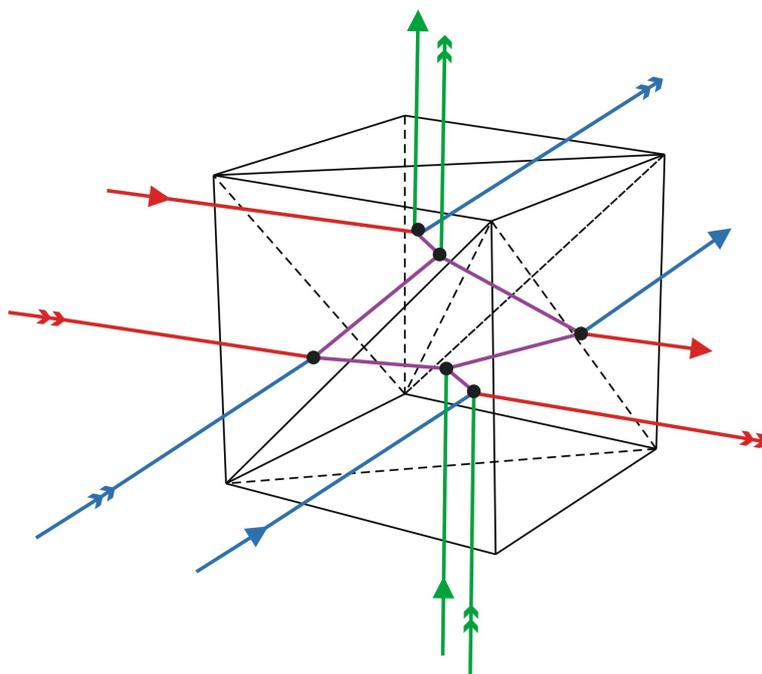


Figura 2.3: Grafo duale di una  $S^1 \times S^1 \times S^1$  triangolato mediante  $\Delta$ -complessi.

## 2.2 Chirurgie

Altro metodo comune per la descrizione delle 3-varietà è basato sulla cosiddetta chirurgia topologica. Le nozioni relative a questo capitolo sono state tratte da [Sh] e [He].

Per presentare questa tecnica abbiamo bisogno di richiamare alcune basi formali.

### 2.2.1 Superfici embedded nelle 3-varietà

Diamo la definizione generale di embedding fra spazi topologici, da cui, essendo le superfici delle 2-varietà, ne verrà la definizione naturale di superficie

embedded in una 3-varietà.

Le varietà trattate in questa sezione saranno supposte compatte e lisce, e le mappe  $C^\infty$  a meno di specifiche.

**Definizione 2.7.** Si definisce **embedding** di uno spazio topologico  $Y$  in uno spazio topologico  $X$  una mappa  $j : Y \rightarrow X$  tale che  $j$  sia un omeomorfismo da  $Y$  nell'immagine  $j(Y) \subset X$ . In altre parole un embedding  $j$  identifica  $Y$  con un sottoinsieme di  $X$ .

*Oss.* In particolare, la mappa inclusione da un sottoinsieme di  $X$  in  $X$  è un embedding.

Questa idea è particolarmente utile per comparare diversi sottoinsiemi di uno spazio  $X$ . Ad esempio se  $i$  e  $i'$  sono due embedding di  $Y$  in  $X$  allora  $i(Y)$  e  $i'(Y)$  sono sottoinsiemi omeomorfi, in quanto omeomorfi a  $Y$ . D'altra parte si può richiedere una condizione ancora più forte.

**Definizione 2.8.** Definiamo **isotopia** da un embedding  $i : Y \rightarrow X$  ad un altro embedding  $i' : Y \rightarrow X$  una mappa  $I : Y \times [0, 1] \rightarrow X$  tale che la restrizione di  $I$  a  $Y \times \{t\}$  sia un embedding per ogni  $t \in [0, 1]$  e tale che  $I|_{Y \times \{0\}} = i$  e  $I|_{Y \times \{1\}} = i'$ . Diremo che le mappe  $i$  e  $i'$  sono **isotope** se esiste un'isotopia tra di esse. Due sottoinsiemi  $A, B \subset X$  sono **isotopi** se  $A$  e  $B$  sono immagini di embedding isotopi di uno spazio  $Y$  in uno spazio  $X$ .

*Oss.* Si definisce **sottovarietà** di una varietà  $X$  un sottoinsieme  $Y \subset X$  tale che  $Y$  è una varietà per topologia indotta; allora per definizione se  $i : Y \rightarrow X$  è un embedding, l'immagine  $i(Y)$  è una sottovarietà di  $X$ .

**Definizione 2.9.** Sia  $F$  una sottovarietà connessa e compatta di codimensione 1 di una varietà  $M$ . Allora  $F$  si dice essere **2-sided** in  $M$  quando esiste un embedding  $h : F \times [-1, 1] \rightarrow M$  tale che  $h(x, 0) = x$  per ogni  $x \in F$  e

$$h(F \times [-1, 1]) \cap \partial M = h(\partial F \times [-1, 1])$$

In caso contrario si dirà che  $F$  è **1-sided**.

**Esempio 2.2.** Un esempio di superficie 2-sided è il toro in  $\mathbb{R}^3$ , mentre il nastro di Möbius è un esempio di superficie 1-sided di  $\mathbb{R}^3$  (Figura 2.4).

*Oss.* Se  $M$  è orientabile allora orientabilità e 2-sided sono proprietà equivalenti.

**Definizione 2.10.** Siano  $X$  e  $Y$  due varietà con bordo e  $i : Y \rightarrow X$  un embedding. Diremo che  $i$  è un'**immersione propria** se  $i(\partial Y) \subseteq \partial X$ . Si dice **isotopia propria** fra immersioni proprie  $i$  e  $i'$  una isotopia  $I$  tale che ogni restrizione  $I|_{Y \times \{t\}}$  sia un'immersione propria. Due sottoinsiemi  $A, B \subset X$  sono **propriamente isotopi** se  $A$  e  $B$  sono immagini di immersioni isotope proprie di uno spazio  $Y$  in uno spazio  $X$ .

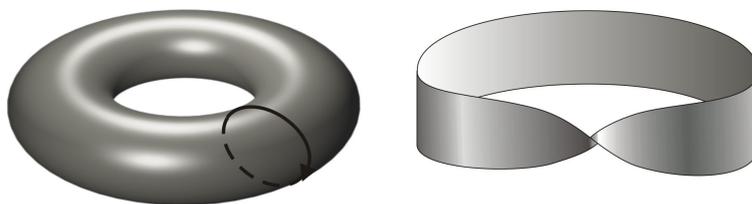


Figura 2.4: Esempio di superficie 2-sided e 1-sided.

Un omeomorfismo  $h : X \rightarrow Y$  è sempre un embedding, allora è possibile definire un'isotopia fra omeomorfismi  $h, h' : X \rightarrow Y$  come una mappa da  $X \times [0, 1]$  a  $Y$  tale che la restrizione a ogni  $X \times \{t\}$  sia un omeomorfismo.

**Definizione 2.11.** Due sottoinsiemi  $A, B$  di  $X$  si dicono **isotopi d'ambiente** se esiste un omeomorfismo  $h : X \rightarrow X$  tale che  $h(A) = B$  e  $h$  è isotopa all'identità.

Questa definizione risulta basilare per uno dei teoremi più utili nella topologia.

**Teorema 2.5** (Teorema di Estensione Isotopica). *Se  $A$  e  $B$  sono sottovarietà propriamente isotope di una varietà  $X$ , allora  $A$  e  $B$  sono isotopi d'ambiente.*

Citiamo inoltre un fondamentale risultato, conseguenza del teorema precedente, che ci servirà nella sezione successiva.

**Teorema 2.6.** *Sia  $Y$  una sottovarietà di  $X$ . Se  $N$  e  $N'$  sono intorni tubolari di  $Y$ , allora esiste un omeomorfismo da  $X$  in se stesso isotopo all'identità su  $X$ , relativo a  $Y$  e tale che porti  $N$  in  $N'$ . In altre parole, due qualsiasi intorni tubolari di  $Y \subset X$  sono isotopi d'ambiente, attraverso una isotopia che mantiene fissa  $Y$ .*

## 2.2.2 Taglia e incolla

Nella branca della chirurgia topologica è operazione comune tagliare e incollare alcuni spazi topologici per crearne di nuovi. Questa operazione si rivela particolarmente utile nel caso in cui gli spazi topologici siano delle varietà, soprattutto nella topologia della dimensione bassa. Dal momento che ciò che ci interessa è l'uso e il risultato di tale operazioni, daremo volutamente delle definizioni per lo più intuitive di ciò che stiamo facendo, senza soffermarci troppo sui dettagli formali.

**Definizione 2.12.** *Siano  $X$  una varietà differenziabile e  $Y \subseteq X$  una sottovarietà di codimensione 1 propriamente immersa in  $X$ . L'operazione di **taglio** lungo  $Y$  consiste nella rimozione di un intorno tubolare aperto  $T$  di  $Y$  da  $X$ . In altre parole lo spazio  $X'$  ottenuto tagliando  $X$  lungo  $Y$  è lo spazio  $X' = X \setminus T$  che indicheremo con  $X \setminus \setminus Y$ .*

**Oss.** Osserviamo che la definizione è ben posta, ossia non dipende dalla scelta dell'intorno tubolare, in quanto esso è unico a meno di isotopia d'ambiente. Inoltre  $X'$  è una nuova varietà con bordo.

Se  $X$  e  $Y$  sono entrambi orientabili e  $Y$  non ha bordo, l'intorno tubolare  $T$  risulta essere un prodotto  $Y \times (-1, 1)$ . Dunque il bordo  $\partial X'$  della nuova varietà  $X'$  ha due componenti in più di  $\partial X$ , entrambe diffeomorfe a  $Y$ .

Non è difficile vedere che senza l'ipotesi di orientabilità ciò non è vero, ad esempio tagliando il nastro di Möbius lungo l'equatore.

**Oss.** Tagliare lungo una varietà connessa 2-sided può separare una varietà in due pezzi, ad esempio tagliando lungo l'equatore di una sfera, ma ciò non è detto, ad esempio tagliando un toro lungo un meridiano (Figura 2.5).

Tagliare lungo una varietà connessa 1-sided non separa mai una varietà.

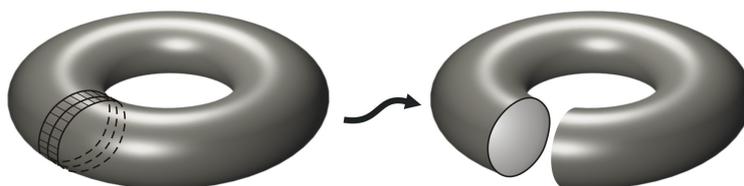


Figura 2.5: Toro tagliato lungo un meridiano.

**Definizione 2.13.** Siano  $X$  e  $Y$  spazi topologici,  $A$  un sottospazio topologico di  $Y$  e sia  $f : A \rightarrow X$  un mappa continua. Si definisce lo **spazio incollamento** di  $X$  e  $Y$  lungo  $f$

$$X \cup_f Y := (X \sqcup Y) / \{f(A) \sim A\}$$

ossia l'unione disgiunta di  $X$  e  $Y$  con l'identificazione di  $x$  con  $f(x)$  per ogni  $x \in A$ .

**Oss.** Come insieme,  $X \cup_f Y$  è un quoziente dell'unione disgiunta di  $X$  e  $Y \setminus A$ , dunque la topologia è determinata da  $f$ .

**Oss.** La definizione 2.13 non esclude che  $Y = X$  e quindi che si abbia un'auto-incollamento.

Se  $X$  e  $Y$  sono due varietà con bordo e gli insiemi  $\partial X$  e  $\partial Y$  sono due sottovarietà omeomorfe, il risultato dell'incollamento lungo i bordi è una varietà senza bordo.

**Esempio 2.3.** Se  $X'$  è ottenuto da  $X$  tagliando lungo una ipersuperficie con intorno tubolare prodotto, questa ha due componenti di bordo in più. Incollando queste due componenti di bordo opportunamente, si ottiene nuovamente  $X$ .

**Teorema 2.7.** *Siano  $X$  e  $Y$  due 3-varietà a bordo, allora  $X \cup_f Y$  dipende solamente dalla classe di omotopia di  $f$ .*

**Teorema 2.8.** *Siano  $X$  e  $Y$  due 3-varietà orientate. Se  $f$  inverte l'orientazione allora  $X \cup_f Y$  è coerentemente orientata con  $X$  e  $Y$ .*

**Esempio 2.4.** *Differenti mappe di incollamento sullo stesso varietà possono formare spazi molto differenti. Ad esempio, se consideriamo un cilindro i cui bordi sono incollati fra loro con un diffeomorfismo che inverte l'orientazione, ciò che otteniamo sarà un toro; se invece utilizziamo un diffeomorfismo che mantiene l'orientazione, avremo una bottiglia di Klein (Figura 2.6). Notiamo inoltre che nel primo caso la varietà è orientabile mentre nel secondo no.*

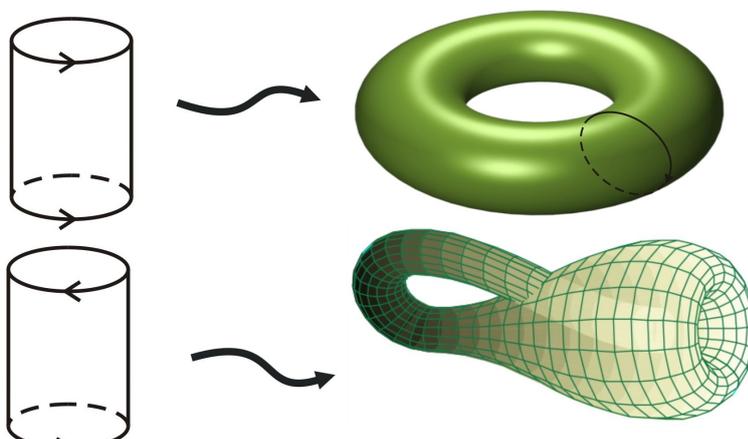


Figura 2.6: Toro e bottiglia di Klein ottenuti da due incollamenti differenti dello stesso cilindro.

## 2.3 Heegaard splitting

In questa sezione osserveremo come il taglia e cuci topologico è utilizzabile per descrivere le 3-varietà. L'Heegaard splitting infatti è esattamente la decomposizione di una 3-varietà compatta orientata ottenuta dividendola in due corpi con manici.

Per dettagli ulteriori si veda [Sc].

**Definizione 2.14.** *Si dice **corpo con manici** di genere  $g$  un intorno regolare di un bouquet formato da  $g$   $S^1$  in  $\mathbb{R}^3$ .*

**Oss.** Per come abbiamo definito il corpo con manici, esso è orientabile.

**Definizione 2.15.** Siano  $V$  e  $W$  due corpi con manici di genere  $g$ , e sia  $f$  un omeomorfismo che inverte l'orientazione fra il bordo di  $V$  e il bordo di  $W$ . Incollando  $V$  a  $W$  lungo  $f$  si ottiene la 3-varietà compatta orientata  $M = V \cup_f W$ . Tale decomposizione si dice **Heegaard splitting** di  $M$  di genere  $g$ . Quando non c'è ambiguità abbrevieremo con  $M = V \cup W$ .

**Teorema 2.9.** Ogni 3-varietà chiusa orientabile ammette un Heegaard splitting.

*Dimostrazione.* Sia  $T$  una triangolazione della 3-varietà chiusa orientabile  $M$  e sia  $G$  il suo grafo duale. Consideriamo allora un intorno regolare  $U$  del grafo duale e un intorno regolare  $V$  dell'1-scheletro (i.e l'insieme di tutti i sotto-complessi di dimensione minore di 2). Sia  $U$  che  $V$  risultano essere due corpi con manici, oltretutto dello stesso genere, e inoltre  $M = U \cup V$  risulta essere un Heegaard splitting della varietà  $M$ .  $\square$

**Esempio 2.5.** Un Heegaard splitting di  $S^3$  è dato da due tori dove il meridiano di uno è incollato all'equatore dell'altro e viceversa.

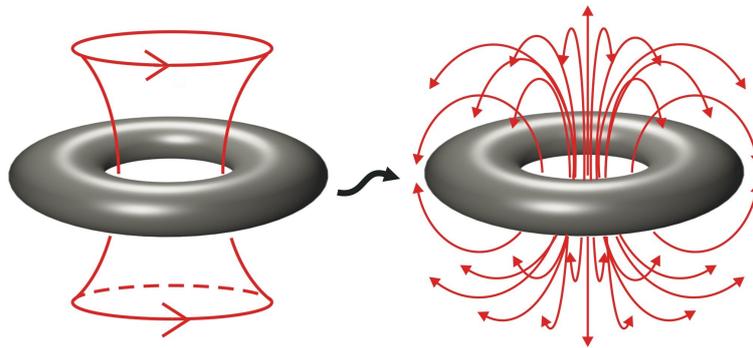


Figura 2.7: Heegaard splitting di  $S^3$  in due tori.

Dato un Heegaard splitting  $M = H_g \cup H'_g$  di genere  $g$ , non è difficile costruire un altro Heegaard splitting di  $M$  di genere  $g + 1$  attraverso un algoritmo chiamato **stabilizzazione**. Per tale motivo si dice che due Heegaard splitting di una varietà  $M$  sono **equivalenti** se esiste un omeomorfismo di  $M$  in se stesso che porta una decomposizione nell'altra, e sono **stabilmente equivalenti** se risultano essere equivalenti dopo aver applicato a ciascuno un certo numero di volte l'algoritmo di stabilizzazione.

**Teorema 2.10 (Singer).** Due qualsiasi Heegaard splitting di una 3-varietà chiusa orientabile  $M$  sono sempre stabilmente equivalenti.

Questo risultato fondamentale permette di utilizzare l'Heegaard splitting per descrivere le 3-varietà chiuse e orientabili.

Il problema dell'Heegaard splitting è che non è canonico e riconduce tutto allo studio dei diffeomorfismi fra superfici. Al contrario, il punto forte di questa tecnica sta nell'esistenza di algoritmi, ad esempio per determinare il genere dell'Heegaard splitting di una 3-varietà, che ci permettono di avere informazioni utili sulla varietà.

## 2.4 Chirurgia di Dehn

In questa sezione vedremo un'ulteriore utilizzo della chirurgia topologia nel tentativo di catalogare le 3-varietà. A differenza dell'Heegaard splitting, la chirurgia di Dehn è una operazione che permette la trasformazione di una 3-varietà in un'altra 3-varietà tramite la rimozione di un toro solido dal suo interno, e nel suo successivo re-incollamento, con una mappa che può essere diversa da quella originaria.

Per maggiori dettagli su questa sezione si rimanda a [Rol].

**Definizione 2.16.** *Sia  $M$  una 3-varietà con bordo, il cui bordo contenga un toro  $T$ . Si dice **riempimento di Dehn** l'operazione di incollamento di  $M$  e di un toro solido  $S$  lungo  $\partial T$  e  $\partial S$ .*

*Oss.* La definizione è estendibile a una qualsiasi 3-varietà  $M$  compatta orientata il cui bordo sia composto da  $k$  tori  $T_1, \dots, T_k$  a due a due disgiunti.

**Definizione 2.17.** *Un **nodo**  $K$  è una varietà differenziabile connessa di dimensione 1 in  $\mathbb{R}^3$ . Due nodi sono **equivalenti** se esiste una isotopia differenziabile che li collega.*

**Definizione 2.18.** *Sia  $M$  una 3-varietà compatta orientabile e  $K$  un nodo contenuto all'interno di  $M$ . Si definisce **chirurgia di Dehn** l'operazione composta dai due passaggi:*

1. la rimozione di un intorno tubolare aperto del nodo  $K$  da  $M$ ;
2. un riempimento di Dehn della nuova componente di bordo  $T$ .

*Oss.* Dal momento che  $M$  è orientabile, l'intorno tubolare è omeomorfo ad un toro solido, e la varietà  $M'$  risultante dalla rimozione ha una nuova componente di bordo  $T$  omeomorfa ad un toro.

In sintesi la chirurgia di Dehn non fa altro che rimuovere un toro da una varietà e re-incollarlo rispetto ad un altro tipo di incollamento. Si osserva banalmente

che la varietà ottenuta da una chirurgia di Dehn dipende fortemente dalla scelta della mappa di re-incollamento. Tuttavia, grazie anche a questa peculiarità, la chirurgia di Dehn unita allo studio dei nodi si è rivelata uno strumento notevole nella descrizione delle 3-varietà.

**Esempio 2.6.** Consideriamo  $S^3$  privata di un toro solido. Se re-incollo il toro tolto con la mappa identità ottengo di nuovo  $S^3$ , mentre se lo incollo identificando il meridiano con l'equatore e viceversa, ciò che ottengo è  $S^1 \times S^2$ .

**Definizione 2.19.** Si dice **link**  $L$  un'unione di un numero finito di nodi a due a due disgiunti.

**Teorema 2.11.** Sia  $N$  una 3-varietà compatta orientata, allora esiste un link  $L$  in  $S^3$ , formato dai nodi  $L_1, \dots, L_k$ , tale che  $N$  è ottenibile da un riempimento di Dehn applicato alla 3-varietà compatta orientata con bordo composto da tori

$$S^3 \setminus \left( \bigcup_{i=1, \dots, k} B_i \right)$$

dove i  $B_i$  sono intorni tubolari aperti a due a due disgiunti dei nodi  $L_i$ .

Questo teorema si è dimostrato avere grande importanza nello studio delle 3-varietà ed ha portato ad un'ulteriore teorema rimarcabile.

**Definizione 2.20.** Sia  $K$  un nodo in  $S^3$ . Si dice **complementare** di  $K$  lo spazio  $S^3$  privato di un intorno regolare di  $K$ .

**Teorema 2.12** (Gordon-Luecke). Se due nodi hanno complementari che sono omeomorfi rispetto ad un omeomorfismo che mantiene l'orientazione, allora essi sono isotopi, e viceversa.

*Oss.* Tale risultato non è vero per i link.

Concludiamo sottolineando ancora l'importanza del teorema 2.11, acquistata maggiormente in tempi recenti grazie agli studi di Thurston, in quanto quasi tutte le varietà ottenute con una chirurgia di Dehn da una 3-varietà  $M$  compatta, asferica, atoroidale (si veda in seguito per maggiori dettagli) e orientata con bordo composto da tori, sono investibili di una struttura iperbolica. Come vedremo nei capitoli successivi, tale passo risulta cruciale nell'avvicinarsi ad una descrizione chiara e totale delle 3-varietà.

## 2.5 Decomposizione canonica

L'ultima tecnica di approccio allo studio delle 3-varietà che presentiamo si basa sulla decomposizione. Intuitivamente, si tratta di tagliare una varietà lungo delle superfici prestabilite in modo da ottenere dei pezzi che sono considerati di base, per poi arrivare ad una descrizione della varietà iniziale studiando quest'ultimi con i vari incollamenti.

La decomposizione canonica di una varietà si divide in due passaggi di crescente difficoltà, i quali si diversificano per superficie lungo cui tagliare. Ricordiamo che tutte le varietà considerate sono compatte, connesse e orientabili. Inoltre se  $S$  è una superficie contenuta nella varietà  $M$ , denotiamo con  $M \setminus \setminus S$  la sottovarietà compatta di  $M$  ottenuta rimuovendo un intorno tubolare aperto di  $S$ . Per maggiori dettagli su questa sezione e sulla prossima si veda [Ha2].

### 2.5.1 Decomposizione in primi

Il più semplice tipo di superficie che si può trovare in una 3-varietà è la sfera  $S^2$ , per tale ragione daremo un accenno dello studio delle sfere nelle 3-varietà. In questa sezione lavoreremo con strumenti  $C^\infty$ , 3-varietà connesse orientabili, compatte e che possono avere bordo, a meno di specifiche ulteriori.

Cominciamo dando delle definizioni preliminari utili in seguito.

**Definizione 2.21.** *Siano  $M$  e  $N$  due varietà della stessa dimensione  $n$ . Siano  $B_M$  e  $B_N$  due aperti rispettivamente in  $M$  e  $N$ , le cui chiusure siano entrambe diffeomorfe al disco chiuso  $n$ -dimensionale. Sia quindi  $\phi$  un fissato diffeomorfismo  $\phi : \partial B_N \rightarrow \partial B_M$ , si definisce **somma connessa** di  $M$  e  $N$  lo spazio che si ottiene rimuovendo le due palle aperte da  $M$  e  $N$  ed incollando successivamente i nuovi bordi sferici tramite la mappa  $\phi$ . Questo nuovo spazio viene indicato con  $M\#N$  ed è anch'esso una varietà  $n$ -dimensionale.*

$$M\#N = (M \setminus \setminus B_M) \cup (N \setminus \setminus B_N) / \sim$$

dove  $\sim$  è la relazione di equivalenza che identifica ogni  $x$  in  $\partial B_M$  con l'immagine  $\phi(x)$  in  $B_N$ .

**Oss.** Le ipotesi di connessione e orientabilità su  $M$  e  $N$  risultano fondamentali affinché  $M\#N$  sia bene definita:

- $M\#N$  dipende solo dalla classe di isotopia della mappa di incollamento  $\partial B_N \rightarrow \partial B_M$ , infatti due omeomorfismi qualsiasi  $S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  che abbiano la stessa orientazione sono isotopi. Inoltre, a meno di isotopia, esistono solo due diffeomorfismi di  $S^{n-1}$  in sé: la mappa identità che mantiene l'orientazione e la riflessione che la inverte. In conclusione, essendo  $M$  ed  $N$

orientate, affinché  $M\#N$  sia coerentemente orientato con  $M$  ed  $N$ , è necessario che la mappa d'incollamento inverta l'orientazione, per cui essa risulta ben determinata;

- prese due palle  $B'_m, B''_m \subset M$  esiste sempre un omeomorfismo che mantiene l'orientazione di  $M$  e che porti  $B'_m$  in  $B''_m$ , il quale risulta essere in effetti un'isotopia d'ambiente. Per tale ragione  $M\#N$  non dipende dalla scelta di  $B_M$  e  $B_N$ .

L'operazione di somma connessa è commutativa e possiede  $S^3$  come identità, infatti la decomposizione  $M = M\#S^3$  si ottiene scegliendo una sfera  $S$  che borda una palla in  $M$ . La somma connessa è anche associativa.

**Esempio 2.7.** La somma connessa di due copie di un toro  $T_1$  genera un corpo con manici  $T_2$  di genere 2 (Figura 2.8). Più in generale, la somma connessa di due corpi con manici di genere  $n$  e  $m$  genera un corpo con manici di genere  $m+n$ .

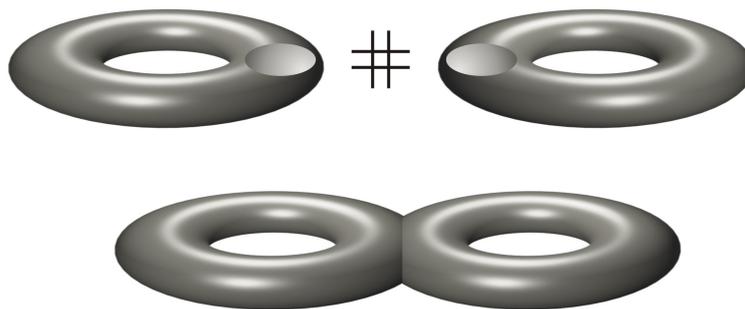


Figura 2.8: La somma connessa di due copie di  $T_1$  genera un  $T_2$ .

**Definizione 2.22.** Una 3-varietà connessa  $M$  si dice **prima** se  $M = P\#Q$  implica  $P = S^3$ , oppure  $Q = S^3$ .

Condizione leggermente più forte è quella di irriducibilità.

**Definizione 2.23.** Una sfera  $S$  embedded in una 3-varietà  $M$  si dice **essenziale** se non borda una palla e se non è una componente di bordo.

**Definizione 2.24.** Una 3-varietà  $M$  si dice **irriducibile** se non contiene sfere essenziali.

Nell'ambito dell'orientabile le due definizioni risultano molto simili, come attesta il seguente teorema.

**Teorema 2.13.** *L'unica 3-varietà prima orientabile che non sia irriducibile è  $S^1 \times S^2$ .*

**Corollario 2.13.1.** *Una varietà  $M$  è prima se e soltanto se è irriducibile o diffeomorfa a  $S^1 \times S^2$*

Dal momento che l'obiettivo è quello di decomporre le varietà in pezzi il più semplici possibili, ci si aspetta che la sfera sia uno di questi. Tale supposizione segue da un risultato classico di Alexander.

**Teorema 2.14** (Alexander). *Ogni 2-sfera embedded in  $\mathbb{R}^3$  borda una 3-palla embedded.*

Se ne deduce quindi che, in linea con le aspettative, la 2-sfera è sia prima che irriducibile.

Enunciamo dunque il primo fondamentale risultato sulla decomposizione.

**Teorema 2.15** (Decomposizioni in Primi). *Sia  $M$  una 3-varietà compatta, connessa e orientabile. Allora  $M$  è decomponibile come somma connessa di un numero finito di 3-varietà prime  $M = P_1 \# \dots \# P_n$ . Tale decomposizione è unica a meno di aggiunte o cancellazioni di  $S^3$ .*

Questo teorema risulta essere di grande importanza in quanto riduce lo studio delle 3-varietà a quello delle sole 3-varietà irriducibili, cosa che faremo grazie alla JSJ-decomposition.

## 2.5.2 JSJ-Decomposition

Dopo aver affrontato la decomposizione in primi, si è rivelata possibile e utile una ulteriore decomposizione canonica delle 3-varietà compatte, orientabili ed irriducibili, che consiste nel tagliare lungo tori piuttosto che lungo sfere. Tale scoperta la si deve a Jaco, Shalen e Johannson, da cui ha preso il nome.

Quello che ci serve ora sono delle caratteristiche più fini rispetto alla irriducibilità che ci semplifichino ulteriormente i nostri pezzi base.

**Definizione 2.25.** *Sia  $M$  una varietà. Una superficie  $S \subset M$ , non necessariamente connessa e senza componenti a disco, si dice **incompressibile** se è propriamente immersa e per ogni disco  $D \subset M$  con  $D \cup S = \partial D$  esiste un altro disco  $D' \subset S$  con  $\partial D = \partial D'$ .*

L'idea è che: se  $S$  è incompressibile e tagliamo lungo il bordo di  $D$  per poi tappare i bordi ottenuti con dei dischi, non otteniamo una topologia semplificata ma stiamo semplicemente tagliando via una sfera (Figura 2.9).

Elenchiamo alcuni fatti preliminari riguardo le superfici incompressibili. Sia  $M$  una varietà connessa compatta orientabile e sia  $S \subset M$  una superficie.

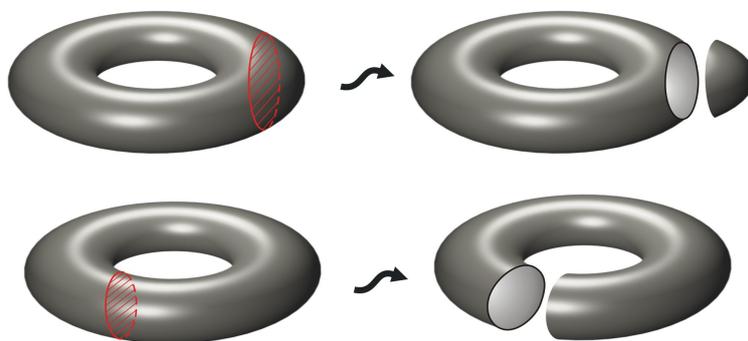


Figura 2.9: Esempio di disco che taglia via una sfera e di disco che semplifica il toro.

1.  $S$  è incompressibile se e solo se le sue componenti sono incompressibili.
2. Se  $S$  è 2-sided, allora  $S$  è incompressibile se e solo se la mappa  $\pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M)$  indotta dall'inclusione è iniettiva, dove  $\pi_1(X)$  indica il gruppo fondamentale di una varietà  $X$ .
3. Non esistono superfici incompressibili in  $\mathbb{R}^3$ , o equivalentemente in  $S^3$ .
4. Uno toro  $T$  2-sided embedded in  $M$  irriducibile è compressibile, *i.e.* non incompressibile, se e solo se o  $T$  borda un toro solido  $S^1 \times D^2$  embedded in  $M$ , o  $T$  è contenuto in una palla dentro  $M$ .
5. Se  $S$  è incompressibile, allora  $M$  è irriducibile se e solo se  $M \setminus \setminus S$  è irriducibile.

**Teorema 2.16.** *Sia  $M$  una varietà compatta irriducibile, allora  $\exists C_m \in \mathbb{N}$  tale che, se  $S = S_1 \cup \dots \cup S_n$  è una famiglia di superfici chiuse connesse e incompressibili  $S_i \subset M$  dove nessuna componente di  $M \setminus \setminus S$  sia un prodotto  $T \times I$ , con  $T$  superficie chiusa, allora  $n \leq C_m$ . In altre parole esiste un limite al numero di componenti di tale famiglia  $S$ .*

**Definizione 2.26.** *Una varietà irriducibile  $M$  si dice **atoroidale** se ogni toro incompressibile è isotopo ad una qualche componente di  $\partial M$ .*

**Corollario 2.16.1.** *In una varietà compatta connessa irriducibile  $M$  esiste un insieme finito  $T$  di tori disgiunti incompressibili tali che ogni componente di  $M \setminus \setminus T$  sia atoroidale e diversa da  $T \times [0, 1]$ .*

**Oss.** Intuitivamente possiamo dire che le varietà atoroidali stanno ai tori incompressibili come le varietà irriducibili stanno alle sfere essenziali. A tal proposito, analogamente alla decomposizione in primi, aspiriamo a tagliare lungo tori

incompressibili fino a rimanere solo pezzi atoroidali. In realtà, quest'ultimo tipo di decomposizione ci fornirà o componenti atoroidali, o particolari superfici dette varietà Seifert, sufficientemente semplici per cui non è necessaria una ulteriore decomposizione.

**Definizione 2.27.** *Siano  $(p, q) \in \mathbb{N}$  interi coprimi. Definiamo **toro  $(p, q)$ -fibrato** la varietà ottenuta da un cilindro solido  $D^2 \times I$  incollando le due componenti di bordo dopo una rotazione di un angolo  $2\pi \frac{p}{q}$ . Ciò non è altro che un toro solido  $D^2 \times S^1$  con una foliazione in cerchi, dette **fibre**, proveniente dalla foliazione del cilindro iniziale attraverso segmenti  $\{p\} \times I$ .*

**Definizione 2.28.** *Si definisce **varietà di Seifert** una 3-varietà  $M$  con una decomposizione in cerchi disgiunti tale che ogni punto abbia un intorno isomorfo, attraverso un isomorfismo che mantenga le fibre, ad un toro  $(p, q)$ -fibrato.*

Abbiamo ora tutti gli strumenti per enunciare il famoso risultato di Jaco-Shalen e Johansson.

**Teorema 2.17** (JSJ-Decomposition). *Ogni 3-varietà irriducibile  $M$  ammette un insieme finito di tori incompressibili disgiunti  $T_1, \dots, T_n$  tale che le componenti connesse di  $M \setminus (T_1 \cup \dots \cup T_n)$  siano o atoroidali o superfici di Seifert. Il più piccolo insieme di tali tori è unico a meno di isotopia.*

**Oss.** Con l'espressione il più piccolo si intende il minore rispetto all'inclusione di insiemi.

**Oss.** Un particolare per niente banale è la canonicità di tale decomposizione. In particolare si osserva che l'unicità è piuttosto forte in quanto è a meno di isotopia e non di diffeomorfismo.

Concludiamo il capitolo con un accenno ai recenti lavori di Thurston e Perelman, grazie ai quali la Decomposizione Canonica si è rivelata la più efficace tecnica descrittiva delle 3-varietà.

Alla fine degli anni '70 Thurston inizia ad occuparsi di topologia della dimensione bassa, più precisamente di 3-varietà. In questi anni il matematico statunitense porta il suo contributo più importante alla geometria contemporanea, che gli varrà la medaglia Fields nel 1982: la scoperta di una forte interconnessione fra la topologia delle 3-varietà e la geometria iperbolica.

Thurston mostra in particolare la possibilità di costruire molte famiglie infinite di 3-varietà iperboliche tramite la tecnica topologica della chirurgia di Dehn amalgamata con la tecnica delle triangolazioni ideali di complementari di nodi in  $S^3$  (si veda il capitolo successivo per maggiori dettagli). In un certo senso, egli mostra che la maggior parte delle 3-varietà consta di varietà iperboliche. La ricchezza della teoria e la facilità con cui vengono quindi costruite nuove varietà iperboliche porta Thurston a formulare la congettura di geometrizzazione.

**Teorema 2.18** (Congettura di Geometrizzazione). *Una 3-varietà irriducibile  $M$  ammette un insieme finito di tori incompressibili disgiunti  $T_1, \dots, T_n$  tale che l'interno di ogni componente connessa di  $M \setminus (T_1 \cup \dots \cup T_n)$  sia dotato di una struttura geometrica a volume finito.*

Senza entrare nel dettaglio notiamo che tale congettura semplifica molto lo studio delle 3-varietà in quanto esistono solo 8 diverse strutture geometriche in dimensione 3, tra cui appunto quella iperbolica, le quali permettono in un certo senso di descrivere le 3-varietà. Thurston annunciò la congettura nel 1982 e nel frattempo la dimostrò per qualsiasi 3-varietà che contenesse una superficie incompressibile. La congettura restò quindi aperta solo per quelle varietà irriducibili che non vengono ulteriormente decomposte dalla JSJ. Più in particolare, la congettura constava di tre parti indipendenti:

1. **Congettura di Poincaré.** Ogni 3-varietà semplicemente connessa e chiusa è diffeomorfa ad una sfera tridimensionale.
2. **Congettura space-form sferica.** Una 3-varietà con gruppo fondamentale finito è ellittica, cioè un quoziente di  $S^3$  per un sottogruppo finito del gruppo ortogonale speciale  $SO(4)$ .
3. **Congettura di iperbolizzazione.** Una 3-varietà irriducibile chiusa con gruppo fondamentale infinito e non contenente sottogruppi isomorfi a  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  ammette una metrica iperbolica.

Fra il 2002 e il 2003 Perelman dette una dimostrazione della congettura di geometrizzazione che risolse in un colpo solo tutte e tre le sotto-congetture.



# Capitolo 3

## $\mathcal{T}_3$ e triangolazione ideale di complementari di nodi alternanti

In questo capitolo ci dedicheremo ai seguenti fatti:

- definizione di una classe  $\mathcal{T}_3$  di 3-varietà e il suo legame con le strutture iperboliche;
- analisi delle 3-varietà realizzabili in  $\mathcal{T}_3$ ;
- determinazione di una vasta classe di link in  $S^3$  il cui complementare è realizzabile costruttivamente in  $\mathcal{T}_3$  ed analisi dell'algoritmo di triangolazione.

Tutte le nozioni di questo capitolo sono state tratte da [Be-Pe].

### 3.1 Definizione di $\mathcal{T}_3$ e principali caratteristiche

**Definizione 3.1.** Denotiamo con  $\widetilde{\mathcal{T}}_3$  la classe di spazi topologici  $\widetilde{Q}$  ottenuti con la seguente procedura:

- si fissi un numero finito  $n$  di copie di 3-simplessi **standard**, i.e. tetraedri, denotati  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ ;
- per ogni  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  differenti 2-facce di due tetraedri, oppure anche lo stesso a patto che non sia la medesima faccia, sia  $f_{(\sigma_1, \sigma_2)}$  un isomorfismo simpliciale di  $\sigma_1$  in  $\sigma_2$  tale che se  $f_{(\sigma_1, \sigma_2)} \neq \emptyset$  allora  $f_{(\sigma_2, \sigma_1)} \neq \emptyset$  e  $f_{(\sigma_2, \sigma_1)} = f_{(\sigma_1, \sigma_2)}^{-1}$ ;
- la relazione  $\sim$  su  $\bigsqcup_{i=1}^n \Delta_i$  definita da:

$$x \sim y \text{ se e solo se } x = y \text{ oppure per qualche faccia } \sigma_1 \text{ e } \sigma_2$$

abbiamo che  $x \in \sigma_1$ ,  $y \in \sigma_2$ ,  $f_{(\sigma_1, \sigma_2)} \neq \emptyset$  e  $f_{(\sigma_1, \sigma_2)}(x) = y$

è una relazione d'equivalenza, e  $\tilde{Q}$  è omeomorfo allo spazio topologico quoziente

$$\left( \bigsqcup_{i=1}^n \Delta_i \right) / \sim$$

**Oss.** La costruzione di  $\tilde{Q}$  non è ovviamente unica, tuttavia, per semplicità, quando considereremo un elemento di  $\tilde{\mathcal{T}}_3$  ci riferiremo implicitamente alla sua realizzazione tramite la costruzione sopra elencata, il che non è limitante nei confronti di ciò che diremo. Data  $\tilde{Q} \in \tilde{\mathcal{T}}_3$ , indicheremo sempre con  $\pi$  la proiezione dell'unione dei tetraedri in  $\tilde{Q}$ .

**Oss.** Ogni  $\tilde{Q} \in \tilde{\mathcal{T}}_3$  risulta naturalmente dotata di una struttura tridimensionale di cella complessa, in particolare abbiamo tante 3-celle quanti i tetraedri fissati inizialmente (si veda 3.3.1 per maggiori dettagli). Analogamente all'osservazione precedente, la struttura di cella complessa non è unica, d'altra parte faremo sempre riferimento alla realizzazione fissata di  $\tilde{Q}$  come unione di tetraedri con le facce incollate.

**Definizione 3.2.** Sia  $\tilde{Q} \in \tilde{\mathcal{T}}_3$  e sia  $x_0$  uno dei suoi vertici. Sia  $v$  il vertice di un tetraedro  $\Delta$  tale che  $\pi(v) = x_0$  e consideriamo la doppia suddivisione baricentrica dei lati aventi come vertice  $v$ . Siano  $w_1, w_2, w_3$  i vertici di tale suddivisione più vicini a  $v$ . Siano  $L(v)$  il triangolo avente per vertici  $w_1, w_2, w_3$  e con  $U(v)$  il tetraedro di vertici  $v, w_1, w_2, w_3$  allora definiamo **link** e **intorno conico di  $x_0$  in  $\tilde{Q}$**  rispettivamente:

$$L(x_0) = \pi\left( \bigcup_{v \in \pi^{-1}(x_0)} L(v) \right) \quad x_0 \cdot L(x_0) = \pi\left( \bigcup_{v \in \pi^{-1}(x_0)} U(v) \right)$$

**Oss.** Il motivo per cui si sceglie la seconda suddivisione baricentrica invece che la prima è che due vertici dello stesso tetraedro potrebbero essere proiettati nello stesso vertice di  $\tilde{Q}$ , per cui abbiamo bisogno di effettuare una doppia suddivisione per assicurarci di evitare sovrapposizioni.

**Definizione 3.3.** Definiamo  $\mathcal{T}_3$  la classe di tutte le varietà non compatte orientate  $M$  senza bordo che siano diffeomorfe ad un qualche elemento  $\tilde{Q} \in \tilde{\mathcal{T}}_3$  privato dei vertici, dove  $\tilde{Q}$  è tale che per ogni vertice  $x_0 \in \tilde{Q}$  il link  $L(x_0)$  in  $\tilde{Q}$  sia diffeomorfo al toro.

**Oss.** Se  $M \in \mathcal{T}_3$  allora  $M$  è diffeomorfa alla varietà topologica ottenuta rimuovendo da  $\tilde{Q}$  l'intorno conico dei vertici descritti sopra. Ne segue che  $M$  è l'interno di una varietà  $\bar{M}$  compatta orientata ( $\tilde{Q}$  privata dell'interno degli interni conici dei vertici) il cui bordo consiste di tanti tori quanti i vertici di  $\tilde{Q}$ .

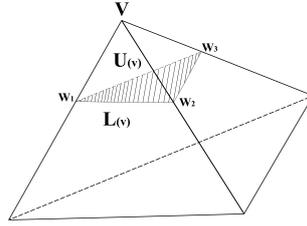


Figura 3.1: Link del vertice di un tetraedro.

Nel seguito, ogniqualvolta considereremo un elemento  $M$  di  $\mathcal{T}_3$  denoteremo sempre con  $\bar{M}$  la varietà con bordo descritta sopra, e con  $\tilde{Q}$  l'elemento di  $\tilde{\mathcal{T}}_3$  da cui  $M$  è ottenuta rimuovendo i vertici.

*Oss.* Si noti che  $\tilde{Q}$  è ottenibile da  $\bar{M}$  collassando il bordo torico a punti.

L'importanza della classe  $\mathcal{T}_3$  risiede in due fatti principali:

1. dato  $Q \in \mathcal{T}_3$ , esso possiede una presentazione tale per cui è possibile studiare l'insieme delle strutture iperboliche associabili ad esso;
2. tutte le 3-varietà non compatte  $M$  che sono l'interno di una varietà compatta  $\bar{M}$  il cui bordo è torico, sono realizzabili come un elemento di  $\mathcal{T}_3$

Sebbene di enorme importanza, non svilupperemo il primo punto, in quanto richiederebbe una conoscenza approfondita dello studio delle strutture iperboliche; ci occuperemo invece della seconda importante caratteristica di  $\mathcal{T}_3$  nelle prossime sezioni.

**Definizione 3.4.** Se  $M \in \mathcal{T}_3$ , si dice che  $\tilde{Q}$  privata dell'interno degli intorni conici dei vertici è una **triangolazione ideale** di  $M$ .

## 3.2 3-varietà realizzabili in $\mathcal{T}_3$

Mostriamo ora che le condizioni necessarie affinché una varietà appartenga a  $\mathcal{T}_3$ , sono anche sufficienti.

**Definizione 3.5.** Sia  $|K|$  un poliedro finito con una triangolazione  $K$ , e  $K_1$  un sotto-poliedro di  $K$ . Diremo che esiste un **collasso elementare** di  $K$  a  $K_1$  se esiste un semplice  $\Delta$  di  $K$  e una faccia  $F$  di  $\Delta$ , che non sia una faccia di nessun altro semplice in  $K$ , tale che

$$|K_1| = |K| \setminus (\text{Int}(\Delta) \cup \text{Int}(F))$$

dove  $\text{Int}(A)$  indica il semplice  $A$  privato delle sue facce.

Diremo che  $K$  **collassa** a  $K_1$  e scriveremo  $K \searrow K_1$  se è possibile ottenere  $K_1$  da  $K$  con una sequenza finita di collassi elementari.

Ricordiamo che un intorno regolare di un punto  $x \in |K|$  è ottenibile prendendo il cono di vertice  $x$  sul  $lk(x, K)$ .

**Definizione 3.6.** Diremo che  $K$  è **quasi-standard** se ogni punto di  $|K|$  ha un intorno regolare in  $|K|$  omeomorfo ad uno delle tre tipologie *I*, *II* e *III* rappresentate in Figura 3.2.

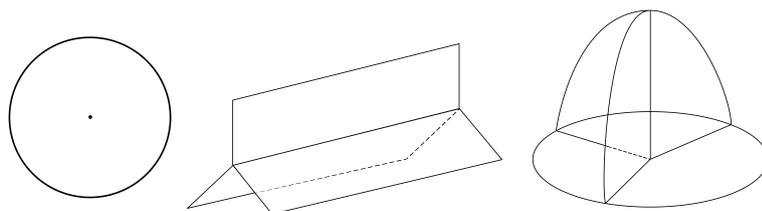


Figura 3.2: Le tre tipologie di intorno di un punto in un poliedro quasi-standard, denotate rispettivamente con *I*, *II* e *III*.

Notiamo che un intorno di tipo *II* può essere visto come il prodotto di un certo  $Y$  con un intervallo chiuso, mentre un intorno di tipo *III* è dato dal cono sull'1-scheletro di un tetraedro il cui vertice è il suo baricentro.

**Oss.** Se  $K$  è quasi-standard, allora  $K$  è stratificato in modo naturale da sottopoliedri chiusi  $K_0$  e  $K_1$ , il primo formato da punti di tipo *III* e il secondo da punti di tipo *II* e *III*, tali che:

$$K_0 \subset K_1 \subset K$$

Si verifica facilmente nel caso *II* che gli estremi di un segmento non possono essere di tipo *I* e dunque  $K_1$  è un sotto-poliedro, mentre per  $K_0$  è immediato (Figura 3.3).

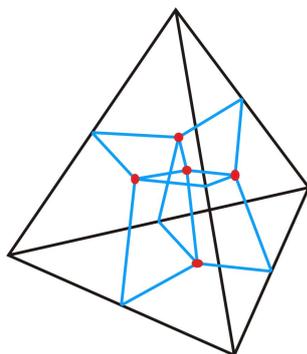


Figura 3.3: Stratificazione di un poliedro quasi standard. In rosso  $K_0$  e in blu  $K_1 \setminus K_0$

**Definizione 3.7.** Con la medesima notazione, diremo che  $K$  è *standard* se tutte le componenti di  $|K_1| \setminus |K_0|$  sono diffeomorfe a segmenti aperti e tutte le componenti di  $|K| \setminus |K_1|$  sono diffeomorfe a dischi aperti.

Se  $K$  è standard chiameremo i punti di tipo III *vertici* di  $K$ , ricordando che non tutti gli 0-simplessi di  $K$  sono necessariamente vertici.

**Definizione 3.8.** Sia  $M$  una 3-varietà compatta con bordo non vuoto, e sia  $H$  una triangolazione fissata di  $M$ . Si dice *spina standard*  $K$  in  $M$  un sotto-poliedro di  $H$  che sia standard e tale che  $H \searrow K$ .

**Oss.** Nel caso analogo delle definizioni di spina standard e grafo duale per le superfici, il grafo duale è una spina standard della superficie privata dei vertici (Figura 3.4).

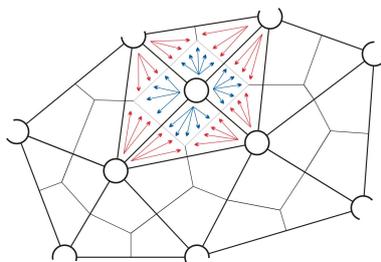


Figura 3.4: Analogia fra spina standard e grafo duale in una superficie triangolata privata dei vertici.

L'importanza delle spine standard viene dal prossimo risultato, punto di partenza della teoria delle spine standard.

**Teorema 3.1.** (i) Siano  $M_1$  e  $M_2$  3-varietà compatte triangolate con bordo non vuoto. Se  $M_1$  e  $M_2$  hanno spine standard omeomorfe, allora esse sono omeomorfe; (ii) tutte le 3-varietà compatte con bordo non vuoto ammettono spine standard rispetto ad una opportuna triangolazione originale.

Il successivo teorema mostra invece la stretta relazione che c'è tra spine standard ed elementi di  $\mathcal{T}_3$ .

**Teorema 3.2.** Sia  $\bar{M}$  una 3-varietà compatta con bordo non vuoto formato da tori, e sia  $M$  la parte interna di  $\bar{M}$ , allora:

- (i) a ogni spina standard di  $\bar{M}$  con  $n$  vertici è possibile associare una realizzazione di  $M$  come elemento di  $\mathcal{T}_3$  usando  $n$  tetraedri;
- (ii) per ogni realizzazione di  $M$  come elemento di  $\mathcal{T}_3$  usando  $n$  tetraedri è possibile associare una spina standard di  $\bar{M}$  a  $n$  vertici.

La seguente diretta conseguenza dei teoremi 3.1 e 3.2 mette in luce la vastità della classe  $\mathcal{T}_3$ .

**Corollario 3.2.1.** *Sia  $M$  una 3-varietà che sia la parte interna di una varietà compatta  $\overline{M}$  con bordo torico non vuoto, allora  $M$  è realizzabile come elemento di  $\mathcal{T}_3$  usando tanti tetraedri quanti sono i vertici di una spina standard per  $\overline{M}$ .*

### 3.3 Triangolazione del complementare di link alternanti

In questa sezione descriveremo un'esplicita realizzazione del complementare di una vasta gamma di link in  $S^3$ . Nel fare ciò utilizzeremo uno strumento topologico che necessitiamo di definire.

#### 3.3.1 CW-complessi finiti

**Definizione 3.9.** *Si definisce CW-complesso finito di dimensione  $n$  uno spazio topologico  $X$  accoppiato, per ogni  $k \in \mathbb{Z}$ , con  $0 \leq k \leq n$ , a degli insiemi finiti di mappe  $\phi_i^k : D^k \rightarrow X$ , con  $i \in A_k$  opportuno insieme di indici, tali che:*

$$(a) X = \bigcup_{\substack{0 \leq k \leq n \\ i \in A_k}} \phi_i^k(D^k);$$

$$(b) \text{ se } \phi_i^k(\text{Int}(D^k)) \cap \phi_j^h(\text{Int}(D^h)) \neq \emptyset \implies k = h \text{ e } i = j;$$

$$(c) \text{ posto } X^q := \bigcup_{\substack{0 \leq k \leq q \\ i \in A_k}}, \text{ per ogni } h \in \mathbb{N} \text{ con } 0 < h \leq n, \text{ e per ogni } i \in A_h, \text{ vale}$$

$$\phi_i^h(S^{h-1}) \subset X^{h-1}$$

**Definizione 3.10.** *Con la notazione precedente, ogni sottospazio  $c_i^k := \phi_i^k(D^k)$  è detto  $k$ -cella e  $\phi_i^k$  ne è la **mappa caratteristica**.  $X^q$  è detto  $q$ -scheletro di  $X$  e l'insieme delle  $k$ -celle con le rispettive mappe caratteristiche si dice **decomposizione cellulare** di  $X$ .*

**Oss.** Un CW-complesso finito è necessariamente compatto e ogni complesso simpliciale finito, con il suo corpo, è un CW-complesso finito.

### 3.3.2 Realizzazione algoritmica del complementare di un link alternante in $\mathcal{T}_3$

Abbiamo ora tutti le tecniche necessarie per esplicitare una triangolazione ideale del complementare di molti link in  $S^3$ .

Sia  $L$  un link in  $S^3$  fissato rappresentato da una proiezione regolare su un piano orizzontale  $H \subset \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} = S^3$ . Tale proiezione risulta essere un grafo finito  $G$  i cui vertici sono gli incroci, e le sovrapposizioni sono specificate con la simbologia usuale. Ci riferiremo a  $H \cup \{\infty\} = S^2$ , inoltre chiameremo **regioni** le componenti di  $S^2 \setminus G$ .

Durante la costruzione faremo alcune ipotesi riguardo a  $G$ , alcune di queste sono di carattere tecnico e non riducono la generalità della costruzione, *i.e.* è sempre possibile trovare un altro link isomorfo a  $L$  la cui proiezione soddisfi tali ipotesi; altre invece limiteranno la generalità della costruzione per cui le evidenzieremo con dei numeri Romani. Fra queste ci sarà anche la condizione che  $G$  abbia incroci alternati, tuttavia per dare maggiore visibilità al motivo per cui daremo certe condizioni, esse verranno introdotte passo a passo durante la costruzione nei punti cruciali.

Prima di tutto assumiamo che la proiezione non possa essere semplificata in modo banale: ossia che ogni vertice di  $G$  incontri la chiusura di quattro regioni e che non esistano regioni con solo due lati di cui uno passa sotto a entrambi i vertici. Assumiamo inoltre che  $L$  non sia un nodo banale nella sua usuale proiezione, *i.e.* che  $G$  abbia incroci (Figura 3.5).

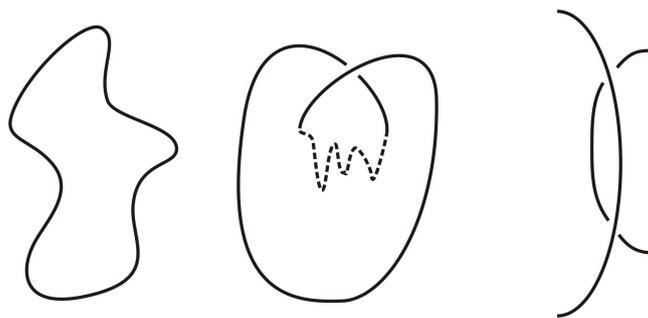


Figura 3.5: Esempi rispettivamente di un nodo banale e di due nodi semplificabili in modo banale.

Diamo la prima ipotesi importante:

I.  $G$  è connesso.

*Oss.* Si verifica facilmente che la condizione I equivale a chiedere che ogni regione sia diffeomorfa al disco aperto. Inoltre, poiché ogni incrocio incontra la

chiusura di quattro regioni differenti,  $I$  implica che la chiusura di ogni regione sia omeomorfa al disco chiuso.

*Oss.* L'ipotesi  $I$  risulta immediatamente verificata se  $L$  è un nodo, ma non lo è in generale. Inoltre siamo obbligati a fare tale richiesta se vogliamo che il complementare del link sia irriducibile. Infatti, se  $G$  fosse disconnesso, potremmo trovare due sotto-link non vuoti di  $L$  separabili da una 2-sfera embedded.

Dato che  $G$  è un grafo in  $S^2$ , una regione  $D$  di  $S^2 \setminus G$  può essere trattata come un poligono. Nel fare ciò, chiameremo vertici di  $D$  gli incroci che incontrano  $\overline{D}$ , e lati di  $D$  i lati di  $G$  intersecanti  $\overline{D}$ .

*Oss.*  $S^3 \setminus S^2$  ha due componenti connesse omeomorfe alla 3-palla  $D^3$ , entrambe bordate da  $S^2$ . Grazie alle assunzioni fatte in precedenza,  $G$  induce una decomposizione cellulare di  $S^3$  dove:

- le 0-celle sono gli incroci;
- le 1-celle sono i lati di  $G$ ;
- le 2-celle sono le regioni;
- le 3-celle sono le componenti di  $S^3 \setminus S^2$ .

Il primo passo della costruzione consiste nell'associare a  $G$  un'altra rappresentazione di  $S^3$  come cella complessa avente le proprietà:

- $L$ , o meglio un link isomorfo a  $L$ , è un sotto-complesso di tale complesso;
- ci sono solamente due 3-celle;

Diamo innanzitutto un'idea generale della costruzione, per poi rifinire i dettagli formali.

La chiave dell'algoritmo sta nel cercare di semplificare gli incroci, e per fare ciò modificheremo  $G$  in un piccolo intorno di ogni incrocio in questa maniera:

- dal momento che sappiamo quale ramo passa sopra all'altro, li discostiamo leggermente alzandone uno e abbassando l'altro, e poi aggiungiamo un segmento verticale che unisca i due rami (Figura 3.6).

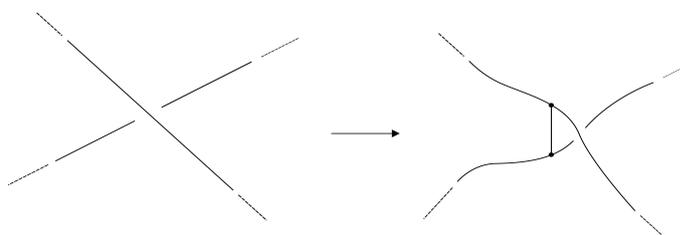


Figura 3.6: Come semplificare un incrocio.

- poniamo come:
  - 0-celle gli estremi di tale segmento
  - 1-cella il segmento stesso e i rami di  $G$  leggermente modificati vicino all'incrocio;
  - 2-celle le regioni alterate nelle vicinanze dell'incrocio (Figura 3.7);
  - per le modifiche che abbiamo fatto intorno al vertice di  $G$ , ciò che è avanzato consiste esattamente in due copie di  $D^3$ , che prenderemo come 3-celle.

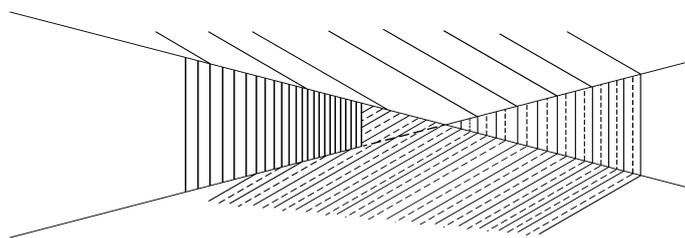


Figura 3.7: Vista delle 2-celle vicino ad un incrocio.

Vediamo dunque una descrizione formale della costruzione proposta sopra. Prima di tutto fissiamo intorno a due a due disgiunti degli incroci di  $G$ .

*Oss.* Dal momento che gli 1, 2 e 3-scheletri delle celle complesse che stiamo per costruire differiscono dalla decomposizione cellulare di  $S^3$  associata a  $G$  solo all'interno di questi intorni, possiamo trattare gli incroci singolarmente uno alla volta, e lavorare vicino ad essi senza curarci del resto.

Per ogni incrocio fissato, consideriamo un intorno quadrato  $Q$  come in Figura 3.8, e lo rimuoviamo da  $S^2$ . Fissiamo poi un'orientazione su  $\partial Q$  e scegliamo un vertice di  $Q$  nel ramo che passa sotto quell'altro.

*Oss.* Ci sono due possibili scelte per l'orientazione e due per il vertice, ma si verifica immediatamente che la nostra costruzione è indipendente da entrambe.

Partendo dal vertice fissato e seguendo l'orientazione, nominiamo i lati di  $Q$  come  $a, b, c, d$ . Consideriamo ora il rettangolo  $R$  come in Figura 3.8, e incolliamo esso a  $S^2 \setminus Q$  lungo  $a$  e  $c$ , capovolgendo di mezzo giro quest'ultimo, in modo tale che l'arco  $q_3 \cup q_4$  passino sotto l'arco  $q_1 \cup q_2$  (Figura 3.9).

Le curve

$$k_1 = q_1 \cup g \cup q_4 \cup b \quad k_2 = q_2 \cup g \cup q_3 \cup d$$

sono commini chiusi, tali per cui è possibile trovare insiemi disgiunti  $D_1$  e  $D_2$  aventi chiusura diffeomorfa al disco chiuso, che non incontrino  $(S^2 \setminus Q) \cup R$  e aventi rispettivamente  $k_1$  e  $k_2$  come bordo.

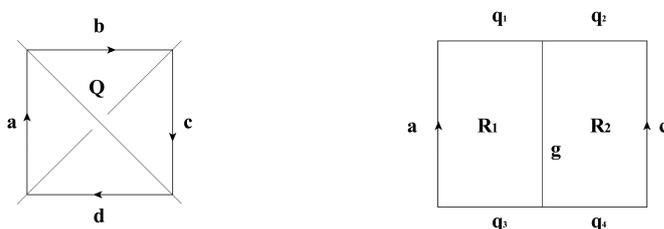


Figura 3.8: Intorno quadrato  $Q$  che rimuoviamo da  $S^2$  e rettangolo  $R$  che incolleremo.

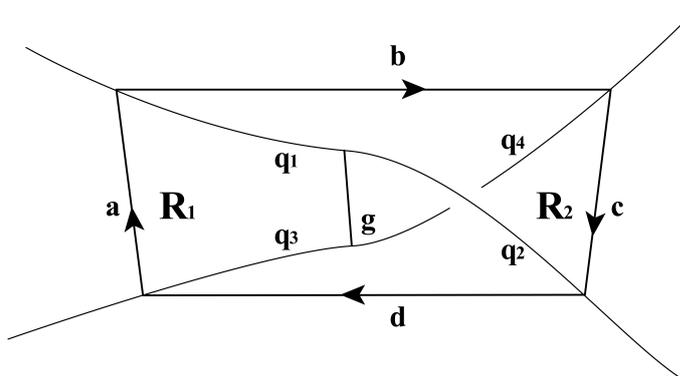


Figura 3.9: Il rettangolo  $R$  incollato nella posizione corretta.

Supponiamo di aver effettuato tale modifica per ogni incrocio e descriviamo ancora una volta la decomposizione cellulare di  $S^3$ , omettendo di specificare le mappe caratteristiche in quanto è evidente per costruzione che esistano mappe d'incollamento continue da  $\partial D^i$  all'unione di celle di dimensione al più  $i - 1$ :

- le 0-celle sono gli estremi dei segmenti di tipo  $g$ ;
- le 1-celle sono i lati di tipo  $g$  e i segmenti ottenuti rimpiazzando ogni ramo congiungente due incroci in  $G$  con la sua intersezione con il quadrato e l'opportuno segmento di tipo  $q_i$ , da entrambi i lati.
- le 2-celle sono i dischi ottenuti modificando le regioni di  $S^2 \setminus G$  vicino all'incrocio, sostituendo la loro intersezione con il quadrato con l'opportuno disco di tipo  $R_i$  o  $D_i$ , per tutti i vertici. La Figura 3.10 mostra due pezzi di 2-cella vicino ad un incrocio, corrispondenti a due differenti regioni.
- le 3-celle sono le componenti connesse di  $S^3$  privato di tutte le celle di dimensione inferiore. Come abbiamo già sottolineato, tali componenti sono due 3-palle aperte.

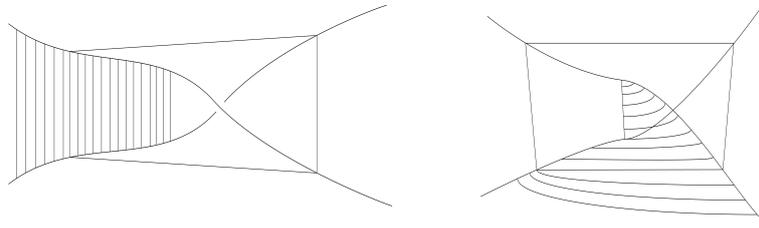


Figura 3.10: Due regioni modificate.

Da questo momento in poi denoteremo con  $L$  il link isomorfo a quello iniziale che è sotto-complesso della decomposizione cellulare di  $S^3$  appena descritta. Consideriamo quindi lo spazio quoziente  $S^3_{/L} := S^3_{/\sim L}$ , ossia lo spazio quoziente di  $S^3$  con la relazione d'equivalenza:

$$x \sim y \Leftrightarrow x = y \text{ oppure sia } x \text{ che } y \text{ stanno nella stessa componente di } L.$$

Denotiamo con  $\pi$  la proiezione di  $S^3$  in  $S^3_{/L}$ .

La decomposizione cellulare su  $S^3$  ne induce uno su  $S^3_{/L}$  come segue:

- $S^3_{/L}$  ha tante 0-celle quante le componenti di  $L$ ; inoltre  $S^3_{/L}$  privato delle 0-celle è canonicamente omeomorfo a  $S^3 \setminus \setminus L$ ;
- $S^3_{/L}$  ha tante 1-celle quanti gli incroci di  $G$ , e precisamente esse sono l'immagine attraverso  $\pi$  dei lati di tipo  $g$ ;
- le 2-celle di  $S^3_{/L}$  corrispondono esattamente a quelle della decomposizione cellulare di  $S^3$ , e dunque alle regioni di  $S^2 \setminus \setminus G$ ;
- in  $S^3_{/L}$  abbiamo le medesime 3-celle, che indicheremo con  $B_+$  e  $B_-$  in quanto provengono dal semispazio superiore ed inferiore rispetto al piano  $H$ .

Così facendo abbiamo esplicitato il numero di celle di  $S^3_{/L}$ , resta dunque da determinare le funzioni d'incollamento. Data l'evidenza degli incollamenti fra le 1-celle e le 0-celle, esamineremo soltanto i casi di dimensione superiore.

Cominciamo fissando un'orientazione arbitraria dei segmenti di tipo  $g$  in  $S^3$ , la quale ne indurrà una sulle corrispondenti 1-celle di  $S^3_{/L}$ .

*Oss.* Come è usuale fare, se  $\gamma$  e  $\delta$  sono due cammini tali che il punto d'arrivo del primo coincide con il punto di partenza del secondo, indichiamo con  $\gamma \cdot \delta$  il cammino ottenuto percorrendo prima  $\gamma$  e poi  $\delta$ , e con  $\gamma^{-1}$  il cammino  $\gamma$  percorso a ritroso.

Consideriamo un incrocio come in Figura 3.8 e fissiamo un'orientazione dei lati di  $Q$  in base all'orientazione data a  $g$ , nella modo naturale descritto in Figura 3.11. Siamo ora in grado di descrivere la funzione di incollamento di un disco corrispondente ad una regione  $D$ .

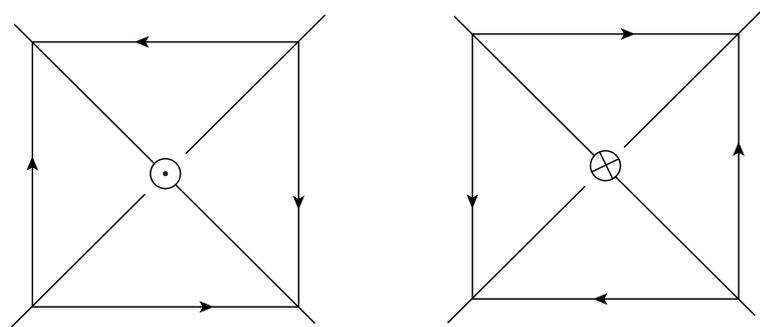


Figura 3.11: Come associare l'orientazione dei lati all'orientazione di  $g$ . Come di consueto  $\otimes$  indica un vettore verticale che punta in basso, mentre  $\odot$  un vettore verticale che punta in alto.

Siano  $g_1, \dots, g_k$  i segmenti associati ai vertici di  $D$ ; per ognuno di tali vertici ci sarà un lato dell'intorno quadrato  $Q$  che giace interno a  $D$ , scriviamo quindi il simbolo  $g_i$  vicino a tale lato orientato che corrisponde allo stesso incrocio di  $g_i$ . Il disco ottenuto rimuovendo da  $D$  i quadrati aperti è ora il bordo di un poligono con  $2k$  lati, di cui  $k$  lati alternati hanno un elemento  $g_*$  scritto di fianco, mentre gli altri  $k$  li collassiamo a punti. Il bordo del risultante poligono a  $k$  lati, è in effetti un cammino chiuso rappresentato da un'espressione del tipo  $g_1^{\pm 1}, \dots, g_k^{\pm 1}$ . Tale espressione rappresenta in modo naturale anche un cammino chiuso nell'1-scheletro di  $S^3/L$ , per cui la mappa caratteristica della 2-cella corrispondente a  $D$  è data dall'omeomorfismo fra  $S^1 = \partial D^2$  e tale cammino chiuso.

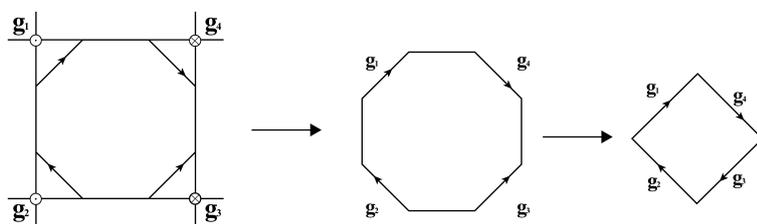


Figura 3.12: Come ottenere la funzione incollamento di una 2-cella. In questo esempio l'espressione risultante è  $g_1^{-1} \cdot g_2^{-1} \cdot g_3 \cdot g_4^{-1}$ .

L'esempio mostrato nella Figura 3.12 per  $k = 4$  chiarifica meglio i passaggi e mostra inoltre la naturalezza della costruzione. Sottolineiamo inoltre che l'uso di tanti dettagli tecnici nella costruzione sopra sono rivolti a mostrare che i passaggi necessari per la realizzazione di  $S^3_{/L}$  come elemento di  $\mathcal{F}_3$  sono effettuabili in maniera strettamente algoritmica.

A questo punto, prima di descrivere le mappe d'incollamento delle 3-celle, dobbiamo fare un'ulteriore ipotesi sul link  $L$  su cui ci soffermeremo un attimo per capirne la natura.

Dal momento che l'obiettivo è di rappresentare

$$S^3 \setminus L = S^3_{/L} \setminus \{0\text{-celle}\}$$

come un elemento di  $\mathcal{F}_3$ , e quindi  $S^3_{/L}$  come un elemento di  $\widetilde{\mathcal{F}}_3$ , è necessario ottenere una realizzazione di  $S^3_{/L}$  come cella complessa dove non esistano 2-celle fatte a **bigono**, *i.e.* una 2-cella incollata a due segmenti aventi gli stessi estremi (Figura 3.13), poiché tale situazione non può presentarsi in un elemento di  $\widetilde{\mathcal{F}}_3$ .

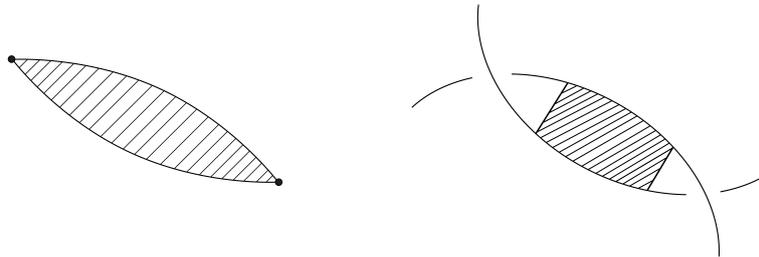


Figura 3.13: Un bigono e un esempio di situazione in cui si genera un bigono nella nostra realizzazione.

Nel caso in cui le orientazioni dei lati del bigono, che saranno segmenti di tipo  $g$ , siano concordi, possiamo identificare i due rami ed eliminare il bigono.

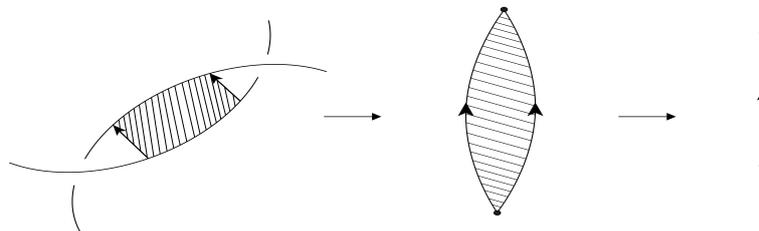


Figura 3.14: Eliminazione di un bigono i cui lati hanno la stessa orientazione.

*Oss.* Tale operazione in  $S^3_{/L}$  consiste nel contrarre una 2-cella ad un segmento, e possiamo farlo allargando le 2-celle attorno in modo tale che la nuova cella complessa ottenuta sia ancora una rappresentazione di  $S^3_{/L}$ .

Tuttavia, per poter effettuare tale eliminazione su tutti i bigoni, devono essere soddisfatte tre condizioni:

- (a) esiste almeno una regione che non sia un bigono;
- (b) le orientazioni dei segmenti  $g$  possono essere scelte in modo che due lati di ogni bigono abbiano orientazioni concordi;
- (c) nell'effettuare le eliminazioni non si ottiene mai un bigono i cui lati siano già identificati, *i.e.* tale bigono rappresenta una sfera.

Una condizione che ci assicura queste tre ipotesi è che bigoni diversi abbiano chiusure disgiunte, ossia in termini tecnici:

II. *I bigoni sono isolati.*

*Oss.* Tale richiesta è in realtà leggermente più forte del necessario, tuttavia non aggiungeremo dettagli al riguardo e ci limiteremo a questo caso semplificato.

*Oss.* Si verifica immediatamente che le orientazioni di lati di un bigono sono concordi se e soltanto se i due vertici hanno simboli diversi ( $\odot$  e  $\otimes$ ).

Supponiamo dunque di poter eliminare tutti i bigoni nella decomposizione cellulare di  $S^3/L$ . Ne segue che le 2-celle di tale rappresentazione avranno almeno 3 lati nel bordo.

Passiamo ora alla descrizione delle mappe di incollamento di  $B_+$  e  $B_-$  al 2-scheletro. In linea con la presentazione della costruzione generale, tutto ciò che faremo potrà essere riprodotto algebricamente partendo da  $G$ .

Come visto prima, ogni 2-cella  $D$  in  $S^3/L$  è rappresentata da un'espressione del tipo  $g_1^{\pm 1}, \dots, g_k^{\pm 1}$ , che rappresenta il cappio nell'1-scheletro a cui il bordo di  $D$  è incollato.

*Oss.* Sottolineiamo che, in seguito alle assunzioni precedenti, nessuna espressione del tipo  $g_1 \cdot g_2$  potrà verificarsi, e nel caso si avesse qualcosa del tipo  $g_1 \cdot g_2^{-1}$ , potremo eliminare la 2-cella e porre  $g_1 = g_2$ .

$D$  è rappresentato da un poligono a  $k$  lati,  $k \geq 3$ , con  $g_*^{\pm 1}$  scritto vicino ad ogni lato. Fissare la mappa caratteristica per  $B_+$  significa dare una funzione da  $S^2$  al 2-scheletro. Tale funzione si ottiene nel seguente modo:

- dato un incrocio associato ad un segmento  $g$  come in Figura 3.15, **definiamo adiacenti lungo  $g$  rispetto a  $B_+$**  le coppie  $(D_1, D_4)$  e  $(D_2, D_3)$ , e definiamo **adiacenti lungo  $g$  rispetto a  $B_-$**  le coppie  $(D_1, D_2)$  e  $(D_3, D_4)$ ;

- una realizzazione di  $S^2$  è data dall'unione di poligoni rappresentanti le 2-celle di  $S^3/L$ , tali che:

- (i) ogni poligono compaia esattamente una volta;
- (ii) scelto un poligono  $D$  e un lato  $g$ , il poligono successivo incollato a quel lato sia il poligono adiacente a  $D$  lungo  $g$  rispetto alla 3-cella che stiamo costruendo;

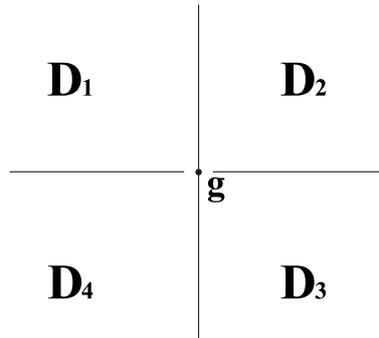


Figura 3.15: Determinazione delle adiacenze rispetto al segmento verticale  $g$ . In questa situazione abbiamo che le coppie adiacenti sono  $(D_1, D_4)$  e  $(D_2, D_3)$  in  $B_+$  e  $(D_1, D_2)$  e  $(D_3, D_4)$  in  $B_-$ .

(iii) la mappa d'incollamento sia quella la cui restrizione a ogni poligono è l'identità.

**Esempio 3.1.** Si veda la costruzione del nodo a 8 nell'esempio 3.2 per un modello concreto della costruzione descritta.

In altre parole, ciò che abbiamo fatto è stato fornire mappe di incollamento di  $B_+$  e  $B_-$  attraverso una realizzazione di  $\partial B_+$  e  $\partial B_-$ , entrambe identificate con  $S^2$ , come un poliedro in cui le 2-facce sono le 2-celle di  $S^3/L$ .

L'obiettivo finale, che già avevamo sottolineato per l'ipotesi II, ci impone un'ulteriore condizione. Diremo che una 2-cella non è **auto-adiacente** se la sua chiusura è omeomorfa al disco chiuso, e due 2-celle hanno **adiacenza minima** se l'intersezione delle loro chiusure è vuota oppure formata da un solo vertice o un solo lato chiuso. Chiediamo allora che:

III. In  $\partial B_+$  e  $\partial B_-$  nessuna 2-cella sia auto-adiacente, e ogni coppia di 2-celle abbia adiacenza minima.

**Oss.** Ancora una volta la condizione imposta non è la più debole possibile, ma sicuramente la più naturale.

Dal momento che la costruzione della struttura su  $\partial B_+$  e  $\partial B_-$  è algoritmica e parte da  $G$ , la condizione III è facilmente verificabile. D'altra parte esistono criteri più semplici e immediati di verifica, di cui uno particolarmente interessante.

Diremo che  $G$  ha **incroci alternati** se in ogni componente  $N$  di  $L$ , fissata un'orientazione arbitraria su  $N$ , ad ogni incrocio in cui si passa sotto segue un incrocio in cui si passa sopra, e viceversa. Si dirà in tal caso che  $L$  è un **link alternato**.

**Teorema 3.3.** Se vale la condizione III, allora  $G$  ha incroci alternati.

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che  $G$  non abbia tutti incroci alternati, allora avremo certamente almeno una delle due situazioni in Figura 3.16. Ciò significa che le 2-celle in  $S^3_{/L}$  corrispondenti a  $D_1$  e  $D_2$  sono adiacenti lungo  $g_1$  e  $g_2$  sia rispetto a  $B_+$  che a  $B_-$ , il che è assurdo in quanto  $D_1$  e  $D_2$  dovevano avere adiacenza minima. Ricordiamo inoltre che per l'assunto I su  $G$ , le regioni  $D_1$  e  $D_2$  non possono essere bigoni, e quindi non sono eliminabili nel 2-scheletro di  $S^3_{/L}$ .  $\square$

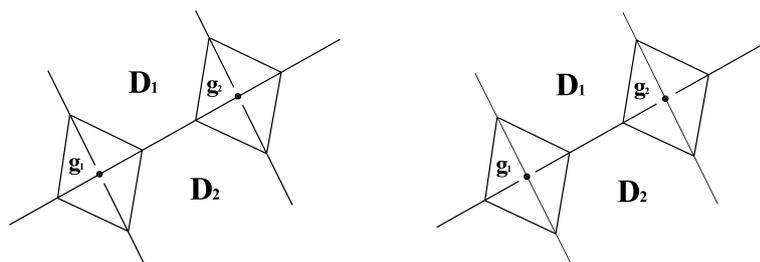


Figura 3.16: Se  $G$  non ha tutti incroci alternati, allora avremo certamente almeno una di queste due situazioni.

Proveremo ora che, per link alternanti, la costruzione delle funzioni di incollamento di  $B_+$  e  $B_-$  è molto semplificabile.

**Teorema 3.4.** *Supponiamo che  $G$  abbia incroci alternati, allora:*

- (i) *i grafi rappresentanti le realizzazioni di  $S^2$  come poliedro associate alle funzioni di incollamento di  $B_+$  e  $B_-$  prima di rimuovere i bigoni sono canonicamente identificabili con  $G$  stesso;*
- (ii) *i grafi rappresentanti le realizzazioni di  $S^2$  come poliedro associate alle funzioni d'incollamento di  $B_+$  e  $B_-$  dopo aver rimosso i bigoni è canonicamente identificabile con il grafo di  $G$  ottenuto da  $G$  riducendo le coppie di lati che uniscono gli stessi due vertici a un singolo lato.*

*Dimostrazione.* (i) A ogni lato in  $G$  che separa due regioni  $D_1$  e  $D_2$  corrisponde un segmento di tipo  $g$  che separa le corrispondenti 2-celle in  $S^3_{/L}$ , e viceversa, in linea con lo schema della Figura 3.17;

(ii) segue immediatamente da (i).  $\square$

Quest'ultimo risultato ci fornisce un semplice criterio per la condizione III.

**Corollario 3.4.1.** *La condizione III è soddisfatta se e soltanto se:*

- (i)  *$G$  ha incroci alternati;*
- (ii) *in  $S^2 \setminus G$  nessuna regione è auto-adiacente e tutte le coppie di regioni hanno adiacenza minima.*

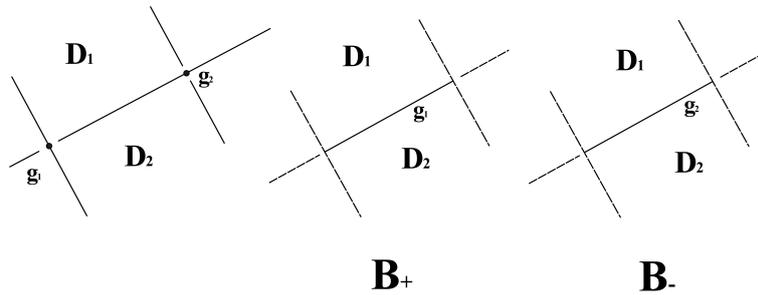


Figura 3.17: Ciò che genera un lato di  $g$  con estremi alternati in  $B_+$  e  $B_-$  rispettivamente.

Riassumiamo dunque ciò che abbiamo ottenuto nel corso della costruzione, supponendo di essere partiti da un link  $L$ , la cui proiezione rispetti I, II e III:

- un numero finito di poligoni  $D_1, D_2, \dots$  avente almeno tre lati;
- due realizzazioni, che denoteremo  $S_+^2$  e  $S_-^2$ , di  $S^2$  come poliedro costituito dai  $D_i$ , ognuno tale da apparire esattamente una sola volta;
- in entrambe le realizzazioni nessun  $D_i$  è auto-adiacente e ogni coppia di  $D_i$  ha minima adiacenza;
- $S_{/L}^3$  è ottenuto considerando due copie  $B_+$  e  $B_-$  della 3-palla, bordate da  $S_+^2$  e  $S_-^2$  rispettivamente, e con gli incollamenti di ogni  $D_i \subset S_+^2$  al corrispondente  $D_i \subset S_-^2$ ;
- $S^3 \setminus \setminus L$  è ottenuto rimuovendo i vertici dei  $D_i$  in tale realizzazione di  $S_{/L}^3$ .

Possiamo allora concludere la nostra costruzione: tutto ciò che resta da fare è estendere le rappresentazioni di  $S_+^2$  e  $S_-^2$  a triangolazioni di  $B_+$  e  $B_-$  tali che:

- nessun vertice sia aggiunto;
- gli incollamenti su  $S_+^2$  e  $S_-^2$  siano rispettati.

Ciò è facilmente eseguibile. Prima di tutto aggiungiamo all'interno di ogni  $D_i$  avente più di 3 vertici un opportuno numero di lati in modo da avere una triangolazione, poi copiamo questi lati in  $S_+^2$  e  $S_-^2$  nel modo naturale. Per costruzione  $S_+^2$  e  $S_-^2$  risultano così correttamente triangolati. Il successivo, ed ultimo, passo sarà quello di estendere queste triangolazioni a triangolazioni di  $B_+$  e  $B_-$ , aggiungendo facce e lati all'interno di essi. In particolare scegliamo un vertice  $v_+ \in S_+^2$  e realizziamo  $S_+^2$  in modo tale che: tutti i triangoli che non contengono  $v_+$  giacciono su un piano  $\pi$  in  $\mathbb{R}^3$ ,  $v_+ \notin \pi$  e i triangoli contenenti  $v_+$  siano coni di vertice  $v_+$  e che abbiano le basi in  $\pi$ . A questo punto è sufficiente aggiungere i coni mancanti

di vertice  $v_+$  e basi in  $\pi$  per concludere la triangolazione.

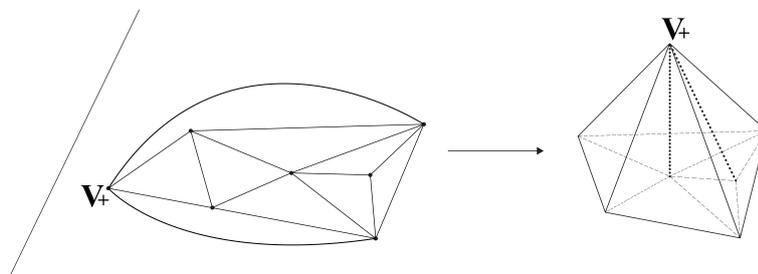


Figura 3.18: Realizzazione di  $S_+^2$  con tutti i vertici sullo stesso piano eccetto uno. I due lati che sono da aggiungere hanno un tratteggio più marcato, mentre i 7 triangoli che sono da aggiungere non sono stati disegnati.

Ciò conclude la nostra costruzione.

**Oss.** Sottolineiamo il fatto che data una proiezione di un link  $L$  in  $S^3$  generico, la verifica delle condizioni I, II e III può essere fatta in maniera algoritmica ed è spesso molto semplice. Inoltre un numero elevato di link soddisfano tali condizioni, motivo per cui è possibile esplicitare molti esempi di elementi di  $\mathcal{T}_3$

**Esempio 3.2.** Mostriamo un'applicazione dell'algoritmo sul famoso nodo a 8, che chiameremo  $\mathcal{L}^8$ .

Notiamo innanzitutto che la proiezione  $G$  di  $\mathcal{L}^8$ :

I. è connessa;

II. presenta solo due bigoni isolati;

III. ha incroci alternati;

per cui è lecito applicare la costruzione mostrata sopra.

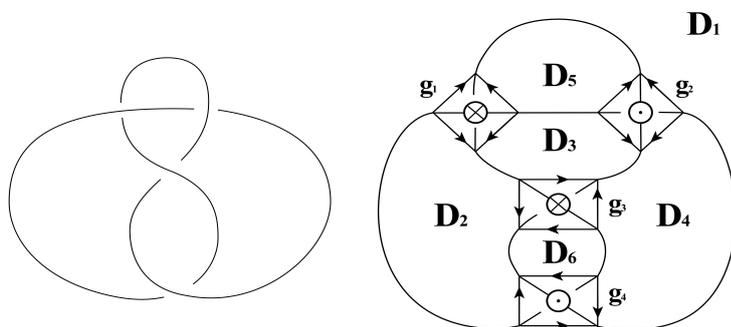


Figura 3.19: Usuale proiezione di  $\mathcal{L}^8$  ed aggiunta dei segmenti di tipo  $g$  con una orientazione arbitraria.

Cominciamo aggiungendo i segmenti di tipo  $g$  con un'orientazione arbitraria e nominando le 6 regioni formate da  $G$  (Figura 3.19).

A questo punto determiniamo le adiacenze rispetto a  $B_+$  ed otteniamo le funzioni di incollamento delle 2-celle come nell'esempio di Figura 3.12. Infine eliminiamo i bigoni, i cui lati hanno orientazioni concordi, ed otteniamo la rappresentazione di  $\partial B_+$  come tetraedro.

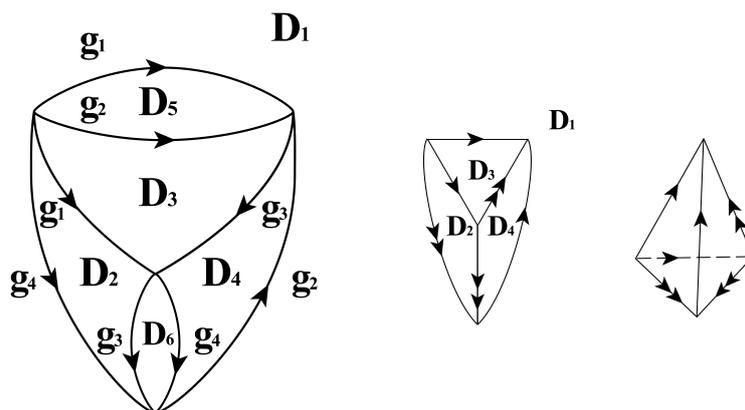


Figura 3.20: Rappresentazione di  $\partial B_+$  prima e dopo l'eliminazione dei bigoni.

Analogamente procediamo per  $B_-$ , dunque determiniamo prima le adiacenze, poi eliminiamo i bigoni, così da trovare il tetraedro corrispondente a  $\partial B_-$ .

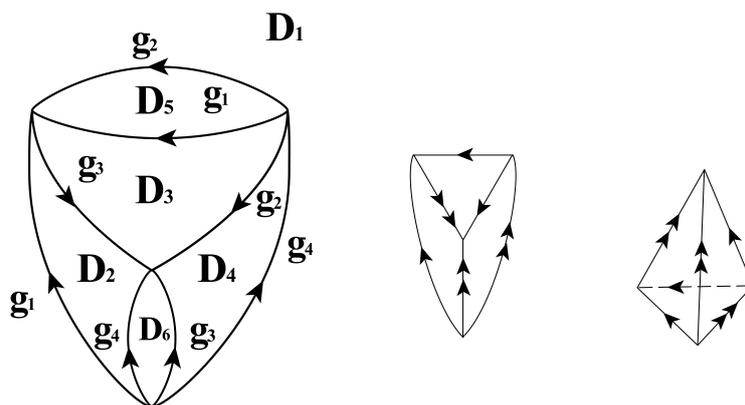


Figura 3.21: Rappresentazione di  $\partial B_-$  prima e dopo l'eliminazione dei bigoni.

In conclusione il complementare del nodo a 8 in  $S^3$  è rappresentabile in  $\mathcal{T}_3$  con due tetraedri incollati secondo le mappe di incollamento mostrate in Figura 3.20 e Figura 3.21.

*Osserviamo inoltre che  $\mathcal{L}^8$  ha tutti incroci alternati, per cui avremmo potuto utilizzare il metodo più rapido per la costruzione dei tetraedri passando dalla Figura di sinistra in 3.19 direttamente alla Figura 3.20.*

# Bibliografia

- [Be-Pe] Benedetti, Riccardo e Petronio, Carlo *Lectures on Hyperbolic Geometry*, Springer, Berlino, 1992
- [Bo-Ad] Bondy, Adrian e Murty, U.S.R. *Planar graphs*, Springer, Berlino, 2008
- [Ca-Zh] Cao, Huai-Dong e Zhu, Xi-Ping *Hamilton-Perelman's Proof of the Poincaré Conjecture and the Geometrization Conjecture*, Asian Journal of Mathematics 10, 2006
- [Dy] Von Dyck, Walther, *Beitrage zur analysis situs*, Mathematische Annalen, 1888
- [Ha1] Hatcer, Allen, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002
- [Ha2] Hatcer, Allen, *Notes on basic 3-manifold topology*, 1980
- [He] Hempel, John, *3-Manifolds*, Princeton University Press, Princeton, 1976
- [Ke] Kerékjártó, Béla, *Vorlesungen über Topologie*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1923
- [Le] Lee, John M. *Introduction to smooth manifolds*, Springer-Verlag, Berlino, 2006
- [Mau] Maunder, C.R.F., *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 1980
- [Mar] Markov, A.A., *Unsolvability of homeomorphy problem*, Cambridge University Press, 1960
- [Rol] Rolfsen, D., *Knots and Link*, Lect. Serie 7, Publish or perish, Berkeley, 1968
- [Sc] Scharlemann, Martin, *Heegaard Splitting of 3-Manifold*, Departement of Mathematics, University of California, 1995

- [Sh] Sharpe, R.W., *Differential Geometry: Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Program*, Springer-Verlag, New York, 1997
- [Sz] Szpiro, George, *L'enigma di Poincaré*, Apogeo, Milano, 2008
- [Th] Thurston, William P. *Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry*, American Mathematical Society. Bulletin. New Series 6, 1982