

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Rivestimenti Ramificati  
e  
Prime-Degree Conjecture

Tesi di Laurea in Topologia

Relatore:  
Chiar.mo Prof.  
Stefano Francaviglia

Presentata da:  
Davide Dobrilla

I Sessione  
Anno Accademico 2012/2013



*a Massi, che ora balla tra le stelle ...*



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>v</b>
<b>1 Classificazione delle superfici e rivestimenti</b>	<b>1</b>
1.1 Classificazione delle superfici . . . . .	1
1.2 Rivestimenti . . . . .	8
1.3 Automorfismi di rivestimento e monodromia . . . . .	15
<b>2 Rivestimenti ramificati e formula di Riemann-Hurwitz</b>	<b>19</b>
2.1 Rivestimenti ramificati . . . . .	19
2.2 La formula di Riemann-Hurwitz . . . . .	25
<b>3 La Prime-Degree conjecture</b>	<b>31</b>
3.1 Riemann-Hurwitz: condizione necessaria . . . . .	31
3.2 Prime-Degree conjecture . . . . .	34
3.3 Ulteriori approcci allo studio . . . . .	37
<b>Bibliografia</b>	<b>39</b>



# Elenco delle figure

1.1	Triangolazione di $\mathbb{T}$ . . . . .	2
1.2	Triangolazione di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ . . . . .	2
1.3	Due cammini chiusi semplici e non banali che si intersecano in un punto non sconnettono il toro. . . . .	7
1.4	Rivestimento $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}$ del toro. . . . .	9
1.5	Rivestimento $p : C \rightarrow \mathbb{T}$ del toro. . . . .	10
1.6	Esempio del rivestimento $p_A : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ . . . . .	11
2.1	Rivestimento ramificato di grado 4 del disco. . . . .	20
2.2	Rivestimento ramificato $f : \Sigma_3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ . . . . .	22
2.3	Sollevamento di una triangolazione del disco con il rivestimento ramificato $z \mapsto z^4$ . . . . .	26
2.4	Comportamento locale di ogni punto di ramificazione. . . . .	27
2.5	Rivestimento ramificato $f : \Sigma_2 \rightarrow \mathbb{T}$ . . . . .	28





# Introduzione

I rivestimenti ramificati sono una particolare categoria di rivestimenti che compare in maniera naturale quando si vanno a studiare le mappe tra superfici di Riemann. Tali rivestimenti non sono altro che funzioni che lette in carte locali assumono la forma  $z \mapsto z^n$ , per un qualche  $n \in \mathbb{N}$ . Hanno tuttavia anche interessanti proprietà topologiche, che sono state oggetto di studio nel corso dell'ultimo secolo.

In questa tesi si è voluto cercare di fare un'introduzione all'argomento partendo, nel primo capitolo, dalle nozioni topologiche basilari necessarie alla comprensione dei concetti e dei risultati riportati nei capitoli successivi. Si è scelto di presentare il teorema di classificazione delle superfici, in modo da restringere lo studio solo al caso della sfera  $\mathbb{S}^2$ , del toro  $\mathbb{T}$  e dello spazio proiettivo  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , e di dare una base della teoria dei rivestimenti.

Il secondo capitolo è dedicato ai rivestimenti ramificati, studiati dal punto di vista topologico. In questo modo si sono cercate di mettere in evidenza le relazioni esistenti tra i concetti presentati nel primo capitolo e le particolari caratteristiche dei rivestimenti ramificati. La formula di Riemann-Hurwitz, che mette in relazione il genere delle due superfici con l'indice di ramificazione ne è l'esempio più rilevante. Il terzo ed ultimo capitolo è dedicato al problema di esistenza dei rivestimenti ramificati posto da Hurwitz ed alla sua più recente formulazione attraverso la Prime-Degree conjecture. Ci si chiede quando fissato un insieme di dati con particolari caratteristiche sia possibile costruire un rivestimento ramificato che li realizzi. Vengono riportati i risultati più significativi finora dimostrati a supporto di tale congettura e vengono presentati a grandi linee i vari metodi con cui si stanno cercando le soluzioni al problema, che ad oggi resta ancora aperto.



# Capitolo 1

## Classificazione delle superfici e rivestimenti

### 1.1 Classificazione delle superfici

In questa prima sezione andremo a trattare il teorema di classificazione delle superfici. Daremo solo un'idea di come procedere nelle dimostrazioni e per ciascuna indicheremo il testo a cui si è fatto riferimento.

**Definizione 1.1.1.** *Una superficie è uno spazio topologico  $S$  che sia*

- *A base numerabile,*
- *Hausdorff,*
- *Localmente euclideo di dimensione 2.*

**Esempio 1.1.1.** Gli esempi più classici di superfici sono

- la sfera  $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$ ,
- il toro  $\mathbb{T} = S^1 \times S^1$ ,
- lo spazio proiettivo reale  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ .

Ci limiteremo per questioni di tempo allo studio delle superfici compatte, usando un approccio il più possibile topologico.

Andiamo quindi ad introdurre alcune nozioni cardinali per il nostro studio.

**Definizione 1.1.2.** *Un semplice  $n$ -dimensionale, indicato con  $\Delta^n$ , è l'involuppo convesso di  $n + 1$  punti (detti vertici) affinemente indipendenti di  $\mathbb{R}^m$ .*

*Si chiama faccia di  $\Delta^n$  un semplice  $\Delta^q$  che sia generato da  $q + 1$  degli  $n + 1$  vertici di  $\Delta^n$ .*

*Un complesso simpliciale  $K$  è un insieme di semplici di  $\mathbb{R}^m$  tali che:*

- *se  $\Delta^n \in K$  e  $\Delta^q$  è faccia di  $\Delta^n \Rightarrow \Delta^q \in K$ ,*
- *se  $\Delta^n, \Delta^p \in K \Rightarrow \Delta^n \cap \Delta^p$  o è faccia comune di  $\Delta^n$  ed  $\Delta^p$ , oppure è l'insieme vuoto,*

- ogni semplice in  $K$  è faccia di un numero finito di semplici.

Indicheremo con  $|K|$  la realizzazione geometrica di  $K$ , ovvero lo spazio topologico di  $\mathbb{R}^m$  avente per punti l'unione dei semplici di  $K$  con la topologia indotta.

**Definizione 1.1.3.** Una triangolazione di uno spazio topologico  $X$  è una coppia  $(K, f)$ , con  $K$  complesso simpliciale ed  $f : K \rightarrow X$  omeomorfismo. Diremo che il complesso  $K$  triangola lo spazio  $X$ .

Osserviamo che ogni superficie avrà triangolazioni composte da 0-simplessi (vertici), 1-simplessi (lati) e 2-simplessi (facce).

**Esempio 1.1.2.** Possibili triangolazioni del toro e del piano proiettivo:

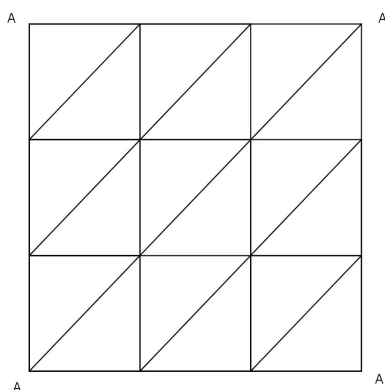


Figura 1.1: Triangolazione di  $\mathbb{T}$

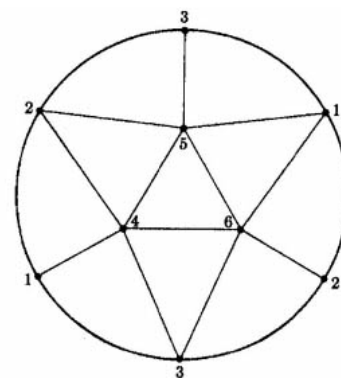


Figura 1.2: Triangolazione di  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

Un importante risultato per studio delle superfici è il seguente:

**Teorema 1.1.1 (Radò).** Ogni superficie è triangolabile. In particolare una superficie è compatta se e solo se ammette una triangolazione finita.

La dimostrazione di questo teorema si basa sulla possibilità di costruire un ricoprimento di Jordan a carattere finito<sup>1</sup> su di una superficie, e questo non è affatto banale. La dimostrazione si può trovare su [1, pp. 105 - 111]. Andiamo ora a definire il primo importante invariante topologico che useremo per la classificazione.

<sup>1</sup>Un ricoprimento di Jordan a carattere finito è un insieme  $\{J_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  di aperti di Jordan tali che

- $J_\alpha \cap J_\beta = \emptyset$  eccetto che per un numero finito di  $\alpha, \beta \in \Lambda$
- chiamato  $\gamma_\alpha$  il bordo di  $J_\alpha$  si ha che  $\gamma_\alpha \cap \gamma_\beta$  consiste al più in un numero finito di punti e/o archi.

**Definizione 1.1.4.** Consideriamo una superficie  $S$  con una data triangolazione  $\tau = (K, f)$ . Siano poi rispettivamente  $V$ ,  $L$  e  $T$  il numero dei vertici, dei lati e delle facce di  $K$ ; si chiama caratteristica di Eulero-Poincarè di  $S$  l'intero

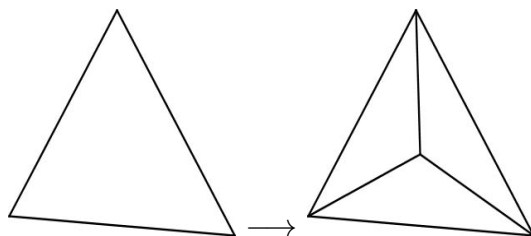
$$\chi(S) = V - L + T.$$

**Teorema 1.1.2.** La caratteristica di Eulero-Poincarè di una superficie non dipende dalla triangolazione scelta.

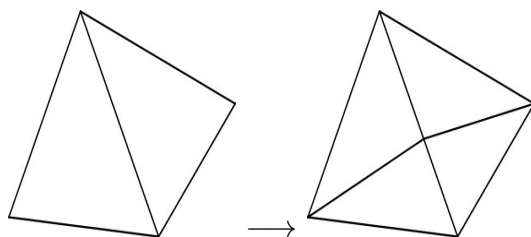
*Dimostrazione.* Questa dimostrazione è tratta da [8, pp. 57 - 64].

Prese due triangolazioni della stessa superficie, si ha che esiste un raffinamento comune ad entrambe. Ci basta quindi mostrare che la caratteristica di Eulero-Poincarè di una triangolazione è uguale a quella di un suo raffinamento. Ora abbiamo che ogni raffinamento si ottiene a partire dalla triangolazione con un numero finito di operazioni di uno dei tre tipi seguenti:

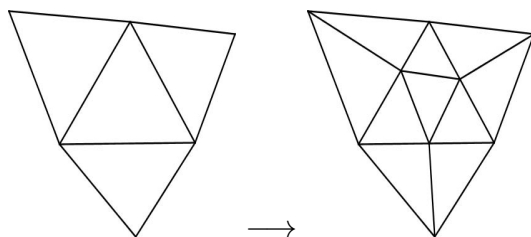
- aggiungere un nuovo vertice all'interno di un triangolo, ed i tre lati che uniscono il nuovo vertice ai vertici del triangolo in questione;



- aggiungere un nuovo vertice all'interno di un lato ed i due lati che lo congiungono ai vertici dei due triangoli (di cui tale lato è faccia comune) che non appartengono al lato preso in considerazione;



- aggiungere un nuovo vertice per ciascuno dei tre lati di un triangolo, il triangolo che li congiunge, e tre nuovi lati che collegano i nuovi vertici ai vertici opposti dei tre triangoli adiacenti;



Con le prime due operazioni abbiamo aggiunto un vertice, tre lati e due triangoli, mentre con la terza ne abbiamo aggiunti rispettivamente tre, nove e sei; quindi in definitiva la caratteristica di Eulero-Poincarè resta invariata.  $\square$

**Teorema 1.1.3** (Invarianza della caratteristica di Eulero-Poincarè per omeomorfismo). *Siano  $S$  ed  $S'$  due superfici omeomorfe e sia  $\tau = (K, f)$  una triangolazione di  $S$ . Allora  $K$  triangola anche  $S'$  ed in particolare  $\chi(S) = \chi(S')$ .*

*Dimostrazione.* Chiamiamo  $\varphi$  l'omeomorfismo di  $S$  in  $S'$ . Avremo quindi un diagramma

$$\begin{array}{ccc} K & & \\ f \downarrow & \searrow g & \\ S & \xrightarrow{\varphi} & S' \end{array}$$

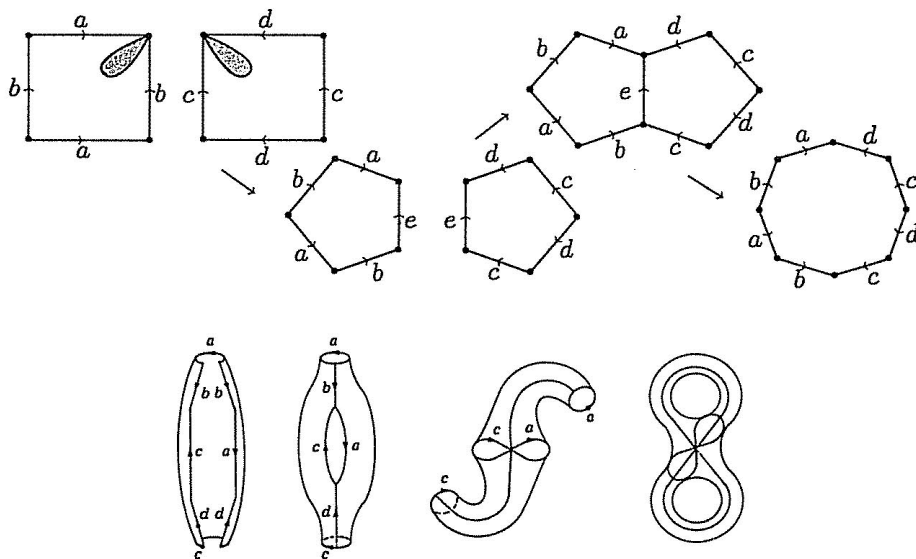
Ora  $g = \varphi \circ f$  sarà un omeomorfismo in quanto composizione di  $\varphi$  ed  $f$  che sono entrambe omeomorfismi. Quindi  $(K, g)$  è triangolazione di  $S'$  ed in particolare  $\chi(S) = \chi(S')$ .  $\square$

**Definizione 1.1.5.** *Diciamo che una superficie  $S$  è orientabile se non contiene al suo interno un nastro di Möbius.*

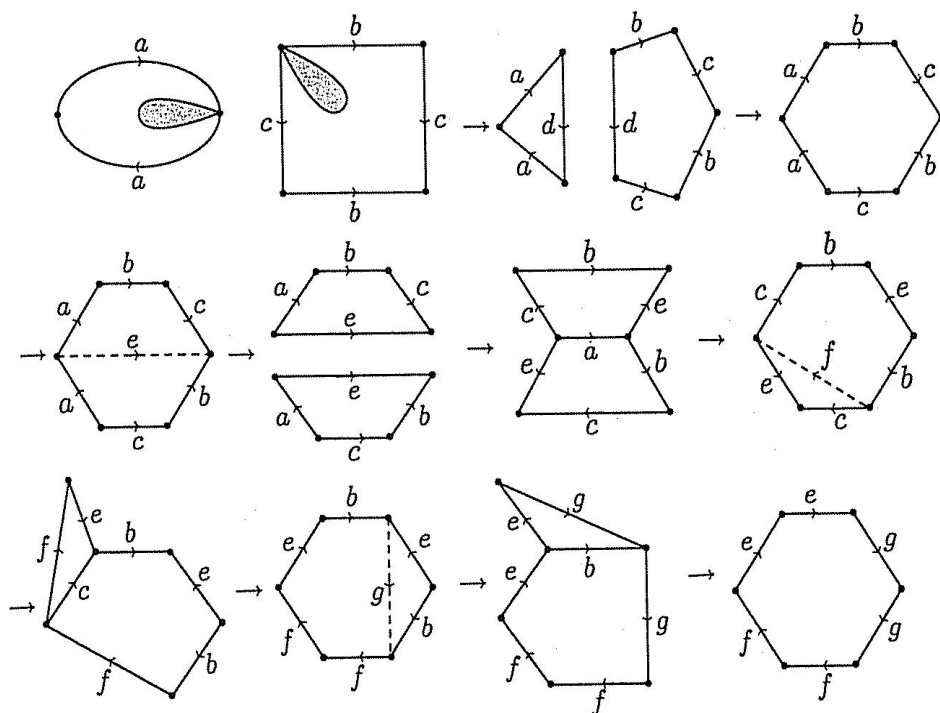
Ultima nozione che ci serve per enunciare il teorema di classificazione è quella di somma connessa di due superfici:

**Definizione 1.1.6.** *Siano  $S_1$  ed  $S_2$  due superfici. Su ciascuna delle due prendiamo un disco  $D_i$  con  $i = 1, 2$  e indichiamo con  $S'_i$  la superficie bucata, ovvero  $S_i \setminus D_i^\circ$ . Si chiama somma connessa delle due superfici, indicata con  $S_1 \# S_2$ , lo spazio quoziente di  $S'_1 \cup S'_2$  ottenuto identificando i punti  $x$  ed  $h(x)$ , dove  $h$  è un omeomorfismo del bordo di  $D_1$  nel bordo di  $D_2$ .*

**Esempio 1.1.3.** Somma connessa di due tori:



**Esempio 1.1.4.** Somma connessa di un toro e un  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  :



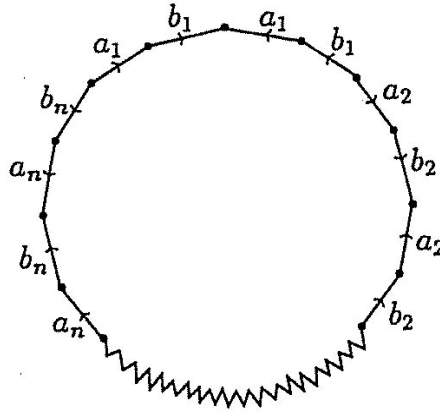
**Teorema 1.1.4** (Teorema di classificazione delle superfici). *Ogni superficie  $S$  è omeomorfa ad una ed una sola delle seguenti:*

- a) la sfera  $\mathbb{S}^2$ ,
- b) una somma connessa  $\sharp m\mathbb{T}$  di  $m$  tori, con  $m \geq 1$ ,
- c) una somma connessa  $\sharp n\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  di  $n$  spazi proiettivi, con  $n \geq 1$ .

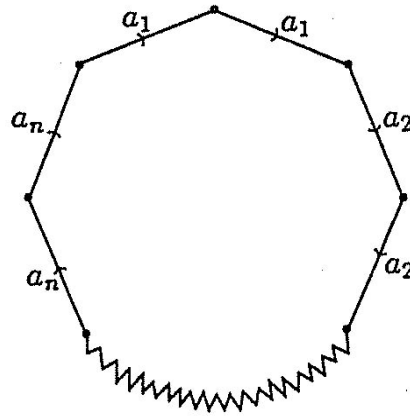
*Dimostrazione.* Questa dimostrazione è tratta da [4, pp. 79 - 58].

Per il teorema di Radò avremo una triangolazione  $(K, f)$  di  $S$ . A partire dal complesso simpliciale  $K$  possiamo ottenere un modello di tale superficie costituito da un poligono di  $2n$  lati a due a due identificati. Se a ciascuno di essi assegnamo una lettera e scegliamo un verso di percorrenza del bordo del poligono, avremo che la nostra superficie è rappresentata da una successione di lettere. E' facile verificare che:

- i) la sfera è rappresentata dalla parola  $a_1 a_1^{-1}$ ,
- ii) una somma connessa  $\sharp n\mathbb{T}$  è rappresentata da  $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$ , corrispondente al seguente poligono:



iii) una somma connessa  $\sharp n\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  è rappresentata da  $a_1a_1 \dots a_n a_n$ , corrispondente al seguente poligono:



Il lavoro che si fa è ridurre la parola associata ad  $S$  ad una delle tre precedenti attraverso una successione di operazioni di taglia e cucì topologico.  $\square$

Da questo teorema in particolare si ha che due superfici sono omeomorfe se e solo se hanno la stessa caratteristica di Eulero e sono entrambe (non) orientabili. Questo segue immediatamente dal teorema di classificazione delle superfici e dall'invarianza per omeomorfismo della caratteristica di Eulero-Poincarè.

Per capire meglio il significato geometrico di quello che abbiamo appena visto può risultare utile introdurre una nuova grandezza, strettamente collegata alla caratteristica di Eulero-Poincarè.

**Definizione 1.1.7.** Si chiama *genere* di una superficie  $S$  l'intero dato da:

$$g(S) = \begin{cases} \frac{2-\chi(S)}{2}, & \text{se } S \text{ è orientabile,} \\ 2 - \chi(S), & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

In maniera informale il *genere* lo possiamo interpretare come il numero di buchi sulla superficie. Questo è semplice da vedere quando la nostra superficie è un  $n$ -toro o una sfera, ma risulta difficile da pensare in una somma connessa di  $n$  spazi



proiettivi.

Alternativamente possiamo pensare il genere di una superficie come il numero massimo di cammini chiusi non omotopi a quello banale, semplici e disgiunti che si possono togliere contemporaneamente dalla superficie stessa senza disconnetterla. Ovviamente per come lo abbiamo definito, anche il genere è un invariante topologico e lo si può usare, assieme all'orientabilità, per la classificazione delle superfici.

**Esempio 1.1.5.** Riprendiamo l'esempio del toro: usando la triangolazione vista nell'esempio 2 si vede che la sua caratteristica di Eulero-Poincaré  $\chi(\mathbb{T})$  è 0; quindi, poichè il toro è orientabile, sarà  $g(\mathbb{T}) = 1$ . Questo, come appena visto, ci dice che dal toro possiamo togliere al massimo un cammino chiuso, semplice e non banale senza sconnetterlo.

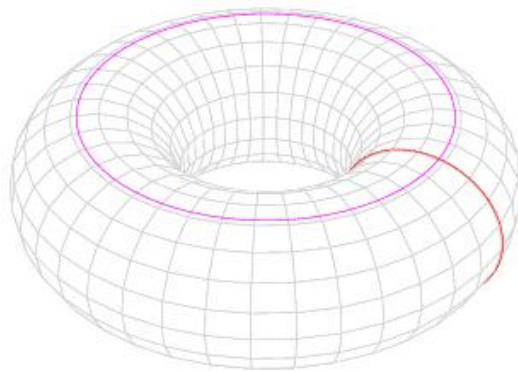


Figura 1.3: Due cammini chiusi semplici e non banali che si intersecano in un punto non sconnettono il toro.

## 1.2 Rivestimenti

Gli spazi di rivestimento costituiscono un importante materia di studio in topologia, in quanto strettamente connessi al concetto di gruppo fondamentale. Questi due oggetti possono essere pensati come espressione della stessa teoria, studiata nel primo caso dal punto di vista geometrico, mentre nel secondo dal punto di vista algebrico.

Vedremo in questa sezione alcuni importanti risultati della teoria dei rivestimenti. Diamo per acquisito il concetto di gruppo fondamentale e la sua teoria, che possono essere studiati su [9] o su un qualsiasi altro libro di topologia algebrica.

Ogni spazio che prenderemo in considerazione è considerato connesso per archi e localmente connesso per archi.

**Definizione 1.2.1.** *Un omeomorfismo locale è una mappa continua  $f : X \rightarrow Y$  tale che ogni  $x \in X$  abbia un intorno aperto che viene mappato omeomorficamente su un aperto di  $Y$  dalla  $f$ .*

E' praticamente tautologico dire che un omeomorfismo locale è sempre una mappa aperta.

**Definizione 1.2.2.** *Una proiezione di rivestimento, o più semplicemente rivestimento, è una mappa  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  tale che per ogni  $x \in X$  esiste  $V \subset X$  intorno aperto di  $x$  per cui  $p^{-1}(V) = \coprod_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$  con  $U_\alpha \subset \tilde{X}$  aperto e  $p|_{U_\alpha} : U_\alpha \rightarrow V$  omeomorfismo. Diremo che tale  $V$  è un aperto banalizzante e chiameremo  $\tilde{X}$  spazio di rivestimento dello spazio base  $X$ . Per comodità supporremo  $\tilde{X}$  connesso.*

**Osservazione 1.2.1.** *In particolare una proiezione di rivestimento  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  è un omeomorfismo locale ed è sempre suriettivo. La fibra di un punto  $x_0 \in X$ , indicata con  $p^{-1}(x_0)$ , è un insieme discreto per ogni  $x_0 \in X$ .*

Da quanto appena detto segue che presa una proiezione di rivestimento possiamo leggere lo spazio base come quoziente dello spazio di rivestimento per un'opportuna relazione di equivalenza. Questo fatto, benchè praticamente immediato, è, come vedremo, estremamente importante.

**Proposizione 1.2.1.** *Sia  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  una proiezione di rivestimento; allora:*

a)  $\forall x, y \in X$  si ha  $\#\{p^{-1}(x)\} = \#\{p^{-1}(y)\}$ ,

b) preso  $C \subset X$  connesso e localmente connesso per archi, la restrizione  $p|_{p^{-1}(C)} : p^{-1}(C) \rightarrow C$  è ancora un rivestimento.

*Dimostrazione.* a) Consideriamo  $x_0 \in X$  e prendiamo l'insieme  $A \subset X$  dei punti di  $X$  che hanno cardinalità della fibra uguale a  $\#\{p^{-1}(x_0)\}$ ; poichè  $X$  è connesso ed  $A \neq \emptyset$  ci basta mostrare che  $A$  è aperto e chiuso. Osservando che in un aperto banalizzante  $V$  la fibra di ogni punto ha la stessa cardinalità, avremo che  $V \cap A = \emptyset$  oppure  $V \subset A$ ; poichè gli aperti banalizzanti ricoprono  $X$  avremo che sia  $A$  che  $X \setminus A$  sono aperti.

- b) Siano  $C$  come da ipotesi,  $x \in C$  e  $U$  aperto banalizzante per  $x \in X$ . Sia  $V$  la componente di  $U$  contenente  $x$ . Poiché  $X$  è localmente connesso,  $V$  è aperto in  $X$  e quindi sarà aperto anche in  $C$ . Inoltre  $V$  sarà aperto banalizzante anche per  $p|_{p^{-1}(C)}$ . Quindi  $p|_{p^{-1}(C)}$  è a sua volta un rivestimento.  $\square$

**Definizione 1.2.3.** La cardinalità della fibra di un punto  $x \in X$  è detta grado del rivestimento. Diremo che un rivestimento di grado  $d$  è un rivestimento a  $d$  fogli. Tale definizione è ben posta per la proposizione 1.2.1. Si noti che il grado può anche essere infinito (come vedremo negli esempi che seguono).

**Osservazione 1.2.2.** Condizione sufficiente affinché il grado di un rivestimento sia finito è che lo spazio di rivestimento sia compatto. Questo perchè la preimmagine di un punto nello spazio base è discreta nello spazio di rivestimento, ed un insieme discreto di punti in un compatto è necessariamente finito.

**Esempio 1.2.1.** Consideriamo il piano proiettivo  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ . Banalmente l'identità  $id : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  è un rivestimento (di grado 1).

Un secondo rivestimento è dato dalla mappa  $p : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , proiezione a quoziente di  $\mathbb{S}^2$  con la relazione antipodale; in questo caso il rivestimento è di grado 2, poichè ogni  $[x] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  ha 2 preimmagini, date dal rappresentate  $x$  e dal suo antipodale  $-x$ .

Vedremo tra poco che questi due sono gli unici rivestimenti possibili per  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ .

**Esempio 1.2.2.** Consideriamo il toro  $\mathbb{T}$ . Su di esso possiamo trovare infiniti rivestimenti, di qualsiasi grado. Vediamone alcuni:

- La mappa  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}, (x, y) \mapsto (e^{2i\pi x}, e^{2i\pi y})$  è un rivestimento di grado infinito. Infatti ogni punto su  $\mathbb{T}$  avrà preimmagine in  $\mathbb{R}^2$  costituita da un reticolo di punti discreto del tipo  $(x+k, y+h)$  con  $(x, y)$  fissato e  $k, h \in \mathbb{Z}$ ; conseguentemente intorno sufficientemente piccoli del punto in questione avranno a loro volta preimmagine costituita da aperti disgiunti, ciascuno dei quali sarà omeomorfo all'intorno sul toro.

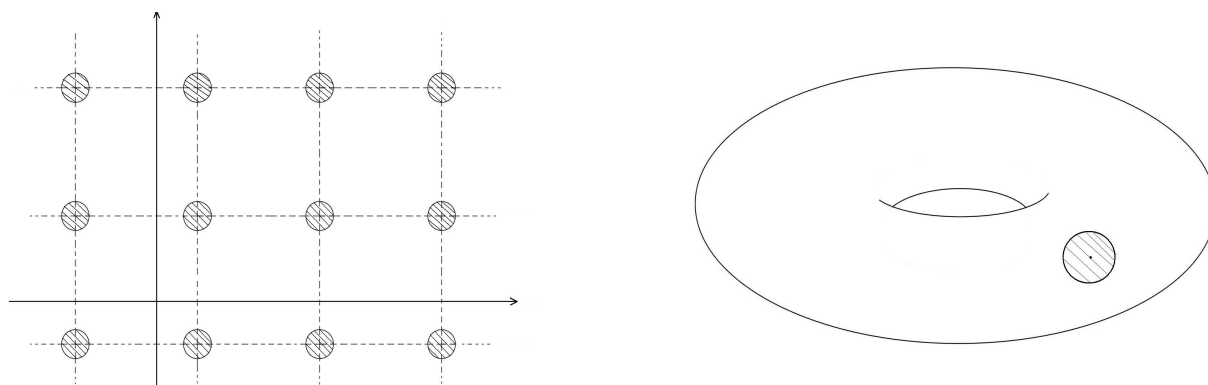


Figura 1.4: Rivestimento  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}$  del toro.

- La mappa  $p : C \rightarrow \mathbb{T}, (x, z) \mapsto (x, e^{2i\pi z})$ , dove  $C = \{S^1 \times (0, 0, z)\}$ , è anch'essa un rivestimento di grado infinito, dove ogni punto su  $\mathbb{T}$  ha preimmagine in  $C$  costituita da un insieme discreto di punti del tipo  $(x, z + h)$ , dove  $h \in \mathbb{Z}$  e la coppia  $(x, y)$  è fissata dal punto scelto. A livello intuitivo non abbiamo fatto altro che "arrotolare" il cilindro sul toro.

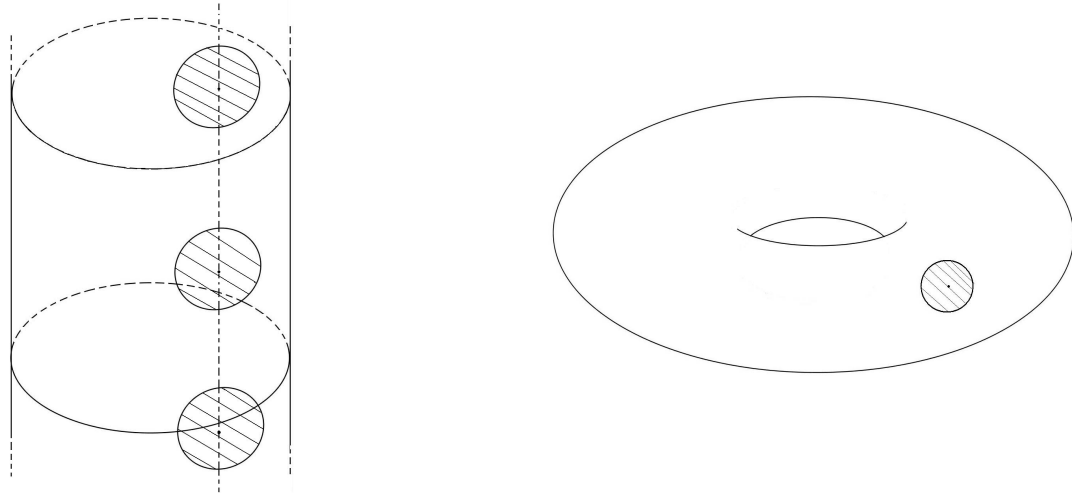


Figura 1.5: Rivestimento  $p : C \rightarrow \mathbb{T}$  del toro.

- Sia  $A \in GL_2(\mathbb{Z})$ ,  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . La mappa  $p_A : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}, (z_1, z_2) \mapsto (z_1^a z_2^b, z_1^c z_2^d)$  è un rivestimento di grado  $n = |\det A|$ . Vediamo perchè: pensiamo  $\mathbb{T} = S^1 \times S^1$  ed identifichiamo la coppia  $(z_1, z_2)$  con  $(e^{2\pi i\alpha}, e^{2\pi i\beta})$ . Quindi la mappa assocerà  $(e^{2\pi i\alpha}, e^{2\pi i\beta}) \mapsto (e^{2\pi i(\alpha a + \beta b)}, e^{2\pi i(\alpha c + \beta d)})$ . Ragionando analogamente al caso del rivestimento universale avremo che la preimmagine di un punto  $(x, y)$  sul toro sarà un reticolo discreto di punti del tipo  $(x + ak + ch, y + bk + dh)$  con  $k, h \in \mathbb{Z}$  e quindi come sopra avremo che la mappa è un rivestimento. Inoltre l'area del toro nel nuovo reticolo sarà  $|\det A|$ . Quindi il rivestimento mappa tutta la nuova area in quella del toro originale e conseguentemente sarà un rivestimento ad  $n = |\det A|$  fogli. In **Figura 1.5** si ha un esempio con  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Ricordando che  $\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}_2$  e che  $\pi_1(\mathbb{T}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  viene naturale osservare come i rivestimenti possibili di  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  e di  $\mathbb{T}$  siano in qualche senso "proporzionali" in numero alla grandezza del rispettivo gruppo fondamentale. Per cercare di dare un senso matematico a questa "proporzionalità" richiamiamo alcuni concetti.

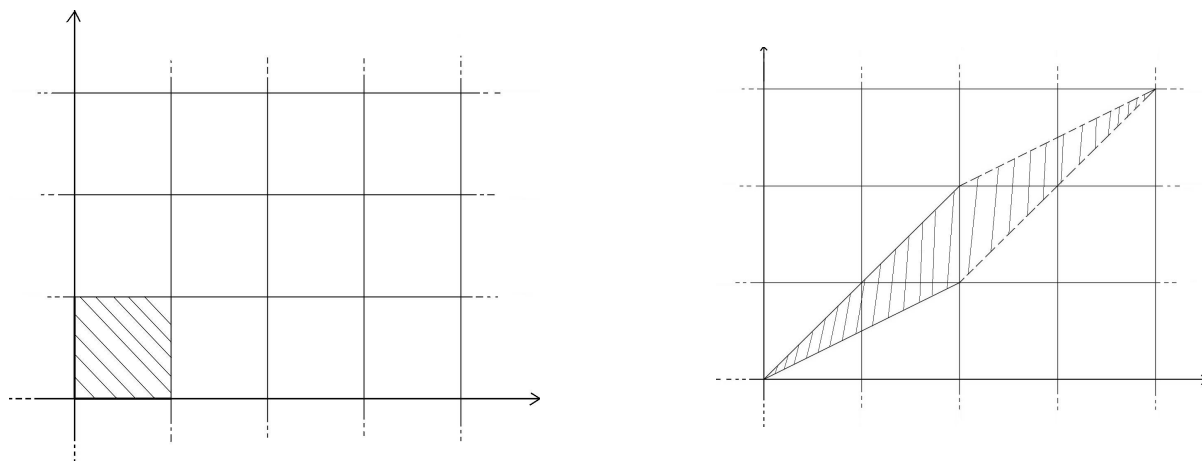


Figura 1.6: Esempio del rivestimento  $p_A : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$

**Definizione 1.2.4.** Sia  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  un rivestimento. Un sollevamento di una mappa  $f : Y \rightarrow X$  è una seconda mappa  $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$  tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccc}
 & & \tilde{X} \\
 & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\
 Y & \xrightarrow{f} & X
 \end{array}$$

**Teorema 1.2.1** (Sollevamento delle omotopie). Siano dati un rivestimento  $p : \tilde{X} \rightarrow X$ , un'omotopia  $f_t : Y \rightarrow X$  ed una mappa  $\tilde{f}_0 : Y \rightarrow \tilde{X}$  che sia sollevamento di  $f_0$ . Allora esiste unica un'omotopia  $\tilde{f}_t$  che in  $t = 0$  coincide con  $\tilde{f}_0$  e che solleva  $f_t$ .

Per la dimostrazione di questo teorema si rimanda a [6, p. 60].

**Corollario 1.2.1** (Teorema di sollevamento dei cammini). Siano dati un rivestimento  $p : \tilde{X} \rightarrow X$ , un cammino  $f : I \rightarrow X$  di punto base  $x_0 \in X$  ed un sollevamento  $\tilde{x}_0$  di  $x_0$ . Allora esiste unico il cammino  $\tilde{f} : I \rightarrow \tilde{X}$  sollevamento di  $f$  con punto base  $\tilde{x}_0$ .

**Osservazione 1.2.3.** E' bene sapere che non solo omotopie e cammini si sollevano. Tuttavia affinché una mappa puntata qualsiasi  $f : (Y, y) \rightarrow (X, x)$  sia sollevabile è necessario chiedere che sia  $f_*(\pi_1(Y, y)) \subset p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ , dove  $f_* : \pi_1(Y, y) \rightarrow \pi_1(X, x)$  e  $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x)$  sono le mappe indotte da  $f$  e  $p$  sui gruppi fondamentali.

Inoltre se una mappa ha due sollevamenti ed essi sono uguali in un punto, allora questi coincidono. Si veda [6, pp. 61- 62].

Utilizzando il teorema di sollevamento delle omotopie è possibile mostrare i seguenti risultati:

**Proposizione 1.2.2.** a) La mappa  $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x)$  indotta da un rivestimento  $p$  è iniettiva.

b) Il grado di un rivestimento  $p$  è uguale all'indice del sottogruppo  $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$  in  $\pi_1(X, x)$ .

Si comincia quindi a vedere lo stretto legame tra l'insieme dei rivestimenti  $p$  di uno spazio  $(X, x)$  ed i sottogruppi di  $\pi_1(X, x)$  individuati da  $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ . Ciò che è interessante è che tutti i sottogruppi di  $\pi_1(X, x)$  sono realizzati come  $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ , per un rivestimento  $p$  opportuno. Affinchè questo sia vero è tuttavia necessario aggiungere un'ulteriore ipotesi sullo spazio  $X$ , ovvero che tale spazio sia semilocalmente semplicemente connesso.

**Definizione 1.2.5.** *Uno spazio  $X$  si dice semilocalmente semplicemente connesso se ogni punto  $x \in X$  ammette un intorno  $U$  per cui l'omomorfismo indotto  $\pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$  sia quello nullo.*

La condizione che lo spazio  $X$  sia semilocalmente semplicemente connesso è necessaria affinché si possa realizzare con un rivestimento  $p$  anche il sottogruppo banale di  $\pi_1(X, x)$ . Questo si traduce in termini di rivestimenti nella possibilità di costruire uno spazio di rivestimento che sia semplicemente connesso, detto **rivestimento universale**.

Tale condizione è anche sufficiente per l'esistenza di rivestimenti che realizzino i sottogruppi di  $\pi_1(X, x)$ .

**Proposizione 1.2.3.** *Sia  $X$  connesso per archi, localmente connesso per archi e semilocalmente semplicemente connesso. Allora per ogni sottogruppo  $H$  di  $\pi_1(X, x)$  esiste un rivestimento  $p : (\tilde{X}_H, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x)$  tale che  $p_*(\pi_1(\tilde{X}_H, \tilde{x}_0)) = H$ , per un punto base opportuno  $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}_H$ . In particolare  $X$  ammette rivestimento universale.*

*Dimostrazione.* Diamo solo un'idea di tale dimostrazione dividendola in due fasi; la dimostrazione completa si può trovare su [2, pp. 82- 83].

- Costruzione del rivestimento universale  $p : (\tilde{X}_H, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x)$ .

Per motivare la costruzione che andremo a studiare, osserviamo prima un fatto: se noi consideriamo un rivestimento  $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x)$  semplicemente connesso, avremo che ogni punto  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  può essere collegato ad  $\tilde{x}_0$  con un cammino che parte da  $\tilde{x}_0$  e finisce in  $\tilde{x}$ . Se inoltre consideriamo un secondo cammino con la stessa proprietà, questo avrà la stessa classe d'omotopia del precedente. Quindi ad ogni  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  sarà associata univocamente una classe di omotopia di cammini, individuata da uno dei cammini che parte da  $\tilde{x}_0$  e finisce in  $\tilde{x}$ . Con questo ragionamento, grazie al teorema di sollevamento delle omotopie si riesce a descrivere lo spazio  $\tilde{X}$  in termini del solo  $X$ , in quanto le classi di omotopia dei cammini che partono da  $\tilde{x}_0$  in  $\tilde{X}$  saranno le stesse dei cammini che partono da  $x_0$  in  $X$ .

Si costruisce quindi  $\tilde{X}$  come l'insieme  $\{[\gamma] \mid \gamma \text{ cammino in } X \text{ che parte da } x_0\}$ . Su di esso si pone la topologia che ha per base gli aperti  $U_{[\gamma]}$  costruiti come segue: si considera l'insieme  $\mathcal{U} = \{U \subset X \mid U \text{ connesso per archi e } \pi_1(U) \rightarrow \pi_1(X) \text{ omomorfismo nullo}\}$ . Preso poi un cammino  $\gamma \in X$  che parte da  $x_0$  e che termina in  $U$ , poniamo  $U_{[\gamma]} = \{[\gamma \circ \eta] \text{ con } \eta \text{ cammino in } U \text{ t.c. } \eta(0) = \gamma(1)\}$ .

- Esistenza del rivestimento associato al sottogruppo.

Si considerano  $[\gamma], [\beta] \in \tilde{X}$ , rivestimento universale costruito nel punto precedente, e si pone per definizione  $[\gamma] \sim [\beta] \iff \gamma(1) = \beta(1)$  e  $[\gamma\bar{\beta}] \in H$ . Tale relazione è di equivalenza in  $H$ . Si costruisce  $X_H$  come il quoziente di  $\tilde{X}$  per la relazione  $\sim$  e si mostra che la mappa  $X_H \rightarrow X$ , data dalla corrispondenza  $[\gamma] \mapsto \gamma(1)$ , è un rivestimento.

□

Questo teorema di esistenza è legato alla scelta di un opportuno  $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x)$ . Viene naturale chiedersi che relazione ci sia tra due sottogruppi  $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}'))$  e  $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}''))$ , dove  $x'$  ed  $x''$  stanno nella fibra di  $x_0$ . Si ha il seguente:

**Teorema 1.2.2.** *Preso un rivestimento  $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x)$  con  $p^{-1}(x) = \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n\}$ , si ha che comunque presi  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  i due sottogruppi  $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_i))$  e  $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_j))$  sono coniugati.*

*Dimostrazione.* Diamo solo un'idea del ragionamento. La dimostrazione può essere approfondita in [5, pp. 243- 245].

Consideriamo un cammino  $\tilde{\gamma}$  tra  $\tilde{x}_i$  e  $\tilde{x}_j$  in  $\tilde{X}$  e sia  $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$ ; tale  $\gamma$  è un cappio in  $X$  basato in  $x$ . Abbiamo allora definito il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_i) & \xrightarrow{\phi_{\tilde{\gamma}}} & \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_j) \\ p_* \downarrow & & \downarrow p_* \\ \pi_1(X, x) & \xrightarrow{\phi_\gamma} & \pi_1(X, x) \end{array}$$

dove  $\phi_{\tilde{\gamma}}([f]) = [\tilde{\gamma}^{-1}] \cdot [f] \cdot [\tilde{\gamma}]$  e  $\phi_\gamma$  è definito analogamente. Tale diagramma risulta essere commutativo. Conseguentemente  $\phi_\gamma$  mappa  $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_i))$  in  $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_j))$ , e quindi potremo riscrivere il diagramma come segue

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_i) & \xrightarrow{\phi_{\tilde{\gamma}}} & \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_j) \\ p_* \downarrow & & \downarrow p_* \\ p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_i)) & \xrightarrow{\phi_\gamma} & p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_j)). \end{array}$$

Ora le due  $p_*$  sono isomorfismi e la  $\phi_\gamma$  lo è (si veda [5, pp. 154- 155]). Quindi anche  $\phi_\gamma$  è isomorfismo, ed è esattamente la mappa di coniugio. □

Dopo aver preso in considerazione l'esistenza del rivestimento associato ad un sottogruppo del gruppo fondamentale, ci andiamo ad occupare della sua unicità (a meno di isomorfismo).

**Definizione 1.2.6.** *Siano dati due rivestimenti  $p_1 : (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \rightarrow (X, x_0)$  e  $p_2 : (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2) \rightarrow (X, x_0)$ . Un isomorfismo di rivestimenti è un omeomorfismo  $f : (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \rightarrow (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$  tale che il seguente diagramma commuti:*

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) & \xrightarrow{f} & (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2) \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & (X, x_0) & \end{array}$$

Questo in particolare significa che  $f$  conserva la struttura di spazio di rivestimento mandando  $p_1^{-1}(x)$  in  $p_2^{-1}(x)$  per ogni  $x \in X$ .

**Proposizione 1.2.4.** *Due rivestimenti  $p_1 : (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \rightarrow (X, x_0)$  e  $p_2 : (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2) \rightarrow (X, x_0)$  sono isomorfi, con isomorfismo  $f$  che porta  $\tilde{x}_1 \in p_1^{-1}(x_0)$  in  $\tilde{x}_2 \in p_2^{-1}(x_0)$  se e solo se  $p_{1*}(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) = p_{2*}(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$ .*

*Dimostrazione.* L'implicazione verso destra è immediata per la definizione di isomorfismo di rivestimenti. Per quanto riguarda l'altro verso si usa il teorema di sollevamento dei cammini per ciascuno dei due rivestimenti andandosi a costruire due sollevamenti  $\tilde{p}_1 : (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \rightarrow (X, x_0)$  e  $\tilde{p}_2 : (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2) \rightarrow (X, x_0)$  di  $p_1$  e  $p_2$ . Quindi sarà  $p_2\tilde{p}_1 = p_1$  e  $p_1\tilde{p}_2 = p_2$ . Per unicità del sollevamento sarà  $\tilde{p}_1 \circ \tilde{p}_2 = id$  e  $\tilde{p}_2 \circ \tilde{p}_1 = id$ , e quindi i due sollevamenti sono uno l'inverso dell'altro e costituiscono l'isomorfismo cercato.  $\square$

Risulta quindi chiaro perchè negli esempi dello spazio proiettivo e del toro ci siano nel primo caso solo due rivestimenti, mentre nel secondo infiniti: infatti i sottogruppi di  $\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}_2$  sono solo due, mentre i sottogruppi di  $\pi_1(\mathbb{T}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  sono infiniti.

Un accenno va dedicato ad una classe particolare di rivestimenti, detti regolari (o normali). Ad essi, nella teoria delle estensioni algebriche di campi, corrispondono le estensioni di Galois.

Come abbiamo appena visto, quando lo spazio  $X$  ammette rivestimento universale, ogni sottogruppo di  $\pi_1(X, x)$  è realizzato da un rivestimento. Tale esistenza è tuttavia legata alla scelta del punto base nella fibra. I rivestimenti regolari sono quelli per cui  $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$  è normale in  $\pi_1(X, x)$  qualunque sia la scelta del punto  $\tilde{x} \in \tilde{X}$ .

Dal teorema 1.2.2 segue praticamente subito che se un rivestimento ammette un punto  $\tilde{x}$  per cui il sottogruppo  $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$  sia normale, allora il rivestimento è normale.



### 1.3 Automorfismi di rivestimento e monodromia

Nella sezione precedente abbiamo già visto il concetto di isomorfismo di rivestimenti. Se andiamo a considerare l'insieme di tutte le mappe  $\varphi$  tali che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{X} \\ & \searrow p & \swarrow p \\ & X & \end{array}$$

commuti, ovvero  $p \circ \varphi = p$ , avremo un insieme di isomorfismi, detto gruppo degli automorfismi del rivestimento  $p$  ed indicato con  $Aut(p)$ . La verifica che sia effettivamente un gruppo è banale. Andiamo a studiarne ora alcune proprietà.

Prima di proseguire richiamiamo il concetto di azione di gruppo:

**Definizione 1.3.1.** *Dato un gruppo  $G$  ed uno spazio topologico  $X$ , un'azione destra di  $G$  su  $X$  è una mappa  $X \times G \rightarrow X$ , che associa  $(x, g) \mapsto xg$ , e che soddisfa:*

- Per ogni  $x \in X$ ,  $g_1, g_2 \in G$  vale  $(xg_1)g_2 = x(g_1g_2)$ .
- Per ogni  $x \in X$  vale  $x1 = x$ .

Analogamente chiamiamo azione sinistra di  $G$  su  $X$  la mappa  $G \times X \rightarrow X$ , che associa  $(g, x) \mapsto gx$ , tale che per ogni  $x \in X$ ,  $g_1, g_2 \in G$   $g_1(g_2x) = (g_1g_2)x$  e se  $x \in X$  allora  $1x = x$ .

Si pone l'orbita di un punto  $x \in X$  l'insieme  $\{xg : g \in G\}$  e si dice che l'azione di gruppo è transitiva se l'orbita di ogni punto in  $X$  è  $X$  stesso.

Per come è definito  $Aut(p)$  agisce a sinistra sullo spazio di rivestimento in modo naturale e ogni orbita è un sottoinsieme della fibra di un punto.

**Proposizione 1.3.1.** *Sia  $p : (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X, x)$  un rivestimento; allora:*

- a) Per ogni aperto banalizzante  $U \subset X$ , ogni elemento di  $Aut(p)$  permuta le componenti di  $p^{-1}(U)$ .
- b)  $Aut(p)$  agisce transitivamente sulla fibra di ciascun punto se e solo se  $p$  è un rivestimento normale.

*Dimostrazione.* a) Anzitutto notiamo che un automorfismo di rivestimento è in particolare un sollevamento di  $p$ :

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{X} \\ & \nearrow \varphi & \downarrow p \\ \tilde{X} & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

Quindi andiamo a considerare un aperto banalizzante  $U \subset X$  con preimmagine  $p^{-1}(U) = \coprod_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$ . Poichè  $\varphi(U_\alpha)$  è un sottoinsieme connesso in  $p^{-1}(U)$ , dovrà essere contenuto in una componente della preimmagine. Ragionando analogamente con  $\varphi^{-1}$  si ha che  $\varphi(U_\alpha)$  è esattamente una componente.

- b) Supponiamo che il rivestimento  $p$  sia normale. Allora presi  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$  nella stessa fibra, avremo che  $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)) = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_2))$ . Applicando la proposizione 1.2.4 si ottiene l'esistenza dell'automorfismo che porta  $\tilde{x}_1$  in  $\tilde{x}_2$ . Viceversa, se  $Aut(p)$  agisce transitivamente sulla fibra di  $x$ , i gruppi  $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_i))$  sono uguali per ogni  $\tilde{x}_i$  nella fibra di  $x$ , ovvero il rivestimento è normale.  $\square$

**Osservazione 1.3.1.** *Leggendo un automorfismo di rivestimento come sollevamento, in particolare si ottiene (per unicit  del sollevamento) che se due automorfismi coincidono in un punto, allora sono identici.*

A questo punto siamo in grado di dare l'enunciato di un teorema di struttura per  $Aut(p)$ . Ne diamo l'enunciato pi  generale, che fa uso del concetto algebrico di normalizzatore di un sottogruppo.

**Definizione 1.3.2.** *Il normalizzatore di un sottogruppo  $H \subset G$    l'insieme di tutti gli elementi  $g \in G$  tali che  $g^{-1}Hg = H$ . Esso   a sua volta un sottogruppo di  $G$ .*

Vedremo che nel caso dei rivestimenti normali e del rivestimento universale le cose sono pi  immediate.

**Teorema 1.3.1.** *Sia  $p : (\tilde{X}, \tilde{x}) \longrightarrow (X, x)$  un rivestimento. Il gruppo  $Aut(p)$    isomorfo al quoziente*

$$\frac{N(p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})))}{p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))}$$

dove l'isomorfismo   quello indotto dalla mappa  $\psi : N(p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))) \longrightarrow Aut(p)$ , che associa a  $[\gamma]$  l'unico automorfismo di rivestimento  $\varphi$  che porta  $\tilde{x}$  in  $\tilde{x} \cdot [\gamma] = \tilde{\gamma}(1)$ , punto finale dell'unico sollevamento di  $\gamma$  che parte da  $\tilde{x}$ .

*Dimostrazione.* Poniamo  $H = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) \subset \pi_1(X, x)$ , mostriamo che l'applicazione  $\phi : N(H) \longrightarrow Aut(p)$    un omomorfismo suriettivo il cui nucleo    $H$  ed applichiamo il teorema di isomorfismo.

Consideriamo  $[\gamma] \in N(H)$  e sia  $\tilde{\gamma}(1)$  il punto di arrivo del suo sollevamento che parte da  $\tilde{x}$ . Vogliamo mostrare che esiste una  $\varphi \in Aut(p)$  tale che  $\varphi(\tilde{x}) = \tilde{\gamma}(1)$ . Per la proposizione 1.2.4 ci basta provare che  $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{\gamma}(1)))$ . Andiamo quindi a considerare l'isomorfismo  $\phi_{\tilde{\gamma}} : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \longrightarrow \pi_1(\tilde{X}, \tilde{\gamma}(1))$  definito nella dimostrazione del teorema 1.2.2. Dal diagramma

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) & \xrightarrow{\phi_{\tilde{\gamma}}} & \pi_1(\tilde{X}, \tilde{\gamma}(1)) \\ p_* \downarrow & & \downarrow p_* \\ p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) & \xrightarrow{\phi_{\gamma}} & p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{\gamma}(1))). \end{array}$$

si ottiene  $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{\gamma}(1))) = p_*\phi_{\tilde{\gamma}}\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) = \phi_{\gamma}p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) = [\gamma]^{-1}H[\gamma] = H = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ . Quindi la  $\varphi$  cercata esiste ed   unica (per l'osservazione 1.3.1).

Per mostrare che  $\psi$    un omomorfismo consideriamo  $[\gamma_1], [\gamma_2] \in N(H)$  e poniamo  $\psi(\gamma_i) = \varphi_i$ , in modo che  $\varphi_i(\tilde{x}) = \tilde{\gamma}_i(1)$ . Definiamo inoltre  $\varphi_{12} = [\gamma_1 \cdot \gamma_2]$ , con  $\varphi_{12}(\tilde{x}) = \widetilde{\gamma_1 \cdot \gamma_2}(1)$ . Dobbiamo cos  mostrare che  $\varphi_{12} = \varphi_1 \circ \varphi_2$ ; avendo visto che

due automorfismi di rivestimento o coincidono o sono diversi in ogni punto, ci basterà mostrare che l'uguaglianza è vera in  $\tilde{x}$ , ovvero che  $\widetilde{\gamma_1 \cdot \gamma_2}(1) = \varphi_1(\tilde{\gamma}_2(1))$ . Ora il sollevamento  $\tilde{\gamma}_2$  di  $\gamma_2$  è un cammino in  $\tilde{X}$  che parte da  $\tilde{x}$ ; inoltre, poiché  $p \circ \varphi_1 = p$  anche l'immagine di  $\gamma_2$  rispetto a  $\varphi_1$  è a sua volta un sollevamento di  $\gamma_2$ , che però comincia in  $\tilde{\gamma}_1(1)$ . Si ha quindi che  $\varphi_{12} = \widetilde{\gamma_1 \cdot \gamma_2}(1) = \tilde{\gamma}_1 \cdot (\varphi_1 \circ \tilde{\gamma}_2)(1) = \varphi_1 \circ \tilde{\gamma}_2(1) = \varphi_1(\varphi_2(\tilde{x}))$ , come cercato.

Per la suriettività di  $\psi$  andiamo a considerare  $\varphi \in \text{Aut}(p)$ , prendiamo  $\tilde{x}' = \varphi(\tilde{x})$  e sia  $\tilde{\gamma}$  un cammino in  $\tilde{X}$  da  $\tilde{x}$  in  $\tilde{x}'$ . Ovviamente  $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$  sarà un cappio in  $X$ . In più per la proposizione 1.2.4 avremo  $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}'))$ . D'altra parte  $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}')) = \phi_\gamma p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$  e quindi  $\phi_\gamma p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ . Questo è equivalente a dire che  $[\gamma] \in N(H)$  e  $\psi([\gamma]) = \varphi$ .

Resta infine da dimostrare che il nucleo della  $\psi$  è  $H$ . Prendiamo in considerazione  $[\gamma] \in N(H)$ . Nelle notazioni precedentemente adottate,  $\varphi$  è l'identità se e solo se  $\varphi(\tilde{x}) = \tilde{\gamma}(1) = \tilde{x}$ , ovvero  $\gamma$  è un cappio in  $\tilde{X}$ ; in definitiva  $\varphi$  è l'identità se e solo se  $[\gamma] = [p \circ \tilde{\gamma}] = p_*([\tilde{\gamma}])$  per un qualche  $[\tilde{\gamma}] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ , ovvero  $[\gamma] \in H$ .  $\square$

E' praticamente immediato verificare il seguente corollario:

**Corollario 1.3.1.** • *Se il rivestimento  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  è normale,  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  ed  $x = p(\tilde{x})$ , allora  $\text{Aut}(p) \cong \pi_1(X, x)/p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ .*

• *Se  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  è rivestimento universale, allora per ogni  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  la mappa  $\psi$  del teorema 1.3.1 è un isomorfismo tra  $\pi_1(X, x)$  ed  $\text{Aut}(p)$ , dove  $x = p(\tilde{x})$ .*

Andiamo ad introdurre ora un ulteriore strumento di studio per i rivestimenti, che si rivelerà molto importante soprattutto nel secondo capitolo quando andremo a parlare di rivestimenti ramificati: la monodromia.

Questa ci fornisce un modo di rappresentare il gruppo fondamentale di uno spazio topologico  $X$  in termini del gruppo simmetrico  $S_d$ , dove  $d$  indica il grado del rivestimento  $p : \tilde{X} \rightarrow X$ .

**Definizione 1.3.3.** *Dato un rivestimento  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  di grado  $d$ , si definisce la sua monodromia come l'applicazione  $\rho : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \{\text{permutazioni su } p^{-1}(x_0)\}$ . Essendo  $\{p^{-1}(x_0)\}$  un insieme di  $d$  elementi, viene naturale identificare tale insieme con  $S_d$ , il gruppo simmetrico su  $d$  elementi.*

Vediamo un po' più nel dettaglio come opera questa mappa:

Andiamo a considerare l'insieme  $I = \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_d\} = p^{-1}(x_0)$  e prendiamo  $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ ; poniamo  $\tilde{\gamma}_i$  il sollevamento di  $\gamma$  che parte da  $\tilde{x}_i$  e chiamiamo  $\tilde{\gamma}_i(1)$  il suo punto finale; ovviamente  $\tilde{\gamma}_i(1) \in I$ .

Possiamo quindi costruirci una permutazione su  $I$  ponendo:

$$\tilde{x}_1 \mapsto \tilde{\gamma}_1(1)$$

$$\tilde{x}_2 \mapsto \tilde{\gamma}_2(1)$$

$$\vdots$$

$$\tilde{x}_d \mapsto \tilde{\gamma}_d(1)$$

Chiamiamo  $\sigma_\gamma$  la permutazione associata a  $\gamma$  appena costruita.

Abbiamo così dato esplicitamente l'azione di monodromia, che quindi assocerà  $[\gamma] \longrightarrow \sigma_\gamma$ . A questo punto verificare che tale applicazione è un omomorfismo è praticamente immediato. Infatti presi due cappi si ha che il loro sollevamento non è altro che la composizione dei sollevamenti di ciascuno dei due sollevato separatamente dall'altro.

**Osservazione 1.3.2.** *Questa definizione di monodromia nel caso di un rivestimento di grado finito ci consente di lavorare abbastanza agevolmente. Tuttavia nel caso di rivestimenti di grado infinito si va ad incorrere in un problema: non è infatti definito il gruppo delle permutazioni su infiniti elementi.*

*Si generalizza allora la definizione ponendo  $\rho : p^{-1}(x_0) \times \pi_1(X, x_0) \longrightarrow p^{-1}(x_0)$ , ed associando  $(\tilde{x}_i, [\gamma]) \longmapsto \tilde{\gamma}_i(1)$ . Così facendo quando il rivestimento è di grado finito ritroviamo la definizione data precedentemente, mentre per i rivestimenti di grado infinito non si creano problemi.*

A priori non è affatto scontato che la definizione dell'applicazione di monodromia che abbiamo dato sia ben posta. Bisogna infatti verificare che dati due cammini omotopi in  $X$  i cui sollevamenti partono dallo stesso punto in  $\tilde{X}$  abbiano anche lo stesso punto di arrivo. Dal teorema di sollevamento delle omotopie si dimostra facilmente il seguente:

**Corollario 1.3.2** (Teorema di Monodromia). *Sia  $p : \tilde{X} \longrightarrow X$  e siano  $f_1$  ed  $f_2$  due cammini omotopi in  $X$ ; allora, presi due sollevamenti  $\tilde{f}_1$  e  $\tilde{f}_2$ , rispettivamente di  $f_1$  ed  $f_2$ , che partono dallo stesso punto  $\tilde{x}_0$ , si ha che  $\tilde{f}_1(1) = \tilde{f}_2(1)$ , ovvero i due sollevamenti hanno anche lo stesso punto di arrivo.*

Alla luce di questo fatto l'applicazione è ben definita.

L'importanza della monodromia consiste nell'essere fondamentale il ponte tra la teoria dei rivestimenti e la teoria dei gruppi. Essa ci consente quindi di esaminare problemi geometrici dal punto di vista algebrico e viceversa. Ad esempio, come vedremo sempre nel secondo e terzo capitolo, il problema della realizzabilità di rivestimenti ramificati sulla sfera viene tradotto in una questione di teoria dei gruppi.

## Capitolo 2

# Rivestimenti ramificati e formula di Riemann-Hurwitz

### 2.1 Rivestimenti ramificati

I rivestimenti ramificati costituiscono una sorta di estensione della teoria dei rivestimenti che abbiamo studiato finora. Essi sono in sostanza dei rivestimenti in cui compare un insieme discreto di punti per i quali viene a mancare la proprietà di omeomorfismo locale e che tuttavia hanno comunque un comportamento in un qualche modo controllato intorno a tali punti (ad esempio la mappa complessa  $z \mapsto e^{\frac{1}{z}}$  non rientra nella nostra categoria poiché intorno a  $z = 0$  assume infiniti valori). Tale insieme è detto parte singolare (o insieme dei punti di ramificazione) del rivestimento ramificato.

Nella nostra trattazione ci limiteremo allo studio dei rivestimenti ramificati tra superfici compatte.

Si danno per acquisiti i concetti di funzione olomorfa e meromorfa su  $\mathbb{C}$ .

Per entrare subito nell'argomento, prima di dare la definizione formale, cominciamo con un esempio, pietra miliare della teoria.

**Esempio 2.1.1.** La mappa dal piano complesso in sé, definita da  $z \mapsto z^n$ , è un rivestimento ramificato di grado  $n$  con un unico punto di ramificazione nell'origine. Infatti ogni punto in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  ha esattamente  $n$  preimmagini, mentre l'unica preimmagine dell'origine è l'origine stessa.

Ovviamente questo discorso è vero anche per ogni mappa definita dal disco complesso di raggio  $\rho$   $D_\rho$  centrato nell'origine in sé. Per capire meglio, in figura si vede l'idea del funzionamento di un rivestimento ramificato di grado 4 del disco.

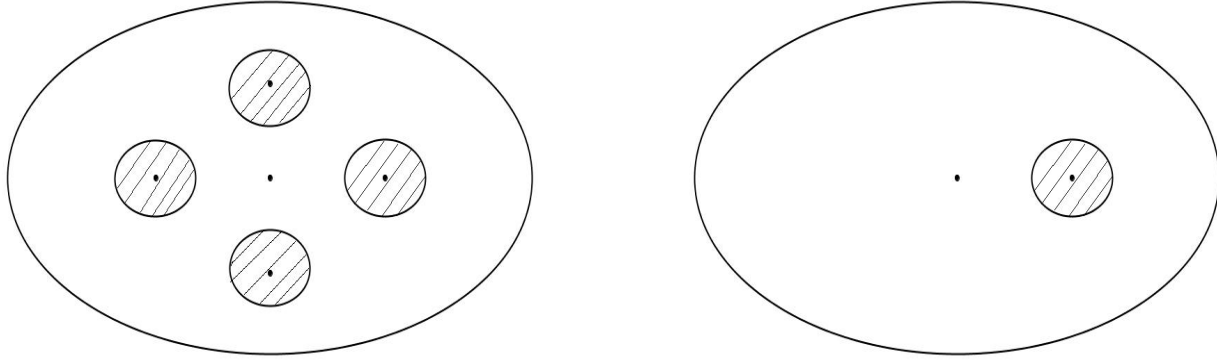


Figura 2.1: Rivestimento ramificato di grado 4 del disco.

**Osservazione 2.1.1.** *In realtà la figura non rappresenta la mappa  $z \mapsto z^4$ , bensì  $z \mapsto \frac{z^4}{|z|^3}$ . Più avanti vedremo perché si è legittimati a pensare le cose in questa maniera.*

D'ora in avanti indicheremo con  $D$  il disco complesso unitario, ovvero  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ .

**Definizione 2.1.1.** *Siano  $A, B$  due chiusi omeomorfi a  $D$ . Diremo che una mappa  $f : A \rightarrow B$  è un rivestimento ramificato elementare se esistono due omeomorfismi  $\varphi : A \rightarrow D$  e  $\psi : B \rightarrow D$  che portino rispettivamente  $\partial A$  e  $\partial B$  in  $\partial D$  e tali per cui il seguente diagramma commuti:*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ D & \xrightarrow{z^n} & D. \end{array}$$

Chiameremo tale  $n$  grado locale del rivestimento ramificato elementare.

**Definizione 2.1.2.** *Sia  $f : Y \rightarrow X$  una mappa continua tra superfici. Diremo che  $f$  (o analogamente lo spazio  $Y$ ) è rivestimento ramificato di  $X$  se esiste un insieme finito di punti  $R = \{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ , detto insieme di ramificazione di  $X$ , per cui  $f|_{Y \setminus f^{-1}(R)} : Y \setminus f^{-1}(R) \rightarrow X \setminus R$  sia un rivestimento tale che:*

- per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$  esiste  $B_i$  intorno di  $x_i$  omeomorfo a  $D$  per cui  $f^{-1}(B_i) = \bigcup_{j=1}^{n_i} A_{i,j}$
- per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$  e per ogni  $j \in \{1, \dots, n_i\}$  la mappa  $f|_{A_{i,j}} : A_{i,j} \rightarrow B_i$  sia un rivestimento ramificato elementare di grado locale  $d_{i,j}$

Il numero  $n_i$ , che chiameremo molteplicità di  $x_i$ , indica la cardinalità della fibra del punto  $x_i$ .

Diremo che la mappa  $f|_{Y \setminus f^{-1}(R)} : Y \setminus f^{-1}(R) \rightarrow X \setminus R$  è il rivestimento associato al rivestimento ramificato.

Un rivestimento ramificato ha grado  $d$  se il suo rivestimento associato ha grado  $d$ . Ovviamente quello che a noi interessa studiare è il comportamento di  $f$  intorno

ai punti di ramificazione, visto che per il resto dello spazio valgono i risultati già visti per i rivestimenti.

Prima cosa da notare è che dato un intorno  $U$  di un punto di ramificazione, la restrizione  $f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \rightarrow U$  è a sua volta un rivestimento ramificato (segue direttamente dalla proposizione 1.2.1 sui rivestimenti).

Viene invece a mancare il fatto che la fibra di ogni punto abbia la stessa cardinalità. Questo problema viene aggirato abbastanza agevolmente usando la nozione appena introdotta di grado locale.

Si osservi che questa nozione è buona anche per i punti di non ramificazione del rivestimento ramificato. Semplicemente ci dice che un punto di non ramificazione in  $X$  ha grado locale uguale a 1, ovvero in corrispondenza di quel punto (e conseguentemente in un suo intorno opportunamente piccolo) abbiamo un rivestimento non ramificato.

**Nota 2.1.1.** Per snellire un po' la notazione poniamo  $d_y := d_{i,j}$  il grado locale del  $j$ -esimo punto della preimmagine di  $x_i$

**Proposizione 2.1.1.** Sia  $f : Y \rightarrow X$  un rivestimento ramificato con insieme di ramificazione  $R = \{x_1, \dots, x_n\}$  e di grado  $d$ . Allora per ogni punto  $x \in X$  si ha che  $d = \sum_{y \in f^{-1}(x)} d_y$ .

*Dimostrazione.* Anzitutto per ogni punto  $x \in (X \setminus R)$  si ha che il grado locale di ciascun punto in  $f^{-1}(x)$  è uguale ad 1 e poiché la fibra ha esattamente  $d$  elementi avremo che  $\sum_{y \in f^{-1}(x)} d_y = \sum_{k=1}^d 1 = d$ . Sia ora  $U_i$  intorno di  $x_i$  in  $X$ ; ogni  $y \in f^{-1}(x_i)$  avrà un determinato grado locale di ramificazione  $d_y$ , ovvero preso un intorno opportuno  $V_{i,y}$  di  $y$ , avremo che la mappa  $f|_{V_{i,y}} : V_{i,y} \rightarrow U_i$  è un rivestimento ramificato di grado  $d_y$ . Quindi, poiché per i punti in  $U_i$  che non sono di ramificazione abbiamo un rivestimento di grado  $d$ , deve essere  $d = \sum_{y \in f^{-1}(x_i)} d_y$ , ovvero quello che si voleva.  $\square$

Andiamo a vedere alcuni esempi di rivestimenti ramificati.

**Esempio 2.1.2.** Le funzioni polinomiali della sfera in sé sono tutte dei rivestimenti ramificati, dove i punti di ramificazione sono quelli in cui la derivata si annulla; il loro grado locale di ramificazione è l'ordine con cui si annulla la derivata +1. Vediamo un esempio numerico:

Pensiamo anzitutto la sfera come  $\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \hat{\mathbb{C}}$  e consideriamo la funzione  $p : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  definita da  $p(z) = z^3 - 3z$ . Questa ha derivata  $p'(z) = 3(z^2 - 1)$ , che si annulla in  $\pm 1$ ; i punti di ramificazione sono quindi  $\pm 1$ . Per calcolarci la loro preimmagine dobbiamo vedere per quali  $z$  vale  $p(z) = p^{-1}(\pm 1)$ . Per  $z = 1$  avremo  $z^3 - 3z + 2 = 0$ , che scompone in  $(z - 1)^2(z + 2)$ ; quindi in definitiva avremo che  $p^{-1}(1) = \{1, -2\}$ , dove 1 e  $-2$  hanno grado locale di ramificazione rispettivamente 2 ed 1. Ragionando analogamente si vede che  $p^{-1}(-1) = \{-1, 2\}$ , dove il grado locale di ramificazione dei due punti è rispettivamente 2 ed 1.

Resta ora da vedere il comportamento della funzione in  $z = \infty$ . Per fare ciò andiamo a considerare le due mappe  $\varphi$  e  $\psi$ , che associano entrambe  $z \mapsto \frac{1}{z}$  ed andiamo a considerare  $\varphi^{-1} \circ p \circ \psi(z) = \frac{1}{z^{-3} - 3z^{-1}} = \frac{z^3}{1 - 3z^2}$ . Ragionando come fatto per  $\pm 1$  si verifica che all'infinito questa funzione ha un punto di ramificazione di grado locale uguale a 3.

L'esempio appena visto in realtà è un caso particolare di un fatto più generale, ovvero che le funzioni olomorfe tra due superfici sono sempre rivestimenti ramificati, dove l'insieme dei punti di ramificazione è costituito da quei punti in cui il differenziale della funzione si annulla; il grado locale di ramificazione è l'ordine con cui si annulla la derivata  $+1$ . Tralasciamo la dimostrazione di questo fatto che ci porterebbe fuori argomento rispetto agli obiettivi che ci siamo preposti. Vediamo un altro esempio:

**Esempio 2.1.3.** La sfera con  $g$  manici, indicata con  $\Sigma_g$ , ammette sempre un rivestimento ramificato con  $2g + 2$  punti di ramificazione. Per vederlo andiamo a considerare l'asse di simmetria di  $\Sigma_g$  ed identifichiamo tutti i punti che sono simmetrici rispetto a tale asse. Lo spazio quoziente che si ottiene è omeomorfo ad una sfera. Avremo quindi una mappa  $f : \Sigma_g \rightarrow \mathbb{S}^2$ , proiezione a quoziente secondo la relazione sopra definita, tale che ogni punto di  $\Sigma_g$  che non stia sull'asse di simmetria abbia due preimmagini, mentre i punti che giacciono su tale asse abbiano un'unica preimmagine. Facendo un semplice conto si vede che i punti di questo secondo tipo sono esattamente  $2g + 2$ . Risulta inoltre evidente che ciascuno di essi ha grado locale uguale a 2.

Per capire meglio nella figura si vede l'esempio con  $g = 3$ .

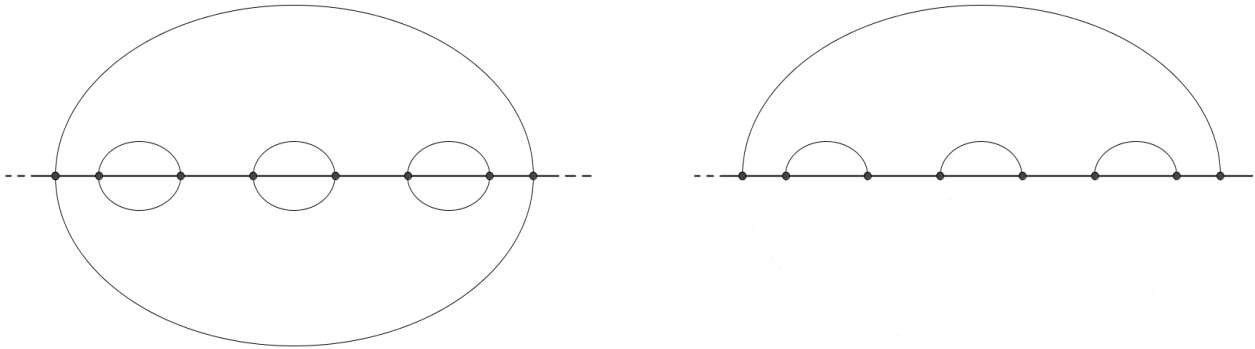


Figura 2.2: Rivestimento ramificato  $f : \Sigma_3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ .

**Osservazione 2.1.2.** *Parlando dei rivestimenti abbiamo introdotto il concetto di automorfismo di rivestimento, che è utile studiare anche nel caso dei rivestimenti ramificati. Basta infatti aggiungere una semplice indicazione su cosa accade nei punti di ramificazione per ottenere il concetto di automorfismo di rivestimento ramificato. Vediamo come:*

*Andiamo a considerare il seguente diagramma*

$$\begin{array}{ccc}
 \hat{S} & \xrightarrow{\varphi} & \hat{S} \\
 f \searrow & & \swarrow f \\
 & S &
 \end{array}$$

*dove la  $f$  è rivestimento ramificato di  $S$ . Diremo che  $\varphi$  è un automorfismo di rivestimento ramificato se il diagramma appena visto commuta.*



Porre una condizione di questo tipo è in realtà equivalente a dire che il diagramma appena visto è l'unica estensione possibile del diagramma commutativo di rivestimenti

$$\begin{array}{ccc}
 \hat{S}_0 & \xrightarrow{\varphi_0} & \hat{S}_0 \\
 & \searrow f_0 & \swarrow f_0 \\
 & S_0 &
 \end{array}$$

in cui per ogni punto di ramificazione la sua preimmagine viene mappata da  $\varphi$  in punti aventi lo stesso grado locale. Infatti per la proposizione 1.3.1 della sezione sugli automorfismi di rivestimento sappiamo che gli elementi di  $p^{-1}(U)$  sono permutati da  $\varphi_0$ ; se andiamo quindi a prendere un intorno di un punto di ramificazione, le componenti della sua preimmagine potranno essere permutate tra loro ogni volta che contengono lo stesso elemento della preimmagine, ma non sarà ammissibile che esse permutino con componenti contenenti elementi della preimmagine diversi tra loro, a meno che non si verifichi la condizione espressa sopra.

Analogamente si estende il concetto di isomorfismo di rivestimenti.

Andiamo ora a mostrare un lemma che ci fornisce un esempio di isomorfismo di rivestimenti ramificati e che ci servirà poi per lavorare più agevolmente nella sezione dedicata alla formula di Riemann-Hurwitz.

**Lemma 2.1.1.** *Sia  $D$  il disco chiuso centrato nell'origine di raggio unitario nel piano complesso. Allora le due mappe  $p_1$  e  $p_2$ , entrambe definite dal disco in sé, che associano rispettivamente  $z \mapsto z^n$  e  $z \mapsto \frac{z^n}{|z|^{n-1}}$  sono due rivestimenti ramificati, ed esiste un isomorfismo di rivestimenti  $f$  che faccia commutare il diagramma*

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{f} & D \\
 & \searrow f_1 & \swarrow f_2 \\
 & D &
 \end{array}$$

*Dimostrazione.* Per mostrare questo risultato ci conviene leggere le due mappe in coordinate polari. Avremo quindi  $p_1$  che associa  $(\rho, \theta) \mapsto (\rho^n, n\theta)$ , mentre  $p_2$  manda  $(\rho, \theta) \mapsto (\rho, n\theta)$ . Anzitutto è praticamente immediato mostrare che entrambe le mappe sono un rivestimento ramificato di grado  $n$  del disco, con un unico punto di ramificazione nell'origine di grado locale  $n$ .

L'isomorfismo  $f$  è dato dalla mappa che associa  $(\rho, \theta) \mapsto (\rho^n, \theta)$ . La verifica che tale mappa faccia effettivamente commutare il diagramma è banale.  $\square$

Questo lemma ci dice quindi che girare sul disco tenendo il raggio fisso oppure girarci variando il raggio sono due cose topologicamente equivalenti, come d'altronde ci si aspetta che accada. Questo spiega perché di solito si tende ad fare un po' di confusione tra le due mappe e giustifica quindi il modo di vedere un rivestimento ramificato del disco come in **figura 2.1**.

L'altro importante oggetto che si è introdotto per i rivestimenti e che ha un suo particolare interesse di studio anche in ambito di rivestimenti ramificati è la monodromia, che viene però studiata a livello locale, poiché a livello globale non è possibile definirla. Supponiamo di avere il rivestimento ramificato  $f : \hat{S} \rightarrow S$  con insieme di ramificazione  $R = \{x_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$  tale che  $f^{-1}(x_i) = \{y_{i,j}\}_{j \in \{1, \dots, n_i\}}$ . Al di

fuori di  $R$  e della sua preimmagine sappiamo già come è definita la monodromia. Andiamo a vedere cosa succede quando il cammino che usiamo per definire la permutazione è un cappio intorno ad un punto di ramificazione.

Per definizione di rivestimento ramificato esisteranno per ogni  $i = \{1, \dots, n\}$  e per ogni  $j = \{1, \dots, n_i\}$  due intorni  $B_i$  e  $A_{i,j}$  rispettivamente di  $x_i$  e di  $y_{i,j}$  tali che la mappa  $f|_{A_{i,j}} : A_{i,j} \rightarrow B_i$  sia del tipo  $z \mapsto z^{d_{i,j}}$ . Studiamo quindi la monodromia del rivestimento ramificato  $f|_{A_{i,j}} : A_{i,j} \rightarrow B_i$ .

Avremo che su  $A_{i,j} \setminus \{y_{i,j}\}$  questa sarà realizzata da una permutazione su  $d_{i,j}$  elementi. Se invece andiamo a considerare cammino con punto base  $x_i$  e prendiamo un suo sollevamento che parta da  $y_{i,j}$ , avremo che questo terminerà in  $A_{i,j}$ ; questo avviene necessariamente leggendo la mappa in termini di  $z \mapsto z^{d_{i,j}}$ . Questo discorso può essere ripetuto per tutti gli indici  $i, j$ . In definitiva si avrà che:

**Proposizione 2.1.2.** *Sia  $f : \hat{S} \rightarrow S$  un rivestimento ramificato di grado  $d$  con insieme di ramificazione  $R = \{x_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$  e sia  $\rho : \pi_1(S_0, x) \rightarrow \{\text{permutazioni su } p^{-1}(x)\}$  l'azione di monodromia. Allora posto  $[\gamma_i]$  il generatore di  $\pi_1(B_i \setminus \{x_i\})$ , per ogni  $i = \{1, \dots, n\}$  si ha che  $\rho([\gamma_i])$  si scompone in  $n_i$  cicli, ciascuno di ordine  $d_{i,j}$ .*

## 2.2 La formula di Riemann-Hurwitz

Prima di dare enunciato e dimostrazione di questo importante risultato dobbiamo prima riprendere il concetto di triangolazione e vedere come esso si comporta con i rivestimenti ed i rivestimenti ramificati.

Visto che stiamo lavorando con delle superfici compatte, il teorema di Radò ci garantisce l'esistenza di una triangolazione finita per ogni superficie che prenderemo in considerazione.

**Osservazione 2.2.1** (Sollevamento di triangolazioni). *Se prendiamo un rivestimento di due superfici  $f_0 : \hat{S}_0 \rightarrow S_0$  ed abbiamo data una triangolazione  $(K_0, g_0)$  di  $S_0$ , allora esiste una triangolazione di  $\hat{S}_0$  univocamente determinata da  $(K_0, g_0)$ . Questo perché in una triangolazione, gli 1-simplessi si possono pensare come cammini tra due punti (i loro vertici, che sono sempre distinti poiché  $K$  è un complesso simpliciale). Conseguentemente il teorema di sollevamento dei cammini ci garantisce che ciascun lato viene sollevato in maniera unica. Essendo poi le facce semplicemente connesse, la loro preimmagine in  $\hat{S}_0$  sarà a sua volta una faccia avente per bordo la preimmagine dei lati che ne costituiscono il bordo in  $S_0$ .*

Per i rivestimenti ramificati bisogna ovviamente stare attenti a cosa succede per i punti di ramificazione. Anzitutto abbiamo che:

**Lemma 2.2.1.** *Sia  $f : \hat{S} \rightarrow S$  un rivestimento ramificato. Allora esiste sempre una triangolazione  $(K, g)$  in cui i punti di ramificazione sono tutti vertici.*

*Dimostrazione.* Sia  $(K', g')$  una triangolazione di  $S$ . All'insieme dei vertici aggiungiamo i punti di ramificazione e costruiamo un raffinamento della triangolazione seguendo le operazioni usate nella dimostrazione del teorema 1.1.2. Otterremo così la triangolazione cercata.  $\square$

Quello che viene a mancare è l'unicità del sollevamento dei cammini. Questo perché la dimostrazione dell'unicità del sollevamento gioca sul fatto che un rivestimento è un omeomorfismo locale e quindi in particolare è iniettivo. Nei punti di ramificazione viene invece a mancare l'iniettività della mappa di rivestimento, e quindi si perde l'unicità.

**Esempio 2.2.1.** Riprendendo l'esempio del rivestimento ramificato  $f : D \rightarrow D$ ,  $z \mapsto z^4$ , di grado 4 del disco. Consideriamo poi una triangolazione del disco composta da tre triangoli, in cui il punto di ramificazione è quello d'intersezione dei triangoli. Alla luce di quanto visto si avrà che ciascun lato che non abbia come vertice il punto di ramificazione avrà un suo sollevamento per ogni punto nella fibra di uno dei suoi due vertici, ovvero solleverà in quattro lati disgiunti tra loro. I tre lati che invece hanno come vertice il punto di ramificazione solleveranno anch'essi in quattro lati, che tuttavia avranno in comune il punto di ramificazione. Le facce vengono poi sollevate di conseguenza. Si veda la **figura 2.3** per capire meglio.

Ricordando che la caratteristica di Eulero è definita come  $\chi(S) = V - L + T$  e che essa non dipende dalla triangolazione scelta, si vede immediatamente che  $\chi(D) = 1$ .

Prima di enunciare Riemann-Hurwitz diamo altri due risultati.

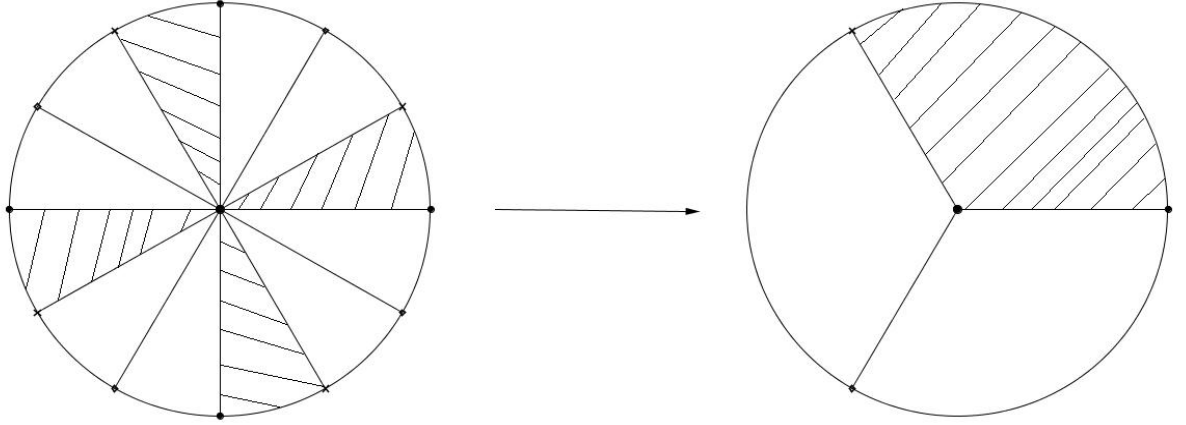


Figura 2.3: Sollevamento di una triangolazione del disco con il rivestimento ramificato  $z \mapsto z^4$ .

**Lemma 2.2.2.** *Sia  $p : \hat{S}_0 \rightarrow S_0$  un rivestimento di grado  $d$ . Allora vale la seguente relazione tra le caratteristiche di Eulero:*

$$\chi(\hat{S}_0) = d\chi(S_0).$$

*Dimostrazione.* Prendiamo una triangolazione  $(K_0, g_0)$  di  $s_0$ . Poiché il rivestimento è di grado  $d$ , ogni vertice di  $K_0$  avrà  $d$  preimmagini, ogni lato solleverà in modo unico per ogni vertice nella preimmagine ed ogni faccia verrà sollevata di conseguenza. In  $\hat{S}_0$  avremo quindi  $d(\# \text{ vertici di } K_0)$  vertici,  $d(\# \text{ lati di } K_0)$  lati e  $d(\# \text{ facce di } K_0)$  facce, da cui l'enunciato.  $\square$

**Lemma 2.2.3.** *Sia  $S_0$  una superficie con bordo e sia  $S$  la superficie ottenuta da  $S_0$  aggiungendo un disco per ogni componente del bordo. Se tali componenti sono  $n$ , allora vale la seguente relazione tra le caratteristiche di Eulero:*

$$\chi(S) = \chi(S_0) + n.$$

*Dimostrazione.* Sappiamo che si può dimostrare che il bordo di una superficie è composto da più componenti disgiunte ciascuna omeomorfa al cerchio. Detto ciò, poiché presi due complessi simpliciali  $K_1, K_2$  la cui intersezione sia a sua volta un complesso vale  $\chi(K_1 \cup K_2) = \chi(K_1) + \chi(K_2) - \chi(K_1 \cap K_2)$ , risulterà, posto  $K_1$  il complesso che triangola  $S_0$  e  $K_2$  una triangolazione del disco,  $\chi(K_1 \cup K_2) = \chi(S_0 \cup D) = \chi(S_0) + 1 - \chi(K_1 \cap K_2)$ . Ma  $K_1 \cap K_2$  è il bordo del disco, per cui vale  $\chi(K_1 \cap K_2) = 0$ , da cui l'enunciato.  $\square$

**Definizione 2.2.1.** *Si chiama indice di ramificazione di un punto  $y_j \in f^{-1}(x_i)$  l'intero  $K_{i,j} = d_{i,j} - 1$ .*

Siamo ora in grado di enunciare e dimostrare la formula di Riemann-Hurwitz:

**Teorema 2.2.1** (Formula di Riemann-Hurwitz). *Sia  $f : \hat{S} \rightarrow S$  un rivestimento ramificato di superfici di grado  $d$  con insieme di ramificazione  $R = \{x_1, \dots, x_m\}$ . Allora vale la seguente relazione tra la caratteristica di Eulero di  $\hat{S}$  e quella di  $S$ :*

$$\chi(\hat{S}) = d\chi(S) - \sum_{i=1}^m K_i,$$

dove  $K_i$  è la somma degli indici di ramificazione del punto  $x_i$ .

*Dimostrazione.* Andiamo a considerare il rivestimento  $p : \hat{S}_0 \rightarrow S_0$  associato ad  $f$ , in cui  $S_0 = S \setminus \bigcup_{i \in \{1, \dots, m\}} B_i$ , dove  $B_i$  è un intorno chiuso del punto di ramificazione  $x_i$ . Per ogni  $i \in \{1, \dots, m\}$  avremo che  $p^{-1}(B_i)$  ha  $n_i$  componenti connesse, ciascuna delle quali avrà un determinato grado  $d_{i,j}$ . Quindi localmente avremo dei rivestimenti ramificati del tipo  $z \mapsto z^{d_{i,j}}$ , per ciascuno dei quali l'indice di ramificazione sarà  $K_{i,j}$ .

Per capire meglio, per ogni punto di ramificazione la situazione sarà quella in figura:

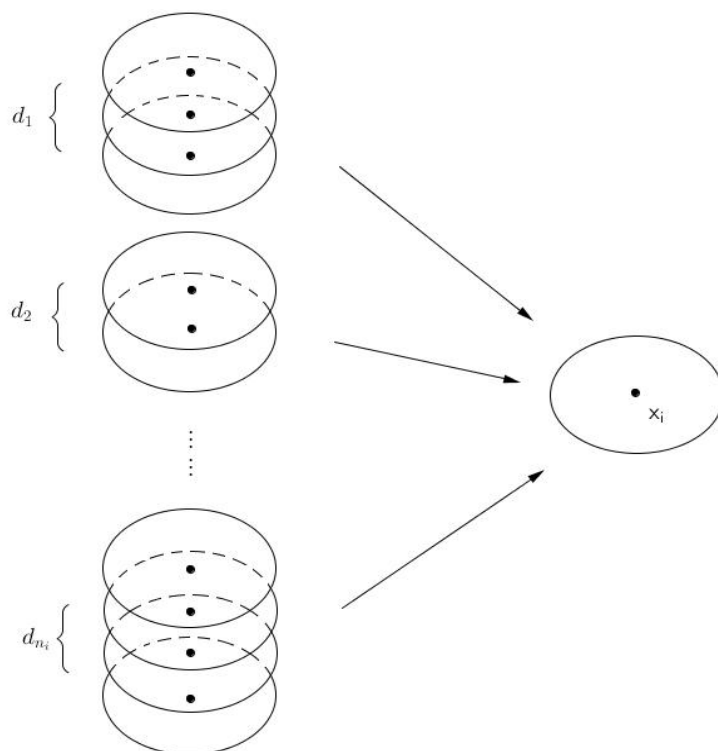


Figura 2.4: Comportamento locale di ogni punto di ramificazione.

Abbiamo inoltre che:

- $\sum_{i=1}^m n_i =$  numero di componenti del bordo di  $\hat{S}_0$ .
- $m = \sum_{i=1}^m 1 =$  numero di componenti del bordo di  $S_0$ .
- $d = \sum_{i=1}^m d_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} d_{i,j}$ .

Risulta quindi:

$$\begin{aligned}
 \chi(\hat{S}) &\stackrel{\text{Lemma 4}}{=} \chi(\hat{S}_0) + \sum_{i=1}^m n_i \\
 &\stackrel{\text{Lemma 3}}{=} d\chi(S_0) + \sum_{i=1}^m n_i \\
 &\stackrel{\text{Lemma 4}}{=} d(\chi(S) - m) + \sum_{i=1}^m n_i \\
 &= d\chi(S) - dm + \sum_{i=1}^m n_i \\
 &= d\chi(S) - \left( \sum_{i=1}^m (d - n_i) \right) \\
 &= d\chi(S) - \left( \sum_{i=1}^m \left( \sum_{l=1}^{n_i} (d_{i,j} - 1) \right) \right) \\
 &= d\chi(S) - \left( \sum_{i=1}^m \left( \sum_{l=1}^{n_i} K_{i,j} \right) \right) \\
 &= d\chi(S) - \sum_{i=1}^m K_i.
 \end{aligned}$$

□

Vediamo un esempio di applicazione della formula di Riemann-Hurwitz:

**Esempio 2.2.2.** Consideriamo la mappa  $f : \Sigma_2 \rightarrow \mathbb{T}$ , dove  $\Sigma_2$  e  $\mathbb{T}$  sono pensati rispettivamente come quozienti dei poligoni con otto e quattro lati con le identificazioni date dalla figura:

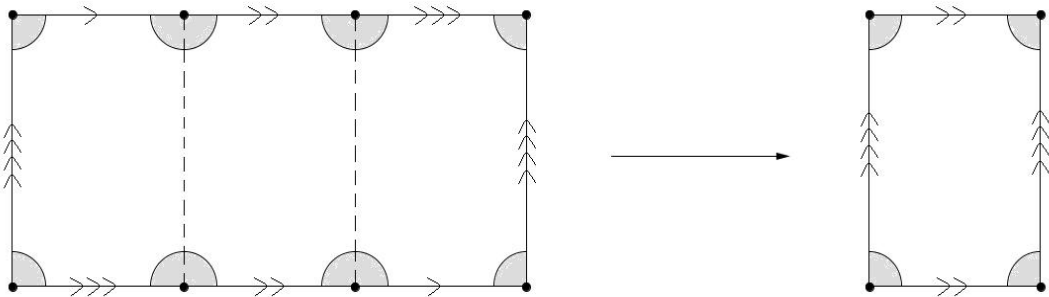


Figura 2.5: Rivestimento ramificato  $f : \Sigma_2 \rightarrow \mathbb{T}$ .

Anzitutto abbiamo che tale mappa è un rivestimento ramificato di grado 3 con unico punto di ramificazione nel vertice del rettangolo che identifica il toro. Tale punto ha grado locale 3, in quanto un suo intorno è costituito dai quattro pezzettini di cerchio, mentre la sua preimmagine ne conta 12. Quindi in definitiva l'intorno viene replicato 3 volte per tutti i suoi punti eccettuato il vertice che invece viene replicato una sola volta. Alla luce di questo il suo indice di ramificazione sarà 2. Ricordiamo poi che la caratteristica di Eulero di  $\mathbb{T}$  è 0.

Abbiamo quindi:

$$\chi(\Sigma_2) = d\chi(\mathbb{T}) - 2 = 3 \cdot 0 - 2 = -2.$$

**Osservazione 2.2.2.** *L'esempio precedente si può generalizzare come segue:*

*Consideriamo la mappa  $f: \Sigma_n \rightarrow \mathbb{T}$ , dove  $\Sigma_n$  lo pensiamo come il poligono con  $4n$  lati identificati a due a due; avremo che tale mappa è un rivestimento ramificato del toro di grado  $2n - 1$ , con unico punto di ramificazione nel vertice del rettangolo, avente indice di ramificazione uguale ad  $2n - 2$ . Ne segue quindi che:*

$$\chi(\Sigma_n) = d\chi(\mathbb{T}) - (2n - 2) = (2n - 1) \cdot 0 - (2n - 2) = -(2n - 2).$$





# Capitolo 3

## La Prime-Degree conjecture

La Prime-Degree conjecture è stata formulata nel 1984 da A. L. Edmonds, R. S. Kulkarni e R. E. Stong ed affonda le sue radici nel problema di esistenza di Hurwitz, risalente al 1891. Questo consiste nel chiedere quando le condizioni necessarie per la realizzabilità di un rivestimento ramificato siano anche condizioni sufficienti. Ovviamente il problema è stato studiato sotto vari punti di vista. In questo capitolo cercheremo di dare un'idea di come funzionano le cose studiandole dal punto di vista topologico-algebrico.

### 3.1 Riemann-Hurwitz: condizione necessaria

Abbiamo visto nel secondo capitolo che ad ogni rivestimento ramificato tra superfici compatte è associato l'insieme finito dei punti di ramificazione ed a ciascuno di essi è associato un determinato grado locale di ramificazione.

L'insieme dei dati associati ad un rivestimento ramificato  $f : \hat{S} \rightarrow S$ , ovvero il grado del rivestimento ramificato ed i gradi locali di ciascun punto di ramificazione, viene chiamato *dato di ramificazione*, ed è rappresentato da una  $(n+1)$ -upla del tipo  $(d, \Pi_1, \dots, \Pi_n)$ , dove  $\Pi_i$  è la partizione di  $d$  individuata dai gradi locali delle preimmagini del punto di ramificazione  $x_i$ .

Ovviamente ogni rivestimento ramificato avrà associato un dato di ramificazione che necessariamente soddisfa la relazione data dalla formula di Riemann-Hurwitz. La domanda interessante è quando questa sia anche sufficiente per la realizzazione del rivestimento ramificato.

Introduciamo un po' di notazione. Poniamo:

- $l(\Pi_i) = n_i$  la lunghezza del ciclo  $\Pi_i$
- $\Pi$  l'insieme delle  $\Pi_i$  associate al rivestimento ramificato
- $l(\Pi)$  la lunghezza totale di  $\Pi$ , ovvero  $l(\Pi_1) + \dots + l(\Pi_n)$

Usando questi dati la formula di Riemann-Hurwitz può essere riscritta come

$$\chi(\hat{S}) - l(\Pi) = d(\chi(S) - n).$$

**Definizione 3.1.1.** *Siano  $\hat{S}$  ed  $S$  due superfici compatte senza bordo, entrambe orientabili. Siano poi  $d \geq 2$ ,  $n \geq 1$  e  $\Pi = \{\Pi_1, \dots, \Pi_n\}$  un insieme di partizioni*

di  $d$ , con  $\Pi_i = (d_{i,1}, \dots, d_{i,n_i})$ . Se questi dati sono tali da verificare la formula di Riemann-Hurwitz allora sono detti compatibili, e la scrittura

$$\hat{S} \xrightarrow[\Pi_1, \dots, \Pi_n]{d:1} S$$

indica il rivestimento ramificato associato al dato di ramificazione, ed è chiamato rivestimento candidato.

Il problema di esistenza posto da Hurwitz chiede appunto quali siano i rivestimenti candidati per i quali esista il rivestimento ramificato  $f : \hat{S} \rightarrow S$  corrispondente al dato di ramificazione. Questi rivestimenti candidati sono detti realizzabili. Quelli che invece non hanno un rivestimento ramificato associato sono detti eccezionali.

Vediamo i casi in cui la formula di Riemann-Hurwitz è condizione necessaria e sufficiente. Premettiamo un lemma che traduce la questione dell'esistenza dei rivestimenti ramificati in termini algebrici attraverso l'uso del gruppo fondamentale:

**Lemma 3.1.1.** *Sia  $S$  una superficie chiusa e connessa e siano  $\Pi = \{\Pi_1, \dots, \Pi_n\}$  partizioni di  $d$ . Allora condizione necessaria e sufficiente affinché esista un rivestimento ramificato  $f : \hat{S} \rightarrow S$  con dato di ramificazione  $(d, \Pi)$  è:*

- i) se  $S = \mathbb{S}^2$  allora devono esistere  $\alpha_i \in S_d$ , tali che  $\alpha_i$  scomponga in cicli di lunghezza a valori in  $\Pi_i$ , per cui:

$$\alpha_1 \cdots \alpha_n = 1$$

e  $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$  agisca transitivamente su  $\{1, \dots, d\}$ .

- ii) se  $S$  è orientabile, ovvero  $S = \#m\mathbb{T}$ , allora devono esistere  $\alpha_i \in S_d$ , tali che  $\alpha_i$  scomponga in cicli di lunghezza a valori in  $\Pi_i$  e  $\beta_j, \gamma_j \in S_d$ , con  $1 \leq j \leq m$  tali che:

$$\alpha_1 \cdots \alpha_n \beta_1 \gamma_1 \beta_1^{-1} \gamma_1^{-1} \cdots \beta_m \gamma_m \beta_m^{-1} \gamma_m^{-1} = 1$$

e  $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \gamma_1, \dots, \beta_m, \gamma_m \rangle$  agisca transitivamente su  $\{1, \dots, d\}$ .

- iii) se  $S$  è non orientabile, ovvero  $S = \#m\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , allora devono esistere  $\alpha_i \in S_d$ , tali che  $\alpha_i$  scomponga in cicli di lunghezza a valori in  $\Pi_i$  e  $\beta_j \in S_d$ , con  $1 \leq j \leq m$  tali che:

$$\alpha_1 \cdots \alpha_n \beta_1^2 \cdots \beta_m^2 = 1$$

e  $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m \rangle$  agisca transitivamente su  $\{1, \dots, d\}$ .

Tralasciamo la dimostrazione di questo lemma che non ci interessa ai fini della trattazione.

Siamo ora in grado di dimostrare la seguente:

**Proposizione 3.1.1.** a) *Siano dati una superficie orientabile  $S$  ed un dato di ramificazione. Se  $\chi(S) \leq 0$  allora il rivestimento candidato è realizzabile.*

- b) *Siano date  $S$  ed  $\hat{S}$  non orientabili ed un dato di ramificazione. Se  $\chi(S) \leq 0$  allora il rivestimento candidato è realizzabile.*

*Dimostrazione.* Vediamo il punto **a**): sia  $S = \sharp m\mathbb{T}$ . Per il lemma 3.1.1 ci basta trovare  $\beta_j, \gamma_j \in S_d$  che verifichino le condizioni sopra indicate. E' inoltre un risultato in algebra che si possa scrivere  $(\alpha_1 \cdots \alpha_n)^{-1} = \beta_1 \gamma_1 \beta_1^{-1} \gamma_1^{-1}$ , dove  $\beta_1$  è un  $d$ -ciclo e  $\beta_i, \gamma_i = 1$  per ogni  $i > 1$ , e così abbiamo concluso. Il punto **b**) si dimostra analogamente utilizzando di nuovo il lemma 3.1.1.  $\square$

Si noti che andando a rivestire una superficie orientabile, la superficie di rivestimento deve essere necessariamente orientabile.

Si è così data risposta affermativa al problema di esistenza di Hurwitz per i casi con  $\chi(S) \leq 0$ . La questione resta quindi aperta per la sfera  $\mathbb{S}^2$  ed il piano proiettivo  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ .

E' stato dimostrato che per quanto riguarda  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  sono realizzabili tutti i rivestimenti in cui la superficie di rivestimento è non orientabile.

Abbiamo quindi due casi in cui il problema non ha ancora trovato risposta:

- il rivestimento  $f : \hat{S} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  in cui  $\hat{S}$  sia orientabile.
- il rivestimento  $f : \hat{S} \rightarrow \mathbb{S}^2$ .

Il seguente risultato ci consente di ricondurre il caso di esistenza di  $f : \hat{S} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  con  $\hat{S}$  orientabile a quello dell'esistenza del rivestimento su  $\mathbb{S}^2$ .

**Proposizione 3.1.2.** *Sia  $S$  non orientabile,  $\hat{S}$  orientabile e sia  $(d, \Pi)$  un dato di ramificazione. Allora esso è realizzabile se e solo se per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$  si possono scomporre le partizioni  $\Pi_i$  in due partizioni  $\Pi'_i, \Pi''_i$  di  $\frac{d}{2}$  in modo che il rivestimento candidato*

$$\hat{S} \xrightarrow[\Pi'_1, \Pi''_1, \dots, \Pi'_n, \Pi''_n]{\frac{d}{2}:1} S',$$

sia realizzabile, dove  $S'$  è il rivestimento doppio orientabile di  $S$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo il rivestimento ramificato  $f : \hat{S} \rightarrow S$  e prendiamo il sollevamento di  $f$  (nel nostro caso esiste sempre, si veda [3] per una dimostrazione di questo fatto) che faccia commutare il diagramma

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{S} \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ \hat{S} & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

dove  $p$  è il rivestimento di grado 2 di  $S$ . Ciascun elemento  $x$  nell'insieme di ramificazione di  $R$  avrà due preimmagini  $x', x''$  in  $\tilde{S}$  e sarà  $\Pi(x) = (\Pi(x'), \Pi(x''))$ , dove  $\Pi(x'), \Pi(x'')$  sono le due partizioni di  $\frac{d}{2}$  indotte dal rivestimento ramificato  $\tilde{f}$ .

Viceversa prendiamo  $\Pi = \{\Pi_1, \dots, \Pi_n\}$  e scriviamo  $\Pi_i = (\Pi'_i, \Pi''_i)$  per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$ , dove  $\Pi'_i, \Pi''_i$  sono due partizioni di  $\frac{d}{2}$ . Prendiamo allora un rivestimento ramificato  $\phi : \hat{S} \rightarrow \tilde{S}$  di grado  $\frac{d}{2}$ , con insieme di ramificazione  $R = \{x'_1, \dots, x'_n, x''_1, \dots, x''_n\}$ , il cui dato di ramificazione sia individuato da  $\{\Pi'_i, \Pi''_i\}$ . Poiché non è restrittivo supporre che  $p(x'_i) = p(x''_i)$ , risulterà che la composizione  $p \circ \phi$  è il rivestimento ramificato cercato.  $\square$

## 3.2 Prime-Degree conjecture

Da quanto visto nella sezione precedente si ha che il problema di esistenza di Hurwitz non ha ancora soluzione quando la superficie rivestita è la sfera. Per questa sappiamo che esistono dei rivestimenti eccezionali. L'esempio più semplice è quello in cui il dato di ramificazione è  $(d = 4, \Pi_1 = (3, 1), \Pi_2 = (2, 2), \Pi_3 = (2, 2))$  e il rivestimento candidato associato è

$$\mathbb{S}^2 \xrightarrow[(3,1)(2,2)(2,2)]{d:1} \mathbb{S}^2,$$

in cui le cose non funzionano semplicemente per incompatibilità delle monodromie dei tre punti di ramificazione.

Nel corso del tempo sono stati mostrati alcuni risultati di non realizzabilità per i dati di ramificazione sulla sfera. Vediamone alcuni in cui lo spazio di rivestimento è a sua volta la sfera.

**Lemma 3.2.1.** *Siano  $a, b > 1$ . Il dato di ramificazione  $(d = ab, \Pi_1 = (a, \dots, a), \Pi_2 = (b + 1, 1, \dots, 1), \Pi_3 = (a, a(b - 1)))$  è compatibile, ma il rivestimento candidato*

$$\mathbb{S}^2 \xrightarrow[(a,\dots,a)(b+1,1,\dots,1)(a,a(b-1))]{d:1} \mathbb{S}^2$$

*è eccezionale.*

*Dimostrazione.* Usando la monodromia possiamo leggere i dati in termini di permutazioni; una partizione come da enunciato sarà rappresentata quindi da 3 cicli  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in S_d$  tali che:

- $\sigma_1$  sia prodotto di  $b$  cicli di lunghezza  $a$
- $\sigma_2$  sia prodotto di un ciclo di lunghezza  $b + 1$  e di  $b(a - 1) - 1$  cicli di lunghezza 1
- $\sigma_3$  sia prodotto di un ciclo di lunghezza  $a$  e di un ciclo di lunghezza  $a(b - 1)$

L'idea della dimostrazione è vedere che fissata  $\sigma_2 = (1, 2, \dots, b + 1) \in S_d$ , qualunque sia la  $\sigma_1$  tale che il sottogruppo generato da  $\sigma_1, \sigma_2$  sia transitivo, allora il prodotto  $\sigma_1 \cdot \sigma_2$  non può essere una permutazione del tipo di  $\sigma_3$ .

I dettagli su come procedere si possono trovare su [3]. □

Questo lemma è stato generalizzato da Pervova e Petronio in [7] al seguente teorema:

**Teorema 3.2.1.** *Siano  $h, k > 1$ . Sia poi  $(h_j)_{j=1,\dots,p}$  una partizione di  $h$  con  $p > 1$ . Allora il dato di ramificazione  $(d = hk, \Pi_1 = (k, \dots, k), \Pi_2 = (h + p - 1, 1, \dots, 1), \Pi_3 = (kh_1, \dots, kh_p))$  è compatibile, ma il rivestimento candidato*

$$\mathbb{S}^2 \xrightarrow[(k,\dots,k)(h+p-1,1,\dots,1)(kh_1,\dots,kh_p)]{d:1} \mathbb{S}^2$$

*è eccezionale.*

La dimostrazione di questo fatto generalizzato è piuttosto complicata e si rimanda all'articolo sopra citato per i dettagli. Ulteriori risultati di non realizzabilità riguardano ad esempio i casi in cui il grado  $d$  del rivestimento sia pari. Ad esempio è stato dimostrato che i rivestimenti con  $d = 2k$  pari e nella forma

$$\mathbb{S}^2 \xrightarrow[(2k-2,2)(2,\dots,2)(2,\dots,2)]{2k:1} \mathbb{S}^2$$

$$\mathbb{S}^2 \xrightarrow[(2k-2,2)(2,\dots,2)(k+1,1,\dots,1)]{2k:1} \mathbb{S}^2$$

sono entrambi non realizzabili.

Si è notato nel corso del tempo che nessun caso di rivestimento eccezionale compare quando il grado è primo. E' quindi stata formulata la seguente:

**Congettura 3.2.1** (Prime-Degree conjecture). *Un rivestimento candidato  $\hat{S} \xrightarrow[\Pi]{d:1} \mathbb{S}^2$  con dato di ramificazione compatibile e  $d$  primo è realizzabile.*

A supporto di tale congettura sono stati dimostrati importanti risultati di realizzabilità. Ad esempio in [10] è stato visto che:

**Teorema 3.2.2.** • *Se  $d = 4k + 1$  con  $k \in \mathbb{N}$  allora il rivestimento*

$$\hat{S} \xrightarrow[\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3]{d:1} \mathbb{S}^2,$$

*individuato dalle partizioni  $\Pi_1 = \Pi_2 = \underbrace{(2, \dots, 2)}_{2k}, 1$  e  $\Pi_3 = \underbrace{(4, \dots, 4)}_k, 1$  è realizzabile se e solo se  $d$  si può scrivere nella forma  $x^2 + y^2$ , con  $x, y \in \mathbb{N}$ .*

• *Se  $d = 6k + 1$  con  $k \in \mathbb{N}$  allora il rivestimento*

$$\hat{S} \xrightarrow[\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3]{d:1} \mathbb{S}^2,$$

*individuato dalle partizioni  $\Pi_1 = \underbrace{(2, \dots, 2)}_{3k}, 1$ ,  $\Pi_2 = \underbrace{(3, \dots, 3)}_{2k}, 1$  e  $\Pi_3 = \underbrace{(6, \dots, 6)}_k, 1$  è realizzabile se e solo se  $d$  si può scrivere nella forma  $x^2 + xy + y^2$ , con  $x, y \in \mathbb{N}$ .*

Questo fatto è a supporto della prime-degree conjecture poiché è noto dalla teoria dei numeri che

- i primi nella forma  $4k+1$  si possono scrivere sempre come  $x^2 + y^2$ , per  $x, y \in \mathbb{N}$  opportuni (Teorema di Fermat).
- i primi nella forma  $6k + 1$  si possono scrivere sempre come  $x^2 + xy + y^2$ , per  $x, y \in \mathbb{N}$  opportuni (Teorema di Gauss).

Tutti i risultati visti in questo capitolo sono legati al caso in cui l'insieme di ramificazione è costituito da tre soli punti. Lo studio di questo particolare caso è molto interessante, poiché vale il seguente:

**Teorema 3.2.3.** *Se la congettura è valida per i rivestimenti con 3 punti di ramificazione, allora è valida per ogni rivestimento con  $n$  punti di ramificazione*

La dimostrazione di questo fatto è conseguenza dei risultati ottenuti da Edmond, Kulkarni e Stong in [3]. Su tale articolo può essere approfondito lo studio dell'argomento.

### 3.3 Ulteriori approcci allo studio

La ricerca di una soluzione alla congettura via permutazioni è finora risultata sufficientemente efficace, ed ha consentito di ottenere risultati importanti come il lemma 3.2.1. Presenta tuttavia dei limiti computazionali notevoli: lo studio della realizzabilità di un rivestimento ramificato di grado elevato comporta infatti una notevole mole di lavoro.

Si è quindi studiato il problema sotto altri punti di vista; vediamo i tre che ad oggi costituiscono (assieme alle permutazioni) la chiave dello studio:

- **Superfici di Riemann:** E' innegabile che lo studio delle superfici di Riemann ed in particolare delle funzioni meromorfe tra di esse sia strettamente connesso allo studio dell'esistenza dei rivestimenti ramificati. E' infatti un risultato classico nella teoria delle superfici di Riemann che, fissato  $B \in \hat{\mathbb{C}}$  e considerato il suo insieme di ramificazione, esiste una corrispondenza 1-1 tra i tre seguenti insiemi:
  - Classi di equivalenza di funzioni  $f : \hat{S} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  analitiche di grado  $d$  con l'immagine dell'insieme di ramificazione contenuta in  $B$
  - Classi di equivalenza di rivestimenti topologici (non ramificati) che siano estendibili a funzioni meromorfe tali che l'immagine dell'insieme di ramificazione sia contenuta in  $B$
  - Classi di equivalenza di  $|B|$ -uple di permutazioni in  $S_d$  che generano un sottogruppo transitivo e il cui prodotto è l'identità

Tali classi individuano i rivestimenti ramificati e quindi dal punto di vista delle superfici di Riemann il problema di esistenza si traduce nell'esistenza di funzioni analitiche  $f : \hat{S} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  di grado  $d$  con l'immagine dell'insieme di ramificazione contenuta in  $B$ .

- **Dessins d'enfant:** Costituiscono una tecnica classica, introdotta da Grothendieck nel 1984, per studiare le mappe algebriche tra superfici di Riemann. L'idea principale è quella di stabilire una corrispondenza tra i rivestimenti ramificati con 3 punti di ramificazione ed una particolare categoria di grafi, detti bipartiti. Per capire meglio il significato di quanto appena detto diamo la definizione di dessins d'enfant. Ricordiamo prima cosa sia un grafo bipartito.

**Definizione 3.3.1.** *Un grafo bipartito è un complesso simpliciale costituito da 0-simplessi ed 1-simplessi il cui insieme dei vertici spezza in due insiemi disgiunti tali che ogni lato abbia i due vertici che stiano uno nel primo e l'altro nel secondo insieme.*

**Definizione 3.3.2.** *Un dessin d'enfant su di una superficie  $\hat{S}$  è un grafo bipartito  $D \in \hat{S}$  tale che  $\hat{S} \setminus D$  sia composto di dischi aperti. Si pone la lunghezza di ciascuno dei dischi come il numero di vertici del grafo per cui il bordo del disco passa, contati con la loro molteplicità.*

La realizzazione di un dato di ramificazione  $(d, \Pi_1 = (d_{1,1}, \dots, d_{1,n_1}), \Pi_2 = (d_{2,1}, \dots, d_{2,n_2}), \Pi_3 = (d_{3,1}, \dots, d_{3,n_3}))$  corrisponde in questo approccio alla possibilità di costruire un dessin d'enfant i cui insiemi dei vertici abbiano particolari caratteristiche. Per approfondire questo legame si veda [7].

- **Orbifolds:** Il concetto di orbifold è stato introdotto da Satake in un articolo del 1956, ma la nozione attualmente utilizzata è quella che è stata reintrodotta da Thurston durante un corso a Princeton nel 1978, in quanto questa seconda versione mette in evidenza la possibilità di trasportare i concetti del gruppo fondamentale e dei rivestimenti ramificati dalle varietà agli orbifolds. A livello intuitivo il concetto di orbifold è sostanzialmente una generalizzazione di quello di varietà. Per il caso che ci interessa, essi sono superfici chiuse ed orientabili con un insieme finito di punti  $\{p_1, \dots, p_n\}$  intorno ai quali la superficie, letta in carte complesse, sia del tipo  $\frac{\mathbb{C}}{\langle \text{rot}(2\pi/p_i) \rangle}$ , dove  $p_i > 1$  per ogni  $i$ .

L'importanza di questi oggetti per il nostro studio sta nel fatto che ad ogni rivestimento ramificato candidato è associato un rivestimento ramificato tra orbifold, e per studiare questi ultimi oggetti si hanno a disposizione risultati molto più avanzati rispetto a quelli esistenti per i rivestimenti ramificati tra superfici.

Per uno studio di questi metodi si può fare riferimento a [10].



# Bibliografia

- [1] Ahlfors, Lars V. e Sario, Leo (1960), *Riemann Surfaces*, Princeton University Press
- [2] Spanier, Edwin H. (1966), *Algebraic Topology*, McGraw-Hill
- [3] Edmond, Allan L. , Kulkarni, Ravi S. e Stong, Robert E. (1984), *Realizability of branched coverings of surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **282**
- [4] Kinsey, L. Christine (1993), *Topology of Surfaces*, Springer-Verlag
- [5] Lee, John M. (2000), *Introduction to Topological Manifolds*, Springer-Verlag
- [6] Hatcher, Allen (2002), *Algebraic Topology*, Cambridge University Press
- [7] Pervova, Ekaterina e Petronio, Carlo (2006), *On the existence of branched coverings between surfaces with prescribed branch data*, Algebr. Geom. Topol. **6**
- [8] Katok, Anatole e Climenhaga, Vaughn (2008), *Lectures on Surfaces: (Almost) Everything you wanted to know about them*, American Mathematical Society
- [9] Manetti, Marco (2008), *Topologia*, Springer-Verlag
- [10] Pascali, Maria A. e Petronio, Carlo (2009), *Surface branched covers and geometric 2-orbifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **361**



# Ringraziamenti

Ovviamente il mio ringraziamento va a tutte quelle persone che nel corso di questi anni mi sono state vicine.

Un ringraziamento particolare va a tre persone: anzitutto al professor Francaviglia, soprattutto per avermi trasmesso la sua passione ed il suo entusiasmo per la materia, oltre che per avermi dedicato una dose considerevole del suo tempo e per avermi spronato a dovere ogni volta che ce n'è stato bisogno.

Il secondo è per zio Franco che è stato decisivo nel farmi cambiare idea quando avevo praticamente deciso di lasciare l'università.

Il terzo è per Memi, che per tutti questi anni (e soprattutto in questi ultimi sei mesi) si è sorbita con infinita pazienza tutti i miei monologhi senza (quasi) mai mandarmi a quel paese! Se non sono diventato completamente matto probabilmente una buona parte del merito è sua.