ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA

**FAMIGLIE NORMALI PER OPERATORI SUB-ELLITTICI
E I TEOREMI DI MONTEL E KOEBE**

TESI DI LAUREA IN ANALISI MATEMATICA

Relatore:
Chiar.mo Dott.
Andrea Bonfiglioli

Presentata da:
Erika Battaglia

Sessione I

ANNO ACCADEMICO 2012-2013

*Alla mia Famiglia,
la quale mi ha permesso di essere qui oggi.*

*"[...] Non vi è alcuna incompatibilità
tra l'esatto e il poetico.*

Il numero è nell'arte come nella scienza.

*L'algebra è nell'astronomia
e l'astronomia confina con la poesia.*

L'anima dell'uomo ha tre chiavi che aprono tutto:

la cifra, la lettera, la nota.

Sapere, pensare, sognare."

Victor Hugo

Indice

Introduzione	v
1 Ipotesi su $\mathcal{L}$. Laplaciani sub-ellittici	1
1.1 Misura di Haar su un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$	1
1.2 Aggiunto formale di un operatore su un gruppo di Lie	8
1.3 Ipotesi e notazioni principali	11
2 Preliminari Topologici. Spazi di Fréchet	17
2.1 Spazi Vettoriali Topologici	17
2.2 Spazi di Fréchet	22
2.3 Seminorme e Convessità locale	24
2.3.1 Famiglie numerabili e separanti di seminorme	28
2.3.2 Le topologie L^1_{loc} e L^∞_{loc} di $C(\Omega)$	31
3 Rappresentazioni integrali e Formule di Media	33
3.1 La prova delle Formule di Media	33
3.2 Medie Solide	37
4 Un Teorema di tipo Koebe	39
4.1 Prova del Teorema B	39
5 I Teoremi di Montel e Heine-Borel per $\mathcal{H}(\Omega)$	43
5.1 Teorema di Montel	44
5.2 Il Teorema di Heine-Borel per $\mathcal{H}(\Omega)$ e il Lemma E	46
A Il Teorema di Montel per funzioni olomorfe	51

Introduzione

Lo scopo di questa Tesi è di estendere un celebre teorema di P. Montel, sulle famiglie normali di funzioni olomorfe, all'ambiente sub-ellittico delle famiglie di soluzioni u dell'equazione $\mathcal{L}u = 0$, dove $\mathcal{L}$ appartiene ad un'ampia classe di *operatori differenziali alle derivate parziali* (PDOs) reali del secondo ordine in forma di divergenza, comprendente i sub-Laplaciani sui gruppi di Carnot, i Laplaciani sub-ellittici su arbitrari gruppi di Lie, gli operatori ellittici in forma di divergenza, oltre all'operatore di Laplace-Beltrami su varietà di Riemann. A questo scopo, forniremo una versione sub-ellittica di un altro notevole risultato, dovuto a P. Koebe, che caratterizza le funzioni armoniche come punti fissi di opportuni operatori integrali di media. La presenza di nuclei non banali e possibilmente illimitati in questi operatori di media è una delle novità principali rispetto al caso armonico classico.

La nostra ricerca è motivata dal rinnovato interesse per le famiglie normali in diversi contesti (si veda, ad esempio, la recente monografia di Chuang [18] e di Schiff [47], e gli articoli di indagine [54, 55] di Zalcman), questo interesse è ulteriormente rafforzato dal notevole ruolo che le famiglie normali hanno nella Dinamica Complessa. Come anticipato, il nostro lavoro fornisce un contributo allo studio delle famiglie normali di funzioni relative ad operatori sub-ellittici, un ambiente in cui, al meglio delle nostre conoscenze, le famiglie normali non sono ancora state studiate (si vedano le note bibliografiche alla fine di questa introduzione). Notiamo che non è necessario richiedere alcuna ipotesi di ipoellitticità sugli operatori $\mathcal{L}$ coinvolti qui, né particolari assunzioni di Teoria del Potenziale sul fascio delle funzioni $\mathcal{L}$ -armoniche.

Tra i teoremi di normalità che solitamente vanno sotto il nome di Montel (si veda ad esempio, [41]), siamo interessati al seguente, riguardante famiglie *localmente limitate* (si veda ad esempio, [32, Teorema 4, p. 80]): *sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni olomorfe su un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, uniformemente limitata sui sottoinsiemi compatti di Ω ; allora $\mathcal{F}$ è una*

famiglia normale, cioè, dato un qualsiasi insieme compatto $K \subset \Omega$, ogni successione in $\mathcal{F}$ ammette una sottosuccessione che converge uniformemente su K .

Come è ben noto, esiste un teorema di normalità più raffinato dovuto a Montel, che garantisce la normalità per una famiglia di funzioni meromorfe (definite su un dominio del piano complesso e a valori nel piano complesso esteso $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$) omettendo una terna di valori differenti in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Questo risultato è profondamente radicato nella teoria delle funzioni complesse (per esempio, è facile provare a partire da questo risultato il Grande Teorema di Picard), e la sua generalizzazione per l'ampia classe dei PDOs reali che noi stiamo qui considerando, è fuori dalla nostra indagine. È, invece, il criterio di normalità di Montel su famiglie localmente limitate che sembra più adatto ad essere esteso ad altri contesti; per esempio, questo è stato ottenuto in [14, 29] per le mappe olomorfe negli spazi di Banach.

In questa introduzione, segnaliamo alcuni strumenti non banali necessari per estendere al nostro contesto il teorema di normalità già citato per famiglie localmente limitate, come l'uso di un risultato di tipo Koebe (che caratterizza le soluzioni di $\mathcal{L}u = 0$ come punti fissi di opportuni operatori integrali; si veda il Teorema B di seguito), e, soprattutto, un adeguato sostituto della formula integrale di Cauchy (quest'ultima gioca un ruolo chiave nella dimostrazione del teorema di normalità di Montel; si veda il Lemma A). Come sottoprodotti, otterremo risultati sulla topologia delle funzioni $\mathcal{L}$ -armoniche (si veda il Lemma E e il Teorema F di seguito).

Descriviamo ora più da vicino i risultati di questa Tesi. Da ora in avanti, ci occuperemo di PDOs lineari del secondo ordine in $\mathbb{R}^N$ della forma

$$\mathcal{L} := \frac{1}{V} \sum_{i,j=1}^N \partial_{x_i} (V a_{i,j} \partial_{x_j}), \quad (1)$$

dove V è una funzione positiva di classe C^1 su $\mathbb{R}^N$, la matrice $A(x) := (a_{i,j}(x))_{i,j \leq N}$ è simmetrica e semidefinita positiva in ogni punto $x \in \mathbb{R}^N$, con entrate C^1 . Supponiamo che $\mathcal{L}$ sia dotato di una soluzione fondamentale positiva $\Gamma(x, y)$, definita fuori dalla diagonale di $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, con alcune proprietà che le danno un *buon comportamento* (si veda il Capitolo 1 per i requisiti precisi); si veda anche l'Osservazione 1.14 per esempi notevoli di operatori come in (1) a cui si applica la nostra teoria (fra tutti, i Laplaciani sub-ellittici sui gruppi di Lie, quindi, in particolare, i sub-Laplaciani sui gruppi di Carnot; si veda [12]).

Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ è aperto, diciamo che u è $\mathcal{L}$ -armonica in Ω se $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ e $\mathcal{L}u = 0$ in Ω . L'insieme delle funzioni $\mathcal{L}$ -armoniche in Ω sarà denotato con $\mathcal{H}(\Omega)$.

Siano $r > 0$ e $x \in \mathbb{R}^N$, introduciamo l'insieme di sopra-livello di Γ

$$\Omega_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^N : \Gamma(x, y) > 1/r\} \cup \{x\}, \quad (2)$$

che verrà chiamato la Γ -palla di centro x e raggio r .

Sia $\alpha > 0$, se H^α è la misura di Hausdorff α -dimensionale su $\mathbb{R}^N$, poniamo

$$dV^\alpha := V dH^\alpha \quad (3)$$

per denotare la misura assolutamente continua rispetto a H^α con densità V . Saremo interessati solo ai casi in cui $\alpha = N$ e $\alpha = N - 1$.

Sia $x \in \mathbb{R}^N$ e consideriamo le funzioni, definite per $y \neq x$,

$$\Gamma_x(y) := \Gamma(x, y), \quad K(x, y) := \frac{\langle A(y) \nabla \Gamma_x(y), \nabla \Gamma_x(y) \rangle}{|\nabla \Gamma_x(y)|}. \quad (4)$$

Se u è una funzione continua su $\partial\Omega_r(x)$, introduciamo il seguente operatore integrale di media

$$m_r(u)(x) := \int_{\partial\Omega_r(x)} u(y) K(x, y) dV^{N-1}(y). \quad (5)$$

Notiamo che la misura $K(x, y) dV^{N-1}(y)$ è non negativa, poiché A è semidefinita positiva (proveremo che $\partial\Omega_r(x)$ ha misura 1 rispetto a $K(x, y) dV^{N-1}(y)$, il che motiva il nome di operatore di *media*). Gli operatori di media come (5) forniscono molti strumenti versatili nello studio dei PDOs sub-ellittici: per esempio, sono utilizzati per caratterizzare le funzioni $\mathcal{L}$ -subarmoniche, [8, 11]; possono essere impiegati nello studio del problema di Dirichlet relativo a $\mathcal{L}$ ed ai teoremi di media inversi, [1]; nel caso particolare dei gruppi di Carnot, dove è disponibile una struttura omogenea, possono anche essere usati per ricavare le disuguaglianze di Harnack invarianti e i teoremi di tipo Liouville, [7], oltre ai teoremi di tipo Bôcher per le rimozioni di singolarità, [9]. Come obiettivo di questa Tesi, dimostreremo che sono strumenti utili anche nello studio delle famiglie normali in $\mathcal{H}(\Omega)$.

Il nostro primo risultato nello sviluppo di un'utile teoria delle famiglie normali relative ad $\mathcal{L}$ è la seguente formula di rappresentazione:

Lemma A. *Con le notazioni espresse precedentemente, per ogni funzione u di classe C^2 su un insieme aperto contenente la Γ -palla $\overline{\Omega_r(x)}$, abbiamo*

$$u(x) = m_r(u)(x) - \int_{\Omega_r(x)} \left(\Gamma(x, y) - \frac{1}{r} \right) \mathcal{L}u(y) dV^N(y). \quad (6)$$

*Ci riferiremo alla (6) come la **formula di media superficiale per $\mathcal{L}$** . Come conseguenza, una funzione u di classe C^2 nell'insieme aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ è $\mathcal{L}$ -armonica se e solo se*

$$u(x) = m_r(u)(x), \quad \text{per ogni } \Gamma\text{-palla tale che } \overline{\Omega_r(x)} \subset \Omega. \quad (7)$$

Noi proveremo il Lemma A sfruttando la forma di quasi-divergenza (1) di $\mathcal{L}$ e l'integrazione per parti. La formula (6) estende il risultato in [11, Theorem 3.3] ai nostri operatori come in (1), una classe che contiene strettamente i PDOs considerati in [11].

In linea generale, l'identità (7) gioca il ruolo, per le nostre Γ -palle, giocato dalla formula integrale di Cauchy per le funzioni olomorfe. Inoltre, se A è la matrice identità $N \times N$ e $V \equiv 1$, allora $\mathcal{L} = \Delta$ è il classico operatore di Laplace in $\mathbb{R}^N$; quindi $m_r(u)(x)$ è l'usuale media di u sulla sfera $\partial\Omega_r(x)$, e (7) ci restituisce il teorema di rappresentazione di Gauss per le funzioni armoniche. In particolare, nel Capitolo 3 otterremo dal Lemma A nuove formule integrali di rappresentazione (diverse da quelle ottenute nei lavori [1, 7, 8, 9, 11] menzionati sopra), utili per dimostrare il seguente Teorema B di tipo Koebe. Qui e dappertutto, $C(\Omega)$ denoterà lo spazio vettoriale delle funzioni continue a valori reali definite sull'insieme aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$.

Teorema B (Teorema di tipo Koebe per $\mathcal{H}(\Omega)$). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme aperto. Supponiamo che $u \in C(\Omega)$ soddisfi la seguente condizione:*

$$u(x) = m_r(u)(x), \quad \text{per ogni } \Gamma\text{-palla tale che } \overline{\Omega_r(x)} \subset \Omega. \quad (8)$$

Allora u è di classe C^2 ed è $\mathcal{L}$ -armonica in Ω .

Per il caso dei sub-Laplaciani sui gruppi di Carnot (una sottoclasse dei nostri operatori (1)), un analogo risultato è stato provato in [12, Theorem 5.6.3], denominato il *Teorema di Gauss-Koebe-Levi-Tonelli*: l'identità (8) per le classiche funzioni armoniche in $\mathbb{R}^2$ prende tradizionalmente il nome da Gauss; fu Koebe in [30] che provò, viceversa, che la (8) effettivamente implica l'armonicità (si veda anche Kellogg [28] per alcune estensioni di questo risultato); Levi e Tonelli rilassarono l'ipotesi di continuità

con un'assunzione L^1_{loc} , sostituendo anche la (classica) media superficiale con la media solida. Questa assunzione L^1_{loc} riapparirà anche nel nostro Teorema D di seguito.

Il Teorema B è la chiave di volta nella dimostrazione del nostro principale risultato, il risultato di tipo Montel nel Teorema C di seguito. Per prima cosa fissiamo qualche terminologia. Nel seguito, Ω denoterà sempre un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^N$. Siano $f_n, f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (con $n \in \mathbb{N}$); diciamo che $\{f_n\}_n$ **converge normalmente** ad f se, per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni insieme compatto $K \subset \Omega$, esiste $\bar{n} = \bar{n}(\varepsilon, K) \in \mathbb{N}$ tale che $\sup_K |f_n - f| < \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$. In questo modo la convergenza normale equivale alla convergenza uniforme sui sottoinsiemi compatti di Ω . Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni a valori reali su Ω ; $\mathcal{F}$ è detta **localmente limitata** (per alcuni autori, localmente uniformemente limitata) se, per ogni insieme compatto $K \subset \Omega$, esiste $M = M(K) > 0$ tale che

$$\sup_K |f| \leq M, \quad \text{per ogni } f \in \mathcal{F}. \quad (9)$$

La famiglia $\mathcal{F}$ è detta **normale** se, per ogni successione $\{f_n\}_n$ in $\mathcal{F}$, esiste una sottosuccessione di $\{f_n\}_n$ che converge normalmente alla funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Siamo interessati a caratterizzare famiglie normali di funzioni $\mathcal{L}$ -armoniche: se $\mathcal{F}$ è una tale famiglia normale, e se f è la funzione limite come sopra, non è affatto ovvio se f è $\mathcal{L}$ -armonica oppure no. Noi dimostreremo nel Lemma 5.1 che, di fatti, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, come conseguenza del Teorema B di tipo Koebe.

Teorema C (Teorema di tipo Montel per $\mathcal{H}(\Omega)$). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme aperto. Ogni famiglia localmente limitata di funzioni $\mathcal{L}$ -armoniche in Ω è normale.*

Questo risultato sarà ottenuto semplicemente da quello successivo (che, a sua volta, richiama alla mente il risultato classico di Levi-Tonelli, in cui le norme L^∞ sono sostituite da quelle L^1), che è di un interesse indipendente.

Teorema D. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme aperto. Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni $\mathcal{L}$ -armoniche in Ω . Supponiamo che, per ogni insieme compatto $K \subset \Omega$, esista una costante $M = M(K) > 0$ tale che*

$$\int_K |f| \, dH^N \leq M, \quad \text{per ogni } f \in \mathcal{F}. \quad (10)$$

Allora $\mathcal{F}$ è una famiglia normale.

Chiaramente, il Teorema D implica il Teorema C, in quanto la condizione (9) assicura la condizione (10), poiché $\int_K |f| \, dH^N \leq \sup_K |f| \cdot H^N(K)$. Osserviamo che il

Lemma E di seguito mostrerà che le condizioni nei Teoremi C e D non sono solamente sufficienti per la normalità, ma anche necessarie. Proveremo il Teorema D facendo uso di certi operatori solidi analoghi agli operatori di media (5), convenientemente modellati sulla geometria delle Γ -palle e dei sottoinsiemi compatti di Ω . La prova è inaspettatamente delicata, per la presenza del nucleo $K(x, y)$ nella (5), e per il fatto nuovo della (possibile) illimitatezza di $K(x, y)$ lungo la diagonale. Questo fatto non è visibile nel caso classico delle funzioni armoniche (poiché in questo caso $K \equiv 1$), né nel caso dei sub-Laplaciani sui gruppi di Carnot, poiché opportune posizioni possono essere fatte in modo da ottenere operatori di media con nuclei limitati.

Al fine di introdurre il nostro ultimo principale risultato, è conveniente riformulare i precedenti Teoremi C e D con l'usuale terminologia della teoria degli spazi vettoriali topologici (si veda il Capitolo 2 per le relative definizioni). Con $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ e $\mathcal{T}(\mathcal{Q})$ denotiamo, rispettivamente, la topologia L_{loc}^1 e la topologia L_{loc}^∞ su $X := C(\Omega)$. Allora, un sottoinsieme $\mathcal{F}$ di X è limitato nello spazio vettoriale topologico $(X, \mathcal{T}(\mathcal{Q}))$ se e solo se $\mathcal{F}$ è localmente limitato, cioè, se e solo se, per ogni insieme compatto $K \subset \Omega$, esiste $M = M(K) > 0$ tale che la (9) è soddisfatta. Inoltre, $\mathcal{F}$ è limitata nello spazio vettoriale topologico $(X, \mathcal{T}(\mathcal{P}))$ se e solo se, per ogni insieme compatto $K \subset \Omega$, esiste $M = M(K) > 0$ tale che la (10) è soddisfatta. Quindi, i Teoremi C e D possono essere riformulati dicendo che *i sottoinsiemi limitati degli spazi vettoriali topologici $(\mathcal{H}(\Omega), \mathcal{T}(\mathcal{Q}))$ e $(\mathcal{H}(\Omega), \mathcal{T}(\mathcal{P}))$ sono famiglie normali.*

Inoltre, poiché la convergenza normale è evidentemente equivalente alla convergenza rispetto alla topologia L_{loc}^∞ , una famiglia $\mathcal{F} \subseteq C(\Omega)$ è normale se e solo se $\mathcal{F}$ è un insieme precompatto (cioè, ha chiusura compatta) nello spazio topologico $(C(\Omega), \mathcal{T}(\mathcal{Q}))$. Anche se la topologia L_{loc}^∞ è, in generale, strettamente più fine rispetto alla topologia L_{loc}^1 , esse coincidono su $\mathcal{H}(\Omega)$, come mostra il seguente utile risultato.

Lemma E (Topologia di $\mathcal{H}(\Omega)$ e normalità). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme aperto. La topologia di $\mathcal{H}(\Omega)$ come sottospazio di $(C(\Omega), \mathcal{T}(\mathcal{Q}))$ coincide con la topologia di $\mathcal{H}(\Omega)$ come sottospazio di $(C(\Omega), \mathcal{T}(\mathcal{P}))$. Con queste topologie equivalenti, $\mathcal{H}(\Omega)$ è un sottospazio completo di $C(\Omega)$, quindi è uno spazio di Fréchet.*

Inoltre, dato un insieme $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$, le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. $\mathcal{F}$ è una famiglia normale;
2. $\mathcal{F}$ è un sottoinsieme precompatto di $\mathcal{H}(\Omega)$ (nelle topologie $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ o $\mathcal{T}(\mathcal{Q})$);

3. $\mathcal{F}$ è $\mathcal{T}(\mathcal{Q})$ -limitato, cioè, per ogni insieme compatto $K \subset \Omega$, esiste una costante $M(K) > 0$ tale che $\sup_K |f| \leq M(K)$, per ogni $f \in \mathcal{F}$;
4. $\mathcal{F}$ è $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ -limitato, cioè, per ogni insieme compatto $K \subset \Omega$, esiste una costante $M(K) > 0$ tale che $\int_K |f| dH^N \leq M(K)$, per ogni $f \in \mathcal{F}$.

Ricordiamo che uno spazio vettoriale topologico X è uno **spazio di Heine-Borel** se i sottoinsiemi compatti di X sono precisamente i sottoinsiemi chiusi e limitati di X (la limitatezza è intesa nel senso degli spazi vettoriali topologici).

Dal Lemma E ricaviamo semplicemente il seguente risultato.

Teorema F (Heine-Borel per $\mathcal{H}(\Omega)$). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme aperto. L'insieme $\mathcal{H}(\Omega)$ delle funzioni $\mathcal{L}$ -armoniche in Ω dotato della topologia L^1_{loc} ereditata da $C(\Omega)$ (o, equivalentemente, dotato della topologia L^∞_{loc}) è uno spazio vettoriale topologico di Heine-Borel.*

Chiudiamo l'introduzione con una breve panoramica di recenti riferimenti bibliografici. La teoria delle famiglie normali di funzioni ha una lunga storia che inizia nel 1927 col trattato di Montel [41]: si veda per esempio la Prefazione di [47]. Negli ultimi dieci anni, l'interesse per le famiglie normali di funzioni è notevolmente fiorito: ci limitiamo ad un (non necessariamente esaustivo) elenco dei lavori più recenti: [4, 5, 15, 16, 19, 22, 23, 24, 33, 34, 36, 37, 38, 40, 42, 43, 46, 48, 52, 53]; si vedano anche i recenti studi sulle famiglie normali che condividono valori o funzioni [6, 17, 27, 35, 39, 51, 56, 57]. Questi riferimenti riguardano la normalità nell'ambito della teoria delle funzioni complesse (olomorfe o meromorfe), dove lo studio sulle famiglie normali ha raggiunto risultati più profondi ed esaustivi.

La classe delle mappe normali è stata studiata, nell'ambito dei gruppi di Carnot, in [50].

All'interno dell'ambiente sub-ellittico investigato nella presente Tesi, quando $\mathcal{L}$ è una somma ipoellittica di quadrati di campi vettoriali lisci, un risultato sub-ellittico sulla topologia dell'insieme delle funzioni $\mathcal{L}$ -armoniche è contenuto in [13, Corollaire 5.1] (si veda anche [49, Theorem 52.1] per PDOs ipoellittici). Osserviamo che, qui, non abbiamo bisogno di alcuna ipotesi di ipoellitticità, né che $\mathcal{L}$ debba essere una somma di quadrati di campi vettoriali lisci. Inoltre, la teoria delle famiglie normali relative ad un operatore $\mathcal{L}$ può beneficiare dell'esistenza di una disuguaglianza di Harnack per le funzioni $\mathcal{L}$ -armoniche non negative (come nel caso classico dell'operatore di Laplace; si veda [2, Section 1.5]), o può essere semplificata dalla validità di alcuni assiomi

di Teoria del Potenziale relativa ad $\mathcal{L}$ (come l'esistenza di una base di insiemi aperti $\mathcal{L}$ -regolari, o dell'assioma di regolarità di Bauer; si veda [20, Section 1.1 e Chapter 11]). Vogliamo sottolineare che, per un'ampia classe di operatori presenti in questa Tesi, non richiediamo alcun assioma di Teoria del Potenziale, né è disponibile una disuguaglianza di Harnack. I nostri risultati quindi non sono compresi in alcuna dei riferimenti bibliografici menzionati [2, 13, 20, 49].

Parte dei contenuti di questa Tesi sono originali e compaiono nel lavoro [3], accettato per la pubblicazione al *Journal of Mathematical Analysis and Applications*.

Capitolo 1

Ipotesi su $\mathcal{L}$. Laplaciani sub-ellittici

Lo scopo di questo capitolo è di fornire le ipotesi su $\mathcal{L}$, operatore differenziale come in (1), che useremo nel seguito della Tesi, e di mostrare un esempio fondamentale (dato nell'Osservazione 1.14) di un operatore prototipo per i PDOs considerati in questa Tesi. A tal fine, è necessario introdurre alcuni concetti preliminari, come la misura di Haar sui gruppi di Lie su $\mathbb{R}^N$ ed il concetto di aggiunto formale di un operatore differenziale liscio. Verrà data una prova dell'esistenza e dell'unicità della misura di Haar attraverso dei semplici argomenti. Inoltre, dimostreremo l'esistenza e l'unicità dell'aggiunto di un operatore differenziale liscio, ottenendo anche una sua espressione esplicita, che ci sarà utile nell'esempio accennato precedentemente.

1.1 Misura di Haar su un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$

Definizione 1.1 (Gruppo di Lie). Sia $(\mathbb{R}^N, *)$ un gruppo. Diciamo che $\mathbb{G} := (\mathbb{R}^N, *)$ è un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$ se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

- (i) la mappa $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \ni (x, y) \mapsto x * y \in \mathbb{R}^N$ è liscia;
- (ii) se x^{-1} è l'inverso di x (rispetto all'operazione di gruppo $*$), la mappa $x \mapsto x^{-1}$ è liscia su $\mathbb{R}^N$.

Fissato $x \in \mathbb{G}$, indichiamo con

$$\tau_x : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}, \quad \text{dove } \tau_x(y) = x * y,$$

la traslazione a sinistra di x su $\mathbb{G}$; in modo analogo poniamo

$$\rho_x : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}, \quad \text{dove } \rho_x(y) = y * x,$$

la traslazione a destra di x su $\mathbb{G}$. Poiché $\mathbb{G}$ è un gruppo, richiediamo che l'operazione di gruppo $*$ sia associativa e ciò equivale a dire che le traslazioni τ_x e ρ_y commutano:

$$\tau_x \circ \rho_y(z) = \rho_y \circ \tau_x(z), \quad \forall z \in \mathbb{G}.$$

Siamo pronti per la seguente definizione.

Definizione 1.2 (Misura di Haar). Sia $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, *)$ un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$. Indichiamo con $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ la σ -algebra dei sottoinsiemi di Borel di $\mathbb{R}^N$.¹ Una misura $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \rightarrow [0, \infty]$ è detta **misura di Borel**. Si dice che una misura di Borel è:

1. **invariante a sinistra** su $\mathbb{G}$ se

$$\mu(\tau_x(E)) = \mu(E), \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{G} \text{ e per ogni } E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N); \quad (1.1)$$

2. **invariante a destra** su $\mathbb{G}$ se

$$\mu(\rho_x(E)) = \mu(E), \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{G} \text{ e ogni } E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N); \quad (1.2)$$

3. **bi-invariante** su $\mathbb{G}$ se è al tempo stesso invariante a destra e a sinistra.

Una misura di Borel $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \rightarrow [0, \infty]$ è detta **misura di Haar** per $\mathbb{G}$ se è invariante a sinistra e se soddisfa la seguente proprietà

$$\mu(\Omega) > 0, \quad \mu(K) < \infty, \quad (1.3)$$

per ogni insieme aperto non vuoto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ e per ogni insieme compatto $K \subset \mathbb{R}^N$.

Un gruppo $\mathbb{G}$ è detto **unimodulare** se ammette una misura di Haar bi-invariante.

Osservazione 1.3. La finitezza di una misura di Haar sugli insiemi compatti di $\mathbb{R}^N$, garantita dalla condizione (1.3), ci assicura che ogni misura di Haar è σ -finita, ovvero esiste una successione di insiemi $E_n \subseteq \mathbb{R}^N$ tale che $\mathbb{R}^N = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ e $\mu(E_n) < \infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Infatti è sufficiente prendere, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$E_n := \overline{B(0, n)},$$

dove con $B(0, n)$ indichiamo la palla euclidea di centro 0 e raggio n .

¹Cioè, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ è la più piccola σ -algebra contenente i sottoinsiemi aperti di $\mathbb{R}^N$.

Osservazione 1.4. Da un risultato generale di Teoria della Misura², sappiamo che una misura di Borel $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \rightarrow [0, \infty]$ che è finita sui sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}^N$ è automaticamente *regolare*, cioè soddisfa

$$\mu(E) = \inf \{ \mu(\Omega) : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \text{ è aperto e } E \subseteq \Omega \},$$

$$\mu(E) = \sup \{ \mu(K) : K \subseteq \mathbb{R}^N \text{ è compatto e } K \subseteq E \},$$

per ogni $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Quindi, una misura di Haar su un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$ è regolare.

Dimostriamo ora un lemma che ci sarà utile nella prova del Teorema di esistenza della misura di Haar sui gruppi di Lie su $\mathbb{R}^N$.

Lemma 1.5. *Sia $f : \mathbb{R}^N \rightarrow [-\infty, \infty]$ una funzione di Borel, $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, e supponiamo che*

$$\int_E f(y) dy = 0 \quad \text{per ogni insieme di Borel } E \subseteq \mathbb{R}^N. \quad (1.4)$$

Allora $f = 0$ quasi ovunque.

Dimostrazione. Ricordiamo che una funzione $f : \mathbb{R}^N \rightarrow [-\infty, \infty]$ è detta di Borel se, per ogni sottoinsieme aperto Ω di $\mathbb{R}^N$, $f^{-1}(\Omega) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Quindi, fissato $\varepsilon > 0$, gli insiemi

$$E_\varepsilon^+ := \{x \in \mathbb{R}^N : f(x) > \varepsilon\} \quad \text{e} \quad E_\varepsilon^- := \{x \in \mathbb{R}^N : f(x) < -\varepsilon\}$$

sono insiemi di Borel.

Supponiamo per assurdo che $E_\varepsilon^+, E_\varepsilon^- \neq \emptyset$; dalla (1.4) otteniamo che

$$0 = \int_{E_\varepsilon^+} f(y) dy > \varepsilon \operatorname{mis}(E_\varepsilon^+),$$

dove abbiamo indicato con *mis* la misura di Lebesgue. Quindi si ha $\varepsilon \operatorname{mis}(E_\varepsilon^+) < 0$, ma ciò è assurdo in quanto avevamo fissato $\varepsilon > 0$ e sappiamo che $\operatorname{mis}(E_\varepsilon^+) \geq 0$; da ciò segue che $E_\varepsilon^+ = \emptyset$, così $f(x) \leq \varepsilon$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$.

In modo analogo si procede per dimostrare che $E_\varepsilon^- = \emptyset$, e quindi $f(x) \geq -\varepsilon$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$. Dall'arbitrarietà di ε segue la tesi. $\square$

²Questo è una conseguenza del fatto che $\mathbb{R}^N$ è uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto, e ogni sottoinsieme aperto Ω di $\mathbb{R}^N$ è σ -compatto, cioè, Ω è un'unione numerabile di insiemi compatti.

Teorema 1.6 (Esistenza della misura di Haar su un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$). Sia $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, *)$ un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$ con elemento neutro e . Allora esiste una misura di Haar su $\mathbb{G}$, data dalla seguente misura di Borel:

$$\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \rightarrow [0, \infty], \quad \mu(E) := \int_E \frac{1}{\det \mathcal{J}_{\tau_x}(e)} dx. \quad (1.5)$$

La misura μ è anche invariante a destra su $\mathbb{G}$ (quindi μ è una misura di Haar bi-invariante su $\mathbb{G}$) se e solo se è soddisfatta la seguente condizione

$$\det \mathcal{J}_{C_\alpha}(e) = 1, \quad \text{per ogni } \alpha \in \mathbb{G}, \quad (1.6)$$

dove $C_\alpha : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}$ è la mappa definita da $C_\alpha(z) := \alpha * z * \alpha^{-1}$.

Infine, per ogni $\alpha \in \mathbb{G}$ e per ogni $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, si ha

$$\int_{\alpha * E} f(x) d\mu(x) = \int_E f(\alpha * y) d\mu(y), \quad (1.7)$$

a condizione che f sia μ -sommabile su $\alpha * E$.

Osservazione 1.7. Proveremo nel Teorema 1.8 che la misura di Haar su $\mathbb{G}$ è unica, a meno di una costante moltiplicativa positiva. Questo mostra che ogni misura di Haar su un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$ ha la forma $c\mu$, dove la misura μ è come nella (1.5) e $c > 0$ è una costante. Di conseguenza, la condizione (1.6) è necessaria e sufficiente per l'esistenza di una misura di Haar bi-invariante su un gruppo di Lie $\mathbb{G}$ su $\mathbb{R}^N$.

Quindi, un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$ è unimodulare se e solo se è soddisfatta la (1.6), e in questo caso una misura di Haar bi-invariante è la misura μ nella (1.5).

Dimostrazione. Iniziamo con il provare che la funzione

$$\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \ni (\alpha, y) \mapsto F(\alpha, y) := \det \mathcal{J}_{\tau_\alpha}(y)$$

è strettamente positiva. Infatti, F è chiaramente continua, non si annulla mai (poiché ogni τ_α è un diffeomorfismo C^∞) e assume valore 1 in $(\alpha, y) = (e, e)$ (perché τ_e è la funzione identità su $\mathbb{R}^N$). Dal Teorema dei Valori Intermedi (ricordiamo che $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ è connesso), segue la tesi. In particolare, si deduce che la funzione $x \mapsto \det \mathcal{J}_{\tau_x}(e)$ è strettamente positiva su $\mathbb{R}^N$.

Quindi, la misura μ nella (1.5) è la misura su $\mathbb{R}^N$ (assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue) associata alla densità positiva

$$V(x) := \frac{1}{\det \mathcal{J}_{\tau_x}(e)}, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

(Notiamo che la numerabile additività di μ è una conseguenza della proprietà di additività dell'integrale di Lebesgue.) Ovviamente è chiaro che $\mu(\emptyset) := 0$.

È facile osservare che, essendo V una funzione continua strettamente positiva, la misura μ soddisfa la proprietà (1.3); vogliamo quindi provare che μ è invariante a sinistra su $\mathbb{G}$. Siano $\alpha \in \mathbb{G}$ e $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ fissati. Si ha il seguente calcolo:

$$\begin{aligned}
\mu(\tau_\alpha(E)) &= \int_{\tau_\alpha(E)} \frac{1}{\det \mathcal{J}_{\tau_x}(e)} dx && \text{(cambio di variabile } x = \tau_\alpha(y), y \in E) \\
&= \int_E \frac{|\det \mathcal{J}_{\tau_\alpha}(y)|}{\det \mathcal{J}_{\tau_\alpha * y}(e)} dy && \text{(si veda l'inizio della prova)} \\
&= \int_E \frac{\det \mathcal{J}_{\tau_\alpha}(y)}{\det \mathcal{J}_{\tau_\alpha * y}(e)} dy && \text{(poiché } \tau_\alpha * y = \tau_\alpha \circ \tau_y) \\
&= \int_E \frac{\det \mathcal{J}_{\tau_\alpha}(y)}{\det (\mathcal{J}_{\tau_\alpha}(y) \cdot \mathcal{J}_{\tau_y}(e))} dy && \text{(dal Teorema di Binet)} \\
&= \int_E \frac{\det \mathcal{J}_{\tau_\alpha}(y)}{\det \mathcal{J}_{\tau_\alpha}(y) \cdot \det \mathcal{J}_{\tau_y}(e)} dy = \int_E \frac{1}{\det \mathcal{J}_{\tau_y}(e)} dy = \mu(E).
\end{aligned}$$

Proviamo ora che la (1.6) è equivalente all'invarianza a destra di μ . Dati $\alpha \in \mathbb{G}$ e $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, abbiamo:

$$\begin{aligned}
\mu(\rho_\alpha(E)) &= \int_{\rho_\alpha(E)} \frac{1}{\det \mathcal{J}_{\tau_x}(e)} dx && \text{(cambio di variabile } x = \rho_\alpha(y), y \in E) \\
&= \int_E \frac{|\det \mathcal{J}_{\rho_\alpha}(y)|}{\det \mathcal{J}_{\tau_y * \alpha}(e)} dy && \text{(come discusso all'inizio della prova)} \\
&= \int_E \frac{\det \mathcal{J}_{\rho_\alpha}(y)}{\det \mathcal{J}_{\tau_y * \alpha}(e)} dy.
\end{aligned}$$

Quindi, $\mu(\rho_\alpha(E)) = \mu(E)$ se e solo se

$$\int_E \frac{\det \mathcal{J}_{\rho_\alpha}(y)}{\det \mathcal{J}_{\tau_y * \alpha}(e)} dy = \int_E \frac{1}{\det \mathcal{J}_{\tau_y}(e)} dy.$$

Grazie al Lemma 1.5 (notando che le funzioni integrande sono continue), ciò è possibile se e solo se

$$\frac{\det \mathcal{J}_{\rho_\alpha}(y)}{\det \mathcal{J}_{\tau_y * \alpha}(e)} = \frac{1}{\det \mathcal{J}_{\tau_y}(e)}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^N.$$

Utilizzando il Teorema di Binet e il semplice fatto che $(\mathcal{J}_F(z))^{-1} = \mathcal{J}_{F^{-1}}(F(z))$ (per ogni F diffeomorfismo C^1), ciò è equivalente a

$$\det (\mathcal{J}_{(\tau_y * \alpha)^{-1}}(y * \alpha) \cdot \mathcal{J}_{\rho_\alpha}(y) \cdot \mathcal{J}_{\tau_y}(e)) = 1.$$

Ora, osserviamo che, dalla regola della catena, il precedente prodotto di matrici Jacobiane è uguale a

$$\mathcal{J}_{(\tau_y * \alpha)^{-1} \circ \rho_\alpha \circ \tau_y}(e).$$

Poiché $(\tau_{y*\alpha})^{-1} = \tau_{(y*\alpha)^{-1}} = \tau_{\alpha^{-1}*y^{-1}} = \tau_{\alpha^{-1}} \circ \tau_{y^{-1}}$, si ha (ricordando che le traslazioni a sinistra ed a destra commutano)

$$\begin{aligned} (\tau_{y*\alpha})^{-1} \circ \rho_\alpha \circ \tau_y &= \tau_{\alpha^{-1}} \circ \tau_{y^{-1}} \circ \rho_\alpha \circ \tau_y \\ &= \tau_{\alpha^{-1}} \circ \tau_{y^{-1}} \circ \tau_y \circ \rho_\alpha = \tau_{\alpha^{-1}} \circ \rho_\alpha = C_{\alpha^{-1}}. \end{aligned}$$

Quindi, μ è invariante a destra se e solo se $\det \mathcal{J}_{C_{\alpha^{-1}}}(e) = 1$ per ogni $\alpha \in \mathbb{G}$. Questo è chiaramente equivalente alla (1.6).

Infine proviamo la (1.7). È chiaro che, nei calcoli precedenti, abbiamo provato la seguente proprietà del nucleo V :

$$V(y) = V(\tau_\alpha(y)) \det \mathcal{J}_{\tau_\alpha}(y), \quad \forall y, \alpha \in \mathbb{G}. \quad (1.8)$$

Ciò dà subito

$$\begin{aligned} \int_{\alpha * E} f(x) d\mu(x) &= \int_{\alpha * E} f(x) V(x) dx \quad (\text{cambio di variabile } x = \tau_\alpha(y)) \\ &= \int_E f(\alpha * y) V(\tau_\alpha(y)) \det \mathcal{J}_{\tau_\alpha}(y) dy \\ &\stackrel{(1.8)}{=} \int_E f(\alpha * y) V(y) dy = \int_E f(\alpha * y) d\mu(y). \end{aligned}$$

Questo conclude la dimostrazione. $\square$

Proviamo ora che la misura di Haar sui gruppi di Lie su $\mathbb{R}^N$ è unica.

Teorema 1.8 (Unicità della misura di Haar sui gruppi di Lie su $\mathbb{R}^N$). *Sia $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, *)$ un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$.*

Ogni misura di Haar su $\mathbb{G}$ è un multiplo (per una costante positiva) della misura di Haar μ del Teorema 1.6.

Dimostrazione. Si prova facilmente che, se $\nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \rightarrow [0, \infty]$ è una misura di Borel invariante a destra su $\mathbb{G}$, e $\tilde{\nu} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \rightarrow [0, \infty]$ è una misura di Borel tale che

$$\tilde{\nu}(E) := \nu(E^{-1}), \quad E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N),$$

allora $\tilde{\nu}$ è invariante a sinistra su $\mathbb{G}$. Quindi, ogni misura di Borel invariante a sinistra su $\mathbb{G}$ è della forma $\tilde{\nu}$. Pertanto, è sufficiente dimostrare che, data una misura di Borel ν invariante a destra su $\mathbb{R}^N$ (soddisfacente la proprietà di regolarità nella (1.3)), esiste $c > 0$ tale che $\tilde{\nu} = c\mu$, dove μ è la misura di Haar nella (1.5). A questo scopo, basta provare l'esistenza di una costante $c > 0$ tale che

$$\int f d\tilde{\nu} = c \int f d\mu, \quad \text{per ogni } f \in C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}). \quad (1.9)$$

Se $f \in C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ è tale che $\int f \, d\mu \neq 0$, poniamo

$$D_f(x) := \left(\int f \, d\mu \right)^{-1} \int f(y^{-1} * x) \, d\nu(y), \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (1.10)$$

Poiché ν è finita sui compatti ed f ha supporto compatto, è semplice dimostrare, tramite il Teorema della convergenza dominata di Lebesgue, che D_f è continua su $\mathbb{R}^N$.

Sia ora $g \in C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Osserviamo che la funzione $(x, y) \mapsto f(x)g(y * x)$ è continua ed ha supporto compatto in $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ (questo ci permetterà di utilizzare ripetutamente il Teorema di Fubini nei calcoli successivi). Si ha

$$\left(\int f \, d\mu \right) \cdot \left(\int g \, d\nu \right) = \int \left(\int f(x)g(z) \, d\nu(z) \right) \, d\mu(x)$$

(usiamo la sostituzione $z = y * x$ nell'integrale interno,

e utilizziamo l'invarianza a destra di ν)

$$= \int \left(\int f(x)g(y * x) \, d\nu(y) \right) \, d\mu(x) \quad (\text{dal Teorema di Fubini})$$

$$= \int \left(\int f(x)g(y * x) \, d\mu(x) \right) \, d\nu(y)$$

(usiamo la sostituzione $x = y^{-1} * z$ nell'integrale interno,

e utilizziamo l'invarianza a sinistra di μ ; si veda anche la (1.7))

$$= \int \left(\int f(y^{-1} * z)g(z) \, d\mu(z) \right) \, d\nu(y) \quad (\text{dal Teorema di Fubini})$$

$$= \int \left(\int f(y^{-1} * z) \, d\nu(y) \right) g(z) \, d\mu(z)$$

$$= \int \left(\int f \, d\mu \right) \cdot D_f(z)g(z) \, d\mu(z) = \int f \, d\mu \cdot \int D_f(z)g(z) \, d\mu(z).$$

Possiamo allora cancellare il fattore non nullo $\int f \, d\mu$ da entrambi i lati dell'equazione, ottenendo

$$\int g \, d\nu = \int g D_f \, d\mu.$$

Questo prova che D_f è indipendente da f . Infatti, se $f' \in C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ è tale che $\int f' \, d\mu \neq 0$, il calcolo precedente mostra che

$$\int g D_f \, d\mu = \int g \, d\nu = \int g D_{f'} \, d\mu, \quad \text{da cui} \quad \int g(D_f - D_{f'}) \, d\mu = 0.$$

Poiché ciò deve essere vero per ogni $g \in C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, otteniamo che $D_f - D_{f'} = 0$ quasi ovunque su $\mathbb{R}^N$ (ricordiamo l'espressione esplicita di μ), quindi su tutto $\mathbb{R}^N$, poiché $D_f, D_{f'}$ sono funzioni continue. Indichiamo la funzione $D_f(x)$ semplicemente con

$c(x)$, poichè questa è effettivamente indipendente da f , purchè $f \in C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ sia tale che $\int f d\mu \neq 0$. Valutiamo la (1.10) nel punto $x = e$ e otteniamo

$$c(e) \cdot \int f d\mu = \int f(y^{-1}) d\nu(y), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Dalla definizione stessa di $\tilde{\nu}$, questa è equivalente alla

$$c(e) \cdot \int f d\mu = \int f(y) d\tilde{\nu}(y).$$

Osserviamo che $c(e) = D_f(e) > 0$, poiché possiamo sostituire alla f nella (1.10), una qualunque funzione continua con supporto compatto che sia ovunque non negativa e positiva su qualche sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^N$. Questo prova la (1.9) quando $\int f d\mu \neq 0$, cioè la (1.9) vale al di fuori dell' "iperpiano" di $C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$, dato da

$$\{f \in C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) : L(f) = 0\}, \quad \text{dove } L(f) = \int f d\mu.$$

Un'argomento di densità (si noti che entrambi i lati della (1.9), come funzioni di f , sono funzionali lineari continui su $C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$) prova che la (1.9) è soddisfatta per ogni $f \in C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Ciò conclude la prova. $\square$

1.2 Aggiunto formale di un operatore su un gruppo di Lie

In questa sezione, indicheremo con $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, *)$ un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$ e con μ la misura di Haar introdotta nella (1.5) del Teorema 1.6. Inoltre, poniamo

$$V(x) := \frac{1}{\det \mathcal{J}_{\tau_x}(e)}, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (1.11)$$

così che $d\mu(x) = V(x) dx$. Dal risultato di unicità della misura di Haar nell'Osservazione 1.7, per ogni misura di Haar ν su $\mathbb{G}$ esiste una costante positiva c_ν tale che $\nu = c_\nu \mu$, cioè

$$d\nu(x) = c_\nu V(x) dx \quad (c_\nu > 0). \quad (1.12)$$

Dato un insieme aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, indichiamo con $\mathcal{U}(\Omega)$ l'algebra dei PDOs lineari lisci su Ω . Siano $P \in \mathcal{U}(\Omega)$ e $g \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, denotiamo con $g \cdot P$ l'operatore differenziale lineare definito da

$$C^\infty(\Omega, \mathbb{R}) \ni u \mapsto g \cdot Pu.$$

Infine, l'insieme $C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ sarà denotato brevemente con $C_0^\infty(\Omega)$. Poiché considereremo l'integrazione rispetto una qualunque misura di Haar ν , dobbiamo prima provare due semplici risultati.

Osservazione 1.9. Si hanno i seguenti risultati.

1. Dati un insieme aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ e $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ si ha

$$\int_{\Omega} f \varphi \, d\nu = 0 \quad \text{per ogni } \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

se e solo se $f = 0$ quasi ovunque in Ω . Infatti, se è soddisfatta la condizione sopra, allora, a causa della (1.12), otteniamo che $V f = 0$ q.o., per cui $f = 0$ q.o., poiché $V > 0$ su $\mathbb{R}^N$.

2. L'insieme C_0^∞ coincide con $\{V \cdot \varphi : \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\}$. Questa è un'altra semplice conseguenza del fatto che V è liscia e positiva su $\mathbb{R}^N$.

3. Lo spazio $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ rispetto alla misura di Lebesgue e lo spazio $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ rispetto ad ogni misura di Haar su $\mathbb{G}$ sono coincidenti. Infatti, per ogni funzione u su Ω e per ogni insieme compatto $K \subset \Omega$ si ha

$$m |u| \leq |uV| \leq M |u| \quad \text{su } K,$$

dove $m = \min_K V$, $M = \max_K V$ (si noti che m, M sono positive e finite poiché V è positiva e continua e K è compatto).

Definizione 1.10 (Aggiunto formale di un PDO su $\mathbb{G}$). Sia $\mathbb{G}$ un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$ e sia ν una misura di Haar su $\mathbb{G}$. Dato $P \in \mathcal{U}(\Omega)$, diciamo che il PDO P^* in $\mathcal{U}(\Omega)$ è l'**aggiunto formale di P su $\mathbb{G}$** se

$$\int_{\Omega} \varphi(x) \cdot P\psi(x) \, d\nu(x) = \int_{\Omega} P^*\varphi(x) \cdot \psi(x) \, d\nu(x), \quad \forall \varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (1.13)$$

Un operatore $P \in \mathcal{U}(\Omega)$ è detto **autoaggiunto su $\mathbb{G}$** se $P^* = P$.

Dalla precedente definizione, segue immediatamente la seguente osservazione.

Osservazione 1.11. Notiamo che la (1.13) è valida anche se solamente una delle funzioni lisce φ, ψ ha supporto compatto. Infatti, supponiamo per esempio che $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ e $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ e indichiamo con $K \subset \Omega$ il supporto compatto di ψ . Fissiamo poi $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ tale che $\eta \equiv 1$ su K così che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi \cdot P\psi \, d\nu &= \int_K \varphi \cdot P\psi \, d\nu = \int_{\Omega} (\eta\varphi) \cdot P\psi \, d\nu \\ &= \int_{\Omega} P^*(\eta\varphi) \cdot \psi \, d\nu = \int_K P^*\varphi \cdot \psi \, d\nu = \int_{\Omega} P^*\varphi \cdot \psi \, d\nu. \end{aligned}$$

Questo prova che

$$\int \varphi \cdot P\psi \, d\nu = \int P^*\varphi \cdot \psi \, d\nu, \quad \forall \varphi \in C^\infty, \psi \in C_0^\infty. \quad (1.14)$$

Diamo ora un risultato fondamentale sull'aggiunto di un PDO su un gruppo di Lie $\mathbb{G}$.

Teorema 1.12. *Sia $\mathbb{G}$ un gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$ e sia $P \in \mathcal{U}(\Omega)$, allora l'aggiunto formale P^* su $\mathbb{G}$ di P esiste ed è unico.*

Dimostrazione. Iniziamo con il provare l'unicità dell'aggiunto di P su $\mathbb{G}$. Siano $Q, \tilde{Q} \in \mathcal{U}(\Omega)$ tali che

$$\int_\Omega \tilde{Q}\varphi \cdot \psi \, d\nu = \int_\Omega \varphi \cdot P\psi \, d\nu = \int_\Omega Q\varphi \cdot \psi \, d\nu \quad (1.15)$$

per ogni $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega)$. Con un procedimento analogo a quello visto nell'Osservazione 1.11, possiamo supporre che $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ e $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$. L'identità (1.15) implica che $\int_\Omega (\tilde{Q}\varphi - Q\varphi) \cdot \psi \, d\nu = 0$. Facendo variare $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, questo prova che

$$\tilde{Q}\varphi = Q\varphi, \quad \text{per ogni } \varphi \in C^\infty(\Omega).$$

Se sostituiamo φ con una qualunque funzione monomiale x^α , questo dimostra che le funzioni coefficienti dei PDOs lineari $\tilde{Q}$ e Q sono uguali, cioè $\tilde{Q} \equiv Q$.

Proviamo ora l'esistenza dell'aggiunto formale di P . Poiché $P \in \mathcal{U}(\Omega)$, esistono un intero $m \in \mathbb{N}$ e delle funzioni lisce a valori reali a_α su Ω tali che

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D_x^\alpha,$$

dove indicheremo sempre con $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ un multi-indice con entrate intere non negative, $D_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_N}^{\alpha_N}$ e con $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$.

Se $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega)$, l'integrazione per parti su $\mathbb{R}^N$ ci dà:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \varphi(x) \cdot P\psi(x) \, d\nu(x) &= c_\nu \int_\Omega \varphi(x) \cdot \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D_x^\alpha \psi(x) \cdot V(x) \, dx \\ &= c_\nu \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D_x^\alpha (a_\alpha(x) V(x) \varphi(x)) \cdot \psi(x) \, dx \\ &= c_\nu \int_\Omega V(x) \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{V(x)} D_x^\alpha (a_\alpha(x) V(x) \varphi(x)) \cdot \psi(x) \, dx \\ &= \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{V(x)} D_x^\alpha (a_\alpha(x) V(x) \varphi(x)) \cdot \psi(x) \, d\nu(x). \end{aligned}$$

Quindi è naturale porre

$$P^*u(x) := \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{V(x)} D_x^\alpha (a_\alpha(x)V(x)u(x)), \quad (1.16)$$

per ogni $u \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. Ciò ci assicura, ovviamente, che la (1.13) è soddisfatta. Inoltre, poiché V è liscia e positiva su $\mathbb{G}$, è molto semplice vedere (grazie alla regola di Leibniz) che P^* è anche un PDO lineare liscio su Ω . $\square$

Facciamo ora alcune osservazioni.

Osservazione 1.13. Valgono i seguenti risultati:

1. Sia $P \in \mathcal{U}(\Omega)$, allora l'aggiunto P^* non dipende dalla particolare misura di Haar ν scelta su $\mathbb{G}$. Infatti, ricordando che tutte le misure di Haar su $\mathbb{G}$ differiscono per una costante moltiplicativa, l'identità (1.13) rimane invariata rispetto alla moltiplicazione con una qualunque costante non nulla.
2. La mappa $P \mapsto P^*$ è un endomorfismo di $\mathcal{U}(\Omega)$.
3. La mappa $P \mapsto P^*$ è una involuzione, cioè $(P^*)^* = P$ per ogni $P \in \mathcal{U}(\Omega)$.
4. Se $P, Q \in \mathcal{U}(\Omega)$ allora $(P \circ Q)^* = Q^* \circ P^*$. In altre parole, la mappa $P \mapsto P^*$ è un anti-omomorfismo dell'algebra $(\mathcal{U}(\Omega), \circ)$.

1.3 Ipotesi e notazioni principali

Sia $\mathcal{L}$ come nella (1), dove V è una funzione C^1 strettamente positiva su $\mathbb{R}^N$, e la matrice $A(x) := (a_{i,j}(x))_{i,j \leq N}$ è simmetrica e semidefinita positiva per ogni $x \in \mathbb{R}^N$, con entrate C^1 su $\mathbb{R}^N$. La nostra ipotesi principale su $\mathcal{L}$ è la seguente:

(H) Supponiamo che $\mathcal{L}$ sia dotato di una *soluzione fondamentale positiva globale*

$$\Gamma : D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N : x \neq y\} \longrightarrow (0, \infty)$$

con le seguenti proprietà:

- (a)** Γ è (almeno) di classe C^3 su D e $\nabla \Gamma(x, \cdot) \neq 0$ su $\mathbb{R}^N \setminus \{x\}$;
- (b)** per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ fissato, si ha che $\lim_{y \rightarrow x} \Gamma(x, y) = \infty$ e $\lim_{y \rightarrow \infty} \Gamma(x, y) = 0$;

(c) $\Gamma \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{2N})$ e, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x, y) \mathcal{L}\varphi(y) dV^N(y) = -\varphi(x), \quad \text{per ogni } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}). \quad (1.17)$$

(Si veda la notazione nella (3) per il significato di dV^N .) Dalla proprietà (b) otteniamo che ogni Γ -palla $\Omega_r(x)$ è un intorno (aperto e limitato) di x e che

$$\bigcap_{r>0} \Omega_r(x) = \{x\}, \quad \bigcup_{r>0} \Omega_r(x) = \mathbb{R}^N. \quad (1.18)$$

Dalla proprietà (a) si deduce che $\partial\Omega_r(x) = \{y : \Gamma(x, y) = 1/r\}$ è una C^3 -varietà. (In tutta la Tesi, un'assunzione C^1 su $\partial\Omega_r(x)$ sarebbe effettivamente sufficiente; noi usiamo l'ipotesi C^3 su Γ solamente nella prova del Teorema C.)

Osservazione 1.14. (i) Quando $\mathcal{L}$ è un operatore C^∞ -ipoellittico, l'ipotesi sulla globale esistenza su $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ di una soluzione fondamentale Γ che scompare all'infinito può essere rimossa: si può rimpiazzare $\mathbb{R}^N$ con un insieme aperto limitato O , e sostituire anche Γ con la funzione di Green $G_O(x, y)$ per O , la cui esistenza (quando sono coinvolti operatori autoaggiunti ipoellittici) segue dagli argomenti in [13, 49]. Ciò non pregiudica i risultati di questa Tesi poiché la $\mathcal{L}$ -armonicità è una nozione locale, e insiemi compatti sono coinvolti in tutto il lavoro.

(ii) Gli operatori della forma (1) sono presenti in molti contesti di rilevanza geometrica, come nella Geometria Riemanniana (l'operatore di Laplace-Beltrami ha la forma $\Delta = \sqrt{|g|}^{-1} \partial_i (\sqrt{|g|} g^{ij} \partial_j)$), o nell'ambito *sub-Riemanniano* degli operatori autoaggiunti invarianti a sinistra sui gruppi di Lie, come i sub-Laplaciani sui gruppi di Carnot (si veda [12, Chapter 1] per le definizioni relative).

Cosa più importante, un operatore prototipo per i PDOs considerati in questa Tesi è fornito dal prossimo esempio. Supponiamo che $\mathbb{R}^N$ sia dotato di una struttura di gruppo di Lie $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, *)$, e siano $X_1, \dots, X_m$ un sistema di Lie-generatori per l'algebra di Lie di $\mathbb{G}$ ³. Sia S una matrice $N \times m$ le cui colonne sono date dai coefficienti di $X_1, \dots, X_m$ rispettivamente. Denotiamo con X_k^* l'aggiunto di X_k in $L^2(\mathbb{G}, d\mu)$ (secondo la Definizione 1.10) per ogni $k \in \{1, \dots, m\}$, dove μ è una misura di Haar di $\mathbb{G}$

³Ricordiamo che, dato $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, *)$ gruppo di Lie su $\mathbb{R}^N$, si denota con $\text{Lie}(\mathbb{G})$ l'insieme dei campi vettoriali lisci X invarianti a sinistra su $\mathbb{G}$, cioè tali che

$$X(f \circ \tau_\alpha)(x) = (Xf)(\tau_\alpha(x)),$$

per ogni $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ e per ogni $\alpha, x \in \mathbb{G}$. Si prova facilmente che $\text{Lie}(\mathbb{G})$ è un'algebra di Lie con l'operazione di commutazione tra campi vettoriali.

fissata. Se V è la densità di μ rispetto alla misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^N$, come nella (1.11), proviamo che

$$X_k^* u = -X_k u - f_k u, \quad \forall u \in C^1, \quad (1.19)$$

per ogni $k = 1, \dots, m$, dove $f_k = \operatorname{div}(X_k) + (X_k V)/V$.

Infatti, fissiamo $k \in \{1, \dots, m\}$ e sia $u \in C^1$; poiché X_k è un Lie-generatore per $\operatorname{Lie}(\mathbb{G})$, avrà la seguente espressione

$$X_k = \sum_{j=1}^N \alpha_j^k(x) \frac{\partial}{\partial x_j},$$

con α_j^k funzioni lisce. Grazie al Teorema 1.12, sappiamo che l'aggiunto X_k^* esiste ed è unico, e dalla (1.16) otteniamo che

$$X_k^* u(x) = \sum_{j=1}^N \frac{-1}{V(x)} \frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha_j^k(x) V(x) u(x)).$$

Quindi, ricordando che $\operatorname{div} X_k = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \alpha_j^k(x)}{\partial x_j}$, un semplice calcolo mostra che

$$\begin{aligned} X_k^* u(x) &= \sum_{j=1}^N \frac{-1}{V(x)} \left[\frac{\partial \alpha_j^k(x)}{\partial x_j} V(x) u(x) + \alpha_j^k(x) \left(\frac{\partial V(x)}{\partial x_j} u(x) + V(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right) \right] \\ &= - \sum_{j=1}^N \frac{\partial \alpha_j^k(x)}{\partial x_j} u(x) - \sum_{j=1}^N \alpha_j^k(x) \frac{\partial V(x)}{\partial x_j} \frac{u(x)}{V(x)} - \sum_{j=1}^N \alpha_j^k(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \\ &= -\operatorname{div}(X_k) u(x) - \frac{X_k V(x)}{V(x)} u(x) - X_k u(x) = -X_k u(x) - f_k u(x), \end{aligned}$$

che è proprio la (1.19).

Sia ora $\mathcal{L} = -\sum_{k=1}^m X_k^* X_k$ (chiamato **Laplaciano subellittico su $\mathbb{G}$**); tramite un calcolo diretto, grazie alla (1.19), dimostriamo che $\mathcal{L}$ ha forma (1), dove $(a_{i,j})$ è la matrice simmetrica semidefinita positiva data da SS^T .

Fissata $u \in C^2$, poniamo $X_k = \sum_{j=1}^N \alpha_j^k(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$, per ogni $k = 1, \dots, m$; si ha:

$$\begin{aligned}
X_k^* X_k u(x) &= -X_k(X_k u(x)) - \operatorname{div}(X_k)(X_k u(x)) - \frac{X_k V(x)}{V(x)} X_k u(x) \\
&= -\sum_{i=1}^N \alpha_i^k(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j^k(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right) - \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial \alpha_i^k(x)}{\partial x_i} \right) \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j^k(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right) \\
&\quad - \frac{1}{V(x)} \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i^k(x) \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} \right) \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j^k(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right) \\
&= -\sum_{i,j=1}^N \alpha_i^k(x) \alpha_j^k(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i,j=1}^N \alpha_i^k(x) \frac{\partial \alpha_j^k(x)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + \\
&\quad - \sum_{i,j=1}^N \alpha_j^k(x) \frac{\partial \alpha_i^k(x)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \\
&\quad - \frac{1}{V(x)} \sum_{i,j=1}^N \alpha_i^k(x) \alpha_j^k(x) \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j}.
\end{aligned}$$

Poniamo quindi $a_{i,j}(x) = \sum_{k=1}^m \alpha_i^k(x) \alpha_j^k(x)$, così che $A(x) = (a_{i,j})_{i,j} = SS^T$; dai calcoli precedenti, otteniamo che

$$\begin{aligned}
-\sum_{k=1}^m X_k^* X_k u(x) &= \sum_{i,j=1}^N a_{i,j}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial a_{i,j}(x)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \\
&\quad + \frac{1}{V(x)} \sum_{i,j=1}^N a_{i,j}(x) \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \\
&= \frac{1}{V(x)} \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(V(x) a_{i,j}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right),
\end{aligned}$$

per ogni $u \in C^2$; allora

$$\mathcal{L} = \frac{1}{V} \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(V a_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right),$$

che è proprio la (1).

Nel caso in cui $\mathbb{G}$ è un gruppo omogeneo (nel senso visto in [12, Section 1.3]), si ha che $V \equiv 1$ e $f_k \equiv 0$. Altrimenti V può essere una densità non costante.

Vogliamo esplicitamente sottolineare che, nel caso dei Laplaciani subellittici $\mathcal{L}$, la C^∞ -ipoellitticità è garantita, poiché $X_1, \dots, X_m$ generano l'algebra di Lie di $\mathbb{G}$, così che essi formano una sistema di Hörmander di campi vettoriali (e può essere applicato il Teorema dell'ipoellitticità di Hörmander, [25]). Inoltre, alcuni risultati sull'esistenza di una soluzione fondamentale per $\mathcal{L}$ (invariante a sinistra) sono forniti in [10].

(iii) Gli operatori della forma (1) sono stati profondamente studiati da Jerison e Sánchez-Calle in [26], dove viene anche descritto come operatori subellittici della forma (1) intervengono naturalmente nella teoria delle funzioni a più variabili complesse e nella teoria delle varietà CR (si veda anche [21, 31, 44]).

Capitolo 2

Preliminari Topologici. Spazi di Fréchet

In questo capitolo vogliamo riportare alcuni concetti di base e alcune definizioni della teoria degli spazi vettoriali topologici. Avvertiamo il Lettore che riporteremo solo alcune nozioni, riferendoci a [45, Chapter 1] per quelle mancanti.

Dopo una breve introduzione sugli spazi vettoriali topologici, studieremo gli Spazi di Fréchet e i concetti fondamentali di seminorma e convessità locale, approfondendo il caso dello spazio $C(\Omega)$ (le funzioni continue su un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$). Questi ultimi risultati saranno poi utilizzati abbondantemente nei capitoli successivi.

2.1 Spazi Vettoriali Topologici

Nel seguito indicheremo con V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, e fissiamo su $\mathbb{R}$ la topologia Euclidea indotta dall'usuale modulo di un numero reale.

Definizione 2.1 (Spazio vettoriale topologico). *Uno spazio vettoriale V è detto **spazio vettoriale topologico**, e per brevità lo chiameremo SVT, se su V è data una topologia $\mathcal{T}$ tale che:*

1. $(V, \mathcal{T})$ è uno spazio topologico di Hausdorff;
2. le due operazioni di spazio vettoriale

$$V \times V \ni (x, y) \mapsto x + y \in V, \quad \mathbb{R} \times V \ni (\alpha, x) \mapsto \alpha x \in V$$

sono funzioni continue, quando $V \times V$ e $\mathbb{R} \times V$ sono dotati delle rispettive topologie prodotto.

Osservazione 2.2. È facile mostrare che, sotto la sola condizione (2) della Definizione 2.1, vale l'assioma di regolarità: per ogni chiuso F e ogni punto $x \notin F$ esistono due aperti disgiunti U e V tali che $x \in U$ e $F \subseteq V$. Quindi, ogni SVT è T_3 .

È immediato provare che uno spazio normato su $\mathbb{R}$, con la topologia indotta dalla norma, è uno SVT. Si osservi inoltre che, ogni spazio vettoriale V può essere dotato di una struttura di SVT, poiché ogni spazio vettoriale può essere dotato di una norma. Infatti, se $\{v_i\}_{i \in I}$ è una base (di Hamel) di V , la posizione

$$\left\| \sum_{i \in I} c_i v_i \right\| := \sum_{i \in I} |c_i| \quad (c_i \in \mathbb{R})$$

(dove solo un numero finito di c_i è non nullo) definisce una norma su V . Ricordiamo infine che, grazie al Lemma di Zorn, si può sempre dotare un qualunque spazio vettoriale di una base di Hamel.

In ogni SVT vale il seguente risultato di separazione: Se K, C sono rispettivamente un compatto e un chiuso di V , esiste un intorno aperto Ω di 0 tale che $K + \Omega$ e $C + \Omega$ sono disgiunti.

Poiché $0 + 0 = 0$ (ove 0 denoterà sempre l'origine dello SVT V), la continuità della somma implica che per ogni intorno Ω di 0 esiste un intorno U di 0 tale che

$$U + U \subseteq \Omega. \quad (2.1)$$

Molto spesso (si veda ad esempio l'Osservazione 2.15) questo semplice fatto fornisce un surrogato della disuguaglianza triangolare degli usuali spazi normati (che sono notevoli esempi di SVT).

È facile dimostrare che, data una base $\mathcal{B}$ di intorni di 0 nello SVT V , per ogni $E \subseteq V$ si ha

$$\bar{E} = \bigcap_{U \in \mathcal{B}} (E + U).$$

Osserviamo quindi che, per ogni intorno dell'origine U si ha $\bar{U} \subseteq U + U$; allora, grazie alla (2.1), fissato $x \in V$, si ha che ogni intorno Ω di x contiene un intorno chiuso $\bar{U}$ di x (con U opportuno intorno aperto di x)¹.

¹Si prova facilmente che quest'ultimo fatto è equivalente all'assioma di regolarità.

Inoltre, se Ω è un qualunque intorno aperto di 0 di uno SVT V si ha

$$V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} n\Omega. \quad (2.2)$$

Infatti, poiché $\frac{1}{n}x \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$, grazie alla continuità del prodotto per uno scalare, otteniamo la tesi.

Definizione 2.3 (Insieme bilanciato in uno SVT). Sia V uno SVT. Un sottoinsieme E di V si dice **bilanciato** se per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ con $|\alpha| \leq 1$ si ha $\alpha E \subseteq E$.

Ne risulta che se V è bilanciato si ha

$$0 < s < t \quad \implies \quad sV \subseteq tV. \quad (2.3)$$

Se V è uno SVT e $\mathcal{B}$ è una base di intorni di 0, diciamo che $\mathcal{B}$ è una **base bilanciata** se tutti i suoi elementi sono insiemi bilanciati. Si dice che $\mathcal{B}$ è una **base convessa** se tutti i suoi elementi sono insiemi convessi².

Teorema 2.4. Sia V uno SVT. Allora esiste una base bilanciata di intorni di 0.

Questo risultato si basa sul seguente lemma, la cui prova segue semplicemente dagli assiomi di SVT.

Lemma 2.5. Sia V uno SVT. Se Ω è un intorno di 0, allora esiste un insieme bilanciato U , intorno aperto di 0, tale che

$$U \subseteq \bar{U} \subset U + U \subset \Omega.$$

Definizione 2.6. Uno SVT V si dice **localmente convesso** se esiste una base $\mathcal{B}$ di intorni dell'origine i cui elementi sono insiemi convessi.

Ad esempio, ogni spazio normato è localmente convesso, poiché i dischi di centro l'origine sono insiemi convessi.

Proposizione 2.7. Sia V uno SVT.

1. Se E è un insieme convesso, lo sono anche $\bar{E}$ e $\text{Int}(E)$. Se E è un intorno bilanciato di 0, sono bilanciati anche $\bar{E}$ e $\text{Int}(E)$.
2. Ogni intorno convesso di 0 contiene un intorno convesso e bilanciato di 0.

²Ricordiamo che un sottoinsieme E di uno spazio vettoriale si dice **convesso** se $tE + (1-t)E \subseteq E$ per ogni $t \in [0, 1]$.

3. Ogni SVT localmente convesso ammette una base di intorno dell'origine costituita da insiemi convessi e bilanciati.

Osserviamo che la (3) segue facilmente dalla (2) e dalla Definizione 2.6. La prova di (2) segue invece dal seguente argomento: se U è un intorno convesso dell'origine, lo stesso è vero per $-U$; poniamo allora $A := U \cap (-U)$, e notiamo che A è convesso, bilanciato e $A \subseteq U$, scegliendo poi $\text{Int}(A)$ come intorno bilanciato convesso di 0, otteniamo la tesi.

Definizione 2.8 (Insieme limitato in uno SVT). Sia V uno SVT. Un sottoinsieme E di V si dice **limitato** se per ogni intorno Ω di 0 esiste un numero reale $s > 0$ tale che $E \subseteq s\Omega$.

Grazie alla (2.2), è semplice vedere che ogni insieme finito in uno SVT è limitato. È chiaro poi che ogni sottoinsieme di un insieme limitato è limitato. Inoltre, grazie al Lemma 2.5, è facile dimostrare che se E è limitato anche $\overline{E}$ lo è.

Per spazi normati, la Definizione 2.8 di insieme limitato è equivalente a quella usuale.

Una notevole applicazione del concetto di insieme limitato è il seguente teorema, la cui dimostrazione si basa sugli assiomi di SVT e su alcuni dei risultati precedenti.

Teorema 2.9. Ogni sottoinsieme compatto di uno SVT è limitato.

Dimostrazione. Sia K un compatto nello SVT V . Sia Ω un intorno aperto di 0; grazie al Lemma 2.5, esiste un intorno U di 0 aperto e bilanciato e tale che $U + U \subseteq \Omega$. Dalla compattezza di K esiste una famiglia finita $\{x_j\}$ in K , tale che $K \subset \bigcup_{j=1}^p (x_j + U)$; essendo $\{x_j\}_{j \leq p}$ un insieme finito, esso è limitato e quindi esiste τ , che possiamo supporre > 1 , tale che $\bigcup_j \{x_j\} \subset \tau U$. Ne segue:

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^p (x_j + U) \subseteq \tau U + U \subseteq \tau U + \tau U = \tau(U + U) \subseteq \tau\Omega.$$

Questo conclude la prova. □

Definizione 2.10 (SVT localmente limitato). Uno SVT si dice **localmente limitato** se 0 ha un intorno limitato (secondo la Definizione 2.8).

Un qualunque spazio normato è localmente limitato, poiché il disco unitario di centro l'origine è un intorno limitato dell'origine.

È immediato riconoscere che questa definizione è equivalente al fatto che 0 ha una base di intorno limitati.

Osservazione 2.11. Se V è uno SVT localmente limitato e se Ω è un intorno limitato dell'origine, allora la famiglia

$$\left\{ \frac{1}{n} \Omega : n \in \mathbb{N} \right\}$$

forma una base *numerabile* di intorni dell'origine; quindi uno SVT localmente limitato gode del primo assioma di numerabilità.

Si ha la seguente immediata caratterizzazione della limitatezza in uno SVT.

Proposizione 2.12. *Sia V uno SVT e sia $E \subseteq V$. Allora E è limitato se e solo se per ogni successione $\{x_n\}$ in E e ogni successione $\{\alpha_n\}$ in $\mathbb{R}$ tale che $\alpha_n \rightarrow 0$ si ha anche $\alpha_n x_n \rightarrow 0$ in V .*

Definizione 2.13. *Uno spazio topologico è detto **localmente compatto** se ogni suo punto ha un intorno aperto contenuto in un compatto.*

Osserviamo che per spazi di Hausdorff, questo è equivalente a richiedere che ogni punto abbia un intorno precompatto, cioè avente chiusura compatta o, ancora, che ogni punto ha una base di aperti precompatti. Infatti, sia X uno spazio topologico di Hausdorff tale che per ogni $x \in X$ esistono U aperto e K compatto tali che $x \in U \subseteq K$, e proviamo che x ha una base di aperti precompatti. Consideriamo la famiglia $\mathcal{V}$ degli intorni aperti di x contenuti in U , la quale forma chiaramente una base di intorni di x ; se $V \in \mathcal{V}$ si ha $\overline{V} \subseteq \overline{K} = K$ e quindi $\overline{V}$ è compatto; ne segue che ogni elemento di $\mathcal{V}$ è precompatto.

Per uno SVT, quindi, la locale compattezza è equivalente a richiedere che 0 abbia un intorno aperto precompatto. Inoltre, grazie al Teorema 2.9, si ha che ogni SVT localmente compatto è anche localmente limitato, poiché gli insiemi compatti sono limitati.

Il seguente teorema ci mostra che per uno SVT la locale compattezza è una proprietà molto rara.

Teorema 2.14 (Locale compattezza per SVT). *Uno SVT localmente compatto ha dimensione finita.*

In uno spazio normato di dimensione infinita, allora, nessun disco chiuso è compatto, altrimenti, traslando questo disco, si otterrebbe un intorno compatto dell'origine.

2.2 Spazi di Fréchet

Per introdurre gli spazi di Fréchet, ricordiamo alcuni concetti di base.

Diciamo che uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ è **metrizzabile** se esiste una metrica d su X tale che la topologia indotta da d (ossia la topologia la cui base di aperti è data dai dischi metrici aperti) coincide con $\mathcal{T}$. Uno spazio vettoriale V munito di una topologia si dice **normabile** se esiste una norma $\|\cdot\|$ su V tale che V è metrizzabile mediante la metrica d indotta da $\|\cdot\|$, cioè $d(x, y) = \|x - y\|$. È chiaro che uno spazio normabile è in particolare uno SVT.

Ricordiamo infine che uno spazio vettoriale V munito di una topologia si dice **completo** se ogni successione di Cauchy è convergente, dove una successione $\{x_n\}$ in V è detta di Cauchy se per ogni intorno U di 0 , esiste $\bar{n} = \bar{n}(U) \in \mathbb{N}$ tale che

$$x_n - x_m \in U, \quad \text{per ogni } n, m \geq \bar{n}.$$

Osservazione 2.15. In uno SVT ogni successione di Cauchy è limitata. Infatti, se Ω è un intorno aperto di 0 , grazie al Lemma 2.5, esiste U intorno bilanciato di 0 tale che $U + U \subseteq \Omega$. Consideriamo la successione di Cauchy $\{x_n\}$ in V ; allora, in corrispondenza dell'intorno U , esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $x_n - x_m \in U$, per ogni $n, m \geq \bar{n}$; dalla (2.2), sia $s \gg 1$ tale che $x_1, \dots, x_{\bar{n}} \in sU$; ne segue quindi che, per ogni $n \geq \bar{n}$, si ha

$$x_n = (x_n - x_{\bar{n}}) + x_{\bar{n}} \in U + sU \subseteq sU + sU = s(U + U) \subseteq s\Omega.$$

Siamo pronti per le seguenti definizioni.

Definizione 2.16 (F-spazio). Uno SVT V si dice **F-spazio** se è completo (come spazio vettoriale topologico) e se è metrizzabile mediante una metrica d invariante, cioè tale che

$$d(x + z, y + z) = d(x, y), \quad \text{per ogni } x, y, z \in V.$$

Definizione 2.17 (Spazio di Fréchet). Uno SVT V è detto **spazio di Fréchet** se V è un F-spazio localmente convesso.

Ad esempio, ogni spazio di Banach è uno spazio di Fréchet; inoltre ogni sottospazio vettoriale *chiuso* in uno spazio di Fréchet è anch'esso uno spazio di Fréchet.

Definizione 2.18 (Spazio di Heine-Borel). Sia $(X, \mathcal{T})$ uno SVT oppure uno spazio metrico (con la topologia metrica). Si dice che X è uno **spazio di Heine-Borel** se ogni sottoinsieme chiuso e limitato di X è compatto.

Corollario 2.19. *Uno SVT di Heine-Borel localmente limitato ha dimensione finita.*

Infatti, se W è un intorno limitato dell'origine dello SVT V , $\overline{W}$ è limitato e chiuso e quindi è compatto, poiché V è di Heine-Borel. Ne segue che V è anche localmente compatto, e quindi finito dimensionale, grazie al Teorema 2.14.

Ad esempio, uno spazio normato di dimensione infinita è localmente limitato, quindi, per il precedente corollario, non può essere uno spazio di Heine-Borel. Quindi, uno SVT di Heine-Borel infinito-dimensionale non può essere normabile.

Ricordiamo che si dice che uno spazio topologico X gode del **primo assioma di numerabilità** (in breve, che è uno spazio N_1) se per ogni $x \in X$ esiste una base di intorni di x numerabile. Per uno SVT questo è equivalente a chiedere che l'origine abbia una base di intorni numerabile.

Ad esempio, uno spazio metrico X (e quindi anche uno spazio metrizzabile) è N_1 , in quanto la famiglia numerabile di insiemi $\{B_d(x, \frac{1}{n})\}_{n \in \mathbb{N}}$ dove

$$B_d(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

forma ovviamente una base di intorni di x . In particolare, osserviamo che *gli F -spazi (e quindi gli spazi di Fréchet) sono N_1 , poiché sono metrizzabili per definizione.*

Una semplice applicazione del concetto di prima numerabilità è data dalla seguente proposizione:

Proposizione 2.20. *Sia X uno spazio topologico N_1 . Si hanno i seguenti risultati:*

1. *per ogni $A \subseteq X$, si ha che $x \in \overline{A}$ se e solo se esiste $a_n \in A$ tale che $a_n \rightarrow x$;*
2. *dato uno spazio topologico Y e una funzione $f : X \rightarrow Y$, f è continua in $x \in X$ se e solo se, per ogni successione x_n in X tale che $x_n \rightarrow x$ in X , si ha $f(x_n) \rightarrow f(x)$ in Y ;*
3. *siano $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ due topologie su X tali che $(X, \mathcal{T}_1)$ e $(X, \mathcal{T}_2)$ sono N_1 ; allora $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ se e solo se $(X, \mathcal{T}_1)$ e $(X, \mathcal{T}_2)$ hanno le stesse successioni convergenti, ovvero $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ in $(X, \mathcal{T}_1)$ se e solo se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ in $(X, \mathcal{T}_2)$.*

Osserviamo che la condizione (3) è una conseguenza della (2), in quanto la condizione $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ è equivalente al fatto che l'applicazione identica di X sia un omeomorfismo degli spazi topologici $(X, \mathcal{T}_1)$ e $(X, \mathcal{T}_2)$, e grazie al risultato in (2), la continuità tra spazi N_1 è equivalente alla continuità sequenziale.

Osservazione 2.21. Si noti che la condizione (3) implica che in uno spazio N_1 le successioni convergenti determinano univocamente la topologia, e ciò avviene nel seguente modo: se X è uno spazio topologico N_1 , un insieme U è aperto in X se e solo se per ogni $x \in U$ e per ogni successione $\{x_n\}$ convergente a x , si ha che $\{x_n\}$ è definitivamente contenuta in U .

Diamo ora un risultato fondamentale sulla prima numerabilità, la cui prova può essere vista in [45, Chapter 1].

Teorema 2.22 (Metrizzabilità per gli SVT). *Sia V uno SVT. Allora V è metrizzabile se e solo se gode del primo assioma di numerabilità.*

Inoltre, se V è uno SVT N_1 , esiste una metrica d che induce la topologia di V con le seguenti proprietà:

- (a) d è invariante,
- (b) i dischi aperti $B_d(0, r)$ sono bilanciati.

Infine, se V è localmente convesso, si può scegliere d che gode anche della proprietà:

- (c) tutti i dischi aperti $B_d(x, r)$ sono convessi.

Quindi, possiamo dedurre che in uno spazio di Fréchet V esiste sempre una metrica invariante i cui dischi aperti centrati in 0 sono aperti, bilanciati e convessi (nella topologia di V).

Si ha il seguente corollario del Teorema 2.22.

Corollario 2.23. *Sia V uno SVT. Allora V è un F-spazio se e solo se V è N_1 e completo (in senso topologico).*

Infatti, se V è un F-spazio, per definizione, esso è completo ed inoltre è N_1 perchè è metrizzabile. Viceversa, se V è uno SVT completo e N_1 , grazie al Teorema 2.22, esiste una metrica d su V invariante e inducente su V la topologia $\mathcal{T}$, per cui V è un F-spazio.

Infine, si noti che uno SVT localmente limitato è metrizzabile (mediante una metrica invariante), in quanto uno SVT localmente limitato è N_1 (Osservazione 2.11).

2.3 Seminorme e Convessità locale

Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ (non necessariamente uno SVT). Una **seminorma** su X è un'applicazione $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

(a) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ per ogni $x, y \in X$ (subadditività);

(b) $p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \in X$ (omogeneità).

Si osservi che da (b) segue che $p(0) = 0$ e che $p(-x) = p(x)$; scegliendo quindi $y = -x$ in (a), si ottiene $2p(x) \geq 0$ e quindi p ha valori non negativi. Per cui una seminorma p soddisfa gli assiomi di norma tranne al più quello di positività (ossia $p(x) = 0$ se e solo se $x = 0$).

Si noti anche che da $p(x) = p(x - y + y) \leq p(x - y) + p(y)$ segue facilmente

$$|p(x) - p(y)| \leq p(x - y), \quad \forall x, y \in X. \quad (2.4)$$

Quindi una seminorma è una funzione continua se e solo se è continua nell'origine.

Un importante esempio di seminorma è dato da $p = |\Lambda|$, dove $\Lambda : X \rightarrow \mathbb{R}$ è un funzionale.

Data una seminorma p , denotiamo con B_p la **palla unità** relativa a p ossia

$$B_p := \{x \in X : p(x) < 1\}. \quad (2.5)$$

Definizione 2.24 (Insieme assorbente). Un sottoinsieme A di uno spazio vettoriale X è detto **assorbente** se per ogni $x \in X$ esiste un numero reale $t > 0$ (dipendente da x) tale che $x \in tA$.

Si noti che un insieme assorbente contiene necessariamente 0.

È immediato provare che la palla unità B_p è un insieme assorbente, bilanciato e convesso. Infatti, la convessità di B_p è conseguenza della subadditività di p , mentre la bilanciatezza e l'assorbente seguono dalla omogeneità di p .

Osserviamo che A è assorbente se e solo se vale la seguente proprietà:

$$\forall x \in X \quad \exists t > 0 : \quad \frac{x}{t} \in A. \quad (2.6)$$

Ad esempio, se X è uno SVT, ogni intorno dell'origine è un insieme assorbente (infatti $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} = 0$).

Osservazione 2.25. È facile provare che se p è una seminorma sullo spazio vettoriale X e se B_p è la sua palla unità allora³

$$\inf \left\{ t > 0 : \frac{x}{t} \in B_p \right\} = p(x), \quad \forall x \in X. \quad (2.7)$$

³Infatti in questo caso risulta

$$\left\{ t > 0 : \frac{x}{t} \in B_p \right\} =]p(x), \infty[.$$

Questo mostra che non è solo la seminorma p a determinare completamente la sua palla unità B_p , ma è vero anche il viceversa; in particolare, se vogliamo che un insieme A sia la palla unità di una qualche seminorma $p(x)$, quest'ultima è data necessariamente da $\inf \{t > 0 : \frac{x}{t} \in A\}$.

Mostriamo ora un risultato *costruttivo* per avere degli SVT *localmente convessi*. Diamo la seguente definizione:

Definizione 2.26 (Famiglia separante di seminorme). *Sia X uno spazio vettoriale. Una famiglia $\mathcal{P}$ di seminorme su X è detta **separante** se per ogni $x \neq 0$ esiste $p \in \mathcal{P}$ tale che $p(x) \neq 0$.*

Ricordiamo poi il seguente risultato di topologia. Sia X un insieme qualunque e sia $\mathcal{C}$ una qualunque famiglia di sottoinsiemi di X . La **topologia generata da $\mathcal{C}$** è la più piccola topologia che contiene tutti gli elementi di $\mathcal{C}$. Costruttivamente, è facile provare che tale topologia è costituita precisamente dalle unioni (qualunque) di intersezioni finite di elementi di $\mathcal{C}$ (più ovviamente X e $\emptyset$).

Diamo allora il seguente importante risultato.

Teorema 2.27. *Sia X uno spazio vettoriale. Sia $\mathcal{P}$ una famiglia separante di seminorme su X . Si consideri la famiglia di insiemi*

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{n} B_p \mid p \in \mathcal{P}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Sia infine $\mathcal{C}$ la famiglia di tutti i traslati di $\mathcal{B}$, ossia

$$\mathcal{C} = \left\{ x + \frac{1}{n} B_p \mid p \in \mathcal{P}, n \in \mathbb{N}, x \in X \right\}.$$

Allora, la topologia generata da $\mathcal{C}$ dota X di una struttura di SVT tale che:

1. *le intersezioni finite di elementi di $\mathcal{B}$ formano una base di intorni aperti, convessi e bilanciati di 0;*
2. *X è localmente convesso;*
3. *ogni seminorma di $\mathcal{P}$ è continua. Inoltre:*
 - (i) *un insieme $E \subseteq X$ è limitato se e solo se ogni $p \in \mathcal{P}$ è limitata su E ;*
 - (ii) *se $\mathcal{P}$ è numerabile, X con la topologia suddetta è N_1 .*

Se $\mathcal{P}$ è una famiglia separante di seminorme sullo spazio vettoriale X , conveniamo di denotare con $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ la topologia generata da $\mathcal{C}$, come sopra.

Per la dimostrazione del Teorema 2.27 si veda [45, Chapter 1]. Osserviamo esplicitamente che si hanno le identità

$$\frac{1}{n}B_p = \left\{ y : p(y) < \frac{1}{n} \right\}, \quad x + \frac{1}{n}B_p = \left\{ y : p(y-x) < \frac{1}{n} \right\}. \quad (2.8)$$

Quindi, poiché $\mathcal{P}$ è separante, possiamo affermare che la topologia $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ è di Hausdorff, mentre, grazie alla (2.8), segue la continuità degli elementi di $\mathcal{P}$. La proprietà (ii) è una conseguenza della definizione della topologia $\mathcal{T}(\mathcal{P})$.

Osservazione 2.28. È facile provare che la topologia $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ si può ottenere anche nel seguente modo: Si considerano dapprima le seguenti intersezioni finite di elementi di $\mathcal{B}$:

$$V(p_1, \dots, p_m; \varepsilon) := \varepsilon B_{p_1} \cap \dots \cap \varepsilon B_{p_m} = \{y \in X \mid p_i(y) < \varepsilon, i = 1, \dots, m\}; \quad (2.9)$$

poi si considerano i loro traslati:

$$x + V(p_1, \dots, p_m; \varepsilon) = \{y \in X \mid p_i(y-x) < \varepsilon, i = 1, \dots, m\}; \quad (2.10)$$

infine la topologia $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ è formata precisamente (oltre che da $\emptyset$) dagli insiemi che sono unione (arbitraria) di questi ultimi. Si noti che la famiglia

$$\{V(p_1, \dots, p_m; \varepsilon)\}_{\varepsilon > 0, p_1, \dots, p_m \in \mathcal{P}, m \in \mathbb{N}}$$

è una base (convessa e bilanciata) di intorni aperti dell'origine nella topologia $\mathcal{T}(\mathcal{P})$.

Esempio 2.29. Sia X uno spazio vettoriale. Sia $\mathcal{P}$ la famiglia di tutte le seminorme su X . Giacchè ogni spazio vettoriale può essere normato, $\mathcal{P}$ contiene almeno una norma ed è quindi separante. È interessante notare che tutti i funzionali lineari su X sono automaticamente continui rispetto a $\mathcal{T}(\mathcal{P})$. Infatti, se Λ è un funzionale lineare su X , $|\Lambda|$ è una seminorma, per cui appartiene a $\mathcal{P}$ ed è in particolare continua in 0. Questo equivale alla continuità in 0, e quindi ovunque, di Λ .

Analizziamo ora alcune notevoli proprietà di $\mathcal{T}(\mathcal{P})$.

Osservazione 2.30. Si hanno i seguenti fatti:

1. Una successione $\{x_n\}$ converge a x_0 nello spazio topologico $(X, \mathcal{T}(\mathcal{P}))$ se e solo se, per ogni fissata $p \in \mathcal{P}$, si ha $p(x_n - x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Osserviamo esplicitamente che quanto sopra non è equivalente a scrivere

$$p(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p(x_0),$$

essendo quest'ultimo un fatto più debole, in generale.

2. Una successione $\{x_n\}$ è di Cauchy nello SVT $(X, \mathcal{T}(\mathcal{P}))$ se e solo se, per ogni fissata $p \in \mathcal{P}$, e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} = \bar{n}(\varepsilon, p)$ tale che $p(x_n - x_m) < \varepsilon$ per ogni $n, m \geq \bar{n}$. Questo segue immediatamente dal fatto che gli insiemi di tipo $V(p_1, \dots, p_m; \varepsilon)$ di cui sopra formano una base di intorni di 0 nello SVT $(X, \mathcal{T}(\mathcal{P}))$.

Segue un importante teorema.

Teorema 2.31. *La topologia $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ è la più piccola topologia su X che ha le due seguenti proprietà:*

- (a) ogni seminorma di $\mathcal{P}$ è continua,
- (b) $(X, \mathcal{T}(\mathcal{P}))$ è uno SVT.

Equivalentemente, la (b) può essere sostituita dalla seguente

- (b') ogni traslazione su X è una funzione continua.

Infatti, sappiamo già che $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ gode di queste proprietà; d'altra parte, se $\mathcal{T}'$ è la più piccola topologia che gode delle proprietà (a) e (b), segue che $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{P})$. Viceversa, ogni elemento di $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ come in (2.10) appartiene anche a $\mathcal{T}'$ poiché traslato di una intersezione finita di insiemi del tipo $\{y : p_i(y) < \varepsilon\}$ (che appartengono a $\mathcal{T}'$ in quanto ogni p_i è continua rispetto a $\mathcal{T}'$, per ipotesi).

2.3.1 Famiglie numerabili e separanti di seminorme

Sia X un $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale e sia $\mathcal{P} = \{p_k\}$ una famiglia numerabile e separante di seminorme.

Dal Teorema 2.27 sappiamo che le intersezioni finite di elementi di

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{n} B_{p_k} \mid n, k \in \mathbb{N} \right\} \quad (2.11)$$

formano una base convessa di intorni di 0 nella topologia $\mathcal{T}(\mathcal{P})$; poiché $\mathcal{B}$ è numerabile, segue che X è N_1 . Dal Teorema 2.22 di metrizzabilità, segue l'esistenza di una metrica d invariante su X che induce la topologia $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ e tale che le palle associate a d siano insiemi aperti, bilanciati e convessi. Costruiamo direttamente una metrica siffatta, senza dover ricorrere al Teorema 2.22.

Sia $\{c_k\}$ una qualunque successione convergente a 0 di numeri reali positivi (ad esempio, $\{\frac{1}{2^k}\}$), e poniamo:

$$d(x, y) := \max_{k \in \mathbb{N}} c_k \frac{p_k(x - y)}{1 + p_k(x - y)}, \quad x, y \in X. \quad (2.12)$$

È immediato provare che d soddisfa le seguenti proprietà:

- (i) $d(x, y) \geq 0$, per ogni $x, y \in X$;
- (ii) $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
- (iii) $d(x, y) = d(y, x)$, per ogni $x, y \in X$.

Per provare che d è una metrica su X resta da dimostrare che d soddisfa la disuguaglianza triangolare:

- (iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, per ogni $x, y, z \in X$;

consideriamo quindi la funzione $g : [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ così fatta

$$g(r) = \frac{r}{r + 1}.$$

Si prova facilmente che g è una funzione monotona crescente e subadditiva; fissiamo allora $x, y, z \in X$, e osserviamo che, grazie alla proprietà di subadditività di cui gode ogni p_k , abbiamo

$$p_k(x - y) \leq p_k(x - z) + p_k(z - y), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Quindi, sfruttando la monotonia di g e la sua subadditività, si ha

$$g(p_k(x - y)) \leq g(p_k(x - z)) + g(p_k(z - y)), \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

da cui otteniamo la (iv). Allora d è una metrica su X , e chiaramente è invariante.

Mostriamo ora che la topologia indotta da d coincide con $\mathcal{T}(\mathcal{P})$. È sufficiente studiare gli intorni di 0. Fissiamo $r > 0$. Se $r \geq \max_k c_k$, allora $\{x : d(x, 0) < r\} = X$;

se invece $r < \max_k c_k$, poiché $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 0$, si ha $r < c_k$ per un insieme *finito* e non vuoto di indici k . Ne segue che

$$D(0, r) := \{x : d(x, 0) < r\} = \bigcap_{k: r < c_k} \left\{ p_k(x) < \frac{r}{c_k - r} \right\}. \quad (2.13)$$

In questo caso $D(0, r)$ è intersezione *finita* di insiemi del tipo $\{x : p_k(x) < \varepsilon\}$, i quali sono interni di 0 nella topologia $\mathcal{T}(\mathcal{P})$, e quindi ogni intorno metrico di 0 è intorno di 0 in $\mathcal{T}(\mathcal{P})$. Viceversa, proviamo che ogni insieme del tipo $\frac{1}{n}B_{p_k}$ contiene un disco metrico centrato in 0. Sia $r > 0$ così piccolo che

$$r < c_k \text{ e } \frac{r}{c_k - r} < \frac{1}{n}.$$

Dalla (2.13), e da questa scelta di r , segue che

$$D(0, r) \subseteq \left\{ p_k(x) < \frac{r}{c_k - r} \right\} \subseteq \left\{ p_k(x) < \frac{1}{n} \right\} = \frac{1}{n}B_{p_k}.$$

Quindi ogni intorno di 0 in $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ è intorno metrico di 0.

Resta da osservare che ogni $D(0, r)$ è convesso e bilanciato, ma ciò segue facilmente dalla rappresentazione (2.13).

Osserviamo che, essendo $(X, \mathcal{T}(\mathcal{P}))$ uno spazio N_1 (in quanto $\mathcal{P}$ è numerabile), le successioni convergenti determinano univocamente la topologia.

Osservazione 2.32. Affinché $(X, \mathcal{T}(\mathcal{P}))$ sia uno spazio di Fréchet è sufficiente che X sia completo rispetto alla metrica d (infatti d è una metrica invariante che genera la topologia $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ e che rende X localmente convesso).

Osservazione 2.33. Se la famiglia numerabile $\mathcal{P} = \{p_k\}$ è anche monotona crescente, ossia

$$p_k(x) \leq p_{k+1}(x), \quad \forall k \in \mathbb{N}, x \in X,$$

allora $B_{p_{k+1}} \subseteq B_{p_k}$ e quindi, per ogni famiglia finita $\mathcal{J} \subset \mathbb{N}$, si ha

$$\frac{1}{n_0}B_{p_{i_0}} \subseteq \bigcap_{i \in \mathcal{J}} \frac{1}{n_i}B_{p_i},$$

dove $n_0 = \max \{n_i : i \in \mathcal{J}\}$ e $i_0 = \max \{i : i \in \mathcal{F}\}$. Ne segue che anche la famiglia $\mathcal{B}$ in (2.11) è una base convessa di interni dello 0. Inoltre, poiché

$$\frac{1}{n_0}B_{p_{i_0}} \supseteq \begin{cases} \frac{1}{n_0}B_{p_{n_0}}, & \text{se } n_0 \geq i_0, \\ \frac{1}{i_0}B_{p_{i_0}}, & \text{se } n_0 < i_0, \end{cases}$$

segue che la famiglia

$$\mathcal{B} = \left\{ V_n := \frac{1}{n} B_{p_n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \left\{ x : p_n(x) < \frac{1}{n} \right\} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \quad (2.14)$$

è anch'essa una base convessa di intorni di 0.

2.3.2 Le topologie L_{loc}^1 e L_{loc}^∞ di $C(\Omega)$

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto. Vogliamo ora topologizzare lo spazio vettoriale complesso $C(\Omega)$ delle funzioni continue su Ω a valori in $\mathbb{C}$, mediante le seguenti famiglie di seminorme.

Diciamo che una successione di insiemi aperti limitati Ω_n è un'esauizione dell'insieme aperto Ω se

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n = \Omega, \quad K_n := \overline{\Omega_n} \subset \Omega_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.15)$$

Consideriamo poi, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $f \in C(\Omega)$, le seminorme così fatte:

$$p_n(f) := \int_{K_n} |f(x)| dH^N(x), \quad \mathcal{P} := \{p_n\}, \quad (2.16)$$

$$q_n(f) := \sup_{x \in K_n} |f(x)|, \quad \mathcal{Q} := \{q_n\}. \quad (2.17)$$

Osserviamo che $p_n \leq p_{n+1}$, $q_n \leq q_{n+1}$ e che le famiglie $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono separanti. Da quanto dimostrato precedentemente, $C(\Omega)$ è uno SVT localmente convesso ed N_1 , mediante le topologie nelle metriche

$$d(f, g) = \max_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(f - g)}{1 + p_n(f - g)}, \quad d'(f, g) = \max_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \frac{q_n(f - g)}{1 + q_n(f - g)},$$

per ogni $f, g \in C(\Omega)$. Diciamo che $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ e $\mathcal{T}(\mathcal{Q})$ sono, rispettivamente, le topologie L_{loc}^1 e L_{loc}^∞ di $C(\Omega)$.

Chiaramente, $\mathcal{T}(\mathcal{P}) \subset \mathcal{T}(\mathcal{Q})$, cioè $\mathcal{T}(\mathcal{Q})$ è una topologia (strettamente) più fine di $\mathcal{T}(\mathcal{P})$. Invece, nella prova del Lemma E dimostreremo che

$$\mathcal{T}(\mathcal{P}) \cap \mathcal{H}(\Omega) = \mathcal{T}(\mathcal{Q}) \cap \mathcal{H}(\Omega).$$

Proposizione 2.34. *Lo spazio $(C(\Omega), d')$ è completo.*

Dimostrazione. Sia $\{f_k\}$ una successione di Cauchy in $C(\Omega)$. Per l'Osservazione 2.30 (punto 2), per ogni fissato $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\bar{k} = \bar{k}(n, \varepsilon)$ tale che

$$p_n(f_i - f_j) < \varepsilon, \quad \forall i, j \geq \bar{k}.$$

Questo equivale a dire che $\{f_k|_{K_n}\}_k$ è una successione di Cauchy in norma uniforme $\|\cdot\|_\infty$; per la completezza di $(C(K_n), \|\cdot\|_\infty)$ esiste quindi una funzione continua su K_n a cui la successione $f_k|_{K_n}$ converge uniformemente. Sfruttando il fatto che $K_n \uparrow \Omega$, incollando tali limiti, si può definire senza ambiguità una funzione $f \in C(\Omega)$ a cui la successione f_k converge uniformemente sui compatti di Ω . Per mostrare che $f_k \rightarrow f$ in $C(\Omega)$ usiamo l'Osservazione 2.30 (punto 1), secondo cui basta provare che, fissato $n \in \mathbb{N}$, $f_k|_{K_n}$ converge a $f|_{K_n}$ in norma uniforme, il che è ovvio per come è stata costruita f . $\square$

Osservazione 2.35. Dall'Osservazione 2.32, abbiamo che $C(\Omega)$ è uno spazio di Fréchet con la topologia L_{loc}^∞ , detta anche **topologia della convergenza uniforme sui compatti**.

Grazie alla proprietà (i) del Teorema 2.27, possiamo affermare che, data una famiglia $\mathcal{F} \subset C(\Omega)$,

- (a) $\mathcal{F}$ è $\mathcal{T}(\Omega)$ -limitato (nel senso degli SVT) se e solo se, per ogni insieme compatto $K \subset \Omega$, esiste una costante $M(K) > 0$ tale che

$$\sup_{x \in K} |f(x)| \leq M(K), \quad \forall f \in \mathcal{F}; \quad (2.18)$$

- (b) $\mathcal{F}$ è $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ -limitato (nel senso degli SVT) se e solo se, per ogni insieme compatto $K \subset \Omega$, esiste una costante $M(K) > 0$ tale che

$$\int_K |f(x)| dH^N(x) \leq M(K), \quad \forall f \in \mathcal{F}. \quad (2.19)$$

Possiamo finalmente mettere in relazione il concetto di famiglia normale con quello di precompatezza.

Ricordiamo che in uno spazio metrico (X, d) , un insieme $E \subseteq X$ è **precompatto** (cioè, $\overline{E}$ è compatto) se e solo se da ogni successione in E possiamo estrarre una sottosuccessione che converge in X . Quindi, una famiglia di funzioni $\mathcal{F} \subseteq C(\Omega)$ è normale se e solo se $\mathcal{F}$ è un sottoinsieme precompatto di $(C(\Omega), \mathcal{T}(\Omega))$. Useremo questo semplice fatto nella prova del Lemma E.

Capitolo 3

Rappresentazioni integrali e Formule di Media

Lo scopo di questo capitolo è provare il Lemma A e ricavare da esso, grazie agli argomenti esposti nei precedenti capitoli, nuove formule integrali di rappresentazione, utili per dimostrare il Teorema di tipo Koebe per $\mathcal{L}$ nel Capitolo 4.

3.1 La prova delle Formule di Media

Ricordiamo l'enunciato del Lemma A:

Per ogni funzione u di classe C^2 su un insieme aperto contenente la Γ -palla $\overline{\Omega_r(x)}$, abbiamo

$$u(x) = m_r(u)(x) - \int_{\Omega_r(x)} \left(\Gamma(x, y) - \frac{1}{r} \right) \mathcal{L}u(y) dV^N(y).$$

In particolare, una funzione u di classe C^2 in un insieme aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ è $\mathcal{L}$ -armonica se e solo se

$$u(x) = m_r(u)(x), \quad \text{per ogni } \Gamma\text{-palla tale che } \overline{\Omega_r(x)} \subset \Omega.$$

Se u è una funzione continua su $\partial\Omega_r(x)$, ricordiamo la formula (5):

$$m_r(u)(x) = \int_{\Omega_r(x)} u(y) K(x, y) dV^{N-1}(y),$$

dove, per ogni $y \neq x$, si ha

$$K(x, y) = \frac{\langle A(y) \nabla \Gamma_x(y), \nabla \Gamma_x(y) \rangle}{|\nabla \Gamma_x(y)|}.$$

Siamo pronti per la prova del lemma.

Dimostrazione (del Lemma A). Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un insieme aperto e limitato, con $\partial\Omega$ di classe C^2 . Se $u, d \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$, possiamo applicare il Teorema della Divergenza, in modo tale da ottenere, sfruttando la forma di quasi-divergenza (1) di $\mathcal{L}$ e la simmetria della matrice A , la seguente identità di tipo Green (si veda anche la notazione in (3)):

$$\int_{\Omega} (u \mathcal{L}d - d \mathcal{L}u) dV^N = \int_{\partial\Omega} \left(u \langle A\nabla d, N_{\Omega} \rangle - d \langle A\nabla u, N_{\Omega} \rangle \right) dV^{N-1}, \quad (3.1)$$

dove con N_{Ω} indichiamo il vettore normale esterno a $\partial\Omega$. Dimostriamo la (3.1). Ricordiamo che $\mathcal{L}$ ha la seguente forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{V} \sum_{i,j=1}^N \partial_{x_i} (V a_{i,j} \partial_{x_j}),$$

quindi, posto $H(d) := VA\nabla d$ e $H(u) := VA\nabla u$, indichiamo con $H_i(d)$ e $H_i(u)$ le componenti i -esime, rispettivamente, dei precedenti vettori. Osserviamo allora che $u \mathcal{L}d - d \mathcal{L}u = \frac{1}{V} (u \operatorname{div} H(d) - d \operatorname{div} H(u))$, per cui, applicando il Teorema di integrazione per parti, avremo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u \mathcal{L}d - d \mathcal{L}u) dV^N &= \int_{\Omega} \frac{1}{V} (u \operatorname{div} H(d) - d \operatorname{div} H(u)) V dH^N \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} (u \partial_{x_i} H_i(d) - d \partial_{x_i} H_i(u)) dH^N \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{\partial\Omega} (u H_i(d) \cdot N_{\Omega}^i - d H_i(u) \cdot N_{\Omega}^i) dH^{N-1} \\ &\quad - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} (H_i(d) \partial_{x_i} u - H_i(u) \partial_{x_i} d) dH^N \\ &= \int_{\partial\Omega} (u \langle VA\nabla d, N_{\Omega} \rangle - d \langle VA\nabla u, N_{\Omega} \rangle) dH^{N-1} \\ &\quad - \int_{\Omega} (\langle VA\nabla d, \nabla u \rangle - \langle \nabla d, VA\nabla u \rangle) dH^N \\ &= \int_{\partial\Omega} (u \langle A\nabla d, N_{\Omega} \rangle - d \langle A\nabla u, N_{\Omega} \rangle) dV^{N-1}, \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza è stata ottenuta sfruttando la simmetria della matrice A . Da qui segue (3.1).

Ora, scegliamo nella (3.1) $d \equiv -1$, ottenendo

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}u dV^N = \int_{\partial\Omega} \langle A\nabla u, N_{\Omega} \rangle dV^{N-1}, \quad \forall u \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}). \quad (3.2)$$

In particolare, ciò prova che

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}u dV^N = 0, \quad \text{per ogni } u \in C_0^2(\Omega, \mathbb{R}). \quad (3.3)$$

Sia $x \in \mathbb{R}^N$ e fissiamo $r > 0$; consideriamo l'insieme aperto (regolare)

$$\Omega_{r,\rho} := \Omega_r(x) \setminus \overline{\Omega_\rho(x)}, \quad \text{con } 0 < \rho < r.$$

Sia $u \in C^2(\overline{\Omega_r(x)}, \mathbb{R})$ e scegliamo $d(y) := \Gamma_x(y)$. Vogliamo applicare la (3.1) quando $\Omega = \Omega_{r,\rho}$. Ricordiamo che $\mathcal{L}\Gamma_x = 0$ in $\mathbb{R}^N \setminus \{x\}$ (si vedano le ipotesi (H.a) e (H.c) sulla soluzione fondamentale Γ riportate nella Sezione 1.3, Capitolo 1), e poiché $N_\Omega = \mp \nabla \Gamma_x / |\nabla \Gamma_x|$ su $\partial\Omega_r(x)$ e su $\partial\Omega_\rho(x)$, rispettivamente, otteniamo

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_{r,\rho}} \Gamma_x \mathcal{L}u \, dV^N \\ &= - \int_{\partial\Omega_r(x)} u \frac{\langle A \nabla \Gamma_x, \nabla \Gamma_x \rangle}{|\nabla \Gamma_x|} \, dV^{N-1} - \frac{1}{r} \int_{\partial\Omega_r(x)} \langle A \nabla u, N_{\Omega_r(x)} \rangle \, dV^{N-1} + \\ &+ \int_{\partial\Omega_\rho(x)} u \frac{\langle A \nabla \Gamma_x, \nabla \Gamma_x \rangle}{|\nabla \Gamma_x|} \, dV^{N-1} + \frac{1}{\rho} \int_{\partial\Omega_\rho(x)} \langle A \nabla u, N_{\Omega_\rho(x)} \rangle \, dV^{N-1}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Abbiamo utilizzato il fatto che la normale esterna al dominio $\Omega_{r,\rho}$ coincide, su $\partial\Omega_r(x)$, con il vettore normale esterno a $\Omega_r(x)$, mentre coincide, su $\partial\Omega_\rho(x)$, con l'opposto del vettore normale esterno a $\Omega_\rho(x)$.

Se introduciamo la notazione

$$J_r(u)(x) := \frac{1}{r} \int_{\partial\Omega_r(x)} \langle A \nabla u, N_{\Omega_r(x)} \rangle \, dV^{N-1},$$

la (3.4) può essere riscritta come segue (si veda anche la (4) e (5))

$$- \int_{\Omega_{r,\rho}} \Gamma_x \mathcal{L}u \, dV^N = -m_r(u)(x) - J_r(u)(x) + m_\rho(u)(x) + J_\rho(u)(x). \quad (3.5)$$

Ora vogliamo far tendere ρ a 0 nella (3.5).

Iniziamo con l'osservare che $\Gamma \in L^1_{\text{loc}}(dV^N)$, in quanto V è positiva e continua e dalla (3) si ha $L^1_{\text{loc}}(dH^N) = L^1_{\text{loc}}(dV^N)$, per cui avremo che

$$- \int_{\Omega_r(x) \setminus \overline{\Omega_\rho(x)}} \Gamma_x \mathcal{L}u \, dV^N \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} - \int_{\Omega_r(x)} \Gamma_x \mathcal{L}u \, dV^N.$$

Proviamo ora che l'ultimo addendo che appare alla destra dell'equazione (3.5) tende a 0 quando $\rho \rightarrow 0$. Per prima cosa notiamo che, poiché $\Gamma \in L^1_{\text{loc}}$, si ha

$$0 \leq \frac{H^N(\Omega_\rho(x))}{\rho} = \frac{1}{\rho} \int_{\Omega_\rho(x)} dH^N(y) \leq \int_{\Omega_\rho(x)} \Gamma(x, y) \, dH^N(y) \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0,$$

essendo $\bigcap_{\rho>0} \Omega_\rho(x) = \{x\}$. Ora, grazie alla (3.2) abbiamo che

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} |J_\rho(u)(x)| = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\left| \int_{\Omega_\rho(x)} \mathcal{L}u \, dV^N \right|}{\rho} \leq \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\sup_{\Omega_\rho(x)} |V \mathcal{L}u| \cdot \frac{H^N(\Omega_\rho(x))}{\rho} \right) = 0.$$

Riassumendo, dalla (3.5) otteniamo che esiste $\lim_{\rho \rightarrow 0} m_\rho(u)(x)$, e dalla (3.5) si ha

$$-\int_{\Omega_r(x)} \Gamma_x \mathcal{L}u \, dV^N = -m_r(u)(x) - \frac{1}{r} \int_{\Omega_r(x)} \mathcal{L}u \, dV^N + \lim_{\rho \rightarrow 0} m_\rho(u)(x). \quad (3.6)$$

Prima di calcolare il limite di $m_\rho(u)(x)$, è necessario fare alcune osservazioni.

Supponiamo che $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ e scegliamo $r > 0$ abbastanza grande tale che il supporto di u sia contenuto in $\Omega_r(x)$. Con queste ipotesi, notiamo che il primo membro della (3.6) è uguale a

$$-\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x, y) \mathcal{L}u(y) \, dV^N(y) = u(x),$$

in quanto Γ è soluzione fondamentale per $\mathcal{L}$, si veda la (1.17). Inoltre, il primo addendo del secondo membro della (3.6) è nullo, poiché $u = 0$ su $\partial\Omega_r(x)$. Lo stesso è vero per il secondo addendo, grazie alla (3.3). Come conseguenza, con l'ipotesi che u è liscia e supportata in $\Omega_r(x)$, la (3.6) è equivalente alla

$$u(x) = \lim_{\rho \rightarrow 0} m_\rho(u)(x). \quad (3.7)$$

D'altra parte, un semplice argomento di funzioni cut-off¹ mostra che la (3.7) è ancora vera per ogni $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ e ogni $x \in \mathbb{R}^N$, quando u non ha necessariamente supporto compatto. In particolare, scegliendo $u \equiv 1$, otteniamo (ricordando la (5))

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega_\rho(x)} K(x, y) \, dV^{N-1}(y) = 1, \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^N. \quad (3.8)$$

Possiamo quindi rimuovere l'ipotesi $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ nella (3.7) e sostituirla con la sola continuità di u . Infatti, se $u \in C(\Omega_r(x), \mathbb{R})$, si ha

$$\begin{aligned} m_\rho(u)(x) &= \int_{\partial\Omega_\rho(x)} (u(y) - u(x)) K(x, y) \, dV^{N-1}(y) + \\ &+ u(x) \int_{\partial\Omega_\rho(x)} K(x, y) \, dV^{N-1}(y), \end{aligned}$$

e, quando $\rho \rightarrow 0$, il secondo addendo tende a $u(x)$, grazie alla (3.8). Proviamo allora che il primo addendo tende a 0 quando $\rho \rightarrow 0$.

Se u è continua, fissato $\varepsilon > 0$ (poiché $\Omega_\rho(x)$ si restringe a $\{x\}$ quando $\rho \rightarrow 0$), esiste $\bar{\rho} > 0$ tale che, per $\rho \in (0, \bar{\rho})$, si ha

$$\sup_{y \in \partial\Omega_\rho(x)} |u(y) - u(x)| < \varepsilon;$$

¹Si noti infatti che in (3.7) intervengono solo i valori assunti da u in un intorno piccolo di x .

quindi, se $\rho \in (0, \bar{\rho})$, ricordando che $K_x \geq 0$, si ha

$$\int_{\partial\Omega_\rho(x)} |(u(y) - u(x)) K(x, y)| dV^{N-1}(y) \leq \varepsilon \int_{\partial\Omega_\rho(x)} K(x, y) dV^{N-1} \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} \varepsilon.$$

Nel passare al limite, abbiamo ancora utilizzato la (3.8). Quindi avremo che

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} m_\rho(u)(x) = u(x), \quad \text{per ogni } u \in C(\Omega_r(x), \mathbb{R}). \quad (3.9)$$

Torniamo ora al caso in cui $u \in C^2(\overline{\Omega_r(x)}, \mathbb{R})$. Utilizzando la (3.9) nella (3.6), otteniamo

$$u(x) = m_r(u)(x) - \int_{\Omega_r(x)} \left(\Gamma(x, y) - \frac{1}{r} \right) \mathcal{L}u(y) dV^N(y). \quad (3.10)$$

Questa è esattamente la (6) del Lemma A.

Notiamo che la (3.10) migliora la (3.8): infatti, prendendo $u \equiv 1$ nella (3.10) otteniamo

$$m_r(1)(x) = \int_{\partial\Omega_r(x)} K(x, y) dV^{N-1}(y) = 1, \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^N \text{ e } r > 0. \quad (3.11)$$

Proviamo infine l'ultima affermazione del Lemma A. Se u è $\mathcal{L}$ -armonica su Ω , la formula (6) implica direttamente la (7), poiché $\mathcal{L}u = 0$. D'altra parte, se $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ è tale che $\mathcal{L}u \neq 0$ in qualche punto $x \in \Omega$, supponiamo per semplicità che $\mathcal{L}u(x) > 0$, allora esiste $r > 0$ tale che $\mathcal{L}u > 0$ in $\Omega_r(x)$ (si veda la (1.18)); dalla (6) e dalla positività di $\Gamma(x, y) - 1/r$ su $\Omega_r(x)$, abbiamo $u(x) \not\leq m_r(u)(x)$, che contraddice la (7). Abbiamo quindi ottenuto la tesi, e ciò conclude la prova. $\square$

3.2 Medie Solide

Vogliamo ora introdurre gli operatori di media solida. Iniziamo con qualche notazione. Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ è un insieme aperto, fissato $x \in \Omega$, poniamo

$$R(x) := \sup\{r > 0 : \Omega_r(x) \subset \Omega\}. \quad (3.12)$$

Sia $x \in \Omega$ fissato. Indichiamo con $\varphi : [0, R(x)) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione L^1 non negativa, con supporto compatto, e tale che

$$\int_0^{R(x)} \varphi(\rho) d\rho = 1. \quad (3.13)$$

Per ogni funzione continua $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, poniamo

$$\Phi(u)(x) := \int_0^{R(x)} \varphi(\rho) m_\rho(u)(x) d\rho. \quad (3.14)$$

La definizione è ben posta, in quanto, indicato con $[0, r]$ un sottointervallo compatto di $[0, R(x))$ contenente il supporto di φ , si ha (si veda anche la (5) e la (3.11))

$$\int_0^{R(x)} |\varphi(\rho) m_\rho(u)(x)| d\rho \leq \int_0^r \varphi(\rho) \sup_{\Omega_r(x)} |u| m_\rho(1)(x) d\rho = \sup_{\Omega_r(x)} |u| < \infty.$$

Poiché $\partial\Omega_\rho(x) = \{y : 1/\Gamma(x, y) = \rho\}$, se inseriamo la definizione stessa (4) di $K(x, y)$ in $m_\rho(u)(x)$, e se applichiamo la Formula di Coarea di Federer, otteniamo

$$\begin{aligned} \Phi(u)(x) &= \\ &= \int_0^{R(x)} \varphi(\rho) \left(\int_{1/\Gamma(x, y) = \rho} u(y) \langle A(y) \nabla \Gamma_x(y), \nabla \Gamma_x(y) \rangle \frac{V(y) dH^{N-1}(y)}{|\nabla \Gamma_x(y)|} \right) d\rho \\ &\text{(poniamo } f(y) := 1/\Gamma(x, y) \text{ e notiamo che } \nabla \Gamma_x(y) = -\Gamma^2(x, y) (\nabla f)(y)) \\ &= \int_0^{R(x)} \left(\int_{f(y) = \rho} u(y) V(y) \varphi\left(\frac{1}{\Gamma_x(y)}\right) \frac{\langle A(y) \nabla \Gamma_x(y), \nabla \Gamma_x(y) \rangle dH^{N-1}(y)}{\Gamma_x^2(y) |\nabla f(y)|} \right) d\rho \\ &= \int_{0 < f(y) < R(x)} u(y) \varphi\left(\frac{1}{\Gamma_x(y)}\right) \frac{\langle A(y) \nabla \Gamma_x(y), \nabla \Gamma_x(y) \rangle}{\Gamma_x^2(y)} V(y) dH^N(y), \end{aligned}$$

quindi, ricordando la (2) e la (3), si ha

$$\Phi(u)(x) = \int_{\Omega_{R(x)}(x)} u(y) \varphi\left(\frac{1}{\Gamma_x(y)}\right) \frac{\langle A(y) \nabla \Gamma_x(y), \nabla \Gamma_x(y) \rangle}{\Gamma_x^2(y)} dV^N(y). \quad (3.15)$$

Osservazione 3.1. Sia $\alpha > -1$; se prendiamo $r \in (0, R(x))$ e poniamo

$$\varphi_r(\rho) := \begin{cases} (\alpha + 1) \rho^\alpha / r^{\alpha+1}, & \text{se } \rho \in [0, r] \\ 0, & \text{se } \rho \in (0, R(x)), \end{cases}$$

otteniamo la famiglia $\{\Phi_r(u)(x)\}_r$ di operatori di media solida

$$\Phi_r(u)(x) = \frac{\alpha + 1}{r^{\alpha+1}} \int_{\Omega_r(x)} u(y) \frac{\langle A(y) \nabla \Gamma_x(y), \nabla \Gamma_x(y) \rangle}{\Gamma_x^{2+\alpha}(y)} dV^N(y), \quad 0 < r < R(x).$$

Quando $V \equiv 1$, questi sono esattamente gli operatori $M_r(u)(x)$ impiegati nei lavori [1, 11] (e, per il caso speciale dei gruppi di Carnot, in [7, 8, 9]) menzionati nell'Introduzione. Nel prossimo capitolo, utilizzeremo i nostri operatori più generali $\Phi(u)(x)$.

Capitolo 4

Un Teorema di tipo Koebe

Lo scopo di questo brevissimo capitolo è quello di provare il Teorema B, visto nell'Introduzione, utilizzando gli operatori di media solida introdotti nel Capitolo 3.

4.1 Prova del Teorema B

Enunciamo nuovamente il Teorema B per una maggiore comprensione:

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme aperto. Supponiamo che $u \in C(\Omega)$ soddisfi la seguente condizione:

$$u(x) = m_r(u)(x), \quad \text{per ogni } \Gamma\text{-palla tale che } \overline{\Omega_r(x)} \subset \Omega.$$

Allora u è di classe C^2 ed è $\mathcal{L}$ -armonica in Ω .

Dimostrazione (del Teorema B). Con la notazione fatta nella (3.12) per $R(x)$, supponiamo che $u \in C(\Omega)$ soddisfi la condizione:

$$u(x) = m_r(u)(x), \quad \text{per ogni } r \in (0, R(x)). \quad (4.1)$$

È sufficiente mostrare che la (4.1) implica che $u \in C^2$ su Ω ; infatti, grazie alla seconda parte del Lemma A, se $u \in C^2$ e u soddisfa la condizione (8) allora u è $\mathcal{L}$ -armonica.

Sia $\{\Omega_n\}$ una successione di insiemi aperti limitati tali che $\overline{\Omega_n} \subset \Omega_{n+1}$ e $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$. Fissato $n \in \mathbb{N}$, è sufficiente provare che $u \in C^2(\Omega_n)$. A questo scopo, in modo analogo a quanto è stato fatto nella dimostrazione della [1, eq. (4.3)], un argomento di compattezza mostra che deve esistere $\varepsilon > 0$ (eventualmente dipendente da n) così piccolo che $\Omega_\varepsilon(x) \subset \Omega$, per ogni $x \in \Omega_n$. Fissiamo a, b tali che $0 < a < b < \varepsilon$, e prendiamo una funzione liscia φ non negativa con supporto in $[a, b]$ tale che

$$\int_a^b \varphi(r) \, dr = 1.$$

Poiché $R(x) \geq \varepsilon$ per ogni $x \in \Omega_n$, possiamo definire su tutto Ω_n la funzione $\Phi(u)(x)$ come nella (3.14):

$$\Phi(u)(x) = \int_a^b \varphi(r) m_r(u)(x) dr, \quad x \in \Omega_n. \quad (4.2)$$

Dalla nostra ipotesi fatta in (4.1), se prendiamo $x \in \Omega_n$, e se moltiplichiamo entrambi i membri della (4.1) per $\varphi(r)$, integrando rispetto ad $r \in [a, b]$, otteniamo

$$u(x) = \Phi(u)(x), \quad \text{per ogni } x \in \Omega_n. \quad (4.3)$$

D'altra parte, grazie alla (3.15) si ha

$$\Phi(u)(x) = \int_{\Omega_{R(x)}(x)} u(y) \varphi\left(\frac{1}{\Gamma_x(y)}\right) \frac{\langle A(y) \nabla \Gamma_x(y), \nabla \Gamma_x(y) \rangle}{\Gamma_x^2(y)} dV^N(y). \quad (4.4)$$

Grazie all'assunzione fatta sul supporto di φ , l'integrale che appare al secondo membro della (4.4) è eseguito in realtà sul Γ -anello compatto $A_{a,b}(x) := \overline{\Omega_b(x)} \setminus \Omega_a(x)$; con la convenzione che la funzione integranda nella (4.4) è prolungata a 0 al di fuori di $A_{a,b}(x)$, dalla (4.3) e (4.4) otteniamo che

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} u(y) \varphi\left(\frac{1}{\Gamma_x(y)}\right) \frac{\langle A(y) \nabla \Gamma_x(y), \nabla \Gamma_x(y) \rangle}{\Gamma_x^2(y)} dV^N(y), \quad \forall x \in \Omega_n. \quad (4.5)$$

Dall'ipotesi (H.a) fatta nel Capitolo 1, Sezione 1.3, sappiamo che Γ_x è di classe C^3 su $A_{a,b}(x)$, ed è limitata sullo stesso insieme e lontano da zero (infatti, $\Gamma_x(y) \in [1/b, 1/a]$ per ogni $y \in A_{a,b}(x)$). Come conseguenza, la funzione

$$(x, y) \mapsto u(y) \varphi\left(\frac{1}{\Gamma_x(y)}\right) \frac{\langle A(y) \nabla \Gamma_x(y), \nabla \Gamma_x(y) \rangle}{\Gamma_x^2(y)} V(y)$$

è di classe C^2 rispetto alla variabile $x \in \Omega_n$, ed è continua e a supporto compatto rispetto alla variabile $y \in \mathbb{R}^N$. Si noti che l'insieme $H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2N} : x \in \overline{\Omega_n}, y \in A_{a,b}(x)\}$ è un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ lontano dalla diagonale, quindi, applicando un semplice argomento di Convergenza Dominata alla (4.5), ci è consentito eseguire per due volte le derivate parziali rispetto alla variabile x e passarle sotto il segno di integrale, in modo che $u \in C^2(\Omega_n)$.

Infatti, per ogni $x \in \overline{\Omega_n}$ e per ogni $y \in A_{a,b}(x)$, poniamo

$$\psi(x, y) := \varphi\left(\frac{1}{\Gamma_x(y)}\right) \frac{\langle A(y) \nabla \Gamma_x(y), \nabla \Gamma_x(y) \rangle}{\Gamma_x^2(y)} V(y).$$

Ricordando che $dV^N = V dH^N$, dalla (4.5), avremo

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} u(y) \psi(x, y) dH^N(y), \quad \forall x \in \Omega_n.$$

Fissiamo $j \in \{1, \dots, N\}$; dalla costruzione della funzione ψ e dalle considerazioni precedentemente fatte è chiaro che

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x, y) \right| \leq \max_{(x, y) \in H} \left| \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x, y) \right| \leq C, \quad \forall x \in \Omega_n, y \in \mathbb{R}^N,$$

dove C è una costante positiva (eventualmente dipendente da n, a, b).

Indichiamo con $\pi_2(H)$ la proiezione dell'insieme H sull'asse y ; poiché H è un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, anche la sua proiezione $\pi_2(H)$ sarà un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^N$. Si noti, quindi, che

$$\left| u(y) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x, y) \right| \leq |u(y)| \chi_{\pi_2(H)}(y) C, \quad \forall y \in \mathbb{R}^N, x \in \Omega_n, \quad (4.6)$$

dove abbiamo indicato con $\chi_{\pi_2(H)}$ la funzione caratteristica sul compatto $\pi_2(H)$. Poiché la funzione che appare a destra della disuguaglianza (4.6) è sommabile su $\mathbb{R}^N$ rispetto alla variabile y , dall'arbitrarietà di j , possiamo affermare che $u \in C^1(\Omega_n)$.

Siano ora $i, j \in \{1, \dots, N\}$; procedendo nel medesimo modo, è possibile trovare una costante positiva $\bar{C} := \bar{C}(n, a, b)$ tale che

$$\left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j}(x, y) \right| \leq \bar{C}, \quad \forall x \in \Omega_n, y \in \mathbb{R}^N.$$

Applicando quindi un procedimento analogo a quello appena visto, si prova che $u \in C^2(\Omega_n)$. Questo conclude la prova. $\square$

Capitolo 5

I Teoremi di Montel e Heine-Borel per $\mathcal{H}(\Omega)$

In quest'ultimo capitolo forniremo le dimostrazioni dei Teoremi C, D, F e del Lemma E enunciati nell'Introduzione. Iniziamo con la prova di un utile lemma.

Lemma 5.1. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme aperto e supponiamo che la successione $\{f_n\} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ converga alla funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ nella topologia L_{loc}^∞ . Allora $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

Dimostrazione. Poiché $\mathcal{H}(\Omega) \subset C(\Omega)$, è chiaro che $f \in C(\Omega)$. Vogliamo provare che $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Grazie al Teorema B di tipo Koebe, è sufficiente mostrare che

$$f(x) = m_r(f)(x), \quad \text{ogni volta che } \overline{\Omega_r(x)} \subset \Omega. \quad (5.1)$$

Se $\overline{\Omega_r(x)} \subset \Omega$, essendo $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, dal Lemma A otteniamo che

$$f_n(x) = m_r(f_n)(x), \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Ci proponiamo di far tendere $n \rightarrow \infty$ nell'identità sopra, affermando che questo passaggio al limite produce la (5.1). Da un lato, abbiamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, poiché f_n converge localmente in modo uniforme, quindi ovunque puntualmente, alla funzione f . Passiamo quindi a dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_r(f_n)(x) = m_r(f)(x). \quad (5.2)$$

Questa proverà la (5.1). Ora, la (5.2) è una conseguenza del seguente calcolo:

$$\begin{aligned} |m_r(f_n)(x) - m_r(f)(x)| &\leq \int_{\partial\Omega_r(x)} |f_n(y) - f(y)| K(x, y) dV^{N-1}(y) \\ &\leq \sup_{\partial\Omega_r(x)} |f_n - f| \cdot \int_{\partial\Omega_r(x)} K(x, y) dV^{N-1}(y) = \sup_{\partial\Omega_r(x)} |f_n - f|. \end{aligned}$$

Nell'ultima identità abbiamo sfruttato la (3.11). L'ultimo termine nella stima sopra tende a 0 quando $n \rightarrow \infty$, in quanto $\partial\Omega_r(x)$ è un sottoinsieme compatto di Ω , e (dalla costruzione fatta) f_n converge a f , quando $n \rightarrow \infty$, uniformemente sugli insiemi compatti. $\square$

5.1 Teorema di Montel

Procediamo con la prova del Teorema D; è stato già osservato che da tale teorema segue immediatamente il Teorema C di tipo Montel¹.

Per completezza, riportiamo gli enunciati dei Teoremi C e D.

Teorema C. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme aperto. Ogni famiglia localmente limitata di funzioni $\mathcal{L}$ -armoniche in Ω è normale.*

Teorema D. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme aperto. Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni $\mathcal{L}$ -armoniche in Ω . Supponiamo che, per ogni insieme compatto $K \subset \Omega$, esiste una costante $M = M(K) > 0$ tale che*

$$\int_K |f| dH^N \leq M, \quad \text{per ogni } f \in \mathcal{F}. \quad (5.3)$$

Allora $\mathcal{F}$ è una famiglia normale.

Dimostrazione (del Teorema D). Consideriamo un'eshaustione di Ω data da insiemi aperti e limitati Ω_n , e sia $K_n := \overline{\Omega_n}$. Fissiamo $n \in \mathbb{N}$ e sia $\varepsilon_n > 0$ così piccolo in modo che $\bigcup_{x \in K_n} \overline{\Omega_{\varepsilon_n}(x)}$ sia all'interno di un sottoinsieme compatto di K_{n+1} .²

Fissati a_n, b_n tali che $0 < a_n < b_n < \varepsilon_n$, consideriamo una funzione cut-off non negativa $\varphi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, con supporto in $[a_n, b_n]$, tale che $\int_{\mathbb{R}} \varphi_n = 1$. Poiché per ipotesi $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$, procedendo come nella prova del Teorema B (si veda il Capitolo 4), otteniamo, per ogni $x \in \Omega_n$ e per ogni $f \in \mathcal{F}$,

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(y) \varphi_n\left(\frac{1}{\Gamma_x(y)}\right) \frac{\langle A(y) \nabla \Gamma_x(y), \nabla \Gamma_x(y) \rangle}{\Gamma_x^2(y)} V(y) dH^N(y). \quad (5.4)$$

L'integrale sopra è performato sull'insieme compatto $A_n(x) := \overline{\Omega_{b_n}(x)} \setminus \Omega_{a_n}(x)$, che è un sottoinsieme di K_{n+1} , per ogni $x \in K_n$. Grazie all'ipotesi (10), deve esistere una costante $M(K_{n+1}) > 0$ tale che

$$\int_{K_{n+1}} |f| dH^N \leq M(K_{n+1}), \quad \text{per ogni } f \in \mathcal{F}.$$

¹Si noti che una dimostrazione del Teorema di Montel classico (cioè per funzioni olomorfe) è oggetto dell'Appendice A.

²Per l'esistenza di ε_n , si vedano gli argomenti già citati in [1, eq. (4.3)].

Di conseguenza, dalla (5.4) otteniamo la stima

$$\sup_{x \in K_n} |f(x)| \leq \int_{K_{n+1}} |f(y)| dH^N(y) \cdot \sup_{x \in K_n} \left(\sup_{y \in A_n(x)} |\Lambda_n(x, y)| \right) \leq M(K_{n+1}) \cdot M_n,$$

dove abbiamo posto $M_n := \sup \{ |\Lambda_n(x, y)| : x \in K_n, y \in A_n(x) \}$ e

$$\Lambda_n(x, y) := \varphi_n \left(\frac{1}{\Gamma_x(y)} \right) \frac{\langle A(y) \nabla \Gamma_x(y), \nabla \Gamma_x(y) \rangle}{\Gamma_x^2(y)} V(y).$$

Poiché $A_n(x) = \{y : 1/b_n \leq \Gamma_x(y) \leq 1/a_n\}$, si ha

$$M_n \leq b_n^2 \|\varphi_n\|_\infty \cdot \sup_{y \in K_{n+1}} (V(y) \| |A(y)| \|) \cdot \sup_{x \in K_n, y \in A_n(x)} |\nabla \Gamma_x(y)|^2 =: M'_n.$$

Qui $\| |A(y)| \|$ indica la norma operatoriale della matrice $A(y)$. È fondamentale osservare che l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N : x \in K_n, y \in A_n(x)\}$ è un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ lontano dalla diagonale $\{x = y\}$, in quanto non interseca l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N : y \in \Omega_{a_n}(x)\}$ che è un intorno "tubolare" della diagonale.

Dalla nostra ipotesi di regolarità su Γ , segue che M'_n è finito (e indipendente da $f \in \mathcal{F}$). L'arbitrarietà di n mostra che $\mathcal{F}$ è una famiglia di funzioni localmente limitata³.

Proviamo ora che $\mathcal{F}$ è una famiglia di funzioni localmente equicontinua. Grazie ad un semplice argomento di convergenza dominata, dalla (5.4) otteniamo che, per ogni $j \in \{1, \dots, N\}$,

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = \int_{\mathbb{R}^N} f(y) \frac{\partial \Lambda_n(x, y)}{\partial x_j} dH^N(y), \quad x \in \Omega_n. \quad (5.5)$$

Utilizzando gli stessi argomenti visti per provare la locale limitatezza della famiglia $\mathcal{F}$, possiamo dimostrare l'esistenza di una costante finita M''_n , dipendente dall'insieme compatto K_n , tale che

$$\sup_{x \in K_n, y \in A_n(x)} \left| \frac{\partial \Lambda_n(x, y)}{\partial x_j} \right| \leq M''_n.$$

Quindi, la (5.5) e l'ipotesi (5.3) mostrano che la famiglia di funzioni a valori vettoriali $\{(\nabla f)|_{K_n} : f \in \mathcal{F}\}$ è uniformemente limitata. L'arbitrarietà di K_n poi prova che la famiglia $\{\nabla f : f \in \mathcal{F}\}$ è localmente limitata sui sottoinsiemi compatti di Ω . Infine, un semplice argomento (basato sul Teorema del Valor Medio di Lagrange) mostra l'equicontinuità della famiglia $\mathcal{F}$ sui sottoinsiemi compatti di Ω .

Siamo ora in grado di provare che $\mathcal{F}$ è una famiglia normale. Infatti, data una successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{F}$, la famiglia $\{f_n|_{K_1}\}_n$ è uniformemente limitata ed equicon-

³Infatti, per ogni insieme compatto $K \subset \Omega$, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $K \subseteq K_n$.

tinua; quindi, grazie al Teorema di Ascoli-Arzelà, possiamo estrarre una sottosuccessione $\{f_{n(1,k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ che converge uniformemente su K_1 ad una funzione che indichiamo con $g_1 : K_1 \rightarrow \mathbb{R}$. La famiglia $\{f_{n(1,k)}|_{K_2}\}$ è ancora uniformemente limitata ed equicontinua, quindi possiamo estrarre una sottosuccessione $\{f_{n(2,k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ che converge uniformemente su K_2 ad una funzione, diciamo $g_2 : K_2 \rightarrow \mathbb{R}$. Poiché $K_1 \subset K_2$, si ha $g_1 \equiv g_2$ su K_1 . Induttivamente, per ogni $j \in \mathbb{N}$ possiamo costruire le successioni

$$\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \quad \{f_{n(1,k)}\}_{k \in \mathbb{N}}, \quad \{f_{n(2,k)}\}_{k \in \mathbb{N}}, \quad \dots \quad \{f_{n(j,k)}\}_{k \in \mathbb{N}}, \quad \dots$$

dove ognuna è una sottosuccessione di quella precedente, e tale che $\{f_{n(j,k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ è uniformemente convergente su K_j ad una funzione, diciamo $g_j : K_j \rightarrow \mathbb{R}$. Poniamo quindi

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad f|_{K_j} := g_j \quad \text{per ogni } j \in \mathbb{N}.$$

Grazie alle osservazioni precedenti, questa definizione è ben posta ed f è continua su Ω ; inoltre, la successione diagonale di Cantor $\{f_{n(k,k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ è una sottosuccessione di $\{f_n\}_n$ che converge uniformemente a f su ogni K_j , per ogni $j \in \mathbb{N}$. Questo prova che $\mathcal{F}$ è normale; grazie al Lemma 5.1 sappiamo che $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, in quanto è il limite nella topologia L_{loc}^∞ di una sottosuccessione di funzioni $\mathcal{L}$ -armoniche. $\square$

5.2 Il Teorema di Heine-Borel per $\mathcal{H}(\Omega)$ e il Lemma E

Per una maggiore comprensione, riportiamo l'enunciato del Lemma E, fornendo in seguito una dimostrazione che consisterà di tre passi.

Lemma E. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme aperto. La topologia di $\mathcal{H}(\Omega)$ come sottospazio di $(C(\Omega), \mathcal{T}(\mathcal{Q}))$ coincide con la topologia di $\mathcal{H}(\Omega)$ come sottospazio di $(C(\Omega), \mathcal{T}(\mathcal{P}))$. Con queste topologie equivalenti, $\mathcal{H}(\Omega)$ è un sottospazio completo di $C(\Omega)$, quindi è uno spazio di Fréchet.*

Inoltre, dato un insieme $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$, le seguenti condizioni sono equivalenti:

- (i) $\mathcal{F}$ è una famiglia normale;
- (ii) $\mathcal{F}$ è un sottoinsieme precompatto di $\mathcal{H}(\Omega)$ (nella topologia $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ o $\mathcal{T}(\mathcal{Q})$);
- (iii) $\mathcal{F}$ è $\mathcal{T}(\mathcal{Q})$ -limitata;
- (iv) $\mathcal{F}$ è $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ -limitata.

Dimostrazione (del Lemma E). Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme aperto e sia $X := C(\Omega)$. Ricordiamo che $\mathcal{T}(\Omega)$ è la topologia L_{loc}^∞ di X , mentre $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ è la topologia L_{loc}^1 di X (si veda il Capitolo 2, Sezione 2.3.2).

STEP I. Iniziamo con il provare che la topologia di $\mathcal{H}(\Omega)$ come sottospazio di $(X, \mathcal{T}(\Omega))$ coincide con la topologia di $\mathcal{H}(\Omega)$ come sottospazio di $(X, \mathcal{T}(\mathcal{P}))$. Ciò equivale a dimostrare che la seguente mappa è un omeomorfismo

$$\iota : (\mathcal{H}(\Omega), \mathcal{T}(\Omega)) \rightarrow (\mathcal{H}(\Omega), \mathcal{T}(\mathcal{P})), \quad \iota(f) := f.$$

La continuità di ι è banale, in quanto $\mathcal{T}(\mathcal{P}) \subset \mathcal{T}(\Omega)$. Poiché $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono famiglie numerabili di seminorme, grazie al Teorema 2.27, possiamo affermare che $\mathcal{T}(\Omega)$ e $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ sono topologie che soddisfano il primo assioma di numerabilità N_1 . Quindi, applicando la Proposizione 2.20, la continuità di ι^{-1} può essere provata sequenzialmente. Date $f_n, f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tali che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \text{ rispetto alla topologia } \mathcal{T}(\mathcal{P}), \quad (5.6)$$

è necessario provare che $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ anche rispetto alla topologia $\mathcal{T}(\Omega)$. Se K è un sottoinsieme compatto di Ω , dalla definizione di $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ abbiamo che $f_n|_K$ converge a $f|_K$ in $L^1(K)$. In particolare, $\{f_n|_K\}_n$ è un insieme limitato nella norma di $L^1(K)$. Grazie all'arbitrarietà di K , possiamo applicare il Teorema D alla famiglia $\mathcal{F} := \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, ottenendo che $\mathcal{F}$ è una famiglia normale. Questo equivale a dire che ogni sottosuccessione $\{f_{n(k)}\}_k$ di $\{f_n\}_n$ ammette una sottosuccessione $\{f_{n(k(j))}\}_j$ che converge rispetto alla topologia $\mathcal{T}(\Omega)$ ad una funzione g . Poiché $\mathcal{T}(\mathcal{P}) \subset \mathcal{T}(\Omega)$, si ha che $\lim_{j \rightarrow \infty} f_{n(k(j))} = g$ anche in $\mathcal{T}(\mathcal{P})$. Ora, dall'ipotesi (5.6) otteniamo che $g = f$. Riassumendo, abbiamo dimostrato che ogni sottosuccessione di $\{f_n\}$ ammette un'ulteriore sottosuccessione che converge ad f nella topologia $\mathcal{T}(\Omega)$. Questo è possibile se e solo se $\{f_n\}_n$ converge ad f in $\mathcal{T}(\Omega)$.

STEP II. Vogliamo ora mostrare che $\mathcal{H}(\Omega)$ è un sottospazio chiuso di $C(\Omega)$ rispetto alla topologia $\mathcal{T}(\Omega)$, ma questo è proprio il Lemma 5.1. Ricordiamo inoltre che, com'era stato già notato nell'Osservazione 2.35, $(C(\Omega), \mathcal{T}(\Omega))$ è uno spazio di Fréchet; allora, essendo $\mathcal{H}(\Omega)$ un sottospazio chiuso in $\mathcal{T}(\Omega)$, $\mathcal{H}(\Omega)$ è un sottospazio completo di $(C(\Omega), \mathcal{T}(\Omega))$, e quindi è uno spazio di Fréchet se è munito della topologia $\mathcal{T}(\Omega)$ (o, equivalentemente, della topologia $\mathcal{T}(\mathcal{P})$; si veda lo Step I).

STEP III. Infine, dato $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$, siamo pronti per provare che le condizioni (i)-(iv) sono equivalenti.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Le condizioni (i) e (ii) sono equivalenti; infatti, in ogni spazio metrizzabile, la precompatezza di un insieme $\mathcal{F}$ è equivalente alla condizione che ogni successione in $\mathcal{F}$ ammette una sottosuccessione convergente. Ora, poiché $\mathcal{T}(\Omega)$ è indotta da una metrica (si veda il Capitolo 2, Sezione 2.3.2), $(\mathcal{H}(\Omega), \mathcal{T}(\Omega))$ è uno spazio metrizzabile, da cui la tesi.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Questo è in generale vero in uno spazio vettoriale topologico⁴; per completezza, ne daremo una prova diretta. Sia $\mathcal{F}$ un sottoinsieme precompatto di $(\mathcal{H}(\Omega), \mathcal{T}(\Omega))$, e supponiamo per assurdo che esista un insieme compatto $K \subset \Omega$ e una successione $\{f_n\}_n \subset \mathcal{F}$ tale che

$$\sup_K |f_n| > n \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N};$$

poiché $\overline{\mathcal{F}}$ è $\mathcal{T}(\Omega)$ -compatto, possiamo estrarre una sottosuccessione $\{f_{n(k)}\}_k$ che converge in $\mathcal{H}(\Omega)$ rispetto alla topologia $\mathcal{T}(\Omega)$. In particolare, la successione $\{\sup_K |f_{n(k)}|\}_k$ deve essere limitata, ma ciò è in contraddizione con la condizione $\sup_K |f_{n(k)}| > n(k)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, e il fatto che $n(k) \rightarrow \infty$ come $k \rightarrow \infty$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Questa è una diretta conseguenza del fatto che

$$\int_K |f| dH^N \leq \sup_K |f| \cdot H^N(K).$$

(iv) $\Rightarrow$ (i): Questo è esattamente il Teorema D. □

Terminiamo questo capitolo con la prova del Teorema di Heine-Borel per $\mathcal{H}(\Omega)$. Riportiamo l'enunciato del teorema.

Teorema F. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme aperto. L'insieme $\mathcal{H}(\Omega)$ delle funzioni $\mathcal{L}$ -armoniche in Ω munito della topologia L^1_{loc} ereditata da $C(\Omega)$ (o, equivalentemente, dotato della topologia L^∞_{loc}) è uno spazio vettoriale topologico di Heine-Borel.*

Dimostrazione (del Teorema F). Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme aperto. Muniamo $\mathcal{H}(\Omega)$ della topologia L^∞_{loc} $\mathcal{T}(\Omega)$ ereditata da $C(\Omega)$ (grazie al Lemma E, questo è equivalente a dotare $\mathcal{H}(\Omega)$ della topologia L^1_{loc}). Poiché (in ogni spazio vettoriale topologico) un insieme compatto è chiuso e limitato, al fine di provare che $\mathcal{H}(\Omega)$ è uno spazio di Heine-Borel, secondo la Definizione 2.18, basta mostrare che un insieme chiuso e $\mathcal{T}(\Omega)$ -limitato

⁴Se $\overline{\mathcal{F}}$ è compatto, allora $\overline{\mathcal{F}}$ è $\mathcal{T}(\Omega)$ -limitato da cui $\mathcal{F}$ è $\mathcal{T}(\Omega)$ -limitato.

$\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ è compatto. Dalla condizione (iii) del Lemma E, la $\mathcal{T}(\mathcal{Q})$ -limitatezza di $\mathcal{F}$ implica che $\overline{\mathcal{F}}$ è compatto; ora, essendo $\mathcal{F}$ chiuso per ipotesi, si ha $\mathcal{F} = \overline{\mathcal{F}}$, da cui la tesi. $\square$

Appendice A

Il Teorema di Montel per funzioni olomorfe

In questa appendice vogliamo fornire una dimostrazione del classico Teorema di Montel per funzioni olomorfe. Iniziamo col riportare la seguente definizione.

Definizione A.1 (Famiglia normale). *Una famiglia di funzioni $\mathcal{F}$ su un dominio $U \subseteq \mathbb{C}$ (cioè un insieme aperto connesso) è detta **normale** se ogni successione in $\mathcal{F}$ ammette una sottosuccessione che converge uniformemente sui sottoinsiemi compatti di U .*

Al fine di provare il Teorema di Montel, è necessario introdurre alcuni concetti fondamentali dell'Analisi Reale.

Definizione A.2. *Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni su un dominio $S \subseteq \mathbb{R}^N$. Diciamo che $\mathcal{F}$ è **equicontinua** se per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $z, w \in S$ soddisfacenti la condizione $|z - w| < \delta$, si ha*

$$|f(z) - f(w)| < \varepsilon \quad \text{per ogni } f \in \mathcal{F}.$$

Si noti che la proprietà di equicontinuita è più forte rispetto all'uniforme continuità (la scelta di δ è indipendente sia dai punti $z, w \in S$, che dalle funzioni $f \in \mathcal{F}$).

Definizione A.3. *Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni su un dominio $S \subseteq \mathbb{R}^N$. Diciamo che $\mathcal{F}$ è **equilimitata** se esiste una costante $M > 0$ tale che*

$$|f(z)| \leq M, \quad \text{per ogni } z \in S \text{ e } f \in \mathcal{F}.$$

Forniamo ora alcuni risultati che utilizzeremo nella prova del Teorema di Montel.

Lemma A.4. Sia F una funzione olomorfa su un dominio $U \subseteq \mathbb{C}$ e sia $z_0 \in U$. Supponiamo che $\overline{B(z_0, r)} \subseteq U$. Allora la funzione F può essere scritta su $\overline{B(z_0, r)}$ come una serie di potenze convergente puntualmente:

$$F(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j (z - z_0)^j. \quad (\text{A.1})$$

La convergenza è uniforme e assoluta sul disco $\overline{B(z_0, r)}$.

Dimostrazione. Fissiamo $z \in B(z_0, r)$ e $\xi \in \partial B(z_0, r)$; si noti che

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}}.$$

Osserviamo poi che

$$\left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right| < 1,$$

quindi possiamo scrivere

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^j.$$

Ricordiamo ora la prima formula integrale di Cauchy:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{F(\xi)}{\xi - z} d\xi;$$

applicando a quest'ultima l'espressione precedentemente trovata, otteniamo

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{F(\xi)}{\xi - z_0} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^j d\xi =$$

(qui utilizziamo la ovvia convergenza uniforme della serie di funzioni)

$$= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{F(\xi)}{(\xi - z_0)^{j+1}} d\xi (z - z_0)^j;$$

quindi, posto per ogni $j \in \mathbb{N}$

$$a_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{F(\xi)}{(\xi - z_0)^{j+1}} d\xi, \quad (\text{A.2})$$

otteniamo la (A.1). □

Osservazione A.5. Dal Lemma A.4 deduciamo che la funzione F è analitica in U , ossia è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale z_0 in ogni punto $z \in B(z_0, r)$, per cui si ha

$$F(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} \frac{\partial^j F(z_0)}{\partial z^j} (z - z_0)^j, \quad \forall z \in B(z_0, r).$$

Si noti allora che i coefficienti a_j della (A.1) devono verificare necessariamente la seguente identità:

$$a_j = \frac{1}{j!} \frac{\partial^j F(z_0)}{\partial z^j}, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Per cui, dalla (A.2), otteniamo che

$$\frac{\partial^j F(z_0)}{\partial z^j} = \frac{j!}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{F(\xi)}{(\xi - z_0)^{j+1}} d\xi. \quad (\text{A.3})$$

Grazie alle precedenti osservazioni, otteniamo subito il seguente risultato.

Proposizione A.6 (Stima di Cauchy). *Sia F una funzione olomorfa su un dominio $U \subseteq \mathbb{C}$, e supponiamo che esista $r > 0$ tale che $\overline{B(z_0, r)} \subseteq U$. Allora le derivate della funzione F soddisfano la seguente stima:*

$$\left| \frac{\partial^j F(z_0)}{\partial z^j} \right| \leq \frac{j! M}{r^j}, \quad (\text{A.4})$$

dove $M := \sup_{z \in \partial B(z_0, r)} |F(z)|$.

Dimostrazione. Grazie alle ipotesi fatte, è possibile applicare il Lemma A.4 alla funzione F , ottenendo dall'Osservazione A.5 la rappresentazione (A.3).

Indichiamo ora con $M := \sup_{z \in \partial B(z_0, r)} |F(z)|$; stimando allora la (A.3), si ha:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^j F(z_0)}{\partial z^j} \right| &= \left| \frac{j!}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{F(\xi)}{(\xi - z_0)^{j+1}} d\xi \right| \leq \frac{j!}{2\pi} \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{|F(\xi)|}{|\xi - z_0|^{j+1}} d\xi = \\ &= \frac{j!}{2\pi r^{j+1}} \int_{\partial B(z_0, r)} |F(\xi)| d\xi \leq \frac{j! M}{r^j}. \end{aligned}$$

Questo conclude la prova. □

Vediamo ora come è possibile applicare il Teorema di Lagrange (per funzioni reali) a funzioni complesse.

Osservazione A.7. Sia F una funzione olomorfa su un dominio $U \subseteq \mathbb{C}$ e supponiamo che esista $r > 0$ tale che $\overline{B(z_0, r)} \subseteq U$.

É ben noto al Lettore l'isomorfismo $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, per cui, fissato $z \in U$, è possibile considerare la funzione complessa F come funzione di due variabili reali a valori in $\mathbb{R}^2$:

$$F(z) \equiv F(x, y) = F_1(x, y) + iF_2(x, y),$$

dove F_1, F_2 sono funzioni reali.

In questo caso è possibile applicare il Teorema di Lagrange per le funzioni di due variabili reali a valori in $\mathbb{R}^2$; fissati allora $z, w \in B(z_0, r)$, avremo $z = x + iy$ e $w = a + ib$, da cui¹

$$\|F(x, y) - F(a, b)\| \leq \sup_{\xi \in B(z_0, r)} \|\mathcal{J}_F(\xi)\|_2 \cdot \|(x, y) - (a, b)\|. \quad (\text{A.5})$$

Si noti che $\|(x, y) - (a, b)\| = |z - w|$ (ossia la norma di un vettore di $\mathbb{R}^2$ è equivalente al modulo del rispettivo numero complesso); inoltre ricordiamo che per ipotesi la funzione F è olomorfa su U , quindi devono essere soddisfatte le condizioni di Cauchy-Riemann, per cui otterremo

$$\mathcal{J}_F(\xi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(\xi)}{\partial x} & -\frac{\partial F_2(\xi)}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2(\xi)}{\partial x} & \frac{\partial F_1(\xi)}{\partial x} \end{bmatrix},$$

da cui

$$\mathcal{J}_F(\xi) \cdot \mathcal{J}_F^T(\xi) = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial F_1(\xi)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_2(\xi)}{\partial x}\right)^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\partial F_1(\xi)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_2(\xi)}{\partial x}\right)^2 \end{bmatrix}.$$

Allora, per ogni $\xi \in \overline{B(z_0, r)}$, avremo

$$\|\mathcal{J}_F(\xi)\|_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial F_1(\xi)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_2(\xi)}{\partial x}\right)^2} = \left| \frac{\partial F(\xi)}{\partial z} \right|.$$

Quindi, grazie alla (A.5), si ha

$$|F(z) - F(w)| \leq \sup_{\xi \in \overline{B(z_0, r)}} \left| \frac{\partial F(\xi)}{\partial z} \right| \cdot |z - w|. \quad (\text{A.6})$$

Siamo pronti per provare il Teorema di Montel per funzioni olomorfe.

Teorema A.8 (di Montel per funzioni olomorfe). *Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ un dominio. Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni olomorfe su U . Se esiste una costante $M > 0$ tale che*

$$|f(z)| \leq M, \quad \text{per ogni } z \in U \text{ e } f \in \mathcal{F}, \quad (\text{A.7})$$

allora $\mathcal{F}$ è una famiglia normale. In altre parole, se $\mathcal{F}$ è equilimitata, allora è una famiglia normale.

Più in generale, lo stesso risultato sussiste anche per famiglie localmente equilimitate.

Dimostrazione. Sia $\overline{B(p, r)} \subseteq U$. Poiché U è un aperto di $\mathbb{C}$, il suo complementare U^c è chiuso. Osserviamo allora che $\overline{B(p, r)} \cap U^c = \emptyset$, e quindi vi è una distanza positiva

¹Qui e nel seguito, indichiamo con $\|A\|_2$ per una matrice quadrata A la radice quadrata del raggio spettrale (cioè del massimo degli autovalori in valore assoluto) di $A \cdot A^T$.

tra i due insiemi, per cui esiste una costante $c > 0$ tale che, se $z \in \overline{B(p, r)}$ e $u \in U^c$, si ha $|z - u| > c$ e inoltre $\overline{B(z, c)} \subset U$.

Si noti allora che, per ogni $z \in \overline{B(p, r)}$ e $f \in \mathcal{F}$, è possibile applicare la stima di Cauchy (A.4) alla funzione f sul disco $\overline{B(z, c)}$, ottenendo

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{c} =: C,$$

dove $M := \sup_{\partial B(z, c)} |f|$.

Ricordiamo ora l'Osservazione A.7, che ci permette di applicare il Teorema di Lagrange alla funzione f . Dalla disuguaglianza (A.6), utilizzando la stima precedente, otterremo

$$|f(z) - f(w)| \leq C |z - w|, \quad \forall z, w \in \overline{B(p, r)}. \quad (\text{A.8})$$

Abbiamo quindi provato che la famiglia $\mathcal{F}$ è equicontinua su $\overline{B(p, r)}$ (con riferimenti alla Definizione (A.2), basta scegliere, per ogni $\varepsilon > 0$, $\delta = \varepsilon/C$).

Consideriamo ora un'esaustione di U data da insiemi compatti K_n , tali che $K_n \subset K_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Fissiamo $n \in \mathbb{N}$ e osserviamo che su K_n la famiglia $\mathcal{F}$ è equimitata (per ipotesi) e equicontinua. Infatti, è chiaro che K_n può essere ricoperto da un numero finito di dischi $\overline{B(p, r)}$ come sopra; inoltre, abbiamo appena provato l'equicontinuit di $\mathcal{F}$ su ogni $\overline{B(p, r)}$, per cui, grazie alla (A.8), considerato il massimo delle costanti C viste prima (dipendenti dai dischi $\overline{B(p, r)}$, che ricoprono K_n e che sono in numero finito), applicando la disuguaglianza triangolare, possibile provare che la famiglia $\mathcal{F}$ equicontinua su K_n .

Sia ora $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una successione di elementi di $\mathcal{F}$ e consideriamo la restrizione di f_j sul compatto K_1 , per ogni $j \in \mathbb{N}$. Per quanto osservato prima, possibile applicare il Teorema di Ascoli-Arzel sul compatto K_1 , quindi possiamo estrarre da $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una sottosuccessione $\{f_{j_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergente uniformemente su K_1 . Successivamente, consideriamo la restrizione di $\{f_{j_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ al compatto K_2 , e applichiamo nuovamente il Teorema di Ascoli-Arzel. Cos continuando, con un argomento standard di tipo diagonale (alla Cantor), si prova l'esistenza di una sottosuccessione di $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ convergente uniformemente su tutti i K_n e quindi su tutti i sottoinsiemi compatti di U .

Questo conclude la prova. □

Bibliografia

- [1] Abbondanza, B., Bonfiglioli, A.: *On the Dirichlet problem and the inverse mean value theorem for a class of divergence form operators*, J. London Math. Soc., **87** 321–346 (2013); doi: 10.1112/jlms/jds050.
- [2] Armitage, D.H., Gardiner, S.J.: *Classical Potential Theory*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag: London, 2001.
- [3] Battaglia, E., Bonfiglioli, A.: *Normal families of functions for subelliptic operators and the theorems of Montel and Koebe*, J. Math. Anal. Appl. (2013), <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.06.062>
- [4] Bayne, R.E., Kwack, M.H.: *A Lindelöf property for uniformly normal families*, Missouri J. Math. Sci. **22** (2010), 130–138.
- [5] Bergweiler, W.: *Normal families and fixed points of iterates*, Sci. China Math. **53** (2010), 593–596.
- [6] Bing, X., Qifeng, W., Wenjun, Y.: *Composite holomorphic functions and normal families*, Abstr. Appl. Anal. **2011** (2011), doi:10.1155/2011/373910.
- [7] Bonfiglioli, A., Lanconelli, E.: *Liouville-type theorems for real sub-Laplacians*, Manuscripta Math., **105** (2001), 111–124.
- [8] Bonfiglioli, A., Lanconelli, E.: *Subharmonic functions on Carnot groups* Math. Ann., **325** (2003), 97–122.
- [9] Bonfiglioli, A., Lanconelli, E.: *Gauge functions, Eikonal equations and Bôcher's theorem on stratified Lie groups*, Calc.Var.Partial Diff.Equations, **30** (2007), 277–291.
- [10] Bonfiglioli, A., Lanconelli, E.: *Lie groups related to Hörmander operators and Kolmogorov-Fokker-Planck equations*, Comm.Pure Appl.Anal. **11** (2012), 1587–1614.

- [11] Bonfiglioli, A., Lanconelli, E.: *Subharmonic functions in sub-Riemannian settings*, to appear in J. Eur. Math. Soc. (2013).
- [12] Bonfiglioli, A., Lanconelli, E., Uguzzoni, F.: *Stratified Lie Groups and Potential Theory for their sub-Laplacians*, Springer Monographs in Mathematics, New York, NY, Springer 2007.
- [13] Bony, J.-M.: *Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **19** (1969), 277–304.
- [14] Byun, J., Gaussier, H., Kim, K.-T.: *Weak-type normal families of holomorphic mappings in Banach spaces and characterization of the Hilbert ball by its automorphism group*, J. Geom. Anal. **12** (2002), 581–599.
- [15] Chang, J., Fang, M., Zalcman, L.: *Composite meromorphic functions and normal families*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **139** (2009), 57–72.
- [16] Charak, K.S., Rochon, D., Sharma, N.: *Normal families of bicomplex meromorphic functions*, Ann. Polon. Math. **103** (2012), 303–317.
- [17] Chen, J.-F., Fang, M.-L.: *Normal families and shared functions of meromorphic functions*, Israel J. Math. **180** (2010), 129–142.
- [18] Chuang, C.-T.: *Normal Families of Meromorphic Functions*, World Scientific, 1993.
- [19] Clifford, E.F.: *Normal families and value distribution in connection with composite functions*, J. Math. Anal. Appl. **312** (2005), 195–204.
- [20] Constantinescu, C., Cornea, A.: *Potential Theory on Harmonic Spaces*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag: Berlin, 1972.
- [21] Folland, G.B., Stein, E.M.: *Estimates for the $\bar{\partial}_b$ complex and analysis on the Heisenberg group*, Commun. Pure Appl. Math. **27** (1974), 429–522.
- [22] Grahl, J.: *Differential polynomials with dilations in the argument and normal families*, Monatsh. Math. **162** (2011), 429–452.
- [23] Grahl, J., Nevo, S.: *Spherical derivatives and normal families*, J. Anal. Math. **117** (2012), 119–128.

- [24] Grahl, J., Roth, O.: *An extension of Lewis's lemma, renormalization of harmonic and analytic functions, and normal families*, Math. Nachr. **282** (2009), 540–551.
- [25] Hörmander, L.: *Hypoelliptic second order differential equations*, Acta Math. **119** (1967), 147–171.
- [26] Jerison, D., Sánchez-Calle, A.: *Subelliptic, second order differential operators*, in: Complex Analysis III, Proc. Spec. Year, College Park 1985-86, Lect. Notes Math. **1277** (1987) 46–77.
- [27] Jiang, Y., Gao, Z.: *Normal families of meromorphic functions sharing values or functions*, J. Inequal. Appl. 2011, 72–81.
- [28] Kellogg, O.D.: *Converses of Gauss' theorem on the arithmetic mean*, Trans. Am. Math. Soc. **36** (1934), 227–242.
- [29] Kim, K.-T., Krantz, S.G.: *Characterization of the Hilbert ball by its automorphism group*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), 2797–2818.
- [30] Koebe, P.: *Herleitung der partiellen Differentialgleichung der Potentialfunktion aus deren Integraleigenschaft*, Sitzungsber. Berl. Math. Ges. **5** (1906), 39–42.
- [31] Kohn, J.J.: *Boundaries of complex manifolds*, Proc. Conf. Complex Analysis, Minneapolis 1964, Springer-Verlag: New York, 81–94 (1965).
- [32] Krantz, S. G.: *Complex analysis: the geometric viewpoint. Second edition*. Carus Mathematical Monographs **23**; Mathematical Association of America, Washington DC, 2004.
- [33] Lappan, P.: *Special classes of normal families*, Comput. Methods Funct. Theory **8** (2008), 133–142.
- [34] Lei, C., Fang, M., Yang, D., Wang, X.: *Exceptional functions and normal families of meromorphic functions with multiple zeros*, J. Math. Anal. Appl. **341** (2008), 224–234.
- [35] Lei, C., Yang, D., Fang, M.: *Normal families and shared values of meromorphic functions*, J. Math. Anal. Appl. **364** (2010), 143–150.
- [36] Li, Y.: *Normal families of meromorphic functions with multiple zeros*, J. Math. Anal. Appl. **381** (2011), 344–351.

- [37] Li, Y., Gu, Y.: *On normal families of meromorphic functions*, J. Math. Anal. Appl. **354** (2009), 421–425.
- [38] Lu, Q.: *On normal families and differential polynomials for meromorphic functions*, J. Math. Anal. Appl. **340** (2008), 394–400.
- [39] Lü, F., Xu, J.: *Sharing set and normal families of entire functions and their derivatives*, Houston J. Math. **34** (2008), 1213–1223.
- [40] Mai, P.N., Thai, D.D., Trang, P.N.: *Normal families of meromorphic mappings of several complex variables into $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$* , Nagoya Math. J. **180** (2005), 91–110.
- [41] Montel, P.: *Leçons sur les familles normales des fonctions analytiques et leurs applications*, Gauthier-Villars, Paris, 1927.
- [42] Pang, X., Fang, M., Zalcman, L.: *Normal families of holomorphic functions with multiple zeros*, Conform. Geom. Dyn. **11** (2007), 101–106.
- [43] Pang, X., Yang, D., Zalcman, L.: *Normal families and omitted functions*, Indiana Univ. Math. J. **54** (2005), 223–235.
- [44] Rothschild, L.P., Stein, E.M.: *Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups*, Acta Math. **137** (1977), 247–320.
- [45] Rudin, W.: *Functional analysis*. 2nd ed. International Series in Pure and Applied Mathematics, New York, NY: McGraw-Hill (1991).
- [46] Siebert, H.: *Fixed points and normal families of quasiregular mappings*, J. Anal. Math. **98** (2006), 145–168.
- [47] Schiff, J.L.: *Normal Families*, Springer Universitext, Springer-Verlag: New York, 1993.
- [48] Steinmetz, N.: *Normal families and linear differential equations*, J. Anal. Math. **117** (2012), 129–132.
- [49] Treves, F.: *Topological vector spaces, distributions and kernels*, Academic Press, London, 1967.
- [50] Vodop'yanov, S.K., Kudryavtseva, N.A.: *Normal families of mappings on Carnot groups* Siberian Math. J. **37** (1996), 232–244.

- [51] Wu, X., Xu, Y.: *Normal families of meromorphic functions and shared values*, *Monatsh. Math.* **165** (2012), 569–578.
- [52] Xia, J., Xu, Y.: *Normal families of meromorphic functions with multiple values*, *J. Math. Anal. Appl.* **354** (2009), 387–393.
- [53] Xu, Y., Wu, F., Liao, L.: *Picard values and normal families of meromorphic functions*, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **139** (2009), 1091–1099.
- [54] Zalcman, L.: *Modern perspectives on classical function theory*, *Rocky Mountain J. Math.* **12** (1982), 75–92.
- [55] Zalcman, L.: *Normal families: new perspectives*, *Bull. Amer. Math. Soc.* **35** (1998), 215–230.
- [56] Zeng, C., Lei, C., Yang, D.: *Normal families and shared values of meromorphic functions*, *Indian J. Math.* **51** (2009), 193–206.
- [57] Zhang, Q.: *Normal families of meromorphic functions concerning shared values*, *J. Math. Anal. Appl.* **338** (2008), 545–551.

Ringraziamenti

Un ringraziamento speciale va al Dott. Bonfiglioli, mio relatore, che mi ha sempre guidata, incoraggiata e supportata con molta gentilezza in quest'ultimo anno. Grazie per il Suo tempo, il Suo aiuto fondamentale e la Sua grande pazienza.

Un grazie veramente sentito va alla mia Famiglia, che in questi cinque anni mi ha sempre aiutato e sostenuto, sia economicamente che moralmente, e che mi ha permesso di essere qui oggi.

Grazie di cuore al mio fidanzato, che ha sempre creduto in me (anche quando non ci credevo io), che mi ha sempre appoggiata ed incoraggiata a seguire i miei sogni. Grazie!

Infine, ma non meno importante, un sincero ringraziamento va ai miei colleghi e amici, nonché compagni di avventura di questi indimenticabili anni: Marta, Gresy, Camilla, Luca, Giulia, Laura, Lorenzo, Diego. Mi avete incoraggiata, sostenuta e con tanta pazienza mi avete sempre ascoltata (cosa non facile)! Grazie a tutti!