Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

CORRISPONDENZA EULERO - LAGRANGE: IL CALCOLO DELLE VARIAZIONI

Tesi di Laurea Magistrale in Storia della Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
PAOLO FREGUGLIA

Presentata da:
CHIARA AMADORI

I Sessione
Anno Accademico 2012/2013

Introduzione

La formulazione classica del calcolo delle variazioni è qualcosa che, ai giorni nostri, appare caratterizzata da un antico fascino. Senza ombra di dubbio, i protagonisti principali dello sviluppo di questo soggetto furono Eulero e Lagrange. Ma forse ancor più importante dei singoli, fu la loro collaborazione, che si espresse in un intenso scambio epistolare durato circa vent'anni.

La corrispondenza è costituita in totale da 37 lettere, la prima datata 28 giugno 1754, e l'ultima 23 marzo 1775. Viene naturale pensare alla corrispondenza, come suddivisa in due parti: la prima parte è costituita dalle prime 11 lettere, datate fra il 28 giugno 1754 e il 2 ottobre 1759, e scritte in lingua latina, mentre la seconda parte è costituita dalle lettere datate tra il 27 ottobre 1759 e il 23 marzo 1775, e scritte in lingua francese. La prima parte in latino, concerne prevalentemente il calcolo delle variazioni, mentre la seconda parte in francese concerne in primo luogo il tema delle corde vibranti e problemi di propagazione del suono, inoltre tratta di svariati altri argomenti, che vanno dalla teoria dei numeri all'integrazione di particolari e importanti tipi di funzioni.

In questa tesi vengono riportate e commentate esclusivamente le lettere che costituiscono la prima parte della corrispondenza tra i due illustri signori; ossia quelle in lingua latina riguardanti il Calcolo delle Variazioni. In particolare questa parte della corrispondenza è una importante testimonianza del fondamentale contributo apportato da Lagrange per lo sviluppo di questo soggetto. Infatti se la fondazione del "Calcolo delle variazioni" può ascriversi a Eulero, che per primo ne formulò una teoria generale, il formalismo giusto e le debite generalizzazioni sono dovute proprio ai lavori giovanili di Lagrange. Le lettere mettono in luce l'evoluzione del metodo ideato da Lagrange, e che rivoluzionò completamente l'approccio al soggetto. Eulero, messo al corrente, proprio tramite le lettere, delle sue scoperte, si prodigò nel divulgare il metodo di Lagrange lasciando da parte il proprio, e coniò il termine "Calcolo delle Variazioni" proprio per designare la nuova teoria lagrangiana.

La tesi si apre con un capitolo dedicato alle biografie dei due matematici. Le informazioni contenutevi sono fondamentali per avere una visione d'insieme degli spostamenti geografici e delle varie fasi della loro carriera scientifica; in modo da poter collocare ciascuna lettera, sulla base della sua data, in un preciso contesto storico-sociale.

Nel Capitolo 2 vengono delineate in breve le principali tappe evolutive del calcolo delle variazioni, precedenti all'inizio della corrispondenza. In particolare nella sezione 2.1 vengono presentati alcuni contenuti significativi del "Methodus inveniendi" di Eulero; l'opera che maggiormente ha influenzato Lagrange nell'ideazione del suo rivoluzionario "metodo delle variazioni". Questo capitolo è stato scritto allo scopo di inquadrare il background delle conoscenze sul soggetto, nel quale si inseriscono le prime lettere di Lagrange, che aprirono la lunga corrispondenza.

I capitoli seguenti sono dedicati alla corrispondenza, e contengono ciascuno una lettera, della quale riportano mittente, destinatario e data nel titolo. Ciascuna delle lettere è stata trascritta integralmente nella sua versione originale in latino, presa da "Correspondance de Lagrange avec Euler"[1], ed è seguita dalla traduzione in lingua italiana. Precisiamo che tali traduzioni sono state eseguite in modo da restare fedeli il più possibile al testo originale. Pertanto ricapitolando ciascuna lettera in latino, è seguita dalla traduzione in italiano, e infine dal commento. Si tratta di un commento tecnico dei suoi contenuti matematici, ove ve ne siano, o semplicemente di informazioni riguardanti avvenimenti storici e vicende, importanti per la comprensione del suo testo. Inoltre precisiamo che, nei commenti alle lettere e alle varie opere, si è cercato di rimane fedeli il più possibile, nelle notazioni e nell'uso del linguaggio, ai testi originali. A tal riguardo, in particolare, premettiamo che all'epoca non si usava indicare gli estremi di integrazione ad apice e pedice del simbolo di integrale. Questi si trovano esplicitati solamente laddove abbiamo ritenuto indispensabile inserirli ai fini di una corretta comprensione.

Tra i capitoli più significativi in questa tesi, segnaliamo i seguenti:

- Il Capitolo 4 contiene la lettera di Lagrange del 12 agosto 1755, che ufficialmente diede l'avvio alla corrispondenza. Al suo interno si trova la prima apparizione del suo innovativo "metodo delle variazioni".

- Il Capitolo 6 contiene la lettera di Lagrange del 20 novembre 1755, nella quale gli applica il suo metodo per risolvere il celebre problema della brachistocrona.

- Il Capitolo 10 contiene la lettera di Lagrange del 5 ottobre 1756 che segnala un cambiamento nel suo approccio al soggetto: da una forma non-parametrica, egli passa ad una presentazione parametrica del suo metodo delle variazioni. L'efficacia del diverso approccio, viene illustrata nella lettera sempre con la sua applicazione al problema della brachistocrona, che risulta così risolto in maniera ancora più generale.

Infine ci pare doveroso sottolineare che Eulero e Lagrange non si incontrarono mai. Questo mette ancora di più in rilievo l'importanza delle lettere commentate in questa tesi, che rappresentano dunque in maniera esauriente il rapporto tra due dei matematici più illustri di tutti i tempi.

Indice

Capitolo 1

Biografie

1.1 La vita di L. Euler (1707-1783)

Famiglia, gioventù e formazione

Leonhard Euler (Basilea, 15 aprile 1707 - San Pietroburgo, 18 settembre 1783), noto in Italia come Eulero, nacque a Basilea, Svizzera, il 15 aprile del 1707.

Egli era il primo figlio di Paul Euler, ministro della chiesa evangelica riformata, e di Margaretha Bruckner. La madre di Leonhard, Margaretha, figlia di un altro ministro protestante, discendeva da una illustre famiglia di artisti e umanisti. Leonhard non passò la prima giovinezza a Basilea. Nel giugno del 1708, suo padre divenne pastore della chiesa di St. Martin nei pressi di Riehen-Bettigen. A novembre si trasferì con la famiglia a Riehen. Leonhard era un ragazzo intelligente, a quanto pare allegro e socievole. La semplicità della vita di campagna, insieme al modello dei suoi genitori, troverà riflesso nella schietta natura e perfino nella disponibilità dell'Eulero adulto. I genitori di Leonhard furono i suoi primi insegnanti. Sua madre Margaretha, di tradizione umanistica, lo introdusse ai classici greci e romani. L'istruzione elementare di suo padre Paul comprendeva la Matematica, intesa come materia alla base di ogni conoscenza naturale. Paul non cominciò con un testo di geometria, bensì con la "Coss" o "Algebra", di Christoff Rudolff. Nella sua autobiografia incompiuta, Euler ricorda di aver studiato diligentemente il testo per parecchi anni, facendo progressi nella soluzione dei suoi 434 problemi, la maggior parte dei quali erano equazioni di primo o di secondo grado. Ciò avvenne prima che si trasferisse a Basilea presso la nonna materna per iscriversi al locale Gymnasium, probabilmente all'età di otto anni. Come la maggior parte dei genitori, anche gli Euler assunsero un tutore, in questo caso un giovane teologo che si chiamava Johann Burckhardt; egli insegnò ad Eulero le materie umanistiche e la Matematica, materia in precedenza eliminata dal curriculum con un voto popolare.

Paul Euler era amico della famiglia Bernoulli, e in particolare di Johann Bernoulli, che era uno dei più famosi matematici d'Europa. Egli ebbe un'influenza molto grande su Leonhard. Nel 1720, Eulero si iscrisse alla facoltà di Filosofia dell'Università di Basilea. Aveva tredici anni, l'età normale in quel periodo per iscriversi all'Università. Nel 1722 ottenne la laurea in Filosofia. A quel tempo riceveva anche lezioni di matematica da Johann Bernoulli che aveva scoperto il suo enorme talento. Il padre di Eulero però voleva che si iscrivesse a teologia, per prepararsi a diventare pastore; così gli faceva studiare il greco e l'ebraico. Inoltre il curriculum di teologia prevedeva anche lo studio della matematica. Ma Eulero aveva già cominciato a farsi seguire da Johann Bernoulli e, passando la maggior parte del tempo sulla matematica, fece pochi progressi nelle altre materie. Fu probabilmente verso il 1725 che Johann Bernoulli si recò a Riehen per convincere il suo vecchio compagno Paul Euler a far trasferire il figlio a matematica, poiché a suo parere egli era destinato a far carriera in quella materia.

Nel 1725 il giovane Eulero cercava un impiego. In quegli anni i due figli di Johann Bernoulli, Daniel and Nicolas lavoravano all'Accademia Imperiale delle scienze di San Pietroburgo. Nel 1726, Nicolas morì e Daniel prese la cattedra di matematica e fisica del fratello. Daniel propose Eulero per occupare la cattedra vacante di medicina. Nel 1726 Eulero accettò, ma rimandò la partenza per San Pietroburgo.

All'Accademia delle Scienze di San Pietroburgo

Eulero arrivò a Pietroburgo nel maggio del 1727. Poco tempo dopo passò dal dipartimento di medicina a quello di matematica. In quegli anni alloggiò con Daniel Bernoulli con cui avviò un'intensa collaborazione matematica.

Nel gennaio del 1734 si sposò con Katharina Gsell. Il 27 novembre nacque il loro primo figlio, Johann Albrecht, così chiamato in onore del presidente dell'Accademia, barone Johann Albrecht de Korff. Gli Euler avranno in totale tredici figli, ma solo tre maschi e due femmine sopravvivranno alla prima infanzia. Katharina organizzava e gestiva tutta la casa, lasciando al marito più tempo per studiare e scrivere.

A San Pietroburgo Eulero continua le sue ricerche, variabili in un vasto spettro scientifico, dalla teoria dei numeri e la teoria musicale all'astronomia e la balistica. Nel corso degli anni '30 Euler comincia a preparare la sua "Introductio in analysin infinitorum". Ancora più importante, per la crescente reputazione di Euler durante gli anni '30, è la pubblicazione della sua "Mechanica".

Nell'estate del 1738, una febbre quasi mortale ed un'infezione gli provocarono un ascesso all'occhio destro. Effettivamente i ritratti di Eulero e la corrispondenza del tempo suggeriscono un graduale indebolimento della vista nell'occhio destro.

Dopo la morte dell'imperatrice Anna, avvenuta nel 1740, la vita nella capitale della Russia era diventata pericolosa, soprattutto per gli stranieri. I continui tumulti in Russia avevano stancato Eulero, che amava una vita più tranquilla. Così Eulero accettò l'offerta del Re Federico II, che era da poco asceso al trono di Prussia, di prendere parte alla rinnovata Società Reale delle Scienze di Brandenburgo.

Nella Berlino di Federico II: all'apice della carriera

Il 25 luglio 1741, la famiglia Euler arriva a Berlino. Nel gennaio del 1744, Federico fondò formalmente l'Accademia. Il 1746 Federico accettò che Maupertuis progettasse una costituzione basata su quella dell'Accademia di Parigi. Dopo la sua messa a punto, il Re, in giugno, confermò Maupertuis presidente perpetuo con poteri autocratici, e i membri elessero Eulero direttore a vita della classe matematica. Come membro del direttorio dell'Accademia, Eulero era a capo del comitato editoriale che sceglieva gli articoli per le Mémoires della sua rivista, inoltre dirigeva la biblioteca. Maupertuis non godeva di buona salute. Nel 1750 dovette assentarsi sempre più spesso e per periodi sempre più lunghi. Durante la sua assenza, Eulero fungeva da presidente effettivo dell'Accademia.

Nel gennaio del 1748, morì Johann Bernoulli e l'Università di Basilea offì la cattedra ad Eulero, che non rispose mai. Egli decise di rimanere al largo, ritenendo che il posto dovesse andare a Daniel Bernoulli.

A Berlino, fra il 1741 ed il 1766, Euler scrisse o completò più di 380 fra memorie e libri. La loro combinazione di profondità, originalità, ampiezza e numero assoluto è inarrivabile nella storia della Matematica. Il primo dei fondamentali libri pubblicati da Eulero negli anni '40 fu il suo "Methodus inveniendi", completato a San Pietroburgo nel 1741.

Nel 1748, Eulero pubblica il vol. I dell'"Introductio in analysin infinitorum"; che costituisce una teoria metodica ed esauriente delle funzioni algebriche e trascendenti. Invece con il vol. II della "Introductio", Eulero unifica il cartesiano con l'analitico e li mette per la prima volta in forma moderna. Sempre nel 1748 Eulero completò anche il manoscritto delle "Instutiones calculi differentialis", anche se poi gli occorsero sette anni per pubblicarlo. Nel 1749 pubblica la "Scientia navalis", che concerne la costruzione e la propulsione delle navi. Eccellente sia per la Matematica applicata che per quella teorica, la “Scientia navalis” prosegue il programma di Eulero sulla fondazione della Meccanica dei continui.

Nell’agosto del 1755 Eulero ricevette una lettera da un suo importante giovane collega, il diciannovenne Ludovico de la Grange Tournier. La lettera era rivoluzionaria, con la sua proposta di un metodo per eliminare le tediose considerazioni geometriche di Eulero del “Methodus inveniendi”, riducendolo completamente a tecniche analitiche. Lagrange perfezionò le proprie idee e le pubblicò nel volume per il 1760/61 della Miscellanea Taurinensia. Eulero attese a pubblicare articoli su questo argomento, per dare il pieno merito della scoperta a Lagrange.

Dalla morte di Maupertuis, avvenuta nel 1759, Eulero agì da presidente dell’Accademia di Berlino. Sperava di essere nominato presidente, ma i suoi rapporti con Federico si erano deteriorati. Il Re aveva in mente un unico candidato, D’Alembert, che era un “philosophe, critico, editore scientifico della famosa Encyclopédie, uomo di nobili origini e francese”. E queste due ultime cose erano senza dubbio di non piccola importanza per Federico. Alle scienze il monarca preferiva il libero pensiero e la poesia.

Nel luglio 1763 Eulero ricevette la proposta dall’imperatrice russa Caterina II, di tornare all’Accademia delle Scienze di San Pietroburgo. Inizialmente Eulero rifiutò, il compenso non era per lui soddisfacente. Nell’inverno del 1763/64 la posizione di Eulero a Berlino era peggiorata. Riaffermando l’assolutismo in Prussia, Federico assunse la presidenza dell’Accademia. La scelta dei membri e la gestione delle finanze divennero questioni critiche. La posizione di Eulero a Berlino diventò insostenibile. I suoi sforzi per l’autonomia della scienza in Prussia erano falliti. Nel dicembre del 1765 egli scrisse all’Alto Cancelliere della Russia, conte Michail Voroncov, descrivendo la propria situazione a Berlino e ponendo delle condizioni per il ritorno in Russia con la famiglia. L’imperatrice Caterina II era un sovrano illuminato, che per ottenere un immediato prestigio per la propria Accademia, voleva in particolare acquisire Eulero. Pertanto ordinò all’ambasciatore a Berlino, di negoziare con lui ed accettare la richiesta che gli avrebbe fatto. Eulero chiese il doppio della precedente proposta di Caterina, e l'imperatrice acconsentì.

Di grande rilievo nell'attività scientifica che aveva occupato Eulero durante i suoi anni a Berlino dopo il 1760 è la raccolta di 234 lettere, in seguito intitolata "Lettere a un Principessa tedesca" spedite dal 1760 al 1762. All'inizio della corrispondenza, la principessa Charlotte, figlia del futuro margravio Friedrich Heinrich von Brandenburg-Schwedt, aveva quindici anni. Le lettere, scritte in francese, si rivolgono alla filosofia naturale, vale a dire alle scienze, oltre che alla filosofia ed alla religione. Le Lettere costituiscono un'alta divulgazione che presenta la visione sintetica di Eulero sulle scienze. Egli esamina in grande dettaglio le maggiori filosofie naturali, di Cartesio, di Newton, di Leibniz e di Wolff, in maniera migliore di qualunque altra esposizione popolare.

Durante il regno di Caterina II La Grande: la seconda volta a S. Pietroburgo

La famiglia Eulero arrivò a San Pietroburgo il 28 luglio 1766, dove rimase fino alla sua morte. Il suo soggiorno fu funestato da un tragedia. Nel maggio del 1771, a San Pietroburgo scoppiò un grande incendio che distrusse 550 case, compresa quella di Eulero. Egli, praticamente ceco non se ne accorse fino a quando il suo ufficio non fu completamente avvolto dalle fiamme. Fortunatamente venne portato in salvo insieme a gran parte della sua biblioteca, ma tutti i suoi appunti andarono in fumo.

Nel settembre del 1771 subì un'operazione ad un occhio, per via di una cataratta che lo rendeva quasi cieco. Il recupero della vista dall'occhio sinistro portò un momento di sollievo, ma in ottobre una complicazione, forse un'infezione, lo lasciò praticamente cieco ed a volte dolorante.

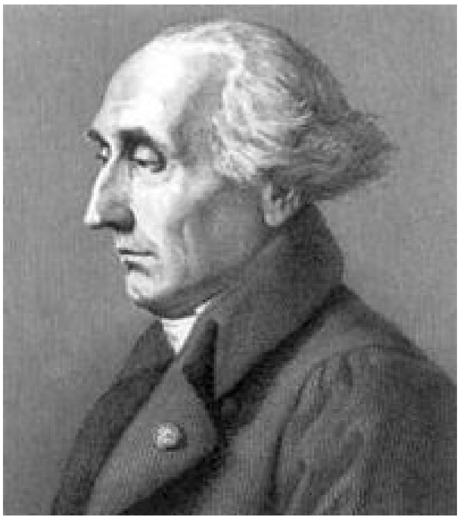
Nel novembre del 1773, all'età di sessantasei anni, morì la moglie di Eulero, Katharina. Eulero si risposò tre anni dopo con la sorellastra di Katharina, Salome Abigail, di cinquantatre anni.

Durante questo suo secondo periodo a San Pietroburgo, Eulero divenne sempre più prolifico negli articoli. Dopo il 1765 completò più del cinquanta per cento di tutte le sue memorie. Neppure la quasi cecità lo rallentò. Al proprio servizio aveva genio, intuizione della materia e fenomenali memoria ed abilità nei calcoli mentali, insieme ad un piccolo gruppo di ricercatori formato dai suoi figli Albrecht e Christoph, oltre ad Anders Johann Lexell, Wokfgang Ludwig Krafft, Semjon Kirillovic Kotel'nikov e Rumovskij. Fino al 1773 Eulero scrisse libri, sebbene la sua corrispondenza calasse precipitosamente; era calata a non più di venti lettere l'anno. La sua corrispondenza con Lagrange, importante sorgente di ricerca in teoria dei numeri, analisi e meccanica, ebbe termine nel marzo del 1775, su argomenti di integrali ellittici, paradossi dell'integrazione e dimostrazioni dimenticate di Fermat. Dopo il 1777 egli spedì meno di cinque lettere l'anno.

Fino alla sua morte, il 18 settembre 1783, Euler rimase entusiasta e perspicace sia nella ricerca che nell'insegnamento.

1.2 La vita di J.-L. Lagrange (1736-1813)

Famiglia, gioventù e formazione



Joseph-Louis Lagrange, noto come Giuseppe Lodovico Lagrangia o ancora Giuseppe Luigi Lagrangia o Lagrange (Torino, 25 gennaio 1736 - Parigi, 10 aprile 1813) nacque a Torino il 25 gennaio 1736 da Giuseppe Francesco Lodovico e da Teresa Gros. Era il maggiore di 11 fratelli ma di questi solo lui e un altro riuscirono ad arrivare all'età adulta. La famiglia era originaria della regione francese di Tours; il bisavolo di Lagrange, dopo aver servito negli eserciti di Luigi XIV come capitano di cavalleria, era passato agli ordini di Carlo Emanuele II, duca di Savoia, e aveva sposato una Conti della nobile famiglia romana. Il padre di Lagrange era dottore in diritto nell'Università di Torino; la madre era figlia unica di un ricco medico di Cambiano. Avviato in quanto primogenito alla professione paterna, Lagrange, dopo aver studiato privatamente, si iscrisse a soli quattordici anni all'Università di Torino, dove si dedicò agli studi di diritto, che abbandonò nel 1752. Nel frattempo aveva cominciato a frequentare la Biblioteca universitaria per attendere ai suoi prediletti studi di matematica. Lesse gli "Elementi di Euclide" e l'"Algebra" di A.-C. Clairaut e poi, in meno di due anni, l'"Introductio in analysin infinitorum" di Eulero, le "Lectiones de methodo integralium" di Johann Bernoulli, la "Mechanica di Eulero", i primi due libri dei "Principia" di Newton, la "Dynamique" di D'Alembert e il "Calcul Intégral" di Bougainville. Infine intraprese lo studio del "Methodus inveniendi" di Eulero (1744), che lo condusse a un nuovo metodo per ricavare l'equazione verificata da una curva o da una superficie soddisfacente a una condizione di massimo o di minimo; ossia quella che diventerà nota come equazione di Eulero-Lagrange.

Nel 1754, esortato da G.C. Fagnano, il più celebre matematico italiano dell'epoca, pubblicò a Torino il suo primo lavoro, "Lettera di Luigi de La Grange Tournier torinese all'illustrissimo signor conte Giulio Carlo da Fagnano", nel quale sviluppava l'analogia tra la formula del binomio e i differenziali di ordine superiore del prodotto di due funzioni. Il risultato della ricerca era, comunque, ben noto, pubblicato in particolare nel "Commercium epistolicum tra G.W. Leibniz e Johann Bernoulli" (Losanna 1745).

Nell'agosto del 1755 inviò ad Eulero una lettera illustrandogli il suo rivoluzionario metodo, dando così l'avvio ad una corrispondenza scientifica sul calcolo variazionale. Eulero rimase impressionato dalle sue doti, e si prodigò per inserirlo tra i membri dell'Accademia di Berlino. Nel 1759 Eulero riuscì in questo intento, e Lagrange venne eletto membro associato esterno dell'Accademia di Berlino.

Presso le Scuole teoriche di Artiglieria di Torino

Il 26 settembre 1755, Lagrange fu nominato assistente presso le Scuole teoriche di Artiglieria di Torino, ed ebbe l'incarico di redigere alcuni corsi.

Il suo lavoro consisteva nella collaborazione alle attività didattiche e nella redazione di testi a uso degli studenti. Si è conservato il manoscritto sulle sue lezioni per il corso di geometria cartesiana e calcolo differenziale dal il titolo "Principii di analisi sublime". Venne nominato professore di "matematiche" alle Scuole teoriche di Artiglieria di Torino, all'età di appena diciannove anni.

Nel 1756 proseguiva la corrispondenza con Eulero, cui Lagrange inviò il 5 ottobre un'importante lettera nella quale per la prima volta era ricavata l'equazione delle superfici minime, come variazione prima di un integrale doppio.

Nel 1757, con G. F. Cigna e G. A. Saluzzo, diede vita ad una "Privata società" con il fine di svolgere ricerche matematiche e sperimentali e di pubblicarne i risultati. Nacquero così i volumi delle Miscellanea taurinensia, il primo dei quali uscì nel 1759 con una lunga memoria di Lagrange sulla propagazione del suono. Si tratta della sua prima pubblicazione di altissimo livello che lo inseriva nel vivo di un dibattito scientifico, quello sulle corde vibranti, che vedeva impegnati i maggiori matematici del XVIII sec.: Eulero, D'Alembert e D. Bernoulli. La Società privata potè chiamarsi Società reale nel 1760 e divenne Accademia delle scienze di Torino solo nel 1783.

Nel secondo volume delle Miscellanea Taurinensia (1760-61), compariva la seconda parte della memoria di Lagrange sulle corde vibranti, e la prima stesura del suo metodo delle variazioni, che egli aveva tenuto nel cassetto sperando di farne un libro da pubblicare a Berlino, con l'appoggio di Eulero. Il progetto non andò a buon termine e Lagrange riassunse il suo metodo per i massimi e minimi nella memoria "Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies".

Agli inizi di novembre del 1763 Lagrange lasciava per la prima volta Torino per un viaggio in Europa. Voleva visitare Parigi e Londra, ma a Parigi una malattia lo colpì e dovette interrompere il suo viaggio. Tuttavia il soggiorno parigino fu ricco di conoscenze e di esperienze: incontrò C. Clairaut, A. Fontaine, Antoine Caritat marchese di Condorcet, J.-A. Nollet e l'abate J.-Fr. Marie. Rientrò a Torino alla fine di maggio del 1764, dopo essersi fermato a Ferney, per fare la conoscenza di Voltaire. A Torino riprese l'intensa attività scientifica.

Nel 1764, Lagrange aveva concorso con successo al premio dell'Académie des sciences per una spiegazione del fenomeno della librazione della Luna. L'importantissima memoria che redasse per l'occasione contiene la prima formulazione del principio delle velocità virtuali. Nel frattempo cresceva la sua insoddisfazione per il modesto incarico presso le Scuole di artiglieria e Lagrange cominciò a pensare di lasciare Torino. L'occasione fu fornita dalla partenza di Eulero per San Pietroburgo e dall'invito che gli giunse da Federico II, per intercessione di D'Alembert, di prenderne il posto nell'Accademia di Berlino.

Presso l'Accademia di Berlino

Alla fine dell'estate 1766 L. lasciò Torino per Berlino. Il 6 nov. 1766 si insediò a Berlino come direttore della classe di matematica. Lagrange, ormai libero dalle attività didattiche, pubblicò in vent'anni una sessantina di memorie sugli Atti dell'Accademia. Il soggiorno berlinese si rivelò il più fecondo per l'attività scientifica di Lagrange: in vent'anni pubblicò un'ottantina di memorie di algebra, di analisi, di teoria dei numeri, di meccanica, di astronomia, negli atti accademici di Berlino, Parigi e Torino. Abitava nella centralissima Unter den Linden, dove lo raggiunse nel 1767 la parente Vittoria Conti, divenuta sua sposa. Il soggiorno a Berlino si concluse con il completamento (1786) del suo magistrale trattato "Mécanique analytique", stampato a Parigi nel 1788.

Nel 1783, la morte della moglie e quella del suo più caro amico D'Alembert provocarono in Lagrange una profonda depressione. Nel 1786 morì anche Federico II e Lagrange vide venir meno quelle condizioni di larga autonomia di cui aveva goduto fino ad allora. Tra le diverse proposte nel 1787, accettò l'invito di Luigi XVI di trasferirsi a Parigi.

All'Académie des sciences di Parigi

A Parigi prese possesso di un posto creato per lui all'Académie des sciences nel giugno 1787; venne creata l'apposita carica di "Pensionnaire vétéran", che gli consentiva di avere uno stipendio decoroso. Nello stesso anno fu nominato direttore della classe di matematica presso l'Académie des sciences.

A Parigi Lagrange si sentì attratto da una nuova scienza, che celebrava allora i massimi trionfi, la chimica. L'inizio del soggiorno parigino fu infatti caratterizzato da un certo affievolimento per la ricerca matematica e da un vivo interesse per questa materia, con la partecipazione ai lavori coordinati da A.-L. Lavoisier che stavano portando a una completa ristrutturazione di tale disciplina.

Lagrange era arrivato a Parigi alla vigilia della grande Rivoluzione. Ad ogni modo, il grande prestigio di cui Lagrange godeva si mantenne inalterato anche durante la Rivoluzione francese. Il suo lavoro, nelle varie commissioni che elaborarono il sistema metrico decimale, fu fondamentale e costituì il suo maggiore impegno negli anni della Rivoluzione. Il maggiore, ma non il solo; fece infatti parte di diversi comitati per l'istruzione pubblica e, nel 1792, fu anche amministratore della moneta.

Il 24 maggio 1792 Lagrange sposò Adélaïde Lemonnier, figlia dell'astronomo Pierre Charles e nipote di Guillaume, medico del re. Il contratto di matrimonio fu controfirmato da Luigi XVI. Nessun figlio nacque da questa unione.

In seguito, con la soppressione delle Accademie e i provvedimenti del Comitato di salute pubblica contro gli stranieri, Lagrange fu seriamente minacciato, ma il sostegno dei colleghi come Lavoisier e L.-B. Guyton de Morveau gli permise di restare a Parigi.

Vennero fondate l'École normale e l'École polytechnique. Lagrange nel 1795 fu nominato professore all'École normale, e nel 1797 all'Ècole polytechnique. A queste funzioni è legata la maggiore produzione con finalità didattiche di Lagrange, che diede alle stampe: "Les leçons élémentaires sur les mathématiques" (1795); la "Théorie des fonctions analytiques" (1797); "De la résolution des équations numériques" (1798) e compose le sue "Leçons sur le calcul des fonctions" (1806). La "Théorie des fonctions" rappresenta il massimo tentativo fino ad allora compiuto di porre su nuove basi il calcolo differenziale e integrale e di unificare le varie parti delle matematiche. Essa contiene un'estesa trattazione sul resto, detto di Lagrange, nella formula di B. Taylor.

In seguito, con il Consolato e l'Impero di Napoleone Bonaparte, Lagrange ebbe i più alti riconoscimenti: senatore nel 1799, membro della Legion d'onore (1803), Grande Ufficiale (1804) e, nel 1808, Conte dell'Impero. Nel 1802, in seguito ad un senatoconsulto presentato dallo stesso Lagrange, il Piemonte entrò a far parte della Repubblica francese e quindi Lagrange divenne cittadino francese.

L'ultimo periodo della sua vita fu caratterizzato da una intensa attività di studio e di ricerca. Alla sua morte, avvenuta il 10 aprile 1813 ebbe sepoltura nel Panthéon parigino. I suoi manoscritti furono acquistati dal governo francese e inviati all'Institut. Le opere di Lagrange (Oeuvres de Lagrange) furono raccolte in quattordici volumi e stampate a Parigi (1867-92) a cura di J. A. Serret, J.-G. Darboux e L. Lalanne.

Capitolo 2

Introduzione al calcolo delle variazioni

La nascita del calcolo delle variazioni non ha una data ben precisa. Esso nacque dall'esigenza di generalizzare la teoria elementare dei massimi e dei minimi. Questo campo si è sviluppato prevalentemente nel XVIII e XIX sec., ma ha radici molto più antiche, che risalgono a molto prima del momento in cui Eulero coniò il termine "Calcolo delle Variazioni". Infatti i metodi variazionali hanno una lunga tradizione nella storia della Matematica. Tracciamo quindi le principali tappe che condussero al delinearsi di questa nuova branca.

L'idea che la natura dovesse soddisfare un principio di semplicità, risale all'epoca dei filosofi Greci. Erone di Alessandria (che visse circa intorno al 100 D.C. - 300 D.C.), formulò in maniera scientifica senza provarlo nel suo "Catoptrics" il primo principio di minimo: il raggio di luce riflessa viaggia in modo da minimizzare il tempo di percorrenza. Si tratta di un prodromo del principio del tempo minimo di Fermat.

Inoltre la nascita del Calcolo delle Variazioni, è certamente legata al problema isoperimetrico: "Trovare tra tutte le curve piane di una certa lunghezza fissata, quella che delimita l'area massima". Questo problema ed altri simili, venivano risolti esclusivamente tramite mezzi geometrici. Pappo di

Alessandria (290 D.C. - 350 D.C.), non fu il primo a considerare il problema isoperimetrico, ma nel suo libro "Collectiones mathematicae", ha raccolto e riorganizzato i risultati raggiunti da molti matematici precedenti, come Euclide (325 A.C.-265 A.C), Archimede (287 A.C. - 212 A.C.) e Zenodro (200 A.C. - 140 A.C.).

Un problema di minimizzazione per l'ottica, più serio e generale, venne studiato a metà del XVII sec. da Fermat (1601-1665), che elaborò il principio del tempo minimo: "Di tutti i cammini possibili che la luce può seguire per andare da un punto ad un altro in un mezzo, essa segue il cammino che richiede il tempo più breve". Questa analisi di Fermat potrebbe essere considerata come il punto di partenza dello sviluppo del calcolo delle variazioni. Egli utilizzo i metodi del calcolo per minimizzare il tempo di percorrenza di un raggio di luce attraverso un mezzo, ed il suo metodo venne poi adottato da Johann Bernoulli per risolvere il problema della brachistocrona.

Dopo il lavoro di Fermat ci fu un stallo nello sviluppo del soggetto, fino al 1685, quando Newton (1643-1727) risolse quello che può essere visto come il primo vero problema del calcolo delle variazioni. Nel suo famoso lavoro sulla meccanica "Philosophiae naturalis principia mathematica" (1685), Newton esamina il moto dei corpi in un mezzo resistente, allo scopo di individuare la forma che incontra la minore resistenza al movimento. Affrontò il problema procedendo prima al calcolo della resistenza che incontrano forme particolari. In primo luogo, egli considera un tronco di cono che si muove in un mezzo resistente in direzione del suo asse. Successivamente risolse il problema più generale, usando la per l'epoca ordinaria teoria dei massimi e dei minimi. Questo fu il primo problema nel campo del calcolo delle variazioni ad essere formulato chiaramente, ed il primo ad essere correttamente risolto. Inizia quindi a svilupparsi l'apparato teorico di tale soggetto. Le tecniche geometriche sviluppate da Newton vennero poi sfruttate da Jacob Bernoulli per la sua soluzione del problema della brachistocrona. Purtroppo però c'è da aggiungere che nessuno dei contemporanei di Newton potè comprendere i concetti fondamentali insiti nella sua tecnica risolutiva. In effetti egli pubblicò la sua soluzione nei "Principia", senza fornire nessun dettaglio sulla sua derivazione. Solo nel 1694, David Gregory (professore di astronomia ad Oxford) persuase Newton a rendere noti alla comunità matematica, i dettagli della sua analisi. Ma all'epoca erano già stati svolti numerosi altri studi sul soggetto, che coinvolgevano considerazioni di gran lunga più generali.

Ad ogni modo, siamo giunti all'entrata in scena del problema più famoso coinvolto nello sviluppo delle tecniche del calcolo delle variazioni: il problema della brachistocrona. Nel giugno 1696, a Berna, Johann Bernoulli lanciò una sfida all'intera comunità matematica. Chiese di risolvere il seguente problema:

> Presi, in un piano verticale, due punti A e B, trovare la curva AMB che li congiunge e lungo la quale un punto mobile M, soggetto alla forza di gravità, procede dal punto A al punto B nel minor tempo possibile.[1]

La soluzione venne data quasi simultaneamente da Johann stesso, suo fratello Jacob Bernoulli, Leibniz, Newton e L'Hopital. Il problema della brachistocrona, nella sua formulazione originale, servì come stimolo a formulare e risolvere numerosi altri problemi più generali; fu quindi fondamentale per giungere all'identificazione del calcolo delle variazioni, come nuova branca della matematica. Esso viene introdotto in maniera più dettagliata nella sezione 6.1 del Cap. 6 a pag. 103.

Eulero era in stretti rapporti con la famiglia dei Bernoulli, in quanto il padre era amico di Jhoann Bernoulli. Non sorprende quindi il fatto che Eulero si interessò presto a questa branca della matematica in fase di sviluppo, apportandovi il suo fondamentale contributo. Nel 1728 presenta la memoria

---

[1] Johann Bernoulli: "Problema novum,
ad cujus Solutionem Mathematici invitantur.
Datis in plano verticali duobus punctis A et B. Assignare mobili M viam AMB, per quam gravitate sua descendens, et moveri incipiens a puncto A, brevissimo tempore perveniat ad alterum punctum B" a pag. 296 di "Acta Eruditorum", 1696.

"De linea brevissima in superficie quacunque..."[2], che venne poi pubblicata nel 1732. Nel 1730 egli si cimentò con i problemi isoperimetrici, e nel 1732 presentò "Problematis isoperimetrici in latissimo sensu accepti solutio generalis"[3] che venne pubblicato nel 1738. Ma fu nel 1744 con la pubblicazione del "Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudens, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti", che il calcolo delle variazioni si configurò in modo definitivo, come una branca distinta della matematica. In questo magnifico trattato, Eulero considera vari problemi tipici di quella branca nascente, e non solo li risolve, ma getta le basi di una teoria generale. Il metodo esposto da Eulero, è ancora molto simile a quello di Newton, ma egli lo rese più sistematico. Quest'opera di Eulero segnò il culmine di quel filone di ricerche che aveva avuto inizio mezzo secolo prima, con la pubblicazione del problema della brachistocrona. Se guardato da una vasta prospettiva storica, è chiaro che il "Methodus inveniendi" rappresenta in maniera completa la prima fase dello sviluppo del calcolo delle variazioni. Anche se all'epoca il soggetto non aveva ancora questo nome.

In questo panorama poi si inserì prepotentemente un nuovo personaggio; Lagrange. Lagrange rivoluzionò completamente l'approccio al soggetto, presentato il suo straordinario "metodo delle variazioni"; un procedimento generale, che permette di ricavare gli stessi risultati ottenuti da Eulero nel "Methodus inveniendi", e altro ancora, in maniera strettamente analitica, senza il ricorso all'apparato geometrico. Eulero, messo al corrente da Lagrange delle sue scoperte, si prodigò nel divulgare il metodo di Lagrange lasciando da parte il proprio, e coniò il nome "Calcolo delle Variazioni" proprio per designare la nuova teoria lagrangiana. In effetti, il formalismo lagrangiano è ancora oggi il modo in cui formulare qualsiasi problema dinamico e, se la fondazione del "Calcolo delle variazioni" può ascriversi a Eulero, che per primo ne formulò una teoria generale, il formalismo giusto e le debite

[2] "De linea brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta iungente", Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 3, 1732, pp. 110-124 (E.9).

[3] "Problematis isoperimetrici in latissimo sensu accepti solutio generalis", Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 6, 1738, pp. 175-188 (E.29).

generalizzazioni sono dovute proprio ai lavori giovanili di Lagrange. Ma delle innovazioni introdotte da Lagrange si parlerà in segito, nei commenti alle lettere contenute nei prossimi capitoli. Invece la seguente sezione è dedicata al "Methodus inveniendi" di Eulero, i cui contenuti sono fondamentali per comprendere poi appieno lo straordinario metodo introdotto da Lagrange.

2.1 Eulero: Methodus Inveniendi (1744)

In questa sezione vengono presentati alcuni contenuti significativi del "Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudens, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti"[8], opera di Eulero del 1744. L'opera presenta una collezione di metodi per la risoluzione di problemi tipici del calcolo delle variazioni. Le tecniche presentate nel "Methodus inveniendi" richiedono complicati ragionamenti e costruzioni geometriche, e la loro applicazione alla vasta gamma di esempi proposti non risulta essere di semplice attuazione; fatto che viene riconosciuto dallo stesso Eulero.

I problemi esposti da Eulero possono essere raggruppati in tre categorie principali:

- la prima è presentata nel Cap. II, e contiene i problemi più elementari, quelli privi di condizioni al bordo o di particolari relazioni tra le variabili;
- la seconda è presentata nel Cap. III, e riguarda la variazione di una funzione integrale, nella cui integranda appare una variabile connessa con le altre variabili del problema tramite una equazione differenziale;
- la terza è presentata nel Cap. V, e coinvolge una condizione al bordo formulata in termini di un integrale definito; il problema isoperimetrico è il classico rappresentante di questa classe di problemi.

Di seguito vengono descritte nel dettaglio solamente le prime due tipologie di problemi; poiché sono quelle che vengono considerate da Lagrange nella sua lettera del 12 agosto 1755. Per una trattazione approfondita dei contenuti del “Methodus inveniendi” si veda [2] e [3].

2.1.1 Problemi elementari

Nei Cap. I e II Eulero considera il problema elementare di trovare tra tutte le curve del piano $y = y(x)$ con $0 \leq x \leq a$, congiungenti i punti a e z, quella che rende minimo o massimo l' integrale definito $\int_0^a Z$, dove Z è una funzione data nelle variabili

$$x,\, y,\, p = \frac{dy}{dx},\, q = \frac{dp}{dx},\, r = \frac{dq}{dx},\, \ldots .$$

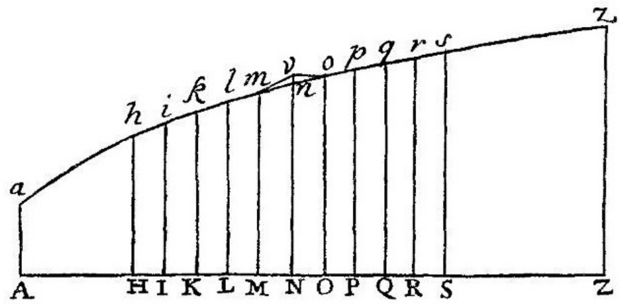


Figura 2.1

Eulero considera l'ascissa AZ suddivisa in sottointervalli infinitamente piccoli

$$dx = HI = IK = KL = LM = \ldots$$

dai punti H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S di ascisse:

$$\ldots, x_{\prime\prime} = AK, x_{\prime} = AL, x = AM, x' = AN, x'' = AO, \ldots$$

con le corrispondenti ordinate:

$$Mm = y \qquad Mm = y$$

$$Nn = y' \qquad Ll = y_{\prime}$$

$$\begin{array}{cc} Oo = y'' & Kk = y_{,,} \\ Pp = y''' & Ii = y_{,,,} \\ Qq = y^{\mathrm{iv}} & Hh = y_{\mathrm{iv}} \\ \dots & \dots \end{array}$$

Successivamente approssima le loro derivate ricorrendo alle differenze finite:

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{Nn - Mm}{dx} = \frac{y' - y}{dx}\,,$$

e analogo per i seguenti e per gli antecedenti, pertanto Eulero scrive:

$$\begin{array}{cc} p = \dfrac{y' - y}{dx} & p = \dfrac{y' - y}{dx} \\ p' = \dfrac{y'' - y'}{dx} & p_{,} = \dfrac{y - y_{,}}{dx} \\ p'' = \dfrac{y''' - y''}{dx} & p_{,,} = \dfrac{y_{,} - y_{,,}}{dx} \\ p''' = \dfrac{y^{\mathrm{iv}} - y'''}{dx} & p_{,,,} = \dfrac{y_{,,} - y_{,,,}}{dx} \\ \dots & \dots \end{array} \tag{2.1}$$

e ancora

$$q = \frac{dp}{dx} = \frac{p' - p}{dx} = \frac{1}{dx}\left(\frac{y'' - y'}{dx} - \frac{y' - y}{dx}\right) = \frac{y'' - 2y' + y}{dx^2}\,,$$

analogo per i seguenti e per gli antecedenti, pertanto Eulero scrive:

$$\begin{array}{cc} q = \dfrac{y'' - 2y' + y}{dx^2} & q = \dfrac{y'' - 2y' + y}{dx^2} \\ q' = \dfrac{y''' - 2y'' + y'}{dx^2} & q_{,} = \dfrac{y' - 2y + y_{,}}{dx^2} \\ q'' = \dfrac{y^{\mathrm{iv}} - 2y''' + y''}{dx^2} & q_{,,} = \dfrac{y - 2y_{,} + y_{,,}}{dx^2} \\ \dots & \dots \end{array}$$

analoghe relazioni si hanno per $r, s, t, \dots$.

Infine nel paragrafo 55 del Cap.I Eulero approssima l'integrale $\int Z\,dx$ relativo all'ascissa AZ, ossia l'integrale definito $\int_0^a Z\,dx$ con la somma:

$$\int_0^x Z\,dx + Z\,dx + Z'\,dx + Z''\,dx + Z'''\,dx + \dots\ .^4 \tag{2.2}$$

dove ha precedentemente posto $Z = Z(x, y, p, q, r, \dots)$, $Z' = (x', y', p', q', r', \dots)$, $Z'' = (x'', y'', p'', q'', r'', \dots)$, $\dots$.

Si osservi che i punti H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, di ascisse $\dots$, $x_{\prime\prime}$, $x_{\prime}$, x, x', x'', $\dots$ si trovano ciascuno alla stessa distanza dx sia dal proprio conseguente che dall'antecedente, pertanto effettuando un passaggio al limite, la quantità infinitesima dx svanisce, e questi punti, si "comprimono" tutti nell' unico punto M di ascissa x. Nell'analisi odierna, non avrebbe molto senso considerare la lunghezza HS, costituita da una somma di quantità infinitesime dx, ma Eulero lavorò in questi termini. Sottolineiamo il fatto che all'epoca non esisteva ancora il concetto di limite; il passaggio al limite, veniva effettuato da Eulero in maniera naturale e spontanea, egli passava dal finito all'infinitesimo senza nessuna limitazione e senza specificarlo. Infatti Eulero considerava il finito e l'infitesimo come due concetti paralleli, l'idea era "se qualcosa vale per il finto, allora esso vale anche per l'infinitesimo, e viceversa". Pertanto per Eulero il dx poteva essere finito o infinitesimo, la cosa era irrilevante, poichè ciò che vale per l'uno vale anche per l'altro.

Veniamo dunque al particolare problema elementare presentato da Eulero nel paragrafo 21 del Cap. II:

PROPOSIZIONE III. PROBLEMA.

Sia Z una funzione di x, y e p, e sia $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp$; trovare, tra tutte le curve $y = y(x)$ con ascissa $0 \leq x \leq a$, quella che rende massimo o minimo $\int_0^a Z$.[5]

[4]Eulero scrive: "55. Si ergo expressio $\int Z\,dx$ ad abscissam curvae $AM = x$ pertineat; ejusdem exspressionis valor, qui conveniet abscisse propositae AZ, erit $= \int Z\,dx + Z\,dx + Z'\,dx + Z''\,dx + Z'''\,dx + etc.$ in infinitum, donec perveniatur ad ultimum punctum Z"da "Methodus inveniendi" Cap. I pag. 26 dell'edizione del 1744.

[5]Eulero scrive: "PROPOSITIO III. PROBLEMA.

Risoluzione

Eulero suppone che la curva anz soddisfi tale richiesta, e considera la curva $amvoz$ ottenuta incrementando l'ordinata $Nn = y'$ di una quantità infinitesima, la "particella" nv. Pertanto il cambiamento tra il valore dell'integrale calcolato lungo la curva amz e quello calcolato lungo la curva $amvoz$ deve essere nullo, poichè per ipotesi si è supposta anz estremale. Dalla (2.2) l'integrale calcolato lungo anz risulta essere

$$\int_0^x Z\,dx + Z\,dx + Z'\,dx + Z''\,dx + Z'''\,dx + \dots\,;$$

con $Z = Z(x, y, p)$, $Z' = (x', y', p')$, $Z'' = (x'', y'', p'')$, $\dots$. L'alterazione di y' comporta variazioni in p e p', perciò l'unica parte dell'integrale che risente di tale alterazione è $Z\,dx + Z'\,dx$. Eulero scrive:

$$dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp\,,$$
$$dZ' = M'\,dx' + N'\,dy' + P'\,dp'\,. \tag{2.3}$$

Quindi Eulero procede interpretando i differenziali in (2.3) come i cambiamenti infinitesimi di Z, Z', x , y, y', p, p' derivanti dall' aver incrementato la sigola ordinata y' con la "particella" nv; così risulta chiaro che $dx = 0$, $dy = 0$, $dy' = nv$, $dy'' = 0$, $\dots$, inoltre dalla (2.1) si ottiene:

$$dp = \frac{dy' - dy}{dx} = \frac{nv}{dx}\,, \qquad dp' = \frac{dy'' - dy'}{dx} = -\frac{nv}{dx}\,. \tag{2.4}$$

È importante osservare che nelle espressioni della (2.4) Eulero utilizza il simbolo "d" con un duplice ruolo. Il dx rappresenta il differenziale solito dell'analisi leibniziana del XVIII sec. ; esso era considerato costante, invece il differenziale di ogni altra variabile era dato dalla differenza del suo valore in x con quello corrispondente ad una ascissa a distanza dx da x. Sono invece diversi per natura i "differenziali"

$$dx = 0\,, dy = 0,\ dy' = nv,\ dy'' = 0,\ dp = \frac{nv}{dx},\ dp' = -\frac{nv}{dx},\ dp'' = 0,\ \dots\,;$$

21. Si Z fuerit functio ipsarum x, y, et p determinata, ita ut sit $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp$; invenire, inter omnes curvas eidem abscissae respondes, eam in qua sit $\int Z\,dx$ maximum vel minimum.", da "Methodus inveniendi" Cap. II pag. 42 dell'edizione del 1744.

perchè essi denotano cambiamenti derivanti dall'aver incrementato la singola ordinata y' con la "particella" nv.
Dalla (2.4) la (2.3) diventa:

$$dZ = P \cdot \frac{nv}{dx} \,,$$

$$dZ' = N' \cdot nv - P' \cdot \frac{nv}{dx} \,. \tag{2.5}$$

Pertanto risulta

$$Z\,dx + Z'\,dx = nv \cdot (P + N'dx - P') \;; \tag{2.6}$$

espressione che, per ipotesi, deve essere uguagliata a zero. Infine Eulero pone $P' - P = dP$ e sostituisce $N = N'$; il che risulta dall'implicito "passaggio al limite" che Eulero esegue in maniera spontanea, passando dal finito all'infinitesimo, in questo modo infatti svaniscono le differenze tra ciascun punto e i suoi conseguenti, perchè essi vengono "compressi" tutti in un unico punto, pertanto svanisce anche le differenza tra la quantità N, e le sue conseguenti. Allora si ottiene $N\,dx - dP = 0$ o

$$N - \frac{dP}{dx} = 0 \,, \tag{2.7}$$

che esprime l'equazione della curva cercata. Notare che nella (2.7) e nei passaggi finali, per ottenerla, "d" denota il differenziale usuale.

L'equazione (2.7) è l'equazione di Eulero-Lagrange[6] per problemi variazionali. Una importante caratteristica del metodo usato da Eulero per ricavarla

[6] In notazione moderna essa si presenta come segue:
Sia $f = f(x, y, y')$ con $y' = \frac{dy}{dx}$, una funzione soddisfacente opportune proprietà in modo che il funzionale $J = \int_a^b f(x, y, y')$ sia ben definito; se $y = y(x)$ è un estremante per J, allora risulta valida L'equazione di Eulero-Lagrange:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d\left(\dfrac{\partial f}{\partial y'}\right)}{dx} = 0 \;.$$

In effetti $N \sim \dfrac{\partial f}{\partial y}$ e $P \sim \dfrac{\partial f}{\partial y'}$.

concerne il duplice utilizzo del simbolo "d", illustrato in precedenza. Inoltre possiamo osservare egli, parte dall'assunzione che esista una curva aderente alle richieste del problema, la curva anz; di conseguenza, se esiste questa soluzione essa dovrà soddisfare certe proprietà. Questo conduce Eulero alla (2.7). Ragionando in questo modo, certamente si giunge ad ottenere le condizioni necessarie per l'esistenza di una soluzione. È curioso invece il fatto che Eulero ritenesse la (2.7) una condizione sufficiente.

Successivamente nel paragrafo 39 dello stesso capitolo, Eulero propone una regola mnemonica utile per scrivere l'equazione (2.7); essa come si vedrà in seguito, ebbe una grossa influenza su Lagrange. La sua regola per il caso $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp$, è di porre nel differenziale $M\,dx = 0$, lasciare invariata $N\,dy$, e scrivere $-p\,dP$ al posto di $P\,dp$. Così risulta

$$N\,dy - p\,dP = 0\,; \tag{2.8}$$

sostituendo $dy = p\,dx$ nella (2.8) si ottiene direttamente la (2.7). Ed in chiusura a tale paragrafo, si trova la seguente frase:

> Si desidera dunque un metodo libero dalla risoluzione geometrica e lineare, attraverso il quale risulti che, in tale ricerca del massimo e del minimo, al posto di $P\,dp$, è opportuno scrivere $-p\,dP$[7].

Essa denuncia apertamente il desiderio di Eulero di trovare un metodo risolutivo puramente analitico. Questa stessa frase verrà citata da Lagrange in apertura alla lettera del 12 agosto 1755, nella quale egli espose proprio quel metodo risolutivo agognato da Eulero.

Nel paragrafo 56 del Cap. II viene considerato lo stesso problema in maniera più generale:

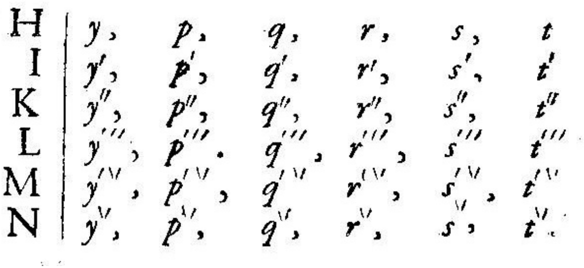
[7] "Desideratur itaque methodus a resolutione geometrica et lineari libera, qua pateat in tali investigatione maximi minimique, loco $P\,dp$, scribi oportere $-p\,dP$" da "Methodus inveniendi" pag. 56 dell'edizione del 1744.

Proposizione V. Problema.

Trovare la curva che rende massimo o minimo l'integrale definito $\int Z$, essendo Z un funzione che dipende da x, y, p, q, r, s, t, $\dots$, così è $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + S\,ds + T\,dt + \dots$ [8]

Risoluzione

Riferendosi sempre alla Figura 2.1, ora Eulero pone $AH = x$ e $Hh = y$, quindi scrive le seguenti corrispondenze:



H	y,	p,	q,	r,	s,	t
I	y',	p',	q',	r',	s',	t'
K	y'',	p'',	q'',	r'',	s'',	t''
L	y''',	p''',	q''',	r''',	s''',	t'''
M	y^{IV},	p^{IV},	q^{IV},	r^{IV},	s^{IV},	t^{IV}
N	y^{V},	p^{V},	q^{V},	r^{V},	s^{V},	t^{V}.

Figura 2.2

Incrementa poi l'ordinata $Nn = y^{\mathrm{v}}$ con la "particella" nv, e prosegue con calcoli analoghi a quelli svolti nella Prop. III, illustrata in precedenza. Quindi scrive nella seguente tabella le conseguenze della variazione $dy^{\mathrm{v}} = nv$:

[8] "Propositio V. Problema.
56. Invenire curvam, in qua sit valor formula $\int Z\,dx$ maximus vel minimus, existente Z ejusmodi functione, qua differentialia cujusvis gradus involvat, ita ut sit $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + S\,ds + T\,dt$+etc." da "Methodus inveniendi" Cap. II pag. 71 dell'edizione del 1744.

$dy = 0$	$dy' = 0$	$dy'' = 0$	$dy''' = 0$	$dy^{IV} = 0$	$dy^{V} = +nv$
$dp = 0$	$dp' = 0$	$dp'' = 0$	$dp''' = 0$	$dp^{IV} = +\frac{nv}{dx}$	$dp^{V} = -\frac{nv}{dx}$
$dq = 0$	$dq' = 0$	$dq'' = 0$	$dq''' = +\frac{nv}{dx^2}$	$dq^{IV} = -\frac{2nv}{dx^2}$	$dq^{V} = +\frac{nv}{dx^2}$
$dr = 0$	$dr' = 0$	$dr'' = +\frac{nv}{dx^3}$	$dr''' = -\frac{3nv}{dx^3}$	$dr^{IV} = +\frac{3nv}{dx^3}$	$dr^{V} = -\frac{nv}{dx^3}$
$ds = 0$	$ds' = +\frac{n}{dx}$	$ds'' = -\frac{4nv}{dx^4}$	$ds''' = +\frac{6nv}{dx^4}$	$ds^{IV} = -\frac{4nv}{dx^4}$	$ds^{V} = +\frac{nv}{dx^4}$
$dt = +\frac{nv}{dx^5}$	$dt' = -\frac{5n}{dx}$	$dt'' = +\frac{10nv}{dx^5}$	$dt''' = -\frac{10nv}{dx^5}$	$dt^{IV} = +\frac{5nv}{dx^5}$	$dt^{V} = -\frac{nv}{dx^5}$

Figura 2.3

Ora, Eulero considera Z dipendete esattamente dalle variabili x, y, p, q, r, s, t, così $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr + S\,ds + T\,dt$, pertanto sostituendo i valori riportati nella Figura 2.3, ottiene:

$$
\begin{aligned}
d.Z\,dx &= nv \cdot dx\left(\frac{T}{dx^5}\right), \\
d.Z'dx &= nv \cdot dx\left(\frac{S'}{dx^4} - \frac{5T'}{dx^5}\right), \\
d.Z''dx &= nv \cdot dx\left(\frac{R''}{dx^3} - \frac{4S''}{dx^4} + \frac{10T''}{dx^5}\right), \\
d.Z'''dx &= nv \cdot dx\left(\frac{Q'''}{dx^2} - \frac{3R'''}{dx^3} + \frac{6S'''}{dx^4} - \frac{10T'''}{dx^5}\right), \\
d.Z^{\text{iv}}dx &= nv \cdot dx\left(\frac{P^{\text{iv}}}{dx} - \frac{2Q^{\text{iv}}}{dx^2} + \frac{3R^{\text{iv}}}{dx^3} - \frac{4S^{\text{iv}}}{dx^4} + \frac{5T^{\text{iv}}}{dx^5}\right), \\
d.Z^{\text{v}}dx &= nv \cdot dx\left(N^{\text{v}} - \frac{P^{\text{v}}}{dx} + \frac{Q^{\text{v}}}{dx^2} - \frac{R^{\text{v}}}{dx^3} + \frac{S^{\text{v}}}{dx^4} - \frac{T^{\text{v}}}{dx^5}\right);
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

Notare che in questo caso la notazione utilizzata da Eulero riflette il duplice ruolo del simbolo "d"; infatti egli scrive "$d.$" per indicare il cambiamento dovuto all'incremento della singola ordinata y^{v} con nv. A questo punto è pronto per calcolare il cambiamento nel valore dell'integrale (2.2) dovuto alla variazione $dy^{\mathrm{v}} = nv$, che risulta:

$$nv \cdot dx \begin{cases} +N^{\mathrm{v}} \\ -\dfrac{P^{\mathrm{v}} + P^{\mathrm{iv}}}{dx} \\ +\dfrac{Q^{\mathrm{v}} - 2Q^{\mathrm{iv}} + Q'''}{dx^2} \\ -\dfrac{R^{\mathrm{v}} + 3R^{\mathrm{iv}} - 3R''' + R''}{dx^3} \\ +\dfrac{S^{\mathrm{v}} - 4S^{\mathrm{iv}} + 6S''' - 4S'' + S'}{dx^4} \\ -\dfrac{T^{\mathrm{v}} + 5T^{\mathrm{iv}} - 10T''' + 10T'' - 5T' + T}{dx^5} \end{cases} \tag{2.10}$$

Ponendo nella (2.10):

$$\begin{aligned} &- P^{\mathrm{v}} + P^{\mathrm{iv}} = -dP^{\mathrm{iv}}\,, \\ &+ Q^{\mathrm{v}} - 2Q^{\mathrm{iv}} + Q''' = +ddQ'''\,, \\ &R^{\mathrm{v}} + 3R^{\mathrm{iv}} - 3R''' + R'' = -d^3R''\,, \\ &S^{\mathrm{v}} - 4S^{\mathrm{iv}} + 6S''' - 4S'' + S' = +d^4S'\,, \\ &T^{\mathrm{v}} + 5T^{\mathrm{iv}} - 10T''' + 10T'' - 5T' + T = -d^5T\,; \end{aligned}$$

ed uguagliandola a zero, Eulero ottiene:

$$N^{\mathrm{v}} - \frac{dP^{\mathrm{iv}}}{dx} + \frac{ddQ'''}{dx^2} - \frac{d^3R''}{dx^3} + \frac{d^4S'}{dx^4} - \frac{d^5T}{dx^5} = 0\,. \tag{2.11}$$

Egli scrive:

> Ma, tutti questi termini sono omogenei, posso omettere senza problemi gli apici, così svanisce ogni differenza tra N^{v} ed N, ed anche tra dP e dP^{iv} … .[9]

Quindi, effettuando il solito passaggio dal finito all'infinitesimo, sostituisce $N^{\mathrm{v}} = N$, $P^{\mathrm{iv}} = P$, $Q''' = Q$, $R'' = R$, $S' = S$ nella (2.11):

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \frac{d^5T}{dx^5} = 0\,;$$

[9] Eulero scrive: "Hic autem, quia omnes termini sunt homogenei, signaturae toto omitti possunt, evanescit enim discrimen inter N^{v} et N, itemque inter dP et dP^{iv} … ." da "Methodus inveniendi" Cap. II pag. 74 dell'edizione del 1744.

e generalizzando ottiene la relazione che fornisce l'equazione della curva richiesta:

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \frac{d^4S}{dx^4} - \frac{d^5T}{dx^5} + \cdots = 0\,. \tag{2.12}$$

2.1.2 Problemi più generali

Nel Cap.III Eulero considera una classe di problemi più complessi. Analizziamo il particolare problema presentato nel paragrafo 19 del Cap. III:

PROPOSIZIONE III. PROBLEMA.

Sia Z una funzione che dipende non solamente dalle variabili

$$x,\, y,\, p = \frac{dy}{dx},\, q = \frac{dp}{dx},\, r = \frac{dq}{dx},\, \dots\,,$$

ma anche dalla quantià Π, definita da:

$$\Pi = \int_0^x [Z]\, dx\,;$$

le funzioni integrande sono date dalle seguenti equazioni differenziali:

$$dZ = L\, d\Pi + M\, dx + N\, dy + P\, dp + Q\, dq + R\, dr + \text{ etc.}$$

$$d[Z] = [M]\, dx + [N]\, dy + [P]\, dp + [Q]\, dq + [R]\, dr + \text{ etc.}$$

trovare, tra tutte le curve $y = y(x)$ con ascissa $0 \le x \le a$, quella che rende massimo o minimo $\int_0^a Z$.[10]

Risoluzione

[10]Eulero dice:"PROPOSITIO III. PROBLEMA.
19. Existente Π functione integrali indeterminata $\int [Z]\, dx$, ita ut sit $d[Z] = [M]\, dx + [N]\, dy + [P]\, dp + [Q]\, dq + [R]\, dr +$ etc. sit Z functio quacunque cum hujus quantitatis Π, tum quantitatum determinatarum x, y, p, q, r, s, etc. ita ut sit $dZ = L\, d\Pi + M\, dx + N\, dy + P\, dp + Q\, dq + R\, dr +$ etc. invenire curvam az, qua pro data abscissa $AZ = a$, habeat maximum minimumve valorem formulae $\int Z\, dx$."da "Methodus inveniendi" Cap. III pag. 97 dell'edizione del 1744.

Per semplificare l'esposizione viene mostrato il caso elementare in cui

$$Z = Z(\Pi, x, y, p) \qquad dZ = L\,d\Pi + M\,dx + N\,dy + P\,dp\,,$$

$$[Z] = [Z](x, y, p) \qquad d[Z] = [M]\,dx + [N]\,dy + [P]\,dp\,;$$

in pratica viene mostrata l'analisi di Eulero nel caso in cui le quantità Q, $[Q]$, R, $[R]\,,\ldots$ sono nulle.

Eulero incrementa la sola ordinata $Nn = y'$ con la "particella" nv. Come in precedenza, ne risultano le variazioni:

$$dp = \frac{nv}{dx}, \quad dy' = nv, \quad dp' = -\frac{nv}{dx}\,.$$

Ricaviamo i corrispondenti cambiamenti in Π. Si ha:

$$\begin{aligned}
\Pi &= \int Z\,dx\,, \\
\Pi' &= \Pi + [Z]\,dx = \int Z\,dx + [Z]\,dx\,, \\
\Pi'' &= \Pi' + [Z']\,dx = \int Z\,dx + [Z]\,dx + [Z']\,dx\,, \\
\Pi''' &= \Pi'' + [Z'']\,dx = \int Z\,dx + [Z]\,dx + [Z']\,dx + [Z'']\,dx \\
\ldots &= \quad \ldots
\end{aligned} \tag{2.13}$$

I cambiamenti in $[Z]$, $[Z']$, $[Z'']$, $\ldots$, vengono ricavati osservando le (2.5), e sono presentati da Eulero come segue:

$$\begin{aligned}
d.[Z]\,dx &= nv \cdot dx \left(\frac{[P]}{dx}\right)\,, \\
d.[Z']\,dx &= nv \cdot dx \left([N'] - \frac{[P']}{dx}\right)\,, \\
d.[Z'']\,dx &= d.[Z'''] = \cdots = 0\,;
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Sostituendo le (2.14) in (2.13), si ottiene:

$$
\begin{aligned}
d.\Pi &= 0\,,\\
d.\Pi' &= nv \cdot dx \left(\frac{[P]}{dx}\right)\,,\\
d.\Pi'' &= nv \cdot dx \left([N'] - \frac{d[P]}{dx}\right)\,,\\
d.\Pi''' &= d.\Pi^{IV} = \dots = d.\Pi''\,;
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

Calcoliamo ora i cambiamenti che risultano nell'integrale $\int_0^x Z\,dx + Z\,dx + Z'\,dx + Z''\,dx + Z'''\,dx + \dots$, quando l'ordinata y' viene incrementata di nv; ricordando che $Z = (\Pi, x, y, p)$, $Z' = (\Pi', x', y', p')$, $Z'' = (\Pi'', x'', y'', p'')$, $\dots$. La porzione di questi cambiamenti, che sorge dalla variazione delle variabili y, p, p', è data, come in precedenza, dalla (2.6):

$$
nv \cdot dx \left(N' - \frac{dP}{dx}\right)\,. \tag{2.16}
$$

In questo caso, quando y' viene incrementata anche tutte le quantità Π, Π', Π'' subiscono variazioni. Poichè

$$
d.Z\,dx = dx\,(L\,d\Pi + M\,dx + N\,dy + P\,dp + \dots)\,,
$$

$$
d.Z'dx = dx\,(L'\,d\Pi' + M'\,dx' + N'\,dy' + P'\,dp' + \dots)\,,
$$

$$
d.Z''dx = dx\,(L''\,d\Pi'' + M''\,dx'' + N''\,dy'' + P''\,dp'' + \dots)\,,
$$

$$
\dots\,;
$$

il cambiamento complessivo in $\int_0^x Z\,dx + Z\,dx + Z'\,dx + Z''\,dx + Z'''\,dx + \dots$, legato a queste ulteriori variazioni, risulta essere:

$$
L\,dx\,d\Pi + L'dx\,d\Pi' + L''dx\,d\Pi'' + L'''dx\,d\Pi''' + \dots \tag{2.17}
$$

Sostituendo i valori (2.15) in (2.17), Eulero ottiene:

$$
nv \cdot dx\,(L'[P]) + nv \cdot dx \left([N'] - \frac{d[P]}{dx}\right)(L''dx + L'''dx + L^{IV}dx + \dots) \tag{2.18}
$$

Ora Eulero, passando dal finito all'infinitesimo, sostituisce $[L'] = [L]$, $N' = N$ e pone

$$L''dx + L'''dx + L^{IV}dx + \cdots = H - \int L\,dx\,;$$

con H che è l'integrale definito di Z lungo l'ascissa AZ, ossia:

$$\int_x^a L\,dx = \int_0^a L\,dx - \int_0^x L\,dx = H - \int_0^x L\,dx\,.$$

Pertanto Eulero riscrive la (2.18) come:

$$nv\cdot dx(H - \textstyle\int L\,dx)\left([N] - \dfrac{d.[P]}{dx}\right) + nv\cdot dx(L[P])\,. \tag{2.19}$$

A questo punto Eulero riscrive la (2.19) come:

$$nv\cdot dx\left([N](H - \textstyle\int L\,dx) - \dfrac{d.[P]\left(H - \int L\,dx\right)}{dx}\right)\,. \tag{2.20}$$

Infine sommando i due contributi (2.20) (2.16) si ottiene la variazione totale che subisce l'integrale:

$$nv\cdot dx\left([N](H - \textstyle\int L\,dx) - \dfrac{d.[P]\left(H - \int L\,dx\right)}{dx}\right) + nv\cdot dx\left(N - \dfrac{dP}{dx}\right)\,,$$

la quale eguagliata a zero fornisce l'equazione della curva cercata:

$$[N](H - \textstyle\int L\,dx) - \dfrac{d.[P]\left(H - \int L\,dx\right)}{dx} + N - \dfrac{dP}{dx} = 0\,. \tag{2.21}$$

Eulero seguendo una procedura analoga ricava l'equazione nel caso generale in cui $Z = Z(x, y, p, q, r, s, t, \dots)$:

$$\begin{aligned}&\Bigg([N](H - \textstyle\int L\,dx) - \dfrac{d.[P]\left(H - \int L\,dx\right)}{dx} + \dfrac{dd.[Q]\left(H - \int L\,dx\right)}{dx^2} + \\ &\quad - \dfrac{d^3.[R]\left(H - \int L\,dx\right)}{dx^3} + \dfrac{d^4.[S]\left(H - \int L\,dx\right)}{dx^4} - \dots\Bigg) + \\ &\quad + \left(N - \dfrac{dP}{dx} + \dfrac{ddQ}{dx^2} - \dfrac{d^3R}{dx^3} + \dfrac{d^4S}{dx^4} - \dfrac{d^5T}{dx^5} + \dots\right) = 0\,.\end{aligned} \tag{2.22}$$

Le equazioni (2.21) e (2.22) nella moderna trattazione del soggetto, si ottengono tramite il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Infatti la funzione $y = y(x)$ che rende massimo o minimo l'integrale

$$\int_a^b Z\,dx \quad \text{soggetto al vincolo} \quad \frac{d\Pi}{dx} - [Z] = 0\,,$$

viene ottenuta risolvendo il problema equivalente di trovare la funzione che rende massimo o minimo l'integrale modificato con integranda:

$$Z + \lambda\left(\frac{d\Pi}{dx} - [Z]\right)\,,$$

dove λ è un moltiplicatore. Se poniamo $\lambda(x) = \int_x^a L(\xi)\,d\xi$ nella (2.22) di Eulero, essa assume la forma equivalente:

$$(N + \lambda[N]) - \frac{d(P + \lambda[P])}{dx} + \frac{d^2(Q + \lambda[Q])}{dx^2} + \cdots = 0\,,$$

chiaramente λ è un moltiplicatore di Lagrange. Però è importante sottolineare che, anche se il metodo dei moltiplicatori di Lagrange fornisce lo stesso risultato raggiunto da Eulero, esso non descrive correttamente il procedimento seguito da quest'ultimo. Ad ogni modo questa resta forse la prima, anche se vaga, apparizione dei moltiplicatori.

Eulero continua il Cap III considerando altri problemi analoghi ma più articolati; comunque la tecnica risolutiva di base resta sempre la stessa. Di seguito vengono riportate le Prop. IV e V, le sole citate da Lagrange, seguite dalle rispettive formule risolutive ricavate da Eulero.

Proposizione IV. Problema.

Sia

$$\pi = \int [z]\,dx \quad \text{con} \quad d[z] = [m]\,dx + [n]\,dy + [p]\,dp + [q]\,dq\,,$$

$$\Pi = \int [Z]\,dx \quad \text{con} \quad d[Z] = [L]\,d\pi + [M]\,dx + [N]\,dy + [P]\,dp + [Q]\,dq\,;$$

e sia Z una funzione di Π, x, y, p, q, così

$$dZ = L\,d\Pi + M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq\,.$$

Definire la curva az, che rende massimo o minimo l'integrale definito $\int_0^a Z\,dx$.[11]

Soluzione

Eulero, svolgendo calcoli notevolmente più lunghi e complessi dei precedenti, giunge alla seguente equazione risolutiva:

$$N + [N]\,T + [n]\,V - \frac{d(P + [P]\,T + [p]\,V)}{dx} + \frac{dd(Q + [Q]\,T + [q]\,V)}{dx^2} + \cdots = 0\,,$$

dove $T = H - \int L\,dx$, $V = G - \int [L]\,dx\,\big(H - \int L\,dx\big)$ e G è una costante posta da Eulro in modo che $S = \int dS = G - \int [L]\,dx\,\big(H - \int L\,dx\big)$ sia nullo quando $x = a$.

Proposizione V. Problema.

Sia Z una funzione qualunque non solo di x, y, p, $q, \ldots$, ma anche della variabile Π definita da

$$\Pi = \int [Z]dx\,;$$

$[Z]$ dipende non solo da x, y, p, $q, \ldots$, ma anche dalla stessa Π, così le funzioni integrande sono date da:

$$dZ = L\,d\Pi + M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + \ldots\,,$$

$$d[Z] = [L]\,d\Pi + [M]\,dx + [N]\,dy + [P]\,dp + [Q]\,dq + \ldots\,.$$

Trovare la curva che rende massimo o minimo l'integrale definito $\int_0^a Z\,dx$.[12]

---

[11]Eulero dice: "Propositio IV. Problema.
31. Sit $\pi = \int [z]\,dx$ et $d[z] = [m]\,dx + [n]\,dy + [p]\,dp + [q]\,dq$, atque quantitatas $[Z]$ ita involvas formulam integralem π, ut sit $d[Z] = [L]\,d\pi + [M]\,dx + [N]\,dy + [P]\,dp + [Q]\,dq$. Jam posito $\Pi = \int [Z]\,dx$, sit Z functio ipsarum x, y, p, q, itemque ipsius Π, ita ut sit $dZ = L\,d\Pi + M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq$. His positis, oporteat definiri curvam az, qua, pro data abscissa $AZ = a$, habeat valorem formula $\int Z\,dx$ maximum vel minimum." da "Methodus inveniendi" Cap. III pag. 106 dell'edizione del 1744.

[12]Eulero dice: "Propositio V. Problema.
38. Sit Π aliter non detur nisi per aequationem differentialem $d\Pi = [Z]dx$, in qua [Z], prater quantitates ad curvam pertinentes x, y, p, $q, \ldots$ ipsam quantitatem Π complectatur, ita ut sit $d[Z] = [L]\,d\Pi + [M]\,dx + [N]\,dy + [P]\,dp + [Q]\,dq + \ldots$. Sit Z functio quacunque ipsius Π et ipsarum x, y, p, $q, \ldots$ ita ut sit $dZ = L\,d\Pi + M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + \ldots$ invenire curvam, in qua, pro data abscissa $AZ = a$, maximum minimumve sit formula $\int Z\,dx$." da "Methodus inveniendi" Cap. III pag. 114 dell'edizione del 1744.

Soluzione

Eulero, svolgendo calcoli anche in questo caso lunghi e complessi, giunge alla seguente equazione risolutiva:

$$N+[N]V-\frac{d(P+[P]V)}{dx}+\frac{dd(Q+[Q]V)}{dx^2}-\frac{d^3(R+[R]V)}{dx^3}+\frac{d^4(S+[S]V)}{dx^4}-\cdots=0\,; \tag{2.23}$$

dove $V = e^{-\int [L]\,dx}\left(H - \int e^{\int [L]\,dx} L\,dx\right)$ e $H = \int_0^a e^{\int [L]\,dx} L\,dx$ (gli altri integrali sono da intendersi valutati da 0 ad x).

Capitolo 3

Lagrange a Eulero: lettera del 28 giugno 1754

LAGRANGE A EULERO.

Taurini, 4^{to} cal. Julii (1754?).

Cogitanti mihi persaepe, ac sedulo animo inquirenti, nunc et in differentialihus, ut in potestatibus, certus aliquis insit ordo, factum tandem est, ut in seriem a newtoniana parum discrepantem inciderim, quae ad cujusvis gradus differentiationes aeque ac integrationes possit accommodari, non secus ac illa Newtoni ad potestates, et radicalia. En itaque utrasque, primam newtonianam, alteram meam, ut si quid in ipsis inest similitudinis, totum uno oculi ictu perspiciatur :

$$(a+b)^m = a^m b^0 + m a^{m-1} b^1 + \frac{m(m-1)}{2} a^{m-2} b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} a^{m-3} b^3$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} a^{m-4} b^4 + \dots ,$$

$$(xy)^m = x^m y^0 + m x^{m-1} y^1 + \frac{m(m-1)}{2} x^{m-2} y^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} x^{m-3} y^3$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} x^{m-4} y^4 + \dots .$$

Jam vero, quod ad hujusce seriei explicationem pertinet, animadvertendum imprimis exponcntes, si positivi, gradus differentiationis, sin negativi, gradus integrationis denotare; sin autem aequales nihilo, tunc argumentum esse, quantitatem illam, cui hujusmodi additur exponens neque differentiatione, neque integratione, sed potius uti est, relinquendam; verum haec omnia clarius exemplis aliquot perspici posse existimo. Habendum sit itaque differentiale 1^{mum} *ipsius* xy *facto* $m = 1$, *series hunc indicat valorcm* $x^1y^0 + x^0y^1$, *seu*

$$y\,dx + x\,dy$$

si $m = 2$, *series fiet*

$$x^2y^0 + 2x^1y^1 + x^0y^2\,,$$

unde obtinebitur differentiale 2^{dum}

$$y\,d^2x + 2\,dx\,dy + x\,d^2y\,;$$

eodem modo, si $m = 3$, *fiet differentiale* 3^{tium}

$$y\,d^3x + 3\,dy\,d^2x + 3\,d^2y\,dx + x\,d^3y\,;$$

existente nempe etiam dx *fluente; atque idem dicitur de caeteris differentiationis gradibus. Veniamus nunc ad integrationes. Quaeratur integrale hujus quantitatis* ydx, *substituto itaque in serie* dx *loco* x *et facto* $m = -1$ *(quoniam integrale quod quaeritur est* 1^{mum}*) in hanc: ipsam transformabitur*

$$dx^{-1}y^0 - dx^{-2}y^1 + dx^{-3}y^2 - dx^{-4}y^3 + dx^{-5}y^4 - dx^{-6}y^5 + \dots$$

Porro $dx^{-1} = x$, dx^{-2} *integrale* $2^{dum}dx$, *seu integrale* 1^{mum} *ipsius* $x = \dfrac{x^2}{2\,dx}$, $dx^{-3} = \dfrac{x^3}{2\cdot 3\,dx^2}$, $dx^{-4} = \dfrac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4\,dx^3}$, *et generatim*

$$dx^{-m} = \frac{x^m}{2\cdot 3\cdot 4\dots m\,dx^{m-1}}$$

posito nempe semper dx *constanti; hoc enim per harum quantitatum differentiationem videre est, namque*

$$d\frac{x^2}{2\,dx} = x, \qquad d\frac{x^3}{2\cdot 3\,dx^2} = \frac{x^2}{2\,dx} \qquad \dots;$$

substitutis igitur hisce valoribus in serie mox inventa, fiet integrale quaesitum, seu

$$\int y\,dx = xy - \frac{x^2dy}{2\,dx} + \frac{x^3d^2y}{2\cdot 3\,dx^2} - \frac{x^4d^3y}{2\cdot 3\cdot 4\,dx^3} + \frac{x^5d^4y}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\,dx^4}\ \dots;$$

sed an non haec est illa ipsa series, quam jampridem celeberrimus Leibnitius pro valore $\int y\,dx$ dedit? Verum hac methodo non haec tantum, sed infinitae prope mod... aliae, in quibus, vel solum y, vel y et dy et $dy^2 \dots$ desint, pro ut opus fuerit, pro eadem quantitate $\int y\,dx$ poterunt inveniri; nempe loco $y\,dx$ accipiatur ejus differentiaIis $dy\,dx$, et substitutis in serie generali dy, loco y et dx loco x, et facto $m = -2$ (quia hic duplex requiritur integratio) ipsaque reducta habebitur

$$\int y\,dx = \frac{x^2dy}{2\,dx} - \frac{2x^3d^2y}{2\cdot 3\,dx^2} + \frac{3x^4d^3y}{2\cdot 3\cdot 4\,dx^3} - \frac{4x^5d^4y}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\,dx^4} + \dots\ .$$

Hanc autem seriem etiam verum esse ipsius $\int y\,dx$ valorem quivis potest experiri eam bis differentiando, restitui enim semper observabitur ipsam primam quantitatem $dx\,dy$, caeteris terminis se mutuo destruentibus. Vides igitur quomodo et ad altiores accommodari possit integrationes; interim tamen hoc firme tenendum loco x in serie generali semper substituendam esse aliquam quantitatem, cujus differentiale ut constans habeatur, vel saltem ipsummet differentiale constans; secus enim numquam obtineri possent valores veri quantitatum $x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}, \dots$. Atque haec quidem sunt, vir clarissime, quae tibi hac de re nunc perscribenda judicavi; caeterum maximo meo erga te studio condonato, si hoc mihi censerim, ut ad te literas darem; ex quo enim praeclarissima scripta tua, atque praestantissimum imprimis Mechanices opus evolvere coepi, ita semper in te animo affectus fui, ut nihil optatius ferme haberem, quam ut hujusce animi mei tibi per literas significandi occasionem nanciscerem; nunc vero, quoniam, hujusce novi inventi mei gratia sese mihi opportuna obtulit, ipsam certe de manibus dimittere nullo modo potui. Gratissimum porro mihi nunc feceris, si hac de re quid sentias ejus me participem feceris, et praesertim, an, praeter Mechanicam, theoriam musicam, solutionem isoperimetrici problematis, et introductionem in infinitorum analysin, alia in lucem edideris; mitto enim, quae Actis Academiae

Petropolitanae et Berolinensis inserta reperiuntur: et praecipue eximium circa fluxum et refluxum maris calculum, haec enim mihi fere omnia probe nota sunt. Haberem fortassis alia tibi mittenda, ac imprimis problema unum totam gnomonicam pro supcrficiebus quibuscunque, formulis duabus algebraicis, complectens, ex doctrina de superficiebus erutum; observationesque nonnullas circa maxima et minima, quae in naturae actionibus, insunt; verum ne majorem amplius molestiam, satietatemque tibi afferam epistolae hujus meae finem imponam. Vale.

De celeberrimo Wuolfii obitu velim me certiorem facias.

. . . .

LAGRANGE A EULERO.

Torino, 28 giugno[1] (1754).

A me, che sovente meditavo, e investigavo con animo inquieto, se nei differenziali, così come nelle potenze, vi fosse un ordine certo, accadde di imbattermi in una serie di poco difforme da quella newtoniana, tale da potersi adattare ai differenziali, e in egual modo agli integrali, di qualsiasi grado, non diversamente da come quella serie di Newton si adatta alle potenze e ai radicali. Eccole dunque entrambe, prima la newtoniana, poi la mia, affinché, se vi è in esse una qualche somiglianza, venga colta tutta con un solo sguardo:

$$(a+b)^m = a^m b^0 + m a^{m-1} b^1 + \frac{m(m-1)}{2} a^{m-2} b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3} a^{m-3} b^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\cdot 3\cdot 4} a^{m-4} b^4 + \dots ,$$

$$(xy)^m = x^m y^0 + m x^{m-1} y^1 + \frac{m(m-1)}{2} x^{m-2} y^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3} x^{m-3} y^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\cdot 3\cdot 4} x^{m-4} y^4 + \dots .$$

[1] "4^{to} cal. Julii"; le calende nel calendario romano indicavano il primo giorno del mese, pertanto il 4^o giorno prima delle calende di luglio, risulta essere il 28 giugno.

In realtà, per quanto riguarda la spiegazione di questa serie, bisogna premettere fin d'ora che gli esponenti indicano, se positivi, i gradi di differenziazione, se negativi, i gradi di integrazione; se invece sono pari a zero, allora questo è indizio che quella quantità, a cui si aggiunge l'esponente di questo tipo, non ha bisogno né di differenziazione, né d'integrazione, ma deve piuttosto essere lasciata così com'è; ma credo che tutte queste particolarità possano essere viste più chiaramente attraverso qualche esempio. Si consideri dunque il differenziale primo dello stesso xy con $m = 1$, la serie indica questo valore $x^1y^0 + x^0y^1$, ossia

$$y\,dx + x\,dy$$

se $m = 2$, la serie sarà

$$x^2y^0 + 2x^1y^1 + x^0y^2\,,$$

da cui si otterrà il differenziale secondo

$$y\,d^2x + 2\,dx\,dy + x\,d^2y\,;$$

allo stesso modo, se $m = 3$, il differenziale terzo

$$y\,d^3x + 3\,dy\,d^2x + 3\,d^2y\,dx + x\,d^3y\,;$$

esistendo evidentemente anche un dx fluente[2]; e lo stesso può dirsi degli altri gradi di differenziazione. Veniamo ora agli integrali. Si ricerchi l'integrale di questa quantità $y\,dx$, sostituendo dunque nella serie dx al posto di x e stabilito $m = -1$ (poiché l'integrale che si ricerca è primo) si trasformerà in questa stessa

$$dx^{-1}y^0 - dx^{-2}y^1 + dx^{-3}y^2 - dx^{-4}y^3 + dx^{-5}y^4 - dx^{-6}y^5 + \dots$$

posto evidentemente dx sempre costante; di conseguenza $dx^{-1} = x$, dx^{-2} integrale $2^{dum}dx$, ossia integrale 1^{mum} dello stesso $x = \dfrac{x^2}{2\,dx}$, $dx^{-3} = \dfrac{x^3}{2 \cdot 3\,dx^2}$,

[2] "fluente"; i concetti di *fluente* e di *flussione* vengono introdotti da Newton nella sua opera "Methodus fluxionum et seriarum infinitarum"(1671). Il fluente è una quantità variabile generata da un moto continuo, la flussione è la velocitá con cui è generata la fluente. Nell'analisi moderna una flussione è la derivata prima della funzione considerata.

$dx^{-4} = \dfrac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4\, dx^3}$, e in generale

$$dx^{-m} = \frac{x^m}{2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots m\, dx^{m-1}}$$

è infatti possibile vedere questo attraverso la differenziazione di queste quantità, infatti

$$d\frac{x^2}{2\, dx} = x, \qquad d\frac{x^3}{2 \cdot 3\, dx^2} = \frac{x^2}{2\, dx} \qquad \ldots;$$

dopo aver dunque sostituito questi valori nella serie appena trovata, si formerà l'integrale ricercato, ossia

$$\int y\, dx = xy - \frac{x^2 dy}{2\, dx} + \frac{x^3 d^2 y}{2 \cdot 3\, dx^2} - \frac{x^4 d^3 y}{2 \cdot 3 \cdot 4\, dx^3} + \frac{x^5 d^4 y}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5\, dx^4} \ldots;$$

ma non è forse questa quella stessa serie, che precedentemente il celeberrimo Leibniz diede per il valore $\int y\, dx$? Ma con questo metodo non solo questa, ma quasi infinite altre serie si potranno trovare, in cui o solo y, o y e dy e $dy^2 \ldots$ manchino, a seconda della necessità, per la stessa quantità $\int y\, dx$; ossia al posto di ydx si prenda il suo differenziale $dy\, dx$, e sostituiti nella serie generale dy al posto di y, e dx al posto di x, e posto $m = -2$ (poichè qui si richiede una duplice integrazione), e dopo averla ridotta, si avrà

$$\int y\, dx = \frac{x^2 dy}{2\, dx} - \frac{2x^3 d^2 y}{2 \cdot 3\, dx^2} + \frac{3x^4 d^3 y}{2 \cdot 3 \cdot 4\, dx^3} - \frac{4x^5 d^4 y}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5\, dx^4} + \ldots .$$

Chiunque può verificare che questa serie è anche il vero valore dello stesso $\int y\, dx$, differenziandola due volte, infatti si osserverà che viene sempre restituita la stessa prima quantità $dx\, dy$, dato che gli altri termini si annullano vicendevolmente. Vedi dunque in che modo si possa adattare anche alle integrazioni più alte; frattanto tuttavia bisogna tener per fermo questo punto, cioè che, nella serie generale, al posto di x bisogna sempre sostituire una qualche quantità, il cui differenziale sia considerato come costante, o almeno il differenziale stesso sia costante; in caso contrario, infatti, non si potrebbero mai ottenere i valori autentici delle quantità $x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}, \ldots$. E queste, dunque, sono le cose che, o uomo illustrissimo, ho ritenuto di doverti ora scrivere riguardo a questa materia; ma non ho fatto altro che ripagare il mio debito nei tuoi confronti, decidendomi a scrivere questa lettera; da quando infatti ho iniziato a leggere i tuoi eccelsi scritti, e soprattutto la tua valentissima opera sulla Meccanica[3], ti ho sempre avuto al centro dei miei pensieri, tanto da non desiderare nulla più intensamente dell'occasione di manifestarti per lettera questo mio sentimento; ora dunque, dato che mi si è offerta l'opportunità di questa mia scoperta, non ho potuto assolutamente lasciarmela sfuggire. Mi farai, poi, cosa graditissima se mi comunicherai i tuoi pensieri riguardo a tale argomento, e se, oltre alla Meccanica, alla Musica[4], alla soluzione del problema isoperimetrico[5], e all'introduzione all'analisi degli infiniti[6], pubblicherai altre opere; ti invio, infatti, i testi che si trovano negli Atti dell'Accademia di Pietroburgo e di Berlino: e soprattutto il pregevole calcolo intorno al flusso e riflusso del mare[7], infatti quasi tutti questi scritti mi sono ben noti. Forse avrei altri scritti da inviarti, e soprattutto il problema che abbraccia tutta la Gnomonica[8] per qualsiasi superficie in due formule algebriche, e che è scaturito dalla dottrina delle superfici; ed alcune osservazioni intorno ai massimi e ai minimi, che sono insiti nelle azioni della natura; ma per non arrecarti noia e fastidio ulteriori, porrò fine a questa lettera. Saluti.

Vorrei mi confermassi la morte dell'illustrissimo Wolf[9].

[3] "Mechanica sive motus scientia analytice exposita", 2 t., Pitroburgo, 1736 (E.15-16).

[4] "Tentamen novae theoriae musicae...", Pietroburgo, 1739 (E.33).

[5] "Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudens, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti", Losanna e Ginevra, 1744 (E.65).

[6] "Introductio in analysin infinitorum", 2 t., Losanna, 1748 (E.101-102).

[7] "Inquisitio physica in causam fluxus ac refluxus maris", Parigi, 1741 (E. 57).

[8] La gnomonica è la scienza che elabora teorie sulla divisione dell'arco diurno, la traiettoria del sole sull'orizzonte, mediante l'uso di proiezioni specifiche su diverse superfici.

[9] Christian Wolff (Breslavia, 24 gennaio 1679 - Halle sul Saale, 9 aprile 1754) celebre filosofo tedesco, è stato anche matematico.

Commento

Siamo nel 28 giugno 1754, e l'appena diciottenne Giuseppe Luigi Lagrange, personaggio ancora sconosciuto, ha addirittura il coraggio di rivolgersi direttamente ad Eulero, il massimo matematico dell'epoca, per chiedergli il suo illustre parere su certi risultati da lui ottenuti nel campo dell'analisi matematica; risultati in realtà già noti da sessant'anni. Eulero non risponde a questa lettera, ma la conserva, spinto probabilmente non tanto da quanto Langrange crede di avere scoperto, quanto dalla frase che si trova in chiusura:

> Forse avrei altri scritti da inviarti, [...] ed alcune osservazioni intorno ai massimi e ai minimi, che sono insiti nelle azioni della natura; ma per non arrecarti noia e fastidio ulteriori, porrò fine a questa lettera.

Tale affermazione doveva come minimo suscitare una certa curiosità in Eulero, in quanto lo riportava alle sue ricerche, fermatesi vari anni prima, riguardanti il principio di minima azione. Sarà poi la lettera di Lagrange del 12 agosto 1755, contenente il suo rivoluzionario "metodo delle variazioni" a dare il concreto avvio alla corrispondenza tra i due matematici.

Il contenuto della presente lettera non corrisposta, riguarda alcuni risultati circa l'analogia tra la differenziazione e l'elevamento a potenza; risultati che Lagrange riteneva degni della considerazione di Eulero, ma che a sua insaputa erano già stati ottenuti e resi noti da Leibniz, come Eulero gli rammenta nella sua prima lettera di risposta.

> Per quanto riguarda, poi, le tue riflessioni, nella lettera precedente, intorno all'analogia dei differenziali di qualsiasi ordine della formula xy e delle potenze dei binomi $(a+b)^m$, ricordo che essa è già stata

> osservata da Leibniz, come potrai verificare, se non erro, nella sua corrispondenza con Bernoulli.

Effettivamente l'analogia tra gli sviluppi $(a+b)^m$ e $d^m(xy)$, con m positivo, era già stata rimarcata da Leibniz in una lettera scritta a Johann Bernoulli nel 6 maggio 1965, e successivamente da lui pubblicata nel 1710 nell'articolo "Symbolismus memorabilis calculi algebraici et infinitesimalis, in comparatione potentiarum et differentiarum..." nel primo volume della Miscellanea Berolinensia. La corrispondenza tra Leibniz e Johann Bernoulli viene pubblicata nel 1745 in due volumi, nel "Virorum celeberr. G. Leibnitii et J. Bernoullii commercium philosophicum et mathematicum"; ma quando Lagrange scrive questa lettera ad Eulero, egli è all'oscuro sia della pubblicazione delle lettere, che dell'articolo citato sopra. A tal proposito è doveroso ricordare che Lagrange si avviò agli studi in campo matematico e fisico, essenzialmente da autodidatta; certamente non aveva avuto grandi maestri come invece aveva avuto Eulero.

Di seguito vengono presentate le presunte scoperte di Lagrange contenute nella lettera; successivamente viene inoltre esposto il contenuto dell'articolo di Leibniz citato poco sopra.

3.1 L'analogia osservata da Lagrange

Lagrange scrive ad Eulero di aver trovato una serie molto simile a quella del binomio di Newton,

> tale da potersi adattare ai differenziali, e in egual modo agli integrali, di qualsiasi grado, non diversamente da come quella serie di Newton si adatta alle potenze e ai radicali.

La serie del binomio di Newton:

$$(a+b)^m = a^m b^0 + m a^{m-1} b^1 + \frac{m(m-1)}{2} a^{m-2} b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} a^{m-3} b^3$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} a^{m-4} b^4 + \dots .$$

La serie proposta da Lagrange:

$$(xy)^m = x^m y^0 + m x^{m-1} y^1 + \frac{m(m-1)}{2} x^{m-2} y^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} x^{m-3} y^3$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} x^{m-4} y^4 + \dots \, . \tag{3.1}$$

L'analogia tra i due sviluppi risulta evidente.

Lagrange specifica che nella (3.1), i gradi positivi indicano gradi di differenziazione, quelli negativi, gradi di integrazione, mentre il grado nullo, lascia la quantità invariata. Pertanto la serie proposta da Lagrange per la differenziazione è la seguente:

$$d^m(xy) = y d^m x + m\, dy\, d^{m-1}x + \frac{m(m-1)}{2}\, d^2y\, d^{m-2}x + \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}\, d^3y\, d^{m-3}x$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}\, d^4y\, d^{m-4}x + \dots \, .$$

In seguito egli mostra con alcuni esempi, la validità della (3.1):
con $m = 1$ la serie fornisce il valore

$$x^1 y^0 + x^0 y^1 \quad \text{ossia} \quad y\, dx + x\, dy\, ;$$

con $m = 2$ la serie fornisce il valore

$$x^2 y^0 + 2x^1 y^1 + x^0 y^2 \quad \text{ossia} \quad y\, d^2x + 2\, dx\, dy + x\, d^2y\, ;$$

con $m = 3$ la serie fornisce il valore

$$x^3 y^0 + x^2 y^1 + x^1 y^2 + x^0 y^3 \quad \text{ossia} \quad y\, d^3x + 3\, dy\, d^2x + 3\, d^2y\, dx + x\, d^3y\, ;$$

e così via. Pertanto la (3.1) fornisce i valori corretti per i differenziali considerati, in quanto gli stessi differenziali, ottenuti seguendo le regole di differenziazione introdotte da Leibniz, risultano:

$$d(xy) = y\, dx + x\, dy\, ;$$

$$d^2(xy) = d(y\, dx + x\, dy) = y\, d^2x + 2\, dx\, dy + x\, d^2y\, ;$$

$$d^3(xy) = d(y\,d^2x + 2\,dx\,dy + x\,d^2y) = y\,d^3x + 3\,dy\,d^2x + 3\,d^2y\,dx + x\,d^3y\,.$$

Si ricorda che nel 1684 Leibniz aveva reso pubblico il suo "metodo delle differenze" sugli Acta Eruditorum di Lipsia, con la brevissima memoria dal titolo "Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus". In questo articolo Leibniz presenta le seguenti regole di differenziazione:

- Sia a una quantità data costante, sarà $da = 0$ e $dax = adx$.
- *Addizione e sottrazione:* se si ha $z - y + w + x = v$, sarà
$$d(z - y + w + x) = dv = dz - dy + dw + dx\,.$$
- *Moltiplicazione:*
$$dxv = xdv + vdx\,.$$
- *Divisione:* posto $z = \dfrac{v}{y}$ si ha
$$dz = \frac{\pm\, vdy \mp ydv}{y^2}\,.$$
- *Potenza:*
$$dx^a = ax^{a-1}dx\,.$$
- *Radice:*
$$d\sqrt[b]{x^a} = \frac{a}{b}\,dx\sqrt[b]{x^{a-b}}\,.$$

Dopo averle illustrate Leibniz afferma:

> Dalla conoscenza di questo particolare *Algoritmo*, o di questo calcolo, che io chiamo *differenziale*, tutte le altre equazioni differenziali possono ricavarsi per mezzo del calcolo comune, [...] in modo che non

> sia necessario fare sparire le frazioni o gli irrazionali, od altri vincoli, come tuttavia si doveva fare secondo i metodi sin'ora pubblicati.[10]

In seguito Lagrange prosegue la sua lettera ad Eulero focalizzando l'attenzione sull'utilizzo della (3.1) nell'integrazione. Dapprima mostra come ottenere l'integrale della quantità $y\,dx$: pone $m = -1$ (poichè l'integrale ricercato è "primum") e sostituisce $x = dx$ nella (3.1), ottenendo:

$$(y\,dx)^{-1} = dx^{-1}y^0 - dx^{-2}y^1 + dx^{-3}y^2 - dx^{-4}y^3 + \\ + dx^{-5}y^4 - dx^{-6}y^5 + \dots \,. \tag{3.2}$$

Giunto a questo punto Lagrange pone $dx = cost$, tale supposizione è sempre necessaria per l'utilizzo di questa procedura; questa importante clausola viene rimarcata anche in chiusura alla lettera. Di conseguenza i valori delle quantità $dx^{-1}, dx^{-2}, dx^{-3}, \dots$ risultano:

$$dx^{-1} = \int dx = x\,; \tag{3.3}$$

$$dx^{-2} = \int dx^{-1} = \int x = \frac{x^2}{2\,dx}\,; \tag{3.4}$$

$$dx^{-3} = \int \frac{x^2}{2\,dx} = \frac{x^3}{2 \cdot 3\,dx^2}\,; \tag{3.5}$$

$$dx^{-4} = \int \frac{x^3}{2 \cdot 3\,dx^2} = \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4\,dx^3}\,; \tag{3.6}$$

e così via, pertanto in generale sarà:

$$dx^{-m} = \frac{x^m}{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots m\,dx^{m-1}}\,. \tag{3.7}$$

Lagrange giustifica questi risultati, mostrando che effettivamente differenziando si ottiene il valore integrato:

$$d\left(\frac{x^2}{2\,dx}\right) = \frac{2x\,dx}{2\,dx} = x\,; \qquad d\left(\frac{x^3}{2 \cdot 3\,dx^2}\right) = \frac{3x^2dx}{2 \cdot 3\,dx^2} = \frac{x^2}{2\,dx}\,; \qquad \text{ecc}\dots$$

[10] "Ex cognito hoc velut *Algorithmo*, ut ita dicam, calculi hujus, quem voco *differentialem*, omnes aliae aequationes differentiales inveniri possunt per calculum communem, [...], ita ut non sit tolli fractas aut irrationales, aut alia vincula, quod tamen faciendum fuit secundum Methodos hactenus editas." da "Nova methodus pro maximis ...", Acta Eruditorum, Lipsia 1684.

Dunque Lagrange riscrive la (3.2) utilizzando la notazione usuale, quindi pone

$$y^0 = y,\ y^1 = dy,\ y^2 = d^2y,\ y^3 = d^3y,\ \ldots$$

e sostituendo in essa i valori (3.3)(3.4)(3.5)(3.6)(3.7):

$$\int y\,dx = xy - \frac{x^2dy}{2\,dx} + \frac{x^3d^2y}{2\cdot 3\,dx^2} - \frac{x^4d^3y}{2\cdot 3\cdot 4\,dx^3} + \frac{x^5d^4y}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\,dx^4}\ \cdots .$$

In questo modo ha ricavato la serie per il calcolo di $\int y\,dx$, serie che era già stata trovata indipendentemente sia da Leibniz che da Johann Bernoulli, e pubblicata da quest'ultimo per la prima volta nel novembre 1694 negli Acta Eruditorum[11].

Di seguito Lagrange afferma, che seguendo lo stesso procedimento, è possibile calcolare l'integrale della quantità $dy\,dx$: ponendo $m = -2$ (poichè l'integrale ricercato è "duplex", ossia doppio) e sostituendo $x = dx$, $y = dy$ nella (3.1), si otterrà:

$$(dx\,dy)^{-2} = dx^{-2}dy^0 - 2\,dx^{-3}dy^1 + \frac{2\cdot 3}{2}\,dx^{-4}dy^2 - \frac{2\cdot 3\cdot 4}{2\cdot 3}\,dx^{-5}dy^3 + \ldots$$

utilizzando la notazione usuale

$$dy^0 = dy, dy^1 = d^2y\,dy^2 = d^3y,\ \ldots$$

e sostituendo i valori (3.4)(3.5)(3.6)(3.7) sarà:

$$\int y\,dx = \frac{x^2dy}{2\,dx} - \frac{2x^3d^2y}{2\cdot 3\,dx^2} + \frac{3x^4d^3y}{2\cdot 3\cdot 4\,dx^3} - \frac{4x^5d^4y}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\,dx^4} + \ldots . \tag{3.8}$$

Dunque sostiene che è possibile verificare questo risultato attraverso la differenziazione; afferma che differenziando due volte la (3.8) essa fornirà la quantità integrata, ossia $dx\,dy$, poichè gli altri termini si annullano a due a due. Infatti:

$$\begin{aligned} dd\left(\frac{x^2dy}{2\,dx}\right) &= d\left(\frac{2x\,dx\,dy}{2\,dx} + \frac{x^2d^2y}{2\,dx}\right) = d\left(x\,dy + \frac{x^2d^2y}{2\,dx}\right) = \\ &= dx\,dy + x\,d^2y + \frac{2x\,dx\,d^2y}{2\,dx} + \frac{x^2d^3y}{2\,dx} = \\ &= dx\,dy + 2x\,d^2y + \frac{x^2d^3y}{2\,dx}\,; \end{aligned} \tag{3.9}$$

[11] Joh. Bernoulli, Opera omnia, I, p. 125-128.

$$dd\left(\frac{x^3d^2y}{3\,dx^2}\right)=d\left(\frac{3x^2\,dx\,d^2y}{3\,dx^2}+\frac{x^3d^3y}{3\,dx^2}\right)=d\left(\frac{x^2\,d^2y}{dx}+\frac{x^3d^3y}{3\,dx^2}\right)=$$
$$=\frac{2x\,dx\,d^2y}{dx}+\frac{x^2d^3y}{dx}+\frac{3x^2dx\,d^3y}{3\,dx^2}+\frac{x^3d^4y}{3\,dx^2}=$$
$$=2x\,d^2y+\frac{2x^2d^3y}{dx}+\frac{x^3d^4y}{3\,dx^2}\,; \tag{3.10}$$

e analogamente

$$dd\left(\frac{x^4d^3y}{2\cdot 4\,dx^3}\right)=\frac{3x^2d^3y}{2\,dx}+\frac{2x^3d^4y}{2\,dx^2}+\frac{x^4d^5y}{2\cdot 4\,dx^3}\,; \tag{3.11}$$

$$dd\left(\frac{x^5d^4y}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\,dx^4}\right)=\frac{2x^3d^4y}{3\,dx^2}+\frac{x^4d^5y}{3\,dx^3}+\frac{x^5d^6y}{2\cdot 3\cdot 5\,dx^4}\,; \tag{3.12}$$

ecc... . Pertanto mettendo insieme le (3.9)(3.10)(3.11)(3.12) si ottiene:

$$dd\left(\frac{x^2dy}{2\,dx}-\frac{2x^3d^2y}{2\cdot 3\,dx^2}+\frac{3x^4d^3y}{2\cdot 3\cdot 4\,dx^3}-\frac{4x^5d^4y}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\,dx^4}+\dots\right)=$$

$$dx\,dy+2x\,d^2y+\frac{x^2d^3y}{2\,dx}-\left(2x\,d^2y+\frac{2x^2d^3y}{dx}+\frac{x^3d^4y}{3\,dx^2}\right)+$$

$$+\frac{3x^2d^3y}{2\,dx}+\frac{2x^3d^4y}{2\,dx^2}+\frac{x^4d^5y}{2\cdot 4\,dx^3}-\left(\frac{2x^3d^4y}{3\,dx^2}+\frac{x^4d^5y}{3\,dx^3}+\frac{x^5d^6y}{2\cdot 3\cdot 5\,dx^4}\right)+\dots$$

$$=dx\,dy+\left(2x\,d^2y-2x\,d^2y\right)+\left(\frac{x^2d^3y}{2\,dx}-\frac{2x^2d^3y}{dx}+\frac{3x^2d^3y}{2\,dx}\right)+$$

$$+\left(-\frac{x^3d^4y}{3\,dx^2}+\frac{x^3d^4y}{dx^2}-\frac{2x^3d^4y}{3\,dx^2}\right)+\left(\frac{x^4d^5y}{2\cdot 4\,dx^3}-\frac{x^4d^5y}{3\,dx^3}+\dots\right)+$$

$$+\left(-\frac{x^5d^6y}{2\cdot 3\cdot 5\,dx^4}+\dots\right)+\dots=dx\,dy\,;$$

le quantità contenute tra parentesi sono nulle, dunque, come affermato da Lagrange, si ottiene la quantità integrata $dx\,dy$.

Dunque, queste sono le considerazioni che Lagrange ha sentito il bisogno di condividere con Eulero.

3.2 Analisi dell'articolo di Leibniz del 1710

Procediamo ad illustrare i contenuti dell'articolo di Leibniz "Symbolismus memorabilis calculi algebraici et infinitesimalis, in comparatione potentiarum et differentiarum..."[17], pubblicato nel 1710 nel primo volume della Miscellanea Berolinensia.

Leibniz indica con dx, ddx, d^3x rispettivamente la differenza prima, seconda e terza; ed esprime con x, xx, x^3 in luogo di p^1x, p^2x, p^3x le potenze prima, seconda e terza; ancora indica con $p^e(x+y)$ la potenza di $x+y$ secondo l'esponente e, e con $d^e(xy)$ la differenza di xy secondo l'esponente e. Per quanto riguarda l'elevamento a potenza, risulta:

$$p^1(x+y) = x+y$$

$$p^2(x+y) = 1xx + 2xy + 1yy$$

$$p^3(x+y) = 1x^3 + 3x^2y + 3xyy + 1y^3$$

$$p^4(x+y) = 1x^4 + 4x^3y + 6xxyy + 4xy^2 + 1y^4$$

e in generale

$$p^e(x+y) = 1x^e + \frac{e}{1}\,x^{e-1}y + \frac{e(e-1)}{1\cdot 2}\,x^{e-2}y^2 +$$

$$+\frac{e(e-1)(e-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,x^{e-3}y^3 + \frac{e(e-1)(e-2)(e-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\,x^{e-4}y^4 + \dots \qquad (3.13)$$

Leibniz sottolinea che le quantità

$$\dots, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{xx}, \frac{1}{x}, \frac{1}{1}, x, xx, x^3, \dots$$

sono in progressione geometrica, mentre gli esponenti

$$\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

si trovano in progressione aritmetica.

Ponendo

$$p^0x = 1 \quad \text{e} \quad p^{-1}x = \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad p^{-2}x = \frac{1}{xx} \quad \dots,$$

allora la formula generale (3.13) può essere scritta come:

$$p^e(x+y) = 1p^e x\, p^0 y + \frac{e}{1}\, p^{e-1} x\, p^1 y + \frac{e(e-1)}{1\cdot 2}\, p^{e-2} x\, p^2 y +$$

$$+\frac{e(e-1)(e-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\, p^{e-3} x\, p^3 y + \frac{e(e-1)(e-2)(e-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\, p^{e-4} x\, p^4 y + \dots .$$

Dunque Leibniz considera la differenziazione:

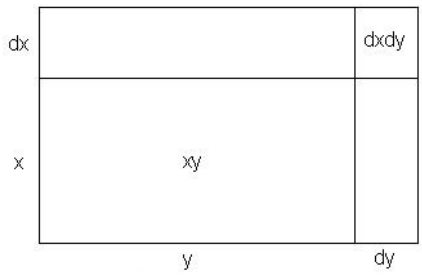
> Veniamo dunque alla differenziazione, e mostriamo che si ottiene lo stesso risultato solamente ponendo in quella, xy al posto di $x+y$, e ponendo d al posto di p.[12]

Per quanto riguarda la differenziazione:

$$d(xy) = y\, dx + x\, dy \tag{3.14}$$

poichè:

$$d(xy) = (x+dx)(y+dy) - xy \tag{3.15}$$



ma è anche

$$(x+dx)(y+dy) = xy + ydx + xdy + dxdy \tag{3.16}$$

> ma poichè dx e dy sono incomparabilmente minori rispetto a x o y, anche $dxdy$, sarà incomparabilmente minore rispetto a $xdy\ ydx$;[13]

pertanto il termine $dxdy$ è trascurabile, e sostituendo la (3.16) nella (3.15), si ottiene la (3.14).
Ponendo

$$x = d^0 x \quad \text{e} \quad y = d^0 y\,;$$

[12] "Veniamus jam ad differentiationes, idemque illic provenire ostendamus tantum pro $x+y$ ponendo xy, et pro p ponendo d." da "Symbolismus memorabilis calculi algebraici et infinitesimalis...", Misc.Berol., I G.G.L. pag.162.

[13] "sed quia dx vel dy est incombarabiliter minus quam x vel y, etiam $dxdy$, erit incomparabiliter minor quam $xdy\ ydx$;" da "Symbolismus memorabilis calculi algebraici et infinitesimalis...", Misc.Berol., I G.G.L. pag.162.

$$dx = d^1x \quad \text{e} \quad dy = d^1y\,;$$

allora la (3.14) può essere scritta come:

$$d^1(xy) = d^1x\,d^0y + d^0x\,d^1y$$

Leibniz adotta lo stesso ragionamento per la differenza seconda:

$$dd(xy) = d(y\,dx + x\,dy) = d(y\,dx) + d(x\,dy)$$

dal calcolo precedente si ha

$$d(y\,dx) = y\,ddx + dx\,dy$$

$$d(x\,dy) = x\,dy + x\,ddy$$

così

$$dd(xy) = y\,ddx + 2dx\,dy + x\,ddy\,.$$

Allora si osserva che:

$$d^2(xy) = d^2x\,d^0y + 2d^1x\,d^1y + d^0x\,d^2x\,;$$

$$p^2(x+y) = p^2x\,p^0y + 2p^1x\,p^1y + p^0x\,p^2x\,.$$

> Questa analogia tra la differenziazione e l'elevamento a potenza si presenta ripetutamente, continuando a differenziare e ad elevare. [14]

Infine Leibniz conclude l'articolo, mostrando che la stessa analogia si ritrova anche tra la differenziazione delle terne $d^e(xyz)$ e l'elevamento a potenza dei trinomi $p^e(x+y+z)$.

[14] "Quae analogia inter differentiationem et potentiationem feratur perpetuo, continuata potentiatione et differentiatione." da "Symbolismus memorabilis calculi algebraici et infinitesimalis...", Misc.Berol., I G.G.L. pag.162.

Capitolo 4

Lagrange a Eulero: lettera del 12 agosto 1755

LAGRANGE A EULERO.

Die 12 augusti [1755].

Vir amplissime atque celeberrime,

Meditanti mihi assidue, praeteritis diebus, praeclarissimum librum tuum de methodo maximorum et minimorum ad lineas curvas applicata, factum tandem est, ut, quod jamdudum mihi erat in desideratis, inciderim in viam aliam longe breviorem prohlemata hujuscemodi resolvendi, seu formulas tuas, absque omni lineari ccnstructione, demonstrandi; quum eam igitur, ob simplicitatem suam tibi omnino non displicituram putaverim, ut pote qui similem fortassis jam exoptasse mihi visus sis in p. 39, Cap II ejusdem libri; ubi ais: Desideratur itaque methodus a resolutione geometrica et lineari libera, qua pateat in tali investigatione maximi minimique, loco $P\,dp$, *scribi oportere* $-p\,dP$; *hoc mihi nunc sumere ausus sum, ut illius te participem facerem, ratus quidquid temeritatis, et arrogantiae in hac parte commissum fuisset, id a te omne pro summa tua humanitate facile condonatum iri. Quanquam enim merito haesitandum fuerat, an mihi, qui obscuri adhuc nominis sum, te tantum vivum, omni pene scientiarum genere clarissimum, interpellare* *liceret, maximus tamen ac plane singularis affectus meus in te ex operum tuorum studio jampridem conceptus effecit, ut opportunam hanc illius tibi quomodocunque testandi occasionem, quam vehementissime exoptabam, de manibus dimittere nullo modo potuerim. Noli igitur, vir nobilissime, meam hanc, qualiscunque ea sit, audaciam graviter ferre; ea enim non aliunde certe, quam ex ardentissimo, quo teneor desiderio, in humillimorum cultorum tuorum numerum ingrediendi, proficiscitur. Interim, dum me gratiae tuae ac benevolentiae devote commendo, te summopere rogatum cupio, ut quid de hac tenui mea re ingenue sentias, ejus me participem reddendi gratiam mihi facere velis; hoc enim in omnium, quae tibi jam debere agnosco cumulum certe accedet. Vale, et fave*

Amplitudinis tuae cultori devctissimo et indefesso
Ludovico de la Grange Tournier.

Tuas ad me literas, quo facilius promptiusque mihi reddantaur rectius facies si ita inscribes : A M. Durand, bauquier, pour remettre s.l.p. á M. Louis de la Grange.

Praenotanda.

I. Differentiale ipsius y quatenus hic differentiatur, x manente, pro habendo maximo, minimove formulae datae valore, ad distinctionem aliarum ejusdem y differentiarum, quae in illa jam ingrediuntur, denotabo per δ; sic et $\delta\,dy$ est differentia ipsius dy, dum y crescunt quantitate δy; idem die generaliter de valore $\delta F(y)$ [$F(y)$ mihi est functio quaecumque y].

II. Ex dissertatione tua de infinitis curvis ejusdem generis (Comm. Acad. Petrop. anno 1734 inserta) sub initium facile colligatur fore semper

$$\delta dF(y) = d\delta F(y) \quad \text{et generaliter} \quad \delta d^m F(y) = d^m \delta F(y)\,;$$

unde et

$$\delta d^m y = d^m \delta y\,.$$

III. Ex calculo differentialium patet esse

$$\int z\,du = zu - \int u\,dx\,;$$

$$\int z\,d^2u = z\,du - u\,dz + \int u\,d^2z\,;$$

$$\int z\,d^3u = z\,d^2u - dz\,du + u\,d^2z - \int u\,d^3z\,;$$

et sie de caeteris.

IV. Similiter ex eodem evidens est

$$\int u \int z = \int u \times \int z - \int z \int u\,;$$

unde si $\int u$*, posito* $x = a$ *(*u *enim et* z *sunt functiones* x *et* y*), fiat* $= H$*. et* $H - \int u = V$ *erit item posito* $x = a$

$$\int u \int z = \int Vz\,.$$

Problemata.

Invenire aequationem inter x *et* y*, ut pro dato ipsius* x *valore puto* $x = a$*, formula haec* $\int Z$ *maximum minimumve valorem obtineat.*

Resolutiones.

Sit 1^o

$$\delta Z = N\delta y + P\delta dy + Q\delta d^2y + R\delta d^3y + \dots$$

(x *enim in hac differentia ponitur constans §I). Igitur quoniam differentia duorum totorum aequalis est summae differentiarum omnium partium, adeoque* $\delta \int Z = \int \delta Z$*, erit*

$$\begin{aligned}\delta \int Z &= \int N\delta y + \int P\,\delta dy + \int Q\,\delta d^2y + \dots \\ &= \int N\delta y + \int P\,d\delta y + \int Q\,d^2\delta y + \dots \quad (\S II) \\ &= \int N\delta y + P\,\delta y - \int dP\,\delta y + Q\,d\delta y - dQ\,\delta y + \int d^2Q\delta y \dots \quad (\S III)\end{aligned}$$

unde

$$\delta\int Z = \int (N - dP + d^2Q - \dots)\delta y + (P - dQ + \dots)\delta y + (Q - \dots)d\delta y + \dots$$

seu, ponendo y*, qui respondet* $x = a$*, cum nonnulis sequentibus invariabilem, unde habentur puncta per quae curva invenienda transire debet, erit* $\delta y = 0$, $d\delta y = 0$, $d^2\delta y = 0$, $\dots$, *unde tandem*

$$\delta\int Z = \int (N - dP + d^2Q - d^3R\dots)\delta y;$$

adeoque ex methodo maximorum, et minimorum communi

$$N - dP + d^2Q - d^3R \cdots = 0\,,$$

dabit aequationem quaesitam.

Sit 2^o

$$\delta Z = L\,\delta\pi + N\delta y + P\,\delta d^2y + Q\,\delta d^2y + \dots\,; \quad \pi = \int (Z);$$

et

$$\delta(Z) = (N)\,\delta y + (P)\,\delta dy + (Q)\,\delta d^2y + \dots$$

unde

$$\delta\pi = \int (N)\,\delta y + \int (P)\,\delta dy + \dots$$

adeoque

$$\begin{aligned}\delta\int Z = &\int N\delta y + \int P\,d\delta y + \int Q\,d^2\delta y + \dots\\ &+ \int L\int (N)\,\delta y + \int L\int (P)\,d\delta y + \dots\end{aligned}$$

Sit $\int L$*, posito* $x = a, = H$ *et* $H - \int L = V$*; erit per §IV* $\delta\int Z$ *(posito* $x = a$*)*

$$= \int [N + (N)V]\,\delta y + \int [P + (P)V]\,d\delta y + \int [Q + (Q)V]\,d^2\delta y \dots\,,$$

unde, ut supra, erit pro maximo minimove,

$$N + (N)V - d[P + (P)V] + d^2[Q + (Q)V] - \cdots = 0.$$

Eodem modo operandum pro formula prop. IV, Cap. III; et in universum quaecumque et quotcunque integralia involvantur; hujus itaque analysin brevitatis gratia omitto; et progrediar ad formulam prop. V ejusdem Cap., quae mira facilitata etiam resolvitur.
Sit 3^o

$$\delta Z = L\delta\pi + N\delta y + P\delta dy + Q\delta d^2y + \dots\,,$$
$$\pi = \int (Z); \quad \delta(Z) = (L)\delta\pi + (N)\delta y + (P)\delta dy + \dots\,,$$

seu, eliminando (Z),

$$d\delta\pi = (L)\,\delta\pi + (N)\,\delta y + (P)\,d\delta y + \dots\,;$$

sit, brevitatis gratia,

$$(N)\,\delta y + (P)\,d\delta y + \cdots = V\,,$$

erit aequalis

$$d\delta\pi - (L)\,\delta\pi = V\,;$$

unde per regulas cognitas integrando habebimus

$$\delta\pi = e^{\int(L)} \int V e^{-\int(L)}$$

unde fiet

$$\delta \int Z = \int N\,\delta y + \int P\,d\delta y + \dots$$
$$+ \int e^{\int(L)} L \int e^{-\int(L)}(N)\,\delta y + \int e^{\int(L)} L \int e^{-\int(L)}(P)\delta y + \dots\,;$$

quapropter, si $\int e^{\int(L)}L$, *posito* $x = a$, *abeat in* H, *et* $H - \int e^{\int(L)}$ *in* V, *habebimus operando ut supra*

$$N + (N)e^{\int(L)}V - d[P + (P)e^{-\int(L)}V] + \cdots = 0\,,$$

seu, ponendo $e^{-\int(L)}V = S$, *erit*

$$N + (N)S - d[P + (P)S] + d^2[Q + (Q)S] - \cdots = 0\,;$$

similiter invenio etiam aequationem pro habendo maximo minimove, si pro $\delta\pi$ *loco superioris aequationis*

$$d\delta\pi = (L)\,\delta\pi + (N)\,\delta y + (P)\,d\delta y + \dots$$

habeatur haec alia

$$d^2\delta\pi = (k)\,d\delta\pi + (L)\,\delta\pi + (N)\,\delta y + (P)\,d\delta y + \dots$$

quod usu venire potest in quaerenda brachistochrona in hypothesi, quod corpus urgeatur perpetuo versus datum centrum virium mobile, aliis in casibus bene multis. Et generaliter haec methodus succedit, cujuscunque ordinis differentialia ipsius $\delta\pi$ *in ejus aequatione contineantur.*

Scholion.

Quod supra in problem. I ut et in caeteris aliis posuerim $\delta y, d\delta y \cdots = 0$, *idem ut, ibidem innui, ex eo factum est, quod ut data consideraverim plura curvae puncta; ita ut* $y, y', y'', \dots$ *pro constantibus fuerint habendi; verum si, exempli gratia, in casu primo unicum tantum detur punctum; adeoque una applicata, seu y tantum haberi debeat pro constante, hinc fiet quidem* $\delta y = 0$ *sed non* $d\delta y = 0$; *unde ponendum erit* $= 0$ *ejus coefficiens seu* $Q - \dots$, *ex quo habebitur determinatio unius constantis; hic enim, ut patet, in* $Q - \dots$ *ponitur* $x = a$; *si nullum vero punctum daretur praeter* $Q - \dots$ *etiam* $P - dQ + \dots$ *aequandum esset nihilo; unde duarum haberentur constantium determinationes. Atque hoc, in caeteris problematibus, idem dicendum. Caeterum aliquando evenit, ut non puncta, sed aliae determinationes habeantur, ut in quaerenda curva citissimi appulsus ad rectam positione datam; his, et similibus casibus, artificio quodam simplicissimo uno, eodemque calculo non solum speciem, sed et individuitatem curvae quesitae invenio; ut in hoc exemplo calculus mihi statim ostendit, eam esse illam cycloidem, quae datam rectam ad angulos rectos secet.*

Non omittendum quod calculum hunc ad superficies etiam maximi minimique proprietate quapiam praeditas inveniendas eadem facilitate et universalitate applicuerim, quod etsi jam a quopiam fuerit praestitum, intelligere vehementer gauderem.

. . . .

LAGRANGE A EULERO.

Giorno 12 agosto (1755).

O UOMO ECCELSO E CELEBERRIMO,

meditando assiduamente, nei giorni passati, sul tuo eccellentissimo libro sul metodo dei massimi e dei minimi applicato alle linee curve[1], mi è infine accaduto di incorrere, come già da tempo desideravo, in un'altra via, assai più breve, di risoluzione dei problemi di tal genere, la quale porta a dimostrare le tue formule senza alcuna costruzione geometrica; dunque, ritenendo che essa non ti sarebbe del tutto dispiaciuta per la sua semplicità, dato che tu stesso mi eri parso auspicare una simile soluzione a pag. 39, Cap. II dello stesso libro, dove dici: *Si desidera dunque un metodo libero dalla risoluzione geometrica e lineare, attraverso il quale risulti che, in tale ricerca del massimo e del minimo, al posto di* $P\,dp$*, è opportuno scrivere* $-p\,dP$[2]; me ne sono dunque assunto il compito, onde fartene partecipe, ritenendo che qualunque gesto temerario ed arrogante fosse stato da me commesso in tale iniziativa, sarebbe stato pienamente e facilmente perdonato da te, per la tua umanità. Per quanto, infatti, si sarebbe ben a ragione dovuto dubitare che io, ancora sconosciuto, potessi interpellare te, tanto celebre in vita, eccelso quasi in ogni genere di scienze, tuttavia il mio affetto grandissimo e del tutto singolare nei tuoi confronti, già da tempo concepito sulla base dello studio delle tue opere, fece sì che io non potessi in alcun modo lasciarmi sfuggire questa opportuna occasione di manifestartelo in qualche modo, occasione che assai intensamente desideravo. Dunque, o uomo nobilissimo, non tollerare con fastidio questa mia audacia, qualsiasi essa sia; essa infatti non deriva che dal mio ardentissimo desiderio di entrare nel novero dei tuoi più umili seguaci.

[1] "Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudens, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti", Losanna e Ginevra, 1744 (E.65).

[2] Quetsa frase si trova nel Cap. II alla fine del paragrafo 39 del "Methodus inveniendi" (pag.56 dell'edizione del 1744).

Nel frattempo, mentre devotamente mi affido alla tua grazia e alla tua benevolenza, ti prego umilmente di volermi fare il favore di rendermi partecipe di ciò che sinceramente pensi di questo mio esile lavoro; ciò infatti andrà certo ad aggiungersi alla somma di tutti i benefici che già ora riconosco di doverti. Saluti, e ossequi

dal devotissimo ed indefesso seguace della tua grandezza
LUDOVICO DE LA GRANGE TOURNIER.

Le tue lettere a me rivolte, perché mi vengano recapitate con maggiore facilità e rapidità, faresti meglio ad indirizzarle così: *A M. Durand, banchiere, da consegnare al Signor Louis de la Grange.*

Premesse.

I. Il differenziale dello stesso y, nella misura in cui qui si differenzia, permanendo invariato x, al fine di avere il valore massimo o minimo della formula data, lo indicherò tramite δ, allo scopo della distinzione delle altre differenze dello stesso y, che già rientrano in essa; così anche $\delta\, dy$ è la differenza dello stesso dy, mentre gli y crescono secondo la quantità dy; si può dire la stessa cosa, in generale, del valore $\delta F(y)$ [$F(y)$ è per me una qualsiasi funzione di y].

II. Dalla tua dissertazione sulle infinite curve dello stesso genere (inclusa negli *Atti dell'Accademia di Pietroburgo*, 1734)[3], fin dall'inizio facilmente si accolga che sia sempre

$$\delta dF(y) = d\delta F(y) \quad \text{e in generale} \quad \delta d^m F(y) = d^m \delta F(y)\,;$$

donde anche

$$\delta d^m y = d^m \delta y\,.$$

III. Dal calcolo dei differenziali risulta essere

$$\int z\, du = zu - \int u\, dx\,;$$

[3] "De infinitis curvis ejusdem generis: seu methodus inveniendi aequationes pro infinitis curvis ejusdem generis", Comm. Ac. Petrop. VIII, (1734-1735) 1740 (E.44).

$$\int z\,d^2u = z\,du - u\,dz + \int u\,d^2z\,;$$
$$\int z\,d^3u = z\,d^2u - dz\,du + u\,d^2z - \int u\,d^3z\,;$$
e così via di seguito.

IV Analogamente, dallo stesso calcolo risulta evidentemente

$$\int u \int z = \int u \times \int z - \int z \int u\,;$$

da cui $\int u$, posto $x = a$ (infatti u e z sono funzioni di x ed y), sia $= H$.
e $H - \int u = V$ sarà analogamente, posto $x = a$

$$\int u \int z = \int V z\,.$$

PROBLEMI.

Trovare l'equazione tra x e y, per cui dato il valore dello stesso x ad esempio $x = a$, questa formula $\int Z$ ottenga il valore massimo o minimo.

Risoluzioni.

Sia 1^o

$$\delta Z = N\delta y + P\delta dy + Q\delta d^2y + R\delta d^3y + \dots$$

(infatti in questa differenza x è posto costante §I). Dunque, poichè la differenza di due totali è uguale alla somma delle differenze di tutte le parti, e perciò $\delta \int Z = \int \delta Z$, sarà

$$\begin{aligned}
\delta \int Z &= \int N\delta y + \int P\,\delta dy + \int Q\,\delta d^2y + \dots \\
&= \int N\delta y + \int P\,d\delta y + \int Q\,d^2\delta y + \dots \quad (\text{§II}) \\
&= \int N\delta y + P\,\delta y - \int dP\,\delta y + Q\,d\delta y - dQ\,\delta y + \int d^2Q\delta y \dots \quad (\text{§III})
\end{aligned}$$

da cui

$$\delta \int Z = \int (N - dP + d^2Q - \dots)\delta y + (P - dQ + \dots)\delta y + (Q - \dots)d\delta y + \dots$$

ossia, ponendo y, che corrisponde a $x = a$, invariabile insieme ad alcuni conseguenti, da cui si hanno altrettanti punti per i quali deve passare la curva che deve essere trovata, sarà $\delta y = 0$, $d\delta y = 0$, $d^2\delta y = 0$, ..., per cui

$$\delta \int Z = \int (N - dP + d^2Q - d^3R \dots)\delta y;$$

e perciò dal metodo comune dei massimi e dei minimi

$$N - dP + d^2Q - d^3R \cdots = 0\,,$$

darà l'equazione richiesta.

Sia 2^o

$$\delta Z = L\,\delta\pi + N\delta y + P\,\delta d^2y + Q\,\delta d^2 y + \dots\,; \quad \pi = \int (Z);$$

e

$$\delta(Z) = (N)\,\delta y + (P)\,\delta dy + (Q)\,\delta d^2y + \dots$$

da cui

$$\delta\pi = \int (N)\,\delta y + \int (P)\,\delta dy + \dots$$

e perciò

$$\begin{aligned}\delta \int Z = &\int N\delta y + \int P\,d\delta y + \int Q\,d^2\delta y + \dots\\ &+ \int L \int (N)\,\delta y + \int L \int (P)\,d\delta y + \dots\end{aligned}$$

Sia $\int L$, posto $x = a, = H$ e $H - \int L = V$; sarà per §IV $\delta \int Z$ (posto $x = a$)

$$= \int [N + (N)V]\,\delta y + \int [P + (P)V]\,d\delta y + \int [Q + (Q)V]\,d^2\delta y \dots\,,$$

da cui, come sopra, sarà per il massimo o per il minimo,

$$N + (N)V - d[P + (P)V] + d^2[Q + (Q)V] - \cdots = 0.$$

Allo stesso modo si deve operare per la formula della proposizione IV, Cap. III; e, in generale, di qualsiasi natura siano, gli integrali che vengono coinvolti; ometto dunque, per brevità, l'analisi di questa formula; e procederò alla formula della proposizione V dello stesso capitolo, che si risolve anch'essa con straordinaria facilità.

Sia 3^o

$$\delta Z = L\delta\pi + N\delta y + P\delta dy + Q\delta d^2y + \dots\,,$$
$$\pi = \int (Z); \quad \delta(Z) = (L)\delta\pi + (N)\delta y + (P)\delta dy + \dots\,,$$

ossia, eliminando (Z),

$$d\delta\pi = (L)\,\delta\pi + (N)\,\delta y + (P)\,d\delta y + \dots\,;$$

sia, per brevità,

$$(N)\,\delta y + (P)\,d\delta y + \dots = V\,,$$

sarà uguale a

$$d\delta\pi - (L)\,\delta\pi = V\,;$$

donde, integrando per mezzo delle regole note, avremo

$$\delta\pi = e^{\int (L)} \int V e^{-\int (L)}$$

da cui risulterà

$$\delta \int Z = \int N\,\delta y + \int P\,d\delta y + \dots$$
$$+ \int e^{\int (L)} L \int e^{-\int (L)} (N)\,\delta y + \int e^{\int (L)} L \int e^{-\int (L)} (P)\delta y + \dots\,;$$

perciò, se $\int e^{\int (L)} L$, posto $x = a$, si trasformi in H, e $H - \int e^{\int (L)}$ in V, avremo, operando come sopra,

$$N + (N)e^{\int (L)} V - d[P + (P)e^{-\int (L)} V] + \dots = 0\,,$$

ossia, ponendo $e^{-\int (L)} V = S$, sarà

$$N + (N)S - d[P + (P)S] + d^2[Q + (Q)S] - \dots = 0\,;$$

analogamente, trovo anche l'equazione per avere il massimo o il minimo, qualora per $\delta\pi$ al posto dell'equazione precedente

$$d\delta\pi = (L)\,\delta\pi + (N)\,\delta y + (P)\,d\delta y + \dots$$

si abbia quest'altra:

$$d^2\delta\pi = (k)\, d\delta\pi + (L)\, \delta\pi + (N)\, \delta y + (P)\, d\delta y + \dots$$

che può tornare utile nel ricercare la brachistocrona, nell'ipotesi che un corpo venga sospinto perpetuamente verso un dato centro mutevole di forze, e in molti altri casi. E in generale questo metodo funziona, di qualsiasi ordine siano i differenziali dello stesso $\delta\pi$ contenuti nella sua equazione.

Scolio.

Ciò che sopra, nel problema I, come in altri, ho presupposto, cioè δy, $d\delta y \cdots = 0$, come lì ho accennato, è derivato dal fatto che, a questo proposito ho considerato diversi punti dati della curva; in modo tale che $y, y', y'', \dots$ dovessero essere assunti come costanti; ma se, ad esempio, nel primo caso si desse solo un unico punto; e perciò una sola applicata, o piuttosto che soltanto y debba essere considerato come costante, da ciò deriverà certamente $\delta y = 0$, ma non $d\delta y = 0$; donde dovrà essere posto come $= 0$ il suo coefficiente $Q - \dots$, da cui si avrà la determinazione di una sola costante; qui infatti, come è evidente, in $Q - \dots$ si pone $x = a$; ma se non si desse nessun punto oltre a $Q - \dots$ anche $P - dQ + \dots$ dovrebbe essere equiparato a zero; donde si avrebbero le determinazioni di due costanti. E lo stesso si deve dire negli altri problemi. Ma talora accade che si abbiano non i punti, ma altri vincoli, come nel ricercare la curva dell'avvicinamento più rapido alla retta data in una certa posizione; in questi, e in altri simili casi, con un solo stesso semplicissimo artificio, e con lo stesso calcolo, trovo non solo la specie, ma anche l'individuazione della curva ricercata; come in questo esempio il calcolo subito mi mostra che essa è quella cicloide che interseca la retta data ad angoli retti.

Non bisogna trascurare che ho applicato questo calcolo anche all'individuazione di superfici dotate di una qualche proprietà del massimo e del minimo, con la stessa facilità ed universalità. Se per caso la stessa applicazione è già stata operata da qualcuno, desidererei davvero saperlo.

Commento

Negli anni seguenti alla scrittura della sua prima lettera ad Eulero, Lagrange studiò approfonditamente il suo trattato, il "Methodus inveniendi". In quest'opera Eulero presenta una collezione di metodi per la risoluzione di vari problemi tipici del calcolo delle variazioni. Il 12 agosto del 1755, Lagrange scrisse nuovamente ad Eulero, dicendo:

> Meditando assiduamente, nei giorni passati, sul tuo eccellentissimo libro sul metodo dei massimi e dei minimi applicato alle linee curve, mi è infine accaduto di incorrere, come già da tempo desideravo, in un'altra via, assai più breve, di risoluzione dei problemi di tal genere, la quale porta a dimostrare le tue formule senza alcuna costruzione geometrica; [...] .

In questa lettera il diciannovenne espone all'illustre matematico quel metodo generale e puramente analitico, per la risoluzione dei problemi contenuti nel suo trattato, che egli aveva vanamente e a lungo cercato. Infatti le tecniche presentate nel "Methodus inveniendi" richiedono complicati ragionamenti e costruzioni geometriche. Inoltre all'epoca si stava spostando il punto di partenza dalle curve alle funzioni[4], il che portava in direzione di uno svincolamento del calcolo dalla geometria; questo motiva ulteriormente l'insistere di Eulero e Lagrange nel rifiuto di ogni ricorso alle figure.

[4]L'idea di funzione era simile a quella attuale, anche se spesso cambiava a seconda delle esigenze. Ricordiamo infatti che all'epoca non si ponevano il problema dei fondamenti, ossia di definire con precisione gli oggetti matematici.

Nel "Methodus inveniendi" Eulero aveva esplicitamente auspicato un metodo diverso, scrivendo:

> Si desidera dunque un metodo libero dalla risoluzione geometrica e lineare, attraverso il quale risulti che, in tale ricerca del massimo e del minimo, al posto di $P\,dp$, è opportuno scrivere $-p\,dP$.[5]

Lagrange ammette nella sua lettera, che proprio questa frase, fu fonte di ispirazione per le sue ricerche. Egli colse la sfida lanciata da Eulero, e ne risultò vincitore.

La lettera riporta una appendice matematica di sole tre pagine. In essa Lagrange presenta il suo algoritmo e, al fine di illustrarne le potenzialità, mostra come possa essere applicato ai tre esempi centrali del "Methodus inveniendi". In questo modo, egli fornì inoltre un metodo generale ed analitico di derivazione di quella che venne successivamente detta equazione di Eulero-Lagrange.

Per capire quanto profondamente l'opera di Eulero abbia influenzato Lagrange, e per cogliere appieno il carattere innovativo e rivoluzionario del suo metodo, è importante analizzare in comparazione il lavoro dei due matematici. A tale scopo si rimanda l'attenzione del lettore ai temi affrontati nel Cap.2, nel quale vengono esposti alcuni contenuti del "Methodus inveniendi" di Eulero. Procediamo quindi all'illustrazione dei contenuti matematici dell'appendice; alla luce di ciò vengono poi brevemente confrontate le procedure dei due matematici, per meglio comprenderne analogie e differenze.

4.1 Il "metodo delle variazioni" di Lagrange

L'appendice matematica della suddetta lettera, si apre con una breve descrizione del novo "metodo delle variazioni" di Lagrange: essa si presenta sottoforma di quattro premesse, seguite da tre importanti esempi.

[5] Quando dice "al posto di $P\,dp$, è opportuno scrivere $-p\,dP$", Eulero si riferisce alla sua regola mnemonica per ottenere l'euazione risolutiva, che è già stata discussa a pag. 23 del Cap.2.

Premesse

I. Il metodo di Lagrange si basa sull'utilizzo di una nuova forma differenziale, che viene chiamata variazione. Per distinguere il suo nuovo processo, che può essere visto come un operatore, dal differenziale usuale, Lagrange introduce il nuovo simbolo δ da usare al posto di d. In pratica egli considera la variabile x costante rispetto alla variazione δ, ossia $\delta x = 0$, mentre δy denota appunto la variazione, l'incremento che interessa la y quando si affronta un problema di ricerca del massimo o del minimo. Lagrange scrive:

> I. Il differenziale dello stesso y, nella misura in cui qui si differenzia, permanendo invariato x, al fine di avere il valore massimo o minimo della formula data, lo indicherò tramite δ, allo scopo della distinzione delle altre differenze dello stesso y, che già rientrano in essa;[...]

Pertanto la variazione δy si presenta diversa per natura, dal differenziale dy, poichè nell'incrementare la variabile y, la x viene mantenuta fissa, così l'incremento δy risulta indipendente dai valori della x. Invece nello scenario usuale dei differenziali, quando la quantità y viene incrementata di dy, a sua volta la variabile x subisce un incremento dx. L'idea rivoluzionaria di Lagrange consiste proprio nell'aver adottato questo nuovo punto di vista, considerando due diversi tipi di cambiamenti δy e dy, che possono interessare la y quando viene affrontato questo tipo di problemi. Questa distinzione tra gli incrementi, richiama subito alla memoria il duplice ruolo attribuito da Eulero al simbolo "d" nelle procedure risolutive del "Methodus inveniendi". L'incremento di Lagrange δy, descritto come indipendente da x, non può che risultare famigliare con l'incremento della sola ordinata y', o della sola y^{v} già adottato da Eulero.

II. Lagrange fornisce la regola di inversione tra la differenziazione "d" e la variazione "δ". Sia $F(y)$ una qualsiasi funzione di y, Lagrange afferma che:

$$d\delta F(y) = \delta dF(y) \tag{4.1}$$

e più in generale $d^m\delta F(y) = \delta d^m F(y)$, e anche $\delta d^m y = d^m \delta y$. La quantità $\delta F(y)$ denota l'incremento nella $F(y)$ derivato dall'aver incrementato y di δy. L'unica giustificazione fornita da Lagrange per questo risultato, è il richiamo alla memoria di Eulero "De infinitis curvis ejusdem generis..."del 1734, riferendosi probabilmente al seguente teorema sull'inversione dell'ordine di differenziazione su una funzione di due variabili:

> Se la quantità A composta in qualche modo da due variabili t ed u, viene differenziata mantenendo costante t, e questo differenziale, viene nuovamente differenziato mantenendo costante u e variando t, lo stesso risulta se nell'ordine inverso, A viene prima differenziata ponendo u costante e questo differenziale viene nuovamente differenziato ponendo t costante e variando u.[6]

Utilizzando un notazione moderna, questo teorema afferma che, data $A(t,u)$ vale:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial u\,\partial t} = \frac{\partial^2 A}{\partial t\,\partial u}\,.$$

Possiamo ipotizzare che Lagrange avesse pensato ad una dimostrazione per la (4.1) analoga alla dimostrazione fornita da Eulero per il teorema citato[7], ma purtroppo Lagrange non ha fornito ulteriori dettagli al

[6] "6. [...] Quantitas A ex duabus variabilibus t e u utcunque composita, si differentietur posito t constante, hocque differentiale denuo differentietur positu u constans et t variabili, idem resultat ac si inverso ordine A primo differentietur positu u constante hocque differentiale denuo differentietur posito t constante et u variabili." da "De infinitis curvis ejusdem generis..." pag.177 (dell'edizione del 1740).

[7] Eulero per dimostrarlo considera tre quantità:
$B = A(t+dt,u)$, A si muove in B se $t+dt$ è messo al posto di t;
$C = A(t,u+du)$, A si muove in C se $u+du$ è messo al posto di u;
$D = A(t+dt,u+du)$, A si muove in D se $t+dt$ e $u+du$ sono messi al posto di t ed u.
Differenziando A mantenendo t costante si ottiene $C-A$, poichè A si muove in C se $u+du$

riguardo, e così la (4.1) resta un assunto ingiustificato nella sua analisi. La prima dimostrazione della (4.1) venne fornita da Eulero nel suo “Elementa calculi variationum”[8] pubblicato nel 1766.

III. Lagrange scrive i seguenti risultati ottenuti mediante la regola usuale di integrazione per parti:

$$\begin{aligned}
&\int z\,du = zu - \int u\,dx\,;\\
&\int z\,d^2u = z\,du - \int dz\,du = z\,du - u\,dz + \int u\,d^2z\,;\\
&\int z\,d^3u = z\,d^2u - \int dz\,d^2u = z\,d^2u - dz\,du + \int d^2z\,du = \\
&\qquad = z\,d^2u - dz\,du + u\,d^2z - \int u\,d^3z\,;
\end{aligned}$$

e così via di seguito.

IV. Infine presenta l'ulteriore regola di integrazione:

$$\int u \int z = \int u \times \int z - \int z \int u\,;$$

da cui $\int u$, posto $x = a$ (infatti u e z sono funzioni di x ed y), sia $= H$. e $H - \int u = V$ sarà analogamente, posto $x = a$

$$\int u \int z = \int Vz\,.$$

ossia, in termini moderni:

$$\int_0^a u(\xi)\,d\xi \int_0^\xi z(x)\,dx = \int_0^a u(x)\,dx \cdot \int_0^a z(x)\,dx - \int_0^a z(\xi)\,d\xi \int_0^\xi u(x)\,dx\,. \tag{4.2}$$

è messo al posto di u, e differenziando $C-A$ mantenendo costante u si ha $(D-B)-(C-A)$, poichè mettendo $t+dt$ al posto di t, C ed A, vanno rispettivamente in D e B. Analogo nell'ordine inverso: differenziando A mantenendo costante u si ottiene $B-A$, il quale differenziato mantenendo costante t dà $(D-C)-(B-A)$. In entrambi i casi si ottiene la stessa quantità.

[8] “Elementa calculi variationum”, Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 10, 1766 (E.296), pp. 51-93.

pone $H = \int_0^a u\,dx$ e $V = H - \int_0^x u\,dx$, e riscrive la (4.2) come:

$$\int_0^a u\,d\xi \int_0^\xi z\,dx = \int_0^a V z\,dx\,. \tag{4.3}$$

In seguito a tali premesse, Lagrange mostra le pontenzialità del suo metodo applicandolo a tre problemi presi dal "Methodus inveniendi" di Eulero, gli stessi che sono stati dettagliatamente descritti nel Cap.2.

PROBLEMI.

Trovare la relazione $y = y(x)$ tra x ed y, che rende massimo o minimo l'integrale $\int_0^a Z$.

Risoluzione.

I. Il primo caso considerato da Lagrange, è quello in cui $Z(x, y, dy, d^2y, \dots)$, che corrisponde alla Prop. V del Cap. II del "Methodus inveniendi". Egli considera il differenziale dell'integranda Z alla maniera di Eulero, $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,d^2y + Q\,d^3y + R\,d^4y + \dots$, e scrive invece la corrispondente variazione:

$$\delta Z = N\delta y + P\delta dy + Q\delta d^2 y + R\delta d^3 y + \dots\,;$$

ricordando appunto che dalla premessa I, la x viene considerata costante, quindi $\delta x = 0$. Egli poi afferma che $\delta \int Z = \int \delta Z$, pertanto:

$$\delta \int Z = \int N\delta y + \int P\,\delta dy + \int Q\,\delta d^2 y + \dots\,,$$

dalla (4.1) della premessa II si ha $\delta dy = d\delta y\,, \delta d^2 y = d^2\delta y$, $\dots$, così

$$\delta \int Z = \int N\delta y + \int P\,d\delta y + \int Q\,d^2\delta y + \dots \tag{4.4}$$

$$= \int N\delta y + P\,\delta y - \int dP\,\delta y + Q\,d\delta y - dQ\,\delta y + \int d^2 Q \delta y \dots. \tag{4.5}$$

Nel passaggio dalla (4.4) alla (4.5), Lagrange utilizza le regole di integrazioni per parti mostrate nella premessa III. Raccogliendo nella (4.5) ottiene:

$$\begin{aligned}\delta \int Z = \int &(N - dP + d^2Q - d^3R \dots)\delta y + \\ &+ (P - dQ + d^2R - \dots)\delta y + \\ &+ (Q - dR + \dots)d\delta y + \\ &+ (R - \dots)d^2\delta y + \\ &+ \dots \end{aligned} \tag{4.6}$$

ossia

$$\delta \int_0^a Z = \int_0^a (N - dP + d^2Q - \dots)\delta y + \Big[(P - dQ + \dots)\delta y + (Q - \dots)d\delta y + \dots\Big]_0^a . \tag{4.7}$$

A questo punto Lagrange suppone che sia $\delta y = 0$, $d\delta y = 0$, $d^2\delta y = 0$, $\dots$, quando $x = a$, e tacitamente suppone che valga lo stesso anche nell'estremo iniziale dell'intervallo di integrazione $x = 0$, così

$$\Big[(P - dQ + \dots)\delta y + (Q - \dots)d\delta y + \dots\Big]_0^a = 0\,,$$

e la (4.6) diventa

$$\delta \int Z = \int (N - dP + d^2Q - d^3R \dots)\delta y;$$

Quindi Lagrange afferma che come conseguenza "del metodo comune dei massimi e dei minimi" si ha:

$$N - dP + d^2Q - d^3R \cdots = 0\,,$$

che fornisce l'equazione richiesta dal problema, la stessa già ottenuta in precedenza da Eulero, precisamente la (2.12).

II. Lagrange affronta ora il caso corrispondente alla Prop. III del Cap. III del "Methodus inveniendi". Egli considera Z una funzione non solo di x, y, dy, $d^2y\,,\ldots$, ma anche della variabile π, connessa con le altre dalla relazione

$$\pi = \int_0^x (Z)\,, \text{ dove}(Z) \text{ è una funzione di } x,\, y,\, dy,\, d^2y\,,\ldots\,.$$

Egli scrive:

$$\delta Z = L\,\delta\pi + N\delta y + P\,\delta dy + Q\,\delta d^2y + \ldots\,,$$

$$\delta(Z) = (N)\,\delta y + (P)\,\delta dy + (Q)\,\delta d^2y + \ldots\,;$$

da cui ricordando sempre che $\delta\int(Z) = \int\delta(Z)$, e commutando δ e d si ha:

$$\delta\pi = \delta\int(Z) = \int(N)\,\delta y + \int(P)\,d\delta y + \ldots \tag{4.8}$$

e perciò sostituendo la (4.8):

$$\begin{aligned}\delta\int_0^a Z = \int_0^a L\,\delta\pi + \int_0^a N\delta y + \int_0^a P\,d\delta y + \int_0^a Q\,d^2\delta y + \cdots =\\ = \int_0^a N\delta y + \int_0^a P\,d\delta y + \int_0^a Q\,d^2\delta y + \ldots\\ + \int_0^a L\int_0^x (N)\,\delta y + \int_0^a L\int_0^x (P)\,d\delta y + \ldots\,.\end{aligned}$$

Quindi Lagrange pone $H = \int_0^a L$ e $V = H - \int_0^x L$, e sfruttando la (4.3) della premessa IV, ottiene:

$$\begin{aligned}\delta\int_0^a Z = \int_0^a N\delta y + \int_0^a P\,d\delta y + \int_0^a Q\,d^2\delta y + \ldots\\ + \int_0^a (N)V\,\delta y + \int_0^a (P)V\,d\delta y + \ldots\,.\end{aligned}$$

$$\delta\int Z = \int[N+(N)V]\,\delta y + \int[P+(P)V]\,d\delta y + \int[Q+(Q)V]\,d^2\delta y\ldots\,, \tag{4.9}$$

Ora, come nel caso precedente, utilizzando le regole di integrazione per parti della premessa III, si ottiene:

$$\begin{aligned}\delta\int Z = \int[N+(N)V]\,\delta y + [P+(P)V]\,\delta y - \int d[P+(P)V]\,\delta y +\\ + [Q+(Q)V]\,d\delta y - d[Q+(Q)V]\,\delta y + \int[Q+(Q)V]\,d^2\delta y + \ldots\,,\end{aligned}$$

raccogliendo si ha:

$$\begin{aligned}\delta \int Z = \int ([N + (N)V] - d[P + (P)V] + d^2[Q + (Q)V] - \dots)\delta y + \\ + ([P + (P)V] - d[Q + (Q)V] + \dots)\delta y + \\ + ([Q + (Q)V] - \dots)d\delta y + \\ + \dots \end{aligned} \tag{4.10}$$

supponendo come in precedenza che sia $\delta y = 0$, $d\delta y = 0$, $d^2\delta y = 0$, $\dots$, quando $x = a$ e $x = 0$, allora nel secondo membro della (4.10) si annullano tutti gli addenti tranne il primo. Dunque Lagrange afferma che "per il massimo o per il minimo" sarà;

$$N + (N)V - d[P + (P)V] + d^2[Q + (Q)V] - \dots = 0.$$

Anche in questo caso Lagrange ottiene la stessa equazione risolutiva ricavata da Eulero nel "Methodus inveniendi", precisamente la (2.22).

III. Infine Lagrange afferma che si può procedere in modo analogo per risolvere il caso della Prop IV del Cap. III del "Methodus inveniendi"; ma per brevità omette tale analisi e passa invece ad affrontare il caso trattato nella Prop. V dello stesso capitolo. Questo è il caso in cui non solo Z, ma anche (Z) dipende dalla variabile π, si ha:

$$\begin{aligned}&Z = Z(\pi, x, y, dy, d^2y, \dots), \qquad (Z) = (Z)(\pi, x, y, dy, d^2y, \dots), \\ &\pi = \int_0^x (Z); \\ &\delta Z = L\delta\pi + N\delta y + P\delta dy + Q\delta d^2 y + \dots, \\ &\delta(Z) = (L)\delta\pi + (N)\delta y + (P)\delta dy + \dots,\end{aligned}$$

da cui ricordando che $\delta \int (Z) = \int \delta(Z)$, e commutando δ e d avremo:

$$\delta\pi = \delta \int (Z) = \int (L)\, \delta\pi + \int (N)\, \delta y + \int (P)\, d\delta y + \dots,$$

così differenziando, ottiene la seguente equazione differenziale:

$$d\delta\pi = (L)\, \delta\pi + (N)\, \delta y + (P)\, \delta dy + \dots. \tag{4.11}$$

Lagrange pone per brevità $(N)\,\delta y + (P)\,\delta dy + \cdots = V$, così riscrve la (4.11) come:

$$d\delta\pi - (L)\,\delta\pi = V\,;$$

quindi, risolvendo tale equazione differenziale, avremo:

$$\delta\pi = e^{\int(L)} \int V e^{-\int(L)} .^{9} \tag{4.12}$$

Sostituendo la (4.12) avremo:

$$\begin{aligned}\delta \int Z &= \int L\,\delta\pi + \int N\,\delta y + \int P\,d\delta y + \cdots = \\ &= \int L\,e^{\int(L)} \int V e^{-\int(L)} + \int N\,\delta y + \int P\,d\delta y + \ldots\,,\end{aligned}$$

sostituendo nuovamente $V = (N)\,\delta y + (P)\,\delta dy + \ldots$, si ha:

$$\begin{aligned}\delta \int Z = &\int N\,\delta y + \int P\,d\delta y + \ldots \\ &+ \int e^{\int(L)} L \int e^{-\int(L)} (N)\,\delta y + \int e^{\int(L)} L \int e^{-\int(L)} (P)\delta y + \ldots\,.\end{aligned} \tag{4.13}$$

Lagrange pone $H = \int_0^a e^{\int(L)} L$ e $V = H - \int_0^x e^{\int(L)} L$; e sfruttando la (4.3) della premessa IV, ottiene:

$$\begin{aligned}\delta \int Z = &\int N\delta y + \int P\,d\delta y + \ldots \\ &+ \int (N) e^{-\int(L)} V\,\delta y + \int (P) e^{-\int(L)} V\,d\delta y + \ldots\,.\end{aligned}$$

[9] La soluzione delle equazioni differenziali ordinarie era stata trovata non appena si era riconosciuta l'esistenza di una relazione inversa tra la differenziazione e l'integrazione. Già negli anni Novanta del Seicento, erano stati individuati metodi adatti a risolvere particolari classi di equazioni differenziali: sostituzioni e separazione delle variabili condussero alla soluzione delle equazioni omogenee, delle equazioni lineari del primo ordine e delle equazioni di Bernoulli, quelle del tipo $y' + P(x)y = Q(x)y^n$. Una soluzione dell'equazione differenziale lineare non omogenea del primo ordine

$$y' = a(x)y + b(x) \quad \text{è} \quad y(x) = e^{\int a(t)\,dt} \left(\int b(t) e^{\int a(s)\,ds} dt \right) .$$

$$\delta \int_0^a Z = \int_0^a [N + (N)e^{-\int(L)}V]\,\delta y + \int_0^a [P + (P)e^{-\int(L)}V]\,d\delta y + \dots\,,$$

Giunti a questo punto ritroviamo una situazione analoga alla precedente (4.9), si eseguono esattamente gli stessi calcoli, l'unica differenza stà nell'avere $e^{-\int(L)}V$ al posto del semplice V, così si giunge alla seguente equazione:

$$N + (N)e^{-\int(L)}V - d[P + (P)e^{-\int(L)}V] + d^2[Q + (Q)e^{-\int(L)}V] - \dots = 0. \tag{4.14}$$

Infine Lagrange pone $e^{-\int(L)}V = S$ e riscrive la (4.14) come segue:

$$N + (N)S - d[P + (P)S] + d^2[Q + (Q)S] - \dots = 0.$$

Pertanto ottiene la stessa equazione risolutiva ricavata da Eulero nel “Methodus inveniendi”, precisamente la (2.23).

Notiamo ora, che in tutti e tre gli esempi Lagrange usa implicitamente il fatto che “l'annullarsi dell'integrale equivale all'annullarsi della funzione integranda”. Per esempio nel caso I, egli da

$$\delta \int Z = \int (N - dP + d^2Q - d^3R \dots)\delta y\,,$$

ne deduce, come conseguenza del “metodo comune dei massimi e dei minimi”

$$N - dP + d^2Q - d^3R \dots = 0\,. \tag{4.15}$$

Ma come gli farà notare Eulero nella sua lettera di risposta, il “metodo comune dei massimi e dei minimi” permette di concludere solamente

$$\delta \int Z = \int (N - dP + d^2Q - d^3R \dots)\delta y = 0\,;$$

da cui, per poter quindi dedurre la (4.15) si deve utilizzare il risultato citato sopra. Inizialmente infatti, tale risultato, che va sotto il nome di Lemma fondamentale del Calcolo delle Variazioni, era dato per scontato, e solo in seguito ne venne fornita la dimostrazione.

Scolio.

In conclusione a questa appendice, Lagrange presenta una breve discussione sulla condizione $\delta y,\, d\delta y, \dots = 0$ assunta in tutti gli esempi considerati. La condizione $\delta y,\, d\delta y, \dots = 0$ viene supposta valida in $x = 0$, $x = a$, pertanto in pratica Lagrange stà supponendo che gli estremi della curva ricercata siano fissati; al contrario senza questo assunto si è nel caso di un problema con estremi mobili. Nel caso di un problema con estremi mobili, nella (4.7) non si avrà

$$\Big[(P - dQ + \dots)\delta y + (Q - \dots)d\delta y + \dots\Big]_0^a = 0\,,$$

come conseguenza di $\delta y,\, d\delta y,\, d^2\delta y, \dots = 0$, ma sarà necessario imporre una ulteriore condizione per annullare questi addendi, ed ottenere così la curva estremale. Di conseguenza, si devono uguagliare a zero tutti i coefficienti di $\delta y,\, d\delta y,\, d^2\delta y, \dots$, ossia

$$\Big[P - dQ + d^2R - \dots\Big]_0^a = 0, \quad \Big[Q - dR + \dots\Big]_0^a = 0, \quad \Big[R - \dots\Big]_0^a = 0, \quad \dots$$

Questo conduce alle condizioni per il problema con estremi mobili, oggi note come condizioni di trasversalità. Ad ogni modo, quando Lagrange scrisse questa lettera, non aveva ancora ben capito cosa fare con esse. Testualmente Lagrange dice che assumere $\delta y,\, d\delta y, \dots = 0$ quando $x = 0$ e $x = a$, implica l'aver considerato costanti le quantità $y, y', y'', \dots$, che corrispondono ai valori assunti rispettivamente dalle variabili $y,\, dy,\, d^2y, \dots$ in $x = a$; una situazione analoga si ha anche per $x = 0$, questo però, non viene palesato esplicitamente da Lagrange. E quindi vengono considerati fissi i valori assunti dalle variabili $y,\, dy,\, d^2y, \dots$ negli estremi dell'intervallo considerato per la x, ossia $[0, a]$, imponendovi così il passaggio della curva cercata. Lagrange quindi osserva che, per esempio nel caso I, se si considera costante un unica quantità , ovvero la sola ordinata y, allora certamente si avrà $\delta y = 0$, ma non $d\delta y,\, d^2\delta y, \dots = 0$. Di conseguenza, si devono uguagliare a zero i coefficienti di $d\delta y,\, d^2\delta y, \dots$, ossia

$$\Big[Q - dR + \dots\Big]_0^a = 0, \quad \Big[R - \dots\Big]_0^a = 0, \quad \dots$$

E nel caso in cui non si abbia nessuna quantità costante, allora si deve annullare anche il coefficiente di δy, ossia

$$\Big[P - dQ + d^2R\ldots\Big]_0^a = 0\,.$$

Si osserva infine, che i punti conseguenti $y, y', y'', \ldots$, come li chiama Lagrange, sono analoghi ai conseguenti di cui parla Eulero nel "Methodus inveniendi". Questo potrebbe risultare poco evidente in quanto gli $y, y', y'', \ldots$ di Lagrange sono i valori assunti dalle variabili nell'unica ascissa $x = a$, mentre i conseguenti di Eulero sono relativi ad ascisse che si trovavano ciascuna a distanza dx dalla precedente. Ma le due situazioni risultano perfettamente concordanti quando si esegue il passaggio dal finito agli infinitesimi, passaggio che veniva eseguito da Eulero in maniera spontanea e naturale. Infatti in questo modo i conseguenti di Eulero si "comprimono" tutti nello stesso punto di ascissa x.

Infine Lagrange conclude la lettera facendo notare l'applicabilità del suo metodo ad una classe più generale di problemi, ovvero all'analisi delle superfici che godono di certe proprietà estremali.

4.2 Confronto dei metodi risolutivi di Eulero e Lagrange

Dunque ora che sono stati esposti i tre esempi mostrati da Lagrange, possiamo osservare il suo algoritmo risolutivo da una prospettiva più ampia e generale, al fine di confrontarlo con il procedimento mostrato da Eulero nel "Methodus inveniendi". Lagrange ricava la soluzione a questi problemi con facilità ed in modo del tutto generale grazie all'utilizzo del nuovo formalismo da lui introdotto. Come già sottolineato in precedenza, non si può fare a meno di notare l'analogia della nuova variazione "δ" con uno dei due ruoli attribuito al simbolo "d" da Eulero. Pertanto l'intuizione che riguarda l'utilizzo di questo nuovo simbolo "δ", nasce molto probabilmente in Lagrange dall'attento studio dell'opera di Eulero. Sottolineiamo però il fatto che mentro il differenziale "d" agiva sulle curve, in particolare sui singoli punti delle curve, la variazione "variazione" è un operatore che agisce sulle funzioni. Lagrange ha sperimentato con il "δ" trattandolo esclusivamente in maniera algebrica e formale; in questo modo ha scoperto il suo algoritmo risolutivo. Semplicemente applicando le comuni regole di integrazione per parti all' integrale $\int_0^a \delta Z$, egli fu in grado di derivare con facilità i risultati che Eulero aveva già ottenuto con calcoli notevolmente più complessi. Dal canto suo invece Eulero interpretava l'integrazione geometricamente, come la somma di infinite quantità infinitesimali; così il suo metodo si basava sull'approssimazione dell'integrale $\int_0^a Z\,dx$ con la (2.2)

$$\int_0^x Z\,dx + Z\,dx + Z'\,dx + Z''\,dx + Z'''\,dx + \dots\,,$$

e sulla valutazione ed imposizione a zero, dei cambiamenti avvenuti in esso a seguito di un incremento del tipo nv su una particolare ordinata. Così, grazie al nuovo formalismo, Lagrange libera il procedimento da variazioni quali nv, ed elimina il problema di scegliere quali e quante ordinate debbano essere alterate (Eulero incrementava y', se $Z = Z(x, y, p)$, invece y^{v} se $Z = Z(x, y, p, q, r, s, t)$, pertanto sceglieva l'ordinata da incrementare a seconda del numero delle variabili).

Infine osserviamo che mentre nel "Methodus inveniendi" Z è una funzione di x, y, $p = \dfrac{dy}{dx}$, $q = \dfrac{dp}{dx}$, $\dots$, nella lettera di Lagrange Z è una funzione di x, y, dy, d^2y, $\dots$. Questa scelta si riflette anche sui risultati, che ad una prima occhiata possono apparire diversi.

Proposizione V Cap. II

Formula risolutiva fornita da Eulero:

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \dots = 0\,.$$

Formula risolutiva fornita da Lagrange:

$$N - dP + d^2Q - d^3R \cdots = 0\,.$$

Proposizione III Cap. III

Formula risolutiva fornita da Eulero:

$$\left([N](H-\textstyle\int L\,dx)-\dfrac{d[P]\left(H-\int L\,dx\right)}{dx}+\dfrac{dd[Q]\left(H-\int L\,dx\right)}{dx^2}-\dots\right)+$$

$$+\left(N-\frac{dP}{dx}+\frac{ddQ}{dx^2}-\dots\right)=0\,,$$

dove $H=\int_0^a L\,dx$.
Formula risolutiva fornita da Lagrange:

$$N+(N)V-d[P+(P)V]+d^2[Q+(Q)V]-\dots=0\,,$$

dove $V=H-\int_0^x L$, e $H=\int_0^a L\,.$

Proposizione V Cap. III

Formula risolutiva fornita da Eulero:

$$N+[N]V-\frac{d(P+[P]V)}{dx}+\frac{dd(Q+[Q]V)}{dx^2}-\dots=0\,,$$

dove $V=e^{-\int[L]\,dx}\left(H-\int e^{\int[L]\,dx}L\,dx\right)$ e $H=\int_0^a e^{\int[L]\,dx}L\,dx$.
Formula risolutiva fornita da Lagrange:

$$N+(N)S-d[P+(P)S]+d^2[Q+(Q)S]-\dots=0.$$

dove $S=e^{-\int(L)}V$, $V=H-\int_0^x e^{\int(L)}L$, e $H=\int_0^a e^{\int(L)}L$.

Come si può osservare considerando dx unitario, ossia $dx=1$ le formule fornite dai due matematici per ciascun problema, coincidono perfettamente.

Capitolo 5

Eulero a Lagrange: lettera del 6 settembre 1755

EULERO A LAGRANGE.

Berolini, die 6 sept. 1755.

Vir prestantissime atque excellentissime,

Perlectis tuis postremis litteris, quibus Theoriam maximorum ac minimorum ad summum fere perfectionis fastigium erexisse videris, eximiam ingenii tui sagacitatem satis admirari non possum. Cum enim non solum in Tractatu meo de hoc argumento methodum mere analyticam desideravissem, qua regulae ibi traditae erui possent,, sed etiam deinceps non parum studii in hujusmodi methodo detegenda consumpsissem, maximo sane gaudio me affecisti, quod tuas profundissimas aeque ac solidissimas meditationes super his rebus mecum benevole communicare voluisti; quamobrem tibi me maxime obstrictum agnosco. Statim autem perspexi analysin tuam, qua meas hujusmodi problematum solutiones per sola analyseos praecepta elicuisse multo latius patere mea mothodo ideis geometricis innixa. ln universa enim serie valorum ipsius y*, qui singulis valoribus ipsius* x *respondent, donec* x *dato valori* a *aequetur, ego unicam valorem ipsius* y *data quadam particula* δy *augeri concepi, indeque incrementum in formula integrali* $\int Z\,\delta x$ *ortum investigari, dum tu, vir clarissime, singulas valores ipsius* y *indefinita incrementa*

δy capere assumis quam ob causam etiam non dubito quin tua analysis, si penitius excolatur, ad multo profundiora mox sit perductura. Cujusquidem praestantiae jam eximia exempla a te feliciter confecta circa lineas citissimi appulsus ad datam lineam, quin etiam de methodo maximorum ad superficies applicata commemoras, quae omnia ut accuratius persequaris, etiam atque etiam te rogo. Mea quidem methodo usus plures hujusmodi qusestiones circa superficicis pertractavi in Scientia navali, quae duobus voluminibus in-4^o, Petropoli pluribus abhinc annis prodiit. Quod autem ad tuam methodum, qua siugulis applicatis y incrementa δy tribuis, attinet, antequam hoc ipsum quod non aperte inclicas, animadverti, de consensu tuarum formularum cum meis dubitaveram. Ut enim $\int Z\,dx$ fiat maximum, existente

$$dZ = N\,dy + P\,d^2y + Q\,d^3y + \dots$$

(ubi quidem pro dx unitatem ponis, non pro x uti forte lapsu calami notas), necesse est id tuo signandi more sit $\delta \int Z\,dx$ seu $\int \delta Z\,dx = 0$. At vero invenio ponendo tecum 1 pro dx

$$\delta \int Z = \int (N - dp + d^2Q - d^3R + \dots)\,\delta y \\ + (P - dQ + d^2R + \dots)\,\delta y + (Q - dR + \dots)\,d\,\delta y + \dots$$

et unde concludis esse debere

$$N - dP + d^2Q - d^3R + \dots = 0\,,$$

cum tamen natura maximorum tantum postulet ut sit

$$\int (N - dP + d^2Q - d^3R + \dots)\,\delta y = 0\,,$$

Verum perspecta amplitudine
Si unicae applicatae y increm
$\int (N - dP + d^2Q - \dots)\,\delta y = 0$
partes $(P - dQ + d^2R + \dots)\,\delta y + (Q$
$x = a$ referantur, evanescere
sensus deprehendatur.

Vehementer etiam te rogo, vir clarissime, ut mihi ignoscas, quod ad tuas priores litteras m
commercium nostrae urbis cum Italia
ut nisi per mercatores promoveatur non
possit. Quare cum mihi jam mercatorem tuum indicaveris, has litteras ad eum per mercatorem mittere rogo, ad quem etiam .tuiam responsionem, qua forte me honorare volueris, per tuum mercatorem mittere vellem.

Quod autem in prioribus litteris de analogia differontialium cujusque ordinis formulae xy et terminorum binorum potestatis $(a+b)^m$ attulisti, eam jam a Leibnizio observatam esse memini quod, nisi fallor, in ejus cum Bernoullio commercio reperies. Vale et fave

Tibi addictissimo
L.Eulero.

A Monsieur Durand pour remettre s. l. p. à M.Louis Grange Tournier, à Turin.

....

EULERO A LAGRANGE.

Berlio, giorno 6 settembre (1755).

O uomo illustrissimo ed eccellentissimo,

dopo aver letto con grande attenzione la tua ultima lettera, con cui sembri avere innalzato la teoria dei massimi e minimi alla somma vetta della perfezione, non posso che ammirare l'esimia sagacia del tuo ingegno. Dal momento che, infatti, non solo nel mio trattato su questo argomento avevo auspicato un metodo meramente analitico[1], da cui si potessero dedurre le regole che vi sono esposte, ma di conseguenza avevo anche speso notevole fatica nel cercare di scoprire un metodo di tal genere, certo mi hai arrecato somma

[1]vedi la nota 7, nella sezione "Eulero: Methodus Inveniendi (1744)" del Cap. 2.

gioia, rendendomi partecipe delle tue profondissime e solidissime meditazioni su questi argomenti; per questo riconosco di esserti sommamente debitore. Ed immediatamente ho esaminato il tuo metodo che, con tutta evidenza, permette di determinare le mie soluzioni dei problemi di tal genere, per mezzo dei soli principi dell'analisi, in modo molto più generale rispetto al mio metodo, fondato sulle idee geometriche. Infatti, in tutta la serie dei valori dello stesso y, che corrispondono ai singoli valori, presi uno per uno, dello stesso x, finché x non sia uguale ad un dato valore a, io pensai che si accrescesse un unico valore dello stesso y, data una qualche particella δy, e che dunque si potesse indagare l'incremento sorto nella formula integrale $\int Z\delta x$, mentre tu, uomo illustrissimo, assumi che i singoli valori dello stesso y, considerati uno per uno, prendano indefiniti incrementi δy, per cui non dubito che la tua analisi, qualora venga studiata più a fondo, presto condurrà a risultati ben più profondi. Di tale efficacia sono già stati da te felicemente forniti ottimi esempi riguardo alle linee dell'avvicinamento più rapido ad una linea data, e inoltre menzioni il metodo dei massimi applicato alle superfici: tutti argomenti, questi, che ti prego con insistenza di indagare più accuratamente. Utilizzando il mio metodo, peraltro, ho trattato svariate questioni di questo tipo nella "Scientia navalis"[2], che uscì in due volumi in-4^o[3] a Pietroburgo, parecchi anni fa. Per quanto invece riguarda il tuo metodo, con cui attribuisci aumenti δy ai singoli y applicati, prima che io mi avvedessi di questo stesso aspetto che non indichi apertamente, avevo dubitato dell'accordo delle tue formule con le mie. Affinché infatti $\int Zdx$ divenga massimo, essendo

$$dZ = N\,dy + P\,d^2y + Q\,d^3y + \ldots$$

(dove invero per dx poni l'unità, non per x, come invece scrivi, forse per una svista), è necessario che esso, secondo il tuo modo di scrivere, sia $\delta \int Z\,dx$ o

[2] "Scientia navalis", vol. 1-2, 1749, Opera omnia serie 2, vol. 18-19 (E.110-111).

[3] Per in-quarto (o anche in-4^o) si intende, in editoria, un formato del libro antico. Un in quarto si otteneva da due piegature di un foglio intero: una prima piegatura veniva effettuata sul lato minore, la seconda su quello maggiore. La filigrana si trovava nella parte centrale vicino alla piegatura. Si ottenevano così quattro carte (o otto pagine).

$\int \delta Z\, dx = 0$. Al contrario, trovo che, ponendo, come tu fai, 1 al posto di dx

$$\delta \int Z = \int (N - dp + d^2Q - d^3R + \dots)\, \delta y$$
$$+ (P - dQ + d^2R + \dots)\, \delta y + (Q - dR + \dots)\, d\,\delta y + \dots$$

e donde concludi che debba essere

$$N - dP + d^2Q - d^3R + \cdots = 0\,,$$

sebbene, tuttavia, la natura dei massimi postula solo che sia

$$\int (N - dP + d^2Q - d^3R + \dots)\, \delta y = 0\,,$$

Ma vista l'ampiezza[4]
Se l'incremento dell'unica applicata y
$\int (N - dP + d^2Q - \dots)\, \delta y = 0$
le parti $(P - dQ + d^2R + \dots)\, \delta y + (Q$
siano riferite ad $x = a$, si rileva che svanisce
il senso di tutto il procedimento.

Ti prego di tutto cuore di perdonarmi, uomo illustrissimo, per quanto riguarda le tue precedenti lettere
il commercio della nostra città con l'Italia
che solo tramite i mercanti
può.[5] Perciò, dato che mi hai già indicato il tuo mercante, ora chiedo che questa lettera sia inviata a lui tramite il mercante, al quale vorrei che anche tu inviassi, tramite il tuo mercante, la tua risposta, qualora volessi farmene l'onore.

Per quanto riguarda, poi, le tue riflessioni, nella lettera precedente, intorno all'analogia dei differenziali di qualsiasi ordine della formula xy e delle potenze dei binomi $(a+b)^m$, ricordo che essa è già stata osservata da Leibniz,

[4]A partire da questo punto putroppo il testo è lacunoso, a causa di un notevole strappo nella lettera, che deturpa soprattutto i successivi passaggi matematici.

[5]Il passaggio è lacunoso, ma certamente allude al fatto che le lettere potevano essere trasmesse solo tramite i mercanti.

come potrai verificare, se non erro, nella sua corrispondenza con Bernoulli[6].
Saluti ed ossequi

dal tuo fedelissimo
L. Eulero.

Al Signor Durand da consegnare al Sig. Louis de la Grange Tournier,
a Torino.

[6]Eulero si riferisce all'edizione del 1745 della corrispondenza epistotale tra Leibniz e Jhoann Bernoulli, di cui si è già parlato nel Cap. 3 a pag. 44.

Commento

Eulero rimase molto colpito dalla lettera ricevuta da Lagrange. Rispose il 6 settembre 1755, elogiandolo ampiamente per la sua sagacia, e riconoscendogli un grande merito. Egli scrive:

> [...] sembri avere innalzato la teoria dei massimi e minimi alla somma vetta della perfezione, [...] non solo nel mio trattato su questo argomento avevo auspicato un metodo meramente analitico, da cui si potessero dedurre le regole che vi sono esposte, ma di conseguenza avevo anche speso notevole fatica nel cercare di scoprire un metodo di tal genere, [...] . Ed immediatamente ho esaminato il tuo metodo che, con tutta evidenza, permette di determinare le mie soluzioni dei problemi di tal genere, per mezzo dei soli principi dell'analisi, in modo molto più generale rispetto al mio metodo, fondato sulle idee geometriche.

Dopo gli elogi, Eulero passa ad esporre alcune sue osservazioni su questo nuovo metodo.

5.1 Prime osservazioni di Eulero al "metodo delle variazioni"

Eulero osserva un fatto che Lagrange non aveva minimamente accennato; ossia che il suo nuovo metodo dipende dalla variazione simultanea di tutte le ordinate y, e non di una sola di esse.

> [...] io pensai che si accrescesse un unico valore dello stesso y, data una qualche particella δy, [...] mentre tu, uomo illustrissimo, assumi che i singoli valori dello stesso y, considerati uno per uno, prendano indefiniti incrementi δy, [...].

In seguito commenta un'altro particolare del metodo di Lagrange che differisce dal suo. Come è stato osservato nel capitolo precedente, nel "Methodus inveniendi" Z è una funzione di x, y, $p = \dfrac{dy}{dx}$, $q = \dfrac{dp}{dx}$, $\ldots$; nella lettera di Lagrange Z è una funzione di x, y, dy, d^2y, $\ldots$. Soffermandosi su questa differenza Eulero afferma che Lagrange sta considerando dx come unità, e non x come invece aveva scritto forse a causa di una svista.

> [...] essendo $dZ = N\,dy + P\,d^2y + Q\,d^3y + \ldots$
> (dove invero per dx poni l'unità, non per x, come invece scrivi, forse per una svista) [...].

Questo sarebbe in accordo con il calcolo leibniziano del XVIII sec.; se y è una funzione di x, allora dx è da considerare costante in tutti i calcoli. In effetti Lagrange intende realmente il dx costante, ritenendolo proprio la costante unitaria $dx = 1$. Con questo assunto, i suoi risultati combaciano perfettamente con quelli del "Methodus inveniendi", come si è mostrato in precedenza a pag. 78 del Cap. 4. Ma Euero era in errore suggerendo che Lagrange avesse avuto una svista. Poiché quando Lagrange scrive x è costante, lui intende $\delta x = 0$. Inoltre, come Lagrange specifica nella sua lettera di risposta, il fatto di lavorare con dy e non con p, è solamente in favore di un approccio algebrico più flessibile. Egli scrive:

> [...] pongo per la formula integrale indefinita, $\int Z$, nel luogo in cui tu ponesti $\int Z\,dx$; poiché infatti non ho bisogno delle tue sostituzioni di $p\,dx$ al posto di dy, $\ldots$; sarebbe inutile voler ridurre tutte le formule a questa $\int Z\,dx$, cosa che talora non si ottiene se non per mezzo di quelle sostituzioni [...].

Per Eulero era importante scrivere il dx nell'integranda, perché egli interpretava l'integrazione geometricamente, come somma di infinite quantità infinitesimali (questo risulta evidente, per esempio, quando approssima l'integrale

$\int Z\,dx$ con la (2.2)). Dal canto suo, Lagrange non rigetta questa interpretazione, tuttavia non ritiene che essa debba porre simili limitazioni. Per lui non era di fondamentale importanza scrivere $\int p\,dx$, come aveva fatto Eulero, o semplicemente $\int dy$ (notare che le due scritture sono equivalenti in quanto $p = \frac{dy}{dx}$).

Infine Eulero critica la semplicità con cui Lagrange passa da

$$\delta \int Z = \int (N - dp + d^2Q - d^3R + \dots)\,\delta y \\ + (P - dQ + d^2R + \dots)\,\delta y + (Q - dR + \dots)\,d\,\delta y + \dots \qquad (5.1)$$

a

$$N - dP + d^2Q - d^3R + \dots = 0\,, \qquad (5.2)$$

appellandosi semplicemente al “metodo comune dei massimi e minimi”. Questo passaggio, viene oggi giustificato dal lemma fondamentale del calcolo delle variazioni. Eulera ricorda a Lagrange il fatto che il “metodo comune dei massimi e minimi” permette di concludere solamente:

$$\int (N - dP + d^2Q - d^3R + \dots)\,\delta y = 0\,, \qquad (5.3)$$

Subito dopo, sembra che egli volesse suggerire qualche altro motivo per giungere dalla (5.1) alla (5.2); un suggerimento che pare connesso con il fatto che Lagrange nel suo metodo varia simultaneamente tutte le ordinate y. Sfortunatamente, i passaggi matematici indicati da Eulero sono incompleti a causa di uno strappo nella lettera. Lagrange, nella successiva lettera del 20 novembre 1755, concorda con Eulero sulla critica mossa al passaggio dalla (5.1) alla (5.2). Egli scrve:

> [...] dalla natura dei massimi e dei minimi, come assai giustamente dici nella tua epistola, deve essere solo $\delta \int Z = 0$, [...].

Ma ritiene che il suo ragionamento non fosse sbagliato; in quanto certamente la (5.3) è una conseguenza della (5.1), e ritiene che la (5.2) sia a sua volta semplicemente una conseguenza della (5.3).

Capitolo 6

Lagrange a Eulero: lettera del 20 novembre 1755

LAGRANGE A EULERO.

Taurini, die 20 novembris 1755.

Vir amplissime atque celeberrime, fautor colendissime.

Redditae mihi sunt, dum ruri essem, literae tuae exspectatissimae, ex quibus jucundissimum praeter modum fuit intelligere meditatiunculas illas meas de maximorum et minimorum methodo, tibi non parum fuisse probatas. Doleo vehementer, vir clarissime, quod nonnullis ferme inopinatis occupationibus distentus, tibi protinus respondere non potuerim. Factum enim est, ut electus fuerim Professor in scholis nostris mathematicis militaribus, quod sane munus mihi, aliud cogitanti, et nondum adhuc viginti annorum juveni delatum, negotia plurima, et quae nullo modo differri liceret, non potuit non facessere; quamobrem te etiam, atque etiam rogo, ut mihi ignoscere velis hanc in rescribendo moram omnino involontariam; maximas porro, quas possum, gratias tibi refero, pro tot tantisque honoris, atque affectus erga me testimoniis, quibus literas tuas abundare animadverti. Ego sane, si quid tua attentione dignum confeci, id procul dubio totum tibi debere agnosco. Eximia enim opera tua, illa sunt praecipue quae me ad ipsius

Analyseos profundiora perduxerunt. Quapropter me tibi gratissimum semper, ac maximum quocunqure modo debitorem profiteor. Jamvero in epistola tua, te exoptare ostendis ut ego analysim illam diligentius adhuc excolam, utpote ex qua sublimiora forsan erui possint, et simul etiam humanissimis, ac perquam honorificis verbis ad id me cohortari non dedignastis; igitur non te aegre laturum puto si tenuia aliqua, quae de hac re postea habui cogitata, aperiendo, tibi fortassis molestiam creavero.

In superioribus meis dixi, me eadem analysi determinare posse curvas citissimi appulsus ad datam lineam; en itaque quomodo rem perago:

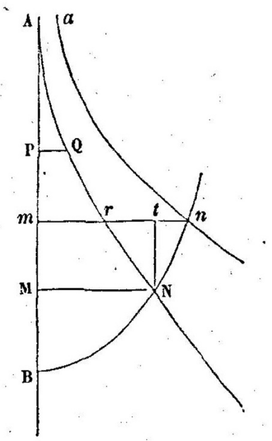
Sit AQN curva brachistochrona simul, et citissimi appulsus ad datam Iineam BNn, in qua ponitur $AP = x$, $PQ = y$, $AM = a$, $mM = dx$; *sitque alia infinite parum discrepans, an, quam curvam differentiationis voco, quaeque oritur singulis applicatis y incremento suo indefinito* δy *crescentibus; nunc quoniam formula maxima, minimave facienda est* $\int \frac{ds}{\sqrt{u}}$, *denotante* u *altitudinem celeritati debitam, ponatur esse primò* $\delta u = \nu\delta y$, *et habebitur pro differentiali ipsius* $\int \frac{ds}{\sqrt{u}}$ *dum curva AQN in an transit. hic valor*

$$-\int \frac{ds\,\nu\,\delta y}{2u^{\frac{3}{2}}} + \int \frac{dy\,\delta dy}{ds\sqrt{u}}$$

quod reducitur ad

$$\int \left(-d\frac{dy}{ds\sqrt{u}} - \frac{\nu\,ds}{2u^{\frac{3}{2}}}\right)\delta y + \frac{dy}{ds\sqrt{u}}\,\delta y.$$

Verum quia ex hypothesi citissimi appulsus integrale $\int \frac{ds}{\sqrt{u}}$ *pro curva AQN accipi debet per totam AM, loco quod pro an accipiendum est*



tantum per Am, *hinc sit ut mutata curva* AQN *in an hoc integrale decrescat sue elemento quod respondet elemento* $Mm = dx$, *axis* AM; *igitur verum ipsius* $\int \frac{ds}{\sqrt{u}}$ *differentiale hoc casu fiet*

$$\int \left(-d\frac{dy}{ds\sqrt{u}} - \frac{\nu\, ds}{2u^{\frac{3}{2}}}\right) \delta y + \frac{dy}{ds\sqrt{u}}\, \delta y - \frac{ds}{\sqrt{u}}\,.$$

ponendo in his duobus postremis terminis a *pro* x; *quod adeo nihilo aequatum dabit: primo pro aequatione ad curvam quaesitam,*

$$-d\frac{dy}{ds\sqrt{u}} - \frac{\nu\, ds}{2u^{\frac{3}{2}}} = 0$$

(ut nempe nullum ex indeterminatis δy *in ipsa ingredi possit) deinde praebebit etiam, pro puncto intersectionis* N *quod respondet abscissae* $= a$, *hanc alteram aequationem*

$$\frac{dy}{ds\sqrt{u}}\delta y = \frac{ds}{\sqrt{u}}$$

seu

$$dy\, \delta y = ds^2\,;$$

seu, quia hoc loco

$$dy = rt, \qquad \delta y = rn \quad et \quad ds = rN, \qquad rt \times rn = \overline{rN}^2;$$

unde conficitur angulum intersectionis rNn *esse debere rectum; caeterum levi attentione perspicitur nisi sit* $\delta u = \nu \delta y$ *(quod quidem evenit nisi sit* *u functio determinata ipsorum x et y) hanc proprietatem locum amplius habere non posse; unde sub hac limitatione intelligi debora videtur prop. tua 44 tomi 2^{di} aegregii mechanices operis. Haec porro methodus, quomodo et ad alios magis comppsitos casus possit nullo negotio accommodari, tibi certe supervacaneum foret ostendere; sufficiat haec ita leviter attigisse.*

Transibo igitur ad aliud, quod in illa analysi observavi et super quo judicium tuum doctissimum praecipue exopto; nempe quoniam ex natura maximorum, et mimmorum, ut rectissime in epistola tua ais, esse tantum debet $\delta \int Z = 0$ (pono pro formula integrali indefinita, $\int Z$ tantum, loco quod tu posuisti $\int Z\,dx$; quia enim mihi non opus sunt substitutiones tuae $p\,dx$ pro $dy \ldots$; inutile foret velle omnes formulas ad hanc $\int Z\,dx$ reducere, quod aliquando nisi illarum substitutionum ope non efficitur) evidens est, si plures formae valori ipsius $\delta \int Z$ conciliari possint, plures etiam haberi posse diversas aequationes, quas tamen omnes datis sub conditionibus satisfacere necesse sit. Jam vero $\delta \int Z$ exprimitur per

$$\int (N - dP + d^2Q - \ldots)\delta y + (P - dQ + \ldots)\delta y + (Q - \ldots)d\delta y + \ldots\,;$$

sed posito, brevitatis gratia, $N - dP + d^2Q - \cdots = L$, est

$$\int L\delta y = L\int \delta y - \int dL \int \delta y = L\int \delta y - dL \int^2 \delta y + \int d^2L \int^2 \delta y\,,$$

et sic in infinitum, unde habetur $\delta \int z =$

1.

$$\int L\delta y + (P - dQ + \ldots)\delta y + (Q - \ldots)d\delta y\,;$$

2.

$$\int dL \int \delta y + L\int \delta y + (P - dQ + \ldots)\delta y + \ldots\,;$$

3.

$$\int d^2L \int^2 \delta y - dL \int^2 \delta y + L\int \delta y + (P - dQ + \ldots)\delta y + \ldots\,;$$

et, sie ulterius procedendo. Unde, si ponatur, in loco ubi $x = a$*, evanescere* δy*,* $d\delta y$*,* $\ldots$*, fiet, ex* 1^o *valore,* $\delta \int Z = \int L\,\delta y$*, ex quo aequatio pro curva oritur* $L = 0$*, quae ideo eam praebet curvam, ut notum est, quae maximorum minimorumque proprietate gaudeat inter omnes, quo pro puncto abscissae* $= a$ *tum datam habeant applicatam tum etiam datam tangentis ad axem inclinationem, etc.; si vero etiam praeterea totum* $\int \delta y$ *ponatur hoc loco* $= 0$*, tam ex* 2^o *valore haberetur:*

$$\delta \int Z = -\int dL \int \delta y$$

ex quo pro curva quaesita sit $dL = 0$*, quae adeo maximorum, minimorumque data proprietate gauderet inter omnes, quae praeter supradictas conditiones habebunt etiam hanc ut summa omnium incrementorum* δy *sit* $= 0$*; simili modo reperiretur ex* 3^o *valore, ponendo etiam* $\int^2 \delta y = 0$*; haec aaquatio* $d^2L = 0$ *pro curva in qua adesset praeterea conditio ista ut tota summa* 2^{di} *gradus ipsorum* δy *fieret evanescens; et sic de caeteris.*

Jam vero quum posito $\int \delta y = 0$ *necessario curva differentiationis secare debeat priorem in aliquo puncto intermedio, et posito praeter* $\int \delta y = 0$*, etiam* $\int^2 \delta y = 0$*, tum duo existere debeant intersectionis puncta, concludi mihi posse videtur eequationes has*

$$dL = 0, \quad d^2L = 0, \quad \ldots,$$

locum habere debere, in quadam curva, quae data proprietate sit praedita, ubi praeter extrema, etiam aliqua data sunt intermedia puncta, per quae ipsa transire debeat; nempe si habeatur unum, tum satisfaciet $dL = 0$*, si duo,* $d^2L = 0, \ldots$ *.*

Hinc fieret ut quaerendo brachistochronam per data tria puncta transeuntem haberetur non ciclois, sed alia orta ex hac eequatione

$$d^2 \frac{dy}{ds\sqrt{x}} = 0$$

seu

$$d\frac{dy}{ds\sqrt{x}} = \frac{dx}{\omega^{\frac{3}{2}}},$$

quae in cycloidem mutatur facto $\omega = \infty$.

Haec sunt, vir clarissime, quibus te gravissimis forsan distentum nunc interpellare audeo; tuos nunc acutissimos sensus intelligere mihi maxime est in votis; si gratiam hanc mihi facere non dedignabelris, hoc certe mihi animos addet ad ulterius in hac re inquirendum.

Quae tum circa superficies, tum alias etiam quaestiones meditatus sum in aliud reservabo tempus; tuum de scientia navali opus eximium perlegi, et re vera quidem insignia plura hujusmodi problemata soluta animadverti.

Verum jam tempus est ut longae huic epistolae finem imponam; quamobrem dum te enixe rogo ut has tenues meas res non iniquo velis animo accipere, favori tuo atque benevolentiae inestimabili me humillime commendo. Vale et fave

Tibi deditissimo ac adstrictissimo
LUDOVICO DE LA GRANGE TOURNIER.

P. S. Quad ad tuas ad me literas attinet, rectissime facies si illas mercatori Durando inscribere, quo mihi remittantur, perges.

. . . .

LAGRANGE A EULERO.

Torino, giorno 20 novembre 1755.

O UOMO GRANDISSIMO E CELEBERRIMO, PREGEVOLISSIMO INTERLOCUTORE.

Mi è stata consegnata, mentre ero in campagna, la tua attesissima lettera, da cui è stato fonte d'immensa gioia il comprendere che le mie modeste riflessioni sul metodo dei massimi e dei minimi sono state da te pienamente approvate. Mi rammarico profondamente, o uomo illustrissimo, del fatto che, distolto da alcune occupazioni del tutto impreviste, non ti ho potuto rispondere immediatamente. Infatti mi è accaduto di essere nominato Professore nelle nostre scuole matematiche militari[1], incarico che, assegnato a

[1] Il 26 settembre 1755, Lagrange a soli diciannove anni, venne nominato Professore di Matematica nelle Scuole d'Artiglieria di Torino.

me, che pensavo ad altro, e che non ho ancora vent'anni, non potè non arrecare doveri innumerevoli, e che non potevano in alcun modo essere differiti; perciò ti prego di volermi perdonare questo ritardo, del tutto involontario, nel risponderti; e ti ringrazio infinitamente per i tanti e così grandi onori, e testimonianze di affetto nei miei riguardi, di cui vedo che abbonda la tua lettera. Io, se ho fatto qualcosa che sia degno della tua attenzione, riconosco senza alcun dubbio di doverlo a te interamente. Sono infatti le tue opere che mi hanno condotto nelle profondità dell'Analisi stessa. Perciò mi dichiaro gratissimo, e sempre debitore, nei tuoi confronti. Nella tua epistola, invero, mostri di auspicare che io coltivi ancora più diligentemente quell'analisi, poichè forse da essa si potrebbero ricavare concetti ancor più sublimi, e nel contempo non hai disdegnato di esortarmi a ciò con parole assai cortesi e lusinghiere; perciò, credo che non sarai infastidito se, rivelandoti alcuni esili pensieri, che successivamente ho elaborato a tale riguardo, forse ti arrecherò disturbo.

Nei miei scritti precedenti, ho detto che io, per mezzo della stessa analisi, posso determinare le curve del più rapido avvicinamento ad una linea data; ecco in che modo giungo a tale conclusione.

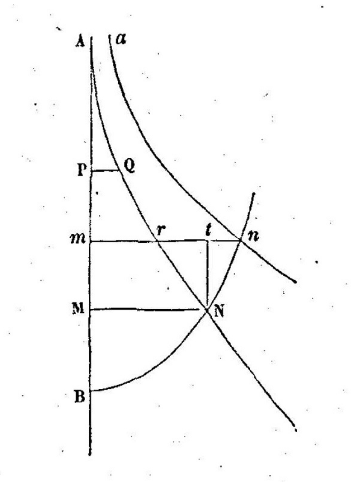
Sia AQN una curva brachistocrona, e dell'avvicinamento più rapido ad una data linea BNn, in cui si pone $AP = x$, $PQ = y$, $AM = a$, $mM = dx$; e ve ne sia un'altra infinitamente poco discrepante, an, ossia quella che chiamo la curva della differenziazione, la quale è generata dalle singole applicate y che crescono del loro indefinito incremento δy; ora, poichè la formula minima, o massima, è data da $\int \frac{ds}{\sqrt{u}}$, dove u indica l'altezza dovuta alla velocità, si ponga che sia dapprima $\delta u = \nu \delta y$, e si avrà, per il differenziale dello stesso $\int \frac{ds}{\sqrt{u}}$, finchè la curva AQN si muta in an, questo valore

$$-\int \frac{ds\,\nu\,\delta y}{2u^{\frac{3}{2}}} + \int \frac{dy\,\delta dy}{ds\sqrt{u}}$$

che si riduce a

$$\int \left(-d\frac{dy}{ds\sqrt{u}} - \frac{\nu\,ds}{2u^{\frac{3}{2}}} \right) \delta y + \frac{dy}{ds\sqrt{u}}\,\delta y.$$

ma, poichè sulla base dell'ipotesi dell'avvicinamento più rapido l'integrale $\int \frac{ds}{\sqrt{u}}$ deve essere preso per la curva AQN attraverso l'intera AM, in quel luogo, perciò deve essere assunto per la curva an



solo attraverso Am, da questo deriva che, dopo aver mutato la curva AQN in an, questo integrale decresce del suo elemento che corrisponde all'elemento $Mm = dx$, sull'asse AM; dunque il vero differenziale dello stesso $\int \frac{ds}{\sqrt{u}}$ in questo caso diverrà

$$\int \left(-d\frac{dy}{ds\sqrt{u}} - \frac{\nu\, ds}{2u^{\frac{3}{2}}} \right) \delta y + \frac{dy}{ds\sqrt{u}}\, \delta y - \frac{ds}{\sqrt{u}}\, .$$

ponendo in questi due termini estremi a al posto di x; questo a tal punto si darà pari a zero: in primo luogo per l'equazione alla curva ricercata,

$$-d\frac{dy}{ds\sqrt{u}} - \frac{\nu\, ds}{2u^{\frac{3}{2}}} = 0$$

(poichè nessuno degli indeterminati δy può entrare in essa) poi fornirà anche, per il punto dell'intersezione N che corrisponde all'ascissa $= a$, quest'altra equazione

$$\frac{dy}{ds\,\sqrt{u}}\delta y = \frac{ds}{\sqrt{u}}$$

ossia

$$dy\,\delta y = ds^2\,;$$

ossia, poichè in questo luogo

$$dy = rt, \qquad \delta y = rn \quad \text{e} \quad ds = rN, \qquad rt \times rn = \overline{rN}^2;$$

donde deriva che l'angolo dell'intersezione rNn deve essere retto; ma con un minimo di attenzione si nota che, a meno che non sia $\delta u = \nu \delta y$ (il che peraltro avviene soltanto se u è una funzione determinata degli stessi x e y), questa proprietà non può più aver luogo; donde sotto questa limitazione sembra si debba intendere la tua proposizione 44 del secondo tomo dell'eccellente opera sulla Meccanica[2]. Inoltre, che questo metodo si possa senza alcuna difficoltà adattare ad altri, più complessi casi, sarebbe certo superfluo mostrartelo; sia sufficiente avere appena toccato questi aspetti.

Passerò dunque ad altro, che in quell'analisi ho osservato, e su cui massimamente auspico il tuo dottissimo giudizio; poiché infatti dalla natura dei massimi e dei minimi, come assai giustamente dici nella tua epistola, deve essere solo $\delta \int Z = 0$ (pongo per la formula integrale definita, $\int Z$, nel luogo in cui tu ponesti $\int Z\,dx$; poiché infatti non ho bisogno delle tue sostituzioni di $p\,dx$ al posto di $dy \ldots$; sarebbe inutile voler ridurre tutte le formule a questa $\int Z\,dx$, cosa che talora non si compie se non per mezzo di quelle sostituzioni), è evidente che, se più forme si potessero adattare al valore dello stesso $\delta \int Z$, si potrebbero avere anche diverse equazioni, che tuttavia sarebbe necessario soddisfare tutte sotto le condizioni date. Invero $\delta \int Z$ si esprime per mezzo di

$$\int (N - dP + d^2Q - \ldots)\delta y + (P - dQ + \ldots)\delta y + (Q - \ldots) d\delta y + \ldots\,;$$

ma, posto, per brevità, $N - dP + d^2Q - \cdots = L$, è

$$\int L\delta y = L \int \delta y - \int dL \int \delta y = L \int \delta y - dL \int^2 \delta y + \int d^2L \int^2 \delta y^3\,,$$

[2] "Proposizione 44. Teorema.
393. Un corpo da un dato punto A arriva il più velocemente ad una qualche linea data BM, lungo la brachistocrona AM che attraversa la linea data BM ad angolo retto, e questo sotto l'ipotesi di una qualche forza agente." pag. 194 di "Mechanica" vol.2, 1736, (E16).

[3] Nella notazione utilizzata da Lagrange, $\int^2$ indica un integrale doppio.

e così all'infinito, donde si ha $\delta\int Z =$

1.
$$\int L\delta y + (P - dQ + \dots)\delta y + (Q - \dots)d\delta y\,;$$

2.
$$\int dL\int \delta y + L\int \delta y + (P - dQ + \dots)\delta y + \dots\,;$$

3.
$$\int d^2L\int^2 \delta y - dL\int^2 \delta y + L\int \delta y + (P - dQ + \dots)\delta y + \dots\,;$$

e così via, procedendo ulteriormente. Onde, se si ponesse, nel luogo dove $x = a$, che svanissero $\delta y, d\delta y, \dots,$ risulterà, dal 1° valore, $\delta\int z = \int L\,\delta y$ da cui scaturisce l'equazione per la curva $L = 0$, che evidentemente fornisce quella curva, com'è noto, che fra tutte gode della proprietà dei massimi e dei minimi, che nel punto di ascissa $= a$ non solo hanno una data applicata, ma anche una data inclinazione all'asse della tangente, ecc.; ma se anche, oltre a ciò, tutto $\int\delta y$ venga posto in quel luogo uguale a zero, così dal 2° valore si avrebbe:

$$\delta\int z = -\int dL\int \delta y$$

da cui, per la curva richiesta, sia $dL = 0$, che perciò godrebbe della data proprietà dei massimi e dei minimi, fra tutte quelle curve, che, oltre alle condizioni sopraddette, avranno anche questa, che la somma di tutti gli incrementi δy sia $= 0$; in modo simile si troverebbe dal 3° valore, ponendo anche $\int^2\delta y = 0$; questa equazione $d^2L = 0$ per la curva in cui vi fosse, inoltre, codesta condizione, cioè che tutta la somma del secondo grado degli stessi δy si annullasse; e così riguardo al resto.

Invero, dato che, posto $\int\delta y = 0$, necessariamente la curva della differenziazione deve intersecare la precedente in qualche punto intermedio, e posto, oltre a $\int\delta y = 0$, anche $\int^2\delta y = 0$, allora devono esistere due punti d'intersezione, mi sembra si possa concludere che queste equazioni

$$dL = 0, \quad d^2L = 0, \quad \dots,$$

devono avere luogo, in una qualche curva, che sia dotata di una qualche proprietà, dove oltre agli estremi, sono dati anche certi punti intermedi, per i quali essa stessa deve passare; infatti se si ha un punto, allora soddisferà $dL = 0$, se se ne hanno due, $d^2L = 0, \dots$.

Da questo deriverebbe che, cercando la brachistocrona passante per tre punti dati, si avrebbe non la cicloide, ma un'altra curva sorta da questa equazione

$$d^2 \frac{dy}{ds\sqrt{x}} = 0$$

ossia

$$d\frac{dy}{ds\sqrt{x}} = \frac{dx}{\omega^{\frac{3}{2}}},$$

che si muta nella cicloide se $\omega = \infty$.

Queste sono, o uomo illustrissimo, le questioni con cui, mentre forse sei impegnato in faccende gravissime, oso interpellarti; desidero infatti comprendere i tuoi pensieri acutissimi; se non disdegnerai di usarmi questa grazia, questo certo mi darà la motivazione per indagare ulteriormente in questa materia.

Le questioni che intorno alle superfici, e anche intorno ad altri argomenti, ho meditato, le riserverò ad altro tempo; ho letto a fondo la tua eccelsa opera sulla scienza navale[4], e in verità, certamente, vi ho trovato le soluzioni di molti problemi di tal genere.

Ma è già tempo di porre fine a questa lunga epistola; perciò, mentre dal profondo del cuore ti prego di accogliere benevolmente queste mie esili riflessioni, mi affido con assoluta umiltà al tuo favore e alla tua inestimabile benevolenza. Saluti e ossequi

dal tuo devoto e grato
Ludovico de la Grange Tournier.

P. S. Per quanto concerne la tua lettera a me indirizzata, farai benissimo ad indirizzarla al mercante Durand, affinché venga consegnata a me.

[4]vedi la nota 2 della lettera del 6 settembre 1755, Cap. 5.

Commento

Negli anni seguenti alla comunicazione della sua scoperta ad Eulero, Lagrange continuò a lavorare sul calcolo delle variazioni. Nel frattempo, come comunica ad Eulero in questa lettera, era stato nominato, non ancora vent'enne, Professore di Matematica nella scuole di Artiglieria di Torino.

Nelle sue lettere precedenti, egli aveva fatto riferimento più volte alla possibilità di determinare, tramite il suo "metodo delle variazioni", la curva brachistocrona con estremo finale non fissato, ma appartenente ad una linea data. Nella presente lettera mostra ad Eulero come procedere.

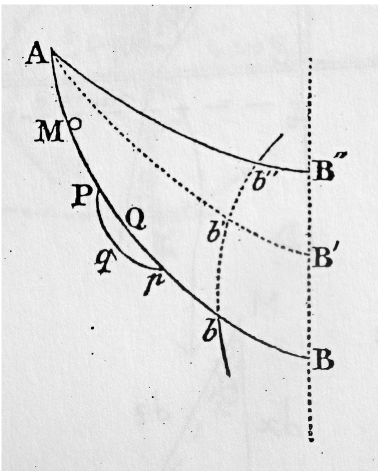
Prima di esaminare il procedimento risolutivo presentato da Lagrange, introduciamo a grandi linee la questione della brachistocrona. Nella seguente sezione si trovano le principali tappe temporali riguardanti la sua nascita e la sua evoluzione nel problema più generale considerato da Lagrange.

6.1 Introduzione al problema della brachistocrona

La curva brachistocrona è uno dei classici esempi di applicazione del calcolo delle variazioni. La parola viene dal graco *brachistos*, ossia *il più breve*, e da *cronos*, ossia *tempo*. Pertanto in generale, la brachistocrona è la curva che si percorre nel più breve tempo possibile.

Il problema fu formulato nel 1638 da Galileo: si trattava di determinare la curva che connette due punti assegnati, lungo la quale un punto materiale scorre senza attrito, in un campo di gravità costante, impiegando per il percorso il tempo minimo possibile. Galileo, forse per motivi estetici, ma certamente per la mancanza di strumenti matematici appropriati, all'epoca non ancora disponibili, congetturò erroneamente che la soluzione dovesse essere un arco di cerchio.

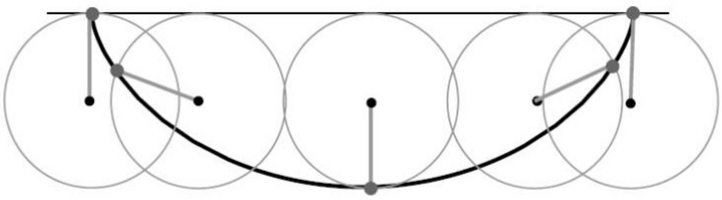
Successivamente nel giugno 1696, a Berna, Johann Bernoulli lanciò una sfida alla comunità matematica. Chiese di risolvere il seguente problema:



Presi, in un piano verticale, due punti A e B, trovare la curva AMB che li congiunge e lungo la quale un punto mobile M, soggetto alla forza di gravità, procede dal punto A al punto B nel minor tempo possibile.[4]

La sfida venne raccolta da molti. La soluzione venne data quasi simultaneamente da Johann stesso, suo fratello Jacob Bernoulli, Leibniz, Newton e L'Hopital. La curva a lungo ricercata, risultò essere una cicloide. Essa è la curva tracciata da un punto fisso su una circonferenza che rotola, senza strisciare, lungo una retta; in pratica è il disegno composto da un punto sulla ruota di una bicicletta in movimento.

[4]Johann Bernoulli: "Problema novum,
ad cujus Solutionem Mathematici invitantur.
Datis in plano verticali duobus punctis A et B. Assignare mobili M viam AMB, per quam gravitate sua descendens, et moveri incipiens a puncto A, brevissimo tempore perveniat ad alterum punctum B" a pag. 296 di "Acta Eruditorum", 1696.



I geometri dell'epoca sapevano che la cicloide è data dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{a-x}},$$

dove a è il diametro del cerchio.

Il problema della brachistocrona, nella sua formulazione originale, servì come stimolo a formulare e risolvere numerosi altri problemi più generali; portò quindi all'identificazione di una nuova branca della matematica, il calcolo delle variazioni.

Eulero e la curva brachistocrona

Eulero si avvicinò al problema della brachistocrona probabilmente grazie all'influenza di Johann Bernoulli. Nel primo libro da lui pubblicato (1726), egli considera il problema della brachistocrona in un mezzo resistente, modificando l'originale quesito, che era invece posto nel vuoto. Nella "Mechanica" vol. 2 (1736) affrontò diverse varianti del problema originale. Comunque, in generale dedicò numerose memorie a tale quesito; fra tutte ricordiamo "De linea celerrimi descensu in medio quocunque resistente"[5] (1740). Ad ogni modo tutte le considerazioni di Eulero circa la brachistocrona contenute nelle opere citate, sono antecedenti al 1744, anno di pubblicazione del suo "Methodus inveniendi"; con il quale modificherà l'approccio a tali questioni, fornendo un metodo più generale per la risoluzione di una serie di problemi tipici. Nel "Methodus inveniendi" viene presentato sottoforma di esempio[6], e ri-

[5] "De linea celerrimi descensu in medio quocunque resistente", Comm. Ac. Petrop. 7, 1740 (E.42).

[6] Esempio I e II pag. 122-128 del "Methodus inveniendi". Per una trattazione accurata vedi H.Goldstine [2] pag. 78-84.

solto utilizzando le tecniche introdotte in questo trattato, il problema della brachistocrona congiungente due punti in un mezzo resistente.

Variante del problema originale: la curva del più rapido avvicinamento ad una linea data

Il problema considerato da Lagrange è un problema più generale. Gli estremi della curva brachistocrona da lui ricercata non sono entrambi fissati: l'estremo iniziale resta fisso, mentre l'estremo finale appartiene ad una generica curva data del piano, pertanto può muoversi lungo di essa. Successivamente, dentro la memoria "Sur la méthode de variations"[7] (1773), egli fornì anche la soluzione del problema con entrambi gli estremi mobili: gli estremi si trovano su due generiche curve date, appartenenti allo stesso piano.

Il primo a formulare una variante del problema originale, simile a quella trattata da Lagrange nella lettera, fu Jacob Bernoulli. Nel 1698, nell'articolo pubblicato sugli Acta Eruditorum, contenente la sua soluzione al problema formulato dal fratello, egli propose il seguente problema: trovare la curva che muove da un punto iniziale dato A, e che giunge ad intersecare in un punto N una linea retta data in verticale. Jacob mostrò che la curva cercata, è la cicloide che interseca normalmente la linea data, nel punto di arrivo N.

In seguito Eulero nella "Mechanica" vol. 2 (1736), dimostra che il percorso più veloce per giungere, partendo da un punto dato, ad una curva data, è fornito dalla brachistocrona che interseca perpendicolarmente la curva in questione. Scrive il seguente teorema:

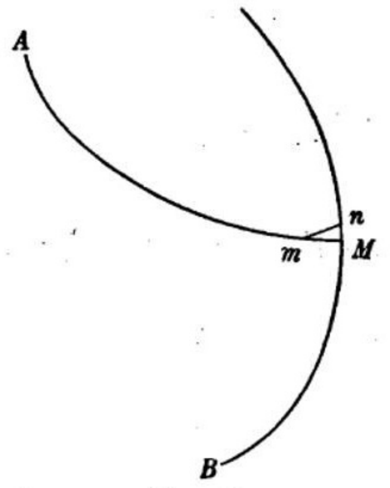
Proposizione 44. Teorema.

Un corpo da un dato punto A arriva il più velocemente ad una qualche linea data BM, lungo la brachistocrona AM che attraversa la linea data BM ad

[7] "Sur la méthode de variations", Misc. Taurin. IV, 1773 (L.29).

angolo retto, e questo sotto l'ipotesi di una qualche forza agente.[8]
Abbiamo ritenuto interessante riportare la dimostrazione fornita da Eulero per questo teorema, che colpisce per la sua chiarezza, e semplicità.

Dimostrazione.



Sia AM la curva brachistocrona cercata, ossia, la curva lungo la quale un corpo partendo da A giunge alla linea BM nel minor tempo possibile. La linea AM interseca la linea BM nel punto M ad angolo retto. Se così non fosse, consideriamo mn una normale alla linea BM; allora sarà $mn < mM$. Pertanto il corpo giungerebbe ad A, più velocemente lungo Amn, piuttosto che lungo AmM. Ne consegue che affinchè AM sia la curva brachistocrona, essa deve intersecare normalmente la curva BM.

Nella sua lettera, Lagrange dimostra in maniera differente che l'angolo formato dalla brachistocrona e dalla curva risulta essere retto; egli sfrutta la geometria elementare. E riportando alcune sue riflessioni sul risultato appena ottenuto, egli cita proprio questa stessa proposizione 44 della "Mechanica" di Eulero.

Vediamo dunque il procedimento risolutivo esposto da Lagrange nella lettera, e che coinvolge il suo "metodo delle variazioni".

[8] "Propositio 44. Teorema.
393. Corpus a dato puncto A (Fig. 49) ad quamvis lineam datam BM celerrime pervenit super linea brachystochrona AM, quae datae lineae BM ad angulos rectos occurrit, hocque in quacunque potentiarum sollicitantium hypothesi" pag. 194 di "Mechanica" vol.2, 1736, (E16).

6.2 Applicazione del "metodo delle variazioni" al problema della brachistocrona

Lagrange scrive:

> Nei miei scritti precedenti, ho detto che io, per mezzo della stessa analisi, posso determinare le curve del più rapido avvicinamento ad una linea data; ecco in che modo giungo a tale conclusione.

Egli postula che AQN sia una curva brachistocrona, precisamente la curva che permette l'avvicinamento più rapido ad una data linea BNn. Inoltre scrive:

> e ve ne sia un'altra infinitamente poco discrepante, an, ossia quella che chiamo la curva della differenziazione, la quale è generata dalle singole applicate y che crescono del loro indefinito incremento δy; [...].

Questa curva an funge da curva arbitraria di confronto.

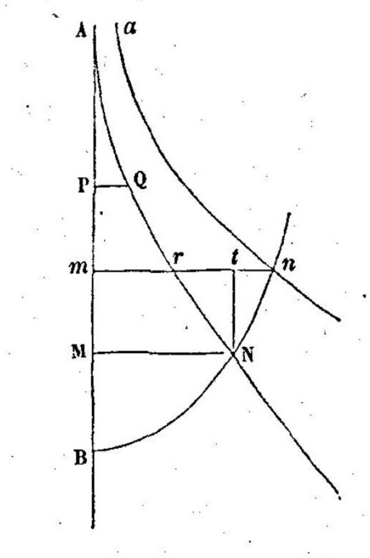


Figura 6.1

Lagrange considera il punto iniziale A, come origine di un sistema di assi ordinati, l'asse delle ascisse x è diretto verticalmente, mentre quello delle ordinate y è orizzontale. Egli pone

$$AP = x, \quad PQ = y,$$

$$AM = a, \quad mM = dx\,;$$

AP e PQ sono quindi le tipiche coordinate x ed y di un generico punto Q appartenente alla curva AQN.

Il tempo di discesa è dato, a meno di una costante di proporzionalità, dall'integrale:

$$\int_0^a \frac{ds}{\sqrt{u}} \tag{6.1}$$

dove $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ è l'ascissa curvilinea, ed u indica “l'altezza dovuta alla velocità”.

Per capire bene cosa rappresenti questa u, ricostruiamo i passi attraverso i quali Lagrange giunse alla (6.1). Si osserva che

$$v = \frac{ds}{dt}\,,$$

da cui si ottiene il tempo di percorrenza della curva AQN:

$$T = \int_0^a dt = \int_0^a \frac{ds}{v}\,.$$[9]

Quindi l' integrale (6.1) deriva dalla proporzionalità tra la velocità v e $\sqrt{u}$, che si ottiene grazie a quella, che durante il XVIII sec. era nota come la legge di conservazione della *vis viva*, ossia della forza viva (più tardi, dell' energia meccanica). Con notazione attuale, per la legge di conservazione dell'energia potenziale, si ha:

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgx\,, \tag{6.2}$$

infatti l'energia potenziale e cinetica sono nulle nel punto di partenza A, mentre all'arrivo N, l'energia cinetica vale $\frac{1}{2}mv^2$ e quella potenziale $-mgx$. Dalla (6.2) si ottiene:

$$v = \sqrt{2gx}$$

pertanto v è proporzionale a $\sqrt{x}$ con costante di proporzionalità $\sqrt{2g}$. Lagrange, dice appunto che u è proprio “l'altezza dovuta alla velocità”, ma considera il caso generale, in cui essa dipende da x e da y. Egli assume che la velocità della particella in Q sia data da una funzione di x ed y, considera quindi $v = \sqrt{u(x, y)}$, infatti scrive $\delta u = \nu\,\delta y$ (poichè $\delta x = 0$). Le motivazioni di questa scelta risulteranno più chiare in seguito.

[9] Una derivazione analoga del tempo di percorrenza viene mostrata da Eulero nel primo volume della “Mechanica”, Cap.1, paragrafo 37, a pag. 14.

Lagrange quindi applica il suo "metodo delle variazioni" per rendere massimo o minimo il tempo di discesa. Quindi calcola la variazione δ dell'integrale (6.1):

$$\delta \int \frac{ds}{\sqrt{u}} = \int ds\, \delta\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right) + \int \frac{1}{\sqrt{u}}\,\delta(ds) \tag{6.3}$$

Eseguendo i calcoli si ottiene:

$$\begin{aligned} \delta\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right) &= -\frac{\delta u}{2\,u^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\nu\,\delta y}{2\,u^{\frac{3}{2}}}\,; \\ \delta(ds) = \delta(\sqrt{dx^2+dy^2}) &= \frac{2\,dx\,\delta dx + 2\,dy\,\delta dy}{2\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{dy\,\delta dy}{\sqrt{ds}}\,, \end{aligned} \tag{6.4}$$

in quanto $\delta dx = d\delta x = 0$. Pertanto sostituendo le (6.4) nella (6.3), e permutando d con δ si ha:

$$-\int \frac{ds\,\nu\,\delta y}{2u^{\frac{3}{2}}} + \int \frac{dy\,d\delta y}{ds\sqrt{u}}\,. \tag{6.5}$$

Di cui il secondo integrale viene sviluppato per parti:

$$\int \frac{dy\,d\delta y}{ds\sqrt{u}} = \frac{dy\,\delta y}{\sqrt{u}\,ds} - \int d\left(\frac{dy}{\sqrt{u}\,ds}\right)\delta y\,;$$

sostituedolo nella (6.5) e raccogliendo si ha:

$$\int \left(-d\frac{dy}{ds\sqrt{u}} - \frac{\nu\,ds}{2u^{\frac{3}{2}}}\right)\delta y + \frac{dy}{ds\sqrt{u}}\,\delta y\,. \tag{6.6}$$

L'integrale di cui stiamo considerando la variazione, esprime il tempo di percorrenza lungo la curva brachistocrona AQN, quindi è relativo all'ascissa AM, come si osserva in figura 6.1. Invece la curva an che si ottiene incrementando tutte le ordinate y della quantità δy, è relativa all'ascissa Am. La variazione δ dell'integrale, esprime i cambiamenti che sorgono nell'integrale quando si passa dalla curva AQN alla curva an. Ma l'integrale nel passaggio da AQN ad an, decresce anche della quantità corrispondente all'ascissa $AM - Am = Mm = dx$. La (6.6) sorge dalla variazione delle sole ordinate y, e quindi non comprende eventuali cambiamenti derivanti dalla variabile x, la quale infatti applicando la variazione δ resta fissa. Quindi per ottenere il complessivo cambiamento sorto nell'integrale, è necessario sottrarre alla (6.6), la quantità corrispondente all'ascissa $Mm = dx$, ossia $\dfrac{ds}{\sqrt{u}}$.

$$\int \left(-d\frac{dy}{ds\sqrt{u}} - \frac{\nu\, ds}{2u^{\frac{3}{2}}} \right) \delta y + \frac{dy}{ds\sqrt{u}}\, \delta y - \frac{ds}{\sqrt{u}} \,. \tag{6.7}$$

Qundi, per ottenere la curva estremale, il cambiamento complessivo (6.7) deve essere uguagliato a zero. Così Lagrange ottiene:

$$-d\frac{dy}{ds\sqrt{u}} - \frac{\nu\, ds}{2u^{\frac{3}{2}}} = 0 \,, \tag{6.8}$$

$$\left[\frac{dy}{ds\,\sqrt{u}} \delta y - \frac{ds}{\sqrt{u}} \right]_0^a = 0 \,. \tag{6.9}$$

Lagrange giustifica il passaggio dalla (6.7) alla (6.8), affermando che “nessuno degli indeterminati δy può entrare” nella (6.8); tale passaggio viene attualmente giustificato dal lemma fondamentale del calcolo delle variazioni. Si osserva che la (6.8) fornisce l'equazione della curva ricercata, mentre la (6.9) fornirà informazioni sul punto di intersezione N con la linea BNn, ossia l'estremo finale della curva brachistocrona cercata. Infatti, in questo caso è fissato solamente uno degli estremi, il punto iniziale A, pertanto sarà $\delta y = 0$ in $x = 0$, ma non in $x = a$, così si deve imporre

$$\left. \frac{dy}{ds\,\sqrt{u}} \delta y - \frac{ds}{\sqrt{u}} \right|_{x=a} = 0 \,.$$

Da cui si ottiene:

$$\frac{dy}{ds\,\sqrt{u}} \delta y = \frac{ds}{\sqrt{u}} \qquad \text{ossia} \qquad dy\, \delta y = ds^2 \,. \tag{6.10}$$

Osservando la figura 6.1, Lagrange valuta la (6.10) in $x = a$; pone

$$dy = rt, \qquad \delta y = rn \quad \text{e} \quad ds = rN \,;$$

sostituendo nella (6.10) si ha:

$$rt \times rn = \overline{rN}^2 \,. \tag{6.11}$$

Da questa relazione si deduce che la curva brachistocrona AQN interseca perpendicolarmente la curva data BNn. Poiché considerando il triangolo mistilineo $\overset{\triangle}{rNn}$, la relazione (6.11) esprime il I teorema di Euclide, da cui Lagrange deduce che l'angolo $\widehat{rNn}$ deve essere retto. Infatti precisiamo che il triangolo $\overset{\triangle}{rNn}$ viene trattato come un triangolo a tutti gli effetti, in quanto i tratti curvilinei rN ed Nn sono quantità infinitesime, esse venivano quindi approssimate a segmenti rettilinei. A questo punto egli afferma:

> [...] con un minimo di attenzione si nota che, a meno che non sia $\delta u = \nu \delta y$ (il che peraltro avviene soltanto se u è una funzione determinata degli stessi x e y), questa proprietà non può più aver luogo; donde sotto questa limitazione sembra si debba intendere la tua proposizione 44 del secondo tomo dell'eccellente opera sulla Meccanica.

Pertanto probabilmente questo è il motivo per il quale egli ha considerato il caso più generico con la velocità $v = \sqrt{u(x,y)}$.

Osserviamo che considerando effettivamente $u = x$, si avrebbe $\nu = 0$, pertanto si otterrebbe come risultato non la (6.8), ma:

$$d\frac{dy}{ds\sqrt{x}} = 0\,, \tag{6.12}$$

mentre la (6.9) resterebbe inalterata. Dalla (6.12) risulta:

$$\frac{dy}{ds\sqrt{x}} = cost\,;$$

che rappresenta proprio l'equazione di una curva cicloide. Infatti ponendo la costante $cost = \frac{1}{k}$, si ottiene:

$$ds = \frac{k\,dy}{\sqrt{x}}\,,$$

che sostituito nella $ds^2 = dx^2 + dy^2$ fornisce

$$\left(\frac{k^2}{x} - 1\right) dy^2 = dx^2, \quad \text{ossia} \quad \sqrt{\frac{x}{k^2 - x}} = \frac{dy}{dx}\,;$$

l'equazione della curva cicloide descritta da un cerchio di diametro k^2.

Sottolineiamo nuovamente che il "metodo delle variazioni" di Lagrange, agisce variando la y e mantenendo fissa la x, così $\delta x = 0$. Pertanto se Lagrange avesse posto $v = \sqrt{x}$, avrebbe eliminato completamente la dipendenza della velocità dalla variabile y. In questo caso, egli stesso afferma che non sarebbe riuscito ad ottenere i risultati desiderati, precisamente, si sarebbe perduta l'informazione sull'angolo. Ma questa sua affermazione risulta poco chiara, come si è osservato, il fatto di avere $\delta x = \delta u = 0$, influenza solamente la prima equazione, la (6.8), mentre lascia inalterata la (6.9).

Successivamente la dipendenza o meno di v dalla variabile y non creerà problemi. Infatti poiché Lagrange era evidentemente insoddisfatto di questo procedimento risolutivo, egli cercò metodi alternativi. Queste sue ricerche vennero condotte parallelamente a studi sulla dinamica. Sarà proprio il parallelo con la dinamica a fornirgli l'input di variare entrambe le quantità, sia x che y, in modo da ottenere due variazioni indipendenti δx e δy. Queste sue investigazioni, culminarono con successo nella lettera del 5 ottobre 1756. In questo modo riuscirà ad ottenere gli stessi risultati, in maniera per lui più convincente, considerando come integrale di partenza

$$\int \frac{ds}{\sqrt{x}}\,,$$

quindi ponendo esattamente $v = \sqrt{x}$.

Osservazioni:

Infine Lagrange presenta alcune sue riflessioni sorte dall'applicazione di questo metodo a casi più complessi. Osserva che nel caso si possa esprimere $\delta \int Z$ in modi diversi, allora uguagliando a zero, ciascuna della forme trovate, si possono ricavare diverse equazioni, che devono essere tutte soddisfatte dalla curva ricercata. A questo proposito esegue i seguenti calcoli:

$$\delta \int Z = \int (N - dP + d^2Q - \dots)\delta y + (P - dQ + \dots)\delta y + (Q - \dots)d\delta y + \dots\,,$$

posto per semplicità $N - dP + d^2Q - \dots = L$, e applicando le regole di integrazioni per parti si ha:

$$\int L\delta y = L\int \delta y - \int dL \int \delta y = L\int \delta y - dL\int^2 \delta y + \int d^2L \int^2 \delta y = \dots .$$

Pertanto:

1. $$\delta \int Z = \int L\delta y + (P - dQ + \dots)\delta y + (Q - \dots)d\delta y + \dots ;$$

2. $$\delta \int Z = \int dL \int \delta y + L\int \delta y + (P - dQ + \dots)\delta y + \dots ;$$

3. $$\delta \int Z = \int d^2L \int^2 \delta y - dL\int^2 \delta y + L\int \delta y + (P - dQ + \dots)\delta y + \dots ;$$

   ...

Quindi considerando il problema con estremi fissati, vale $\delta y = 0$, $d\delta y = 0$, ... in $x = 0$ e $x = a$, come già discusso nel commento alla lettera del 12 agosto 1755 (Cap.4 pag. 76); pertanto

$$\Big[(P - dQ + \dots)\delta y + (Q - \dots)d\delta y \ \dots\Big]_0^a = 0 .$$

Inoltre possono essere poste ulteriori condizioni, quali $\int \delta y = 0$, $\int^2 \delta y = 0, \dots$; esse impongono il passaggio della curva ricercata per altrettanti punti intermedi fissati. Lagrange scrive:

> Invero, dato che, posto $\int \delta y = 0$, necessariamente la curva della differenziazione deve intersecare la precedente in qualche punto intermedio, e posto, oltre a $\int \delta y = 0$, anche $\int^2 \delta y = 0$, allora devono esistere due punti d'intersezione, [...].

Imponendo quindi tali condizioni si ottiene:

1. ponendo $\delta y = 0$, $d\delta y = 0$, ... in $x = 0$ e $x = a$

$$\delta \int Z = \int L\delta y;$$

2. ponendo $\delta y = 0$, $d\delta y = 0$, ... in $x = 0$ e $x = a$, e anche $\int \delta y = 0$

$$\delta \int Z = \int dL \int \delta y;$$

3. ponendo $\delta y = 0$, $d\delta y = 0$, ... in $x = 0$ e $x = a$ e anche $\int \delta y = 0$, $\int^2 \delta y = 0$

$$\delta \int Z = \int d^2 L \int^2 \delta y;$$

Da cui si deducono le seguenti equazioni per la curva:

- l'equazione $L = 0$ mi permette di trovare la curva brachistocrona con estremi fissati.
- le equazioni $dL = 0$ e $d^2L = 0$ permettono di trovare la curva brachistocrona che oltre ad avere gli estremi fissati, deve passare rispettivamente per uno e due punti intermedi fissati.

> [...] mi sembra si possa concludere che queste equazioni
>
> $$dL = 0, \quad d^2L = 0, \quad \ldots,$$
>
> devono avere luogo,[...] , dove oltre agli estremi, sono dati anche certi punti intermedi, per i quali essa stessa deve passare; [...].

Lagrange infine scrive:

> Pertanto cercando la brachistocrona passante per tre punti dati, si otterrebbe non la cicloide, ma un'altra curva; quella che si ottiene da:
>
> $$d^2 \frac{dy}{ds\sqrt{x}} = 0$$
>
> ossia
>
> $$d\frac{dy}{ds\sqrt{x}} = \frac{dx}{\omega^{\frac{3}{2}}},$$
>
> che si muta nella cicloide se $\omega = \infty$.

Probabilmente Lagrange in questo caso intende trovare la brachistocrona con estremi fissati e passante per due ulteriori punti intermedi; egli è solito dare per scontato uno dei due estremi, così scrive "la brachistocrona passante per tre punti dati". Sicuramente dalla prima equazione

$$d^2\frac{dy}{ds\sqrt{x}} = 0$$

si deduce che

$$d\frac{dy}{ds\sqrt{x}} = cost\,,$$

e poiché il dx viene considerato costante, allora è plausibile che sia

$$d\frac{dy}{ds\sqrt{x}} = cost\,dx\,;$$

ma non è chiaro il motivo per cui egli considera questa costante pari a $\frac{1}{\omega^{\frac{3}{2}}}$.

Ad ogni modo in generale tutte le precedenti osservazioni di Lagrange risultano abbastanza confuse, lo stesso Eulero, nella sua lettera di risposta, si mostrerà molto diffidente al riguardo.

Capitolo 7

Eulero a Lagrange: lettera del 24 aprile 1756

EULERO A LAGRANGE.

Berolini, die 24 aprilis 1756.

Vir clarissime atque acutissime,

Binas tuas epistolas alteram circa finem anni elapsi, alteram vero nuper ad me datas cum voluptate perlegi, summamque ingenii tui perspicaciam maxime sum admiratus. Non solum enim methodum illam abstrusissimam maximorum et minimorum, cujus eiquidem prima quasi elementa exposueram, ex veris iisque subtilissimis principiis elicuisti, verum etiam eamdem ad penitus perfecisse videris, ut nihil amplius, quod in hoc genere desiderari queat, sit relictum. Quamobrem tibi, vir clarissime, ex animo gratulor, ac te etiam atque etiam rogo ut quae in hoc genere tam felici cum successu es meditatus, ea omni studio penitius perscrutari ac perficere pergas. Subtilissimae autem hic occurrunt quaestiones, quae non solum omnem ingenii solertiam, sed etiam maximam circumspectionem in ratiocinando postulant, quandoquidem haec methodus nobis objecta plurimis plerumque circumstantiis involuta exhibet, quas nisi calculum ad exempla determinata applicemus, *vix distincte perspicere valeamus. Ita cum investigatio curvae maximi cujusdam minimive proprietate praeditae perduxerit ad hanc aequationem $L = 0$, quae scilicet indicat, tractu curvae paullulum immutato, variationem inde ortam evanescere, quemadmodum natura maximi minimive postulat, dubito, an aequationes*

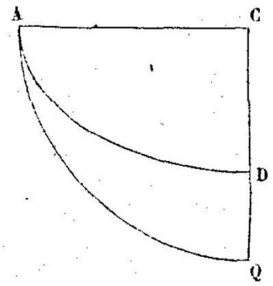
$$dL = 0, \qquad d^2L = 0$$

seu

$$L = a \quad \textit{vel} \quad L = a + bx\,,$$

ad eumdem scopum sub aliis circumstantiis perducere queant. Neque etiam transformatio fornlulae $\int L\,\delta y$ in $\int \delta y - dL \int^2 \delta y\ \ldots$, novas determinationes mihi quidem suppeditare videtur, sed tantum indicare, si sit $L = 0$, fore etiam $dL = 0$, quod utique verum est, sed conclusio inversa locum non habet. Nam, nisi sit $L = 0$, ratio maximi vel minimi non amplius versatur: sed fortasse hujusmodi positiones aliis problematis solvendis inservire poterunt. Quod autem ad brachistochronas per tria plurave puncta data transeuntes attinet, crediderim eas non esse curvas continuas, sed a quovis puncto ad proximum sequens areum cycloidis duci oportere, quo tempus translationis ab altero ad alterum fiat minimum. Si enim corpus celerrime singulas has portiones percurrat, totam curvam, sine dubio, tempore brevissimo conficiet.

Deinde si non inter omnes curvas, sed eas tantum quae sub certo quodam genere continentur, quaeratur ea, quae maximi minimive proprietate gaudeat, tua quidem methodus ad hujusmodi quaestiones aequo cum suceessu adhiberi potest, dum mea nullius est usus, sed evolutio calculi saepe numero maximis obnoxia est difficultatibus. Veluti si super semiaxe hoirizontali dato AC infiniti describantur quadrantes elliptici



AD, AQ quae ratione semiaxis conjugati CD, CQ differunt inter eosque quaeratur is AD, super quo corpus in vacuo descensum ex A incipiens citissime ad rectam verticalem CQ perveniat, aequatio infinita pro specie hujus ellipsis invenitur, unde nonnisi appropinquando valor semiaxis conjugati CD definiri potest. Adhibitis autem appropinquationibus reperis esse debere $8CD^2 = 3AC^2$ seu $CD = AC\sqrt{\frac{3}{8}}$. Scire ergo velim, an haec sit vera solutio, et si sit vera, an ea non directe ope methodi cujusdam certae obtineri queat.

Litteras tuas tam profundis meditationibus refertas cum illustrissimo Praesido nostro communicavi, qui summam tuam sagacitatem mecum plurimum est admiratus, simulque tibi pro suscepto prinoipii minimae actionis patrocinio maximas agit gratias, tuoque nomine numerum sociorum Academiae nostrae haud mediocriter illustratum iri censet; quod munus ut tibi conferatur, prima oblata occasione curabit. De eo quoque mecum est collocutus, ut ex to sciscitarer, an non sedem, qua Taurini frueris, cum alia in Germania, sub auspiciis Regis nostri munificentissimi, cui te commendare vellet, permutare cupias, qua de re ut me certiorem facias enixe rogo; mihi enim certe nihil exoptatius evenire posset quam si tecum coram communicare, tuaque consuetudine frui liceret. Vale et fave, vir praestantissime,

Tibi deditissimo

L. EULERO.

. . . .

EULERO A LAGRANGE.

Berlino, giorno 24 aprile 1756.

Uomo illustrissimo ed acutissimo,

ho letto con piacere le tue due[1] lettere, l'una verso la fine dell'anno passato, l'altra invece consegnatami da poco, e ho sommamente ammirato la perspicacia del tuo ingegno. Non solo, infatti, hai ricavato, da principi veri e per di più argutissimi, quel metodo astrusissimo dei massimi e dei minimi, dei quali invero avevo esposto i primi elementi, poco più che basilari, ma sembri anche averlo profondamente perfezionato, cosicché non è rimasto nulla più che si possa desiderare in questo campo. Perciò, o uomo illustrissimo, mi congratulo con te dal profondo del cuore, e ti chiedo insistentemente di indagare e portare a compimento fino in fondo, con ogni impegno, tutte le meditazioni che hai sviluppato in questo campo con felice esito. Ma insorgono qui sottilissime questioni, che esigono non solo ogni solerzia dell'ingegno, ma anche la massima cautela nel ragionare, poiché questo metodo ci mostra oggetti fittamente avvolti da molteplici circostanze, che, se non applichiamo il calcolo ad esempi determinati, a stento riusciamo a vedere distintamente. Così, quando lo studio della curva dotata della proprietà del massimo o del minimo abbia condotto a questa equazione $L = 0$, la quale invero indica, dopo che è stato mutato di poco il tratto della curva, che la variazione da li sorta svanisce, come postula la natura del massimo e del minimo, mi chiedo se le equazioni

$$dL = 0, \qquad d^2L = 0$$

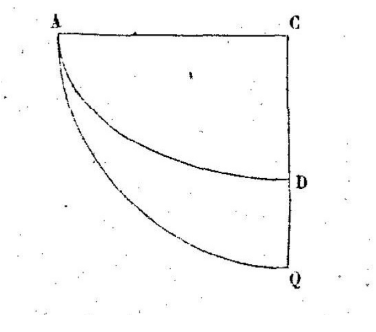
ossia

$$L = a \quad \text{o} \quad L = a + bx\,,$$

[1]Delle due lettere menzionate da Eulero, è stata rinvenuta solo la prima, datata 20 novembre 1756.

debbano condurre allo stesso esito sotto altre circostanze. E nemmeno la trasformazione della formula $\int L\,\delta y$ in $\int \delta y - dL \int^2 \delta y\ \ldots$, mi sembra, invero, che fornisca nuove determinazioni, ma che soltanto indichi, qualora $L = 0$, che anche $dL = 0$, il che certamente è vero, ma la conclusione inversa non ha ragion d'essere. Infatti, qualora non sia $L = 0$, non è più in questione la natura del massimo e del minimo; ma forse le posizioni di questo genere potranno servire a risolvere altri problemi. Per quanto poi concerne le brachistocrone che passano per tre o più punti dati, sarei incline a credere che esse non siano curve continue, ma che sia opportuno tracciare un arco di cicloide che prosegue da un qualsivoglia punto al punto successivo, in cui il tempo della traslazione da un punto all'altro sia minimo. Qualora infatti il corpo rapidissimamente percorra una per una queste porzioni, compirà senza dubbio tutta la curva in un tempo brevissimo.

Poi, se non fra tutte le curve, ma solo fra quelle che sono contenute sotto un genere ben determinato, si ricercasse quella che goda della proprietà del massimo o del minimo, certo il tuo metodo può essere adibito con giusto successo alle questioni di tal genere, mentre il mio non è di alcuna utilità, ma l'evoluzione del calcolo, spesso, a causa del numero, è irta di massime difficoltà. Ad esempio, se sul semiasse orizzontale, dato AC, si disegnassero infiniti quadranti ellittici



AD, AQ che differiscono in ragione del semiasse coniugato CD, CQ, e fra essi si ricercasse quell'AD, sul quale il corpo disceso nel vuoto, iniziante da A, rapidissimamente giungesse alla retta verticale CQ, l'equazione per la specie di quell'ellisse si trova, onde solo con l'avvicinamento può essere definito il valore del semiasse coniugato CD. Effettuati dunque gli avvicinamenti, si trova che deve essere $8CD^2 = 3AC^2$ ossia $CD = AC\sqrt{\frac{3}{8}}$. Vorrei dunque sapere se è vera questa soluzione, e qualora sia vera, se essa non si possa ottenere direttamente per mezzo di un metodo certo.

Della tua lettera, colma di così profonde meditazioni, ho parlato con l'illustre nostro presidente, Maupertuis, il quale insieme a me ha sinceramente ammirato la tua somma sagacia, e, nel contempo, ti ringrazia di tutto cuore per l'assunto patrocinio del principio di minima azione, e ritiene che dal tuo nome il novero dei soci della nostra Accademia verrà onorato non poco; e, alla prima occasione, farà in modo che il riconoscimento ti sia consegnato. Mi ha anche incaricato di chiederti se, per caso, vuoi scambiare l'incarico che ricopri a Torino con un altro in Germania, sotto gli auspici del nostro generosissimo Re, a cui ti vorrebbe raccomandare; per questo, ti chiedo dal profondo del cuore di farmi sapere riguardo a ciò; non potrebbe infatti accadermi nulla di più gradito che poterti parlare di persona, e godere della tua compagnia. Saluti ed ossequi, uomo eccellentissimo,

dal tuo devotissimo

L. Eulero.

Commento

Eulero commenta quelle osservazioni presenti nella lettere di Lagrange, e che sono già state commentate a pag. 113. Egli si mostra diffidente di fronte a tali affermazioni di Lagrange. Lo invita a riflettere sul fatto che le equazioni

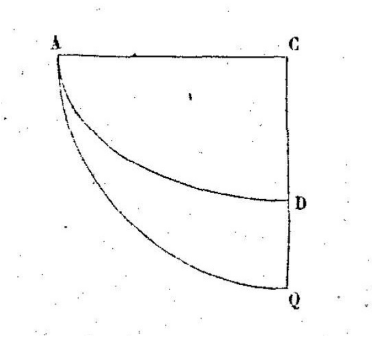
$$dL = 0, \qquad d^2L = 0\,, \qquad \text{riscritte come} \quad L = a, \qquad L = a + bx\,,$$

potrebbero condurre entrambe sempre alla medesima equazione $L = 0$. Eulero è molto restio a credere invece, che esse possano condurre ad equazioni diverse; le quali dovrebbero essere tutte soddisfatte dalla cura ricercata. Egli ritiene che la riscrittura della $\int L\,\delta y$ in $\int \delta y - dL \int^2 \delta y, \ldots$, indichi soltanto che qualora sia $L = 0$ allora ne consegue anche $dL = 0, \ldots$; il che è certamente vero, mentre non sussistono le condizioni per avere l'implicazione inversa. Inoltre Eulero formula la seguente congettura:

> Per quanto poi concerne le brachistocrone che passano per tre o più punti dati, sarei incline a credere che esse non siano curve continue, ma che sia opportuno tracciare un arco di cicloide che prosegue da un qualsivoglia punto al punto successivo, [...]. Qualora infatti il corpo rapidissimamente percorra una per una queste porzioni, compirà senza dubbio tutta la curva in un tempo brevissimo.

Quindi ritiene che la curva brachistocrona congiungente tre o più punti non sia una " curva continua", ma che sia costituita da archi di cicloide congiungenti i punti in oggetto. Infatti se il tempo di percorrenza per i tratti congiungenti i vari punti è minimo, allora sarà minimo anche il tempo di percorrenza globale. Precisiamo che, Eulero utilizza l'espressione "curva continua" con un significato diverso da quello attuale; per lui una funzione o una linea è detta continua se è definita ovunque dalla stessa espressione analitica, altrimenti è detta discontinua.

Infine Eulero chiede a Lagrange di confermare la veridicità della soluzione da lui ricavata al seguente quesito:



Si disegnino sul semiasse orizzontale dato AC, infiniti quadranti ellittici AD, AQ che differiscono in relazione al semiasse associato CD, CQ. Si cerchi fra essi quell'asse AD, sul quale il corpo discende da A a D nel vuoto, nel minor tempo possibile.

Secondo i suoi calcoli, si ottiene la relazione seguente:

$$8CD^2 = 3AC^2\,.$$

Eulero chiedeva espressamente se esistesse un "metodo certo" per ottenere questo risultato. Lagrange nella lettera del 19 maggio 1756, risponde scrivendo:

> Frattanto, per quanto concerne le tue opinioni riguardo all'ellisse dell'avvicinamento più rapido alla retta intersecata, non credo che la questione possa essere trattata per altra via che per approssimazioni; poiché infatti nell'ellisse vi sono due costanti, delle quali solo una è posta come variabile al fine di avere il valore differenziale per il tempo minimo, [...].

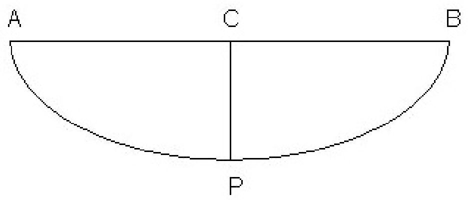
Lagrange continua poi dicendo, che in questo caso, l'integrale che deve essere differenziato, non può essere in alcun modo calcolato, se non per mezzo delle serie, e quindi per mezzo di approssimazioni.

In seguito Eulero tratta questo problema nel dettaglio in una memoria del 1773, “ De motu gravium citissimo super curvis specie datis”[2] [12].

Problema 2.

Dati su una retta orizzontale due punti A e B, tra tutte le semiellissi relative all'asse AB che si possono tracciare, definire quella APB lungo la quale un grave discende da A a B nel minor tempo possibile.[3]

Soluzione.



Dopo lunghi calcoli, Eulero giunge ad esprimere il rapporto tra il quarto di ellisse AP e il semiasse CP, del semiellisse cercato.

Egli scrive:

$$AP : CP = 1 : 0,61232\,. \tag{7.1}$$

Tale risultato è perfettamente in accordo con quello che Eulero chiede a Lagrange di confermargli nella presente lettera. Infatti:

$$0,61232 \sim \sqrt{\frac{3}{8}}\,,$$

pertanto la (7.1) può essere riscritta come:

$$CP = \sqrt{\frac{3}{8}}AP\,, \quad \text{ossia} \quad 8CP^2 = 3AP^2\ .$$

[2] “ De motu gravium citissimo super curvis specie datis” , Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 17, 1773, pag. 488-504

[3] “Problema 2.

7. Datis in recta horizontali binis punctis A et B describendas eam definire APB, super qua grave in A descendens citissime ad B perveniat.” da “ De motu gravium citissimo...” pag.496. della pubblicazione originale.

Capitolo 8

Lagrange a Eulero: lettera del 19 maggio 1756

LAGRANGE A EULERO.

Taurini, die 19 mai 1756.

Vir amplissime atque celeberrime, Fautor honoratissime,

Gratias, quas possum, maximas tibi ago, vir clarissime, neque unquam agere desinam pro tot, tantisque, quibus abundant nuperae literae tuae humanitatis, atque affectus erga me testimoniis, imprimisque pro singulari quae tibi mei cura est, dum suavissimae atque inaestimabilis consuetudinis tuae participem facere me posse studes. Equidem res iste, ut verum fatear, licet summopere ardua, ac pene impossibilis mihi hactenus visa sit, maximum tamen, et praecipuum votorum meorum semper constituit, unde me tibi, hac occasione, peculiari modo obstrictissimum, devinctissimumque esse debere agnosco. Quod itaque ad sedem meam in Germaniam prope te nunc transferendam attinet candide dicam, quod sentio, hoe mihi nempe gratissimum futurum, modo satis honesta, et commoda mihi statio offeratur; agitur enim de relinquenda domo, et patria, ubi vitam meam extra omnes angustias et difficultates transigo, praesertim cum jam professionem aliquam mathematicam in scholis Artilleriae obtinuerim, cum spe ad majora facile perveniendi.

Tu, vir clarissime, extra patriam tuam versaris adeoque, quae sint ibi externorum conditiones optime noscis; idcirco nullo me meliori modo in hoc negotio gerere posse existimo, quam tibi rem totam permittendo, qui tantis jam benevolentiae et affectus significationibus honorare me voluistis. Gratissimum mihi itaque fueris, maximamque tibi habebo gratiam, si, ubi statio aliqua illic mihi offeratur, de ea ejusque conditionibus judicium tuum mihi significare pro summa tua humanitate volueris; ipse enim regionum illarum penitus ignarus existo. Jam de itineris impensis non loquor, has enim ubi quis aliquo vocatur, reddi semper solere audio.

Interim te summopere rogatum volo, ut illustrissimo Praesidi omnes, quas potes maximas meo nomine reddas gratias, tum pro singulari quo me immeritum condecorari vult honore admissionis nempe in regiam Berolinensem Academiam, tum de eo etiam maxime quod me potentissimo ac munificentissimo Regi velit commendare; simulque ipsum facias certiorem quam devotum, gratissimumque me habeat, et habiturus semper sit debitorem pro inaestimabili, quem in me ostendit, favore suo ac patrocinio, quodque ut aeternum mihi frui detur oro, obtestorque.

Meditatiunculas meas de maximis et minimis, et de applicatione principii minimae actionis ad dynamieam totam tibi, ac illustrissimo Praesidi non displicuisse gaudeo vehementer. Ego in Mecanicae scriptis pro scholis nostris condendis occupatus, in istis versari amplius diutius non petui; nonnulla tamen ad haec splectantia haben, quae alia vice ubi majus suppetet tempus, communicabo. Sententiam tuam circa theorias quas proposueram formularum difierentialium pro maximis et minimis transformationes mihi probatur summopere. Interim quod ad ea attinet, quae de ellipsi citissimi appulsus ad sectam verticalem habes non puto rem alio modo quam per appropinquationes peragi posse; quia enim in ellipsi duo adsunt constantes, ex quibus una tantum ad habendum valorem differentialem pro minimo tempore variabilis ponitur, inservire hic nullo modo potest praeclarissima regola, quam in dissertatione tomi VII Acad. Petrop. dedisti, unde ipse valor differentialis per integrale quodpiam exprimi debet, cujus integrationem non *aliunde, quam per series habere posse existimo; interim sedulius super hanc rem meditabor. De principio minimae quantitatis actionis ego ita sentio, nempe si ad ea excellentissima, quae de ejus applicatione ad Mecanicam jam passim dedisti, adjungantur illa paucula, quae partim jam tecum communicavi, partim mecum adhuc habeo, tum ad motum corporum quotcunque inter se quomodocunque connexorum, tum etiam ad equilibrium,et motum fluidorum quorumvis spectantia; omnium tam staticorum, quam dynamicorum problematum universalem veluti clavem haberi posse; quae statim aequationes necessarias praebeat alias eruti difficillimas. Habet certe in hoc invento celeb. Auctor de quo sibi maxime glorietur. Interim vale et fave*

Amplit. tuae devotissimo
LUDOVICO DE LA GRANGE TOURNIER.

A Monsieur Euler, Directeur de l'Académie royale des Sciences de Berlin. – (Par vos très humbles serviteurs Charles Durando et fils, Banquiers à Turin.)

. . . .

LAGRANGE A EULERO.

Torino, giorno 19 maggio 1756.

O UOMO ECCELLENTISSIMO E CELEBERRIMO, RICERCATORE PREGEVOLISSIMO,

Ti rendo grazie con tutto il calore possibile, o uomo illustrissimo, e non cesserò mai di rendertele per i tanti e tanto grandi attestati della tua cortesia e del tuo affetto di cui abbondano le tue lettere recenti, e in particolare per la singolare cura che hai nei miei riguardi, nel momento in cui ti adoperi per potermi rendere partecipe della tua frequentazione. Certo quest'ultima cosa, a dire il vero, sebbene mi sia parsa finora assai ardua, e quasi impossibile, tuttavia costituì sempre il sommo e il principale dei miei desideri, cosicché, in questa circostanza, devo riconoscermi in modo particolare a te obbligato e vincolato. Per quanto riguarda, dunque, la possibilità di trasferire la mia cattedra in Germania, presso di te, ti dirò sinceramente ciò che penso, cioè che ciò mi sarebbe graditissimo, purché mi fosse garantita una collocazione abbastanza dignitosa, e comoda per me; infatti si tratta di lasciare la mia casa e la mia patria, ove trascorro la mia vita al di fuori di tutte le angustie e le difficoltà, tanto più che ho già ottenuto un incarico matematico nella scuola di artiglieria di Torino[1], con la speranza di poter facilmente giungere ad incarichi più importanti. Tu, uomo illustrissimo, vivi fuori dalla tua patria, e perciò ben sai quali siano le migliori condizioni delle circostanze esterne; perciò credo di non potermi comportare, in questa questione, in nessun modo meglio che affidando a te tutta la faccenda, a te che mi hai voluto onorare con tanto grandi manifestazioni di benevolenza e di affetto. Mi faresti dunque cosa assai gradita, e ti sarei immensamente grato, se, qualora mi venga offerta una cattedra lì presso di te, mi volessi trasmettere la tua opinione riguardo ad essa e alle sue condizioni; io infatti sono del tutto ignaro di quelle regioni. Non parlo delle spese di viaggio, poiché so che esse di solito vengono sempre rimborsate, quando qualcuno viene chiamato altrove.

Nel frattempo, ti prego di tutto cuore di ringraziare a mio nome, caldamente, il Presidente[2] non solo per l'immeritato onore, che egli vuole rendermi, di accogliermi nell'Accademia di Berlino, ma soprattutto del fatto che ha voluto raccomandarmi al potentissimo e generosissimo Re[3]; e, nel contempo, di informarlo della mia devozione e della mia gratitudine nei suoi riguardi, e del fatto che mi considererò sempre suo debitore, per il favore e il sostegno, preziosissimi, che mostra verso di me, e di cui prego ed invoco mi sia concesso di fruire per sempre.

[1]Lagrange era stato nominato Professore di Matematica nelle Scuole d'Artiglieria di Torino; vedi nota 1 della lettera del 20 novembre 1755 Cap. 6.

[2]All'epoca Maupertuis era presidente dell'Accademia delle Scienze di Berlino; incarico che ricoprì dal 1746 al 1753.

[3]Federico II, detto Federico il Grande, fu Re di Prussia dal 1740 fino alla sua morte ceh avvenne nel 1786.

Sono davvero lietissimo che le mie piccole riflessioni sui massimi e i minimi, e sull'applicazione del principio della minima azione a tutta la dinamica, non siano dispiaciute all'illustrissimo Presidente. Io, occupato nella preparazione degli scritti di meccanica per le nostre scuole, non mi sono potuto dedicare più a lungo e più ampiamente a codesti argomenti; ho, tuttavia, alcune riflessioni ad essi pertinenti, che in altra circostanza, quando avrò tempo, ti comunicherò. La tua opinione in merito alle teorie che avevo proposto delle formule differenziali per le trasformazioni dei massimi e dei minimi mi trova del tutto concorde. Frattanto, per quanto concerne le tue opinioni riguardo all'ellisse dell'avvicinamento più rapido alla retta intersecata, non credo che la questione possa essere trattata per altra via che per approssimazioni; poiché infatti nell'ellisse vi sono due costanti, delle quali solo una è posta come variabile al fine di avere il valore differenziale per il tempo minimo, qui in nessun modo può valere l'eccelsa regola che hai fornito nella dissertazione del tomo VII dell'Accademia Pietroburghese[4], in base alla quale deve essere espresso il valore del differenziale di un certo integrale, la cui integrazione non credo si possa avere, se non per mezzo delle serie; nel frattempo, mediterò più assiduamente intorno a tale questione. Riguardo al principio di minima azione, penso così, che se a quelle eccellentissime spiegazioni che già hai fornito circa la sua applicazione alla Meccanica[5] si aggiungessero quelle, minori, che in parte ti ho già comunicato, in parte ho ancora con me, concernenti sia il moto dei corpi di qualunque genere, e in qualsiasi maniera connessi, sia le questioni concernenti l'equilibrio e il moto dei fluidi di qualsiasi natura, allora facilmente si potrebbe ottenere, per così dire, la chiave universale di tutti i problemi sia statici che dinamici; la quale immediatamente fornirebbe le

[4]"De linea celerrimi descensus in medio quocunque resistente", Eulero, Comm. Ac. Petrop. 7, 1734-1735, (E.42).

[5]Le numerose memorie di Eulero riguardanti il principio di minima azione sono raccolte dentro al volume "Opera Omnia" serie II, vol. 5, in particolare quelle a cui fà riferimento Lagrange in questo passaggio sono: E.145 ed E.146 pubblicate nel 1750; E.176, E.177, E.181 ed E.182 pubblicate nel 1752; E.186,E.197, E198, E.199 ed E.200 pubblicate nel 1753.

equazioni necessarie, difficilissime da ricavare altrove. Certo grazie a questa scoperta l'Autore ha di che essere sommamente glorificato. Frattanto, saluti ed ossequi

dal tuo devotissimo
LUDOVICO DE LA GRANGE TOURNIER.

Al Signor Eulero, Direttore dell'Accademia delle Scienze di Berlino.
– (dai vostri umili servitori Charles Durando e figlio,
Banchieri a Torino.)

Commento

Prima di passare ad esaminare gli argomenti affrontati da Lagrange nella presente lettera, riportiamo alcuni dei contenuti della precedente lettera di Eulero a Lagrange. In quella lettera del 24 aprile 1756, Eulero parla di due lettere che egli ricevette da Lagrange; una di esse è andata perduta. Dal verbale dell'Accademia di Berlino, si evince effettivamente che Lagrange aveva inviato ad Eulero una lettera ed una memoria concernenti il principio di minima azione. Tale lavoro, era il frutto di quelle ricerche sul principio di minima azione, di cui Lagrange aveva già accennato ad Eulero nella sua prima lettera del 28 giugno 1754. La lettera e la memoria, erano state ricevute da Eulero prima del 24 aprile 1756, poiché egli ne parla nella suddetta lettera, ma vennero registrate nel verbale dell'Accademia solo il 6 maggio: "Il Sig. Eulero ha consegnato una lettera, ed una memoria del Sig. Lagrange Tournier, di Torino, riguardanti il principio di minima azione ."(Winter Registres, pag. 223). Purtroppo, nè la lettera nè la memoria citate sono state conservate. Sempre nella lettera del 24 aprile 1756, Eulero comunica a Lagrange di aver mostrato a Maupertuis queste sue ricerche.

> Della tua lettera, colma di così profonde meditazioni, ho parlato con l'illustre nostro presidente, Maupertuis, il quale insieme a me ha sinceramente ammirato la tua somma sagacia, e, nel contempo, ti ringrazia di tutto cuore per l'assunto patrocinio del principio di minima azione, e ritiene che dal tuo nome il novero dei soci della nostra Accademia verrà onorato non poco; e, alla prima occasione, farà in modo che il riconoscimento ti sia consegnato.

All'epoca Maupertuis era presidente dell'Accademia delle Scienze di Berlino; incarico che ricoprì dal 1746 al 1759. Non desta stupore il fatto che anche Maupertuis, come Eulero, abbia apprezzato molto le prime ricerche di Lagrange sulla dinamica. Maupertuis attribuiva la massima importanza al principio di minima azione, che lui riteneva una legge suprema della natura. Lo stesso Maupertuis scrisse a Lagrange una lettera; la quale purtroppo non è stata rinvenuta. Di essa sappiamo solamente che riportava l'intenzione di Maupertuis di fare pubblicare all'Accademia di Berlino alcune cose riguardanti le ricerche di Lagrange sul principio di minima azione. Maupertuis aveva apprezzato il lavoro di Lagrange a tal punto da manifestare il proposito di farlo nominare membro dell'Accademia e di proporgli di trasferirsi a Berlino. Di conseguenza Eulero propone a Lagrange, in vece di Maupertuis, di trasferirsi in Germania:

> Mi ha anche incaricato di chiederti se, per caso, vuoi scambiare l'incarico che ricopri a Torino con un altro in Germania, sotto gli auspici del nostro generosissimo Re, a cui ti vorrebbe raccomandare; [...].

Veniamo dunque alla risposta di Lagrange, e quindi alla presente lettera del 19 maggio 1756. Lagrange scrive a Eulero:

> Sono davvero lietissimo che le mie piccole riflessioni sui massimi e i minimi, e sull'applicazione del principio della minima azione a tutta la dinamica, non siano dispiaciute all'illustrissimo Presidente.

Egli si dichiara lusingato della proposta di trasferimento, dicendo che sarebbe stato lieto di accettare un incarico in Germania, a patto però che fosse per lui vantaggioso abbandonare la cattedra che ricopriva a Torino. Come si trova scritto nella sua lettera del 20 novembre 1755, Lagrange era stato nominato Professore di Matematica nelle Scuole d'Artiglieria di Torino. Pertanto si affida al giudizio di Eulero per avere informazioni in merito alla posizione che potrebbe essergli offerta in Germania. Infine Lagrange scrive:

> Riguardo al principio di minima azione, penso così, che se a quelle eccellentissime spiegazioni che già hai fornito circa la sua applicazione alla Meccanica si aggiungessero quelle, minori, che in parte ti ho già comunicato, in parte ho ancora con me, concernenti sia il moto dei corpi di qualunque genere, e in qualsiasi maniera connessi, sia le questioni concernenti l'equilibrio e il moto dei fluidi di qualsiasi natura, allora facilmente si potrebbe ottenere, per così dire, la chiave universale di tutti i problemi sia statici che dinamici; [...].

Con queste parole egli lascia intendere di essere riuscito a formulare il principio di minima azione nel campo della meccanica in maniera abbastanza generale, e che tramite il suo "metodo delle variazioni" sappia come applicarlo.

Il principio di minima azione era stato al centro di una controversia per la sua paternità; la questione era complessa, poiché erano stati molti i protagonisti della vicenda. La sezione seguente presenta le principali tappe riguardanti l'evoluzione della questione sul principio di minima azione.

Ma torniamo ora alla lettera di Lagrange del 19 maggio 1756. Quando essa arrivò a Berlino, sfortunatamente Maupertuis aveva già lasciato la Prussia a causa della sua lunga e grave malattia. Dopo la sua partenza avvenuta il 6 giugno 1756, Maupertuis dirigeva l'Accademia, unicamente per corrispondenza, soprattutto avvalendosi di Eulero come intermediario.

Lagrange venne nominato membro dell'Accademia di Berlino il 2 settembre 1756. Tale notizia gli venne comunicata dallo stesso Eulero, con la sua lettera seguente. Esattamente il 2 settembre 1756, egli scrive:

> Alle tue lettere a me certo graditissime non ho voluto rispondere prima di aver comunicato il tuo pensiero all'illustre nostro Presidente, [...] il quale [...], mi incaricò di raccomandarti quanto prima alla nostra Accademia, e di fare in modo di inserirti nel novero dei nostri Soci. E, dato che questo è stato compiuto oggi con grande tripudio, riceverai il consueto diploma con questa lettera. Ma l'illustre nostro Presidente mi ha ordinato che dopo il suo ritorno si adopererà presso il nostro Re per ottenere una collocazione degna dei tuoi meriti.

Inoltre Eulero consiglia a Lagrange di scrivere direttamente al Presidente Maupertuis. Consiglio che Lagrange ha certamente seguito, di ciò si può avere conferma leggendo la lettera del 5 ottobre 1756.

In seguito Maupertuis sollecitò ulteriormente Eulero, ad agire in favore del trasferimento di Lagrange. Ma il 15 gennaio 1757 Eulero gli rispose scrivendo:

> Non vediamo nessuna possibilità di ingaggiare il Sig. Lagrange, poiché dato le attuali circostanze nessuno avrebbe osato fare la proposta al Re.

Quando parla di "queste circostanze", Eulero fa riferimento all'apertura delle ostilità della guerra dei Sette anni [6], che aveva indotto l'Accademia di Berlino a limitare le sue attività. L'interruzione di tre anni nella relazione epistolare tra Eulero e Lagrange, che venne causata dallo scoppio del conflitto, e il fatto che Maupertuis non rientrò più a Berlino, sono eventi sufficienti a spiegare il fallimento di questo primo progetto di trasferimento a Berlino di Lagrange.

Una volta terminata la guerra, durante il soggiorno di Lagrange a Parigi del 1763-1764, D'Alembert gli propose di farlo invitare a Berlino dal Re Federico II. Ma Lagrange preferì rinunciare almeno provvisoriamente alla proposta. Il rifiuto fu dovuto sostanzialmente a due motivi: in primis, egli sperava in un successivo miglioramento della sua posizione a Torino, inoltre temeva che a Berlino sarebbe rimasto troppo nell'ombra di Eulero, poiché egli era considerato il più grande matematico dell'epoca. I tempi risultarono invece propizi per il trasferimento, quando il 29 maggio 1766, Eulero si trasferì a Pietroburgo accettando l'offerta di Caterina II. Così Lagrange accettò l'offerta officiale del Re Federico II; si trasferì a Berlino ed occupò la cattedra lasciata libera da Eulero.

[6] La guerra dei sette anni fu un conflitto che si svolse tra il 1756 e il 1763 e coinvolse le principali potenze europee dell'epoca. I due schieramenti coinvolti nel conflitto erano la coalizione formata da Austria, Francia, Russia, Polonia e Svezia e l'alleanza fra Gran Bretagna e Prussia. La Prussia era la nuova potenza europea, disponeva di una formidabile macchina da guerra e, soprattutto, di un grande e ambizioso condottiero, il re Federico II.

8.1 Il principio di minima azione: Maupertuis, Eulero e Lagrenge (1740-1760)

La genesi del principio di minima azione è legata allo studio della propagazione della luce. Nel seicento era ormai nota, quella che oggi chiamiamo legge di Snell. I tentativi che vennero fatti per trasformare in una legge fisica, quella che era soltanto una constatazione geometrica, portarono ad importanti riflessioni.

Fermat ricercò una spiegazione del fenomeno, basandosi sul principio secondo cui la natura agisce sempre scegliendo i mezzi più semplici. Secondo Fermat, un raggio di luce segue il cammino più corto o il più rapido. Pertanto secondo Fermat, la legge di rifrazione, deve essere ricavata dal principio secondo cui, la luce rende minimo il tempo di percorrenza.

Anche Leibniz riteneva che la natura si attenesse a ciò che è più determinato, seguendo la "semplicità delle vie". Leibniz sosteneva tuttavia che ciò non implicasse necessariamente il rendere minima una certa quantità.

Maupertuis si inserisce in questi discorsi, presentando una memoria all'Accademia delle scienze di Parigi il 15 aprile 1744. Ma facciamo un attimo un piccolo passo indietro. Il 20 febbraio 1740, Maupertuis presenta la memoria "La loi du repos des corps", nella quale presenta quattro "leggi della natura". Tra esse troviamo un nuovo principio, che esprime le condizioni di equilibrio per un sistema di corpi, attratti verso un centro di forze. La novità del principio di Maupertuis consiste nel poter esprimere la condizione di equilibrio di un sistema come condizione di massimo o minimo di una singola equazione generale. In questo vago principio generale si è poi riconosciuta una formulazione del principio di minima azione.

Maupertuis enunciò in maniera esplicita ed inconfutabile il principio di minima azione, solo nella sua memoria del 1744, che riguarda appunto il tema della rifrazione della luce. La memoria in questione porta il titolo di "Armonia tra le differenti leggi della natura, che fino ad ora apparivano incompatibili "[7]. Maupertuis scrive:

> La natura, nella produzione dei suoi effetti, agisce sempre per le vie più semplici. [...] per la quale la quantità di azione è la minima.[8]

Secondo Maupertuis infatti Fermat aveva sbagliato nell'individuare la corretta quantità che la natura tende a minimizzare. Egli si chiese, perché si dovrebbe preferire il tempo allo spazio? Così li considerò entrambi, e cercò di individuare una quantità che misurasse l'*azione* della natura. Maupertuis postula che questa *azione* debba essere proporzionale allo spazio e alla velocità; ed è questa quantità che deve essere poi assoggettata ad un principio di minimo. Il principio del tempo minimo di Fermat, viene quindi a configurarsi come una conseguenza di questo principio più generale. In un lavoro successivo del 1746, Maupertuis estese il principio di minima azione al caso della meccanica. In questo caso, egli definisce l'*azione* come proporzionale alla massa, alla velocità ed allo spazio percorso, ed enuncia il principio nella forma seguente:

> L'azione è proporzionale al prodotto della massa per la velocità e lo spazio. Ecco dunque il principio così saggio, così degno dell'Essere Supremo: quando avviene qualche cambiamento nella natura la Quantità d'Azione necessaria per quel cambiamento è la minima possibile.[9]

Anche Eulero diede il suo contributo al principio di minima azione. Nelle due appendici del "Methodus inveniendi" (1744), Eulero precisò ed applicò il principio di minima azione, trasformandolo in un'affermazione scientifica. In apertura della prima appendice "De Curvis Elasticis", egli scrive:

---

[7] "Accord de différentes loix de la nature qui avoient jusqu'ici paru incompatibles", Acc.delle scienze di Parigi, 1744.

[8] "la Nature dans la production de ses effets, agit toujours par les moyens les plus simples. [...] par lequel la quantité d'action est la moindre." a pag.421-423 di "Accord de différentes loix de la nature qui avoient jusqu'ici paru incompatibles"

[9] "L'action est proportionnelle au produit de la masse par la vitesse et par l'espace. Maintenant, voici ce principe, si sage, si digne de l'Etre Supreme: lors qu'il arrive quelque changement dans la Nature, la Quantité d'Action, nécessaire pour ce changement, est la plus petite qu'il soit possible."

> Nulla accade nel mondo, senza che qualche condizione di massimo o minimo non si riveli.[10]

Mentre, la seconda appendice dal titolo " De motu projectorum in medio non resistente, per Methodum maximorum ac minimorum determinando" (ossia "Sul moto dei corpi in un mezzo non resistente, determinato tramite il metodo dei massimi e minimi"), è di grande importanza, in quanto contiene la formulazione del principio di minima azione data da Eulero. Eulero lo formula nel seguente modo: pone la massa del corpo pari ad M, il quadrato della velocità pari a v, e l'ascissa curvilinea pari a ds; ora tra tutte le curve congiungenti il punto iniziale e quello finale, egli sceglie quella che rende minimo l'integrale $\int M\sqrt{v}\, ds$, o nel caso M sia costante, quella che rende minimo l'integrale $\int \sqrt{v}\, ds$. In conclusione a questa appendice Eulero sottolinea però le difficoltà che si incontrano nell'applicare questo principio al moto dei corpi in mezzi resistenti; egli non riuscì in alcun modo a spiegare il motivo di tali difficoltà. Sarà poi Lagrange a mostrare nel 1788 con la sua "Mécanique Analytique", che il principio di minima azione è valido in generale per le forze conservative, mentre in caso contrario l'integrale d'azione può anche non essere un estremo.

Per quanto riguarda la memoria di Lagrange sul principio di minima azione andata perduta, risulta chiaro che essa non contenesse ancora tutti i risultati presenti nella prima pubblicazione di Lagrange sulla meccanica analitica. Infatti nella presente lettera egli scrive:

> [...] sull'applicazione del principio della minima azione a tutta la dinamica, [...]; ho, tuttavia, alcune riflessioni ad essi pertinenti, che in altra circostanza, quando avrò tempo, ti comunicherò.

La prima pubblicazione di meccanica di Lagrange porta il titolo di "Application de la méthode précédente à la solution de différens problèmes de

[10] "nihil omnino in mundo contingint, in quo non maximi minimive ratio quaepiam eluceat." a pag. 245 del "Methodus inveniendi"

dynamique"[11] (1762). Nelle prime righe di questa memoria, Lagrange ricorda il principio di minima azione, formulato da Eulero nella seconda appendice del "Methodus inveniendi", per il caso di un punto materiale soggetto ad una forza. In seguito nella memoria, afferma di poter generalizzare quello stesso principio per poterne sfruttare le applicazioni a tutti i problemi di dinamica. In particolare, Lagrange estese il principio al caso di un sistema di corpi. In seguito nel 1773 con la memoria "Sur la méthode des variations"[12], egli sottolinea che questa formulazione

> e soprattutto il modo in cui viene sfruttata per risolvere con la massima semplicità e generalità tutti i problemi della dinamica, è interamente dovuta a me.[13]

Lgrange presentò la prima chiara formulazione del principio di minima azione, e inoltre soprattutto fornì una tecnica matematica per la sua applicazione.

Ad ogni modo, la paternità del principio di minima azione, è attribuita a Maupertuis grazie al suo lavoro del 1740, anche se è impensabile che egli avesse già colto, quello che poi espose nell'opera del 1744. Infatti è solo nel 1743 che D'Alembert enunciò la sua idea di lavoro virtuale, che servì per l'unificazione delle leggi di satatica e dinamica. Senza questo concetto Maupertuis non avrebbe potuto cogliere le connessioni tra il suo lavoro del 1740, e quello del 1744. Effettivamente si è a lungo dibattuto sulla paternità di tale principio. Nel 1751 il matematico svizzero König aveva affermato che il principio era già contenuto in una lettera di Leibniz (1707), ma non era stato in grado di produrla. Eulero prese nettamente la difesa di Maupertuis. Anche Voltaire attaccò Maupertuis (ed Eulero) nella sua "Diatribe du Docteur Akakia" (1752). Le lettere in questione invece rivelano che, anche Lagrange, come Eulero, attribuiva la paternità di tale principio allo stesso Maupertuis. Infatti Eulero il 24 aprile 1756, scrive:

[11] "Application de la méthode précédente à la solution de différens problèmes de dynamique", Misc. Taurin. II, 1762 (L.8)

[12] "Sur la méthode des variations", Misc. Taurin. IV, 1773 (L.29)

[13] Lagrange scrive: "et surtout la manière de s'en servire pour résoudre avec la plus grande simplicité et généralité tous les problèmes de Dynamique, m'est entièrement due.

> Della tua lettera, colma di così profonde meditazioni, ho parlato con l'illustre nostro presidente, Maupertuis, il quale [...], ti ringrazia di tutto cuore per l'assunto patrocinio del principio di minima azione, [...].

In conclusione è doveroso sottolineare, dato il soggetto trattato, che il principio di minima azione di Maupertuis, divenne il punto di partenza di una trattazione della meccanica basata su una nuova metodologia matematica; essa contribuì all'origine di quella branca dell'analisi matematica chiamata calcolo delle variazioni. Tale metodo infatti consiste nel scegliere fra tutte le traiettorie che un corpo potrebbe percorrere da un punto ad un altro, quella che rende minima l'azione.

Capitolo 9

Eulero a Lagrange: lettera del 2 settembre 1756

EULERO A LAGRANGE.

Berolini, die 2 sept. 1756.

Vir clarissime ac prestantissime,

Ad litteras tuas mihi quidem jucundissimas prius respondere nolui quam sententiam tuam cum illustri Praeside nostro, nunc in Gallia degente, communicavissem: qui uti tuum praestantissimum ingenium mecum maxime admiratur ita mihi mandavit, ut quantocius lo Academiae nostrae commendarem, et in numerum Sociorum nostrorum adscribi curarem. Quod cum summo applausu hodie sit expeditum, consuetum diploma cum his litteris accipies. Ceterum ill. Praeses noster mihi perscripsit, se post reditum suum apud Regem nostrum omnem operam esse adhibituram, ut tuis meritis dignam stationem obtineat. Cum is tam propenso in te sit animo, haud abs re fore arbitror, si ad ipsum literas dare volueris, quas ita inscribere poteris: A M. de Maupertuis, Prèsident de l'Acadèmie royale des Sciences et Belles-Lettres de Prusse, à Saint-Malo, quo loco hyemem commorari decrevit. Interim Academia nostra profundissimas tuas meditationes summo cum desiderio expectat, quibus in posterum nostri Commentarii exornentur.

Vale, Vir clarissime, faveque

ingenii tui sagacissimi admiratori candidissimo,
L. Eulero.

. . . .

EULERO A LAGRANGE.

Berlino, giorno 2 settembre 1756.

O uomo illustrissimo ed eccellentissimo,

Alle tue lettere a me certo graditissime non ho voluto rispondere prima di aver comunicato il tuo pensiero all'illustre nostro Presidente, che ora si trova in Francia: il quale, dato che insieme a me ammira sommamente il tuo eccellentissimo ingegno, mi incaricò di raccomandarti quanto prima alla nostra Accademia, e di fare in modo di inserirti nel novero dei nostri Soci. E, dato che questo è stato compiuto oggi con grande tripudio, riceverai il consueto diploma con questa lettera. Ma l'illustre nostro Presidente mi ha ordinato che dopo il suo ritorno si adopererà presso il nostro Re per ottenere una collocazione degna dei tuoi meriti. Dato che egli è così ben disposto nei tuoi confronti, non credo sarà fuori luogo se vorrai inviargli una lettera, che potrai indirizzare così: *Al Signore de Maupertuis, Presidente dell'Accademia Reale delle Scienze e Lettere di Prussia, a Saint-Malo*, ove ha deciso di trascorrere l'inverno. Frattanto, la nostra Accademia attende con sommo desiderio le tue profondissime meditazioni, da cui nostri i Atti sarebbero impreziositi agli occhi dei posteri.

Saluti, o uomo eccelso, ed ossequi

dal sincerissimo ammiratore del tuo ingegno,
L. Eulero.

Capitolo 10

Lagrange a Eulero: lettera del 5 ottobre 1756

LAGRANGE A EULERO.

Dabam Taurini, die 5 8^{bris} 1756.

Vir Amplissime et celeberrime, Fautor honoratissime.

Litteras tuas mihi quam maxime iucundissimas elapsa hebdomada accepi, ex quibus, magis, magisque affectionem tuam in me singularem, ac benevolentiam perspicere potui. Quod enim in Amplissimum Berolinensium Academicorum ordinem plane immeritus allectus sim, id fere totum opera tua fuisse factum haud quaquam ignoro; nec minus etiam tibi, tuisque non levis ponderis commendationibus debere agnosco, quod Illustrissimus Praeses Dominus De Maupertuis tam propensum in me animum ostendat, dum se quam primum apud Regem munificentissimum curaturum asserit, ut satis commodam in regionibus vestris obtineam stationem, qua quidem re nihil mihi certe gratius, acceptiusque accidere posset. Quamobrem tibi pro tot, tantisque beneficiis immortales ago gratias, nec unquam, dum vivam, agere desinam. Quod mihi porro suades, ut ad ipsum Praesidem litteras dem, id mirifice mihi placet, ideoque quo citius, meliusque potero rem istam peragere mihi cordi erit.

Cum non multis ante diebus super formulas illas pro curvis, maximi, minimique proprietate praeditis inveniendis meditarer, simulque animadverterem in ipsarum applicatione ad principium minimae quantitatis actionis Domini De Maupertuis pro resolutione problematum mechanicorum, oportere ut ambae cohordinatae variabiles ponantur quo omnes necessariae aequationes haberi possint, statim cogitavi si hac ratione etiam problemata alia maximi, minimique naturam postulantium, tractentur, rem ipsam cum majori fortassis universalitate confici posse. Et quidem, binis cohordinatis variabilibus statuendo, fit ut in valore differentiali ex formula orto duo introducantur differentialia nempe δx, *et* δy, *quorum proinde coeficientes seorsim nihilo sunt aequandi. Porro quum valor differentialis ex variatione unius cohordinatae secundum meam methodum constet duobus, ita dicam, partibus ex quarum una habetur aequatio pro curva, et ex altera determinantur constantes in ipsa ingrediendae, secundum diversas problematis conditiones, positionem duarum variabilium, reperi quidem maiorem aliquam universalitatem formulae inducere, quod ad hanc secundam partem attinet; non vero quod ad primam, eandem enim semper oriri pro curva aequationem deprehendi sive ipsius* δx *sive ipsius* δy *coefficiens nihilo aequetur. Quod quidem quum quam maxime veritati consentaneum videatur quippe quod una tantum sit curva, quae uni ac determinato problemati satisfacere posse debeat; attamen ipsum a priori, seu ex ipsis formulis generalibus demonstrare nondum adhuc potui, licet in opinione sim id fieri posse debere. Si tibi, Vir Acutissime, et in huiuscemodi Versatissime ista paululum respicere aliquando vacaret, me certe non parum adstringeres, ubi praestantissimarum cogitationum tuarum partioipem me reddere velles.*

Quaeratur exempli gratia curva brachystocrona; formula est $\int \dfrac{ds}{\sqrt{x}}$; *unde esse debet*

$$\delta \int \frac{ds}{\sqrt{x}} = \int \left(\frac{dy}{ds\sqrt{x}}\,\delta\,dy + \frac{dx}{ds\sqrt{x}}\,\delta\,dx - \frac{ds}{2\,x\sqrt{x}}\,\delta x \right)$$
$$= \frac{dy}{ds\sqrt{x}}\,\delta y + \frac{dx}{ds\sqrt{x}}\,\delta x - \int \left(d\frac{dy}{ds\sqrt{x}}\,\delta y + \left(d\frac{dx}{ds\sqrt{x}} + \frac{ds}{2\,x\sqrt{x}} \right) \delta x \right) = 0;$$

unde pro curva quia nulla datur relatio indefinita inter δx, *et* δy, *esse de-*

bet seorsim $d\dfrac{dy}{ds\sqrt{x}} = 0$; *ex qua fit* $a\,dy^2 = x\,ds^2$; *et* $d\dfrac{dx}{ds\sqrt{x}} + \dfrac{ds}{2\,x\sqrt{x}} = 0$, *quae multiplicata per* $\dfrac{2\,dx}{ds\sqrt{x}}$ *et integrata reducitur item ad* $a\,dy^2 = x\,ds^2$; *ut supra. Porro si datum sit punctum ad quod corpus pervenire debeat, tum esse debebit tam* δx, *quam* δy *in fine curvae* $= 0$; *unde evanescent per se membra constantia. Si vero quaeratur curva citissimi appulsus ad datam aliam, hoc casu, ponendo cohordinatas pro ista data* X, *et* Y, *esse debebit* $\delta x : \delta y = dX : dY$; *et simul habebitur* $\dfrac{dy\,\delta y + dx\,\delta x}{ds\sqrt{x}} = 0$ *seu* $dy\,dY + dx\,dX = 0$, *quod indicat curvas se mutuo ad angulos rectos secare debere. Unde patet formulam ipsam differentialem solam abunde sufficere pro resolvendo problemate quacunque sub conditione proponatur. In prioribus litteris me tibi scripsisse memini posse me hac mea methodo problema de curvis, maximi, minimique proprietate gaudentibus quocunque casu resolvere, non igitur indignaberis si leviusculas meas super hac re cogitationes hisce subjunxero.*

Sit itaque $\int Z$ *formula maxima, minimave facienda, utcunque* Z *sit per* x, *et* y *eorumque differentialia datum, si aequatio, quae ipsum determinat, per* δ *differentietur, non poterit certe ipsa huiuscemodi formam non adipisci seu*

$$\delta Z + m\,\delta dZ + n\,\delta d^2 Z + p\,\delta d^3 Z + \cdots = N\,\delta y + P\,\delta dy + Q\,\delta d^2 y + \ldots$$

(ponendo brevitatis gratia y *tantum variabile). Dicatur seoundum hoc membrum* δY; *et secundum ea quae alibi dicta sunt ipsa transibit in*

$$\delta Z + m\delta dZ + n\,\delta d^2 Z + p\,\delta d^3 Z + \cdots = \delta Y\,.$$

Porro in aequatione huius formae generatim observo quantitatem δZ *hac ratione exprimi posse*

$$\delta Z = A \int B \int C \int \frac{\delta Y}{p\,A\,B\,C}$$

ubi A, B, C *sunt litterae assumptitiae ex aequatione data determinandae; ut determinentur itaque accipiantur differentialia huius valoris ipsius* δZ *et* *in superiore aequatione substituantur et terminis ordinatis emerget*

$$
\begin{aligned}
&(A + m\,dA + n\,d^2A + p\,d^3A)\int B\int C\int\frac{\delta Y}{p\,A\,B\,C}\\
&\quad+\big[m\,A\,B + n(B\,dA + d\cdot A\,B) + p(B\,d^2A + d\cdot(B\,dA + d\cdot A\,B))\big]\times\int C\int\frac{\delta Y}{p\,A\,B\,C}\\
&\quad+[n\,A\,B\,C + p(d\cdot A\,B\,C + B\,C\,dA + C\,d\cdot A\,B)]\times\int\frac{\delta Y}{p\,A\,B\,C} = 0
\end{aligned}
$$

ideoque, ut in litteris superioribus notavi, si abscissa pro qua curva propietate data praedita esse debet sit a *fiatque, posito* $x = a$,

$$\int A = F, \quad \textit{et} \quad F - \int A = R\,;$$

denuo ubi $x = a$,

$$\int R\,B = G, \quad \textit{et} \quad G - \int R\,B = S\,;$$

et interum posito $x = a$

$$\int S\,C = H, \quad \textit{et} \quad H - \int S\,C = T\,,$$

obtinebitur, casu quo $x = a$

$$\delta\int Z = \int\frac{T\,\delta Y}{p\,A\,B\,C}$$

ex quo pro curva oritur aequatio (restituo loco δY *suo valore)*

$$\frac{T\,N}{p\,A\,B\,C} - d\frac{T\,P}{p\,A\,B\,C} + d^2\frac{T\,Q}{p\,A\,B\,C} - \cdots = 0\,.$$

Coniungendo nunc hanc aequationem cum tribus superioribus, eliminabuntur quantitates A, B, C *cum suis differentialibus et aequatio proveniens erit pro curva quaesita. Eodem modo patet operando in casu quo altioris gradus ipsius* δZ *difierentialia in aequatione occurrant. An methodus ista sit genuina, an alia potior existat, tuum nunc esto iudicium. Haec sunt, Vir Clarissime, praecipua capita cogitationum, quas hactenus super hac materia habui, et quibus si non omnimode absoluta sit, saltem ei parum deesse puto. Interim vero si me ad superficies hac methodo maximi, minimique* *proprietate praeditas inveniendas converto, maximis me obrutum invenio difficultatibus. Sit exempli gratia proposita invenienda superficies, quae inter omnes (ita dicam) isoperimetras, maxirnam contineat soliditatem. Formula pro soliditate est* $\iint z\,dx\,dy$ *unde differentiata per* δ *fiet eius valor differentialis* $\iint dx\,dy\,\delta z$ *(pono* dx*, et* dy *constantia). Formula vero pro superficie est* $\iint dx\,dy\sqrt{1+P^2+Q^2}$ *posito esse* $dz = P\,dx + Q\,dy$*; differentietur pariter et fiet eius differentiale*

$$\iint dx\,dy\left(\frac{P\,\delta P + Q\,\delta Q}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}\right).$$

Porro retinendo eundem notandi modum, quo tu, Vir Clarissime, usus es Â§ XIX dissertationis de Cordis vibrantibus in memoriis Academiae Berolinensis anni 1753

$$P = \left(\frac{dz}{dx}\right) \quad \text{unde} \quad \delta P = \left(\frac{d\delta z}{dx}\right); \qquad Q = \left(\frac{dz}{dy}\right) \quad \text{et} \quad \delta Q = \left(\frac{d\delta z}{dy}\right);$$

ideoque valor differentialis

$$\iint dx\,dy\left(\frac{P\left(\frac{d\delta z}{dx}\right) + Q\left(\frac{d\delta z}{dy}\right)}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}\right).$$

quod reduco ad

$$\int dy\frac{P}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}\,\delta z + \int dx\frac{Q}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}\,\delta z$$

$$-\iint dx\,dy\left[\left(\frac{d\frac{P}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}}{dx}\right) + \left(\frac{d\frac{Q}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}}{dy}\right)\right] \times \delta z$$

unde habeatur pro superficie aequatio

$$a\,dx\,dy - \left[\left(\frac{d\frac{P}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}}{dx}\right) + \left(\frac{d\frac{Q}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}}{dy}\right)\right] \times dx\,dy = 0$$

seu

$$\left(\frac{d\frac{P}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}}{dx}\right) + \left(\frac{d\frac{Q}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}}{dy}\right) = a\,;$$

ex qua quomodo generaliter aequatio finita pro superficie erui possit non video; difficultas enim maxima ex hoc oritur quod unum differentiale, variente solum x, *alterum solo* y *accipiendum sit. Huic quidem aequationi spheram satisfacere calculo inito deprehenditur facile, sed hic est particularis; multo enim latius ipsa sese extendit. Quod vero attinet ad membra*

$$\int dy \frac{P}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}\delta z \quad \text{et} \quad \int dx \frac{Q}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}\,\delta z$$

ipsa si data sit curva, quae esse debeat perimeter superficiei quaerendae per se evanescunt, evanescentibus ipsis δz, *ad eundem plane modum, quo evanescunt membra constantia in inveniendis curvis ubi puncta extrema ipsius sunt data. Hac methodo invenio quidem pro superficie aequationem quecunque sit formula ipsa data; attamen quomodo ipsa inventa uti debeam nescio. Si tu mihi, Vir Clarissime, aliquid luminis super hanc rem affundere non gravaberis, habebis me certe tibi maximum debitorem.*

Sed iam tempus est longae huic epistolae finem imponere; lubet tamen hoc etiam addere, quod nuper in legendis formulis, quas pro sinuum, ac cosinuum potestatibus tradis pagine 220 Introductionis in Analisin Infinitorum. Ipsas enim ad formulam generalem revocavi. En

$$\begin{aligned}(2\,\cos z)^m = \cos mz + m\cos(m-2)z &+ \frac{m\cdot m-1}{1\cdot 2}\,\cos(m-4)z\\ &+ \frac{m\cdot m-1\cdot m-2}{1\cdot 2\cdot 3}\,\cos(m-6)z\\ &+ \frac{m\cdot m-1\cdot m-2\cdot m-3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\,\cos(m-8)z+\dots\,.\end{aligned}$$

Unde quia $\sin z = \cos(\pi - z)$ *(denotante* π *angulum rectum) fit etiam*

$$(\sin z)^m = \cos m(\pi-z)+m\cos(m-2)(\pi-z)+\frac{m\cdot m-1}{1\cdot 2}\,\cos(m-4)(\pi-z)+\dots\,.$$

Quae si ad casus particulares applicentur cum tuis apprime convenient. Sic autem conceptae utilitatem aliquam afferre posse videntur in radicurn extractionibus ex sinibus, cosinibusque. Verum patientia tua me iam satis abusum esseavideo, ideoque nihil amplius addam; solum me gratiae tuae ac benevolentiae, quo melius potero commendabo. In eo nunc sum ut in ordinem redigam sive, quae de curvis maximi, minimique proprietate praeditis in *genere, sive quae de applicatione principii Domini De Maupertuis ad problernata tam dynamica, quam hydrodinamica, meditatus sum, ut ad Academiam mittam. Interea ne litterae, quas ad ipsam gratiarum reddendarum causa dedi omnino vacuae existerent, quaedam de differentiationibus apposui. Vale et fave.*

Tibi Adstrictissimo, et Deditissimo
LUDOVICO DE LA GRANGE TOURNIER.

Ne litterae istae omnino mathematicis rebus vacuae existerent, medÃtatiunculas quasdam meas de quantitatum differentiationibus hic subiugere existimavi, ratus vos pro benignitate vestra. summa paululum attentionis ipsis non denegaturos.

Teorema.

Data functione quotlibet quantitatum variabilium puta x, y, z, si quaeratur eius differentiale gradus n, ponatur in ipsa functione

$$x + a\,dx + \frac{a^2d^2x}{1\cdot 2} + \frac{a^3d^3x}{1\cdot 2\cdot 3} + \dots \qquad \textit{loco x}$$

$$y + a\,dy + \frac{a^2d^2y}{1\cdot 2} + \frac{a^3d^3y}{1\cdot 2\cdot 3} + \dots \qquad \textit{loco } y$$

et sic loco z etc., dico, functione evoluta terminisque secundum dimensiones ipsius a ordinatis, fore coeficientem ipsius a^n ductum in $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\dots n$ differentiale quaesitum. Sit exempli gratia functio data xy facta substitutione fiet

$$\left(x + a\,dx + \frac{a^2d^2x}{1\cdot 2} + \frac{a^3d^3x}{1\cdot 2\cdot 3} + \dots\right)\left(y + a\,dy + \frac{a^2d^2y}{1\cdot 2} + \frac{a^3d^3y}{1\cdot 2\cdot 3} + \dots\right)$$

seu evolutione facta

$$
\begin{aligned}
&xy + a(x\,dy + y\,dx) + a^2\left(\frac{x\,d^2y}{1\cdot 2} + dx\,dy + \frac{d^2x\,y}{1\cdot 2}\right)\\
&\quad + a^3\left(\frac{x\,d^3y}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{dx\,d^2y}{1\cdot 2} + \frac{d^2x\,dy}{1\cdot 2} + \frac{d^3x\,y}{1\cdot 2\cdot 3}\right) + \dots\\
&\quad \dots \qquad \dots\\
&\quad + a^3\left(\frac{x\,d^ny}{1\cdot 2\cdot 3\dots n} + \frac{dx\,d^{n-1}y}{1\cdot 2\dots n-1} + \frac{d^2x\,d^{n-2}y}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\dots n-2}\right.\\
&\qquad\qquad\qquad \left. + \frac{d^3x\,d^{n-3}y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\dots n-3} + \dots\right)
\end{aligned}
$$

adeoque

$$d^n\cdot xy = x\,d^ny + n\,dx\,d^{n-1}y + \frac{n\cdot n-1}{1\cdot 2}d^2x\,d^{n-2}y + \dots$$

quae est ipsissima series quam dedit Celeberrimus Leibnitius tomo I Miscellanearum Berolinensiarum, cuiusque auctor, cum ipsemet olim eam invenissem, esse putabam.

Sit y^m cuius differentialia cuiusque gradus quaerantur. Ad hoc evolvatur quantitas

$$\left(y + a\,dy + \frac{a^2d^2y}{1\cdot 2} + \frac{a^3d^3y}{1\cdot 2\cdot 3} + \dots\right)^m$$

et secundum formulam quam Celeberrimus Eulerus tradit capite IV tomi I Introductionis in Analisin Infinitorum, ipsia fiet $y^m(1 + aA + a^2B + a^3C + a^4D + \dots)$ ubi posito $m + 1 = r$ erit

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{r-1}{1}\cdot\frac{dy}{y}\\
B &= \frac{r-2}{2}\,A\,\frac{dy}{y} + \frac{2r-2}{2}\cdot\frac{d^2y}{1\cdot 2\,y}\\
C &= \frac{r-3}{3}\,B\,\frac{dy}{y} + \frac{2r-3}{3}\,A\,\frac{d^2y}{1\cdot 2y} + \frac{3r-3}{3}\cdot\frac{d^3y}{1\cdot 2\cdot 3\,y}\,.
\end{aligned}
$$

Et sic de ceteris. Unde patet quantitatem A ductam in y^m dare differentiale 1^{mi} gradus; B ductam in $1\cdot 2\cdot y^m$ differentiale 2^{di}; C ductam in $1\cdot 2\cdot 3\cdot y^m$ differentiale 3^{us}; et sic deinceps.

Formula ista prae ceteris iis casibus utilis esse potest, quibus formula summatoria Bernoulliana pro integratione generali ipsius $\int z\,dx$ *expediat uti. Si enim* z *sit functio ipsius* x *irrationalis, hac methodo solis differentialibus quantitatis sub signo radicali invenientur omnes* dz, d^2z, $d^3z, \ldots,$ *quod aliunde taedosissimum est, et calculi erroribus maxime obnoxium. Caeterum, quod et ad quantitates exponentiales hoc theorema applicetur dicere supervacaneum est; hoc unuin addam nempe si proponatur quantitas* $d^m y^n$, $d^r y^s$, $d^t y^u$, *quae erit necessario terminus aliquis differentialis quantitatis* y^{n+s+u}, *et quidem gradus* $mn + rs + tu$, *et quaeratur qualis esse debeat eius coefficiens; hoc mediante hoc theoremate et regula Bernulliana pro inveniente coefficiente dati termini in potestate quantitatis datae invenio esse* =

$$\frac{M \cdot M-1 \cdot M-2 \ldots 1}{(1\cdot 2\ldots m)^n (1\cdot 2\ldots r)^s (1\cdot 2\ldots t)^u} \times \frac{N \cdot N-1 \cdot N-2 \ldots 1}{(1\cdot 2\cdot 3\ldots n)(1\cdot 2\cdot 3\ldots s)(1\cdot 2\cdot 3\ldots u)}$$

posito nempe $M = mn + rs + tu$, $N = n + s + u$.

. . . .

EULERO A LAGRANGE.

Torino, giorno 5 ottobre 1756.

O Uomo Eccelso e Celeberrimo, Onoratissimo Fautore.

La settimana scorsa ho ricevuto la tua lettera, con sommo piacere, poiché ho potuto riconoscervi l'affetto e la benevolenza sempre maggiore che mostri nei miei confronti. In effetti se ho potuto essere ammesso far i membri della grande Accademia di Berlino anche se ne sono immeritevole, non ignoro affatto di doverlo interamente al tuo appoggio; e inoltre non di meno devo riconoscere la non lieve importanza delle tue raccomandazioni, per quanto riguarda il fatto che l'illustre Presidente De Maupertuis si mostra così ben disposto nei miei confronti; specialmente quando afferma che farà tutto il necessario presso il Re, affinchè io ottenga nelle vostre regioni una posizione sufficientemente vantaggiosa, a tal proposito certamente non potrebbe capitarmi nulla di più piacevole nè di più gradito. Ed è per tale ragione che ti ringrazio infinitamente per i molteplici e così grandi benefici e non cesserò mai di farlo fintanto che vivrò. Infine, quanto al consiglio che mi dai di scrivere allo stesso Presidente, lo ritengo decisamente oppurtuno, ed è per questo motivo, che avrò a cuore di portare a termine la tal cosa il prima possibile.

Non molti giorni fa, mentre riflettevo su quelle formule che permettono di trovare le curve dotate delle proprietà di un massimo e di un minimo, notai che nell'applicazione di tali formule al principio di minima aziona di De Maupertuis per la risoluzione dei problemi di meccanica, devo considerare ambedue le coordinate variabili contemporaneamente affinché esse possano fornire tutte le equazioni necessarie; allora ho pensato immediatamente che se venissero trattati allo stesso modo quei problemi che richiedono la natura di un massimo e di un minimo, forse la cosa si sarebbe potuta elaborare con una maggiore generalità. Ed effettivamente, ponendo entrambe le coordinate variabili, si ottiene che nel valore differenziale dato dalla formula vengano introdotti due differenziali, vale a dire δx e δy, i coefficienti dei quali, devono essere pertanto annullati separatamente. Inoltre, mentre seguendo il mio metodo il valore differenziale che risulta dalla variazione di una sola coordinata, comporta per così dire due parti, da una di queste deduciamo l'equazione della curva, e dall'altra determiniamo le costanti coinvolte in questa, seguendo le diverse condizioni del problema, ho trovato che il fatto di porre due variabili conduceva senza alcun dubbio a una maggior generalità della formula, per quanto riguarda la seconda parte; ciò non è altrettanto vero per quanto riguarda la prima, poiché ho scoperto che si ottiene sempre la stessa equazione della curva quando è posto nullo il coefficiente sia del δx sia quello del δy. Ed effettivamente sembra che questo risulti enormemente coerente con la realtà giacché ci sia soltanto una curva in grado di soddisfare un determinato problema; tuttavia finora non sono ancora stato capace di dimostrare questo fatto a priori, cioè a partire dalle formule generali stesse, sebbene io sia del parere che la tal cosa debba potersi fare. Se un giorno tu, o Uomo Ingegnoso, ed Esperto oltre ogni modo in questa materia avrai il tempo di rivolgere un po' della tua attenzione verso questo argomento, certamente mi faresti sentire onorato, se vorrai rendermi partecipe delle tue rimarcabili riflessioni.

Per esempio ricercando la curva brachistocrona. La formula è $\int \frac{ds}{\sqrt{x}}$; di conseguenza deve essere:

$$\begin{aligned}\delta\int\frac{ds}{\sqrt{x}} &= \int\left(\frac{dy}{ds\sqrt{x}}\,\delta dy + \frac{dx}{ds\sqrt{x}}\,\delta dx - \frac{ds}{2\,x\sqrt{x}}\,\delta x\right)\\ &= \frac{dy}{ds\sqrt{x}}\,\delta y + \frac{dx}{ds\sqrt{x}}\,\delta x - \int\left(d\frac{dy}{ds\sqrt{x}}\,\delta y + \left(d\frac{dx}{ds\sqrt{x}} + \frac{ds}{2\,x\sqrt{x}}\right)\delta x\right)\\ &= 0;\end{aligned}$$

pertanto poiché non è data nessuna relazione indefinita fra δx, e δy, per la curva deve essere indipendentemente, da una parte $d\frac{dy}{ds\sqrt{x}} = 0$; dal quale risulta $a\,dy^2 = x\,ds^2$; e dall'altra $d\frac{dx}{ds\sqrt{x}} + \frac{ds}{2\,x\sqrt{x}} = 0$, equazione che moltiplicata per $\frac{2\,dx}{ds\sqrt{x}}$ e integrata si riduce analogamente a $a\,dy^2 = x\,ds^2$; come sopra. Inoltre se è dato il punto al quale deve giungere il corpo, allora sia δx, che δy dovranno essere nulli all'estremità della corda; di conseguenza, i termini costanti si annullano di per sé. Ma se si cerca la curva dell'avvicinamento più rapido ad una curva data, in questo caso, ponendo X e Y come coordinate di quest'ultima curva data, si avrà $\delta x : \delta y = dX : dY$; e contemporaneamente si avrà $\frac{dy\,\delta y + dx\,\delta x}{ds\sqrt{x}} = 0$ ossia $dy\,dY + dx\,dX = 0$, che indica che le curve si devono tagliare mutuamente ad angolo retto. Di conseguenza è chiaro che questa formula differenziale, è più che sufficiente da sola per risolvere il problema sotto qualunque condizione venga proposto. Ricordo che in una lettera precedente hai scritto che io, attraverso il mio metodo, ero in grado di risolvere in tutti i casi, il problema relativo alle curve che godono della proprietà di un massimo e un minimo; quindi non me ne vorrai se aggiungo a quelle precedenti le mie ulteriori riflessioni su questa questione.

Sia dunque $\int Z$ una formula che deve essere resa massima o minima, sia Z una funzione qualunque data da x, ed y e dai loro differenziali, se l'equazione che essa determina è differenziata per δ, certamente questa non potrà che acquisire la seguente forma:

$$\delta Z + m\,\delta dZ + n\,\delta d^2 Z + p\,\delta d^3 Z + \cdots = N\,\delta y + P\,\delta dy + Q\,\delta d^2 y + \ldots$$

(ponendo per abbreviare che solo y è variabile). Sia denotato con δY il secondo membro; allora, seguendo quanto è stato detto sopra, questa si trasformerà in:

$$\delta Z + m\delta dZ + n\,\delta d^2 Z + p\,\delta d^3 Z + \cdots = \delta Y\,.$$

Inoltre, in una equazione di questa forma, osservo in generale che la quantità δZ può essere espressa nel seguente modo:

$$\delta Z = A \int B \int C \int \frac{\delta Y}{p\,A\,B\,C}$$

dove A, B, C sono delle lettere attribuite che devono essere determinate a partire dall'equazione data: affinché siano determinate consideriamo i differenziali di questo stesso valore δZ, e siano sostituite nell'equazione detta sopra e riordinati i termini risulterà:

$$\begin{aligned}&(A + m\,dA + n\,d^2 A + p\,d^3 A) \int B \int C \int \frac{\delta Y}{p\,A\,B\,C}\\ &\quad + \big[m\,A\,B + n(B\,dA + d\cdot A\,B) + p(B\,d^2 A + d\cdot(B\,dA + d\cdot A\,B))\big] \times \int C \int \frac{\delta Y}{p\,A\,B\,C}\\ &\quad + [n\,A\,B\,C + p(d\cdot A\,B\,C + B\,C\,dA + C\,d\cdot A\,B)] \times \int \frac{\delta Y}{p\,A\,B\,C} = 0\end{aligned}$$

E pertanto, come scrissi in una lettera precedente, se a è l'ascissa per la quale la curava deve essere dotata della proprietà data, e se posto $x = a$, risulta:

$$\int A = F, \quad \text{et} \quad F - \int A = R\,;$$

nuovamente quando $x = a$,

$$\int R\,B = G, \quad \text{et} \quad G - \int R\,B = S\,;$$

e avendo ancora posto $x = a$

$$\int S\,C = H, \quad \text{et} \quad H - \int S\,C = T\,,$$

allora, nel caso in cui $x = a$ si otterrà:

$$\delta \int Z = \int \frac{T\,\delta Y}{p\,A\,B\,C}$$

da cui si otterrà l'equazione della curva (sostituito δY col suo valore)

$$\frac{T\,N}{p\,A\,B\,C} - d\frac{T\,P}{p\,A\,B\,C} + d^2\frac{T\,Q}{p\,A\,B\,C} - \cdots = 0\,.$$

Adesso combinando questa equazione con le tre precedenti, saranno eliminate le quantità A, B, C così come i loro differenziali, e l'equazione risultante sarà quella della curva cercata. Nello stesso modo, risulta chiaro come si debba operare nel caso si presentino nell'equazione dei differenziali dello stesso δZ di ordine superiore. Ora stà al tuo giudizio valutare se questo metodo è naturale o se ne esista uno preferibile. In ogni caso queste sono, o Uomo Illustre, le più importanti riflessioni che fino ad ora ho condotto su questo argomento, e rispetto alle quali ritengo che, se anche questa materia non sia perfetta in tutte le sue parti, almeno non ne è totalmente priva. Tuttavia per il momento, se io provo a rivolgere questo metodo alla ricerca delle superfici dotate della proprietà di un massimo e di un minimo, mi imbatto in notevoli difficoltà che finiscono per sopraffarmi. Per esempio, se si cerca una tale superficie che, fra tutte le superfici isoperimetriche (è così che le chiamo), contiene il solido più grande. La formula per un solido è $\iint z\,dx\,dy$. Se differenziamo questa formula per δ, il suo valore differenziale risulterà $\iint dx\,dy\,\delta z$ (pongo dx e dy costanti). In realtà per una superficie la formula è $\iint dx\,dy\sqrt{1 + P^2 + Q^2}$ avendo posto $dz = P\,dx + Q\,dy$; se verrà differenziata questa formula nello stesso modo, il suo differenziale risulterà:

$$\iint dx\,dy \left(\frac{P\,\delta P + Q\,\delta Q}{\sqrt{1 + P^2 + Q^2}} \right)\,.$$

Inoltre conservando al notazione, che tu, o Uomo Illustrissimo, hai utilizzato al capitolo IX della tua memoria sulle corde vibranti pubblicata nelle

Memorie dell'Accademia di Berlino nell'anno 1753[1], si ha:

$$P=\left(\frac{dz}{dx}\right)\quad\text{da cui}\quad\delta P=\left(\frac{d\delta z}{dx}\right);\qquad Q=\left(\frac{dz}{dy}\right)\quad\text{e}\quad\delta Q=\left(\frac{d\delta z}{dy}\right);$$

e perciò il valore differenziale sarà

$$\iint dx\,dy\left(\frac{P\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)+Q\left(\frac{d\delta z}{dy}\right)}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}\right).$$

che riduco a:

$$\int dy\frac{P}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}\,\delta z+\int dx\frac{Q}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}\,\delta z$$

$$-\iint dx\,dy\left[\left(\frac{d\frac{P}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}}{dx}\right)+\left(\frac{d\frac{Q}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}}{dy}\right)\right]\times\delta z$$

di conseguenza, l'equazione della superficie sarà:

$$a\,dx\,dy-\left[\left(\frac{d\frac{P}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}}{dx}\right)+\left(\frac{d\frac{Q}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}}{dy}\right)\right]\times dx\,dy=0$$

ossia

$$\left(\frac{d\frac{P}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}}{dx}\right)+\left(\frac{d\frac{Q}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}}{dy}\right)=a\,;$$

partendo da questa equazione, non vedo in qual modo generale, si possa trovare un'equazione finita per la superficie. Infatti una grande difficoltà risiede nel fatto che si deve considerare uno dei differenziali con solamente la x variante, l'altro con solo la y. Effettuando il calcolo si scopre facilmente che la sfera soddisfa tale equazione, ma si tratta di un caso particolare; in quanto tale equazione si estende ben oltre. Per quanto concerne i termini

$$\int dy\frac{P}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}\delta z\quad\text{e}\quad\int dx\frac{Q}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}\,\delta z\,,$$

[1]La memoria in questione è “Remarques sur les mémories précédens de M. Bernoulli”, Memoires de l'academie des sciences de Berlin 9, 1755, pag. 196-222; essa riguarda i due prescedenti trattati di Daniel Bernoulli sulle corde vibranti.

se fosse data la curva, che deve essere il perimetro della superficie da ricercare, si annullano essi stessi, poiché gli stessi δz si annullano, esattamente nello stesso modo, nel quale scompaiono i membri costanti nelle curve da ricercare, quando sono dati i punti estremi delle stesse. Attraverso tale metodo trovo alcune equazioni della superficie, qualunque sia la formula data; tuttavia ignoro in quale modo devo adoperare l'equazione trovata. Se tu, o Uomo Illustre, non avrai noia nel darmi qualche illuminazione su questo argomento, certamente sarò in grande debito nei tuoi confronti. Ma è ora di porre fine a questa lunga lettera; tuttavia, mi piacerebbe aggiungere ancora quello che recentemente ho ricavato dalla lettura delle formule che mi avete trasmesso sulle potenze del seno e del coseno alla pag. 220 della tua Introduzione all'analisi infinitesimale[2]. Infatti le ho ricondotte ad una formula generale. Eccola

$$\begin{aligned}(2\cos z)^m = \cos mz + m\cos(m-2)z + \frac{m\cdot m-1}{1\cdot 2}\cos(m-4)z \\ + \frac{m\cdot m-1\cdot m-2}{1\cdot 2\cdot 3}\cos(m-6)z \\ + \frac{m\cdot m-1\cdot m-2\cdot m-3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cos(m-8)z + \ldots .\end{aligned}$$

dal quale $\sin z = \cos(\pi - z)$ (avendo denotato π l'angolo retto) si ottiene

$$(\sin z)^m = \cos m(\pi-z) + m\cos(m-2)(\pi-z) + \frac{m\cdot m-1}{1\cdot 2}\cos(m-4)(\pi-z) + \ldots .$$

E se queste formule vengono applicate a casi particolari, esse si accordano perfettamente con le tue. Così, sembrano poter essere di qualche utilità nell'estrazione delle radici del seno e del coseno. Certamente mi accorgo di aver già abbastanza abusato della tua pazienza e per questo motivo non aggiungerò quindi nient'altro; mi raccomanderò soltanto al tuo favore e alla tua benevolenza, nel modo migliore che potrò. Ora sono sul punto di mettere in ordine tanto le mie riflessioni relative alle curve dotate della proprietà di un massimo e un minimo, quanto quelle riguardanti l'applicazione del principio

[2] Vedi Cap.14 §262 e §263 di "Introductio in analysin infinitorum", Opera Omnia Serie I, vol. VIII, 1748 (E.101).

del signor De Maupertuis a problemi sia dinamici che idrodinamici, al fine di inviarle all'Accademia. Nel frattempo, affinché la mia lettera, la quale ha lo scopo di ringraziare, non apparisse del tutto vuota, ho aggiunto qualcuna delle mie riflessioni sulle diffrerenziazioni. Saluti e ossequi.

Il vostro fedelissimo e devoto,
LUDOVICO DE LA GRANGE TOURNIER.

Affinché questa lettera non apparisse del tutto libera da considerazioni matematiche, ho reputato di poter allegare qui alcune delle mie piccole riflessioni sulle differenziazioni di quantità, poiché, considerata la vostra somma benevolenza, voi non negherete loro un po' della vostra attenzione.

Teorema.

Data una funzione con un numero qualsiasi di quantità variabili, per esempio x, y, z, se si cerca il suo differenziale di ordine n, poniamo nella stessa funzione

$$x + a\,dx + \frac{a^2 d^2 x}{1 \cdot 2} + \frac{a^3 d^3 x}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \qquad \text{al posto di x}$$

$$y + a\,dy + \frac{a^2 d^2 y}{1 \cdot 2} + \frac{a^3 d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \qquad \text{al posto di y}$$

e allo stesso modo al posto di z, ecc., io dico che una volta che la funzione è sviluppata e ordinati i termini secondo le potenze di a, il coefficiente di a^n moltiplicato per $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n$ darà il differenziale cercato. Per esempio sia data la funzione xy dopo aver fatto la sostituzione essa diventerà:

$$\left(x + a\,dx + \frac{a^2 d^2 x}{1 \cdot 2} + \frac{a^3 d^3 x}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots\right)\left(y + a\,dy + \frac{a^2 d^2 y}{1 \cdot 2} + \frac{a^3 d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots\right)$$

o meglio, dopo averla sviluppata

$$
\begin{aligned}
& xy + a(x\,dy + y\,dx) + a^2\left(\frac{x\,d^2y}{1\cdot 2} + dx\,dy + \frac{d^2x\,y}{1\cdot 2}\right) \\
& \quad + a^3\left(\frac{x\,d^3y}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{dx\,d^2y}{1\cdot 2} + \frac{d^2x\,dy}{1\cdot 2} + \frac{d^3x\,y}{1\cdot 2\cdot 3}\right) + \dots \\
& \quad \dots \qquad \dots \\
& \quad + a^3\left(\frac{x\,d^ny}{1\cdot 2\cdot 3\dots n} + \frac{dx\,d^{n-1}y}{1\cdot 2\dots n-1} + \frac{d^2x\,d^{n-2}y}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\dots n-2}\right. \\
& \qquad\qquad\qquad \left. + \frac{d^3x\,d^{n-3}y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\dots n-3} + \dots\right)
\end{aligned}
$$

e pertanto

$$
d^n\cdot xy = x\,d^ny + n\,dx\,d^{n-1}y + \frac{n\cdot n-1}{1\cdot 2}d^2x\,d^{n-2}y + \dots
$$

essendo precisamente questa serie quella che venne data dal celebre Leibniz nel volume I della Miscellanea Berolinensia, e dunque io credevo esserne l'autore poiché l'avevo già trovata altre volte da solo. Sia y^m (la funzione) di cui si propone dio cercare i differenziali di ordine qualunque. Si deve dunque sviluppare la quantità

$$
\left(y + a\,dy + \frac{a^2d^2y}{1\cdot 2} + \frac{a^3d^3y}{1\cdot 2\cdot 3} + \dots\right)^m
$$

e secondo la formula che il celebre Eulero dà nel capitolo IV del volume primo della sua Introduzione all'analisi infinitesimale[3], essa diventerà $y^m(1 + aA + a^2B + a^3C + a^4D + \dots)$ dove, avendo posto $m+1 = r$ si avrà :

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{r-1}{1}\cdot\frac{dy}{y} \\
B &= \frac{r-2}{2}A\,\frac{dy}{y} + \frac{2r-2}{2}\cdot\frac{d^2y}{1\cdot 2\,y} \\
C &= \frac{r-3}{3}B\,\frac{dy}{y} + \frac{2r-3}{3}A\,\frac{d^2y}{1\cdot 2y} + \frac{3r-3}{3}\cdot\frac{d^3y}{1\cdot 2\cdot 3\,y}\,.
\end{aligned}
$$

[3]vedi §76 dell' "Introductio in analysin infinitorum", Opera Omnia Serie I, vol. VIII, 1748 (E.101); che contiene lo sviluppo del polinomio $(1+\alpha z+\beta z^2+\dots)^{m-1} = 1 + A\,z + B\,z^2 + C\,z^3 + \dots$, e le formule per i coefficienti A, B, C, ...

E così di seguito. Da cui è chiaro che la quantità A moltiplicata per y^m fornisce il differenziale di primo ordine; che la quantità B moltiplicata per $1 \cdot 2 \cdot y^m$ fornisce il differenziale del secondo ordine; che la quantità C moltiplicata per $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot y^m$ fornisce il differenziale del terzo ordine; e così di seguito. Questa formula può essere utile soprattutto nei casi in cui è vantaggioso usare la formula di sommatoria di Bernoulli per l'integrazione generale di $\int z\,dx$. Infatti, se z è una funzione irrazionale di x, attraverso questo metodo si trovano titti i dz, d^2z, $d^3z, \ldots$ ecc..., limitandosi a differenziare la quantità che si trova sotto radice, in ogni altro caso questo metodo è molto tedioso e esposto a numerosi errori di calcolo. Quanto al fatto che questo teorema si applica ugualmente alle quantità esponenziali, è superfluo dirlo; a ciò aggiungerei solamente una cosa, ossia che nel caso in cui venga proposta la quantità $d^m y^n d^r y^s d^t y^u$, che sarà necessariamente un certo termine del differenziale della quantità y^{n+s+u}, e del cui l'ordine sarà $mn + rs + tu$, e venga ricercato quale debba essere il suo coefficiente; allora, attraverso questo teorema e attraverso la regola Bernoulliana che permettono di trovare il coefficiente di un termine nella potenza di una quantità data, questo deve essere uguale a:

$$\frac{M \cdot M-1 \cdot M-2 \ldots 1}{(1 \cdot 2 \ldots m)^n (1 \cdot 2 \ldots r)^s (1 \cdot 2 \ldots t)^u} \times \frac{N \cdot N-1 \cdot N-2 \ldots 1}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n)(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots s)(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots u)}$$

dove abbiamo posto $M = mn + rs + tu$, $N = n + s + u$.

Commento

La presente lettera è ricca di svariati contenuti matematici riguardanti principalmente il calcolo delle variazioni.

In primo luogo Lagrange illustra una variante della suo “metodo delle variazioni”, che gli permette di ottenere in maniera più generale gli stessi risultati. L’ispirazione per questo cambiamento gli giunse grazie agli studi di dinamica che stava conducendo in parallelo, e dei quali si è già discusso in precedenza a pag. 133. Lagrange spiega che analizzando il principio di minima azione, e applicandovi il suo metodo per la ricerca dei massimi e minimi, ha trovato necessario variare contemporaneamente entrambe le coordinate, sia x che y. Questo tipo di approccio è naturale nei problemi di dinamica, nei quali x ed y sono considerate dipendenti funzionalmente da una terza variabile, il tempo t. Quindi in pratica si considera la curva rappresentata nella sua forma parametrica, con $x = x(t)$ ed $y = y(t)$. Lagrange capì che adottare il medesimo tipo di approccio per i problemi tipici del calcolo delle variazioni comportava notevoli vantaggi. Pertanto la nuova procedura consiste nel variare non solo la y mantenendo fissata la x, come già previsto nel metodo originale, ma nel variare analogamente e contemporaneamente anche la x; in modo da ottenere due variazioni δx e δy del tutto indipendenti tra loro. In pratica la novità risiede nel fatto che ora la variazione δ applicata ad una certa quantità dipendente da x ed y produce non solo incrementi δy nelle singole ordinate y, ma anche analoghi incrementi δx per le ascisse x; così non sarà più $\delta x = 0$, come nel metodo originale.

Le parole di Lagrange al riguardo sono molto eloquenti:

> Non molti giorni fa, mentre riflettevo su quelle formule che permettono di trovare le curve dotate delle proprietà di un massimo e di un minimo, notai che nell'applicazione di tali formule al principio di minima aziona di De Maupertuis per la risoluzione dei problemi di meccanica, devo considerare ambedue le coordinate variabili contemporaneamente affinché esse possano fornire tutte le equazioni necessarie; allora ho pensato immediatamente che se venissero trattati allo stesso modo quei problemi che richiedono la natura di un massimo e di un minimo, forse la cosa si sarebbe potuta elaborare con una maggiore generalità. Ed effettivamente, ponendo entrambe le coordinate variabili, si ottiene che nel valore differenziale dato dalla formula vengano introdotti due differenziali, vale a dire δx e δy, i coefficienti dei quali, devono essere pertanto annullati separatamente.

Dopo aver delineato in questo modo la nuova procedura, Lagrange mostra i vantaggi di questo approccio servendosi del problema della brachistocrona; problema che aveva già affrontato nella precedente lettera del 20 novembre 1755, ma che con il nuovo approccio viene risolto in modo molto più generale. Il nuovo procedimento risolutivo contenuto nella presente lettera è commentato nella sezione subito seguente.

In seguito Lagrange tratta separatamente i seguenti argomenti:

- Espone alcune considerazioni più generali sul metodo per rendere massima o minima la quantità $\int Z$; le quali peò appaiono abbastanza confuse.

- Sfrutta il nuovo approccio per affrontare il seguente problema isoperimetrico nello spazio: trovare tra le superfici aventi la stessa area superficiale, quella con il volume maggiore. Per la prima volta compaiono, in questa lettera, la formula integrale per il calcolo dell'area e del volume di una generica superficie $z(x, y)$ nello spazio.

- Presenta la formula per lo sviluppo delle potenze del seno e del coseno; formula che ha generalizzato a partire dai risultati contenuti nell'"Introductio in analysin infinitorum" di Eulero.

Ad ognuno di questi argomenti è stata dedicata una sezione, nella quale vengono illustrate e commentate più approfonditamente le riflessioni di Lagrange.

Infine alla lettera è allegata una strana appendice, che molto probabilmente venne scritta per essere allegata, non alla presente lettera per Eulero, ma alla lettera di ringraziamento che Lagrange scrisse all'Accademia di Berlino, dopo essere stato eletto membro associato esterno. Essa contiene alcune riflessioni di Lagrange sul calcolo dei differenziali.

10.1 Nuovo approccio al problema della brachistocrona

Nella sua prima analisi del problema della brachistocrona, contenuta nella lettera del 20 novembre 1755, Lagrange giunge alla conclusione che la curva ricercata è la cicloide che interseca perpendicolarmente la linea data. In quella occasione egli aveva risolto il problema sfruttando il suo "metodo delle variazioni" nella sua impostazione originale; esso prevede che venga fatta variare la sola y, mantenendo invece fissata la x. Tale procedimento risolutivo è già stato discusso a pag. 108. Questo evidentemente non del tutto soddisfacente per Lagrange, che avrebbe voluto una maggiore generalità soprattutto per quanto riguardava la genesi dell'equazione che fornisce l'informazione sul punto di arrivo della brachistocrona. Nella presente lettera Lagrange riprende lo stesso identico problema, affrontandolo però con un approccio differente, che gli permette di dedurre l'equazione in questione con maggiore generalità. Questo consiste per l'appunto nel considerare la curva in forma parametrica, con coordinate $x = x(t)$ ed $y = y(t)$, e nel variarle contemporaneamente entrambe. Ovvero, Lagrange si mette nell'ottica parametrica, ed applica il suo metodo, nella variante descritta in precedenza.

L'integrale che Lagrange vuole minimizzare è:

$$\int \frac{ds}{\sqrt{x}}\,.$$

Si osservi che a differenza di quanto fatto nella lettera del 20 novembre 1755, in questo caso Lagrange pone $v = \sqrt{x}$, e quindi $u = x$. Il nuovo approccio infatti gli permette di ricavare l'equazione, che fornisce informazioni sul punto di arrivo, senza la necessità di avere la dipendenza sia da x che da y per la velocità. Ricordiamo per l'appunto, che nella lettera del 20 novembre 1755, riferendosi a tale equazione, ossia a quella che implicava l'essere retto dell'angolo formato tra la brachistocrona e la linea data, egli aveva scritto:

> [...] con un minimo di attenzione si nota che, a meno che non sia $\delta u = \nu\delta y$ (il che peraltro avviene soltanto se u è una funzione determinata degli stessi x e y), questa proprietà non può più aver luogo; [...].

Illustriamo quindi il nuovo procedimento risolutivo. Lagrange applica la variazione δ all'integrale da minimizzare:

$$\delta \int \frac{ds}{\sqrt{x}} = \int ds\,\delta\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\delta(ds)\,. \tag{10.1}$$

Eseguendo i calcoli, in questo caso si ottiene:

$$\begin{aligned} \delta\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) &= -\frac{\delta x}{2\,x^{\frac{3}{2}}}\,; \\ \delta(ds) = \delta(\sqrt{dx^2+dy^2}) &= \frac{2\,dx\,\delta dx + 2\,dy\,\delta dy}{2\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{dy}{ds}\,\delta dy + \frac{dx}{ds}\,\delta dx\,. \end{aligned} \tag{10.2}$$

Pertanto sostituendo le (10.2) nella (10.1), e permutando d con δ si ha:

$$\begin{aligned} \delta \int \frac{ds}{\sqrt{x}} &= \int \left(\frac{dy}{ds\sqrt{x}}\,d\delta y + \frac{dx}{ds\sqrt{x}}\,d\delta x - \frac{ds}{2\,x\sqrt{x}}\,\delta x\right) \\ &= \int \frac{dy}{ds\sqrt{x}}\,d\delta y + \int \frac{dx}{ds\sqrt{x}}\,d\delta x - \int \frac{ds}{2\,x\sqrt{x}}\,\delta x \end{aligned} \tag{10.3}$$

Sviluppando per parti i primi due integrali si ottiene:

$$\int \frac{dy\,d\delta y}{ds\sqrt{x}} = \frac{dy}{\sqrt{x}\,ds}\,\delta y - \int d\left(\frac{dy}{\sqrt{x}\,ds}\right)\,\delta y\,;$$

$$\int \frac{dx\,d\delta x}{ds\sqrt{x}} = \frac{dx}{\sqrt{x}\,ds}\,\delta x - \int d\left(\frac{dx}{\sqrt{x}\,ds}\right)\,\delta x\,;$$

sostituedolo nella (10.3) e raccogliendo si ha:

$$\delta \int \frac{ds}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{ds\sqrt{x}}\,\delta y + \frac{dx}{ds\sqrt{x}}\,\delta x - \int \left(d\frac{dy}{ds\sqrt{x}}\,\delta y + \left(d\frac{dx}{ds\sqrt{x}} + \frac{ds}{2\,x\sqrt{x}} \right) \delta x \right). \tag{10.4}$$

A questo punto volendo rendere minimo l'integrale, Lagrange uguaglia a zero la sua variazione, ossia la (10.4). Essa è composta da due parti, una costituita dall'espressione sotto il segno di integrale, e l'altra esterna; la prima esprime la somma di tutte le variazioni separate che intervengono lungo l'intera estensione della curva considerata, mentre la seconda concerne le sole variazioni che intervengono negli estremi della curva, pertanto le due parti sono indipendenti. Pertanto dovendo essere nulla l'intera (10.4), si dovranno annullare entrambe le parti separatamente.

Per quanto riguarda l'annullarsi della quantità sotto il segno di integrale, devono essere annullati separatamente i coefficienti di entrambe le variazioni δx e δy, poiché esse sono totalmente indipendenti l'una dall'atra. Così, si pone:

$$d\frac{dy}{ds\sqrt{x}} = 0\,; \tag{10.5}$$

$$d\frac{dx}{ds\sqrt{x}} + \frac{ds}{2\,x\sqrt{x}} = 0\,. \tag{10.6}$$

Entrambe le (10.5) e (10.6) forniscono lo stesso risultato. Infatti dalla (10.5) risulta:

$$\frac{dy}{ds\sqrt{x}} = a \qquad \text{ossia} \qquad a\,dy^2 = x\,ds^2$$

con a costante di integrazione. Mentre moltiplicando la (10.6) per $\dfrac{2\,dx}{ds\sqrt{x}}$ si ottiene:

$$d\frac{dx}{ds\sqrt{x}} \cdot \frac{2\,dx}{ds\sqrt{x}} + \frac{dx}{x^2} = 0\,. \tag{10.7}$$

Integrando risulta:

$$\int 2d\left(\frac{dx}{ds\sqrt{x}}\right) \cdot \frac{dx}{ds\sqrt{x}} = -\int \frac{dx}{x^2}\,;$$

il primo integrale si calcola facilmente osservando che l'integranda è costituita da una funzione moltiplicata per il doppio della sua derivata, quindi si ha:

$$\left(\frac{dx}{ds\sqrt{x}}\right)^2 + k = \frac{1}{x}$$

con k costante di integrazione. Svolgendo i calcoli essa risulta:

$$dx^2 - ds^2 = k\,x\,ds^2\,,$$

ossia ponendo $a = -\dfrac{1}{k}$ si ottiene $a\,dy^2 = x\,ds^2$, come annunciato.

Per quanto riguarda l'annullarsi della quantità esterna al segno di integrale, nel caso in cui si considerino gli estremi della curva ricercata fissati, allora in corrispondenza di $x = 0$, $x = a$ vale $\delta x = 0$, $\delta y = 0$, e così essa svanisce automaticamente:

$$\left[\frac{dy}{ds\sqrt{x}}\,\delta y + \frac{dx}{ds\sqrt{x}}\,\delta x\right]_0^a = 0$$

(quì a indica l'ascissa del punto finale). Mentre se l'estremo finale non è fissato, come nel caso in cui appartenga ad una linea data, e quindi sia libero di muoversi su di essa, allora per minimizzare l'integrale, si deve imporre anche che in $x = a$ valga:

$$\frac{dy}{ds\sqrt{x}}\,\delta y + \frac{dx}{ds\sqrt{x}}\,\delta x = 0$$

ossia

$$dy\,\delta y + dx\,\delta x = 0 \tag{10.8}$$

A questo punto Lagrange indica con X e Y le coordinate della linea data, così dX e dY indicano i relativi elementi differenziali delle ascisse e delle ordinate nel punto finale. Chiaramente vale

$$\delta x : \delta y = dX : dY\,.$$

Allora ponendo $\delta y = \dfrac{\delta x\,dY}{dX}$ nella (10.8) si ha:

$$\frac{dy\,dY\,\delta x}{dX} + dx\,\delta x = 0 \qquad \text{ossia} \qquad dy\,dY + dx\,dX = 0\,;$$

la quale, come affermato da Lagrange prova che la curva brachistocrona ricercata interseca la linea traguardo perpendicolarmente. Si osservi che effettivamente essa equivale a

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{dY}{dX}\right)^{-1} ;$$

che con le nozioni attuali dell'analisi, riconoscendo in $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dY}{dX}$ le derivate della curva e della linea, indica che le tangenti alla curva e alla linea data sono perpendicolari, in quanto i rispettivi coefficienti angolari, espressi dalle derivate, sono l'uno il reciproco opposto dell'altro.

Risulta quindi evidente che tale metodo, rispetto al precedente illustrato nella lettera del 20 novembre 1755, permette di ottenere le formule risolutive con una maggiore generalità, soprattutto nel caso della formula che fornisce l'informazione sul punto finale. Lagrange riferendosi proprio a questa equazione, scrive:

> [...] ho trovato che il fatto di porre due variabili conduceva senza alcun dubbio a una maggior generalità della formula, per quanto riguarda la seconda parte; [...].

Lagrange scoprì che l'analisi delle condizioni al bordo per problemi in cui il punto finale è variabile risulta più semplice se la curva è rappresentata parametricamente. Effettivamente quando nel 1760 pubblicò per la prima volta i suoi risultati sul calcolo delle variazioni nell'"Essai d'une nouvelle méthode..."[4], sviluppò il soggetto solamente da un punto di vista parametrico. Inoltre in questo scritto presentò l'analisi parametrica del problema della brachistocrona e di altri esempi contenuti nel terzo capitolo del "Methodus inveniendi" di Eulero.

Inoltre Lagrange osservò che nel caso la curva venga trattata da un punto di vista parametrico, le due equazioni di Eulero-Lagrange che si deducono,

[4]La prima pubblicazione di Lagrange sul calcolo delle variazioni, fu "Essai d'une nouvelle méthode pour determiner les maxima et minima des formules intégrales indéfinies", Miscellanea Taurinensia Vol. II, 1760 (L.7), che però apparve pubblicato solo nel 1762.

si riducono ad una sola equazione, la stessa che si ottiene trattando la curva non parametricamente. Lagrange non fu però in grado di dimostrare a priori, e in maniera generale, questo fatto. Lagrange scrive:

> [...] ho scoperto che si ottiene sempre la stessa equazione della curva quando è posto nullo il coefficiente sia del δx sia quello del δy. Ed effettivamente sembra che questo risulti enormemente coerente con la realtà giacché ci sia soltanto una curva in grado di soddisfare un determinato problema; tuttavia finora non sono ancora stato capace di dimostrare questo fatto a priori, cioè a partire dalle formule generali stesse, sebbene io sia del parere che la tal cosa debba potersi fare.

Più tardi, Lagrange riuscì in questo suo intento. Dopo l'interruzione nella corrispondenza, dovuta allo scoppio della guerra dei Sette anni, nella lettera del 4 agosto 1759, Lagrange scrive ad Eulero:

> [...] ho dimostrato quel principio di cui ho trattato nell'ultima lettera a te inviata, ossia in che modo le equazioni, che vengono dedotte dalla variabilità delle due variabili x ed y, esprimano sempre la stessa curva; e ho esteso la stessa dimostrazione, nel caso le variabili siano tre o più.

10.2 Riflessioni generali sul "metodo delle variazioni"

Lagrange considera una generica funzione $Z(x, y, dx, dy, d^2x, d^2y, \dots)$. La sua variazione δ è di questa forma:

$$\delta Z = N\,\delta y + P\,\delta dy + Q\,\delta d^2 y + \dots\ ;$$

notare che in questo caso Lagrange per semplificare i calcoli considera variabile soltanto y. Quindi Lagrange osserva che vale:

$$\delta Z + m\,\delta dZ + n\,\delta d^2 Z + p\,\delta d^3 Z + \dots = N\,\delta y + P\,\delta dy + Q\,\delta d^2 y + \dots\ ; \quad (10.9)$$

e indicando il secondo membro con δY, la (10.9) si riscrive come:

$$\delta Z + m\delta dZ + n\,\delta d^2 Z + p\,\delta d^3 Z + \cdots = \delta Y\,. \tag{10.10}$$

Ora Lagrange afferma che la variazione di una funzione di questo tipo può essere espressa come:

$$\delta Z = A\int B\int C\int \frac{\delta Y}{p\,A\,B\,C} \tag{10.11}$$

dove A, B, C sono lettere che indicano quantità, che possono essere determinate calcolando i vari differenziali di δZ e sostituendoli nella (10.10). Effettivamente si ha:

$$\begin{aligned}
d\delta Z = \delta dZ &= dA\int B\int C\int \frac{\delta Y}{p\,A\,B\,C} + A\,B\int C\int \frac{\delta Y}{p\,A\,B\,C}\,;\\
d^2\delta Z = \delta d^2 Z &= d^2A\int B\int C\int \frac{\delta Y}{p\,A\,B\,C} + B\,dA\int C\int \frac{\delta Y}{p\,A\,B\,C}+\\
&\quad + d(AB)\int C\int \frac{\delta Y}{p\,A\,B\,C} + A\,B\,C\int \frac{\delta Y}{p\,A\,B\,C}\,;\\
d^3\delta Z = \delta d^3 Z &= d^3A\int B\int C\int \frac{\delta Y}{p\,A\,B\,C} + B\,d^2A\int C\int \frac{\delta Y}{p\,A\,B\,C}+\\
&\quad + d(B\,dA)\int C\int \frac{\delta Y}{p\,A\,B\,C} + B\,C\,dA\int \frac{\delta Y}{p\,A\,B\,C}+\\
&\quad + d^2(A\,B)\int C\int \frac{\delta Y}{p\,A\,B\,C} + C\,d(A\,B)\int \frac{\delta Y}{p\,A\,B\,C}+\\
&\quad + d(A\,B\,C)\int \frac{\delta Y}{p\,A\,B\,C} + A\,B\,C\,\frac{\delta Y}{p\,A\,B\,C}\,;
\end{aligned} \tag{10.12}$$

Sostituendo le (10.12) nell’equazione (10.10) e riordinando i termini risulterà:

$$\begin{aligned}
&(A + m\,dA + n\,d^2A + p\,d^3A)\int B\int C\int \frac{\delta Y}{p\,A\,B\,C}\\
&+ \big[m\,A\,B + n(B\,dA + d(A\,B)) + p(B\,d^2A + d(B\,dA + d(A\,B)))\big] \times \int C\int \frac{\delta Y}{p\,A\,B\,C}\\
&+ [n\,A\,B\,C + p(d(A\,B\,C) + B\,C\,dA + C\,d(A\,B))] \times \int \frac{\delta Y}{p\,A\,B\,C} = 0\,;
\end{aligned}$$

risolvendo la quale si ottengono i valori delle quantità A, B, C.

Ora Lagrange sfrutta per la (10.11) la premessa IV contenuta nella lettera del 12 agosto 1755, che si trova commentata a pag. 69. Ponendo:

$$\int_0^a A = F, \qquad \text{e} \qquad F - \int_0^x A = R\,;$$

dalla (10.11) risulta:

$$\delta Z = \int R\,B \int C \int \frac{\delta Y}{p\,A\,B\,C}\,. \tag{10.13}$$

Ponendo:

$$\int_0^a R\,B = G, \qquad \text{e} \qquad G - \int_0^x R\,B = S\,;$$

dalla (10.13) risulta:

$$\delta Z = \int S\,C \int \frac{\delta Y}{p\,A\,B\,C}\,. \tag{10.14}$$

Ponendo:

$$\int_0^a S\,C = H, \qquad \text{e} \qquad H - \int_0^x S\,C = T\,,$$

dalla (10.14) risulta:

$$\delta \int Z = \int \frac{T\,\delta Y}{p\,A\,B\,C}\,;$$

da cui, sostituito δY col suo valore, e permutando δ e d si ottiene:

$$\delta \int Z = \int \frac{T\,N}{p\,A\,B\,C}\delta y - \int \frac{T\,P}{p\,A\,B\,C} d\delta y + \int \frac{T\,Q}{p\,A\,B\,C} d^2\delta y - \dots\,; \tag{10.15}$$

dalla quale, sfruttando le formule di integrazione per parti che aveva illustrato nella premessa III della lettera del 12 agosto 1755, che si trovano commentate a pag. 69, si ottiene:

$$\begin{aligned} \int \frac{T\,P}{p\,A\,B\,C} d\delta y &= \frac{T\,P}{p\,A\,B\,C}\delta y - \int d\left(\frac{T\,P}{p\,A\,B\,C}\right)\delta y \\ \int \frac{T\,Q}{p\,A\,B\,C} d^2\delta y &= \frac{T\,Q}{p\,A\,B\,C} d\delta y - d\left(\frac{T\,Q}{p\,A\,B\,C}\right)\delta y + \int d^2\left(\frac{T\,Q}{p\,A\,B\,C}\right)\delta y\,. \end{aligned} \tag{10.16}$$

Sostituendo le (10.16) nella (10.15) si ottiene:

$$\begin{aligned} \delta \int Z = &-\frac{T\,P}{p\,A\,B\,C}\delta y + \frac{T\,Q}{p\,A\,B\,C} d\delta y - d\left(\frac{T\,Q}{p\,A\,B\,C} d^2\right)\delta y + \dots \\ &+ \int \left(\frac{T\,N}{p\,A\,B\,C} - d\frac{T\,P}{p\,A\,B\,C} + d^2\frac{T\,Q}{p\,A\,B\,C} - \dots\right)\delta y\,; \end{aligned}$$

pertanto l'equazione della curva che rende minimo $\int Z$, si ottiene sostituendo nella:

$$\frac{T\,N}{p\,A\,B\,C} - d\frac{T\,P}{p\,A\,B\,C} + d^2\frac{T\,Q}{p\,A\,B\,C} - \dots = 0\,,$$

i valori delle quantità A, B, C che si calcolano come mostrato in precedenza.

10.3 Applicazione del "metodo delle variazioni" al problema isoperimetrico nello spazio

Lagrange mostra come il nuovo tipo di approccio possa essere utilizzato per la risoluzione del problema isoperimetrico nello spazio. Il problema in questione è una variante del classico problema isoperimetrico, che ha origini molto antiche, e che recita: "Tra tutte le figure piane aventi lo stesso perimetro, determinare quella avente area massima." Il genere di problemi, nei quali l'insieme delle curve accettabili doveva soddisfare una condizione aggiuntiva, detta condizione isoperimetrica, era stato trattato in precedenza anche da Eulero nel Cap. V del suo "Methodus inveniendi". Il problema considerato da Lagrange è il seguente:

> Per esempio, se si cerca una tale superficie che, fra tutte le superfici isoperimetriche (è così che le chiamo), contiene il solido più grande.

Quindi lo scopo è calcolare tra tutte le superfici che hanno la stessa area superficiale, quella con il volume maggiore. Lagrange considera un sistema di assi coordinati x, y, z nello spazio, nel quale esamina la generica superficie $z(x, y)$ data da $dz = P\,dx + Q\,dy$. Lagrange afferma che la formula per il calcolo del volume di una tale superficie è $\iint z\,dx\,dy$, mentre la formula per il calcolo della sua area è $\iint dx\,dy\sqrt{1 + P^2 + Q^2}$. Pertanto, nel problema considerato, la quantità che esprime l'area viene mantenuta costante, mentre quella che esprime il volume varia, allo scopo di renderla massima:

$$\iint dx\,dy\sqrt{1 + P^2 + Q^2} = \text{cost}\ , \qquad \iint z\,dx\,dy = \max .$$

Osserviamo che questo tipo di problema, è essenzialmente equivalente al seguente problema ad esso associato:

$$\iint dx\,dy\sqrt{1 + P^2 + Q^2} = \min, \qquad \iint z\,dx\,dy = \text{cost} .$$

ossia, fra tutte le superfici che hanno lo stesso volume, si cerca quella con l'area superficiale minima. Eulero aveva notato questo fatto nel suo "Methodus inveniendi", egli nello Scholium I del Cap.V scrive:

> In primo luogo è chiaro, che come abbiamo già dimostrato sopra, la soluzione risulterà la stessa, o che fra tutte le curva che sono dotate della proprietà comune W, si cerchi quella che rende massima o minima la quantità V; o al contrario, che fra tutte le curve che sono dotate della proprietà comune V venga richiesta quella in cui la quantità W sia massima o minima.[5]

Inoltre Eulero aggiunge che la soluzione cercata per i due problemi associati si ottiene richiedendo che sia massima o minima la quantità $\alpha V + \beta W$, con α, β costanti arbitrarie.

Precisiamo inoltre, che la seconda versione del problema citata, viene successivamente esposta da Lagrange nell'"Essai d'une nouvelle méthode..." (1760) pag. 353-357. Nell'Appendice I di quella memoria, Lagrange formulò il problema generale delle superfici minime:

> trovare la superficie di area minima tra tutte quelle che hanno uno stesso perimetro dato.[6]

Pertanto si desidera trovare tra tutte le superfici delimitate da una stessa curva data, quella con area maggiore. Lagrange prosegue impostando il procedimento risolutivo come nella lettera, e dopo aver fornito la medesima formula per il calcolo dell'area, precisa:

[5]Eulero scrive: "Primo enim apparet, quod jam supra demonstravimus, Solutionem eadem fore, sive, inter omnes curvas communi proprietate W praeditas, quaeratur ea quae habeat V maximum vel minimum; sive inverse, inter omnes curvas communi proprietate V praeditas, ea requiratur in qua sit W maximum vel minimum." da "Methodus inveniendi", pag. 188 dell'edizione del 1744.

[6]Lagrange scrive: "trouver la surface qui est la moindre de toutes celles qui ont un meme périmètre donnè." da "Essai d'une nouvelle méthode..." in "Oeuvres de Lagrange" pag. 353.

> dove i due segni $\int\int$ rappresentano due integrazioni successive, l'una in rapporto ad x, l'altra in rapporto ad y, o viceversa.[7]

Dopo aver trattato questo caso più generico, Lagrange passa al problema sopra citato. Per risolvere il quale, egli segue un procedimento analogo a quello illustrato nella presente lettera. Il procedimento risolutivo contenuto nella lettera, è ovviamente più essenziale e meno preciso rispetto a quello esposto nel testo scritto, ma la logica seguita da Lagrange, è esattamente la medesima. Pertanto i passaggi mancanti nella presente lettera, sono stati ricostruiti adottando quella stessa logica.

Torniamo quindi alla risoluzione del problema in questione. Seguendo il "metodo delle variazioni", è ora necessario calcolare le variazioni δ di questi integrali, per poi procedere ad annullarle entrambe:

$$\delta \iint z\,dx\,dy = 0 \qquad \delta \iint dx\,dy\sqrt{1+P^2+Q^2} = 0$$

$$\iint dx\,dy\,\delta z = 0 \qquad \iint dx\,dy\,\delta\sqrt{1+P^2+Q^2} = 0$$

La variazione del volume è già stata ottenuta, mentre è necessario svolgere i calcoli per ottenere quella dell'area.

$$\iint dx\,dy\,\delta\sqrt{1+P^2+Q^2} = \iint dx\,dy\left(\frac{P\,\delta P + Q\,\delta Q}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}\right). \tag{10.17}$$

Egli pone:

$$P = \left(\frac{dz}{dx}\right) \quad \text{da cui} \quad \delta P = \left(\frac{\delta dz}{dx}\right) = \left(\frac{d\delta z}{dx}\right);$$

$$Q = \left(\frac{dz}{dy}\right) \quad \text{da cui} \quad \delta Q = \left(\frac{\delta dz}{dy}\right) = \left(\frac{d\delta z}{dy}\right); \tag{10.18}$$

quì Lagrange utilizza le parentesi tonde per indicare le "derivate parziali". Precisiamo che la nozione di derivata parziale odierna non esisteva ancora,

[7]Lagrange scrive: "ou ls deuxe signes $\int\int$ marquent deux intégrations successives, l'une par rapport à x et l'autre par rapport à y, ou réciproquement." da "Essai d'une nouvelle méthode..." in "Oeuvres de Lagrange" pag. 354.

non esistendo neppure quella di limite, e di conseguenza nemmeno quella di derivata. Questa notazione era stata introdotta da Eulero nel "Remarques sur les mémories précédens de M. Bernoulli". Dove egli considera un funzione $y(x,t)$, e scrive:

> $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ indica il valore della frazione $\frac{dy}{dx}$ avendo posto il termine t costante.[8]

Questa notazione sarà molto diffusa nella seconda metà del XVIII sec., soprattutto grazie al suo "Introductiones calculi differentialis" (1755)[9]. Le (10.15) riscritte in notazione attuale risultano:

$$P = \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{da cui} \quad \delta P = \frac{\partial \delta z}{\partial x}; \qquad Q = \frac{\partial z}{\partial y} \quad \text{da cui} \quad \delta Q = \frac{\partial \delta z}{\partial y}.$$

Sostituendo le (10.18) nella (10.17) si ottine:

$$\iint dx\, dy \left(\frac{P\left(\frac{d\delta z}{dx}\right) + Q\left(\frac{d\delta z}{dy}\right)}{\sqrt{1+P^2+Q^2}} \right) =$$

$$= \iint dx\, dy \frac{P}{\sqrt{1+P^2+Q^2}} \left(\frac{d\delta z}{dx}\right) + \iint dx\, dy \frac{Q}{\sqrt{1+P^2+Q^2}} \left(\frac{d\delta z}{dy}\right).$$

Ora consideriamo singolarmente il primo integrale, esso può essere scritto come:

$$\iint dx\, dy \frac{P}{\sqrt{1+P^2+Q^2}} \left(\frac{d\delta z}{dx}\right) = \int dy \int dx \frac{P}{\sqrt{1+P^2+Q^2}} \left(\frac{d\delta z}{dx}\right); \tag{10.19}$$

poichè nell'espressione $\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)$ la $d\delta z$ esprime la differenza che si manifesta in δz quando viene variata la sola x. Pertanto per fare scomparire questa differenza, Lagrange considera l'integrazione relativa alla sola variabile x:

$$\int dx \frac{P}{\sqrt{1+P^2+Q^2}} \left(\frac{d\delta z}{dx}\right).$$

---

[8] Eulero scrive: "$\left(\frac{dy}{dx}\right)$ marque la valeur de la fraction $\frac{dy}{dx}$ en posant le terms t costant." a pag. 205 dell'edizione originale del "Remarques sur les mémories précédens de M. Bernoulli".

[9] "Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum" Volume 1, 1755 (E.212), in Opera omnia serie I, vol. X.

Ora Lagrange osserva che nell'integranda soltanto x è variabile, quindi semplifica i dx, e sviluppa l'integrale per parti, ottenendo:

$$\int \frac{P}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}\, d\delta z = \frac{P}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}\,\delta z - \int d\frac{P}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}\,\delta z\,;$$

nella quale si osserva che la differenziazione $d\frac{P}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}$ riguarda la variazione della sola x. Sostituendo quindi nella (10.19) si ottiene:

$$\int dy \frac{P}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}\,\delta z - \iint dx\,dy\,\frac{d\frac{P}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}}{dx}\,\delta z\,.$$

Procedendo in maniera analoga per la seconda parte, si ottiene:

$$\iint dx\,dy \frac{Q}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}\left(\frac{d\delta z}{dy}\right) = \int dx \int dy \frac{Q}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}\left(\frac{d\delta z}{dy}\right) =$$

$$\int dx \frac{Q}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}\,\delta z - \iint dx\,dy\,\frac{d\frac{Q}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}}{dy}\,\delta z\,.$$

In conclusione, unendo le due parti calcolate separatamente, si ottiene la seguente espressione:

$$\int dy \frac{P}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}\,\delta z + \int dx \frac{Q}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}\,\delta z +$$
$$- \iint dx\,dy \left[\left(\frac{d\frac{P}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}}{dx}\right) + \left(\frac{d\frac{Q}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}}{dy}\right)\right] \times \delta z$$

I primi due integrali svaniscono automaticamente, poichè egli si pone nella condizione in cui la variazione δz sia sempre nulla sui bordi. Le parole di Lagrange, ne illustrano in maniera completamente esauriente il motivo:

> Per quanto concerne i termini
>
> $$\int dy \frac{P}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}\delta z \quad \text{e} \quad \int dx \frac{Q}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}\,\delta z\,,$$
>
> se fosse data la curva, che deve essere il perimetro della superficie da ricercare, si annullano essi stessi, poiché gli stessi δz si annullano, esattamente nello stesso modo, nel quale scompaiono i membri costanti nelle curve da ricercare, quando sono dati i punti estremi delle stesse.

A questo punto si sono calcolate entrambe le variazioni:

$$\iint dx\,dy\,\delta z = 0 \qquad -\iint dx\,dy\left[\left(\frac{d\frac{P}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}}{dx}\right)+\left(\frac{d\frac{Q}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}}{dy}\right)\right]\times\delta z = 0$$

Ora per ottenere la soluzione si deve porre:

$$\delta(\alpha V + \beta W) = \alpha\delta V + \beta\delta W = 0\,,$$

o in maniera analoga

$$\frac{\alpha}{\beta}\delta V + \delta W = 0$$

Quindi, Lagrange moltiplica la prima quantità per un coefficiente qualunque costante a, e sommandola alla seconda, ottiene:

$$\iint dx\,dy\left[a-\left(\frac{d\frac{P}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}}{dx}\right)-\left(\frac{d\frac{Q}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}}{dy}\right)\right]\times\delta z = 0$$

di conseguenza, l'equazione della superficie sarà:

$$a\,dx\,dy-\left[\left(\frac{d\frac{P}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}}{dx}\right)+\left(\frac{d\frac{Q}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}}{dy}\right)\right]\times dx\,dy = 0$$

ossia

$$\left(\frac{d\frac{P}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}}{dx}\right)+\left(\frac{d\frac{Q}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}}{dy}\right) = a\,.$$

Ricordando che per la notazione utilizzata, quelle che compaiono quì sono in realtà "derivate parziali"; Lagrange ha ottenuto come soluzione in notazione odierna, la seguente equazione alle derivate parziali:

$$\frac{\partial\frac{P}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}}{\partial x}+\frac{\partial\frac{Q}{\sqrt{1+P^2+Q^2}}}{\partial y} = a\,.$$

Lagrange scrive:

> partendo da questa equazione, non vedo in qual modo generale, si possa trovare un'equazione finita per la superficie. Infatti una grande

> difficoltà risiede nel fatto che si deve considerare uno dei differenziali con solamente la x variante, l'altro con solo la y. Effettuando il calcolo si scopre facilmente che la sfera soddisfa tale equazione, ma si tratta di un caso particolare; in quanto tale equazione si estende ben oltre.

Lagrange manifesta ad Eulero la sua incapacità di risolvere questa equazione, che fornirebbe la soluzione al problema. Nè Lagrange, nè Eulero, riuscirono a risolverla in maniera generale. Questa infatti è un'equazione alle derivate parziali, non lineare di tipo ellittico; all'epoca furono solo in grado di individuare alcune sue soluzione particolari. Lagrange nell'"Essai d'une nouvelle méthode..." mostrò esplicitamente che l'equazione della sfera ne è effettivamente una soluzione particolare. Eulero la sviluppò ulteriormente nel "De formulis integralibus duplicatis" (1770)[10] riuscendo ad individuare due soluzioni particolari:

$$\begin{aligned} &z^2 = c^2 - x^2 - y^2 \quad \text{sfera}\,, \\ &z^2 = c^2 - y^2 \quad \text{superficie cilindrica}\,. \end{aligned}$$

Riferendosi a tale equazione, si è fatto uso del termine "derivata parziale". Ma precisiamo che i primi studi sulle equazioni alle derivate parziali risalgono solo agli anni Quaranta del XVIII sec., nonostante la nozione di differenziazione parziale fosse già nota nel secolo precedente, come si evince dalla frase di Lagrange. Comunque è soltanto verso la fine del Settecento e i primi anni dell'Ottocento che prende avvio una trattazione sistematica, almeno per ciò che concerne le equazioni alle derivate parziali del primo ordine. La notazione oggi utilizzata per le derivate parziali fu generalmente accettata soltanto nella seconda metà dell'Ottocento. Sarà D'Alembert che, affrontando problemi di fisica matematica, in particolare quelli relativi alle corde vibranti, sentì la necessità di considerare le equazioni alle derivate parziali come oggetto di studio in sé, e di elaborare metodi per la loro risoluzione.

[10] "De formulis integralibus duplicatis" Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 14, 1770 (E.391)

Infine osserviamo che questi conti coinvolgono il calcolo di integrali doppi. Il concetto di integrale doppio appare già, in termini di sommatorie, nella "Philosophiae naturalis principia mathematica"[11] di Newton (1680). Le "sommatorie doppie" non erano qualcosa di estraneo neanche per Leibniz, che le menziona dentro una lettera a Johann Bernoulli (1697). Calcoli analoghi poi si trovano più avanti nei testi di altri autori matematici. Detto questo però, è in questa lettera di Lagrange, che appaiono per la prima volta gli integrali doppi, rappresentati esplicitamente con una notazione quasi moderna. Ma è opinione comune e abbastanza diffusa, che gli integrali multipli siano stati introdotti per la prima volta da Eulero nel "De formulis integralibus duplicatis" pubblicato nel 1770. Pertanto l'apparizione nella lettera di Lagrange, delle due formule integrali, quella per il calcolo dell'area, e quella per il volume, sembrerebbe contraddire questa attribuzione. D'altra parte però il fatto che lagrange presenta queste due formule, senza nessuna spiegazione, forse indica che esse erano già note all'epoca. In ogni caso comunque stiano le cose, le formule scritte da Lagrange rappresentano la prima apparizione del doppio integrale in un manoscritto o in forma stampata.

10.4 Formule per le potenze del seno e del coseno

Lagrange informa Eulero di essere riuscito a generalizzare le formule per il calcolo delle potenze del seno e del coseno. Nel suo libro "Introductio in analysin infinitorum" del 1748, Eulero aveva trovato un metodo per sviluppare le potenze del seno e del coseno, ma non aveva fornito nessuna formula generale. Nel Cap.14 in tale opera si trovano i risultati seguenti:

[11] Per esempio si veda prop. 71, 74, 79, 80, del primo libro.

§262

Sfruttando le formule seguenti contenute nel §130:

$$\sin(x+y) = \sin y \cos z + \cos y \sin z$$
$$\sin(x-y) = \sin y \cos z - \cos y \sin z$$
$$\cos(x+y) = \cos y \cos z - \sin y \sin z$$
$$\cos(x-y) = \cos y \cos z + \sin y \sin z$$

Eulero ricava le seguenti:

$$2\sin a \sin z = \cos(a-z) - \cos(a+z)$$
$$2\cos a \sin z = \sin(a+z) - \sin(a-z)$$
$$2\sin a \cos z = \sin(a+z) + \sin(a-z)$$
$$2\cos a \cos z = \cos(a-z) + \cos(a+z)$$

§263

Eulero presenta le seguenti formule per calcolare le potenze del seno e del coseno:

$$\begin{aligned}
\sin z &= \sin z \\
2\sin^2 z &= 1 - \cos 2z \\
4\sin^3 z &= 3\sin z - \sin 3z \\
8\sin^4 z &= 3 - 4\cos 2z + \cos 4z \\
16\sin^5 z &= 10\sin z - 5\sin 3z + \sin 5z \\
32\sin^6 z &= 10 - 15\cos 2z + 6\cos 4z - \cos 6z \\
64\sin^7 z &= 35\sin z - 21\sin 3z + 7\sin 5z - \sin 7z \\
128\sin^8 z &= 35 - 56\cos 2z + 28\cos 4z - 8\cos 6z + \cos 8z \\
256\sin^9 z &= 126\sin z - 84\sin 3z + 36\sin 5z - 9\sin 7z + \sin 9z \\
\ldots &= \ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos z &= \cos z \\
2\cos^2 z &= 1 + \cos 2z \\
4\cos^3 z &= 3\cos z + \cos 3z \\
8\cos^4 z &= 3 + 4\cos 2z + \cos 4z \\
16\cos^5 z &= 10\cos z + 5\cos 3z + \cos 5z \\
32\cos^6 z &= 10 + 15\cos 2z + 6\cos 4z + \cos 6z \\
64\cos^7 z &= 35\cos z + 21\cos 3z + 7\cos 5z + \cos 7z \\
\ldots &= \quad \ldots
\end{aligned}$$

Torniamo quindi alla lettera di Lagrange. Egli afferma di aver ricondotto queste formule ricavate da Eulero ad una forma più generale, la seguente:

$$\begin{aligned}
(2\ \cos z)^m = \cos mz + m\cos(m-2)z + &\frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2}\ \cos(m-4)z \\
+ &\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}\ \cos(m-6)z \\
+ &\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\ \cos(m-8)z + \ldots .
\end{aligned}$$

Dalla quale poi, sfruttando la relazione $\sin z = \cos(\pi - z)$, si ottiene un'analoga formula anche per il seno:

$$(\sin z)^m = \cos m(\pi - z) + m\cos(m-2)(\pi - z) + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2}\ \cos(m-4)(\pi - z) + \ldots .$$

Risulta evidente che queste ultime forniscono gli stessi risultati ricavati da Eulero per i casi particolari da lui analizzati.

10.5 Appendice: considerazioni sui differenziali

Questa è la frase che introduce l'appendice allegata alla presente lettera:

> Nel frattempo, affinché la mia lettera, la quale ha lo scopo di ringraziare, non apparisse del tutto vuota, ho aggiunto qualcuna delle mie riflessioni sulle differenziazioni. Saluti e ossequi.

Lagrange parla della lettera di ringraziamento che aveva inviato all'Accademia di Berlino dopo la sua elezione a membro associato esterno. Questa frase sembra al quanto paradossale, se associata alla presente lettera, che è tutt'altro che priva di considerazioni matematiche, contenendo diverse pagine dedicate al calcolo delle variazioni. È più probabile che Lagrange avesse scritto questa appendice contenente le sue riflessioni sui differenziali, affinchè essa venisse allegata alla lettera di ringraziamento per l'Accademia. In primo luogo questa tesi è resa verosimile dal fatto che Eulero viene menzionato in terza persona: "secondo la formula che il celebre Eulero dà". Un ulteriore prova a favore di questa ipotesi consiste nel fatto che in tale appendice Lagrange utilizza il "voi" per rivolgersi al lettore/ai lettori. L'espressione "vos... non denegaturus", ossia "voi... non negherete", non può essere riferita ad Eulero, il quale viene sempre apostrofato da Lagrange con la seconda persona; mentre quell'espressione è del tutto naturale se usata da Lagrange per riferirsi ai membri dell'Accademia di Berlino.

Passiamo dunque ad esaminare il contenuto matematico dell'appendice. Lagrange presenta il seguente teorema:

Teorema.

> Data una funzione con un numero qualsiasi di quantità variabili, per esempio x, y, z, se si cerca il suo differenziale di ordine n, poniamo nella stessa funzione
>
> $$x + a\,dx + \frac{a^2 d^2 x}{1 \cdot 2} + \frac{a^3 d^3 x}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \qquad \text{al posto di x}$$
>
> $$y + a\,dy + \frac{a^2 d^2 y}{1 \cdot 2} + \frac{a^3 d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \qquad \text{al posto di y}$$
>
> e allo stesso modo al posto di z, ecc., io dico che una volta che la funzione è sviluppata e ordinati i termini secondo le potenze di a, il coefficiente di a^n moltiplicato per $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n$ darà il differenziale cercato.

Quindi fornisce un esempio per tale procedura. Egli considera la particolare funzione xy, della quale erano già note le formule per il calcolo dei differenziali di qualsiasi ordine. Queste erano state pubblicate nel primo volume della Miscellanea Berolinensia, nell'articolo di Leibniz "Symbolismus memorabilis calculi algebraici et infinitesimalis, in comparatione potentiarum et differentiarum..."[17], del 1710 (del quale si è già discusso in precedenza a pag. 50). Infatti nell'articolo Leibniz aveva osservato l'analogia tra gli sviluppi $(x+y)^m$ e $d^m(xy)$, con m intero positivo.

Ora Lagrange sfrutta questo teorema per calcolarne i differenziali, e procede con le dovute sostituzioni:

$$\left(x + a\,dx + \frac{a^2 d^2 x}{1\cdot 2} + \frac{a^3 d^3 x}{1\cdot 2\cdot 3} + \dots\right)\left(y + a\,dy + \frac{a^2 d^2 y}{1\cdot 2} + \frac{a^3 d^3 y}{1\cdot 2\cdot 3} + \dots\right)$$

Infine sviluppa il prodotto, e ordina i termini secondo le potenze di a:

$$\begin{aligned} & xy + a(x\,dy + y\,dx) + a^2\left(\frac{x\,d^2y}{1\cdot 2} + dx\,dy + \frac{d^2x\,y}{1\cdot 2}\right) \\ & + a^3\left(\frac{x\,d^3y}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{dx\,d^2y}{1\cdot 2} + \frac{d^2x\,dy}{1\cdot 2} + \frac{d^3x\,y}{1\cdot 2\cdot 3}\right) + \dots \\ & \dots \qquad \dots \\ & + a^n\left(\frac{x\,d^ny}{1\cdot 2\cdot 3\dots n} + \frac{dx\,d^{n-1}y}{1\cdot 2\dots n-1} + \frac{d^2x\,d^{n-2}y}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\dots n-2}\right. \\ & \qquad \left. + \frac{d^3x\,d^{n-3}y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\dots n-3} + \dots\right) \end{aligned}$$

Risulta quindi evidente, tenendo in considerazioni le formule per il differenziale di xy già fornite da Leibniz, che il coefficiente del termine a^n, rappresenta esattamente il differenziale di ordine n della funzione xy:

$$d^n \cdot xy = x\,d^ny + n\,dx\,d^{n-1}y + \frac{n\cdot n-1}{1\cdot 2} d^2x\,d^{n-2}y + \dots\ .$$

In seguito Lagrange considera la funzione y^m. Seguendo la procedura indicata dal teorema, per trovare i differenziali di ordine qualsiasi di y^m, si deve sviluppare la quantità:

$$\left(y + a\,dy + \frac{a^2 d^2 y}{1\cdot 2} + \frac{a^3 d^3 y}{1\cdot 2\cdot 3} + \dots\right)^m \tag{10.20}$$

Per farlo, egli sfrutta la formula presentata da Eulero nella proposizione 76 del Cap. IV, del suo "Introductio in analysin infinitorum" vol. I, ossia:

$$(1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 \dots)^{m-1} = 1 + A\,z + B\,z^2 + C\,z^3 + Dz^3 + Ez^4 + \dots$$

dove

$$\begin{aligned}
A &= \frac{m-1}{1}\,\alpha \\
B &= \frac{m-2}{2}\,\alpha A + \frac{2m-2}{2}\,\beta\,, \\
C &= \frac{m-3}{3}\,\alpha B + \frac{2m-3}{3}\,\beta A + \frac{3m-3}{3}\,\gamma \\
D &= \frac{m-4}{4}\,\alpha C + \frac{2m-4}{4}\,\beta B + \frac{3m-4}{4}\,\gamma A + \frac{4m-4}{4}\,\delta \\
E &= \frac{m-5}{5}\,\alpha D + \frac{2m-5}{5}\,\beta C + \frac{3m-5}{5}\,\gamma B + \frac{4m-5}{5}\,\delta A + \frac{5m-5}{5}\,\epsilon
\end{aligned}$$

Così la (10.20) diventa:

$$y^m\left(1 + a\,\frac{dy}{y} + \frac{a^2d^2y}{1\cdot 2\,y} + \frac{a^3d^3y}{1\cdot 2\cdot 3\,y} + \dots\right)^m = y^m(1{+}aA{+}a^2B{+}a^3C{+}a^4D{+}\dots)$$

dove, avendo posto $m = r - 1$, le quantità A, B, C saranno:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{r-1}{1}\cdot\frac{dy}{y}\,, \\
B &= \frac{r-2}{2}\,A\,\frac{dy}{y} + \frac{2r-2}{2}\cdot\frac{d^2y}{1\cdot 2\,y}\,, \\
C &= \frac{r-3}{3}\,B\,\frac{dy}{y} + \frac{2r-3}{3}\,A\,\frac{d^2y}{1\cdot 2y} + \frac{3r-3}{3}\cdot\frac{d^3y}{1\cdot 2\cdot 3\,y}\,. \\
&\qquad\dots
\end{aligned}$$

Così stando a quanto affermato dal teorema, la quantità $A\,y^m$ fornisce il differenziale di primo ordine di y^m; la quantità $B\,1\cdot 2\,y^m$ fornisce il differenziale di secondo ordine; la quantità $C\,1\cdot 2\cdot 3\,y^m$ fornisce il differenziale di terzo ordine; e così via.

Comunque il metodo generale, per trovare immediatamente i differenziali di qualsiasi ordine di una funzione senza passare attraverso i differenziali di ordine inferiore, venne esposta proprio da Lagrange nel 1774 dentro la memoria “Sur une nouvelle espèce de calcul...”[12].

[12] “Sur une nouvelle espèce de calcul...”, Nouv. Mem. Acad. Roy. Sci. Belles-Lett., Berlino, 1774 (L.33)

Capitolo 11

Lagrange a Eulero: lettera del 28 luglio 1759

LAGRANGE A EULERO.

Taurini, die 28 julii anno 1759.

Vir amplissime et celeberrime, Fautor honoratissime,

Tres jam pene elapsi sunt anni ex quo nihil amplius literarum nec a te accipere, nec tibi mittere mihi datum est. Statim enim ac presens bellum exortum est in regienibus vestris, mercator ille per quem epistolae nostrae transferebantur mihi significavit, commercium inter nostras et vestras regiones aut omnino interdictum, aut saltem periculi et alea plenum esse; nec ex eo tempore viam ullam satis tutam ad id invenire mihi contigit.

Nunc vero cum praesens liber typis manderetur qui aliqua ex parte ad me pertinet, officio meo erga te me defuturum putavi, nisi omnem operam adhibuissem et modum quaererem, quo illum tibi quantocius offerre ac dicare possem. Exoptatam itaque tandem nactus occasionem, tibi mitto hoc exemplar Commentariorum physico-mathematicorum quae societas quaedam privata in Iucem emittere coepit, eo animo ut hujuscemodi scientiarum studium, quod hactenus nimis jacuisse videtur apud nos aliquomodo excitetur, et promoveatur. Inter dissertationes mathematicas primae duo nihil continent quod tua videatur attentione dignum; tertia in qua de soni natura *et propagatione agitur, fortassis, ut spero, alicujus ponderis videri poterit, ob theoriam de oscillationibus chordarum tensarum, et fibrarum aerearum, quae novo et rigoroso calculo superstructa invnnitur; atque de hac praecipue judicium tuum quam vehementissime exopto. Quarta demum dissertatio mathematica labor est juvenis cujusdam felicissimi ingenii, qui intur Artillerii alumnos, meosque discipulos est, et a quo maxima promitti posse videntur. Reperies hic pag. 142 notatiunculum meam de quodam Paradoxo, quod D.d'Alambert invehere in Analysin non dubitavit.*

Elapso anno, Iiteras ipsi dedi, quae ejusdem enodationem complectebantur; rescripsit Auctor tergiversationes potius quaerendo, quam rationes meas oppugnando; satius itaque esse duxi rem totam publici juris facere, ut omnem contentionum privatarum molestiam effugerem. De rebus physicis et anatomicis nihil Ioquor ut pote quae mihi extranea maxima ex parte sunt. Interim si tibi aequum videbitur, vir clarissinie, totum hunc librum Academiae vestrae judicio submittere facultas omnis pene te esto, et maximas hac de re Societas nostra integra tibi gratias habebit. Si approbationem aliquam apud vos promereri possemus, id nobis certe maximae verteremus gloriae, simul etiam ad studiorurn nostrorum aestimationem non mediocrem, ac tutelam quoque in hac ditione nobis parandam summopere conduceret. Dominum da Maupertuis nescio ubi moretur, quamobrem te depreor ut me de ipsius domicilio certiorem reddas, quo literas ipsi dare, et librum hunc quoque mittere possim. Opus quod moliebar de Applicatione principii minimae quantitatis actionis ad Mechanicam universam, pene absolutum est; ilium in duas partes distribui; in prima exponitur methodus mea maximorum *et* minimorum *ad formulas integrales indefinitas applicata, cui maximam quam potui extensionem tribuere, conatus sum, ita ut parum amplius desiderari posse videatur in hac: materia. Secunda pars agit de principio minimae quantitatis actionis, cujus ope, et per methodum antea explicatam difficiliora quaeque Mecanices problemata facillime, et universaliter resolvuntur. Animus esset, si id fieri posset, ilium Berolinum antea mittere ut tum tuo, tum D. de Maupertuis, tum Academiae integre judicio submitteretur, et deinde typis quoque illic* *consignari posset, ad evitanda inoommoda omnia quae in regionibus nostris in Iibris edendis occurrunt. Quid hac de re sentias mihi pergratum facies si id significare non dedignaveris. Verum fortassis ante acceptam istam epistolam, alia mea tibi reddetur, in qua de hac re longius agere mihi licebit. Interim vale, vir clarissime, meque indesinenter credas*

Amplissimi tui nominis cultorem, et veneratorem candidissimum,
Ludovico De La Grange.

. . . .

LAGRANGE A EULERO.

Torino, 28 luglio 1759.

Uomo famosissimo e celeberrimo, onoratissimo ricercatore,

Sono già passati quasi tre anni da quando non ho più ricevuto tue lettere, e non ho più avuto occasione di inviartene. Infatti, non appena è scoppiata questa guerra nelle vostre regioni, quel mercante attraverso il quale le nostre lettere venivano trasmesse mi ha comunicato che ogni commercio fra le mie e le tue terre o è stato del tutto interrotto, o è pieno di azzardo e di pericolo; e da quel tempo non mi è mai riuscito di trovare una via abbastanza sicura a tale scopo.

Ora, però, dal momento che si dava alle stampe questo libro, che in parte mi riguarda, ho ritenuto che sarei venuto meno ai miei obblighi nei tuoi riguardi, se non avessi preparato l'intera opera e non avessi cercato un modo per offrirtela e dedicartela il più rapidamente possibile. Cogliendo dunque, infine, l'occasione desiderata, ti invio questo esemplare dei "Commentari fisico-matematici", che una società privata ha cominciato a pubblicare, con l'intento di far sì che lo studio di queste scienze, che fino ad ora sembra essere rimasto troppo inerte presso di noi, sia sollecitato e promosso. Fra le dissertazioni matematiche le prime due non contengono nulla che paia degno della tua attenzione[1]; la terza in cui si parla della natura e della propagazione del suono[2], forse, come spero, potrà apparire di una qualche importanza, per la teoria intorno alle oscillazioni delle corde tese, e intorno alle fibre aeree, la quale si trova rafforzata con un calcolo nuovo e rigoroso; e riguardo ad essa desidero di tutto cuore il tuo giudizio. Infine, la quarta dissertazione matematica è opera di un giovane di felicissimo ingegno, che è fra gli alunni dell'Artiglieria, e fra i miei discepoli, e dal quale sembra ci si possano aspettare cose straordinarie[3]. Troverai qui, a pagina 142, una mia noterella riguardante un Paradosso, che d'Alembert non ha esitato a sottoporre all'Analisi[4].

L'anno passato, gli consegnai una lettera che conteneva la soluzione di quel paradosso; mi rispose l'Autore cercando di suscitare dubbi, più che confutando le mie ragioni; dunque ho creduto più opportuno sottoporre tutta la questione al pubblico giudizio, per evitare tutto il fastidio delle contese private. Delle questioni fisiche ed anatomiche non dico nulla, dato che mi sono in massima parte estranee. Frattanto, se ti parrà giusto, o uomo illustrissimo, sentiti pure libero di sottoporre tutto questo libro al giudizio della vostra Accademia, e l'intera nostra Società ti sarà per questo sommamente grata. Se potessimo ottenere presso di voi una qualche approvazione, certo volgeremmo ciò a nostra somma gloria, e, in pari misura, un non indifferente

[1]Queste sono le memorie di Lagrange: "Recherches sur la méthode de maximis et minimis", Misc. Taurin. I, 1759, (L.2) e "Sur l'intégration d'une équation différentielle à differences finies, qui contient la théorie des suites récurrentes", Misc. Taurin. I, 1759 (L.3).

[2]"Recherches sur la nature, et la propagation du son", Misc.Taurin. I, 1759 (L.4).

[3]Il discepolo di Lagrange è F. Daviet de Foncenex, e il suo articolo porta il titolo di "Réflexions sur les quantités imaginaires" Misc. Taurin. I, 1759.

[4]La nota di Lagrange "Note sur un paradoxe qu'on rencontre dans les formules de l'attraction d'un point vers une surface sphérique quelconque." Misc.Taurin. I, 1759 (L.5), è inserita in fondo alle pagine 142-145 dell'articolo di F. Daviet de Foncenex, citato nella nota sopra. Il paradosso in questione riguarda le formule dell'attrazione di un punto verso una superficie sferica qualunque. Esso era stato esaminato da D'Alambert nell'articolo "Gravitation" e nel terzo tomo delle "Recherches sur differens points importans du système du monde", Parigi 1756.

motivo di prestigio per i nostri studi, e ciò ci conferirebbe, sommamente, anche una tutela in questa giurisdizione. Non so dove risieda il Signor de Maupertuis, dunque ti prego di informarmi del suo domicilio, presso cui io possa inviargli una lettera e spedirgli questo libro. L'opera che stavo scrivendo, riguardante l'Applicazione del Principio della minima quantità d'azione a tutta la Meccanica[5], è quasi terminata; l'ho divisa in due parti; nella prima è esposto il mio metodo dei massimi e dei minimi, applicato alle formule integrali indefinite, al quale ho cercato di applicare la massima estensione possibile, cosicché sembra che in questa materia poco si possa desiderare di più. La seconda parte tratta del principio della minima quantità di azione, grazie al quale, e per mezzo del metodo precedentemente spiegato, alcuni difficili problemi della Meccanica si risolvono nel modo più facile, e universalmente. Avrei l'intenzione, se ciò fosse possibile, di inviare prima quel libro a Berlino, affinché fosse sottoposto al giudizio sia tuo che del Maupertuis, e infine dell'Accademia nella sua interezza, e poi potesse essere colà dato alle stampe, per evitare tutti gli incomodi che nelle nostre regioni insorgono nel pubblicare libri. Mi farai cosa assai gradita se non disdegnerai di manifestarmi il tuo pensiero. Ma forse, prima che questa epistola sia ricevuta, te ne verrà consegnata un'altra mia, in cui mi sarà possibile trattare pià ampiamente di tale questione. Frattanto, salute a te, uomo illustrissimo, e credimi

incessantemente devoto al tuo eccelso nome, e sincero estimatore,
LUDOVICO DE LA GRANGE.

[5]Questo libro non verrà mai inviato a Berlino, a causa della morte di Maupertuis, sopraggiunta poco dopo, e delle difficoltà riguardanti la stampa dei testi a Berlino. Al suo posto, Lagrange pubblicherà nel vol. II delle Miscellanea Taurinensia, le due memorie "Essai d'une nouvelle methode..." (L.7) e "Application de la méthode..." (L.8), 1762.

Commento

Questa lettera di Lagrange riapre la corrispondenza trai due matematici, dopo che essa si fu interrotta per tre anni a causa dello scoppio della guerra dei Sette anni; il conflitto che si svolse tra il 1756 e il 1763 e coinvolse le principali potenze europee dell'epoca.

> Sono già passati quasi tre anni da quando non ho più ricevuto tue lettere, e non ho più avuto occasione di inviartene. Infatti, non appena è scoppiata questa guerra nelle vostre regioni, [...] ogni commercio fra le mie e le tue terre o è stato del tutto interrotto, o è pieno di azzardo e di pericolo; e da quel tempo non mi è mai riuscito di trovare una via abbastanza sicura a tale scopo.

Le comunicazioni tra l'Italia e la Germania erano state rese molto difficili, proprio a causa del conflitto. Pertanto Lagrange e Eulero non avevano avuto modo di portare avanti con continuità, il fitto scambio epistolare.

Lagrange colse l'occasione per riprendere i contatti con Eulero, quando venne pubblicato il primo volume delle Miscellanea Taurinensia.

Nel 1757 era stata fondata la Società scientifica privata di Torino. Nata per volontà del conte G. A. Saluzzo di Montesiglio (chimico che mise a disposizione la propria casa per le riunioni dei soci), con la collaborazione di Lagrange e di Gian Francesco Cigna (fisico e medico). La società era orientata soprattutto verso la matematica, la meccanica e la fisica e già nel 1759 aveva prodotto una prima pubblicazione, dal titolo "Miscellanea philosophico-mathematica Societatis privatae Taurinensis"; che comprendeva, tra gli altri scritti, due importanti testi di Lagrange, uno relativo all'analisi del Metodo dei massimi e minimi di Fermat e uno sulla propagazione del suono. In seguito vennero pubblicati quattro volumi dal titolo “Mélanges de philosophie et de mathématique”, che ospitarono gli scritti di vari scienziati d’oltralpe, tra i quali anche Eulero. Nel giro di alcuni anni avevano aderito alla Società i più importanti rappresentanti della cultura piemontese e alcuni esponenti dell’Illuminismo francese, come Jean Baptiste Le Rond d’Alembert. Nel 1783 la Società ricevette il titolo di Accademia Reale delle scienze di Torino, direttamente dal sovrano Vittorio Amedeo III di Savoia, Re di Sardegna. A seguito di questo riconoscimento, l’Accademia accrebbe di prestigio a livello internazionale ed aumentarono i contatti con gli studiosi stranieri. Le pubblicazioni dei testi scientifici continuarono con un nuovo titolo, “Mémoires de l’Académie Royale des Sciences de Turin”.

Comunque, ritorniamo sui due testi principali di Lagrange contenuti nel primo volume delle Miscellanea Taurinensia: uno relativo all’analisi del Metodo dei massimi e minimi di Fermat e uno sulla propagazione del suono. La memoria sulla quale Lagrange desiderava maggiormente il giudizio di Euelro è quella sulla propagazione del suono, “Recherches sur la nature, et la propagation du son”. Egli riteneva che essa potesse essere importante per gli studi riguardanti le corde vibranti. Per quanto riguarda i temi delle corde vibranti e della propagazione del suono, questi verranno discussi in maniera più approfondita dai due matematici, nella seconda parte della corrispondenza, che è scritta in lingue francese, e che non è presente in questa tesi. La seconda memoria di Lagrange, quella sul metodo dei massimi e minimi, dal titolo “Recherches sur la méthode de maximis et minimis”, invece non conteneva, come si sarebbe potuto pensare, la presentazione pubblica del suo rivoluzionario “metodo delle variazioni”; anzi il simbolo δ non vi compare affatto. Ma nel §14, Lagrange annuncia la successiva uscita di una nuova memoria, nella quale tratterà più approfonditamente i problemi che rigurdano il rendere massima o minima una certa quantità. Inoltre anticipa, che in questa memoria, egli presenterà un metodo generale e analitico, per la risoluzione di tali problemi; ovvero il suo “metodo delle variazioni”, con il nuovo formalismo legato al simbolo δ. La memoria in questione è l'"Essai d'une nouvelle méthode...", pubblicata nel 1762, nel secondo volume delle Miscellanea.

Infine Lagrange parla del libro che stà scrivendo sul'applicazione del principio di minima azione a tutta la meccanica; esso avrebbe contenuto una introduzione al suo "metodo delle variazioni", e una seconda parte, nella quale tale metodo sarebbe stato applicato ai problemi di meccanica, attraverso il principio di minima azione. Della vicenda riguardante tale principio, si è già ampiamente discusso in precedenza nella sezione 8.1 a pag. 137. Mentre della vicenda legata alla pubblicazione di questo libro, si parlerà più avanti, a pag. 204.

Capitolo 12

Lagrange a Eulero: lettera del 4 agosto 1759

LAGRANGE A EULERO.

Taurini, die 4 augusti 1759.

Vir clarissime et excellentissime, Fautor honoratissime.

Paucis abhinc diebus ad te misi exemplar Operis quod societas quaedam privata Taurinensis in Iucem emisit sub nomine, Miscellaneorum philosophico-mathematicorum. Extat ibi dissertatio mea de soni natura et propagatione de qua judicium tuum praecipue exopto. Egi enim prae caeteris de oscillationibus chordarum tensarum, et ex formula generali quam inveni deduxi primum theoriam compositionis oscillationum isochronarum quam Daniel Bernullius indirectis principiis stabilivit, et demonstravi ipsam tantum locum habere ubi chorda tensa tanquam nullius massae sed ponderibus numero finitis onusta consideraretur, aucto enim horum ponderum numero ad infinitum, iisque in eadem ratione diminutis, quo chorda uniformiter crassa evadat, tota Bernulliona theoria per se labitur, et formula mihi suppeditat eam ipsam constructionem quam tu, vir clarissime, dedisti in dissertatione tua de hac re Berolinensibus Commentariis inserta; quamque D. d'Alembert oppugnare agressus est. Haec quae at te pertinent tibi hic significo quia non dubito quin *literas istas antea sis accepturus quam librum ipsum; caetera ibi videre, cum illum accepteris, fas erit.*

Literas hic inclusas D. de Maupertuis cujus domicilium ignoro, rogo ut mittas. In iis loquor praecipue de libro, quem pene jam absolvi, de applicatione principii minimae quantitatis actionis ad Mechanicam totam, cui praemittitur expositio methodi maximorum et minimorum, *quam tribus abhinc annis tibi communicavi, quamque summopere generalem reddidi.*

Imprimis hic demonstravi id, de quo in ultimis meis ad te datis egi, quomodo nempe aequationes, quae ex variabilitate binarum variabilium x *et* y *deducuntur, eamdem semper curvam exprimant; eamque demounstrationem extendi, si variabiles sint tres aut plures. Inveni nempe id ex natura functionum differentialium proficisci, ita ut si differentiae statuantur finitae amplius locum non habeat ista proprietas; veluti si quaereretur polygonum quod data maximi minimique proprietate gauderet; hocque illustravi exemplo polygoni inter isoperimetra maximam aream habentis; quod problema generaliter et analytice secundum meam methodum resolutum dedi. Haec tibi in antecessum scribo quia ad methodi ipsius perfectionem hactenus desiderari mihi videbatur hujusmodi demonstratio. De reliquis non loquor, nam animus est exemplar manuscriptum Berolinum mittere ne absque tuo et D. de Maupertuis et Academiae, si id tibi videtur, suffragio edatur; immo et illud si fieri posset apud vos typis committi mallem, quam aliis in regionibus; hic enim rationes nonnullae me deterrent ab hoc opere suscipiendo; quamobrem consilium tuum de hac re summopere exopto. Ubi literas aliquas mihi dare dignaberis illas ad D. Durade, directorern literarum Genevae pro Rege Sardiniae, inscribere poteris, quo illas mittat Taurinum ad D. commendatorem de Laroli, directorem .generalem literarum* (des postes) *pro tota Regis Sardiniae ditione, a quo mihi tuto reddentur.*

Interim, vir clarissime, mihi ignoscas si praesentibus hisce te interpellare audeo; quum enim, exoriente bello, commercium omne inter vestram et nostram urbem fuerit interclusum, primam quae mihi sese offert occasio servitutis meae tibi renovandae lubens arripio. Vale, et fave

Tibi omni honoris cultu addictissimo,
Ludovico De La Grange.

P. S. Eques Salutius qui dissertationem quamdam de pulvere pirio in nostris Commentariis dedit, interpretationem molitur operis quod lingua Germanica composuisti, instar notarum ad D. Robins, me rogavit ut te de hac re certiorem facerem, quo animum tuum mihi significare valeas.

. . . .

LAGRANGE A EULERO.

Torino, giorno 4 agosto 1759.

O uomo chiarissimo ed eccellentissimo, ricercatore onoratissimo,

Pochi giorni fa ti ho inviato un esemplare dell'Opera che una società privata di Torino ha pubblicato sotto il titolo di *"Miscellanea philosophico-mathematica"*. Vi si trova la mia dissertazione sulla natura e la propagazione del suono[1], riguardo alla quale desidero sommamente il tuo giudizio. Vi ho infatti trattato, oltre ad altri argomenti, delle oscillazioni delle corde tese, e dalla formula generale che ho trovato, ho dedotto dapprima la teoria della composizione delle oscillazioni isocrone che Daniel Bernoulli stabilì sulla base di principi indiretti[2], e ho dimostrato che essa ha luogo solo dove una corda tesa venisse considerata come di massa nulla, ma carica di pesi finiti di numero; infatti, qualora venisse accresciuto fino all'infinito il numero di questi pesi, ed essi fossero diminuiti nella stessa proporzione, fino a che la corda non risulti uniformemente spessa, tutta la teoria Bernoulliana di per sé si dissolve, e la formula mi fornisce quella stessa costruzione che tu, o uomo

[1] "Recherches sur la nature, et la propagation du son", "Misc. Tarin." I, 1759 (L.4).

[2] Negli articoli di D. Bernoulli "Réfléxions et éclaircissemens sur le nouvelles vibrations des cordesexposées dans les mémoires de l'académie de 1747 et 1748." e "Sur le melange de plusieursespéces de vibrations simples isochrones, qui peuvent coexister dans un meme systeme de corps" Mem. Berlino 9, 1755 (D.B 45 e 46).

illustrissimo, hai dato nella tua dissertazione su questo argomento inserita negli Atti di Berlino: e che D'Alembert ha cercato di confutare. Ti comunico ora gli elementi che ti riguardano, poiché sono certo che riceverai questa lettera prima del libro in questione: gli altri potrai vederli quando riceverai il libro.

Ti prego di inviare la lettera qui allegata a Maupertuis[3], di cui ignoro il domicilio. In essa parlo prevalentemente del libro, che ho appena terminato[4], sull'applicazione del principio di minima azione a tutta la Meccanica, a cui è premessa un'esposizione del metodo dei massimi e dei minimi, che ti ho comunicato tre anni fa, e che ho reso grandemente generale.

Innanzitutto, vi ho dimostrato quel principio di cui ho trattato nell'ultima lettera a te inviata, ossia in che modo le equazioni, che vengono dedotte dalla variabilità delle due variabili x ed y, esprimano sempre la stessa curva; e ho esteso la stessa dimostrazione, se le variabili siano tre o più. Ho trovato, invero, che ciò deriva dalla natura delle funzioni differenziali, cosicché se vengono fissate differenze stabilite non ha più luogo questa proprietà; come se si cercasse un poligono che godesse di una data proprietà del massimo e del minimo; e ho illustrato ciò con l'esempio del poligono che ha l'area massima fra gli isoperimetrici, problema che in modo generale ed analitico ho dato per risolto secondo il mio metodo[5]. Ti scrivo queste parole in anticipo perché alla perfezione del metodo stesso mi sembrava mancasse ancora una dimostrazione di questo tipo. Degli altri argomenti non parlo, infatti ho intenzione di spedire a Berlino l'esemplare manoscritto perché non sia stampato senza il beneplacito tuo e del Signor Maupertius e dell'Accademia, se ti sembra opportuno; anzi, se fosse possibile, preferirei che fosse stampato presso di voi, anziché in altre regioni; qui, infatti, alcune ragioni mi distolgo-

[3]Questa lettera di Lagrange a Maupertuis, è andata perduta.

[4]vedi nota 5 della prcedente lettera del 28 luglio 1759.

[5]Lagrange risolve questo problema sfruttando il suo "metodo delle variazioni", dentro la seconda appendice dell'"Essai d'une nouvelle méthode...", Misc. Taurin. II, 1760 (L.7); che venne infatti pubblicata da Lagrange al posto del libro del quale parla sopra, vedi nota 5 della prcedente lettera del 28 luglio 1759.

no dall'intraprendere quest'opera; perciò sommamente auspico il tuo parere riguardo a questa materia. Qualora ti degnassi di inviarmi una lettera, potrai indirizzarla al Dottor Durade, direttore delle poste di Genova per il Re di Sardegna, chiedendo che la invii a Torino al signor commendatore de Laroli, direttore generale delle poste per tutta la giurisdizione del Re di Sardegna, dal quale mi saranno inoltrate in tutta sicurezza.

Frattanto, o uomo illustrissimo, perdonami se oso interpellarti con questa lettera: dato, infatti, che allo scoppiare della guerra[6] ogni commercio fra la mia e la tua città è stato interrotto, colgo volentieri la prima occasione che mi si offre per rivolgerti i miei omaggi. Saluti, e ossequi

dal tuo sempre affezionatissimo,
Ludovico De La Grange.

P. S. Il Cavalier Saluzzo, che ha pubblicato una dissertazione sulla polvere pirica nei nostri Atti, sta eseguendo una traduzione dell'opera che hai scritto in tedesco, insieme alle note del dottor Robins, e mi ha chiesto di informarti di ciò, affinché tu mi comunichi la tua opinione al riguardo.

[6]La guerra dei Sette anni, vedi nota 6 del commento alla lettera del 19 maggio 1756, a pag. 136.

Commento

I contenuti della presente lettera di Lagrange ad Eulero, non sono molto diversi da quelli della lettera precedente. Lagrange scrive nuovamente ad Eulero per informarlo di avergli finalmente inviato il primo volume della Miscellanea Taurinensia, pubblicato dalla Società scientifica privata di Torino. Lagrange era convinto che questa lettera, sarebbe giunta a destinazione, prima della copia dell'opera spedita. Per questo egli vi espone i suoi contenuti principali. Ricordiamo che all'epoca la guerra dei Sette anni rendeva ancora difficili i contatti.

In particolare Lagrange ci tiene ad informare Eulero, che nella memoria "Recherches sur la nature, et la propagation du son", contenuta appunto nel primo volume appena pubblicato delle Miscellanea, egli aveva ricavato la sua stessa soluzione per il problema delle corda vibranti. All'epoca Eulero era al centro di una controversia con D'Alambert proprio riguardo alla soluzione di tale problema. La questione delle corde vibranti viene discussa da Eulero e da Lagrange in maniera molto più approfondita, nella seconda parte della corrispondenza, scritta in lingua francese. Comunque tale vicenda viene presentata a grandi linee nel commento alla successiva lettera di risposta di Eulero, precisamente a pag. 214.

Inoltre Lagrange informa Eulero di avere appena ultimato il suo libro sul principio di minima azione. Questo era costituito di due parti; una prima premessa contenente l'introduzione al suo "metodo delle variazioni", e una seconda parte nella quale il suo metodo veniva sfruttato per applicare il principio di minima azione a molti problemi di meccanica. Inoltre Lagrange scrive:

> [...] ho intenzione di spedire a Berlino l'esemplare manoscritto perché non sia stampato senza il beneplacito tuo e del Signor Maupertius e dell'Accademia, se ti sembra opportuno; anzi, se fosse possibile, preferirei che fosse stampato presso di voi, anziché in altre regioni; [...].

L' intenzione di Lagrange, di inviare il libro a Berlino affinché fosse stampato e pubblicato per conto dell'Accademia di Berlino, non fu portata a termine. Infatti Questo libro "appena terminato", non verrà mai inviato a Berlino; questo principalmente per due motivi. In primo luogo, la morte di Maupertuis, sopraggiunta pochi anni dopo, lasciò scoperta la carica di Presidente dell'Accademia di Berlino; e in secondo luogo, a causa di tutte quelle circostanze che si vengono a creare in tempo di guerra, il periodo non era propizio per la stampa dei testi a Berlino. Così Lagrange fu indotto a pubblicare per conto della Società scientifica privata di Torino, piuttosto che per conto dell'Accademia di Berlino. Al posto del libro "appena terminato" del quale parla nella lettera, egli pubblicherà nel vol. II delle Miscellanea Taurinensia, due memorie: l'"Essai d'une nouvelle méthode...", che contiene una intoduzione al "metodo delle variazioni", e l'"Application de la méthode...", nel quale sfrutta il "metodo delle variazioni" per applicare il principio di minima azione a problemi di dinamica.

Nella lettera Lagrange afferma che in quel suo libro "appena terminato", Eulero avrebbe trovato la dimostrazione di un fatto del quale egli aveva già parlato nella sua precedente lettera del 5 ottobre 1756. Ovvero Lagrange era riuscito a dimostrare a priori che le due equazioni di Eulero-Lagrange che si ottengono trattando la curva in maniera parametrica (e quindi facendo variare sia $x = x(t)$, che $y = y(t)$), si riducono entrambe ad una stessa equazione, la stessa che si ottiene trattando la curva non parametricamente. Lagrange scrive:

> [...] vi ho dimostrato quel principio di cui ho trattato nell'ultima lettera a te inviata, ossia in che modo le equazioni, che vengono dedotte

> dalla variabilità delle due variabili x ed y, esprimano sempre la stessa curva; e ho esteso la stessa dimostrazione, se le variabili siano tre o più.

Ed effettivamente questa dimostrazione è contenuta nell'"Essai d'une nouvelle méthode...". Inoltre nella seconda appendice dell' "Essai d'une nouvelle méthode..." si trova la risoluzione dell'esempio citato da Lagrange nella lettera: "Trovare tra tutti i poligoni, avento lo stesso numero di facce, quello avente l'area maggiore".

Capitolo 13

Eulero a Lagrange: lettera del 2 ottobre 1759

EULERO A LAGRANGE.

Berolini, die 2 oct. 1759.

Vir clarissime ac praestantissime,

Inter tot et tam atroces tumultus bellicos, quibus hic undequaque premimur, tantis curis equidem sum districtus, ut fere omne commercium Iitterarum negligere sim coactus. Ex quo imprimis te, vir clarissime, etiam atque etiam rogo, ut ne mihi meam negligentiam in scribendo vitio vertere velis. Quanquam autem Miscellanea philosophico- mathematica *quorum exemplar mihi benevole destinasti, nondum accepi, nec fortasse tam cito expectare possum, tamen non potui quin tibi pro hoc testimonio amicitiae gratias agam maximas, simulque meam laetitiam et admirationem declarem quod tam felici successu, tam sublimes ac profundissimas investigationes perfeceris. Litterae tuae mihi demum post obitum dignissimi praesidis nostri sunt redditae; quo casu equidem eo gravius sum perculsus, quod optimum fautorem, ac suavissimum amicum amiserim. Litteras ergo tuas ad illum directas, in nostro conventu academico aperui. Maxime optassem ut ab ipso superstite responsum accipere posses; nunc quid tibi scribam nescio. Fama est locum praesidis Alembertio cum maximis emolumentis destinari, quo* *casu, an tuum excellentissimum opus huc mitti consultum sit, ipse judicaveris. Quin potius operam da ut quamprimum prelo commitatur; hic enim his turbulentis temporibus, vix quisquam bibliopola suam operam esset praestaturus. Genovae putem hujusmodi opera commodissime excudi posse, vel Lausannae, ubiquidem summo otio fruuntur. Lubens cognovi tibi meam solutionem chordae vibrantis probari, quam Alambertus variis cavillationibus infirmnare est conatus. idque ob eum solam rationem quod non ab ipso esset profecta. Minatus est, se gravem refutationem esse publicaturum; quod an fecerit, nescio. Putat se per eloquentiam semidoctis fucum esse facturum. Dubito an serio rem gerat, nisi forte amore proprio sit penitus occoecatus. Voluit nostris Commentariis, non demonstrationem, sed nudam declarationem inseri: meam solutionem maxime esse vitiosam; ego vero opposui novam demonstrationem omni rigore adornatam. Sed praeses noster beatae memoriae, noluit ipsi nostram Academiam tanquam palestram concedere; unde etiam meam confirmationem lubens suppressi; ex quo judicabis quantas turbas, si praesidio decoratus, sit acturus. Equidem omnia tranquillus expecto, nihil negotii cum illo mixturus. Tua solutio problematis isoperimetrici continet, ut video, quidquid in hac quaestione desiderari potest; et ego maxime gaudeo hoc argumentum, quod fere solus post primos conatus tractaveram, a te potissimum ad summum perfectionis fastigium esse evectum. Rei dignitas me excitavit ut tuis luminibus adjutus, ipse solutionern analyticam conscripserim quam tamen celare statui, donec ipse tuas meditationes publici juris feceris, ne ullam partem gloriae tibi debitae praeripiam.*

Quoniam his gravissimis temporibus ab aliis negotiis vacavi, librum de Calculo integrali conscribere coepi, quod opus jampridem eram meditatus, atque adeo Petropolitanae pollicitus, nunc igitur jam notabilem partem absolvi. Calculum integralem ita definivi, ut asset methodus functiones unius pluriumve variabilium inveniendi ex data differentialium vel primi vel altiorum graduum relatione, unde prout functiones sint vel unius vel duarum pluriumve variabiIium, totum opus in duos libros divisi; ubi quidem pro posteriori vix quicquam est cultum. Eo pertinent scilicet qusestiones de chordis *vibrantibus, ubi pro dato tempore t, et chordae puncto, cujus situs variabilis s denotetur, ejus celeritas et . . . . . .*[1] *determinari debet; quaeritur enim functio quaedam* (z) *binarum variabilium t et s, ex data relatione formularum* $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ *et* $\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}$, *et hujusmodi formulis universa hydroclynamica innititur. Utilissimum ergo erit hanc partem Calculi integralis adhuc fere intactam accuratius evolvi, cujus equidem prima fundamenta jam fecisse videor. Incipiendum autem erat a differentialibus primi gradus, ut functio* (z) *binarum variabilium t et s definiatur ex data quacumque relatione inter s et has formulas* $\frac{\partial z}{\partial t}$ *et* $\frac{\partial z}{\partial s}$ *per dÃfferentiationem inde derivatas. Ex quo perspicuum est fere omnia quae adhuc de integrandi methodo sunt prolata, etiam si binarum variabilium mentio fiat, ad primam tamen partem referri debere, quia altera ut functio alterius tractatur. Alio forte tempore plura de his commemorare continget. Vale et fave*

Tibi addictissimo,
L. Eulero.

Privatam adhuc Societatem litterarum taurinensem mox publicam fieri in augmentum Scientiarum magnopere opto.

. . . .

EULERO A LAGRANGE.

Berlino, giorno 2 ottobre 1759.

O uomo chiarissimo ed eccellentissimo,

Fra tanti e tanto atroci tumulti bellici, dai quali qui e da ogni parte siamo oppressi, sono ovviamente stretto da tanto grandi cure, da essere forzato a trascurare quasi interamente la corrispondenza. E perciò innanzitutto, o uomo illustrissimo, ti prego insistentemente di non volermi imputare come colpa la mia negligenza. E sebbene la *Miscellanea philosophico-mathematica*, di cui

[1]Qui, vi è una cancellatura nella lettera.

mi hai generosamente inviato una copia, non mi sia ancora giunta, e sebbene io forse non possa attenderne l'invio in tempi brevi, tuttavia non posso che ringraziarti di tutto cuore per questo segno di amicizia, e nel contempo dichiarare la mia gioia e la mia ammirazione per il fatto che hai compiuto tanto sublimi e profonde investigazioni con tanto felice successo. La tua lettera infine mi è stata recapitata dopo la morte del nostro degnissimo presidente; ed io sono stato colpito da questa disgrazia tanto più violentemente, in quanto ho perso un eccellente socio e un dolcissimo amico. Dunque ho aperto la tua lettera a lui diretta nel nostro congresso accademico. Avrei sommamente desiderato che tu potessi ricevere la risposta da lui mentre era vivo; ora non so cosa scriverti. Si dice che l'incarico di presidente sia destinato, con un compenso assai sostanzioso, a D'Alembert, nel qual caso tu stesso giudicherai se sia opportuno inviare qui la tua eccellentissima opera. Piuttosto, adoperati affinché quanto prima essa sia data alle stampe; ora, infatti, in questi tempi convulsi, a malapena si riuscirebbe a trovare un libraio disposto a prestare la sua opera. Riterrei che a Genova un'opera di questo genere si potrebbe far uscire assai comodamente; o a Losanna, dove godono di una completa quiete. Lietamente ho appreso che la mia soluzione della corda vibrante ti è parsa corretta, soluzione che D'Alembert ha cercato di confutare con vari sofismi, e questo per la sola ragione che non era stata scoperta da lui. Minacciò di pubblicare una pesante confutazione;[2] non so se l'abbia fatto. Crede, grazie all'eloquenza, di ingannare i semicolti. Dubito che porti seriamente a compimento la cosa, a meno che non sia del tutto accecato dall'orgoglio. Ha voluto che nei nostri Atti fosse inclusa non una dimostrazione, ma una nuda dichiarazione: la mia soluzione sarebbe sommamente difettosa; io, invero, opposi una nuova soluzione, adorna di ogni rigore. Ma il nostro Presidente, di beata memoria, non volle concedergli la nostra Accademia come palestra;[3]

[2]Qualche anno dopo D'Alambert pubblicò nel primo volume del suo “Opuscules mathématiques”, e sue “Recherches sur les vibrations des cordes sonores” (pag. 1-73), Parigi, 1761.

[3]Eulero fa qui riferimento al tentativo di D'Alambert di fare pubblicare le sue “Observations” nelle “Memorie” dell'Accademia di Berlino. Le “Observations”, sono state

onde, volentieri, eliminai anche la mia conferma; da ciò giudicherai quanti sconquassi costui provocherà, se verrà eletto alla Presidenza. Ad ogni modo, attendo tranquillo tutti gli sviluppi, senza avere con lui alcun contatto. La tua soluzione del problema isoperimetrico contiene, a quanto vedo, tutto ciò che si può desiderare in questa questione; ma io sommamente mi compiaccio che questo argomento, che avevo trattato quasi da solo dopo i primi tentativi, sia stato da te sommamente condotto ai massimi vertici della perfezione. La dignità dell'impresa mi spronò, aiutato dalle tue illuminazioni, a scrivere io stesso una soluzione analitica, che tuttavia ho deciso di tener nascosta, finché tu non avrai reso di pubblico dominio le tue riflessioni, onde non usurpare nemmeno una briciola della gloria che a te è dovuta.

Poiché in questi gravissimi tempi sono stato libero da altre occupazioni, ho iniziato a scrivere un libro sul Calcolo integrale, opera che già da tempo avevo meditato, e anche annunciato a Pietroburgo, e che ora ho già compiuto per larga parte. Così ho definito il calcolo integrale, ossia come il metodo per trovare le funzioni di una o più variabili a partire da una data relazione dei differenziali o di primo o di più alti gradi, donde, nella misura in cui vi sono funzioni o di uno o di due o di più variabili, ho suddiviso l'intera opera in due libri; per il secondo dei quali, invero, a malapena qualcosa è stato concepito. Ad esso appartengono, ad esempio, le questioni circa le corde vibranti, ove per un dato tempo t, e per un dato punto della corda, la cui posizione sia notata come variabile s, deve essere determinata, di esso, la velocità e . . . . . .[4]; si ricerca infatti una funzione (z) di due variabili t ed s, a partire da una data relazione delle formule $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}$, e l'intera idrodinamica si fonda su formule siffatte. L'ultima sezione dunque consisterà nello sviluppare più accuratamente questa parte del calcolo integrale, finora mai trattata, della quale mi sembra di aver già colto i primi fondamenti. Ma si sarebbe dovuto cominciare dai differenziali di primo grado, affinché la funzione z delle due

largamnete utilizzate e citate da D'Alambert durante la stesura delle "Recherches sur les vibrations des cordes sonores", vedi nota sopra.

[4]Qui, vi è una cancellatura nella lettera.

variabili t ed s venga definita a partire da una qualsiasi relazione data fra z e queste formule $\frac{\partial z}{\partial t}$ e $\frac{\partial z}{\partial s}$, da lì derivate per differenziazione. E da ciò risulta evidente che quasi tutte le osservazioni che fino ad ora sono state proposte riguardo al metodo dell'integrare, anche se venga fatta menzione delle due variabili, devono tuttavia essere riferite alla prima parte, poiché la seconda viene trattata come funzione dell'altra. In un altro momento, forse, ci sarà la possibilità di riferire più ampie riflessioni riguardo a questi problemi. Saluti e ossequi

dal tuo devotissimo,
L. Eulero.

Spero grandemente che la fino ad ora privata, Società torinese delle lettere, venga presto resa pubblica, per il progresso delle Scienze.

Commento

Questa è la prima lettera di Eulero dopo la lunga interruzione di tre anni nella corrispondenza con Lagrange, dovuta allo scoppio della guerra dei Sette anni. Eulero rispose alle lettere di Lagrange, informandolo che la copia del primo volume delle Miscellanea, non era ancora giunta a destinazione. Quindi Lagrange non si era sbagliato, ritenendo che la sua lettera del 4 agosto 1759, sarebbe giunta a destinazione prima di quest'ultimo. Inoltre Eulero avvisa Lagrange della morte dell'illustre Maupertuis, avvenuta il 27 luglio 1759, e della possibilità che l'incarico di Presidente dell'Accademia venisse dunque assegnato a D'Alembert. In realtà queste speculazioni sulla possibile nomina a Presidente di D'Alembert sono premature. Infatti il Re Federicio II era troppo preso dalla guerra per occuparsi di tale questione. Comunque Eulero sapeva che agli occhi del Re D'Alembert figurava come il degno successore di Maupertuis per tale incarico. Ed effettivamente qualche anno più tardi, nel 1763, il Re propose ufficialmente il posto di Presidente dell'Accademia di Berlino, proprio a D'Alembert.

Come si evince dalle parole di Eulero nelle lettera, all'epoca non correva buon sangue tra Eulero e D'Alembert. Soprattutto, a causa della vicenda sulle corde vibranti. Eulero scrive a Lagrange:

> Lietamente ho appreso che la mia soluzione della corda vibrante ti è parsa corretta, soluzione che D'Alembert ha cercato di confutare con vari sofismi, e questo per la sola ragione che non era stata scoperta da lui.

Infatti, nella sua precedente lettera Lagrange si era schierato dalla parte di Eulero, scrivendo:

> [...] la formula mi fornisce quella stessa costruzione che tu, o uomo illustrissimo, hai dato nella tua dissertazione su questo argomento inserita negli Atti di Berlino: e che D'Alembert ha cercato di confutare.

Lagrange riuscì a provare la veridicità della teoria delle corde vibranti elaborata da Eulero.

La questione delle corde vibranti e della propagazione del suono, viene dibattuta in maniera più approfondita dai due matematici, nella seconda parte della corrispondenza, che è scritta in lingua francese, e che non è presente in questa tesi. Ad ogni modo, nella sezione a seguire si trova una breve descrizione della vicenda delle corde vibranti.

13.1 La questione delle corde vibranti

Le discussioni sul problema delle piccole vibrazioni della corda coinvolsero i più eminenti matematici dell'epoca, per il rilievo assunto in fisica e nella teoria della musica. Negli anni 1748-1761 si sviluppa fra D'Alembert ed Eulero un acceso dibattito sulle proprietà di regolarità della soluzione del problema della corda vibrante. Tale problema sollevò importanti questioni circa il concetto di funzione e la rappresentabilità di una funzione tramite serie trigonometriche.

Nei primi approcci la corda vibrante era considerata un "rosario": si supponeva cioè che essa contenesse n pesi uguali, posti a distanza uguale, uniti l'uno all'altro da pezzi di filo pensato privo di peso, flessibile e inestensibile. Per trattare la corda continua si supponeva che il numero dei pesi diventasse infinito mentre la loro massa diminuiva in modo che la massa totale del numero crescente dei singoli "grani" tendesse alla massa della corda continua.

Il caso di un numero discreto di masse era stato trattato da Johann Bernoulli nel 1727, che aveva ottenuto per lo spostamento u_k della k-esima massa, l'equazione alle differenze finite:

$$\frac{d^2u_k}{dt^2} = v^2(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1\,,$$

dove v^2 dipende dalla tensione della corda (pensata costante durante le vibrazioni), dalla massa totale degli n corpi e dalla loro distanza reciproca. Bernoulli risolve l'equazione e passa poi a trattare il caso di una corda continua: la sua conclusione è che la corda ad ogni istante t assume una forma sinusoidale, la cui equazione egli ottiene integrando l'equazione differenziale:

$$\frac{d^2u}{ds^2} = -ku\,.$$

Quando D'Alembert comincia a interessarsi alla questione, il suo obbiettivo è di far vedere che una corda in vibrazione assume infinite altre forme oltre a quella sinusoidale. Nel 1747 D'Alembert presentò all'Accademia delle Scienze di Berlino due importanti memorie, "Recherches sur la courbe" e "Suite des recherches sur la courbe", in cui fornì la soluzione del celebre problema della corda vibrante. Nelle "Recherches sur les cordes vibrantes", D'Alembert aveva trovato per primo l'equazione che descrive la propagazione di una perturbazione generica di una corda, tesa tra due punti, posta in vibrazione. Questo rappresenta anche il primo tentativo di integrare le equazioni alle derivate parziali, che si ottengono descrivendo matematicamente le infinite forme assunte da una corda tesa, posta in vibrazione su un piano. D'Alembert inroduce un sistema di riferimento cartesiano, e considera al posto degli u_k una funzione $z(s,t)$ definita per $0 \leq x \leq l$ e $t \geq 0$, ottenendo la seguente equazione:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial s^2}\,.$$

Compare così per la prima volta quella che oggi è nota come "equazione unidimensionale dell'onda". Lo stesso D'Alembert trovò la soluzione generale della sua equazione, come somma di due funzioni arbitrarie f e g:

$$z(s,t) = f(s-t) + g(s+t)\,.$$

D'Alembert inoltre sottolinea con vigore il fatto che la funzione $z(0,s)$, che descrive la configurazione iniziale della corda, deve essere soggetta ad una certa "legge di continuità", ossia deve essere data da una certa espressione analitica.

L'anno successivo Eulero intervenne nella questione con la memoria "Sur la vibration des cordes". Nel quale corresse e generalizzò l'equazione dell'onda nella forma:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial s^2}\,.$$

E scrisse la soluzione generica nella forma:

$$z(s,t) = f(s - at) + g(s + at)\,.$$

Ma è soprattutto sul carattere della funzione $z(0,s)$, che descrive la posizione iniziale della corda, che le posizioni di D'Alembert e di Eulero differiscono sostanzialmente. Secondo il primo, come si è già sottolineato, la soluzione era sensata solo quando $z(0,s)$ fosse una espressione analitica di x e t. Mentre Eulero al contrario non chiedeva nessuna "legge di continuità" per la curva, e dunque nessuna legge analitica per $z(0,s)$, essa può essere data da una curva "Sia regolare contenuta in una certa equazione, sia irregolare o meccanica". Così l'oggetto del contendere diventò essenzialmente il concetto di funzione. La polemica finì così per fornire un'occasione di discussione sul concetto di funzione, e sulle funzioni ammissibili in analisi.

Nel 1753, si inserisce nella discussione anche Daniel Bernoulli, figlio di Johann Bernoulli. Egli, ebbe la geniale idea di applicare alla soluzione dell'equazione dell'onda, la teoria delle serie che era stata sviluppata da Brook Taylor nel 1717 nel suo" Methodus incrementorum". Quindi riteneva che il movimento di una corda vibrante, si potesse rappresentare in generale con la seguente equazione:

$$z = \alpha \sin x \cos t + \beta \sin 2x \cos 2t + \gamma \sin 3x \cos 3x + \dots\,.$$

D'altra parte Bernoulli non aveva argomentato in maniera matematicamente coerente le sue idee, e proprio su questo versante arrivarono le critiche di Eulero e D'Alembert; con i quali egli entrò, in questo modo, in una violenta disputa scientifica.

Pertanto Eulero e D'Alembert erano al centro di una accesa controversia, mentre ad entrambi, si opponeva D. Bernoulli. Nel 1759 fece il suo ingresso nella questione anche Lagrange, con il suo "Recherches sur la nature, et la propagation du son", che difese la posizione di Eulero. Il dibattito continuò ad infuriare per tutti gli anni '60 e '70. Eulero D'Alembert e Lagrange continuarono a negare che la somma di una serie trigonometrica potesse rappresentare una arbitraria funzione, e pertanto ad opporsi a Bernoulli. Questo punto fondamentale rimarrà irrisolto fino all'intervento di Fourier, ossia all'inizio dell'Ottocento.

Conclusioni

In conclusione, pensiamo che risulti evidente dai contenuti di questo elaborato, l'importante ruolo della corrispondenza tra i due matematici, ai fini dello sviluppo del calcolo delle variazioni. Le lettere che sono tradotte e commentate in questa tesi testimonino soprattutto il fondamentale contributo apportato da Lagrange. Ad ogni modo per tutto quel complesso di ricerche da lui effettuate e per i risultati da lui ottenuti, che culminarono con il suo grande trattato "Methodus inveniendi", è Eulero che va considerato come il vero fondatore del calcolo delle variazioni.

Ricordiamo inoltre che la corrispondenza non si esaurisce con l'ultima lettera ivi presentata, essa continuerà ancora fino al 23 marzo 1775, ma verterà su altri argomenti. Comunque sia Eulero che Lagrange, continuarono a lavorare sul calcolo delle variazioni negli anni a seguire, e gli scritti che pubblicarono, riflettono i frutti della loro collaborazione.

Nel 1760 Lagrange presentò due scritti all'Accademia delle Scienze di Torino, che resero pubblici gli esiti delle sue precedenti ricerche: l'"Essai d'une nouvelle méthode...", che riguarda lo sviluppo parametrico del suo "metodo delle variazioni", e l'"Application de la méthode..." che consiste in una estensiva applicazione delle tecniche variazionali al principio di minima azione in dinamica. In seguito nel 1770, Lagrange pubblicò sull'argomento, un ulteriore lavoro, "Sur la méthode des variations", col quale fornirà altri rilevantissimi contributi, ampliando e arricchendo di molto i contenuti dell'"Essai d'une nouvelle méthode...". Sul suo metodo, ritornerà poi ancora, anche con un ampia e obbiettiva ricostruzione storica, nel suo trattato

“Leçons sur le calcul des fonctions” del 1806.

Dal canto suo Eulero, aveva già presentato all’Accademia delle Scienze di Berlino, rispettivamente il 9 settembre e il 6 settembre 1756, e ad insaputa di Lagrange, due vaste memorie aventi per titolo “Analytica explicatio methodi maximorum et minimorum”, ed “Elementa calculi variationum”. Nelle quali, abbandonati completamente i metodi di indagine che aveva seguito nel “Methodus inveniendi”, Eulero aveva fatto oggetto delle sue riflessioni il metodo, avente carattere puramente analitico scoperto da Lagrange. La paternità del metodo viene però riconosciuta a quest’ultimo nelle introduzioni ad entrambe le memorie. Inoltre queste vennero pubblicate solo nel 1766, infatti Eulero attese a dare il consenso alla pubblicazione, per non sottrarre nessun merito a Lagrange. Di particolare rilevanza è l’“Elementa calculi variationum”, opera nella quale Eulero diede il nome di “Calcolo delle Variazioni” al soggetto in questione. Questa memoria, tratta prevalentemente della relazione tra la differenziazione d, e la variazione δ, inoltre Eulero vi spiega come calcolare la variazione δ di vari tipi di funzioni. In seguito, nel 1772 Eulero pubblicherà un altro importante lavoro sul calcolo delle variazioni, la memoria “Methodus nova et facilis calculum variactionum tractandi”; nella quale egli mantiene il formalismo lagrangiano, iniziando però a delineare il moderno approccio al soggetto.

Bibliografia

[1] *Correspondance de Lagrange avec Euler*, in *Oeuvres de Lagrange publiées par J.-A. Serret*, Vol. XIV, Gauthier-Villars, Parigi, 1867, pag. 133-245. La Gallica (Bibliothèque nationale de France), ha anche reso la corrispondenza disponibile online:
http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k229949x/f145.image.r=lagrange.langEN

[2] Herman H. Goldstine, *A history of the Calculus of Variations from 17th through the 19th century*, Springer Verlag, New York, 1980

[3] Craig G. Fraser, *The Origins of Euler's Variational Calculus*, Archive for History of Exact Sciences, 47, 1994

[4] Craig G. Fraser, *J.L. Lagrange's Changing Approach to the Foundations of the Calculus of Variations*, Archive for History of Exact Sciences, 32, 1985

[5] Carl B. Boyer, *Storia della matematica*, ISEDI , Milano, 1976

[6] U. Bottazzini, P. Freguglia, L. Toti Rigatelli, *Fonti per la storia della matematica : aritmetica, geometria, algebra, analisi infinitesimale, calcolo delle probabilitÃ , logica*, Firenze, Sansoni Editore, 1992

[7] P. Caressa *Piccola storia della matematica* Vol. 2, Alpha Test S.r.l., Milano, 2010

[8] L. Eulero *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudens, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu ac-*

cepti, Bousquet, Losanna e Ginevra, 1744; in *Opera Omnia*, serie I, vol. XXIV, Berna, 1952

[9] L. Eulero *Commercium epistolicum*, Eulero, *Opera*, serie IV A, vol. V, *Correspondance de Leonhard Euler avec A.C. Clairaut, J. d'Alambert et J.L. Lagrange*, A.P. Juškevič et R. Taton, Birkhäuser Verlag, Basel, 1980

[10] L. Eulero *Mechanica* vol.1-2, 1736; in *Opera Omnia*, serie II, vol.I-II

[11] L. Eulero *Scientia navalis*, vol.1-2, 1749; in *Opera Omnia*, serie II, vol. XVIII-IXX

[12] L. Eulero *De motu gravium citissimo super curvis specie datis*, Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 17, 1773, pag. 488-504; in *Opera Omnia*, serie I, vol. XXV

[13] L. Eulero *Introductio in analysin infinitorum*, Opera Omnia Serie I, vol. VIII, 1748

[14] *The Euler Archive*, libreria digitale dedicata ai lavori e alla vita di Eulero, contiene tutte le sue pubblicazioni.
Sito internet: http://www.eulerarchive.com/

[15] J.-L. Lagrange *Essai d'une nouvelle méthode pour determiner les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies*, Mélanges de philosophie et de mathématique de la Société Royale de Turin, vol II (1760-1761), 1762; in *Oeuvres de Lagrange publiées par J.-A. Serret*, vol. I, Gauthier-Villars, Parigi, 1867, pag. 335-362

[16] J.-L. Lagrange *Application de la méthode précédente à la solution de différens problémes de dynamique*, Mélanges de philosophie et de mathématique de la Société Royale de Turin, vol II (1760-1761), 1762; in *Oeuvres de Lagrange publiées par J.-A. Serret*, vol. I, Gauthier-Villars, Parigi, 1867, pag. 365-468

[17] G. W. Leibniz *Symbolismus memorabilis calculi algebraici et infinitesimalis, in comparatione potentiarum et differentiarum; et de lege homogeneorum trascendentali* , Miscellanea Berolinensia, 1710

[18] Hans Niels Jahnke *A History of Analysis*, American Mathematical Society, USA, 2003; "The principle of least action: Maupertuis, Euler and Lagrange (1740-1761)" pag. 138-147

[19] Giorgio Israel *Il principio di minima azione e il finalismo in meccanica*, Le Scienze (American Scientific) n. 346, giugno 1997, pag. 70-76

[20] D. Galletto B. Barberis *Euler e Lagrange*, Accademia delle scienze di Torino, G.N.F.M. e C.N.R.
Documento online: http://www.accademiadellescienze.it/media/310

[21] L. Pantieri *Lo sviluppo storico del concetto di funzione e le origini della teoria delle distribuzioni*, Una ricerca di storia della matematica, Università di Bologna di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali, giugno 2007
Documento online: http://www.lorenzopantieri.net/Scritti_files/FunzioniDistribuzioni.pdf

[22] L. Pepe *Giuseppe Luigi Lagrange*, Dizionario Biografico degli Italiani, Treccani.it.
Pagina internet: http://www.treccani.it/enciclopedia/giuseppe-luigi-lagrange_(Dizionario-Biografico)/

[23] R. Calinger *Leonhard Euler: vita e pensiero*, MATEpristem.
Pagina internet: http://matematica.unibocconi.it/articoli/leonhard-euler-vita-e-pensiero