Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

LA TEORIA DELLE CLASSI NBG

Tesi di Laurea in Principi della Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Piero Plazzi

Presentata da:
Caterina Cammera

Prima Sessione
Anno Accademico 2012/2013

"Al mondo esistono solo due cose meravigliose :
fare matematica e insegnarla."
Simèon-Denis Poisson

Indice

Introduzione

La prima formulazione di una teoria degli insiemi, oggi chiamata 'Teoria ingenua degli insiemi', fu proposta da Georg Cantor alla fine del XIX secolo e poi delineata più formalmente da Gottlob Frege.
Caratteristica di questa teoria è considerare gli *insiemi* come collezioni di oggetti, chiamati *elementi* dell'insieme.
La scoperta dei paradossi (di Cantor e di Russel) e il bisogno di una revisione della teoria ingenua degli insiemi portarono allo sviluppo di 'teorie assiomatiche' in cui gli *insiemi* sono solo quelle collezioni che soddisfano determinati assiomi, determinando precisamente quali operazioni sono ammesse.
Successivamente due sistemi sono risultati tra i più adeguati, il sistema assiomatico di Zermelo-Fraenkel (ZF), o meglio questo sistema con l'aggiunta dell'Assioma di scelta (ZFC), e una sua generalizzazione, il sistema assiomatico di Von Neumann-Bernays-Gödel (NBG). Quest'ultimo è una teoria delle classi, intese come collezioni a volte più 'ampie' e comunque più generali degli insiemi : questi si caratterizzano come quelle classi che possono essere considerate come 'un tutto unico' (Cantor), cioè come singoli elementi di altre classi.
La tesi ha l'obiettivo di presentare la Teoria delle classi NBG, dopo una breve esposizione dei fatti e dei problemi che hanno portato all'attuale formulazione della teoria, e da questa sviluppare la teoria dei numeri ordinali e cardinali.
Sebbene la presentazione assiomatica di Zermelo-Fraenkel sia la più usata dai matematici, la teoria delle classi NBG, oltre ad essere più generale, è forse più vicina ad una teoria puramente logica (per quanto possibile) dal momen-

to che si basa sulla tradizionale impostazione estensionale della logica, che vede le proprietà descritte dalle collezioni degli oggetti che le possiedono.
Vi sono inoltre vantaggi tecnici :

- relazioni e funzioni sono intese più intuitivamente : ad esempio la corrispondenza tra un insieme x e il suo insieme delle parti $\mathcal{P}(x)$ non può essere considerata una vera funzione in ZF, mentre lo è in NBG. Analogamente, la proprietà di inclusione $\subseteq$ non è una relazione in senso insiemistico, mentre lo è in NBG.
- In generale, in ZF l'uso di classi proprie (non insiemi) è possibile solo con una forzatura consistente nell'identificazione tra una formula e la sua estensione (capitolo 1).
- L'idea, fondamentale in Cantor, della cardinalità come astrazione (formazione di classi di equivalenza rispetto all'equipotenza) può essere pienamente giustificata in NBG, anche se la teoria può essere esposta in maniera più semplice nell'impostazione di von Neumann (capitolo 3).

Capitolo 1

La teoria NBG

1.1 Lo sviluppo della teoria degli insiemi

Cantor si dedicò allo studio di una teoria degli insiemi motivato principalmente da due fattori :

- l'approfondimento dello studio degli insiemi numerici;
- la generalizzazione al caso infinito della nozione di numero naturale, nell'accezione sia ordinale che cardinale (numeri *transfiniti*).

Per risolvere i problemi che si presentavano elaborò diverse strategie, tra le quali l'introduzione dell' *insieme delle parti (o insieme potenza)* come l'insieme di tutti i sottoinsiemi di un insieme dato.
Le iniziali scoperte cantoriane, come il

Teorema 1.1.1. ***Teorema di Cantor sull'insieme potenza*** *:*
Per nessun insieme x esiste una funzione suriettiva $f : x \to \mathcal{P}(x)$

ed in particolare un suo corollario :

Corollario 1.1.2. *Per nessun insieme x può accadere che $\mathcal{P}(x) \subseteq x$*

portarono alla formulazione del

Paradosso di Cantor : *Non esiste un insieme che ha per elementi tutti gli insiemi.*
Ovvero :
*La collezione **U** di tutti gli insiemi non può essere un insieme.*
U è oggi chiamata **la classe Universale o di Cantor**.

Cantor congetturò allora che vi fossero due specie di collezioni infinite :
gli 'insiemi', considerati come un tutto unico, e le 'collezioni inconsistenti'.
Interpretando però i risultati di Cantor, Frege aveva intravisto la possibilità di formalizzare la teoria degli insiemi e l'intera matematica sulla base di principi puramente logici.
I fondamentali sono :
Principio di estensione [E] : *Due insiemi coincidono se e solo se hanno gli stessi elementi.*
Principio di comprensione [C] : *Data una proprietà P, si possono riunire in un unico insieme A_P tutti e soli gli oggetti che godono di quella proprietà : essi sono gli elementi di A_P.*
Si osserva che :

1) Il principio di estensione può essere visto come principio di *unicità* perchè un insieme è individuato con precisione se e solo se ne vengono determinati gli elementi.

2) Il principio di comprensione garantisce l'*esistenza* di insiemi come collezioni di oggetti.
   Inoltre si procede con la formalizzazione se si esprime la proprietà P con una fbf ϕ di un opportuno linguaggio predicativo.

Dai due principi si arriva a vere e proprie contraddizioni :

- Sembra assicurata l'esistenza dell'*'insieme' di Cantor*, dato che la proprietà *'essere un insieme'* è legittima e formalizzabile con $x = x$, (in un contesto in cui tutti gli oggetti considerati siano insiemi).

- Inoltre :
  Paradosso di Russell : *Non esiste un insieme che contenga tutti gli insiemi che non appartengono a se stessi come elemento.*
  Ovvero :
  La collezione $\boldsymbol{R} = \{x; x \notin x\}$ *non può essere un insieme.*
  R è oggi chiamata **classe di Russell**.
  I principi sembrano assicurare l'esistenza dell' *'insieme' di Russell* ma : se **R** è un insieme allora, per definizione, $\mathbf{R} \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \mathbf{R} \notin \mathbf{R}$, da qui la contraddizione, di natura puramente logica.

Cominciava così la *'crisi dei fondamenti'*, un periodo di incertezza sia sui metodi logici tradizionali che sulla correttezza delle dimostrazioni matematiche.
Molti matematici si dedicarono allora a riformulare i procedimenti logici specifici della dimostrazione matematica e soprattutto ad affinare i principi della teoria degli insiemi. La revisione fu condotta seguendo l'intuizione di Cantor secondo cui i paradossi fossero dovuti alla possibilità di formare come insiemi collezioni 'troppo numerose'.

La formulazione assiomatica fu messa a punto da E. Zermelo e completata da A. Fraenkel, da cui il nome della **teoria : ZF**.
Gli insiemi si rivelarono classi molto particolari, dotate di proprietà specifiche e le classi 'troppo numerose', che creavano contraddizioni, potevano comparire ora nella teoria come predicati.
Mantenendo E (e introducendo sulla sua base $\subseteq$) venne abbandonato il principio di comprensione e sostituito con lo
Schema di specificazione o dei sottoinsiemi [S] :
Dati un insieme a e una proprietà (fbf) ϕ*, la collezione degli* $x \in a$ *che soddisfano* ϕ *è un insieme.*
Si osserva che :

- Questa forma del principio è uno *schema di infiniti assiomi*, dal momento che se ne ottiene uno per ogni fbf ϕ.

- Lo schema è chiamato 'dei sottoinsiemi' perchè è permesso applicare il principio di comprensione soltanto all'interno di un insieme a già formato, creando nuovi insiemi che sono per definizione dei sottoinsiemi di a.

- Da E ed S e dall' fbf $x \notin x$ segue il paradosso di Cantor senza usare la costruzione dell'insieme potenza :

  Teorema 1.1.3. *Se a è un insieme qualsiasi, $r(a) = \{x \in a; x \notin x\}$ non può essere elemento di a. Quindi nessun insieme contiene tutti gli insiemi e **U** non può essere un insieme.*

  L'*insieme di Russell* per a, $r(a)$, è ben definito in ZF per S.

- Con l'assioma E e lo schema S è possibile definire l'insieme *vuoto*, ma questo *soltanto*.
  Sono necessari allora assiomi di esistenza : della coppia, dell'unione e della potenza che permettono di introdurre nuovi simboli funzionali: ma $\{a; b\}$, $\bigcup a$, ecc.. non determinano funzioni in senso insiemistico, così come $\subseteq$ o $\in$ non determinano relazioni in senso insiemistico. L'inclusione $\subseteq$ o l'appartenenza $\in$ avrebbero per dominio $\mathbf{U}$, cosa impossibile per una relazione intesa come insieme.

Specificatamente dovuto a Fraenkel è lo
Schema di rimpiazzamento [R] :
Dati un insieme a e una fbf $\phi = \phi(x; y)$, funzionale in x su a, (cioè tale che dato $x \in a$ se esiste un y t.c. vale $\phi(x; y)$ allora esso è unico) esiste l'insieme $b = \{z; \exists x \in a\phi(x; z)\}$.

Di fatto, lo schema S si può ottenere mediante lo schema R formulato come sopra. L'idea intuitiva che porta allo schema R è che se si rimpiazzano gli elementi di un insieme con altri si ottiene un nuovo insieme, cioè se si restringe la costruzione di un simbolo funzionale, come ad esempio $\{a\}$, ad un dominio che sia un insieme, si ottiene una 'vera' funzione.

Fraenkel notò che questo non è garantito da altri assiomi ed è invece indispensabile per lo sviluppo della teoria cantoriana, in particolare per la teoria dei numeri cardinali e ordinali.
Inoltre, per garantire l'esistenza di un insieme infinito, fu introdotto l'*Assioma dell'infinito* che permette di definire ω come il minimo insieme induttivo, rappresentante insiemistico di $\mathbb{N}$.
I paradossi classici diventano dimostrazioni per assurdo dell'esistenza di classi proprie : la classe di Cantor e la classe di Russell.
È comodo introdurre in ZF il cosiddetto *Assioma di regolarità*, anche se non utile per la matematica nel suo complesso : esso evita situazioni controintuitive, come $x = \{x\}$, e noi lo considereremo incluso in ZF.

In seguito, studiando le capacità e i limiti della teoria ZF, si rivelò praticamente inevitabile l'introduzione di ulteriori assiomi, come l'*Assioma di scelta AS*, di grande utilità specificatamente matematica, indispensabile per distinguere nettamente il *finito* dall'*infinito*.
Fu Zermelo a proporre esplicitamente l'assioma e lo impiegò nella dimostrazione del suo *teorema del buon ordinamento*, che Cantor non era riuscito a provare, sebbene avesse importanza cruciale per la teoria dei numeri cardinali.
Il teorema di Zermelo fu il primo di molti enunciati che vennero dimostrati equivalenti in ZF ad AS, in vari campi della matematica, nonostante fu a volte considerato con sospetto perchè dava luogo a controesempi e veri e propri paradossi.
La teoria ZF con l'aggiunta dell'assioma di scelta viene indicata **ZFC** (C sta per'choice').

Successivamente vennero presentate alcune teorie in varia misura differenti da ZF, soprattutto per l'idea di collezione matematicamente rilevante che dà luogo alla teoria degli insiemi.
Tra queste la **teoria delle classi NBG**.
La prima versione di NBG si deve a John von Neumann nel 1925, in segui-

to, in alcuni articoli pubblicati dal 1937 al 1954, Paul Bernays la rese più generale mentre Kurt Gödel, nel 1940 la semplificò dimostrando anche che poteva essere finitamente assiomatizzata. [Mendelson 1972, Cap.4, §1].
La teoria è fondamentalmente simile a ZF, ma un insieme viene considerato come una classe che è elemento di qualche altra classe.
NBG permette di trattare anche casi che in ZF non corrispondono a relazioni o funzioni, perchè si otterrebbero classi proprie come estensione. Ad esempio si è visto che l'*inclusione* tra insiemi non è una relazione nel senso di '*insieme* di coppie' che il termine ha in ZFC, ma può essere definita come una *classe* di coppie. Non si può definire in ZFC una *funzione* potenza $A \mapsto \mathcal{P}(A)$, ma in NBG essa è una funzione definita su $\mathbf{U}$.

1.2 Assiomi propri di NBG

La seguente esposizione è tratta da [Mendelson 1972, Cap.4, §1].
La teoria NBG è una teoria del primo ordine con unico simbolo predicativo binario $\in$. Le variabili per le classi si indicano con lettere maiuscole X, Y, Z...
L'uguaglianza viene definita nel seguente modo :

Definizione 1.1. Uguaglianza : $X \equiv Y \Leftrightarrow \forall Z(Z \in X \Leftrightarrow Z \in Y)$

Quindi si ha che due classi sono uguali se e solo se hanno gli stessi elementi.
Si denota equivalentemente l'uguaglianza con $\equiv$, oppure informalmente $=$.
Sono definite l'inclusione e l'inclusione propria :

Definizione 1.2. Inclusione : $X \subseteq Y \Leftrightarrow \forall Z(Z \in X \Rightarrow Z \in Y)$

Definizione 1.3. Inclusione propria : $X \subset Y \Leftrightarrow (X \subseteq Y \wedge X \not\equiv Y)$

Importante è la definizione di insieme, tramite un nuovo predicato 1-ario M come classe tanto ristretta da poter essere considerata 'un tutto unico', secondo la definizione di Cantor, in quanto possibile elemento di un'altra classe :

Definizione 1.4. X **è un insieme :** $M(X) \Leftrightarrow \exists Y(X \in Y)$

Anzichè $\exists X(M(X) \wedge \phi)$ si scrive $\exists x\phi$ e $\forall X(M(X) \Rightarrow \phi)$ si riscrive $\forall x\phi$: insomma si introducono variabli per gli insiemi con lettere minuscole x, y, z...

Definizione 1.5. X **è una classe propria :** $Pr(X) \Leftrightarrow \neg M(X)$

Perciò una classe è un *insieme* se essa è elemento di qualche classe, invece le classi che non sono insiemi sono chiamate *classi proprie.*

Definizione 1.6. Si dice che x è **elemento minimale** (rispettivamente **massimale**) di Y se e solo se $x \in Y$ e $\forall y(y \in Y \Rightarrow y \not\subset x)$, (rispettivamente $\forall y(y \in Y \Rightarrow x \not\subset y)$.

Si ha :

Assioma 1.2.1. ***Assioma di Estensione [E]***
Date due classi X e Y, se $X \equiv Y$ allora X e Y appartengono alle stesse classi.
$X \equiv Y \Rightarrow \forall Z(X \in Z \Leftrightarrow Y \in Z)$.

Si hanno poi assiomi che assicurano l'esistenza dell'insieme vuoto e delle coppie non ordinate :

Assioma 1.2.2. ***Assioma dell'insieme vuoto [V]***
Esiste un insieme che non ha elementi.
$\exists x \forall y(y \notin x)$.

La classe vuota è un insieme.

Assioma 1.2.3. ***Assioma della coppia [C]***
Dati due insiemi x, y esiste un insieme che ha per unici elementi x e y.
$\forall x \forall y \exists z \forall u(u \in z \Leftrightarrow u \equiv x \vee u \equiv y)$.

Si osserva :

- Dall'assioma V e dalla definizione di identità segue che esiste un unico insieme che non ha elementi.
  Perciò si può introdurre la definizione di $\emptyset$:

Definizione 1.7. Insieme vuoto : $\forall x(x \equiv \emptyset \Leftrightarrow \forall y(y \notin x))$.

V non è indipendente dagli altri assiomi, lo si potrebbe ricavare dai seguenti, essenzialmente dall'assioma dell'infinito, l'unico altro assioma di esistenza per insiemi in NBG.

- L'assioma C permette di introdurre coppie non ordinate di insiemi, indicate $\{x; y\}$.
  Occorre però definire $\{X; Y\}$ per tutte le classi X, Y : se esse sono entrambi insiemi l'assioma di estensione garantisce l'unicità; altrimenti si conviene che $\{X; Y\} = \emptyset$ in modo che le coppie non ordinate sono sempre insiemi.
- Si definiscono coppie e quindi n-uple ordinate di insiemi :

Definizione 1.8. $(X; Y) = \{\{X\}; \{X; Y\}\}$ è la **coppia ordinata** di X e Y.

Proprietà caratteristica delle coppie ordinate:

Teorema 1.2.4. $\forall x \forall y \forall u \forall v((x; y) \equiv (u; v) \Rightarrow x \equiv u \wedge y \equiv v)$

Dimostrazione. Sia $(x; y) = (u; v)$ allora $\{\{x\}; \{x; y\}\} = \{\{u\}; \{u; v\}\}$.
Poichè $\{x\} \in \{\{x\}; \{x; y\}\}$ allora $\{x\} \in \{\{u\}; \{u; v\}\}$.
Quindi $\{x\} = \{u\}$ o $\{x\} = \{u; v\}$. In entrambi i casi $x = u$.
Ora $\{u; v\} \in \{\{u\}; \{u; v\}\}$ allora $\{u; v\} \in \{\{x\}; \{x; y\}\}$.
Allora $\{u; v\} = \{x\}$ o $\{u; v\} = \{x; y\}$. Analogamente $\{x; y\} = \{u\}$ o $\{x; y\} = \{u; v\}$. Se $\{u; v\} = \{x\}$ e $\{x; y\} = \{u\}$ allora $x = u = y = v$; altrimenti $\{u; v\} = \{x; y\}$. Quindi $\{u; v\} = \{u; y\}$.
Così, se $v \neq u$, allora $y = v$; se $v = u$ allora $y = v$.
Perciò in ogni caso $y = v$. $\square$

Si può estendere la definizione di coppie ordinate :

Definizione 1.9. n-uple ordinate :

$$(X) = X \qquad \text{e} \qquad (X_1; \ldots; X_{n+1}) = ((X_1; \ldots; X_n); X_{n+1})$$

Seguono poi gli *assiomi delle classi* che affermano che, per alcune proprietà espresse da *fbf*, esistono classi corrispondenti di tutti quegli insiemi che soddisfano la proprietà.

Assioma 1.2.5. ***Assiomi delle classi [CL1-CL7]***

- ***CL1-Assioma della relazione*** $\in$
  Esiste una classe X che ha come elementi le coppie ordinate $(x; y)$ *di insiemi x, y tali che* $x \in y$*.*
  $\exists X \forall x \forall y ((x; y) \in X \Leftrightarrow (x \in y))$

- ***CL2-Assioma dell'intersezione***
  Date due classi X e Y, esiste una classe Z che ha per elementi gli insiemi che appartengono sia ad X che ad Y.
  $\forall X \forall Y \exists Z \forall u (u \in Z \Leftrightarrow u \in X \wedge u \in Y)$

- ***CL3-Assioma del complementare***
  Data una classe X, esiste una classe Z che ha per elementi gli insiemi che non appartengono a X.
  $\forall X \exists Z \forall u (u \in Z \Leftrightarrow u \notin X)$

- ***CL4-Assioma del dominio***
  Per ogni classe X, esiste una classe Z costituita dalle prime componenti u delle coppie $(u; v) \in X$*.*
  $\forall X \exists Z \forall u (u \in Z \Leftrightarrow \exists v ((u; v) \in X))$

- ***CL5-Assioma della retroproiezione***
  Per ogni classe X, esiste una classe Z costituita dalle coppie $(u; v)$ *con* $u \in X$*.*
  $\forall X \exists Z \forall u \forall v ((u; v) \in Z \Leftrightarrow u \in X)$

- ***CL6-Assioma della permutazione ciclica***
  Per ogni classe X, esiste una classe Z costituita dalle terne $(u; v; w)$ *con* $(v; w; u) \in X$.
  $\forall X \exists Z \forall u \forall v \forall w((u; v; w) \in Z \Leftrightarrow (v; w; u) \in X)$

- ***CL7-Assioma della trasposizione***
  Per ogni classe X, esiste una classe Z costituita dalle terne $(u; v; w)$ *con* $(u; w; v) \in X$.
  $\forall X \exists Z \forall u \forall v \forall w((u; v; w) \in Z \Leftrightarrow (u; w; v) \in X)$

Si possono introdurre di conseguenza nuove lettere funzionali :

Definizione 1.10.

- **Intersezione di X e Y :** $\forall u(u \in X \cap Y \Leftrightarrow u \in X \wedge u \in Y)$

- **Complemento di X :** $\forall u(u \in \overline{X} \Leftrightarrow u \notin X)$

- **Dominio di X :** $\forall u(u \in \mathfrak{D}(X) \Leftrightarrow \exists v((u; v) \in X))$

- **Unione di X e Y :** $X \cup Y \equiv \overline{(\overline{X} \cap \overline{Y})}$

- **Differenza di X e Y :** $X \setminus Y \equiv X \cap \overline{Y}$

- **Classe universale (di Cantor) U:** $\mathbf{U} \equiv \overline{\emptyset}$

Si può così introdurre la classe universale di Cantor come complemento di $\emptyset$: in generale tutte le operazioni booleane sono definibili per le classi.

Questi assiomi determinano delle *fbf* alle quasi si può applicare il principio di comprensione senza contraddizioni : sono le *fbf predicative* del linguaggio.

Definizione 1.11. Sia $\phi = \phi(X_1; ...; X_n; Y_1; ...; Y_k)$ una *fbf* del linguaggio con variabili libere comprese tra quelle scritte. Se in essa compaiono al più quantificazioni relative a variabili di insieme, una tale *fbf* si dice **predicativa**.

Teorema 1.2.6. ***Teorema delle classi***
Se $\phi = \phi(X_1; ...; X_n; Y_1; ...; Y_k)$ *è predicativa, esiste una classe* Z *i cui elementi sono le n-uple* $(x_1; ...; x_n)$ *tali che vale* $\phi(x_1; ...; x_n; Y_1; ...; Y_k)$*, cioè* $Z = \{(x_1; ...; x_n); \phi(x_1; ...; x_n; Y_1; ...; Y_k)\}$.

Si noti che gli assiomi CL1-CL7 sono casi speciali del teorema delle classi. Così invece di assumere il teorema come schema di assiomi, è sufficiente assumere un numero finito di esempi di questo schema.

Si possono così definire (oltre a $\emptyset$ come classe vuota) :

Definizione 1.12.

- **Prodotto cartesiano di** Y_1 **e** Y_2 **:**
  $\forall x(x \in Y_1 \times Y_2 \Leftrightarrow \exists u \exists v(x \equiv (u; v) \wedge u \in Y_1 \wedge v \in Y_2))$
  In particolare :
  X^1 sta per X,
  X^2 sta per $X \times X$, allora $\mathbf{U}^2$ è la classe di tutte le coppie ordinate,
  X^n sta per $X^{n-1} \times X$, allora $\mathbf{U}^n$ è la classe di tutte le n-uple ordinate.

- **X è una relazione :** $Rel(X) \Leftrightarrow X \subseteq \mathbf{U}^2$

- **Relazione inversa** $\breve{X}$ **di X :**
  $\breve{X} \subseteq \mathbf{U}^2 \wedge \forall x_1 \forall x_2((x_1; x_2) \in \breve{X} \Leftrightarrow (x_2; x_1) \in X)$

- **Codominio di X :** $\forall v(v \in \mathfrak{R}(X) \Leftrightarrow \exists u((u; v) \in X))$,
  in altri termini, $\mathfrak{R}(X) = \{v; \exists u((u; v) \in X)\}$.
  Evidentemente $\mathfrak{R}(X) \equiv \mathfrak{D}(\breve{X})$.

- **Classe potenza di X :** $\forall u(u \in \mathcal{P}(X) \Leftrightarrow u \subseteq X)$

- **Classe unione di X :** $\forall u(u \in \bigcup X \Leftrightarrow \exists v(u \in v \wedge v \in X))$

- **Relazione d'identità Id :** $\forall u(u \in Id \Leftrightarrow \exists v(u = (v; v)))$

Finora sebbene si possa dimostrare l'esistenza di un gran numero di classi, si conosce l'esistenza solo di pochi insiemi, quali $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, ...$
Per garantire l'esistenza di insiemi più complessi sono necessari allora ulteriori assiomi :

Assioma 1.2.7. ***Assioma dell'unione [U]***
$\bigcup X = \bigcup_{u \in X} u$ è un insieme se lo è X,
cioè $\forall x\ M(\bigcup x)$.

Assioma 1.2.8. ***Assioma della potenza [P]***
$\mathcal{P}(X) = \{u; u \subseteq X\}$ è un insieme se lo è X,
cioè $\forall x\ M(\mathcal{P}(x))$.

Gli assiomi U e P assicurano l'esistenza, per ogni insieme x, dell'*insieme unione* $\bigcup x$ e dell'*insieme potenza* $\mathcal{P}(x)$.

Definizione 1.13. Successore (insiemistico) di un insieme x :
$S(x) = x \cup \{x\}$.
$S(x)$ è un insieme.

Un modo molto più generale per formare insiemi, che sostituisce il precedente schema di specificazione di ZF, è il seguente singolo assioma :

Assioma 1.2.9. ***Assioma di specificazione [S]***
L'intersezione tra un insieme x e una classe Y è un insieme,
$\forall x \forall Y \exists z \forall u (u \in z \Leftrightarrow u \in x \land u \in Y)$, quindi $\forall x \forall Y M(x \cap Y)$.

Segue subito da S che :

Proposizione 1.2.10. *Ogni sottoclasse di un insieme è un insieme,*
$\forall x \forall Y (Y \subseteq x \Rightarrow M(Y))$.

Dimostrazione. $\forall x (Y \subseteq x \Rightarrow x \cap Y \equiv Y)$ e $\forall x (M(x \cap Y))$. □

Per enunciare un assioma ancora più potente, l'assioma di rimpiazzamento, necessario per lo sviluppo completo della teoria degli insiemi, occorre introdurre le *classi univoche* :

Definizione 1.14.

- X **è univoca** quando, contenendo due coppie ordinate con prima componente uguale, le seconde componenti coincidono anch'esse.
  $Un(X) \Leftrightarrow (\forall x \forall y \forall z((x;y) \in X \wedge (x;z) \in X \Rightarrow y \equiv z))$
- X **è una funzione :** $Fnz(X) \Leftrightarrow X \subseteq \mathbf{U}^2 \wedge Un(X)$
- X **è biunivoca :** $Un_1((X) \Leftrightarrow Un(X) \wedge Un(\breve{X})$
- **Restrizione di** X **al dominio** Y **:** $X \restriction Y = X \cap (Y \times \mathbf{U})$
- Se X è una funzione e y un sottoinsieme del suo dominio :
  $X(y)$ è il **valore** della funzione applicata a y e
  $X[y] = \mathcal{R}(X \restriction y)$ è l'**immagine** di X ristretta a y.
- **Composizione** H **di due funzioni (o di due classi)** F **e** G **:**
  $(x;y) \in H \Leftrightarrow \exists z((x;z) \in F \wedge (z;y) \in G)$

Assioma 1.2.11. ***Assioma di rimpiazzamento [R]***
Data una classe univoca X, se le prime componenti delle sue coppie sono ristrette a variare in un insieme x, anche le relative seconde componenti costituiscono un insieme.
$\forall x(Un(X) \Rightarrow \exists y \forall u(u \in y \Leftrightarrow \exists v((v;u) \in X \wedge v \in x)))$

Osservazione 1.
- Se X è una funzione, l'assioma R afferma che il codominio della restrizione di X ad un insieme, è ancora un insieme.
- L'assioma S è una conseguenza dell'assioma di rimpiazzamento R.
  Dati x e Y basta considerare la classe X delle coppie $(u;u)$ con $u \in Y$, definibile con la *fbf* predicativa $\phi(z;Y)$:
  $\exists u_1 \exists u_2 (z = (u_1;u_2) \wedge u_1 \equiv u_2 \wedge u_1 \in Y)$. Evidentemente $Un(X)$ e $\exists v((v;u) \in X \wedge v \in X) \Leftrightarrow u \in x \cap Y$, cioè se le prime componenti delle sue coppie variano in x, le seconde costituiscono $x \cap Y$, che è dunque un insieme per rimpiazzamento.

- Sia nel caso di S che in quello di R, nel passaggio da ZF a NBG gli schemi divengono singole *fbf*, visto che in quest'ultimo sistema si può quantificare su classi, che venivano in ZF rappresentate da *fbf*.

Per assicurare l'esistenza di un insieme infinito si ha :

Assioma 1.2.12. ***Assioma dell'infinito [I]***
Esiste un insieme induttivo.
$\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall u(u \in x \Rightarrow u \cup \{u\} \in x))$ *: si scrive* $\exists x(Ind(x))$.

Questo è l'unico assioma di esistenza per un insieme : da esso si può dedurre l'esistenza di $\emptyset$, ma bisogna riformulare l'assoma I stesso, rimpiazzando l'insieme vuoto con una sua definizione. Anzichè $\emptyset \in x$ si inserisce allora in I la *fbf* $\exists u(u \in x \wedge \forall z(z \notin u))$.
Evidentemente per un tale insieme x :
$\{\emptyset\} \in x$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in x$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \in x$, ...
Quindi se ammettiamo che 0 stia per $\emptyset$, 1 stia per $\{0\}$, 2 stia per $\{0, 1\}$, 3 stia per $\{0, 1, 2\}$,..., n stia per $\{0, 1, 2, ..., n - 1\}$,..., allora per tutti gli n, $n \in x$.
L'assioma I assicura che la classe **Ind** degli insiemi induttivi non è vuota; è ben definita l'intersezione $\bigcap_{Ind(x)} x$ di tutti gli insiemi induttivi, che è a sua volta un insieme induttivo : è il minimo insieme induttivo possibile.

Definizione 1.15. $\omega = \bigcap_{Ind(x)} x$

Osservazione 2. ω è il rappresentante insiemistico di $\mathbb{N}$, i suoi elementi sono chiamati *numeri naturali.* Il principio di induzione è immediato per la minimalità di ω tra gli insiemi induttivi : se $x \subseteq \omega$ è induttivo si ha subito $x = \omega$.

Gli assiomi E, C, R, CL1-CL7, U, P, I costituiscono la teoria NBG che è finitamente assiomatizzata, a differenza di ZF e da essi, limitandosi agli insiemi, si può ricavare ZF.

Osservazione 3. In NBG vengono evitati i paradossi, ad esempio quello di Russell : la classe di Russell **R** è ben definita, siccome $x \notin x$ è predicativa.

Dunque $\forall X(M(X) \Rightarrow (X \in \mathbf{R} \Leftrightarrow X \notin X))$.
Supponiamo $M(\mathbf{R})$: allora $\mathbf{R} \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \mathbf{R} \notin \mathbf{R}$ e quindi, data la contraddizione, $\neg M(\mathbf{R})$.
Quindi in NBG i paradossi diventano dimostrazioni del fatto che certe classi non sono insiemi : sono *classi proprie*.

Per uno sviluppo completo della teoria degli insiemi sono necessari ulteriori assiomi, di interesse per i fondamenti (l'assioma di fondazione) o di grande utilità specificatamente matematica.

1.2.1 Assiomi speciali

Sembra ovvio che un insieme non possa appartenere a se stesso come elemento, tuttavia questo enunciato ($\forall x(x \notin x)$) non è derivabile dagli assiomi visti finora. Fu introdotto allora un assioma (*di fondazione*) che attualmente viene presentato in forma forte, come assioma *di regolarità*, quasi equivalente al primo.
Premettiamo due definizioni :

Definizione 1.16. Un insieme x è **ben fondato**, ($WF(x)$, well-founded), se non esiste nessuna successione $\in$-*discendente* in esso,
cioè $WF(x)$ se e solo se $\nexists(x_m)_{m=0}^{\infty}\ \ldots \in x_{n+1} \in x_n \in \ldots \in x_1 \in x_0 = x$.

Definizione 1.17. Un insieme x è **regolare** se è vuoto o se contiene un elemento disgiunto da esso,
cioè $Reg(x)$ se e solo se $x = \emptyset$ oppure $\exists y(y \in x \wedge y \cap x = \emptyset)$.

Si ha :

Assioma 1.2.13. ***Assioma di fondazione [FA]***
Ogni insieme è ben fondato.
$\forall x WF(x)$.

Assioma 1.2.14. ***Assioma di regolarità [Reg]***
Ogni insieme è regolare.
$\forall x Reg(x)$.

Teorema 1.2.15. $Reg \Rightarrow FA$

Dimostrazione. Ragioniamo per assurdo : supponiamo che FA non valga e x non sia ben fondato a causa della $\in$-successione $(x_m)_{m=0}^{\infty}$.
Consideriamo l'insieme $y = \{x_m; m \in \omega\}$, esso non è regolare, infatti dato un suo elemento x_j qualunque si ha subito $x_{j+1} \in x_j \cap y \neq \emptyset$. Dunque Reg non vale. □

Reg oltre ad impedire la stranezza $x \in x$ permette una costruzione elegante della totalità degli insiemi.
D'altra parte gli insiemi di cui si serve la matematica si possono pensare comunque ben fondati : quindi la questione dell'esistenza di insiemi non ben fondati è 'essenzialmente irrilevante', [Kunen 1980].

L'assioma di scelta

Questo assioma deve il suo nome al fatto che intuitivamente si postula di poter sempre effettuare un numero, anche infinito, di scelte simultanee di un elemento da ogni insieme di una qualunque famiglia, senza specificare in alcun modo un particolare algoritmo di scelta.

Assioma 1.2.16. ***Assioma di scelta [AS]***
Per ogni insieme $y \neq \emptyset$ esiste una funzione $f : y \to \cup y$ tale che $f(x) \in x$ per ogni $x \in y$, $x \neq \emptyset$.
f si chiama funzione di scelta per x.

Il teorema di Zermelo fu il primo di molti enunciati che vennero provati equivalenti in ZF all'assioma di scelta :

Teorema 1.2.17. ***di Zermelo, del buon ordinamento***
Ogni insieme è bene ordinabile.

Una conseguenza importante di AS è

Teorema 1.2.18. *$FA \Rightarrow Reg$*

Dimostrazione. Per assurdo sia x_0 un insieme non regolare, allora scelto arbitrariamente $y \in x_0, y \cap x_0$ non è vuoto, quindi si può scegliere $x_1 \in y \cap x_0$. Poichè $x_1 \in x_0$ si può scegliere $x_2 \in x_1 \cap x_0$ ... Si ottiene così una successione, definita per induzione, ... $\in x_n \in$ ... $\in x_1 \in x_0$ che prova che x_0 non è ben fondato e quindi FA non vale.
AS è usato per ottenere una funzione di scelta (la successione degli x_n) nella famiglia di insiemi non vuoti $\{y \cap x_0; y \in x_0\}$ ottenibile per rimpiazzamento da x_0. □

D'ora in poi Reg verrà considerato come assioma di ZF;
in ZFC (ZF + AS) Reg equivale a FA.

Capitolo 2

Numeri ordinali

Uno dei principali motivi che spinsero Cantor a creare una teoria generale degli insiemi fu quello di ampliare la nozione di *numero naturale* nel suo duplice aspetto : per mezzo di insiemi ben ordinati e di similitudini (*numeri ordinali*) o di corrispondenze biunivoche (*numeri cardinali*).
Dato che le similitudini sono particolari corrispondenze biunivoche, i numeri cardinali risulteranno particolari ordinali.
I numeri naturali sono al tempo stesso numeri cardinali e ordinali.
Cantor intendeva introdurre i numeri cardinali e ordinali per *astrazione* :
ad esempio, nel caso finito, il numero cardinale 5 rapprenterebbe quanto avessero in comune gli insiemi in corrispondenza biunivoca con l'insieme di lettere $\{\alpha; \beta; \gamma; \delta; \epsilon\}$, senza considerare le caratteristiche degli elementi e il loro ordine; nel caso ordinale, invece, si sarebbe dovuto considerare anche l'ordine con cui si presentavano.
Lo stesso veniva esteso al caso infinito.

2.1 Definizioni

Premettiamo alcune definizioni importanti sulle relazioni, intese come classi di coppie ordinate, [Mendelson 1972, Cap.4, §2] :

Definizione 2.1. R è una **relazione d'ordine parziale** su X se e solo se :

- R è **irriflessiva** su X :
  $R\ Irr\ X \Leftrightarrow \forall u(u \in X \Rightarrow (u;u) \notin R)$,

- R è **transitiva** su X :
  $R\ Tr\ X \Leftrightarrow \forall u \forall v \forall w(u \in X \wedge v \in X \wedge w \in X \wedge (u;v) \in R \wedge$
  $\wedge (v;w) \in R \Rightarrow (u;w) \in R)$,

cioè $R\ Parz\ X \Leftrightarrow \Big((R\ Irr\ X) \wedge (R\ Tr\ X)\Big)$.

Definizione 2.2. R è una **relazione d'ordine totale** su X se e solo se :

- R è una relazione d'ordine parziale,

- R è **connessa** su X :
  $R\ Con\ X \Leftrightarrow \forall u \forall v(u \in X \wedge v \in X \wedge u \not\equiv v \Rightarrow (u;v) \in R \vee (v;u) \in R)$,

cioè $R\ Tot\ X \Leftrightarrow \Big((R\ Parz\ X) \wedge (R\ Con\ X)\Big)$.

Definizione 2.3. R è una **relazione di buon ordine** per X se e solo se :

- $R\ Irr\ X$,

- $\forall Y(Y \subseteq X \wedge Y \neq \emptyset \Rightarrow \exists u(u \in Y \wedge \forall v(v \in Y \wedge v \not\equiv u \Rightarrow (u;v) \in R \wedge$
  $\wedge (v;u) \notin R)))$

cioè $R\ Be\ X \Leftrightarrow R$ è irriflessiva su X e ogni sottoclasse non vuota di X ha un primo elemento rispetto a R : di qui segue che

1) R è connessa su X, cioè due elementi distinti di X sono sempre paragonabili rispetto a R;

2) il primo elemento è unico, $u = min(X)$.

Si ha subito :

Proposizione 2.1.1. $\Big((R\ Be\ X) \wedge (Y \subseteq X)\Big) \Rightarrow (R\ Be\ Y)$.

Allora :

Definizione 2.4. Se X e Y sono ordinate rispettivamente da $<_X$ e $<_Y$, una **similitudine** è una corrispondenza biunivoca Z tra X e Y tale che $\forall x \in X\ \forall y \in Y(x <_X y \Leftrightarrow Z(x) <_Y Z(y))$.
Si scrive $Sim(Z, X, Y)$ o più esattamente $Sim(Z, <_X, <_Y)$.

Definizione 2.5. X e Y sono strutture ordinate **simili** se e solo se esiste una similitudine Z tra di essi,
$Sim(X, Y) \Leftrightarrow \exists Z\ Sim(Z, X, Y)$.
Anzichè $Sim(X, Y)$ si scrive anche $X \approx Y$ e se si vogliono specificare gli ordinamenti : $(X; <_X) \approx_Z (Y; <_Y)$.

Inoltre :

Definizione 2.6. Se X è ordinata da $<_X$, un suo **segmento iniziale** determinato da $x \in X$ è la classe degli y tali che $y \in X$ e $y <_X x$,
cioè $y \in Seg(x) \Leftrightarrow (y \in X \wedge y <_X x)$.
Si indica anche $Seg(x; X; <_X)$.

Si nota che una similitudine trasforma segmenti in segmenti, cioè :
$X \approx_Z Y$ implica $\forall x \in X(Z(Seg(x; X; <_X)) = Seg(Z(x); Y; <_Y))$.

Lemma 2.1.2. *Se X è bene ordinata da $<_X$ e $Y \subseteq X$, Y è bene ordinata sempre da $<_X$, e una similitudine $X \approx_Z Y$ è tale che $x \leq_X Z(x)$ per ogni $x \in X$.*

Dimostrazione. Sia per assurdo $y = Z(x) < x$ per un $x \in X$. Si può supporre che x sia il minimo elemento con tale proprietà. Essendo $Z(x) < x$ risulta $Z(x) = y \leq Z(y) = Z(Z(x))$, ma Z è una similitudine e quindi dovrebbe essere $Z(Z(x)) < Z(x)$. □

Da questo lemma seguono importanti conclusioni per i buoni ordinamenti:

Proposizione 2.1.3. *Se* $(X; <_X) \approx_Z (Y; <_Y)$*, allora la similitudine* Z *è unica.*

Dimostrazione. Siano Z_1 e Z_2 due similitudini tra X e Y, cioè $X \approx_{Z_1} Y$ e $X \approx_{Z_2} Y$, allora $X \approx_H X$, con H composizione di $\breve{Z}_1$ e Z_2, $(H = \breve{Z}_1 \circ Z_2)$.
Quindi per ogni $x \in X$, $x \leq H(x)$, cioè $Z_1(x) \leq Z_2(x)$.
Scambiando Z_1 con Z_2 si ottiene $Z_2(x) \leq Z_1(X)$ e quindi $Z_1 = Z_2$. □

Proposizione 2.1.4. *Nessuna classe ben ordinata è simile ad un suo segmento iniziale.*

Dimostrazione. Per assurdo sia $X \approx_Z Seg(x; X)$, allora per ogni $y \in X$, $Z(y) \in Seg(x; X)$. Quindi $Z(y) < x$ e in particolare $Z(x) < x$, contro il lemma precedente. □

Se x è un ordine totale, allora la classe di tutti gli ordini totali simili a x è chiamata **tipo d'ordine** di x.
In NBG tutti i tipi d'ordine sono classi proprie (tranne il tipo d'ordine $\{\emptyset\}$ di $\emptyset$).
La nozione di tipo d'ordine è particolarmente utile per i buoni ordinamenti e risulta importante trovare una classe W di strutture ben ordinate tali che ogni buon ordine è simile ad un unico elemento di W.
Questo porta allo studio dei numeri ordinali.

Definizione 2.7. X si dice **transitiva** se ogni suo elemento ne è anche un sottoinsieme : $Trans(X) \Leftrightarrow \forall u(u \in X \Rightarrow u \subseteq X)$; equivalentemente
$\forall u \forall v(v \in u \in X \Rightarrow v \in X)$.

Osservazione 4. Dalla definizione segue che :

- $Trans(X) \Leftrightarrow \bigcup X \subseteq X$.
- $\Big(Trans(X) \wedge Trans(Y)\Big) \Leftrightarrow \Big(Trans(X \cup Y) \wedge Trans(X \cap Y)\Big)$.
- $Trans(X) \Leftrightarrow \forall x(x \in X \Rightarrow Seg(x; X) = x)$.

Definizione 2.8.

- Una classe X è una **classe ordinale** se e solo se è transitiva e la relazione di appartenenza $\in$ (denotata con E) è di buon ordinamento su X,
  cioè $Ord(X) \Leftrightarrow \Big(Trans(X) \wedge (E\ Be\ X)\Big)$.

- Una classe ordinale che sia un insieme viene chiamata **numero ordinale**, cioè $\forall x(x \in \mathbf{ON} \Leftrightarrow Ord(x))$.
  ON è la classe di tutti i numeri ordinali ed è una classe propria.

Di solito un ordinale si indica con lettere greche minuscole $\alpha, \beta, \gamma, ...$

Osservazione 5.

1. In una classe transitiva, non è detto che E sia a sua volta transitiva, ad esempio $\{0; 1; \{1\}\}$, $(0 \in 1 \in \{1\}$ ma $0 \notin \{1\})$.

2. Viceversa E può essere transitiva in una classe (insieme) non transitiva, ad esempio $\{0; 3; 5\}$.

3. I numeri naturali, zero compreso, sono numeri ordinali.
   (Vedi definizione 2.11).

Si ha :

Proposizione 2.1.5. *Se X è una classe ordinale non vuota, allora essa ha un unico **elemento minimo** α, che viene indicato con **min(X)** e coincide con $\bigcap X$, cioè $Ord(X) \Rightarrow \exists \alpha \in X(\forall \beta \in X(\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta)$.*

Dimostrazione. Sia $\alpha_0 \in X$, se esso è il minimo, non c'è nulla da provare.
Altrimenti esisteranno dei $\beta \in X \cap \alpha_0$: sia α_0 il minimo di questi β e sia $\gamma \in X$, allora $\alpha_0 \subseteq \gamma$ e quindi $\alpha_0 \subseteq \bigcap_{\gamma \in X} \gamma = \bigcap X$.
D'altra parte $\alpha_0 \in X$, allora $\bigcap X \subseteq \alpha_0$, da cui l'uguaglianza $\alpha_0 = min(X)$.

$\square$

Si provano alcune fondamentali proprietà delle classi ordinali (quindi in particolare dei numeri ordinali) : risulterà che l'unica classe ordinale propria è **ON**, (proposizione 2.1.7, 2)).

Proposizione 2.1.6.

1) *Per ogni classe ordinale X, $X \notin X$, quindi per ogni numero ordinale α, $\alpha \notin \alpha$.*

2) *Se Y è sottoclasse transitiva propria di una classe ordinale X, allora Y appartiene a X, e quindi è un insieme,*
$(Ord(X) \wedge Y \subset X \wedge Trans(Y)) \Rightarrow Y \in X$.

3) *Siano X e Y classi ordinali, allora Y è una sottoclasse propria di X se e solo se $Y \in X$, (e quindi è un numero ordinale),*
$(Ord(X) \wedge Ord(Y)) \Rightarrow (Y \subset X \Leftrightarrow Y \in X)$.

4) *Legge di tricotomia :*
$Ord(X) \wedge Ord(Y) \Rightarrow (X \in Y \vee X = Y \vee Y \in X) \wedge$
$\wedge \neg(X \in Y \wedge Y \in X) \wedge \neg(X \in Y \wedge X = Y)$.

5) *Se X è una classe ordinale e $Y \in X$ allora Y è un numero ordinale,*
$(Ord(X) \wedge Y \in X) \Rightarrow Y \in \boldsymbol{ON}$.
Se X e Y sono classi ordinali proprie, sono uguali da 4).

Dimostrazione. 1) Se vale $Ord(X)$, allora E è irriflessiva su X quindi $\forall\alpha(\alpha \in X \Rightarrow \alpha \notin \alpha)$ e se $X \in X \Rightarrow X \notin X$. Allora $X \notin X$.

2) Vedi [Mendelson 1972, Cap.4, §2, prop.4.7.2]

3) Sia $Ord(X) \wedge Ord(Y)$.
($\Rightarrow$) Se $Y \subset X$, allora poichè Y è transitivo, per 2) $Y \in X$.
($\Leftarrow$) Se $Y \in X$, allora $Y \subseteq X$ visto che Y è transitivo e $Y \neq X$ per 1): allora $Y \subset X$.

4) Sia $Ord(X) \wedge Ord(Y) \wedge X \neq Y$.
Ora $X \cap Y \subseteq X$ e $X \cap Y \subseteq Y$. Poichè X e Y sono transitivi lo è anche

$X \cap Y$. Se $X \cap Y \subset X$ e $X \cap Y \subset Y$, allora per 2) $X \cap Y \in X$ e $X \cap Y \in Y$, quindi $X \cap Y \in X \cap Y$, in contraddizione con l'irriflessività di E su X. Quindi $X \cap Y = X$ oppure $X \cap Y = Y$, cioè $X \subseteq Y$ o $Y \subseteq X$. Ma $X \neq Y$ quindi per 3) $X \in Y$ o $Y \in X$.
Inoltre se $X \in Y$ e $Y \in X$ allora per 3) $X \subset Y$ e $Y \subset X$, assurdo.
Evidentemente $X \in Y \wedge X = Y$ è impossibile per 1).

5) Sia $Ord(X) \wedge Y \in X$. Si deve dimostrare che $E\ Be\ Y$ e $Trans(Y)$.
Poichè $Y \in X$ e $Trans(X)$ allora $Y \subset X$ e visto che $E\ Be\ X$ allora $E\ Be\ Y$.
Inoltre se $u \in Y$ e $v \in u$, allora per $Trans(X)$, $v \in X$. Poichè $E\ Con\ X$ e $Y \in X \wedge v \in X$, allora $v \in Y$ oppure $v = Y$ oppure $Y \in v$.
Se $v = Y$ o $Y \in v$ allora poichè $E\ Tr\ X$ e $u \in Y \wedge v \in u$, si avrebbe $u \in u$, in contraddizione con 1). Quindi $v \in Y$.
Così se $u \in Y$, allora $u \subseteq Y$, cioè $Trans(Y)$. $\square$

Proposizione 2.1.7.

1) ***ON*** *è bene ordinata dalla relazione* E,
$E\ Be\ \boldsymbol{ON}$.

2) ***ON*** *è una classe ordinale,* $Ord(\boldsymbol{ON})$,
e quindi l'unica classe ordinale per la proposizione 2.1.6, 5).
Se X *è una classe ordinale, allora* X *è la classe* ***ON*** *oppure* X *è un numero ordinale,*
$Ord(X) \Rightarrow (X = \boldsymbol{ON} \vee X \in \boldsymbol{ON})$.

3) ***ON*** *non è un insieme, (**Paradosso di Burali-Forti**),*
$\neg M(\boldsymbol{ON})$.

Dimostrazione. 1) Per 2.1.6, 1) $E\ Irr\ \mathbf{ON}$.
Sia $X \subseteq \mathbf{ON} \wedge X \neq \emptyset$ e sia $\alpha \in X$. Se α è l'elemento minimo di X, allora la tesi è dimostrata.
Se non lo è allora $E\ Be\ \alpha$ e $X \cap \alpha \neq \emptyset$. Sia β l'elemento minimo di $X \cap \alpha$, è ovvio usando 2.1.6, 4) che β è l'elemento minimo di X.

2) Si deve dimostrare soltanto che $Trans(\mathbf{ON})$.
   Se $u \in \mathbf{ON}$ e $v \in u$, allora per 2.1.6, 5) $v \in \mathbf{ON}$, quindi $Trans(\mathbf{ON})$.

3) Se $M(\mathbf{ON})$, allora per 2) $\mathbf{ON} \in \mathbf{ON}$, in contraddizione con 2.1.6, 1).
   Questo è il terzo dei paradossi classici della teoria degli insiemi ed il primo ad essere pubblicato. □

Da 2) segue che la sola classe ordinale che non è un numero ordinale è la classe **ON** stessa.

Definizione 2.9.
- $x <_0 y \Leftrightarrow x \in \mathbf{ON} \wedge y \in \mathbf{ON} \wedge x \in y$
- $x \leq_0 y \Leftrightarrow y \in \mathbf{ON} \wedge (x = y \vee x <_0 y)$

Perciò per gli ordinali $<_0$ è lo stesso di $\in$, allora $<_0$ bene ordina **ON** e dalla proposizione 2.1.6, 5) segue che ogni ordinale è uguale all'insieme degli ordinali minori. La relazione $<_0$ si indica equivalentemente con $<$.

In particolare :

Proposizione 2.1.8. *Se $x \in \alpha$, allora x è un ordinale e $x = Seg(x;\alpha;<)$.*

Dimostrazione. Se $x \in \alpha$ allora $x \subseteq \alpha$ e quindi x è bene ordinato da $\in$.
Se poi $v \in u \in x$ per la transitività di α, $v \in \alpha$, quindi $v \in x$, allora $u \subseteq x$ e x è transitivo. □

Proposizione 2.1.9. *Se $\alpha \approx \beta$, allora $\alpha = \beta$.*

Dimostrazione. Se $\alpha \approx_Z \beta$, si dimostra che $Z(x) = x$ per ogni $x \in \alpha$.
Per assurdo sia $x \in \alpha$ il minimo elemento tale che $x \neq Z(x)$.
Allora $x = Seg(x;\alpha;<) = Z(Seg(x;\alpha;<)) = Seg(Z(x);\beta;<) = Z(x)$.
Poichè per gli $y \in Seg(x;\alpha;<)$ risulta $Z(y) = y$.
Quindi $x = Z(x)$, contraddizione. □

Si può ora enunciare come corollario un risultato importante :

Corollario 2.1.10. *Ogni insieme bene ordinato è simile ad un unico ordinale.*

Dimostrazione. Da [Kunen 1980, Cap.I §7].
Unicità : Segue direttamente dalla proposizione precedente.
Esistenza : Sia x un insieme ben ordinato, si deve dimostrare che esiste α tale che $x \approx \alpha$. Sia $y = \{u \in x; \exists\beta(Seg(u,x) \approx \beta)\}$ e sia F una funzione di dominio y tale che $\forall u \in y$, $F(u)$ è uguale all'unico ordinale β tale che $(Seg(u,x) \approx \beta)$. Evidentemente $\mathfrak{R}(F)$ è un ordinale : sia $\alpha = \mathfrak{R}(F)$, allora F è una similitudine tra y e α, $y \approx \alpha$ e quindi :
o $y = x$, allora $x \approx \alpha$ e la tesi è dimostrata;
oppure $y = Seg(v,x)$ per qualche $v \in x$, da cui $v \in y$, contraddizione dal buon ordinamento di x. $\square$

Proposizione 2.1.11. *Sia $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ il successore insiemistico di α :*

1) $\forall\alpha(S(\alpha) \in \boldsymbol{ON})$

2) $\forall\alpha\ \nexists\beta(\alpha < \beta < S(\alpha))$

3) $\forall\alpha\forall\beta(S(\alpha) = S(\beta) \Rightarrow \alpha = \beta)$

Dimostrazione.

1) Si deve dimostrare che $E\ Be\ (\alpha \cup \{\alpha\})$ e $Trans(\alpha \cup \{\alpha\})$.
   Visto che $E\ Be\ \alpha$ e $\alpha \notin \alpha$, allora $E\ Irr\ (\alpha \cup \{\alpha\})$.
   Quindi se $\beta \neq \emptyset \wedge \beta \subseteq (\alpha \cup \{\alpha\})$ allora o $\beta = \{\alpha\}$, caso in cui l'elemento minimo di β è α, oppure $\beta \cap \alpha \neq \emptyset$, il cui elemento minimo è l'elemento minimo di β. Allora $E\ Be\ (\alpha \cup \{\alpha\})$.
   Ora se $\beta \in (\alpha \cup \{\alpha\})$ e $\gamma \in \beta$ allora $\gamma \in \alpha$. Perciò $Trans(\alpha \cup \{\alpha\})$.

2) Sia per assurdo $(\alpha < \beta < S(\alpha))$, allora $\alpha \in \beta \wedge \beta \in S(\alpha)$.
   Poichè $\alpha \in \beta$ allora $\beta \notin \alpha$ e $\beta \neq \alpha$, per la proposizione 2.1.6, 4), in contraddizione con $\beta \in S(\alpha)$.

3) Sia $S(\alpha) = S(\beta)$, allora $\beta < S(\alpha)$ e, per 2), $\beta \leq \alpha$.
Analogamente $\alpha \leq \beta$. Quindi $\alpha = \beta$. $\square$

Definizione 2.10. X è un **ordinale successore** :
$Suc(X) \Leftrightarrow X \in \mathbf{ON} \wedge \exists\alpha(X = S(\alpha))$.

Si possono definire in modo più diretto i numeri naturali :

Definizione 2.11. L'ordinale α è un **numero naturale** ($N(\alpha)$) se è $\alpha = \emptyset (= 0)$ oppure se è un ordinale successore e i suoi elementi sono tutti $\emptyset$ oppure successori.

Proposizione 2.1.12. *ω, il più piccolo insieme induttivo, ha per elementi esattamente i numeri naturali, cioè gli ordinali n per cui vale $N(n)$.*

Dimostrazione. La dimostrazione si divide in quattro passi :

1. $N(m)$ implica $N(S(m))$:
   Se $m = 0$ l'implicazione è immediata dato che $S(0) = \{0\}$.
   Sia $N(m)$ per un $m \neq 0$, allora m è un successore e i suoi elementi sono 0 o successori. Ora $S(m) = m \cup \{m\}$, i suoi elementi sono quelli di m più m stesso, allora sono tutti 0 o successori, quindi $N(S(m))$.

2. $N(S(j))$ implica $N(j)$:
   Se m è un successore e un numero naturale, allora $m = S(j)$ e j è un naturale :
   Sia $N(S(j))$, $j \in m$ allora j è 0 o un successore, se $j \neq 0$ i suoi elementi sono elementi di m (per la transitività di m stesso) e quindi 0 o successori, quindi $N(j)$.

3. Sia x un insieme induttivo, allora $N(m)$ implica $m \in x$:
   Se $m = 0$ è immediato.
   Sia per assurdo $m \neq 0$ tale che $m \notin x$ e sia il minimo naturale con

tale proprietà. Allora, per 2, $m = S(j)$ è il successore di un numero naturale $j < m$ e, per la minimalità di m, si ha $j \in x$.
Allora, poichè x è induttivo, $m \in x$, contraddizione.

4. Per 3 ogni numero naturale è elemento di ω : allora i numeri naturali costituiscono un insieme che è induttivo per 1 e per la minimalità di ω coincide con ω stesso. □

Proposizione 2.1.13. *ω è un numero ordinale :*

1) ω è transitivo : $\forall m(m \in \omega \wedge n \in m \Rightarrow n \in \omega)$

2) $E\ Be\ \omega$

Dimostrazione. 1) Segue dalla proposizione precedente.

2) $E\ Irr\ \omega$ poichè, per definizione, $\forall n \in \omega$, $n \notin n$.
Sia $x \subseteq \omega \wedge m \neq \emptyset$ e sia $n \in x$.
Se n è l'elemento minimo di x, cioè $\nexists m \in n \wedge m \in x$, la tesi è dimostrata.
Se non lo è, dato che $E\ Be\ n$, esiste il minimo di $n \cap x$. □

Gli ordinali diversi da $\emptyset$ che non sono ordinali successori sono chiamati ordinali limite.

Definizione 2.12. x è un **ordinale limite** :
$Lim(x) \Leftrightarrow x \in \mathbf{ON} \wedge x \neq \emptyset \wedge \neg Suc(x)$.

Proposizione 2.1.14.

1) Se x è un insieme di ordinali, allora $\bigcup x$ è un ordinale, il minimo maggiore o uguale a tutti gli elementi di x, viene anche indicato con ***sup(x)****.*
$\forall x(x \subseteq \boldsymbol{ON} \Rightarrow (\bigcup x \in \boldsymbol{ON} \wedge \forall \alpha(\alpha \in x \Rightarrow \alpha \leq_0 \bigcup x) \wedge$
$\wedge \forall \beta(\forall \alpha(\alpha \in x \Rightarrow \alpha \leq_0 \beta) \Rightarrow \bigcup x \leq_0 \beta)))$.

2) Se x è un insieme non vuoto di ordinali senza elemento massimale, allora $\bigcup x$ è un ordinale limite.
$\forall x(x \subseteq \boldsymbol{ON} \wedge x \neq \emptyset \wedge \forall\alpha(\alpha \in x \Rightarrow \exists\beta(\beta \in x \wedge \alpha <_0 \beta)) \Rightarrow Lim(\bigcup x))$.

Dimostrazione.

1) Sia $x \subseteq \mathbf{ON}$. $\bigcup x$ come insieme di ordinali è bene ordinato da E.
Se $\alpha \in \bigcup x \wedge \beta \in \alpha$, allora esiste un γ tale che $\gamma \in x \wedge \alpha \in \gamma$.
Allora $\beta \in \alpha$ e $\alpha \in \gamma$ e poichè ogni ordinale è transitivo $\beta \in \gamma$.
Perciò $\beta \in \bigcup x$, allora $\bigcup x$ è transitivo quindi $\bigcup x \in \mathbf{ON}$. Inoltre se $\alpha \in x$, $\alpha \subseteq \bigcup x$ quindi $\alpha \leq \bigcup x$, per la proposizione 2.1.6, 3).
Ora si supponga che $\forall\alpha(\alpha \in x \Rightarrow \alpha \leq \beta)$.
Evidentemente se $\delta \in \bigcup x$ allora esiste un γ tale che $\delta \in \gamma \wedge \gamma \in x$.
Quindi $\gamma \leq \beta$ e $\delta < \beta$, allora $\bigcup x \subseteq \beta$ e per la proposizione 2.1.6, 3) $\bigcup x \leq \beta$.

2) $\bigcup x$ è un ordinale per 1).
Sia $x \neq \emptyset \wedge x \subseteq \mathbf{ON} \wedge \forall\alpha(\alpha \in x \Rightarrow \exists\beta(\beta \in x \wedge \alpha < \beta))$.
Se $\bigcup x = \emptyset$ e $x \neq \emptyset$, allora $x = \{\emptyset\}$ ha elemento massimale, assurdo per ipotesi, quindi $\bigcup x \neq \emptyset$.
Sia $Suc(\bigcup x)$, allora $\bigcup x = S(\gamma)$ per qualche γ. Visto che $\bigcup x$ è il minimo ordinale $\geq$ ad ogni elemento di x per 1), allora γ non è maggiore o uguale ad ogni elemento di x e visto che x non ha elemento massimale, esiste un $\delta \in x$ tale che $\gamma < \delta$.
Ma $\delta = \bigcup x$ dal momento che $\bigcup x$ è il minimo ordinale maggiore o uguale a tutti gli elementi di x, allora $\bigcup x$ è un elemento massimale di x, contro l'ipotesi.
Quindi $\neg Suc(\bigcup x)$ e $Lim(\bigcup x)$ è l'unica possibilità che rimane. □

Da questa proposizione segue subito :

Corollario 2.1.15. *Se α è un ordinale successore, allora $\alpha = S(\bigcup\alpha)$. Se è un ordinale limite, $\alpha = \bigcup\alpha$.*

Se ne deduce che :

Definizione 2.13. Ogni ordinale α è :

- l'**ordinale zero** : $\alpha = \emptyset = 0$, oppure
- un **ordinale successore** : $\exists \beta(\alpha = S(\beta))$, oppure
- un **ordinale limite** : $\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \beta$.

Si noti che $\omega = \bigcup_{n\in\omega} n$ e quindi è un ordinale limite, (il più piccolo).

I numeri ordinali generalizzano, dei numeri naturali, le proprietà di induzione (chiamata ora *transfinita*).
Questo riguarda sia gli schemi di dimostrazione che il principio di induzione vero e proprio che permette la definizione di costruzioni insiemstiche dipendenti da un ordinale.

Proposizione 2.1.16. ***Induzione transfinita (prima forma) :***
Se per ogni β, ogni volta che tutti gli ordinali $< \beta$ appartengono a X allora β appartiene a X, allora tutti gli ordinali sono in X,
cioè $\forall \beta(\forall \alpha(\alpha < \beta \Rightarrow \alpha \in X) \Rightarrow \beta \in X) \Rightarrow \boldsymbol{ON} \subseteq X$.

Dimostrazione. Si supponga che $\forall \beta \forall \alpha(\alpha < \beta \Rightarrow \alpha \in X) \Rightarrow \beta \in X$ e che per assurdo vi sia un ordinale in $\mathbf{ON} \setminus X$.
Allora dato che $\mathbf{ON}$ è bene ordinato da E, vi è un ordinale minimo β in $\mathbf{ON} \setminus X$.
Quindi tutti gli ordinali $< \beta$ sono in X, ma per ipotesi $\beta \in X$, contraddizione.
$\square$

Questa proposizione si usa per dimostrare che tutti gli ordinali α hanno una data proprietà $P(\alpha)$. Si pone $X = \{\alpha; P(\alpha)\}$ e si dimostra che $\forall \beta(\forall \alpha(\alpha < \beta \Rightarrow P(\alpha)) \Rightarrow P(\beta))$. Se ciò è possibile, allora $X = \mathbf{ON}$.
Si sfrutta la proprietà di minimo per ottenere un assurdo :

se β è il minimo ordinale per cui *non* vale P, questa proprietà dovrebbe valere per gli $\alpha < \beta$ e quindi la condizione di sopra porterebbe all'assurdo $P(\beta) \wedge \neg P(\beta)$: dunque $\mathbf{ON} \setminus X$ deve essere vuoto.

Proposizione 2.1.17. ***Induzione transfinita (seconda forma) :***

1) $\emptyset \in X \wedge \forall\alpha(\alpha \in X \Rightarrow S(\alpha) \in X) \wedge$
$\wedge \forall\alpha(Lim(\alpha) \wedge \forall\beta(\beta < \alpha \Rightarrow \beta \in X) \Rightarrow \alpha \in X) \Rightarrow \boldsymbol{ON} \subseteq X.$

2) (Induzione fino a δ) $\emptyset \in X \wedge \forall\alpha(S(\alpha) < \delta \wedge \alpha \in X \Rightarrow S(\alpha) \in X) \wedge$
$\wedge \forall\alpha(\alpha < \delta \wedge Lim(\alpha) \wedge \forall\beta(\beta < \alpha \Rightarrow \beta \in X) \Rightarrow \alpha \in X) \Rightarrow \delta \subseteq X.$

Dimostrazione. 1) Si assuma l'antecedente dell'implicazione e sia $Y = \{x \in X; x \in \mathbf{ON} \wedge \forall\alpha(\alpha \leq x \Rightarrow \alpha \in X)\}$, allora $\forall\alpha(\alpha < \gamma \Rightarrow \Rightarrow \alpha \in Y) \Rightarrow \gamma \in Y$. Quindi per induzione transfinita (prima forma) $\mathbf{ON} \subseteq Y$, ma $Y \subseteq X$, allora $\mathbf{ON} \subseteq X$.

2) Dimostrazione analoga alla precedente. □

1) Questa forma di induzione transfinita è una specializzazione del ragionamento precedente. Si pone $X = \{\alpha; P(\alpha)\}$ e se si dimostra che :

- vale $P(0)$,
- per ogni α se vale $P(\alpha)$ allora vale $P(S(\alpha))$ e
- se α è un ordinale limite e $P(\beta)$ vale per ogni $\beta < \alpha$ allora vale $P(\alpha)$,

allora $X = \mathbf{ON}$.

2) Si restringe l'induzione precedente e si dimostra che $P(\alpha)$ vale per ogni $\alpha < \delta$: basta considerare solo gli ordinali $< \delta$.

Nella teoria degli insiemi molta importanza hanno le definizioni per induzione transfinita, che sono giustificate dalle seguenti proposizioni :

Proposizione 2.1.18. ***Definizione per Ricorsione transfinita su ON:***

1) *Sia $\boldsymbol{F} : \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{U}$, allora esiste un' unica costruzione* [1] $\boldsymbol{G} : \boldsymbol{ON} \to \boldsymbol{U}$ *tale che* $\forall\alpha$
$$\boldsymbol{G}(\alpha) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{G} \restriction \alpha).$$

2) *(Definizione per casi)*
Siano x un insieme, $\boldsymbol{F}_1 : \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{U}$ e $\boldsymbol{F}_2 : \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{U}$ due costruzioni, allora esiste un' unica costruzione $\boldsymbol{G} : \boldsymbol{ON} \to \boldsymbol{U}$ tale che $\forall\alpha$
$$\boldsymbol{G}(0) = x \wedge \boldsymbol{G}(S(\alpha)) = \boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{G}(\alpha)) \wedge (Lim(\alpha) \Rightarrow \boldsymbol{G}(\alpha) = \boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{G} \restriction \alpha)).$$

Dimostrazione. 1) Tratta da [Kunen 1980, Cap.I §9].
Unicità : Se $\mathbf{G}_1$ e $\mathbf{G}_2$ soddisfano il teorema, per induzione transfinita su α si prova che $\forall\alpha(\mathbf{G}_1(\alpha) = \mathbf{G}_2(\alpha))$.
Esistenza : Sia g una δ-*approssimazione* di $\mathbf{G}$, cioè una funzione di dominio δ e tale che $\forall\alpha < \delta$ $(g(\alpha) = \mathbf{F}(g \restriction \alpha))$.
Se g è una δ-approssimazione e g' è una δ'-approssimazione allora $g \restriction (\delta \cap \delta') = g' \restriction (\delta \cap \delta')$. Per induzione transfinita si prova che per ogni δ esiste un'unica δ-approssimazione.
Ora, se si definisce $\mathbf{G}(\alpha)$ come $g(\alpha)$, con g δ-approssimazione per qualche $\delta > \alpha$, la tesi è immediata.

2) Dimostrazione analoga alla precedente. □

La formula esprime l'idea che l'insieme $\mathbf{G}(\alpha)$ è determinato in modo univoco dai valori di $\mathbf{G}$ sugli elementi di α, cioè sugli ordinali $\gamma < \alpha$.
Inoltre, usando l'induzione fino a δ si può ottenere una funzione definita su δ per rimpiazzamento, [Mendelson 1972, Cap. 4, §2].

[1] Sinonimo di funzione nel senso di NBG, nel caso soprattutto di classi proprie.

2.2 Gli ordinali e gli assiomi di regolarità-fondazione

Un caso particolare di *ricorsione transfinita* 2.1.18, 2) si ha nel caso seguente, [Kunen 1980, Cap.III §2 e §4] :

Definizione 2.14. Dato un ordinale α si definiscono per casi insiemi R_α per induzione transfinita così :

$$\begin{cases} R_\alpha = 0 & \text{se } \alpha = 0 \\ R_\alpha = \mathcal{P}(R_\beta) & \text{se } \alpha = S(\beta) \text{ è un ordinale successore} \\ R_\alpha = \bigcup_{\delta<\alpha} R_\delta & \text{se } \alpha \text{ è un ordinale limite} \end{cases}$$

Si può così definire la classe **WF** di insiemi ben fondati :

Definizione 2.15. $\mathbf{WF} = \bigcup_{\alpha\in\mathbf{ON}} R_\alpha$.

Così gli insiemi ben fondati sono definiti come elementi di qualche insieme R_α.

Lemma 2.2.1. *Per ogni* α *:*

1) R_α *è transitivo.*

2) $\forall\gamma \leq \alpha(R_\gamma \subseteq R_\alpha)$.

Dimostrazione. Per induzione su α : si supponga il lemma valido per ogni $\beta < \alpha$ e lo si dimostri per α. Distinguiamo i 3 casi :
Caso I : $\alpha = 0$: ovvio.
Caso II : $\alpha = S(\beta)$ è un ordinale successore : dato che R_β è transitivo allora $\mathcal{P}(R_\beta) = R_\alpha$ è transitivo e $R_\beta \subseteq R_\alpha$.
Caso III : α è un ordinale limite : R_α è transitivo perchè unione di insiemi transitivi e 2) segue direttamente dalla definizione. □

Dalla definizione per casi segue che se $x \in \mathbf{WF}$, il minimo α tale che $x \in R_\alpha$ deve essere un ordinale successore.
Allora si ha :

Definizione 2.16. Se $x \in \mathbf{WF}$, il **rango** di x, $rank(x)$, è il minimo β tale che $x \in R_{S(\beta)}$.

Se $\beta = rank(x)$ allora $x \subseteq R_\beta$, $x \notin R_\beta$ e $x \in R_\alpha$ per ogni $\alpha > \beta$.

Il seguente lemma giustifica la 'R' nella definizione :

Lemma 2.2.2. *Per ogni α, $R_\alpha = \{x \in \boldsymbol{WF} \mid rank(x) < \alpha\}$.*

Dimostrazione. Se $x \in \mathbf{WF}$, allora $rank(x) < \alpha$ se e solo se
$\exists \beta < \alpha(x \in R_{S(\beta)}) \Leftrightarrow x \in R_\alpha$. □

Lemma 2.2.3. *Se $u \in \boldsymbol{WF}$ allora*

1) $\forall v \in u(v \in \boldsymbol{WF} \wedge rank(v) < rank(u))$ e

2) $rank(u) = sup\{S(rank(v)); v \in u\}$.

Dimostrazione. 1) Sia $\alpha = rank(u)$ allora $u \in R_{S(\alpha)} = \mathcal{P}(R_\alpha)$.
Se $v \in u$ allora $v \in R_\alpha$ da cui $rank(v) < \alpha$ per il Lemma 2.2.2.

2) Sia $\alpha = sup\{S(rank(v)); v \in u\}$. Per 1) $\alpha \leq rank(u)$.
Inoltre ogni $v \in u$ ha rango minore di α, allora $u \subseteq R_\alpha$, quindi $u \in R_{S(\alpha)}$ e $rank(u) \leq \alpha$. Allora $\alpha = rank(u)$. □

Questo lemma afferma che la classe $\mathbf{WF}$ è transitiva, cioè $u \in \mathbf{WF}$ implica $u \subset \mathbf{WF}$, e che si dovrebbero considerare gli elementi $y \in \mathbf{WF}$ come 'costruiti', tramite ricorsione transfinita, a partire da insiemi di rango minore.
Per questo $\mathbf{WF}$ non contiene insiemi che sono costruiti da loro stessi, cioè non esiste $x \in \mathbf{WF}$ tale che $x \in x$ perchè si avrebbe $rank(x) < rank(x)$.
Allo stesso modo $\mathbf{WF}$ esclude circolarità come $x \in y \wedge y \in x$ perchè risulterebbe $rank(x) < rank(y) < rank(x)$.

Lemma 2.2.4. $\forall \alpha \in \boldsymbol{ON}(\alpha \in \boldsymbol{WF} \wedge rank(\alpha) = \alpha)$

Dimostrazione. Si dimostra per induzione transfinita su α : se il lemma è valido per ogni $\beta < \alpha$, allora $\beta \in R_{S(\beta)} \subseteq R_\alpha$, da cui $\alpha \subset R_\alpha$ e quindi $\alpha \in R_{S(\alpha)}$. Per il lemma 2.2.3, 2), $rank(\alpha) = sup\{S(\beta); \beta < \alpha\} = \alpha$, quindi il lemma vale per α. □

Lemma 2.2.5. $\forall u(u \in \boldsymbol{WF} \Leftrightarrow u \subset \boldsymbol{WF})$

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) È immediato per la transitività di **WF**.
($\Leftarrow$) Se $u \subset \mathbf{WF}$, sia $\alpha = sup\{S(rank(v)); v \in u\}$, allora $u \subset R_\alpha$ quindi u $\in \mathcal{P}(R_\alpha) = R_{S(\alpha)}$. □

Si ha :

Teorema 2.2.6. *L'assioma di regolarità è equivalente all'affermazione* $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{WF}$*, cioè ogni insieme è un elemento di* $\boldsymbol{WF}$*.*

Dimostrazione. 1) Sia $\mathbf{U} = \mathbf{WF}$ e $X \neq \emptyset$. Sia α il minimo dei ranghi di tutti gli elementi di X e sia b un elemento di X tale che $rank(b) = \alpha$.
Allora $b \cap X = \emptyset$, infatti se $u \in b \cap X$, allora per il lemma 2.2.3, 1), $rank(u) \in rank(b) = \alpha$, assurdo per la minimalità di α.
2) Si assuma la validità dell'assioma e sia $\mathbf{U} \setminus \mathbf{WF} \neq \emptyset$.
Per l'assioma esiste qualche $y \in \mathbf{U} \setminus \mathbf{WF}$ tale che $y \cap (\mathbf{U} \setminus \mathbf{WF}) = \emptyset$.
Quindi $y \subseteq \mathbf{WF}$ e allora per il lemma 2.2.5 $y \in \mathbf{WF}$, assurdo perchè $y \in \mathbf{U} \setminus \mathbf{WF}$. □

Questo teorema afferma che ogni insieme si può ottenere a partire dall'insieme $\emptyset$ applicando le operazioni di formazione dell'insieme potenza e di unione un numero transfinito di volte.

Osservazione 6. In **WF** valgono tutti gli assiomi di ZFC : quindi l'assioma di regolarità è in un certo qual modo superfluo, [Kunen 1980].

2.3 Aritmetica ordinale

Per ricorsione transfinita si possono definire le operazioni di addizione, moltiplicazione ed elevamento a potenza tra numeri ordinali.
[Mendelson 1972, Cap.4 §4]. Per comprendere la definizione, si noti che l'immagine $F[x]$ di un insieme x si può definire anche se F non è una funzione.

Definizione 2.17. Addizione ordinale :
Nella proposizione 2.1.18, 2) sia $x = \beta$ e siano $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ tali che per ogni u $\mathbf{F}_1(u) = S(u)$ e $\mathbf{F}_2(u) = \bigcup \Re(u)$.
Allora per ogni β, esiste un'unica costruzione $\mathbf{G}_\beta$ tale che

$$\mathbf{G}_\beta(0) = \beta \wedge \forall\alpha(\mathbf{G}_\beta(S(\alpha)) = S(\mathbf{G}_\beta(\alpha))) \wedge \forall\alpha(Lim(\alpha) \Rightarrow \mathbf{G}_\beta(\alpha) = \bigcup \mathbf{G}_\beta[\alpha]).$$

Quindi esiste un'unica costruzione $+_0$ con dominio $\mathbf{ON}$ tale che per ordinali qualunque β e α, $\beta +_0 \alpha = \mathbf{G}_\beta(\alpha)$, esplicitamente :

- $\beta +_0 0 = \beta$
- $\beta +_0 S(\alpha) = S(\beta +_0 \alpha)$
- $Lim(\alpha) \Rightarrow \beta +_0 \alpha = \bigcup_{\tau<\alpha}(\beta +_0 \tau)$

Segue subito che $\mathbf{G}_\beta(\alpha) \in \mathbf{ON}$ per ogni α, β.

In particolare :

Proposizione 2.3.1.

1. $\beta +_0 1 = S(\beta)$
2. $0 +_0 \beta = \beta = \beta +_0 0$
3. $(\alpha +_0 \beta) +_0 \gamma = \alpha +_0 (\beta +_0 \gamma)$

Dimostrazione. 1. $\beta +_0 1 = \beta +_0 S(0) = S(\beta +_0 0) = S(\beta)$.

2. Per induzione transfinita (seconda forma). Sia $X = \{\beta; 0 +_0 \beta = \beta\}$.
   Innanzitutto $0 \in X$, visto che $0 +_0 0 = 0$.
   Se $0 +_0 \alpha = \alpha$ allora $0 +_0 S(\alpha) = S(0 +_0 \alpha) = S(\alpha)$. Quindi $S(\alpha) \in X$.
   Se $Lim(\alpha)$ e $0 +_0 \tau = \tau$ per ogni $\tau < \alpha$, allora
   $0 +_0 \alpha = \bigcup_{\tau<\alpha}(0 +_0 \tau) = \bigcup_{\tau<\alpha} \tau = \alpha$, visto che $Lim(\alpha)$.
   ($\beta +_0 0 = \beta$ segue dalla definizione stessa).

3. Per induzione transfinita su γ.
   Sia $X = \{\gamma; \forall\alpha\forall\beta\ (\alpha +_0 \beta) +_0 \gamma = \alpha +_0 (\beta +_0 \gamma)\}$.
   Intanto $0 \in X$, dato che $(\alpha +_0 \beta) +_0 0 = \alpha +_0 \beta = \alpha +_0 (\beta +_0 0)$.
   Sia $\gamma \in X$, allora

$$(\alpha+_0\beta)+_0S(\gamma) = S((\alpha+_0\beta)+_0\gamma) = S(\alpha+_0(\beta+_0\gamma)) = \alpha+_0S(\beta+_0\gamma) = \alpha+_0(\beta+_0S(\gamma)).$$

   Quindi $S(\gamma) \in X$.
   Se $Lim(\gamma)$ e $\tau \in X$ per ogni $\tau < \gamma$, allora

$$(\alpha+_0\beta)+_0\gamma = \bigcup_{\tau<\gamma}((\alpha+_0\beta)+_0\tau) = \bigcup_{\tau<\gamma}(\alpha+_0(\beta+_0\tau)) = \alpha+_0\bigcup_{\tau<\gamma}(\beta+_0\tau) = \alpha+_0(\beta+_0\gamma).$$

□

Definizione 2.18. Moltiplicazione ordinale :
Nella proposizione 2.1.18, 2) sia $x = 0$ e siano $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ tali che per ogni u $\mathbf{F}_1(u) = u +_0 \beta$ e $\mathbf{F}_2(u) = \bigcup \mathfrak{R}(u)$.
Allora per ogni β, esiste un'unica costruzione $\mathbf{G}_\beta$ tale che

$$\mathbf{G}_\beta(0) = 0 \wedge \forall\alpha(\mathbf{G}_\beta(S(\alpha)) = \mathbf{G}_\beta(\alpha)+_0\beta) \wedge \forall\alpha(Lim(\alpha) \Rightarrow \mathbf{G}_\beta(\alpha) = \bigcup \mathbf{G}_\beta[\alpha]).$$

Quindi esiste un'unica costruzione $\times_0$ con dominio $\mathbf{ON}$ tale che per ordinali qualunque β e α, $\beta \times_0 \alpha = \mathbf{G}_\beta(\alpha)$, esplicitamente :

- $\beta \times_0 0 = 0$
- $\beta \times_0 S(\alpha) = (\beta \times_0 \alpha) +_0 \beta$
- $Lim(\alpha) \Rightarrow \beta \times_0 \alpha = \bigcup_{\tau<\alpha}(\beta \times_0 \tau)$

In particolare :

Proposizione 2.3.2.

1. $\beta \times_0 1 = 1 \times_0 \beta = \beta$
2. $0 \times_0 \beta = 0$
3. $\alpha \times_0 (\beta +_0 \gamma) = (\alpha \times_0 \beta) +_0 (\alpha \times_0 \gamma)$
4. $(\alpha \times_0 \beta) \times_0 \gamma = \alpha \times_0 (\beta \times_0 \gamma)$

Dimostrazione. 1. $\beta \times_0 1 = \beta \times_0 S(0) = (\beta \times_0 0) +_0 \beta = 0 +_0 \beta = \beta$.
$1 \times_0 \beta = \beta$ si prova per induzione transfinita su β :
Sia $X = \{\beta; 1 \times_0 \beta = \beta\}$.
Innanzitutto $0 \in X$, visto che $1 \times_0 0 = 0$.
Se $1 \times_0 \alpha = \alpha$ allora $1 \times_0 S(\alpha) = (1 \times_0 \alpha) +_0 1 = \alpha +_0 1 = S(\alpha)$, per 1 della proposizione precedente.
Se $Lim(\alpha)$ e $1 \times_0 \tau = \tau$ per ogni $\tau < \alpha$, allora
$1 \times_0 \alpha = \bigcup_{\tau<\alpha}(1 \times_0 \tau) = \bigcup_{\tau<\alpha} \tau = \alpha$.

2. Per induzione transfinita. Sia $X = \{\beta; 0 \times_0 \beta = 0\}$.
Innanzitutto $0 \in X$, visto che $0 \times_0 0 = 0$.
Se $0 \times_0 \alpha = 0$ allora $0 \times_0 S(\alpha) = (0 \times_0 \alpha) +_0 0 = 0 +_0 0 = 0$.
Se $Lim(\alpha)$ e $0 \times_0 \tau = 0$ per ogni $\tau < \alpha$, allora
$0 \times_0 \alpha = \bigcup_{\tau<\alpha}(0 \times_0 \tau) = \bigcup_{\tau<\alpha} 0 = 0$.

3. Per induzione su γ.
Sia $X = \{\gamma; \forall\alpha\forall\beta(\alpha \times_0 (\beta +_0 \gamma) = (\alpha \times_0 \beta) +_0 (\alpha \times_0 \gamma))\}$.
Intanto $0 \in X$, dato che $\alpha \times_0 (\beta +_0 0) = \alpha \times_0 \beta = (\alpha \times_0 \beta) +_0 (\alpha \times_0 0)$.
Sia $\gamma \in X$, allora
$\alpha \times_0 (\beta +_0 S(\gamma)) = \alpha \times_0 S(\beta +_0 \gamma) = \alpha \times_0 (\beta +_0 \gamma) +_0 \alpha =$
$= (\alpha \times_0 \beta) +_0 (\alpha \times_0 \gamma) +_0 \alpha = (\alpha \times_0 \beta) +_0 (\alpha \times_0 S(\gamma))$.
Quindi $S(\gamma) \in X$.
Se $Lim(\gamma)$ e $\tau \in X$ per ogni $\tau < \gamma$, allora

$\alpha \times_0 (\beta +_0 \gamma) = \bigcup_{\tau<\gamma}(\alpha \times_0 (\beta +_0 \tau)) = \bigcup_{\tau<\gamma}((\alpha \times_0 \beta) +_0 (\alpha \times_0 \tau)) =$
$= (\alpha \times_0 \beta) +_0 \bigcup_{\tau<\gamma}(\alpha \times_0 \tau) = (\alpha \times_0 \beta) +_0 (\alpha \times_0 \gamma)$.

4. Per induzione transfinita su γ.
   Sia $X = \{\gamma; \forall\alpha\forall\beta\ (\alpha \times_0 \beta) \times_0 \gamma = \alpha \times_0 (\beta \times_0 \gamma)\}$.
   Intanto $0 \in X$, dato che $(\alpha \times_0 \beta) \times_0 0 = 0 = \alpha \times_0 (\beta \times_0 0)$.
   Sia $\gamma \in X$, allora $(\alpha \times_0 \beta) \times_0 S(\gamma) = (\alpha \times_0 \beta) \times_0 \gamma +_0 (\alpha \times_0 \beta) = \alpha \times_0 (\beta \times_0 \gamma) +_0 (\alpha \times_0 \beta) = \alpha \times_0 ((\beta \times_0 \gamma) +_0 \beta) = \alpha \times_0 (\beta \times_0 S(\gamma))$.
   Quindi $S(\gamma) \in X$.
   Se $Lim(\gamma)$ e $\tau \in X$ per ogni $\tau < \gamma$, allora

$$(\alpha\times_0\beta)\times_0\gamma = \bigcup_{\tau<\gamma}((\alpha\times_0\beta)\times_0\tau) = \bigcup_{\tau<\gamma}(\alpha\times_0(\beta\times_0\tau)) = \alpha\times_0\bigcup_{\tau<\gamma}(\beta\times_0\tau) = \alpha\times_0(\beta\times_0\gamma).$$

□

Definizione 2.19. Elevamento a potenza ordinale :
Nella proposizione 2.1.18, 2) sia $x = 1$ e siano $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ tali che per ogni u $\mathbf{F}_1(u) = u \times_0 \beta$ e $\mathbf{F}_2(u) = \bigcup \mathfrak{R}(u)$.
Allora per ogni β, esiste un'unica costruzione $\mathbf{G}_\beta$ tale che

$$\mathbf{G}_\beta(0) = 1 \wedge \forall\alpha(\mathbf{G}_\beta(S(\alpha)) = \mathbf{G}_\beta(\alpha)\times_0\beta) \wedge \forall\alpha(Lim(\alpha) \Rightarrow \mathbf{G}_\beta(\alpha) = \bigcup \mathbf{G}_\beta[\alpha]).$$

Quindi esiste un'unica costruzione con dominio **ON** tale che per ordinali qualunque β e α, $\beta^\alpha = \mathbf{G}_\beta(\alpha)$, esplicitamente :

- $\beta^0 = 1$
- $\beta^{S(\alpha)} = (\beta^\alpha) \times_0 \beta$
- $Lim(\alpha) \Rightarrow \beta^\alpha = \bigcup_{0<\tau<\alpha}(\beta^\tau)$

In particolare :

Proposizione 2.3.3.

1. $\beta^1 = \beta$

2. $1^\beta = 1$

3. $\beta^{\alpha +_0 \gamma} = \beta^\alpha \times_0 \beta^\gamma$

Dimostrazione. 1. Per induzione transfinita. Sia $X = \{\beta; \beta^1 = \beta\}$.
Innanzitutto $0 \in X$, visto che $0^1 = 0$.
Se $\alpha^1 = \alpha$ allora
$(S(\alpha))^1 = (S(\alpha))^{S(0)} = (S(\alpha))^0 \times_0 S(\alpha) = 1 \times_0 S(\alpha) = S(\alpha)$.
Se $Lim(\alpha)$ e $\tau^1 = \tau$ per ogni $\tau < \alpha$, allora
$\alpha^1 = \bigcup_{\tau <_0 \alpha}(\tau^1) = \bigcup_{\tau<\alpha} \tau = \alpha$.

2. Per induzione transfinita. Sia $X = \{\beta; 1^\beta = 1\}$.
Intanto $0 \in X$, dato che $1^0 = 1$, per definizione.
Se $1^\alpha = 1$ allora $1^{S(\alpha)} = (1^\alpha) \times_0 1 = 1 \times_0 1 = 1$, per 1 della proposizione precedente.
Se $Lim(\alpha)$ e $1^\tau = 1$ per ogni $\tau < \alpha$, allora
$1^\alpha = \bigcup_{\tau<\alpha}(1^\tau) = \bigcup_{\tau<\alpha} 1 = 1$.

3. Per induzione transfinita su γ. Sia $X = \{\gamma; \forall\alpha\forall\beta\ (\beta^{\alpha+_0\gamma} = \beta^\alpha \times_0 \beta^\gamma)\}$.
Innanzitutto $0 \in X$, dato che $0^{\alpha+_0\gamma} = 0 = 0^\alpha \times_0 0^\gamma$.
Sia $\gamma \in X$, allora

$$\beta^{\alpha+_0 S(\gamma)} = \beta^{S(\alpha+_0\gamma)} = \beta^{\alpha+_0\gamma} \times_0 \beta = (\beta^\alpha \times_0 \beta^\gamma) \times_0 \beta = \beta^\alpha \times_0 \beta^{S(\gamma)}.$$

Se $Lim(\gamma)$ e $\tau \in X$ per ogni $\tau < \gamma$, allora
$\beta^{\alpha+_0\gamma} = \bigcup_{\tau<\gamma}(\beta^{\alpha+_0\tau}) = \bigcup_{\tau<\gamma}(\beta^\alpha \times_0 \beta^\tau) = \beta^\alpha \times_0 \beta^\gamma$. □

Proprietà dell'addizione e moltiplicazione ordinale ristrette a ω :

Proposizione 2.3.4. *Siano α, β, γ in ω. Allora :*

1) $\alpha + \beta \in \omega$

2) $\alpha \times \beta \in \omega$

3) $\alpha^\beta \in \omega$

4) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

5) $\alpha \times \beta = \beta \times \alpha$

6) $(\alpha + \beta) \times \gamma = (\alpha \times \gamma) + (\beta \times \gamma)$

7) $(\alpha \times \beta)^\gamma = \alpha^\gamma \times \beta^\gamma$

Dimostrazione.

1) Per induzione su β. Sia $X = \{\beta \in \omega; \forall \alpha \in \omega \ (\alpha + \beta \in \omega)\}$.
Evidentemente $0 \in X$. Sia $\beta \in X$ e $\alpha \in \omega$ allora
$\alpha + S(\beta) = S(\alpha + \beta) \in \omega$ e $\omega \subseteq X$, per la proposizione 2.1.12.
$\beta \in \omega$ non può essere un ordinale limite.

2) Per induzione su β. Sia $X = \{\beta \in \omega; \forall \alpha \in \omega \ (\alpha \times \beta \in \omega)\}$.
Evidentemente $0 \in X$. Sia $\beta \in X$ e $\alpha \in \omega$, allora
$\alpha \times S(\beta) = (\alpha \times \beta) + \alpha \in \omega$, per 1).
Quindi $S(\beta) \in X$.

3) Per induzione su β. Sia $X = \{\beta \in \omega; \forall \alpha \in \omega \ (\alpha^\beta \in \omega)\}$.
Evidentemente $0 \in X$. Sia $\beta \in X$ e $\alpha \in \omega$, allora $\alpha^{S(\beta)} = (\alpha^\beta) \times \alpha \in \omega$, per 2). Quindi $S(\beta) \in X$.

4) Si premetta il seguente lemma :

Lemma 2.3.5. *$\alpha \in \omega \wedge \beta \in \omega \Rightarrow S(\alpha) + \beta = \alpha + S(\beta)$.*

Dimostrazione. Sia $Y = \{\beta \in \omega; \forall \alpha \in \omega \ (S(\alpha) + \beta = \alpha + S(\beta))\}$.
Evidentemente $0 \in Y$. Siano $\beta \in Y$, $\alpha \in \omega$ e $S(\alpha) + \beta = \alpha + S(\beta)$, allora $S(\alpha) + S(\beta) = S(S(\alpha) + \beta) = S(\alpha + S(\beta)) = \alpha + S(S(\beta))$.
Quindi $S(\beta) \in Y$. □

Ora per dimostrare 4) : sia $X = \{\beta \in \omega; \forall \alpha \in \omega \ (\alpha + \beta = \beta + \alpha)\}$.
Allora $0 \in X$. Sia $\beta \in X$ e $\alpha \in \omega$, allora
$\alpha + S(\beta) = S(\alpha + \beta) = S(\beta + \alpha) = \beta + S(\alpha) = S(\beta) + \alpha$, per il lemma precedente. Quindi $S(\beta) \in X$.

5) Per induzione su β. Sia $X = \{\beta \in \omega; \forall \alpha \in \omega\ (\alpha \times \beta = \beta \times \alpha)\}$.
Evidentemente $0 \in X$. Sia $\beta \in X$ e $\alpha \in \omega$, allora
$\alpha \times S(\beta) = (\alpha \times \beta) + \alpha = (\beta \times \alpha) + \alpha = S(\beta) \times \alpha$.
(Dimostrazione analoga a quella del lemma precedente).
Quindi $S(\beta) \in X$.

6) Per induzione su γ.
Sia $X = \{\gamma \in \omega; \forall \alpha \in \omega \forall \beta \in \omega\ ((\alpha + \beta) \times \gamma = (\alpha \times \gamma) + (\beta \times \gamma))\}$.
Evidentemente $0 \in X$. Siano $\gamma \in X$, $\alpha \in \omega$ e $\beta \in \omega$ allora
$(\alpha + \beta) \times S(\gamma) = (\alpha + \beta) \times \gamma + (\alpha + \beta) = (\alpha \times \gamma) + (\beta \times \gamma) + \alpha + \beta =$
$= (\alpha \times \gamma) + \alpha + (\beta \times \gamma) + \beta = (\alpha \times S(\gamma)) + (\beta \times S(\gamma))$.
Quindi $S(\gamma) \in X$.

7) Per induzione su γ.
Sia $X = \{\gamma \in \omega; \forall \alpha \in \omega \forall \beta \in \omega\ ((\alpha \times \beta)^\gamma = \alpha^\gamma \times \beta^\gamma)\}$.
Evidentemente $0 \in X$.
Siano $\gamma \in X$, $\alpha \in \omega$ e $\beta \in \omega$ allora

$$(\alpha \times \beta)^{S(\gamma)} = (\alpha \times \beta)^\gamma \times (\alpha \times \beta) = \alpha^\gamma \times \beta^\gamma \times \alpha \times \beta = \alpha^\gamma \times \alpha \times \beta^\gamma \times \beta = \alpha^{S(\gamma)} \times \beta^{S(\gamma)}.$$

Quindi $S(\gamma) \in X$. □

Addizione, moltiplicazione ed elevamento a potenza tra numeri naturali (in ω) coincidono con le solite operazioni.
Le operazioni in **ON** le generalizzano, ma si può notare che alcune leggi che valgono in ω, come le leggi commutative per l'addizione e la moltiplicazione, non valgono per gli ordinali. Controesempi :

- $\exists \alpha \exists \beta (\alpha + \beta \neq \beta + \alpha)$,
  $1 + \omega = \bigcup_{\alpha < \omega}(1 + \alpha) = \omega$ ma $\omega + 1 = S(\omega) > \omega$.

- $\exists \alpha \exists \beta (\alpha \times \beta \neq \beta \times \alpha)$,
  $2 \times \omega = \bigcup_{\alpha < \omega}(2 \times \alpha) = \omega$ ma
  $\omega \times 2 = \omega \times (1 + 1) = (\omega \times 1) + (\omega \times 1) = \omega + \omega > \omega$.

- $\exists\alpha\exists\beta\exists\gamma(\alpha+\beta)\times\gamma \neq (\alpha\times\gamma)+(\beta\times\gamma)$,
  $(1+1)\times\omega = 2\times\omega = \omega$ ma $(1\times\omega)+(1\times\omega) = \omega+\omega > \omega$.

- $\exists\alpha\exists\beta\exists\gamma((\alpha\times\beta)^\gamma \neq \alpha^\gamma\times\beta^\gamma)$,
  $(2\times 2)^\omega = 4^\omega = \bigcup_{\alpha<\omega}(4^\alpha) = \omega$ ma $2^\omega = \bigcup_{\alpha<\omega}(2^\alpha) = \omega$; allora $2^\omega\times 2^\omega = \omega+\omega > \omega$.

Un'interessante applicazione 'elementare' dell'aritmetica ordinale è la **rappresentazione posizionale** di questi numeri, analoga a quella dei numeri naturali, (per le dimostrazioni rimandiamo a [Abian 1972, Cap.VIII §7]).
Si fissa un ordinale $\beta > 1$ (la *base*), le *cifre* della rappresentazione sono gli ordinali $\gamma < \beta$. Una *rappresentazione* di un ordinale $\alpha > 0$ in base β è uno sviluppo di α in una somma (finita) di $n > 0$ termini del tipo

$$\alpha = \sum_{j<n} \beta^{\epsilon_j}\gamma_j = \beta^{\epsilon_0}\gamma_0 + ... + \beta^{\epsilon_{n-1}}\gamma_{n-1}$$

dove $\gamma_j \in \beta$ e gli ϵ_j sono ordinali, in ordine decrescente : $\epsilon_0 > \epsilon_1 > ... \geq \epsilon_{n-1}$.
Si deve rispettare l'ordine nelle somme e moltiplicazioni, non essendo le operazioni ordinali commutative.

Risultato fondamentale :

Teorema 2.3.6. *Ogni numero ordinale $\alpha > 0$ ha un'unica rappresentazione posizionale in base $\beta > 1$, qualunque sia β.*

Dimostrazione. Vedi [Abian 1972, loc. cit., Teorema 32] □

Se α è rappresentato dallo sviluppo precedente :

$$\alpha = \beta^{\epsilon_0}\gamma_0 + (... + \beta^{\epsilon_{n-1}}\gamma_{n-1}) = \beta^{\epsilon_0}\gamma_0 + \rho$$

$\rho_\beta = \rho$ si dice il *resto*, $\beta^{\epsilon_0}\gamma_0$ è la *parte principale* dello sviluppo (la base elevata all'esponente massimo) e γ_0 si dice la *cifra significativa* della rappresentazione.

Si può quindi rappresentare ogni $\alpha > 0$ in base 2 :

$$\alpha = \sum_{j<n} 2^{\epsilon_j} = 2^{\epsilon_0} + ... + 2^{\epsilon_{n-1}}, \quad \epsilon_0 > \epsilon_1 > ... \geq \epsilon_{n-1}$$

in base 10, eccetera. Risulta molto utile per le operazioni con ordinali la *rappresentazione normale*, cioè in base ω :

$$\alpha = \sum_{j<n} \omega^{\epsilon_j} m_j = \omega^{\epsilon_0} m_0 + ... + \omega^{\epsilon_{n-1}} m_{n-1},$$

con $m_j \in \omega$ e $\epsilon_0 > \epsilon_1 > ... \geq \epsilon_{n-1}$.

Esempio 2.1. Se $\alpha = \omega + 2$, le sue rappresentazioni in base 2 e normale sono :

$$\omega + 2 = 2^{\omega} \times 1 + 2^1 \times 1 = \omega^1 \times 1 + \omega^0 \times 2$$

con resti $\rho_2 = 2$ e $\rho_\omega = 2$ e parti principali 2^ω e ω.

Si ha :

Proposizione 2.3.7. *α è un ordinale successore se e solo se nella sua rappresentazione normale $\epsilon_{n-1} = 0$.*

Dimostrazione. Vedi [Abian 1972, loc. cit., Lemma 22] □

Si hanno inoltre le seguenti regole di semplificazione per la rappresentazione normale :
siano $\epsilon, \epsilon_1, \epsilon_2, \delta$ numeri ordinali > 0 e $c, m, j, n \in \omega, n > 0$,

$$n\omega^\epsilon = \omega^\epsilon$$

$$\omega^{\epsilon_1} m + \omega^{\epsilon_2} n = \omega^{\epsilon_2} n, \quad \epsilon_1 < \epsilon_2$$

$$\omega^\epsilon m + \omega^\epsilon j = \omega^\epsilon (m + j)$$

$$(\omega^\epsilon c + \rho) n = \omega^\epsilon c n + \rho$$

$$(\omega^\epsilon c + \rho) \omega^\delta m = \omega^{\epsilon+\delta} m$$

$$(\omega^\epsilon c + \rho)^\delta = \omega^{\epsilon \times \delta}$$

Osservazione 7. Le ultime tre equazioni si riferiscono ad una rappresentazione normale con resto ρ e valgono anche se $\epsilon = 0$. In particolare l'ultima è una rappresentazione normale di un ordinale transfinito.

Capitolo 3

Numeri cardinali

3.1 Premesse

Definizione 3.1. Classi equipotenti :
Due classi X e Y sono **equipotenti** (o hanno la stessa potenza : $X \sim Y$) se e solo se esiste una funzione (costruzione) biunivoca F con dominio X e codominio Y, cioè volendo specificare F
$X \sim_F Y \Leftrightarrow (Fnz(F) \wedge Un_1(F) \wedge \mathfrak{D}(F) = X \wedge \mathfrak{R}(F) = Y)$.

Evidentemente si ha :

Proposizione 3.1.1.

1) $X \sim_{Id} X$

2) $X \sim_F Y \Rightarrow Y \sim_{\breve{F}} X$

3) $X \sim_F Y \wedge Y \sim_G Z \Rightarrow X \sim_H Z$, *dove* H *è la* composizione *di* F *e* G.

Si definisce la classe X^Y di tutti gli insiemi che sono funzioni da Y in X :

Definizione 3.2. $X^Y = \{u; Fnz(u) \wedge \mathfrak{D}(u) = Y \wedge \mathfrak{R}(u) \subseteq X\}$

Osservazione 8. Se Y è una classe propria, $X^Y = \emptyset$.

Si ricordi che $2 = \{0, 1\}$, allora per ogni insieme x, $\mathcal{P}(x) \sim 2^x$: per ogni $u \subseteq x$ la funzione caratteristica C_u è la funzione con dominio x tale che

$C_u(y) = 0$ se $y \in u$ e $C_u(y) = 1$ se $y \notin u$.
Sia F la funzione su $\mathcal{P}(x)$ che rappresenta u in C_u, allora $\mathcal{P}(x) \sim_F 2^x$.

Si può inoltre definire un **ordine parziale** $\leq_c$ sulle classi tale che, intuitivamente, $X \leq_c Y$ se X ha lo stesso numero di elementi di Y oppure ne ha un numero minore :

Definizione 3.3.
- $X \leq_c Y$ se e solo se X è equipotente ad una sottoclasse di Y, cioè $X \leq_c Y \Leftrightarrow \exists Y_1(Y_1 \subseteq Y \wedge X \sim Y_1)$.
- $X <_c Y \Leftrightarrow (X \leq_c Y \wedge X \not\sim Y)$,
  Si dice che X ha potenza minore a quella di Y.

Proposizione 3.1.2. *Date le classi X, Y e Z :*

1) $X \leq_c X$

2) $X \leq_c Y \wedge Y \leq_c Z \Rightarrow X \leq_c Z$

3) ***Teorema di Schröder-Bernstein** :*
$X \leq_c Y \wedge Y \leq_c X \Rightarrow X \sim Y$

Dimostrazione. 1) Ovvio.

2) Supponiamo che $X \leq_c Y$ cioè $X \sim_F Y_1 \wedge Y_1 \subseteq Y$ e che $Y \leq_c Z$ cioè $Y \sim_G Z_1 \wedge Z_1 \subseteq Z$. Sia H la composizione di F e G, allora $X \sim_H Z_1$ da cui segue che $X \leq_c Z$.

3) Esistono molte dimostrazioni di questo teorema, la seguente è stata proposta da Hellman nel 1961 [Mendelson 1972, Cap.4 §3] :
Si premetta un lemma :

Lemma 3.1.3. *Siano $X \cap Y = \emptyset$, $X \cap Z = \emptyset$, $Y \cap Z = \emptyset$ e sia $X \sim_F X \cup Y \cup Z$. Allora esiste una funzione G tale che $X \sim_G X \cup Y$.*

Ora, per dimostrare il teorema supponiamo $X \sim_F Y_1 \wedge Y_1 \subseteq Y$ e
$Y \sim_G X_1 \wedge X_1 \subseteq X$. Sia $A = G[Y_1]$, $Y_1 \subseteq X_1 \subseteq X$.

Allora $A \cap (X_1 \setminus A) = \emptyset$, $A \cap (X \setminus X_1) = \emptyset$ e $(X \setminus X_1) \cap (X_1 \setminus A) = \emptyset$, quindi $X = (X \setminus X_1) \cup (X_1 \setminus A) \cup A$ e $X \sim_H A$, con H composizione di F e G. Allora vale anche $A \sim_{\breve{H}} X$.
Così per il lemma esiste una funzione biunivoca D tale che $A \sim_D X_1$, (visto che $(X_1 \setminus A) \cup A = X_1$).
Sia T la composizione di H, D e $\breve{G}$, allora $X \sim_T Y$ dal momento che $X \sim_H A$, $A \sim_D X_1$ e $X_1 \sim_{\breve{G}} Y$. $\square$

Teorema 3.1.4. ***Teorema di Cantor*** *:*
$\forall x(x <_c \mathcal{P}(x))$*; equivalentemente* $\forall x(x <_c 2^x)$.

Dimostrazione. 1) Sia F una funzione con dominio x tale che $F(u) = \{u\}$ per ogni $u \in x$. Allora $F[x] \subseteq \mathcal{P}(x)$ e F è biunivoca. Quindi $x \leq_c \mathcal{P}(x)$.
2) Si deve dimostrare che $x \not\sim \mathcal{P}(x)$.
Sia per assurdo $x \sim_G \mathcal{P}(x)$ e sia $y = \{u \in x; u \notin G(u)\}$.
Allora $y \in \mathcal{P}(x)$ ed esiste un unico $z \in x$ tale che $G(z) = y$.
Ora $\forall u(u \in y \Leftrightarrow u \in x \wedge u \notin G(u))$, allora $\forall u(u \in G(z) \Leftrightarrow u \in x \wedge u \notin G(u))$.
Quindi $z \in G(z) \Leftrightarrow z \in x \wedge z \notin G(z)$.
Dal momento che $z \in x$ si ha che $z \in G(z) \Leftrightarrow z \notin G(z)$, assurdo. $\square$

La relazione di equipotenza $\sim$ ha tutte le proprietà di una relazione di equivalenza, allora si può eseguire una partizione della classe di tutti gli insiemi in classi di equivalenza rispetto a questa relazione.
La classe di equivalenza di un insieme x sarà la classe di tutti gli insiemi *equipotenti* a x.
Le classi di equivalenza sono chiamate **numeri cardinali**.
Se u è un insieme e $x = \{u\}$ allora la classe di equivalenza di x è la classe di tutti gli insiemi unitari $\{v\}$ ed è chiamata numero cardinale 1_c.
Analogamente se $u \neq v$ e $y = \{u, v\}$ allora la classe di equivalenza di y è la classe di tutti gli insiemi che contengono esattamente due elementi ed è chiamata numero cardinale 2_c.
Si nota che tutti i numeri cardinali, tranne il numero cardinale di 0 (che è $\{\emptyset\}$), sono classi proprie. Ad esempio $\mathbf{U} \sim 1_c$.

3.1.1 Insiemi Finiti e Infiniti

La relazione di equipotenza permette di definire insiemi finiti ed infiniti, [Mendelson 1972, Cap.4, §3] : per sviluppare questa parte di NBG è però pressochè indispensabile l'assioma di scelta AS. La sua necessità verrà indicata nei punti principali del seguito.
Premettiamo due importanti risultati :

Proposizione 3.1.5. *Ogni insieme ben ordinato è equipotente a qualche ordinale, cioè* $\forall x \forall R(R\ Be\ x \Rightarrow \exists \alpha(x \sim \alpha))$.

Dimostrazione. Segue dal corollario 2.1.10 essendo una similitudine una funzione biunivoca. □

Proposizione 3.1.6. *(AS) Per ogni insieme* x *esiste un ordinale equipotente a* x*, cioè* $\forall x \exists \alpha(\alpha \sim x)$.

Dimostrazione. Per il teorema di Zermelo, x può essere ben ordinato, allora per la proposizione precedente $\exists \alpha(\alpha \sim x)$. □

Gli elementi di ω sono detti *ordinali finiti* e gli elementi di $\mathbf{ON} \backslash \omega$ vengono chiamati *ordinali non finiti (transfiniti).*

Definizione 3.4. Una classe X è **finita** se e solo se è equipotente ad un ordinale finito, cioè $Fin(X) \Leftrightarrow \exists \alpha \in \omega\ (X \sim \alpha)$.

Tutti gli ordinali finiti sono insiemi e $Fin(X) \wedge X \sim Y \Rightarrow Fin(Y)$. Evidentemente, per l'assioma di rimpiazzamento, $Fin(X) \Rightarrow M(X)$.

Proposizione 3.1.7.

1) $\forall \alpha(\alpha \in \boldsymbol{ON} \setminus \omega \Rightarrow \alpha \sim S(\alpha))$

2) Nessun ordinale finito è equipotente a nessun altro ordinale, cioè $\forall \alpha \in \omega\ \forall \beta\ (\alpha \neq \beta \Rightarrow \alpha \nsim \beta)$.
Quindi un insieme finito è equipotente ad esattamente un ordinale finito.

3) *Nessun ordinale finito è equipotente ad un sottoinsieme proprio di sè stesso, cioè* $\forall\alpha \in \omega\ \forall x\ (x \subset \alpha \Rightarrow \alpha \not\sim x)$.

Dimostrazione. 1) Sia $\alpha \in \mathbf{ON} \setminus \omega$. Sia f una funzione con dominio $S(\alpha)$ tale che : $f(\delta) = S(\delta)$ se $\delta \in \omega$; $f(\delta) = \delta$ se $\delta \notin \omega$ e $\delta \neq \alpha$; $f(\alpha) = 0$. Allora $S(\alpha) \sim_f \alpha$.

2) Sia per assurdo α l'ordinale minimo tale che $\alpha \in \omega$ ed esista un $\beta \neq \alpha$ tale che $\alpha \sim_f \beta$. Allora $\alpha < \beta$, altrimenti β sarebbe minore di α e quindi equipotente a qualche ordinale $\neq \beta$.
Se $\alpha = 0$, allora $f = 0$ e $\beta = 0$ in contraddizione con $\alpha \neq \beta$.
Perciò $\alpha \neq 0$ e visto che $\alpha \in \omega$ allora $\alpha = S(\delta)$ per qualche $\delta \in \omega$.
Non è restrittivo supporre $\beta = S(\gamma)$ per qualche γ : infatti se $\beta \in \omega$ allora $\beta \neq 0$ e se $\beta \notin \omega$, allora, per 1) $\beta \sim S(\beta)$ e si assume $S(\beta)$ al posto di β. Allora $S(\delta) = \alpha \sim_f S(\gamma)$ e $\delta \neq \gamma$ visto che $\alpha \neq \beta$.
Sono possibili due casi :
Caso 1 : $f(\delta) = \gamma$, allora $\delta \sim_{f \restriction \delta} \gamma$.
Caso 2 : $f(\delta) \neq \gamma$, allora esiste qualche $\mu \in \delta$ tale che $f(\mu) = \gamma$.
Sia $h = ((f \restriction \delta) \setminus \{(\mu;\gamma)\}) \cup \{(\mu; f(\delta))\}$, cioè sia $h(\tau) = f(\tau)$ se $\tau \notin \{\delta, \mu\}$ e $h(\mu) = f(\delta)$, allora $\delta \sim_h \gamma$.
In entrambi i casi δ è un ordinale finito minore di α che è equipotente ad un ordinale differente γ, assurdo per la minimalità di α.

3) Sia per assurdo $\beta \in \omega \wedge x \subset \beta \wedge \beta \sim x$ per qualche β e sia α il minimo di tali β. Evidentemente $\alpha \neq 0$, allora $\alpha = S(\gamma)$ per qualche γ.
Allora come in 2) si dimostra che γ è equipotente ad un sottoinsieme proprio di sè stesso, in contraddizione con la minimalità di α. □

Definizione 3.5. Una classe si dice **Dedekind-infinita** se e solo se è equipotente ad un suo sottoinsieme proprio; se questo non accade, si dice **Dedekind-finita**.

Da 3) della proposizione precedente segue che un *insieme* finito non può essere Dedekind-infinito.
Si ha :

Proposizione 3.1.8.

1) $Fin(x) \wedge y \subseteq x \Rightarrow Fin(y)$

2) $Fin(x) \wedge Fin(y) \Rightarrow Fin(x \cup y)$

3) *Ogni insieme finito è Dedekind-finito.*
(Per dimostrare l'inverso è necessario AS).

Dimostrazione. 1) Si supponga $Fin(x) \wedge y \subseteq x$, allora $x \sim_f \alpha$, con $\alpha \in \omega$.
Sia $g = (f \restriction y)$ e $z = g[y] \subseteq \alpha$.
z è un insieme di ordinali perciò è ben ordinato, allora per il corollario 2.1.10, esiste un ordinale β tale che z è simile a β. Allora $z \sim \beta$ e $\beta \leq_c \alpha$. Ora $\beta \sim \alpha$ implica $\beta = \alpha$ e $\beta <_c \alpha$ implica $\beta \sim f[\beta] \subset \alpha$, allora $f[\beta] = \beta \in \alpha$ e poichè $\alpha \in \omega$ allora $\beta \in \omega$.
Visto che $z \sim_g y$ segue $Fin(y)$.

2) Sia $Z = \{\alpha \in \omega; \forall x \forall y \forall f\ (x \sim_f \alpha \wedge Fin(y) \Rightarrow Fin(x \cup y))\}$.
Si deve dimostrare che $Z = \omega$.
Intanto $\emptyset \in Z$ dato che se $x \sim \emptyset$ allora $x = \emptyset$ e $x \cup y = y$.
Si supponga $\alpha \in Z$, $x \sim_f S(\alpha)$ e $Fin(y)$. Sia $f(w) = \alpha$ e $x_1 = x \setminus \{w\}$.
Allora $x_1 \sim \alpha$ e poichè $\alpha \in Z$ vale $Fin(x_1 \cup y)$. Ma $x \cup y = (x_1 \cup y) \cup \{w\}$.
Quindi $Fin(x \cup y)$, infatti $\forall v \forall v_1 (Fin(v) \Rightarrow Fin(v \cup \{v_1\}))$, allora $S(\alpha) \in Z$ e per la proposizione 2.1.12, $Z = \omega$.

3) Sia x un insieme finito, allora x è equipotente ad un unico ordinale finito α. Per dalla proposizione 3.1.7, 3), α non è equipotente a nessun suo sottoinsieme proprio, allora per definizione x è Dedekind-finito. □

Definizione 3.6.

- X è **infinita** : $Inf(X) \Leftrightarrow \neg Fin(X)$

- X è **numerabile** : $Num(X) \Leftrightarrow X \sim \omega$

Evidentemente $Num(X) \Rightarrow M(X)$, inoltre $Inf(X) \wedge X \sim Y \Rightarrow Inf(Y)$ e $Num(X) \wedge X \sim Y \Rightarrow Num(Y)$.
Si noti che ω è infinito poichè $Inf(\omega) \Leftrightarrow \neg Fin(\omega) \Leftrightarrow \nexists \alpha \in \omega(\omega \sim \alpha) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \omega \notin \omega$: quindi $Num(X) \Rightarrow Inf(X)$.

Proposizione 3.1.9.

1) $Inf(X) \wedge X \subseteq Y \Rightarrow Inf(Y)$

2) $Inf(X) \Leftrightarrow Inf(X \cup \{y\})$

3) Ogni classe Dedekind-infinita è infinita.

Dimostrazione. 1) Segue da 1) della proposizione precedente.

2) Per 1) $Inf(X) \Rightarrow Inf(X \cup \{y\})$.
Per la 2) della proposizione precedente $Inf(X \cup \{y\}) \Rightarrow Inf(X)$.

3) Segue da 3) della proposizione precedente. □

Proposizione 3.1.10. $Num(v) \wedge z \subseteq v \Rightarrow (Num(z) \vee Fin(z))$

Dimostrazione. Basta dimostrare che $z \subseteq \omega \Rightarrow (Num(z) \vee Fin(z))$.
Sia per assurdo $z \subseteq \omega \wedge \neg Fin(z)$, allora per ogni $\alpha \in z$ esiste $\beta \in z$ con $\alpha < \beta$, (altrimenti $z \subseteq S(\alpha)$ e poichè $Fin(S(\alpha))$ allora $Fin(z)$).
Sia f una funzione tale che per ogni $\alpha \in \omega$, $f(\alpha)$ è il minimo ordinale β in z con $\alpha < \beta$. Allora per ricorsione transfinita esiste una funzione g con dominio ω tale che $g(0)$ è l'ordinale minimo in z e, per ogni $\gamma \in \omega$, $g(S(\gamma))$ è l'ordinale minimo $\beta \in z$ con $\beta > g(\gamma)$.
Evidentemente $\mathfrak{D}(g) = \omega$ e $g[\omega] \subseteq z$.
Allora $g[\omega] = z$, infatti se $z \setminus g[\omega] \neq \emptyset$, δ è l'ordinale minimo in $z \setminus g[\omega]$ e τ è l'ordinale minimo in $g[\omega]$ con $\tau > \delta$, allora $\tau = g(\sigma)$ per qualche $\sigma \in \omega$.
Poichè $\delta < \tau$ allora $\sigma \neq 0$ e $\sigma = S(\mu)$ per qualche $\mu \in \omega$.
Allora $\tau = g(\sigma)$ è l'ordinale minimo in z che sia maggiore di $g(\mu)$, ma $\delta > g(\mu)$, visto che τ è l'ordinale minimo in $g(\omega)$ che è maggiore di δ.
Allora $\tau = \sigma$, contraddizione. □

Proposizione 3.1.11.

1) $\omega \times \omega \sim \omega$

2) Se X *e* Y *contengono entrambi almeno due elementi, allora* $X \cup Y \leq_c X \times Y$

3) $Num(x) \wedge Num(y) \Rightarrow Num(x \cup y)$

Dimostrazione. 1) Sia f una funzione con dominio ω tale che $f(\alpha) = (\alpha; 0)$ per ogni $\alpha \in \omega$. f è una funzione biunivoca da ω ad un sottoinsieme di $\omega \times \omega$, perciò $\omega \leq_c \omega \times \omega$.
Inversamente sia g una funzione con dominio $\omega \times \omega$ tale che $g(\alpha; \beta) = 2^\alpha \times_0 3^\beta$ per ogni $(\alpha; \beta) \in \omega \times \omega$. g è una funzione biunivoca da $\omega \times \omega$ ad un sottoinsieme di ω, allora $\omega \times \omega \leq_c \omega$.
Quindi per il teorema di Schröder-Bernstein $\omega \times \omega \sim \omega$.

2) Siano $a_1 \in X$, $a_2 \in X$, $a_1 \neq a_2$ e $b_1 \in Y$, $b_2 \in Y$, $b_1 \neq b_2$.
Sia f una funzione tale che

$$f(x) = \begin{cases} (x; b_1) & \text{se } x \in X \\ (a_1; x) & \text{se } x \in Y \setminus X \quad \text{e} \quad x \neq b_1 \\ (a_2; b_2) & \text{se } x = b_1 \quad \text{e} \quad x \in Y \setminus X \end{cases}$$

f è una funzione biunivoca con dominio $X \cup Y$ e codominio un sottoinsieme di $X \times Y$, quindi $X \cup Y \leq_c X \times Y$.

3) Si supponga $Num(x)$ e $Num(y)$, x e y contengono entrambi almeno due elementi, allora per 2) $x \cup y \leq_c x \times y$. Ma $x \sim \omega$ e $y \sim \omega$, allora $x \times y \sim \omega \times \omega$ e quindi $x \cup y \leq_c \omega \times \omega \sim \omega$.
Per la proposizione precedente o $Num(x \cup y)$ o $Fin(x \cup y)$, ma $x \subseteq x \cup y$ e $Num(x)$, quindi $\neg Fin(x \cup y)$. □

Conseguenze dell'assioma di scelta AS :

Proposizione 3.1.12. *(AS)*

1) *Ogni insieme infinito ha un sottoinsieme numerabile.*

2) *Ogni insieme infinito è Dedekind-infinito, (quindi ogni insieme Dedekind-finito è finito).*

3) *Se x è un insieme numerabile i cui elementi sono insiemi numerabili, allora $\bigcup x$ è numerabile.*

Dimostrazione. 1) Sia x un insieme infinito. x è equipotente a qualche ordinale α, che risulta allora anch'esso infinito.
Quindi $\omega \leq \alpha$, allora ω è equipotente a qualche sottoinsieme di x.

2) Sia x un insieme infinito. Per 1) esiste $y \subseteq x$ numerabile, con $y \sim_f \omega$.
Sia g una funzione su y tale che $g(u) = u$ se $u \in y \setminus x$ e $g(u) = \breve{f}(S(f(u))$ se $u \in x$. g è una corrispondenza biunivoca di x con y, allora x è equipotente ad un suo sottoinsieme proprio e quindi è Dedekind-infinito.

3) Sia x un insieme numerabile di insiemi numerabili.
Per ogni $u \in x$ AS permette di selezionare una g tale che $u \sim_g \omega$. Sia h una corrispondenza biunivoca tra ω e x.
Si definisce una funzione F su $\bigcup x$ nel modo seguente : sia $y \in \bigcup x$ e sia n il più piccolo elemento di ω tale che $y \in h(n)$.
Ora $h(n) \in x$, allora $g(h(n))$ è una corrispondenza biunivoca tra $h(n)$ e ω. Sia $F(y) = (n; g(h(n))(y))$, allora F è una funzione biunivoca con dominio $\bigcup x$ e codominio un sottoinsieme di $\omega \times \omega$.
Quindi $\bigcup x \leq_c \omega \times \omega$, ma $\omega \times \omega \sim \omega$, allora $\bigcup x \leq_c \omega$.
Se $v \in x$, allora $v \subseteq \bigcup x$ e $v \sim \omega$ e quindi $\omega \leq_c \bigcup x$ e per il teorema di Schröder-Bernstein $\bigcup x \sim \omega$. $\square$

3.1.2 Teorema di Hartogs

La definizione di numero cardinale si basa sulle considerazioni seguenti, nelle quali sono essenziali l'assioma di scelta e la nozione di equipotenza. Nonostante ingiustamente trascurato, il teorema seguente ha possibilità di impieghi diversi nella teoria degli insiemi.

Teorema 3.1.13. ***di Hartogs, 1915 :***
Per ogni insieme x esiste un ordinale che non è equipotente a nessun sottoinsieme di x, (esiste quindi un tale ordinale minimo).

Dimostrazione. È interessante notare che il teorema può essere dimostrato senza l'assioma AS : per assurdo si supponga che ogni ordinale α sia equipotente a qualche sottoinsieme y di x, cioè $y \sim_f \alpha$ per qualche f, in particolare y è bene ordinabile.
Sia ora $\mathbf{F}$ una costruzione con dominio $\mathbf{ON}$ tale che, per ogni α, $\mathbf{F}(\alpha)$ è l'insieme u di tutte le coppie $(y; z)$ tali che $y \subseteq x$, z è un buon ordine di y e $(\alpha; \in_\alpha)$ è simile a $(y; z)$. (u è un insieme dato che $u \subseteq \mathcal{P}(x) \times \mathcal{P}(x \times x)$).
Quindi $\mathbf{F}[\mathbf{ON}] \subseteq \mathcal{P}(x) \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(x \times x))$, allora $\mathbf{F}[\mathbf{ON}]$ è un insieme e $\mathbf{ON}$ è un insieme per l'assioma di rimpiazzamento. Questo è assurdo poichè $\mathbf{ON}$ è una classe propria. $\square$

Definizione 3.7. Un ordinale α non equipotente a nessun ordinale minore viene chiamato **ordinale iniziale**.

In particolare, ogni ordinale finito è un ordinale iniziale e ω è il più piccolo ordinale iniziale infinito (cardinale transfinito).
Sia $\mathcal{H}$ la funzione che assegna ad ogni insieme x l'ordinale minimo α che non è equipotente a nessun sottoinsieme di x, allora, per ogni x, $\mathcal{H}(x)$ è un ordinale iniziale. $\mathcal{H}$ è detta *funzione di Hartogs*.

Per ricorsione transfinita esiste una costruzione $\mathbf{G}$ con dominio $\mathbf{ON}$ tale che :

$$\begin{cases} \mathbf{G}(0) = \omega \\ \mathbf{G}(S(\alpha)) = \mathcal{H}(\mathbf{G}(\alpha)) \\ \mathbf{G}(\gamma) = \bigcup \mathbf{G}[\gamma] & \text{se } \gamma \text{ è un ordinale limite.} \end{cases}$$

$\mathbf{G}$ è crescente, cioè $\alpha \in \beta \Rightarrow \mathbf{G}(\alpha) \in \mathbf{G}(\beta)$, quindi si ha :

Proposizione 3.1.14. *Se γ è un ordinale limite e per ogni $\alpha < \gamma$, $\boldsymbol{G}(\alpha)$ è un ordinale iniziale, allora anche $\bigcup \boldsymbol{G}[\gamma]$ è un ordinale iniziale.*

Dimostrazione. $\delta = \bigcup \mathbf{G}[\gamma]$ è il minimo maggiore o uguale a $\mathbf{G}[\gamma]$.
Sia, per assurdo, $\delta \sim \tau$ con $\tau < \delta$, allora esiste $\alpha < \gamma$ tale che $\tau < \mathbf{G}(\alpha)$.
Ma $\mathbf{G}(S(\alpha)) < \delta$, allora per il teorema di Schröder-Bernstein, risultando $\mathbf{G}(\alpha) \leq_c \mathbf{G}(S(\alpha))$ e $\mathbf{G}(S(\alpha)) \leq_c \delta \sim \tau \leq_c \mathbf{G}(\alpha)$, si ha
$\mathbf{G}(\alpha) \sim \mathbf{G}(S(\alpha)) = \mathcal{H}(\mathbf{G}(\alpha))$, assurdo per la definizione di $\mathcal{H}$. □

Proposizione 3.1.15. *Ogni ordinale iniziale infinito è uguale a $\boldsymbol{G}(\alpha)$ per qualche α.*

Dimostrazione. Si supponga per assurdo che non sia così, sia σ il minimo ordinale iniziale infinito non in $\mathbf{G}[\mathbf{ON}]$. Per l'assioma di rimpiazzamento, $\mathbf{G}[\mathbf{ON}]$ non è un insieme, allora esiste qualche ordinale maggiore di σ in $\mathbf{G}[\mathbf{ON}]$; sia δ tale ordinale minimo e $\delta = \mathbf{G}(\beta)$. Evidentemente $\beta \neq 0$.
Se $\beta = S(\gamma)$ per qualche γ, allora $\mathbf{G}(\gamma) < \sigma < \mathbf{G}(S(\gamma)) = \mathcal{H}(\mathbf{G}(\gamma))$, assurdo per la definizione di $\mathcal{H}$.
Se β è un ordinale limite, allora esiste $\alpha < \beta$ tale che $\sigma < \mathbf{G}(\alpha) < \mathbf{G}(\beta)$, assurdo per la definizione di β. □

Si denota $\mathbf{G}(\alpha)$ con ω_α. Allora :

- $\omega_0 = \omega$,
- $\omega_{S(\alpha)}$ è il minimo ordinale iniziale maggiore di ω_α,
- per ordinali limite λ, ω_λ è l'ordinale iniziale $\mathbf{G}(\lambda) = \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathbf{G}[\alpha]$.

Ora, per ogni α, $\omega_\alpha \geq \alpha$: allora ogni ordinale infinito α è equipotente ad un unico ordinale iniziale $\omega_\beta \leq \alpha$ e precisamente con il minimo ordinale equipotente ad α.

3.1.3 Gli ordinali e l'assioma di scelta

Molti enunciati sono stati dimostrati equivalenti ad AS, ne presentiamo alcuni :

Proposizione 3.1.16. *Le seguenti fbf sono equivalenti :*

1) ***Assioma di scelta*** *(AS)*
Per ogni insieme $y \neq \emptyset$ *esiste una funzione* $f : y \to \cup y$ *tale che per ogni* $x \in y, f(x) \in x$. *(f è detta funzione di scelta per x).*

2) ***Assioma moltiplicativo*** *(Molt)*
Se x è un insieme di insiemi non vuoti e disgiunti, allora esiste un insieme y tale che y contiene esattamente un elemento di ogni insieme di x. (y è detto insieme di scelta per x), cioè

$$\forall u \in x(u \neq \emptyset \wedge \forall v \in x(v \neq u \Rightarrow v \cap u = \emptyset)) \Rightarrow \exists y \forall u \in x(\exists! w(w \in u \cap y)).$$

3) ***Teorema di Zermelo*** *(B.O.)*
Ogni insieme è bene ordinabile,
cioè $\forall x \exists y(y\ Be\ x)$.

4) ***Legge di tricotomia*** *per la cardinalità (Tric)*
$\forall x \forall y(x \leq_c y \vee y \leq_c x)$.

5) ***Lemma di Zorn*** *(Zorn)*
Ogni insieme non vuoto e parzialmente ordinato x, in cui ogni sottoinsieme totalmente ordinato ha un elemento maggiore degli altri, ha elemento massimale,
cioè $\forall x \forall y((y\ Part\ x) \wedge \forall u \subseteq x((y\ Tot\ u) \Rightarrow \exists v \in x$
$(\forall w \in u(w = v \vee (w; v) \in y))) \Rightarrow \exists v \in x(\forall w \in x((v; w) \notin y)))$.

Dimostrazione.

- $(B.O.) \Rightarrow (Tric)$. Dati due insiemi x e y, per (B.O.) possono essere ben ordinati, allora per la proposizione 3.1.5 $x \sim \alpha$ e $y \sim \beta$ per certi ordinali α e β. Ma $\alpha \leq \beta \vee \beta \leq \alpha$, allora $x \leq_c y \vee y \leq_c x$.

- $(Tric) \Rightarrow (B.O.)$. Dato un insieme x per il teorema di Hartogs esiste un ordinale α tale che α non è equipotente a nessun sottoinsieme di x. Per (Tric) x è equipotente a qualche sottoinsieme y di α, allora trasferendo il buon ordine di y a x, x può essere ben ordinato.

- $(B.O.) \Rightarrow (Molt)$. Sia x un insieme di insiemi non vuoti disgiunti.
  Per (B.O.) esiste un buon ordine R di $\bigcup x$, esiste allora una funzione f con dominio x tale che per ogni $u \in x$, $f(u)$ è l'R-elemento minimo di $u \subseteq \bigcup x$.

- $(Molt) \Rightarrow (AS)$. Per ogni insieme x si può definire una funzione biunivoca g tale che, per ciascun sottoinsieme non vuoto u di x, $g(u) = u \times \{u\}$. Sia x_1 il codominio di g, allora x_1 è un insieme di insiemi non vuoti disgiunti e per (Molt) esiste un insieme di scelta y per x_1. Quindi se $u \neq 0$ e $u \subseteq x$, allora $u \times \{u\} \in x_1$ e così y contiene esattamente un elemento $(v; u) \in u \times \{u\}$.
  Allora la funzione f tale che $f(u) = v$ è una funzione di scelta per x.

- $(AS) \Rightarrow (Zorn)$. Sia y un ordine parziale su un insieme non vuoto x tale che ogni suo sottoinsieme totalmente ordinato da y ha un estremo superiore in x. Per AS esiste una funzione di scelta f per x.
  Sia b un elemento qualsiasi di x, per ricorsione transfinita si definisce una costruzione $\mathbf{F}$ tale che $\mathbf{F}(0) = b$ e per ogni $\alpha > 0$, $\mathbf{F}(\alpha) = f(u)$ dove u è l'insieme degli estremi superiori v in x di $\mathbf{F}[\alpha]$ tali che $v \notin \mathbf{F}[\alpha]$.
  Sia β il minimo ordinale tale che l'insieme degli estremi superiori in x di $\mathbf{F}[\beta]$, che non sono in $\mathbf{F}[\beta]$, è vuoto.
  Tale ordinale deve esistere : se no, $\mathbf{F}$ sarebbe una funzione biunivoca con dominio $\mathbf{ON}$ e codominio un sottoinsieme di x, il che implicherebbe

che **ON** è un insieme, assurdo.
Sia $g = (\mathbf{F} \restriction \beta)$: è facile verificare che g è biunivoca e se $\alpha < \gamma < \beta$, allora $(g(\alpha); g(\gamma)) \in y$. Quindi $g[\beta]$ è un sottoinsieme di x totalmente ordinato da y e per ipotesi esiste un estremo superiore w di $g[\beta]$.
Visto che l'insieme degli estremi superiori di $\mathbf{F}[\beta](= g[\beta])$ che non sono in $g[\beta]$ è vuoto, allora $w \in g[\beta]$ e w è l'unico estremo superiore di $g[\beta]$, (perchè un insieme può contenere al massimo un estremo superiore).
Quindi w è un elemento massimale, infatti se $(w; z) \in y$ e $z \in x$, allora z è un estremo superiore di $g[\beta]$, impossibile.

- $(Zorn) \Rightarrow (B.O.)$. Dato un insieme z sia X la classe di tutte le funzioni biunivoche con dominio un ordinale e codominio un sottoinsieme di z. Per il teorema di Hartogs X è un insieme. Evidentemente $0 \in X$ e X è parzialmente ordinato dalla relazione di inclusione propria $\subset$.
  Dato un qualsiasi sottoinsieme totalmente ordinato y di funzioni di X, se $f_1, f_2 \in y$, una è estensione dell'altra. Quindi l'unione di tutte le funzioni nel sottoinsieme è ancora una funzione biunivoca (da un ordinale su un sottoinsieme di z) che è un estremo superiore di y.
  Quindi, per (Zorn), X ha un elemento massimale g che è una funzione biunivoca da un ordinale α ad un sottoinsieme di z.
  g è biunivoca su z : sia per assurdo $z \setminus g[\alpha] \neq 0$ e $b \in z \setminus g[\alpha]$. Sia $f = g \cup \{(\alpha; \beta)\}$, allora $f \in X$ (f è definita su $S(\alpha)$) e $g \subset f$, in contraddizione con la minimalità di g. Perciò $g[\alpha] = z$ e $\alpha \sim_g z$. Si può trasferire per mezzo di g il buon ordine di α ad un buon ordine di z. □

3.2 I numeri ordinali come generalizzazioni dei numeri cardinali

La teoria dei numeri cardinali è semplificata se si assume l'Assioma di scelta, infatti AS implica che ogni insieme è equipotente a qualche ordinale

e perciò che ogni insieme x è equipotente ad un unico ordinale iniziale, che sarà chiamato *cardinalità* di x, (vedi definizione 3.10).
Si possono identificare i numeri cardinali con certi numeri ordinali e chiamare questi ultimi ancora numeri cardinali.

Definizione 3.8.

- Un numero ordinale α è un **numero cardinale** se e solo se è un ordinale iniziale,
  oppure, equivalentemente
- un numero ordinale α è un **numero cardinale** se e solo se per ogni ordinale β, $\alpha \sim \beta$ implica $\alpha \leq \beta$.

Osservazione 9.

1) La definizione precedente non è in conflitto con l'altra, dato che in ogni numero cardinale inteso come classe vi è un unico ordinale iniziale.
2) I numeri naturali sono tutti numeri cardinali, inoltre ogni numero ordinale finito è un numero **cardinale finito** e ω è il più piccolo **cardinale infinito (transfinito)**.

Per distinguerli dagli altri ordinali, i numeri cardinali si indicano con κ, λ, μ...

Teorema 3.2.1. *Due numeri cardinali sono uguali se e solo se sono equipotenti, cioè* $\kappa = \lambda \Leftrightarrow \kappa \sim \lambda$.

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Ovvio.
($\Leftarrow$) Sia $\kappa \sim \lambda$ allora, per definizione, $\kappa \leq \lambda$ e $\lambda \leq \kappa$ da cui segue che $\kappa = \lambda$. □

L'ordinamento tra numeri cardinali si può definire allo stesso modo che tra numeri ordinali.

Definizione 3.9. Siano κ e λ numeri cardinali,

- $\kappa < \lambda \Leftrightarrow \kappa \in \lambda$
- $\kappa \leq \lambda \Leftrightarrow (\kappa = \lambda \vee \kappa < \lambda)$

Di conseguenza vale la legge di tricotomia :

Corollario 3.2.2. *Se κ e λ sono numeri cardinali, allora vale esattamente una tra le 3 alternative*

$$\kappa = \lambda \vee \kappa < \lambda \vee \kappa > \lambda.$$

Teorema 3.2.3. *Ogni numero ordinale è equipotente ad un unico numero cardinale.*

Dimostrazione. Sia α un numero ordinale. Evidentemente α è equipotente ad un unico ordinale iniziale, che è un numero cardinale. L'unicità segue dal teorema precedente. □

Teorema 3.2.4. *Ogni insieme è equipotente ad un unico numero cardinale.*

Dimostrazione. Sia x un insieme, allora x è equipotente ad un numero ordinale α, ma per il teorema precedente α è equipotente ad un unico numero cardinale λ, allora $x \sim \lambda$ e λ è unico. □

Si può allora definire in generale la cardinalità di un *insieme* :

Definizione 3.10. (AS) Se x è un insieme qualsiasi, la sua **cardinalità** $|x|$ è l'unico numero cardinale (ordinale iniziale) equipotente a x.

Osservazione 10. 1) Dato un numero ordinale α, $|\alpha| \leq \alpha$.

2) Se κ è un numero cardinale, allora $\kappa = |\kappa|$.

Osservazione 11. Evidentemente dati due insiemi x e y :

- Se $x \sim y$ allora $|x| = |y|$
- Se $x \leq y$ allora $|x| \leq |y|$
- Se $x < y$ allora $|x| < |y|$

Risultati generali sui numeri cardinali :

Proposizione 3.2.5. *Se $\alpha \leq \beta$ allora $|\alpha| \leq |\beta|$. Quindi se $|\alpha| \leq \beta \leq \alpha$, allora $\alpha = \beta$.*

Dimostrazione. Immediata. □

Una conseguenza importante è

Proposizione 3.2.6. *Se x è un insieme di cardinali, allora $sup(x) = \bigcup_{\kappa \in x} \kappa$ è un cardinale, il minimo maggiore o uguale a tutti i $\kappa \in x$.*

Dimostrazione. Sia $\alpha = sup\ (x)$, α è un ordinale $\geq$ di ogni $\kappa \in x$, allora per la proposizione precedente $|\alpha| \geq \kappa$. Se fosse $\alpha > |\alpha|$, si avrebbe $|\alpha| \in \bigcup_{\kappa \in x} \kappa$, da cui $|\alpha| < \kappa \leq |\alpha|$ per qualche $\kappa \in x$, assurdo. Allora deve essere $\alpha = |\alpha|$. È immediato che non può esistere un cardinale $\lambda < \alpha$ che sia maggiore o uguale di ogni $\kappa \in x$. □

Proposizione 3.2.7. *Dato un ordinale α, esiste un cardinale $\kappa > \alpha$, $\forall \alpha \exists \kappa (\kappa > \alpha)$.*

In particolare :

Proposizione 3.2.8. *Dato un qualsiasi numero cardinale, ne esiste uno strettamente maggiore,*
$\forall \lambda \exists \kappa (\kappa > \lambda)$.

Si possono definire così, anche per i numeri cardinali, i concetti di numero cardinale successore e numero cardinale limite :

Definizione 3.11. Se κ è un numero cardinale, il minimo cardinale strettamente maggiore di esso è il suo **successore cardinale** (immediato) : lo si indica con κ^+.

Dato κ, la collezione dei numeri cardinali strettamente maggiori di esso è una classe propria non vuota e questo assicura l'esistenza del minimo.
I numeri naturali $\neq 0$ sono tutti successori e il successore cardinale di un numero naturale m coincide col suo successore ordinale : $S(m) = m^+$.
Se κ è transfinito $S(\kappa) \sim \kappa$ e quindi $S(\kappa) < \kappa^+$.

Definizione 3.12.
- Il numero cardinale κ si dice **cardinale successore** se $\kappa = \lambda^+$ per qualche numero cardinale λ,
- se $\kappa > \omega$ non è un cardinale successore, si dice **cardinale limite**.

Osservazione 12.
1) Le nozioni di successore e limite sono diverse nel caso di cardinali rispetto a quello degli ordinali.
2) ω, che non è un cardinale successore, non è nemmeno un cardinale limite.

Proposizione 3.2.9. *Ogni cardinale transfinito è un ordinale limite.*

Dimostrazione. Sia κ transfinito e si supponga per assurdo che non sia un ordinale limite. Allora esiste un ordinale α tale che $S(\alpha) = \kappa$.
Quindi $\alpha \sim \kappa$, ma $\alpha < \kappa$, assurdo perchè κ è transfinito. □

Proposizione 3.2.10. *Per ogni cardinale transfinito κ, $\bigcup \kappa = \kappa$.*

Dimostrazione. Poichè κ è un odinale limite, allora $\bigcup \kappa = \kappa$. □

Seguendo il simbolo datogli da Cantor, ω come primo cardinale transfinito viene indicato con $\aleph_0$, 'alef zero'.

Definizione 3.13. La *successione degli alef* è definita per ricorsione transfinita su tutti gli ordinali con

- $\aleph_0 = \omega$
- $\aleph_{S(\alpha)} = \aleph_\alpha^+$
- $\aleph_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \aleph_\beta$ se α è un ordinale limite

Proposizione 3.2.11. *Proprietà fondamentali della successione :*

1) La successione degli alef è strettamente crescente :
$\forall\alpha\forall\beta(\alpha < \beta \Rightarrow \aleph_\alpha < \aleph_\beta)$.

2) Se x è un insieme di ordinali allora $sup_{\alpha\in x}(\aleph_\alpha) = \aleph_{sup(x)}$.

3) Ogni cardinale transfinito è un ben preciso alef.

4) $\aleph_\alpha$ è un cardinale successore se e solo se α è un ordinale successore, ed è un cardinale limite se e solo se α è un ordinale limite.

*5) I numeri cardinali transfiniti costituiscono una classe propria **ALEF**; di conseguenza anche tutti i cardinali formano una classe propria **CARD**.*

Dimostrazione. 1) Per induzione transfinita su β.
Sia $X = \{\beta; \forall\alpha(\alpha < \beta \Rightarrow \aleph_\alpha < \aleph_\beta)\}$.
Evidentemente $0 \in X$. Sia $\beta \in X$, dato che $\alpha < \beta$ implica $\alpha < S(\beta)$ e che per definizione $\aleph_\beta < \aleph_{S(\beta)}$, allora $\alpha < S(\beta) \Rightarrow \aleph_\alpha < \aleph_{S(\beta)}$.
Sia $Lim(\gamma)$ e sia $\tau \in X$ per ogni $\tau < \gamma$, allora $\aleph_\tau \leq \bigcup_{\tau<\gamma} \aleph_\tau = \aleph_\gamma$ e dato che $\aleph_\alpha < \aleph_\tau$ e che $\alpha < \tau$, allora $\alpha < \gamma \Rightarrow \aleph_\alpha < \aleph_\gamma$.

2) Sia $\beta = sup_{\alpha\in x}(\alpha)$. Si deve dimostrare che $sup_{\alpha\in x}(\aleph_\alpha) = \aleph_\beta$.
Per 1), $sup_{\alpha\in x}(\aleph_\alpha) \leq \aleph_\beta$. Sono possibili due casi :
Caso 1 : β è il massimo di x, allora il risultato è immediato per 1) e per il fatto che $\beta \in x$.
Caso 2 : β non è il massimo di x, allora basta provare $sup_{\alpha\in x}(\aleph_\alpha) \geq \aleph_\beta$.
Dato che $\forall\delta < \beta\exists\gamma \in x(\delta < \gamma < \beta)$, β è un ordinale limite, allora per definizione $\aleph_\beta = sup_{\alpha<\beta}(\aleph_\alpha)$. Quindi $\aleph_\beta = sup_{\delta<\beta}(\aleph_\delta) \leq sup_{\gamma\in x}(\aleph_\gamma)$, da cui l'uguaglianza cercata.

3) ω è un alef. Sia κ un cardinale transfinito e $\kappa > \omega$. Sia x l'insieme degli ordinali α tali che $\aleph_\alpha < \kappa$: x non è vuoto, dato che $0 \in x$.
   Si ha $sup_{\alpha \in x}(\aleph_\alpha) = \aleph_\beta \leq \kappa$, se $\beta = sup(x)$.
   Se $\aleph_\beta < \kappa$, allora $\beta \in x$ e non potrebbe essere $\aleph_{S(\beta)} = \aleph_\beta^+ < \kappa$, quindi per tricotomia, $\kappa = \aleph_{S(\beta)}$. Altrimenti $\kappa = \aleph_\beta$.

4) Se α è un ordinale successore, $\aleph_\alpha$ è un cardinale successore per definizione.
   Il viceversa è immediato per la dimostrazione precedente.
   La seconda parte segue dalla prima.

5) **ALEF** è una classe propria perchè in corrispondenza biunivoca con **ON**. □

3.3 Aritmetica cardinale

L'aritmetica cardinale è molto diversa da quella ordinaria e anche da quella ordinale, anche se nel caso dei numeri naturali non c'è alcuna differenza.
Definiamo l'**addizione** $\oplus$ e la **moltiplicazione** $\otimes$ tra cardinali :

Definizione 3.14. Se κ e λ sono numeri ordinali

- $\kappa \oplus \lambda = |(\kappa \times \{0\}) \cup (\lambda \times \{1\})|$
- $\kappa \otimes \lambda = |\kappa \times \lambda|$

Si possono estendere queste due definizioni a insiemi qualunque, ma è necessario l'assioma di scelta :

Proposizione 3.3.1. *(AS) Se x e y sono insiemi qualunque*

- $|x| \oplus |y| = |(x \times \{0\}) \cup (y \times \{1\})|$
- $|x| \otimes |y| = |x \times y|$

Accenniamo alle principali proprietà di $\oplus$ e $\otimes$ rimandando alle dimostrazioni di [Kunen 1980, Cap.I §10].
Con cardinali infiniti queste operazioni hanno un risultato banale :

Teorema 3.3.2. *Se almeno uno dei due cardinali κ, λ è infinito*

- $\kappa \oplus \lambda = max\{\kappa; \lambda\}$
- $\kappa \otimes \lambda = max\{\kappa; \lambda\}$, *purchè* $\lambda \neq 0$
- *(AS) Stessa conclusione per cardinalità* $|x| = \kappa$ *e* $|y| = \lambda$ *di insiemi qualunque*

Osservazione 13.

1) A differenza delle analoghe operazioni ordinali (vedi pag. 43), le due operazioni sono commutative, associative e dotate di elemento neutro.

2) In ω coincidono con le solite operazioni.

Molto interessante è il risultanto sulle unioni :

Teorema 3.3.3. *(AS) Se* κ *è infinito e* $\mathcal{A} = \{X_\alpha; \alpha \in \kappa\}$ *con* $|X_\alpha| \leq \kappa$ *per ogni* $\alpha \in \kappa$*, allora* $|\bigcup \mathcal{A}| = |\bigcup_{\alpha<\kappa} X_\alpha| \leq \kappa$.

A parole :
Se κ è infinito, allora l'unione di una famiglia di cardinalità $\leq \kappa$ di insiemi, tutti di cardinalità $\leq \kappa$, ha ancora cardinalità $\leq \kappa$.
Il risultato sulle somme di cardinali transfiniti permette di giustificare la costruzione del successore di un alef in termini di classi-numero (seguendo Cantor) :

Definizione 3.15. $\mathbf{Z}(\aleph_\beta) = \{\alpha; \alpha \sim \aleph_\beta\}$ si dice la **classe numero** di $\aleph_\beta$, (è però un insieme) : $\mathbf{Z}(\aleph_\beta) \subseteq \aleph_{\beta+1}$.

Si ha :

Proposizione 3.3.4. *$\boldsymbol{Z}(\aleph_\beta)$ ha cardinalità* $\aleph_\beta^+ = \aleph_{\beta+1}$.

L'operazione più caratteristica dell'aritmetica cardinale, e completamente diversa da quella ordinale, è :

Definizione 3.16. Elevamento a potenza cardinale :
(AS) Se κ e λ sono cardinali, allora $\kappa^\lambda = |F(\lambda; \kappa)|$.

L'assioma di scelta è indispensabile per assicurare un buon ordinamento per $F(\lambda; \kappa)$, l'insieme delle funzioni f di dominio λ e codominio $\subseteq \kappa$.
Se $\lambda \in \omega (\lambda = n)$ allora $F(n; \kappa) \sim \kappa^n$.
Se x e y sono insiemi, valendo (AS), si ha $|x|^{|y|} = |F(y; x)|$.

Proposizione 3.3.5. *(AS) Per ogni insieme x, $|\mathcal{P}(x)| = 2^{|x|}$.*

Dimostrazione. Se $y \subseteq x$, lo si può identificare con la sua funzione caratteristica di dominio x, come visto ad inizio capitolo. □

Regole di calcolo con esponenti cardinali :

Proposizione 3.3.6. *Se κ, λ, μ sono numeri cardinali*

- $\kappa^{\lambda \oplus \mu} = \kappa^\lambda \otimes \kappa^\mu$
- $\kappa^{\lambda \otimes \mu} = (\kappa^\lambda)^\mu$

Proposizione 3.3.7. *(AS) Se x, y, z sono insiemi qualunque*

- $|x|^{|y| \oplus |z|} = |x|^{|y|} \otimes |x|^{|z|}$
- $|x|^{|y| \otimes |z|} = (|x|^{|y|})^{|z|}$

Si ha :

Corollario 3.3.8. *(AS) Se $|x|$ è infinito e $n \in \omega$, $n \neq 0$, $|x^n| = |x|$.*
(Vedi teorema 3.3.2).

Bibliografia

[Mendelson 1972] Elliot Mendelson, *Introduzione alla logica matematica.* Bollati Boringhieri, Torino 1972.

[Abian 1972] Alexander Abian, *La teoria degli insiemi e l'aritmetica transfinita.* Feltrinelli Editore, Milano 1972.

[Kunen 1980] Kenneth Kunen, *Set Theory An Introduction to Indipendence Proofs*, Studies in Logic and the Foundations of mathematics, volume 102. North-Holland Publishing Company, Amsterdam-New York-Oxford, 1980.

[Smullyan-Fitting 1996] R. M. Smullyan, M. Fitting, *Set Theory and the Continuum Problem*, Oxford Logic Guides, volume 34. Clarendon Press, Oxford 1996.

[Plazzi 2011] Piero Plazzi, Dispensa : *Teorie degli insiemi - Numeri ordinali e cardinali.*