

ALMA MATER STUDIORUM  
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BOLOGNA

---

---

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Astrofisica e Cosmologia

Dipartimento di Fisica e Astronomia

**La migrazione planetaria  
in un disco di planetesimi:  
risultati Analitici e Numerici**

ELABORATO  
FINALE

RELATORE:  
CHIAR.MO/ PROF.  
**Luca Ciotti**

CANDIDATO:  
**Federico Panichi**

XX SESSIONE  
ANNO ACCADEMICO 20XX/20YY



*A mia nonna, a mio nonno, alla mia famiglia.*



*This thesis work was done as part of  
the research activity of the  
Istituto di Radioastronomia - INAF  
and  
the Italian ALMA Regional Centre,  
in collaboration with  
Dr. Marcella Massardi.*



# Riassunto

La tesi si propone lo scopo di analizzare in dettaglio la migrazione di un pianeta all'interno di un disco protoplanetario formato da planetesimi. Tale problema è stato studiato con metodi analitici e numerici applicati a due casi limite: disco corotante, disco controrotante. Dopo una breve prefazione che descrive un semplice modello analitico per lo studio della migrazione planetaria in un disco di planetesimi che permette, anche se in modo superficiale, di comprendere molti dei risultati numerici ottenuti negli ultimi anni e nel corso di questo elaborato, si continua, all'interno del primo capitolo, presentando il problema astrofisico. Il secondo capitolo è composto da una prima parte in cui viene dato un resoconto storico sui risultati finora ottenuti dalle varie teorie proposte e le motivazioni per continuare tale ricerca. Nei risultati precedentemente trovati da altri autori è possibile ricavare la variazione del semiasse maggiore dell'orbita di un pianeta soggetto all'interazione gravitazionale con un disco composto da corpi con massa molto minore (planetesimi) con la seguente approssimazione analitica (Ida et al., 2000):

$$\frac{da}{dt} = \frac{a}{P_{planet}} \left( \frac{\pi a^2 \Sigma_{disk}}{M_*} \right) \quad (1)$$

Nella (1) si è fatto uso dei seguenti simboli per indicare:

- $a$  = semiasse maggiore dell'orbita del pianeta;
- $P_{planet}$  = periodo orbitale del pianeta;
- $\Sigma_{disk}$  = densità superficiale del disco di planetesimi;
- $M_*$  = massa della stella centrale.

Tale risultato è stato ottenuto con considerazioni qualitative ma può essere riottenuto tramite considerazioni più formali e fisicamente ragionevoli (Kirish et al., 2007). È importante sottolineare che questa semplice trattazione non contiene, in modo esplicito, la massa del pianeta.

Il secondo capitolo descrive il problema dei tre corpi ed abbiamo esaminato il caso generale (*General three body problem*: G3BP), il caso ristretto (due corpi massivi ed un terzo di massa trascurabile) ed il problema di Hill

in cui solo uno dei tre corpi è massivo mentre gli altri due hanno una massa trascurabile e non nulla. Un nuovo caso di disco protostellare è preso in esame: un disco in cui il pianeta ha un'orbita controrotante rispetto all'orbita dei planetesimi e/o del gas. Questo caso particolare può fisicamente realizzarsi a causa di differenti processi fisici (Morais and Giuppone [2012]). La differenza sostanziale tra il caso corotante e questo nuovo caso proposto è nella dimensione del *gap* che il pianeta crea all'interno di un disco di planetesimi (altresì definita *feeding zone*). Lo studio dettagliato delle proprietà della *feeding zone* consente di ricavare importanti informazioni sia sul tasso di migrazione planetaria sia sulla dinamica dei planetesimi soggetti alle varie risonanze orbitali. All'interno del *gap* infatti l'interazione risonante dei planetesimi con il pianeta genera orbite caotiche e fenomeni di scattering forte Wisdom [1980]. Lo studio dettagliato dell'eccentricità dei planetesimi e della dimensione del *gap* ha permesso di osservare come il problema dell'interazione tra planetesimi e pianeta non sia un problema simmetrico: esiste infatti un diverso "riscaldamento" dinamico dei planetesimi nei due casi corotante e controrotante. Ciò è collegato alle differenti risonanze che possono formarsi e, in ultima analisi, al diverso grado di entropia che il disco sperimenta nei due casi proposti. Tutto ciò è spiegabile attraverso lo studio della condizione di risonanza che può essere definita nel modo seguente:

$$|\Omega(r) - \Omega_p| = \frac{m}{n}\kappa(r), \quad (2)$$

dove  $\Omega_p$  è la velocità angolare del pianeta mentre  $\Omega(r)$  è la velocità angolare di un planetesimo a distanza  $r$  dal centro del disco,  $\kappa$  è la frequenza di epicyclo radiale dei planetesimi ed  $m$  ed  $n$  sono due numeri interi positivi (negativi). Non è sorprendente dunque che esista questa asimmetria nei due casi. Se infatti il disco è controrotante l'argomento del modulo nella equazione (2) è una somma e quindi può essere così grande che non esistono dei valori di  $m/n$  sufficientemente piccoli da dar luogo a risonanze costruttive efficienti (si ricorda come solo valori di  $m/n$  piccoli danno origine a risonanze importanti). Nel caso di disco corotante, invece, il modulo è effettivamente una differenza e dunque si possono osservare risonanze in posizioni differenti nel disco ( $m/n$  differenti) e molto efficienti ( $m/n$  abbastanza piccoli).

Il terzo capitolo descrive in modo approfondito i risultati di questo secondo capitolo saranno fondamentali assieme a quelli del terzo e quarto per capire come la massa del pianeta giochi un ruolo fondamentale nel calcolo della variazione del suo semiasse maggiore (B. C. Bromley [2011]). Vengono presentati due metodi analitici che tengono conto di questo parametro (la massa): la frizione dinamica (Binney [1977]; (?Popolo [2003]) e la teoria delle onde di densità (Goldreich and Tremaine [1980]; Ward [1996]). Il nostro studio è stato inoltre ampliato al caso più realistico di un disco con distribuzione di eccentricità *alla Rayleigh* (S. Ida and Makino [1993]) ma con inclinazione uguale a zero. Anche in questo caso si ha una migrazione verso



l'interno del sistema. I risultati di questa teoria sono stati poi confrontati con quelli ricavati dalle simulazioni numeriche nel capitolo conclusivo di questa tesi. Il quarto capitolo propone una teoria alternativa rispetto a quella utilizzata precedentemente per descrivere il processo di migrazione planetaria: le onde di densità. L'interazione tra le onde di densità e il conseguente trasferimento di momento angolare tra i planetesimi ed il pianeta, può farlo migrare verso zone più interne rispetto alla posizione iniziale (*inward planet migration*). Sono stati applicati i risultati di Nicholson [1999] e Rein and Papaloizou [2010] a tale problema. Fin qui la parte analitica ci ha consentito di mostrare come la differenza nella massa dei vari pianeti, la massa dei planetesimi, l'inclinazione del disco rispetto al pianeta, la differente estensione del gap nel caso corotante e controrotante giocano un ruolo fondamentale per comprendere e spiegare i risultati numerici proposti nel capitolo successivo. Il quinto capitolo descrive il codice numerico impiegato e i vari algoritmi applicati per simulare i casi di:

- disco corotante massivo e non massivo (ma comunque non autogravitante) con distribuzione in eccentricità ed inclinazione uguali a zero;
- disco controrotante massivo e non massivo (come nel caso precedente l'interazione tra planetesimi non è stata implementata) con distribuzione in eccentricità ed inclinazione uguali a zero;
- disco corotante massivo e non massivo con distribuzione in eccentricità *alla Rayleigh* e con distribuzione in inclinazione uguale a zero;
- disco controrotante massivo e non massivo con distribuzione in eccentricità *alla Rayleigh* e con distribuzione in inclinazione uguale a zero.

Vengono descritti i tre algoritmi utilizzati per integrare le equazioni del moto nel caso di un N-PR3BP (N problemi a tre corpi planare ristretto: in cui viene posta uguale a zero la massa dei planetesimi) e N-PG3BP (N problemi a tre corpi planare generale: in cui vengono inserite anche le masse dei planetesimi ma viene inibita l'interazione tra essi). Relativamente al codice numerico utilizzato abbiamo sviluppato, grazie anche alla collaborazione di D. Kaufmann, M. Lewis e H. Levison (gli sviluppatori rispettivamente di *SWIFTER*, *SWIFT* e *SwiftVis*) un generatore di condizioni iniziali realizzato in *JAVA*. Per alcune delle simulazioni qui riportate è stato inoltre utilizzata una versione *OPEN – MP* del software *SWIFTER* realizzata da D. Milton e attualmente non disponibile online. Grazie alla versatilità del generatore di condizioni iniziali è stato possibile utilizzarlo anche per questo secondo codice numerico. Il sesto capitolo è un'analisi dettagliata dei risultati presentati in tutto l'elaborato e si propone lo scopo, utilizzando i risultati analitici descritti nei capitoli precedenti, di spiegare in modo esaustivo le varie caratteristiche ricavate dalle simulazioni numeriche effettuate. E' proposta inoltre una simulazione di osservabilità con l'interferometro Atacama

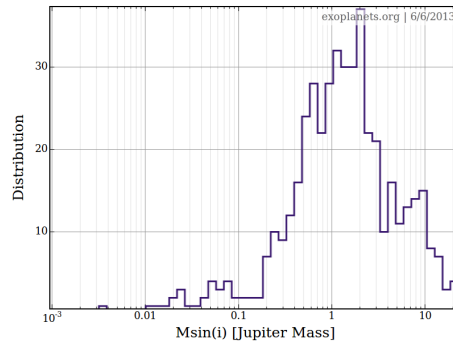
Large Millimeter Array (ALMA). E' stato possibile determinare se e quali sono i parametri fondamentali per caratterizzare, descrivere e differenziare i dischi protoplanetari simulati numericamente in questa tesi.

Uno dei risultati di questa tesi è quello di porre dei vincoli sul tempo di migrazione di un pianeta *art:cionco*, sulla densità che un disco deve avere per generare uno spostamento radiale del pianeta elevato. Inoltre abbiamo interpretato i risultati ottenuti in questa tesi alla luce dei dati osservativi ricavabili per sistemi extrasolari con singolo pianeta. Nella figura 1 è mostrato l'istogramma del numero dei pianeti in funzione della loro massa e del loro semiasse maggiore. Abbiamo interpretato queste due distribuzioni come dovute alla differente efficienza che la migrazione planetaria genera in base alla massa del pianeta e alla densità superficiale del disco di planetesimi. Nel caso di pianeti giganti gassosi ( $M > 100M_{\oplus}$ ) si osserva una netta diminuzione del loro numero nell'istogramma presentato spiegabile attraverso l'efficiente migrazione radiale subita dagli stessi. Il picco di tale distribuzione è dunque spostato verso pianeti di massa terrestre che, a causa della bassa interazione con il disco, non hanno subito nel corso dell'evoluzione all'interno del disco di planetesimi variazioni significative del semiasse maggiore. Presentiamo inoltre, in figura 2, l'istogramma del numero di pianeti in funzione del semiasse maggiore. Si nota come tale curva risulti essere bimodale con due picchi ben distinti. In questo lavoro, alla luce dei risultati numerici ed analitici ottenuti, interpretiamo questo secondo risultato ipotizzando sia o alla differente densità superficiale dei vari dischi in cui si sono formati i pianeti oppure al fatto che, una volta uscito dal disco, il pianeta non continui a migrare in modo molto efficace verso l'interno del disco. Ciò permetterebbe di porre un vincolo sull'estensione interna di un disco di planetesimi ma un'analisi più approfondita è necessaria per comprendere a pieno questo fenomeno. si

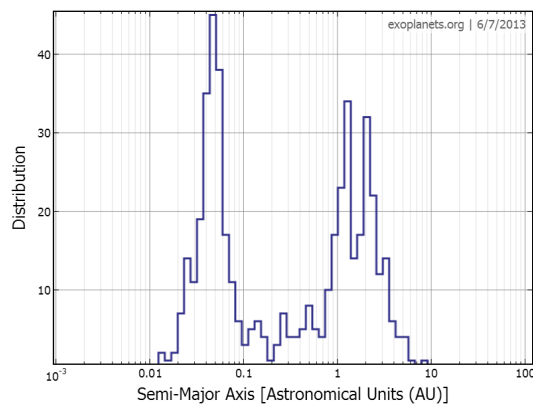
In tutte le simulazioni effettuate inoltre, quando il pianeta esce dal disco spiraleggiando verso la zona centrale, la migrazione radiale cessa. Questo potrebbe consentire di comprendere la distribuzione osservativa dei parametri orbitali dei pianeti extrasolari.

Le conclusioni più rilevanti, esposte nel capitolo sette, vengono qui brevemente elencate:

- sono stati ricavati i tempi di migrazione al variare del pianeta che consentono di osservare come l'equazione (1) non è completamente corretta nell'interpretare i risultati numerici. Al variare della massa, infatti, il tasso di migrazione osservato nelle varie simulazioni risulta essere differente;
- il parametro rilevante sembra essere il rapporto tra la massa del pianeta e la densità superficiale del disco (B. C. Bromley [2013]; B. C. Bromley [2011]);



**Fig. 1:** *Istogramma del numero dei pianeti in funzione della loro massa.* Nel grafico è presentato il sottocampione di sistemi extrasolari noti con singolo pianeta. Come si osserva il picco della distribuzione si trova a valori di masse maggiori di quella di Giove. Nel seguito della tesi si cerca di spiegare questo fatto osservativo attraverso il meccanismo fisico della migrazione planetaria arrivando a concludere che tale meccanismo dipende dalla massa del pianeta.



**Fig. 2:** *Istogramma del numero dei pianeti in funzione della loro semiasse maggiore.* Nel grafico è presentato il sottocampione di sistemi extrasolari noti con singolo pianeta. Come si osserva la distribuzione è bimodale.

- sono state calcolate le *torque* con le varie teorie proposte. Sebbene ogni teoria descriva qualitativamente molto bene alcuni degli aspetti fondamentali della migrazione planetaria, esse differiscono anche di un ordine di grandezza nel prevedere i risultati ottenuti nelle simulazioni numeriche effettuate. Indicazione che non vi è, ancora, una perfetta corrispondenza tra teoria analitica e risultati numerici (Cionco and Brunini [2002]);
- la differente inclinazione nei due casi limite proposti (corotante e controrotante), oltre che la distribuzione in velocità dei planetesimi nel disco (sia esso completamente corotante, controrotante o con distribuzione in eccentricità) è un importante parametro per lo studio della migrazione radiale di un pianeta;
- l'interferometro di nuova generazione ALMA permette, grazie alla giusta combinazione di risoluzione e sensibilità elevate, di osservare le caratteristiche fondamentali (dimensione del gap e/o presenza di planetesimi in orbite risonanti) per dischi protoplanetari a distanze di circa 70 *pc* o con dimensioni fisiche di circa 20 *A.U.* (Wolf and D'Alessio [2005]).

# Contents

<b>1</b>	<b>Prefazione</b>	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>Problema dei tre corpi</b>	<b>21</b>
2.1	Introduzione . . . . .	21
2.2	Prologo ed epilogo . . . . .	22
2.3	Problema di Hill . . . . .	26
2.3.1	La costante di Jacobi come misura della precisione di un algoritmo . . . . .	41
2.4	<i>Feeding Zone</i> . . . . .	44
2.5	<i>Chaotic Zone</i> . . . . .	47
2.5.1	L'esponente caratteristico di Lyapunov . . . . .	51
2.6	sovrapposizione di risonanze . . . . .	54
<b>3</b>	<b>Interazioni a due corpi: la frizione dinamica</b>	<b>65</b>
3.1	Preliminari . . . . .	66
3.1.1	Eccentricità ed inclinazione del disco . . . . .	67
3.2	Caso isotropo, omogeneo e non omogeneo, senza spettro di massa . . . . .	69
3.2.1	profilo isoterma singolare . . . . .	72
3.3	Caso non isotropo, omogeneo e non omogeneo, senza spettro di massa . . . . .	75
3.3.1	Equipartizione . . . . .	76
3.3.2	Spettro di massa esponenziale . . . . .	77
3.4	caso anisotropo, non omogeneo, senza spettro di massa . . . . .	78
3.5	Il logaritmo di Coulomb . . . . .	82
<b>4</b>	<b>Interazione a più corpi</b>	<b>85</b>
4.1	Approssimazione epiciclica . . . . .	85
4.1.1	Teoria delle Perturbazioni . . . . .	88
4.1.2	Risonanze . . . . .	91
4.1.3	Parametri fondamentali . . . . .	93
4.2	Interazione a tre corpi: la migrazione orbitale . . . . .	94
4.3	Interazione <i>multi</i> -corpi: la migrazione radiale . . . . .	98

<b>5</b>	<b>Il codice numerico: SWIFTER</b>	<b>105</b>
5.1	Il codice . . . . .	105
5.2	Algoritmo Simplettico . . . . .	107
5.3	Gli algoritmi: WHM vs. RMVS . . . . .	108
5.3.1	WHM . . . . .	108
5.3.2	RMVS . . . . .	111
5.3.3	syMBA . . . . .	112
<b>6</b>	<b>Risultati Numerici</b>	<b>115</b>
6.1	Problema dei tre corpi circolare ristretto . . . . .	115
6.1.1	Il gap nel caso corotante e controrotante . . . . .	116
6.1.2	Il riscaldamento del disco . . . . .	120
6.2	Problema dei tre corpi circolare generale . . . . .	123
6.2.1	La migrazione del pianeta: disco corotante . . . . .	126
6.2.2	La migrazione del pianeta: disco controrotante . . . . .	127
6.3	Simulazioni di osservazioni ALMA . . . . .	127
6.3.1	CASA e OST: i software di simulazione ALMA . . . . .	132
6.3.2	Risultati . . . . .	135
<b>7</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>161</b>
7.1	Il problema dei tre corpi ristretto: la dispersione di velocità, l'apertura del gap e le risonanze orbitali . . . . .	162
7.2	La migrazione . . . . .	166
7.3	ALMA . . . . .	171
7.4	Sviluppi futuri . . . . .	172
<b>A</b>	<b>Il generatore di condizioni iniziali</b>	<b>179</b>
<b>B</b>	<b>Le routine numeriche</b>	<b>183</b>
B.0.1	L'integrazione del problema dei tre corpi ristretto . . . . .	183
B.0.2	L'esponente di Lyapunov . . . . .	188
B.0.3	L'ampiezza delle risonanze di primo e second'ordine . . . . .	191
<b>C</b>	<b>Lo script CASA</b>	<b>195</b>

# Chapter 1

## Prefazione

In questo capitolo presentiamo un semplice modello di migrazione planetaria in un disco di planetesimi. Si supponga innanzitutto che la massa del disco di planetesimi sia definita come segue:

$$M_{disk} = 4\pi\Sigma_0(r_{out}^{1/2} - r_{in}^{1/2}), \quad (1.1)$$

dove  $\Sigma_0$  è la densità superficiale ed  $r_{in}$  e  $r_{out}$  sono rispettivamente il raggio interno ed esterno del disco. Valori caratteristici per i parametri dell'equazione precedente sono:

- $\Sigma_0 = 30 \text{ gr/cm}^2$ ,
- $r_{out} = 50 \text{ A.U.}$ ,
- $r_{in} = 20 \text{ A.U.}$  .

Se ne ricava una massa totale di  $40 M_{\oplus}$ . Il raggio interno per tale disco di planetesimi e' stato così definito utilizzando le indicazioni delle simulazioni numeriche in Clarke and Lodato [2009].

Si osservi però come la massa stimata, ad oggi, per la Kupier Belt risulti essere di sole  $0.4 M_{\oplus}$ . Dunque devono esistere dei fenomeni che hanno rimosso la gran parte dei planetesimi. Tali fenomeni possono essere o di *accrescimento in situ* (formazione di planetesimi e conseguentemente protopianeti) oppure fenomeni di *scattering eiettivo* (effetto fionda che ha portato su orbite lontane tali particelle).

Poiché ancora oggi è presente una vasta quantità di planetesimi diffusi a varie orbite nel sistema solare (fascia degli asteroidi  $d=2.7 \text{ AU}$ ; Kupier belt  $d=30\text{-}50 \text{ AU}$ ; disco diffuso  $d=50\text{-}100 \text{ AU}$ ) ci si aspetta che tale riserva di materiale e momento angolare abbia interagito con tutto il Sistema Solare per svariate centinaia di milioni di anni se non addirittura per miliardi di anni. Si prenda poi un pianeta di massa  $M_p$  che orbiti all'interno di questo disco. L'interazione tra il pianeta ed il disco genera dei fenomeni di scattering

dei planetesimi ed alcuni di essi si andranno a posizionare a distanze minori rispetto quella iniziale mentre altri a distanze maggiori.

osserveremo come la teoria della *Frizione Dinamica* permette di descrivere in modo accurato tale processo. Poiché inoltre tale scattering risulta in uno scambio di momento angolare ed energia tra pianeta e disco, tale teoria permette di descrivere anche il processo di *migrazione radiale* del pianeta stesso. Si definisce la massa eiettata di tale disco come  $\delta m$ . La migrazione planetaria può essere semplicemente descritta per effetto dell'equilibrio tra le forze in gioco. Un pianeta, infatti, descrive, in prima approssimazione, un'orbita circolare poiché esiste un equilibrio tra la forza centrifuga (che lo spinge verso l'esterno), che dipende dalla velocità di rivoluzione dello stesso, e la forza gravitazionale (che lo spinge verso l'interno) dovuta all'attrazione tra il pianeta e la stella centrale. Quando a causa di interazioni gravitazionali (accrescimento di massa, scattering gravitazionale, frizione dinamica. . .) l'energia cinetica del pianeta varia deve, conseguentemente, variare il potenziale gravitazionale per ristabilire un equilibrio del sistema. Poiché il potenziale gravitazionale in quest'esempio intuitivo è funzione *solo* della distanza tra il corpo centrale ed il pianeta, allora per ristabilire un equilibrio tra le due forze, il pianeta deve variare la sua orbita e quindi migrare o verso l'esterno (l'energia cinetica diminuisce) o verso l'interno (l'energia cinetica aumenta).

Seguendo invece un ragionamento più matematico ma comunque approssimativo, il cambiamento di semiasse maggiore è proporzionale alla massa con cui interagisce il pianeta.

Approssimativamente:

$$\frac{\delta m}{M_p} \sim \frac{\delta a}{a_p}, \quad (1.2)$$

che quindi può essere riscritto come:

$$\delta a \sim \frac{\delta m}{M_p} a_p. \quad (1.3)$$

E' possibile già fare alcune osservazioni su tale risultato. Se infatti la massa del pianeta è molto maggiore rispetto alla massa del disco o analogamente la massa del disco è trascurabile allora la variazione del semiasse maggiore dell'orbita del pianeta stesso risulta trascurabile:

$$\delta a \xrightarrow{M_p \rightarrow \infty} 0 \quad (1.4)$$

Dunque un disco deve avere una certa massa caratteristica o analogamente il pianeta non deve essere così massivo:  $M_p \leq M_{disk}$  (Armitage [2010]). Da questa osservazione segue immediatamente che per avere una migrazione radiale consistente il pianeta deve avere una massa minore di  $40 M_{\oplus}$  (massa del disco di planetesimi). Ciò implica che per masse molto maggiori della suddetta (si pensi a pianeti con masse uguali o maggiori di



quelle gioviane  $M_J = 320 M_\oplus$ ) l'equazione precedente e/o la massa stimata del disco vadano ricalcolate.

E' anche utile osservare come il senso della migrazione di un pianeta (outward o inward) sia caratterizzato da un elevato numero di fattori fisici e numerici:

1. la composizione del disco in gas e planetesimi (Ward [1996]; Popolo [2003]; C. C. Capobianco and Levison [2010]);
2. la posizione del pianeta: se si trova a distanze dalla stella centrale minori o maggiori rispetto il raggio minimo del disco o se al suo interno;
3. la presenza di altri pianeti all'interno del disco che possano causare fenomeni di risonanza orbitale;
4. Il fatto che il disco sia autogravitante (W.K.M. Rice and Bonnell [2002]);
5. Il numero di planetesimi e la loro massa (D. R. Kirsh and Levison [2008], A. Brunini [2007]).

Continuando poi con il calcolo precedente, si supponga che si abbia interazione *solo* tra planetesimi e pianeta e che avvenga all'incirca all'interno della seguente zona (*raggio di Hill o scattering zone*):

$$\Delta r \approx \left(3 \frac{M_p}{M_*}\right)^{\frac{1}{3}} a. \quad (1.5)$$

La massa di planetesimi entro questo raggio è dunque:

$$\Delta m \approx a \Sigma_0 \Delta r, \quad (1.6)$$

da cui è possibile ricavare la variazione del momento angolare per tutti i planetesimi a seguito dell'interazione con il pianeta:

$$\Delta J \approx \Delta m \left. \frac{dl}{dr} \right|_a \Delta r. \quad (1.7)$$

Si ricordi che il momento angolare specifico ( $l$ ) per un'orbita circolare a distanza  $r$  dalla stella centrale ( $M_*$ ) risulta essere:

$$l = \sqrt{GM_* r}. \quad (1.8)$$

Da ciò segue che il momento angolare perso/acquistato in questi scattering dai planetesimi è stato guadagnato/perso dal pianeta. Quindi il pianeta subisce una variazione radiale ( $\Delta a$ ):

$$\Delta a \approx \frac{2\pi a \Sigma_0 \Delta m \Delta r^2}{M_p}, \quad (1.9)$$

poiché inoltre si vuole che la migrazione proceda, il valore  $\Delta a$  deve essere più grande rispetto al valore  $\Delta r$ . Ciò significa semplicemente che, affinché la migrazione continui, il pianeta deve trovarsi in una zona in cui i planetesimi non sono stati scatterati ma risultino ancora in un'orbita *non perturbata*. Quindi è possibile ricavare una condizione sulla massa massima del pianeta imponendo la condizione precedente:

$$\Delta a \geq \Delta r, \quad (1.10)$$

cioè:

$$M_p \leq 2\pi a \Sigma_0 \Delta r. \quad (1.11)$$

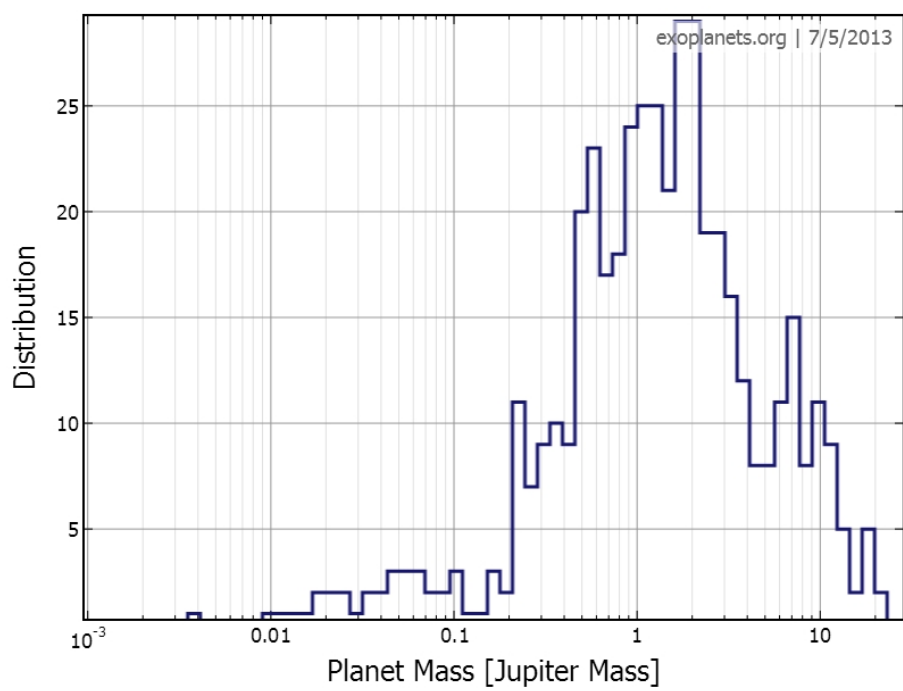
La condizione precedente implica che la massa del pianeta deve essere minore della massa di disco contenuta all'interno della sfera di Hill  $r_H$ . Da una condizione generale sulla massa dell'intero disco, si è passati ad una condizione locale. Si calcoli ora il tasso (*rate*) di migrazione all'interno di questo disco e cioè si voglia la variazione nel tempo del semiasse maggiore dell'orbita per un pianeta di massa  $M_p$  all'interno di un disco di planetesimi con densità superficiale  $\Sigma_p$ . Si calcola inizialmente il tempo che impiegano tutti i planetesimi all'interno della feeding zone ad interagire con il pianeta:

$$\Delta t \approx \frac{2}{3} \frac{a}{\Delta r} P_{planet}, \quad (1.12)$$

dove il termine  $P_{planet}$  è il periodo di rivoluzione orbitale del pianeta. Inserendo tale risultato all'interno dell'eq. (1.10) si ottiene:

$$\frac{\Delta a}{\Delta t} \approx \frac{2\pi a \Sigma_0 \Delta m \Delta r^2}{M_p} \left[ \frac{2}{3} \frac{a}{\Delta r} P_{planet} \right]^{-1} = \frac{a}{P_{planet}} \frac{\pi a^2 \Sigma_0}{M_*}. \quad (1.13)$$

Assumendo valori caratteristici questo corrisponde a circa  $2 \cdot 10^{-7}$  [A.U./anno]. Tale risultato approssimato è, come ordine di grandezza e come dipendenze, in accordo con quello ricavato numericamente nell'articolo di Ida S. and H. [2000]. Seguendo la definizione precedente si osserva che, per un pianeta che rispetti la disuguaglianza definita sopra, il tasso di migrazione è indipendente dalla massa del pianeta stesso. Inoltre, come è possibile osservare nell'articolo di D. R. Kirsh and Levison [2008], il tasso di migrazione diminuisce, ma in modo abbastanza lento per pianeti di piccola massa all'interno di dischi molto massivi confermando così i risultati degli articoli precedenti. In questa tesi invece il rapporto tra la massa del pianeta e la massa del disco è stato aumentato per studiare la possibile dipendenza che questo parametro ha sulla variazione del semiasse maggiore dell'orbita. I dati osservativi, ottenuti ad oggi per i sistemi extrasolari con un solo pianeta, presentano un picco per masse molto elevate (da  $0.5 M_J$  fino a  $10 M_J$ ) (figura 1.1).



**Fig. 1.1:** *Istogramma numero di pianeti - massa.* E' osservabile come il picco di questo istogramma sia posizionato in corrispondenza di pianeti di grande masse ( $> 0.5 M_J$ ).

Ciò è in parziale disaccordo con quanto descritto finora. In questa tesi ci proponiamo di verificare quali meccanismi debbano essere considerati nella trattazione modellistica per colmare il disaccordo con i dati osservativi.

## Chapter 2

# Problema dei tre corpi

*"...quello che loro non sapevano era che lo zingaro era un campione di boxe a mani nude ed era più duro di un chiodo da bara."*  
- The Snatch -

### 2.1 Introduzione

Questo capitolo è composto come segue. Nella prima parte viene esposta una breve storiografia dei risultati fondamentali degli astronomi e matematici che hanno contribuito in modo sostanziale alla risoluzione, anche parziale, di questo problema. Nella seconda parte è esposto, passo dopo passo, il metodo che ha portato alla scrittura delle *equazioni di Hill* per il problema dei tre corpi ristretto. Sono presentati inoltre varie osservazioni, grafici e commenti sia sul *criterio di Tisserand* che sulla *costante di Jacobi* (indispensabili per la comprensione dei capitoli successivi). Continuando, è presentata una breve discussione sui dischi di planetesimi e sulle grandezze fondamentali che serviranno in tutto l'elaborato per comprendere i risultati proposti nel capitolo finale. Si presenta un paragrafo sulla stabilità delle orbite nel problema ristretto e generale che è utile nella comprensione di come l'oggetto perturbatore (pianeta o corpo secondario) riesca ad aprire un *gap* con una dimensione caratteristica all'interno di un disco di planetesimi. Nell'ultimo paragrafo si integrano numericamente le equazioni precedentemente si calcola la stabilità esponenziale dei planetesimi su orbite corotanti e controrotanti attraverso il metodo dell'esponente di Lyapunov. E' inoltre utilizzato per descrivere il fenomeno della *sovrapposizione di risonanze*, necessario per comprendere la distribuzione in eccentricità dei planetesimi o degli asteroidi nella fascia Principale e nella fascia di Kupier del Sistema Solare e come esista una differenza nelle dimensioni del gap nei dischi corotanti e controrotanti.

## 2.2 Prologo ed epilogo

Lo studio di un sistema gravitazionale formato da  $n$ -corpi è stato sviluppato nel corso dei secoli utilizzando due differenti approcci.

Il primo presenta tale sistema in modo generale tramite l'utilizzo di teoremi atti a descriverlo nella sua interezza (es.: *Teorema del moto del centro di massa*).

Il secondo invece è utilizzabile solo in alcune configurazioni e tempi particolari di tale problema (es.: Sistema Solare, problema dei tre corpi generalizzato, lo studio degli asteroidi Troiani) e tali soluzioni presentano una precisione elevata ma, come detto, hanno validità solo per un tempo finito (sono soluzioni a *carattere locale*) e per casi particolari. Questo approccio prevede di prendere in considerazione un sistema analitico (integrabile) e modificarlo leggermente per riprodurre il problema fisico da studiare (es.: *Teoria delle Perturbazioni*).

I primi risultati in ambito generale furono trovati dal matematico ed astronomo Sir. I. Newton<sup>1</sup>, il quale enunciò quello che oggi viene comunemente chiamato Teorema del moto del centro di massa (*Principia Mathematica*). Eulero<sup>2</sup> descrisse poi la soluzione di tale problema nella forma di 10 integrali primi (o *costanti del moto*), risultato dell'integrazione delle equazioni del moto del problema degli  $n$ -corpi. Sei sono le costanti del moto, ricavabili dal Teorema del moto del centro di massa, tre sono ricavabili dal principio di conservazione del momento angolare e l'ultimo integrale primo è l'Hamiltoniana del sistema. Quest'ultima costante del moto altro non è che il valore dell'energia totale del sistema che, per sistemi non dissipativi<sup>3</sup>, si conserva nel tempo. Laplace<sup>4</sup> poi (1784) trovò il cosiddetto piano invariante:

---

<sup>1</sup> **Isaac Newton** (Woolsthorpe-by-Colsterworth, 25 dicembre 1642 - Londra, 20 marzo 1727) È stato matematico, fisico, filosofo ed astronomo. Pubblica i *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* nel 1687, opera in cui sono racchiuse le leggi di gravitazione universale e con la quale il brillante *homo universalis* stabilisce le basi della meccanica classica e della meccanica celeste. Assieme a G. W. Leibniz definisce quello che oggi è il calcolo differenziale. Riordina le *leggi di Keplero*, riottenendole come soluzioni delle equazioni differenziali che descrivono le forze e che oggi sono chiamate equazioni di Newton. Studia inoltre il problema dei due corpi in modo approfondito; fu il primo a studiare anche il problema dei tre corpi. I suoi risultati sul moto della Luna differiscono di un fattore due rispetto i risultati più recenti. Si applica anche allo studio della teoria ondulatoria della luce.

<sup>2</sup> **Leonard Euler** (Basilea, 15 aprile 1707 - San Pietroburgo, 18 settembre 1783), È stato un matematico e fisico svizzero. Diede importanti contributi alla fisica ed in particolare alla meccanica classica e celeste. Nel 1773 perse la moglie ancora quarantenne. Si risposò tre anni dopo. Il 18 settembre 1783, in una giornata come le altre, in cui discusse del nuovo pianeta Urano appena scoperto, fu colto improvvisamente da un'emorragia cerebrale e morì poche ore dopo. Pare che Pierre Simon Laplace affermò: "*Leggete Eulero; egli è il maestro di tutti noi.*"

<sup>3</sup> I sistemi non dissipativi sono tutti quei sistemi che obediscono al teorema di Liouville e che, durante l'evoluzione temporale nello spazio delle fasi, preservano i volumi.

<sup>4</sup> **Pierre-Simon Laplace**, marchese di Laplace (Beaumont-en-Auge, 23 marzo 1749 -

piano sempre perpendicolare al vettore momento angolare del sistema preso in esame. Dopo circa sessant'anni, nel semestre 1842-43, Jacobi<sup>5</sup> dimostrò, all'Università di Königsberg, il seguente risultato:

*“Se la forza agente su un sistema composto da  $n$  particelle dipende solamente dalle coordinate (forza posizionale), ammette un potenziale ed è possibile trovare almeno  $n - 2$  integrali primi per tale sistema, allora è possibile trovarne gli ultimi due ed integrarlo completamente”.*

Ma l'opera del brillante matematico di Potsdam non si fermò a questo e, estendendo i lavori di Sir. W.R. Hamilton, dedusse come fosse possibile trasformare un sistema di equazioni del problema degli  $n$ -corpi nello studio di un'unica equazione differenziale con ordine maggiore rispetto l'ordine delle equazioni che regolavano inizialmente il sistema. Nel 1874 Newcomb dimostrò come le equazioni differenziali che governavano il moto di un problema degli  $n$ -corpi potessero essere risolte utilizzando serie periodiche. È consentì di rispondere ad una domanda che da tempo aveva perseguitato gli astronomi ed i matematici dell'epoca:

*“esistono soluzioni periodiche per un sistema generico di  $n$  corpi soggetti alla mutua attrazione gravitazionale ?”*

Un approfondita trattazione di tale quesito la si può trovare nell'articolo di Yanguas et al. (2008): *"Periodic solutions in Hamiltonian Systems, Averaging and the Lunar Problem"*. Quello che Newcomb non riuscì a dimostrare fu se tali serie convergessero oppure no. Tale domanda ha, come oggi noto, risposta negativa e fu il matematico H. Poincaré a dimostrare come in generale tali serie fossero divergenti (*"Les Méthodes Nouvelles"*, Cap.IX e XII). La ricerca di nuove soluzioni per un sistema di  $n$ -corpi e la speranza che tali soluzioni potessero essere di tipo analitico, venne infine infranta con la dimostrazione del fisico e matematico Bruns il quale asserì che, usando coordinate rettangolari, non era possibile trovare altri integrali algebrici oltre quelli già noti per un sistema come quello presentato (*"Acta Mathematica"*

---

Parigi, 5 marzo 1872), è stato matematico, fisico e astronomo francese. Ha dato fondamentali contributi a vari campi della matematica, astronomia e della teoria della probabilità. Diede la svolta finale alla meccanica celeste riassumendo ed estendendo il lavoro dei suoi predecessori nell'opera in cinque volumi *Mécanique Céleste* (1799 - 1825). Questo capovalore ha trasformato lo studio geometrico della meccanica, sviluppato da Newton, in quello basato sull'analisi matematica.

<sup>5</sup> **Carl Gustav Jacob Jacobi**, (Potsdam, 10 dicembre 1804 - Berlino, 18 febbraio 1851) matematico tedesco. Nacque da famiglia ebraica nel 1804. Studia all'Università di Berlino dove ottenne il titolo di dottorato nel 1825. Nel 1827 divenne professore straordinario e nel 1829 professore ordinario di matematica a Königsberg, e conservò tale cattedra fino al 1842. Jacobi soffrì per un tracollo fisico causato dal troppo lavoro nel 1843 e si trasferisce in Italia per alcuni mesi per riacquistare la salute. Al suo ritorno si sposa a Berlino, dove visse come gentiluomo reale fino alla sua morte.

, Vol. XI). Inoltre lo stesso Poincarè dimostrò come l'utilizzo dei soli elementi orbitali come variabili non permettesse l'esistenza di nuovi integrali primi *uniformemente trascendenti*, anche quanto tutte le masse del sistema (eccetto una) fossero inifinitesime.

Entrando nello specifico del problema dei tre corpi che è trattato in questo capitolo, una prima soluzione venne data dal matematico italiano Luigi Lagrange (*“Essai sur le Problème des Trois Corps”*, 1772). Il metodo del matematico italiano era quello di suddividere in due parti il problema. La prima parte consisteva nel determinare la distanza relativa tra i due corpi. Il secondo passo consentiva di calcolare, una volta trovata tale distanza, il piano che contiene il moto dei corpi nello spazio e la sua orientazione. Più in particolare, nella prima parte, si cercava di risolvere un sistema di tre equazioni differenziali che coinvolgevano solo le mutue distanze dei tre corpi come variabili. Tale problema era del settimo ordine. L'analisi di Lagrange consentiva, a differenza di quella effettuata utilizzando gli integrali primi (per ridurre l'ordine del sistema), di risolvere analiticamente il problema a patto di mantenere costante il rapporto tra le distanze dei tre corpi (per quest'ultima ragione la *soluzione di Lagrange* è anche nota come *soluzione triangolare equilatera*). La dimostrazione venne poi riprodotta da Laplace (*“Mècanique Cèleste”*, Vol. V, pag. 310). E' necessario inoltre citare altri eminenti matematici che ampliarono il risultato di Lagrange:

- Jacobi nel 1843, senza conoscere i risultati di Lagrange arrivò ad una riduzione del problema dei tre corpi al settimo ordine (*“Crelle's Journal”*, pag. 115);
- Radau (*“Bulletin Astronomique”*, Vol. I, pag. 113);
- Lindstedt (*“Annales de l'Encole Normale”*, III serie, Vol. I, pag. 85);
- Allegret nel 1875 (*“Journal de Mathématiques”*, pag. 227);
- Bour (*“Journal de l'Encole Polytechnique”*, Vol. XXXVI);
- Mathieu nel 1876 (*“Journal de Mathématiques”*, pag. 345).

E' stata inoltre proposta una generalizzazione del risultato di Lagrange ad un numero arbitrario di corpi quando le distanze relative tra essi rimangono costanti nel tempo (cit. Lehmann-Filhes in *“Astromische Nachrichten”*, Vol. CXXVII, pag. 137; F.R. Moulton in *“The Transactions Bulletin of the American Mathematical Society”*, Vol. I, pag. 17; W.R. Longley in *“Bulletin of American Mathematical Society”*, Vol. XIII, pag. 324). Nessun'altra soluzione periodica venne trovata al problema dei tre corpi fino al 1878, quando l'astronomo Hill cercò di spiegare il moto della Luna (Lunar Theory in *“The American Journal of Mathematics”*, Vol. I). La soluzione trovata da Hill è di più elevata praticità rispetto quella trovata da Lagrange anche se,



formalmente, non risulta essere periodica poichè nella sua trattazione Hill non considerò completamente la perturbazione introdotta dal Sole. Un altro importante contributo di Poincaré (“Bulletin Astronomique”?, Vol. I) fu quello di dimostrare come, quando due delle tre masse sono infinitesime, esiste un numero infinito di condizioni iniziali per le quali il moto risulta essere periodico. Tale risultato venne poi rielaborato e presentato alla corte del Re Oscar di Svezia e garantirà al matematico un cospicuo premio in denaro (è possibile trovarne una trattazione completa in “*Acta Mathematica*”, Vol. XIII). Citando testualmente le parole di Forest Ray Moulton:

*“The methods employed by Poincaré are incomparably more profound and powerful than any previously used in Celestial Mechanics... The work of Poincaré was (...) published in three volumes entitled: Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste given in sufficient detail to make so profound a work as easily read as possible.”* In (“*An introduction to Celestial Mechanics*” di F.R. Moulton, II edition, p. 320).

Alcuni risultati importanti sulla base dei lavori di Poincaré vennero pubblicati dallo stesso F.R. Moulton assieme ad alcuni dei suoi studenti:

- D. Buchanan;
- T. Buck;
- F. L. Griffin;
- W. R. Longley;
- W. D. MacMillan.

I risultati più interessanti vennero pubblicati con il titolo “Periodic Orbits” in “*Publication 161*” (Carnegie Institution di Washington). Diversamente da come credono alcuni, lo stesso Newton dopo aver studiato il problema dei due corpi dovette affrontare per primo le difficoltà del problema dei tre corpi. E’ infatti nel libro I, sezione XI dei *Principia*, che il leggendario astronomo affronta il problema applicandolo, tramite uno studio perturbativo, all’analisi del perigeo della Luna. Il matematico e fisico Airy disse di tale capitolo: “...*the most valuable chapter that was ever written on physical science.*” Quello che però non tutti sanno è che in alcuni manoscritti non pubblicati (Portsmouth Collection, ritrovati nel 1872), Newton descrive il moto del perigeo Lunare con una precisione al second’ordine a dimostrazione della sua genialità e a prova del suo interesse e studio anche del problema dei tre corpi. Il moto del perigeo Lunare fu calcolato dagli astronomi, ignari dei risultati ottenuti da Newton, solo nel 1749 grazie al fisico Clairaut che dimostrò come, sostituendo la forza Gravitazionale con una simile e con l’introduzione di un termine perturbativo, fosse possibile

riprodurre i dati osservativi. Nel 1899 Sir. George Darwin scrisse un importante memoria riguardo le orbite periodiche (“*Acta Mathematica*”, Vol. XXI) ed assunse in tale trattazione che solo una delle tre masse fosse infinitesima e che il rapporto di massa tra i due corpi massivi fosse 1:10 e che le loro orbite fossero circolari. Ad oggi, un numero elevato di orbite periodiche, facenti parte di diverse famiglie, sono state trovate numericamente e la loro stabilità è stata indagata da metodi ideati da Hill e Lagrange e che vengono citati brevemente nel capitolo.

## 2.3 Problema di Hill

Il metodo che viene utilizzato ora risulta essere differente rispetto quello utilizzato per la prima volta da Lagrange (Prize Memoir nel 1772).

Tale metodo però ha il vantaggio di poter essere esteso ad un numero qualsiasi di particelle. Lo svantaggio è che non è possibile, a differenza del metodo utilizzato da Lagrange, ridurre il problema alle quadrature e cioè renderlo integrabile (*first order problem*). Si ridefiniscono le costanti d’integrazione come segue:

- $G = 1$ ;
- $M_{tot}=1$ ;
- $\rho$  : distanza tra i due primari = 1;
- $\mu$  : massa ridotta  $\leq 1/2$  ;
- $n^2$ : velocità orbitale Kepleriana elevata al quadrato = 1.

Poiché questo è un problema a due corpi è possibile definire un piano in cui avviene il moto del sistema binario formato dai due oggetti puntiformi di massa  $M_1 = 1 - \mu$  e  $M_2 = \mu$ . Su tale piano si definiscono ora le coordinate dei due corpi rispetto un’origine e le distanze degli stessi.

La differenza sostanziale tra il problema di Hill ed il problema dei tre corpi ristretto è che, nel primo, la massa del secondo corpo primario non è trascurabile ma solo molto minore rispetto la massa dell’altro corpo primario, mentre il terzo corpo ha massa infinitesima. Nel secondo problema solo la massa di uno dei due corpi primari è diversa da zero, le altre due masse invece sono trascurabili (Henon and Petit [1986]).

L’interazione gravitazionale tra due oggetti massivi è un problema con una soluzione analitica ben definita. Nel tempo sono stati proposti vari metodi di risoluzione per il suddetto problema e sempre è stato possibile trovarne una soluzione esprimibile attraverso funzioni elementari. Inoltre la trattazione di questo problema come prima approssimazione al problema generale degli *n-corpi*, come visto nella sezione precedente, consente di comprendere comunque alcuni aspetti fondamentali della teoria della migrazione

planetaria anche supponendo che l'interazione abbia luogo, appunto, solo attraverso interazioni binarie (*Two Body Problem Approximation*).

Il problema precedente è applicabile solo in alcuni casi particolari e, in seguito, viene proposto un parametro fondamentale  $R_H$  (*Raggio di Hill*), che consente di discernere quando tale approssimazione risulti essere corretta e quando, invece, ne siano necessarie delle altre. Quando infatti la distanza orbitale di una particella è maggiore di tale parametro, il campo gravitazionale che descrive il moto della stessa non può più essere approssimato tramite un *2BP* (*Two Body Problem*). In questo caso, l'aggiunta di un terzo corpo rende l'integrazione del problema impossibile<sup>6</sup> Esistono però alcune semplificazioni al precedente problema, una di queste è definita *problema dei tre corpi generalizzato* (o *G3BP*), che può essere utilizzato dando buoni risultati in molti campi dell'astrofisica fino alla fisica dei plasmi.

E' possibile introdurre tale approssimazione definendo il seguente problema: “*si considerino due particelle puntiformi massive in orbita circolare attorno ad un baricentro comune ed una terza particella non massiva con moto inizialmente circolare che può interagire con le particelle massive (primarie) ma che non ne modifica il moto. Si supponga infine che una delle due particelle massive (primaria) abbia una massa molto minore rispetto quella dell'altra particella ma comunque diversa da zero. Studiare l'orbita della particella priva di massa.*”

Si inizi con lo scrivere le equazioni del moto della particella di prova:

$$\ddot{\vec{r}} = -\nabla\Phi - 2(\Omega \times \dot{\vec{r}}) - \Omega \times (\Omega \times \vec{r}), \quad (2.1)$$

$$\Phi = -\frac{GM_*}{r_*} - \frac{GM_p}{r_p}. \quad (2.2)$$

L'approssimazione di massa trascurabile per una delle tre particelle (*particella di prova*) è evidente nella scrittura del potenziale in cui sono presenti solo i termini dovuti ai due corpi primari (in questo caso la stella di massa  $M_*$  ed il pianeta di massa  $M_p$ ). Inoltre il potenziale per i due oggetti è stato scritto supponendo che essi abbiano simmetria sferica e dunque che non sia presente una rotazione degli stessi attorno a qualunque retta o piano passante per l'origine del sistema. Tale *S.d.R.* è costruito in modo tale che il piano  $x-y$  coincida con il piano del moto dei due corpi primari.

Si osserva come il problema precedente sia stato descritto in un *S.d.R.* coorotante con velocità angolare  $\dot{\omega}$  uguale alla velocità orbitale kepleriana del primario meno massivo ( $\vec{\Omega}_p(r)$ ) (che è da ora in avanti definito come

---

<sup>6</sup>Si faccia notare come esista una soluzione esprimibile tramite uno sviluppo in serie per il problema dei tre corpi. Tale sviluppo in serie è non solo convergente ma permette di risolvere il problema in modo che la soluzione sia analitica e a carattere globale ( Sundman *Mémoire sur le problème des trois corps*, 1912). E' possibile dimostrare che anche per il problema generale degli *n-corpi* esista uno sviluppo analogo (cit. Wang).

secondario) rispetto il baricentro del sistema stesso. Bisogna dunque scomporre il vettore accelerazione del sistema nelle due componenti: tangenziale e perpendicolare al moto.

Si scrive ora l'equazione in componenti:

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \Omega^2 x = - \left[ \frac{M_*(x - x_*)}{r_*^3} + \frac{M_p(x - x_p)}{r_p^3} \right]; \quad (2.3)$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \Omega^2 y = - \left[ \frac{M_*}{r_*^3} + \frac{M_p}{r_p^3} \right] y; \quad (2.4)$$

$$\ddot{z} = - \left[ \frac{M_*}{r_*^3} + \frac{M_p}{r_p^3} \right] z. \quad (2.5)$$

L'approssimazione che il primario abbia una massa molto maggiore del secondario permette di *spostare* la posizione di quest'ultimo lungo l'asse  $x$  fino a farla coincidere con l'origine degli assi e permette di far coincidere la posizione del baricentro del sistema con la posizione del corpo primario.

In formule si ha che  $M_p \ll M_* \equiv 1$  dunque:

- $|x_*| \ll |x_p|$ ,
- $\Omega^2 = \frac{M_*}{x_*^3}$ .

Dunque le precedenti approssimazioni permettono di riscrivere le equazioni come:

$$r_* = \sqrt{(1+x)^2 + y^2} \cong \sqrt{1+2x} \simeq 1+x \quad (2.6)$$

cossichè:

$$r_*^{-3} \cong 1 - 3x \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} &\cong \\ &- \Omega^2 \left[ (1+x)(1-3x) + \frac{xM_p}{(x^2+y^2)^{3/2}} - 1 - x \right] \\ &\cong 2\Omega\dot{y} + \Omega^2 \left[ 3 - \frac{M_p}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right] x \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\ddot{y} \cong -2\Omega\dot{x} + \Omega^2 \left[ 3x - \frac{M_p}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right] y. \quad (2.9)$$

Per semplificare ulteriormente le equazioni è possibile introdurre il parametro  $\Delta = (x^2 + y^2)^{1/2}$ . Poichè si è interessati al moto della particella di prova vicino al corpo secondario è possibile ricorrere alle seguenti approssimazioni:

- $\Delta, |x|, |y| \sim M_p^{1/3} \ll 1$ ,
- $\frac{M_p}{\Delta^3} \gg |x|$ .

Quello che si ottiene inserendo le approssimazioni precedenti nelle equazioni (2.8) e (2.9) è:

$$\ddot{x} - 2\Omega\dot{y} = \left[ 3\Omega^2 - \frac{M_p}{\Delta^3} \right] x \quad (2.10)$$

$$\ddot{y} + 2\Omega\dot{x} = - \left[ \frac{M_p}{\Delta^3} \right] y. \quad (2.11)$$

Si osserva come l'assenza della coordinata  $z$  sia dovuta alle peculiarità del problema dei due corpi. Tale problema infatti risulta avere un piano fondamentale in cui avviene il moto (*Piano Invariante di Laplace*). In questa trattazione si è supposto, per costruzione, che tale piano coincide con il piano  $x$ - $y$  e che anche la particella di prova sia vincolata allo stesso piano. Si osserva inoltre la struttura dell'equazione precedente:

- il membro di sinistra rappresenta il moto epiciclico della particella di prova;
- il membro di destra rappresenta le forze *conservative* aganti sulla particella stessa.

In questo paragrafo l'equazione precedente viene inoltre riscritta affinché risulti adimensionale e priva di parametri fisici. Per fare ciò si esprimono inizialmente le lunghezze in unità del raggio di Hill (es.:  $x_h \equiv x/R_H$ ). Si prosegue poi con l'utilizzo di una coordinata temporale adimensionale:  $\tau = \Omega t = 2\pi t/T$ . Dove  $T$  è il periodo orbitale del corpo secondario. Ora, poichè:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\tau}{n}, \quad (2.12)$$

$$dx = R_H dx_h, \quad (2.13)$$

allora:

$$\frac{dx}{dt} = \Omega R_H \frac{dx_h}{d\tau}, \quad (2.14)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \Omega R_H \frac{d^2x_h}{d\tau^2}. \quad (2.15)$$

Allora, in definitiva l'eq. (2.10) e (2.11) diventa:

$$\frac{d^2x_h}{dt^2} - 2\frac{dy_h}{dt} = 3 \left[ 1 - \frac{1}{\Delta_h^3} \right] x_h, \quad (2.16)$$

$$\frac{d^2 y_h}{dt^2} + 2 \frac{dx_h}{dt} = \frac{3}{\Delta_h^3} y_h. \quad (2.17)$$

Con l'usuale notazione tale sistema può essere riscritto nel modo seguente:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = 3 \left[ 1 - \frac{1}{\Delta^3} \right] x, \quad (2.18)$$

$$\ddot{y} - 2\dot{x} = -\frac{3}{\Delta^3} y. \quad (2.19)$$

Tale problema è chiamato *problema di Hill* e le equazioni precedenti sono definite *equazioni di Hill*. Si esamina ora l'equazione di Hill più nel dettaglio per ricavare la sopracitata condizione di applicabilità del problema dei due corpi. Annullando infatti il membro di destra dell'equazione (2.18) si ottiene un valore del raggio ben definito:

$$R_H = a \left( \frac{M_p}{3M_*} \right)^{1/3}. \quad (2.20)$$

Tale parametro, che ha le dimensioni di una distanza è definito *raggio di Hill*.

Un secondo metodo meno formale rispetto il precedente per ricavare questo parametro è quello di uguagliare il quadrato della velocità orbitale kepleriana del secondario attorno al primario con quella della particella di prova attorno al secondario. Si ottengono le stesse dipendenze della relazione precedente:

$$\Omega_p^2(r) = \omega_{test}^2 \quad (2.21)$$

cioè:

$$\frac{GM_*}{a^3} = \frac{GM_p}{r^3}. \quad (2.22)$$

Si osserva come imporre l'uguaglianza precedente, dimensionalmente, è come imporre un'uguaglianza tra due forze gravitazionali: quella esercitata dal primario alla distanza  $a$  (semiasse maggiore dell'orbita del secondario attorno al primario) e quella esercitata dal secondario sulla particella di prova posta a distanza  $r$  del secondario stesso. Continuando, si ottiene un valore molto simile rispetto quello trovato in precedenza:

$$r_H = a \left( \frac{M_p}{M_*} \right)^{1/3}. \quad (2.23)$$

Quello che si ottiene è dunque un parametro,  $r_H$  appunto, che ben approssima  $R_H$  e che descrive una *sfera di influenza* gravitazionale sulla particella di prova entro la quale l'orbita della stessa è calcolabile attraverso

l'approssimazione di un problema a due corpi: secondario e particella di prova; mentre al di fuori di essa si deve tener conto dell'influenza gravitazionale anche dell'oggetto primario. Con tale parametro è inoltre possibile ricavare la velocità orbitale kepleriana che avrebbe la particella di prova posta alla distanza  $r_H$ :

$$v_H = \left( \frac{GM_p}{r_H} \right)^{1/2}. \quad (2.24)$$

Tale velocità orbitale è definita *velocità di Hill*. Tramite questo valore è possibile studiare il comportamento generale di un insieme di particelle di prova che interagiscono con il secondario e dunque ricavarne le orbite. L'approssimazione da tener presente è che l'interazione gravitazionale tra le particelle di prova è trascurabile e dunque il problema si riduce da un problema agli  $n$ -corpi ad  $n$  problemi circolari planari dei tre corpi ristretto (*N-RPC3BP: n-circular planar restricted three body problem*) permettendo notevoli semplificazioni numeriche ed analitiche. Si fa inoltre notare come tale semplificazione comporta la non interazione tra le  $n$  particelle. Il codice utilizzato in questo elaborato tiene conto di questa semplificazione e quindi tutti i risultati ottenuti devono esser riguardati tenendola ben presente. Questa approssimazione è giustificata nel capitolo sei in cui vengono citati altri lavori che studiano la migrazione planetaria sia per un disco di planetesimi non autogravitante che per un disco autogravitante. Si ricorda però come l'autogravità di un disco di planetesimi sia poco rilevante (in termini della massa totale: circa  $40M_\oplus$ ), rispetto quella dovuta alla stella centrale ( $M_\odot$ ). Inoltre al tempo in cui vengono condotte le simulazioni numeriche il disco di gas (che detiene gran parte della massa totale del disco protoplanetario) è stato completamente diffuso o accresciuto sul pianeta e/o sulla stella centrale.

Vengono ora comparati il valore della dispersione di velocità delle particelle ( $\sigma$ ) con la velocità descritta nell'equazione (2.24). Si ottengono due diversi regimi:

- $\sigma > v_H$ : la fisica delle collisioni, dell'accrescimento e delle perturbazioni è ben descrivibile attraverso un problema dei due corpi *dispersion dominated encounters*;
- $\sigma < v_H$ : in questo caso bisogna invece considerare anche le perturbazioni sul moto delle particelle di prova indotte dal corpo primario *shear dominated encounters*.

È importante osservare come questi due regimi nulla hanno a che fare con lo *shear* ed il *dispersion dominated regimes* che descrivono invece la distribuzione di eccentricità e quindi di velocità di un disco di planetesimi. Un risultato importante, che per ora può essere preso come un teorema, è il seguente:

**Teorema 2.1.**

“La stabilità di un sistema dei tre corpi in cui nessun corpo è soggetto a risonanze non dipende dalla conoscenza delle orbite degli stessi.”

E' importante osservare come l'applicazione di tale criterio di stabilità, se applicato al *RPC3BP*, dia un risultato analitico. Il risultato é dovuto ad Hill (“*Lunar Theory*” in *The American Journal of Mathematics* Vol. I) ed é stato successivamente rielaborato da Jacobi (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Vol.III, pag. 59) e da Darwin (“*Memoir on Periodic Orbits*” in *Acta Mathematica* Vol. XXI, pag. 102).

Si prende in considerazione l'equazione (2.1) e (2.2), in tale equazione il potenziale totale (figura 2.1) dovuto alla forza gravitazionale e alla forza centrifuga (il *S.d.R.* è coorbitante con il pianeta e dunque non inerziale) è scrivibile come:

$$U(x, y, z) = \frac{1}{2}\Omega^2(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{GM_*}{r_*} + \frac{GM_p}{r_p} \quad (2.25)$$

Riscrivendo, per componenti, l'equazione della forza con questa nuova definizione di potenziale si ottiene il seguente sistema:

$$\ddot{x} - 2\Omega = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad (2.26)$$

$$\ddot{y} + 2\Omega = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad (2.27)$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (2.28)$$

Moltiplicando per  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  e  $\dot{z}$  e sommando per componenti:

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = \dot{x}\frac{\partial U}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial U}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial U}{\partial z}, \quad (2.29)$$

che può anche essere riscritta come:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{dU}{dt}, \quad (2.30)$$

questo é un sistema immediatamente integrabile:

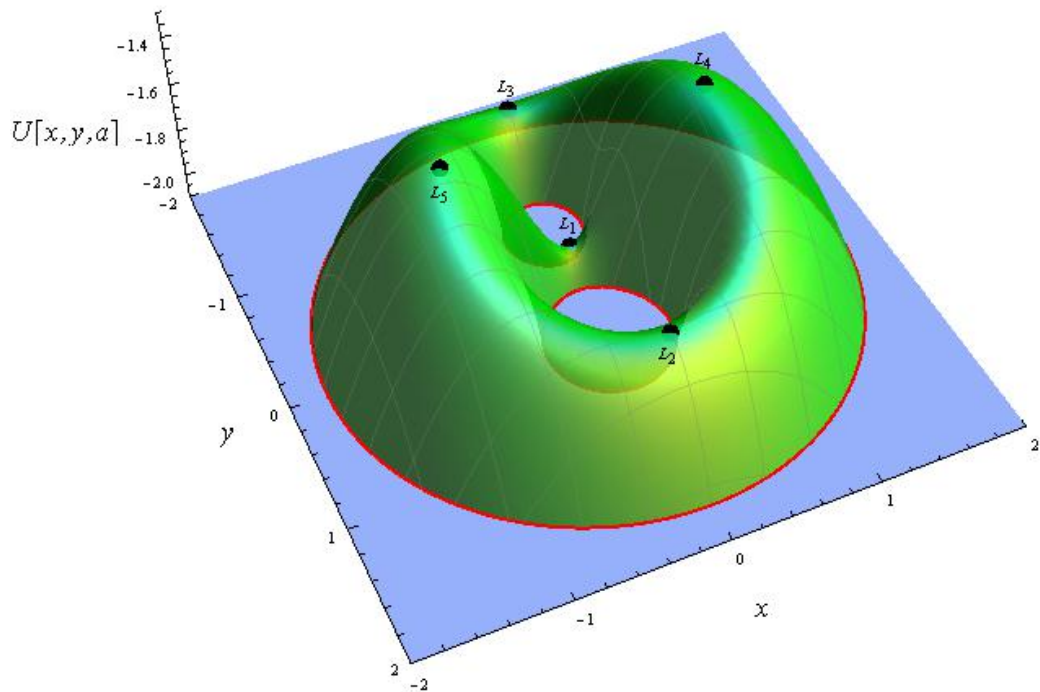
$$(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = 2U - C_J, \quad (2.31)$$

$$\vec{C}_J = 2\vec{U} - \vec{v}^2. \quad (2.32)$$

Dove la costante d'integrazione  $C_J$  é comunemente chiamata *costante di Jacobi*.



*Potenziale del problema dei tre corpi ristretto*



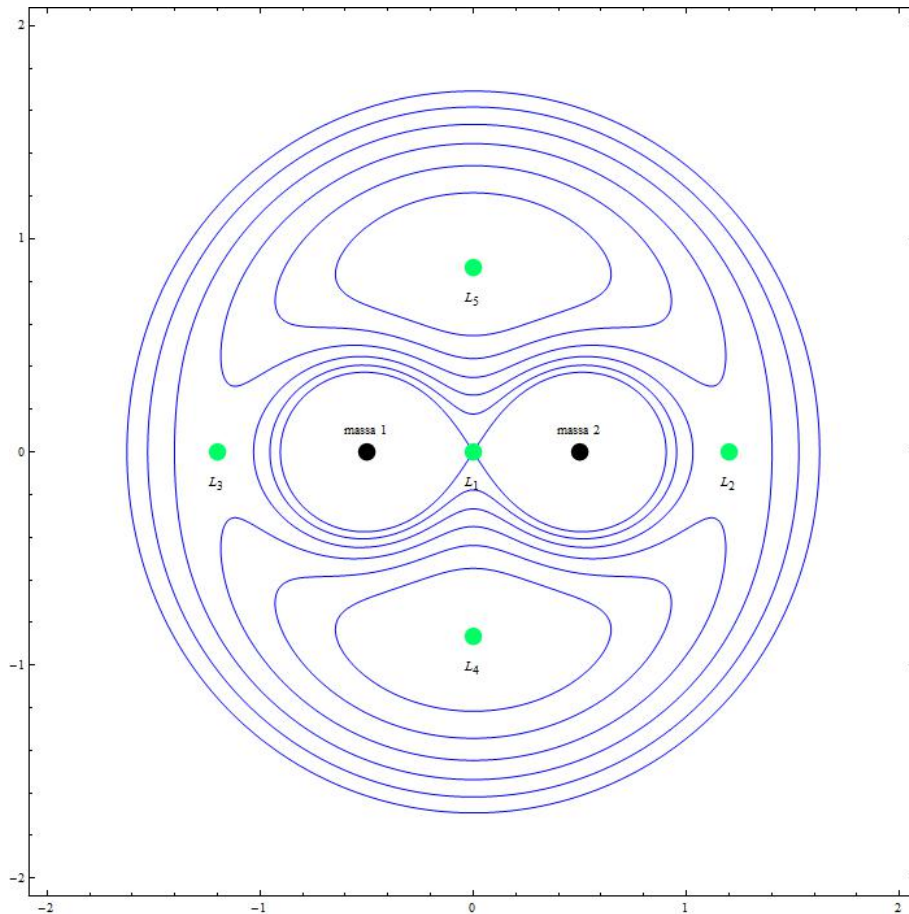
**Fig. 2.1:** *Potenziale del problema dei tre corpi ristretto.* Il grafico è stato ottenuto tramite l'equazione (2.25) e sono stati inseriti anche i 5 punti lagrangiani  $L_i$  con  $i = 1, \dots, 5$ , unici punti di equilibrio (stabile o instabile) del problema dei tre corpi. Si può riguardare a tale superficie come ad una *barriera* di energia potenziale a cui sono soggette le particelle di prova. Quest'ultima definizione è utile più avanti in questo capitolo.

Tale costante rappresenta quello che viene chiamato un *integrale primo del moto*, un parametro che non varia nel tempo e che descrive in modo univoco ad ogni istante il sistema che si sta prendendo in considerazione.  $C_J$  dipende sia dalle coordinate della particella che dalla velocità della stessa e permette di fissare dei vincoli sul moto della particella di prova. Data infatti una condizione iniziale di velocità  $\vec{v}(0)$  e posizione  $\vec{x}(0)$  è sempre possibile calcolare l'evoluzione temporale della differenza tra energia cinetica (T) e potenziale gravitazionale (U). Poiché come visto nella (2.32) tale differenza altro non è che l'integrale di Jacobi, è possibile, per ogni particella, calcolare tale valore una sola volta. Esso rimane invariato nel tempo. Una nota approssimazione di tale criterio che si utilizza per identificare, ad esempio, differenti comete e che viene chiamato *criterio di Tisserand* (1889). Imponendo ora che  $\vec{v}(0) = 0$  si ottiene che  $\vec{C}_J = 2\vec{U}$  che risulta il valore massimo della costante di Jacobi. Le superfici che si vanno a definire prendono il nome di *superfici a velocità nulla* (figura 2.2) e il loro studio consente di vincolare il moto della particella in certe zone dello spazio delle coordinate per un problema dei tre corpi anche se non si ha la conoscenza precisa della loro posizione. Quindi è possibile, sapendo la posizione della particella trovare un valore numerico per la costante di Jacobi, sezionare la superficie tridimensionale di Jacobi e ricavare un piano in cui esistono zone concesse al moto e zone non concesse. Per comprendere tutto ciò si osserva il grafico in figura 2.3 che rappresenta la proiezione lungo l'asse  $y$  della figura (2.1) presentata precedentemente. In questo caso la costante di Jacobi dipende solo da una coordinata, sono inoltre presenti i tre punti lagrangiani  $L_1, L_2$  ed  $L_3$  che risiedono sull'asse  $y = 0$  (piano di proiezione). In questo caso, fissato un valore della coordinata  $x$  ho una retta ricavata inserendo tale valore all'interno del integrale di Jacobi. La particella è costretta a viaggiare su di una retta all'interno di uno o dell'altro lobo. La particella non è infatti in grado di superare la barriera di potenziale (per esempio quella tra i due corpi primari) e quindi rimane vincolata all'interno della buca di potenziale di una delle due masse.

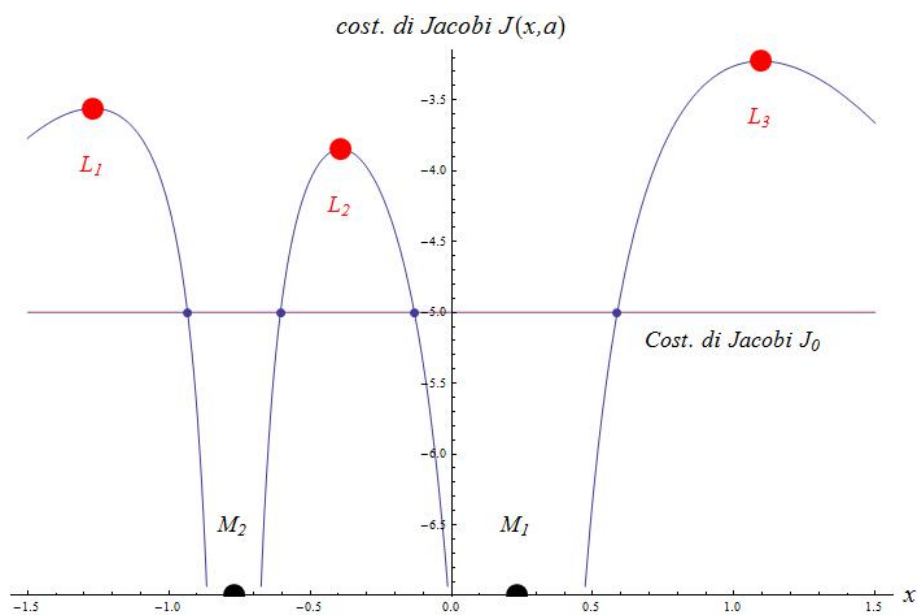
In figura (2.4) è rappresentato quanto appena detto ma in termini delle due coordinate spaziali: è presentata la superficie di Jacobi, sezionata dal piano definito da una certa condizione iniziale di posizione (e velocità) di una particella.

In figura (2.5) è presentato invece la traiettoria di una particella. come si può osservare l'orbita rimane sempre all'interno di tale superficie che rappresenta, a tutti gli effetti, una barriera di potenziale (o *vincolo energetico*) per la particella di prova.

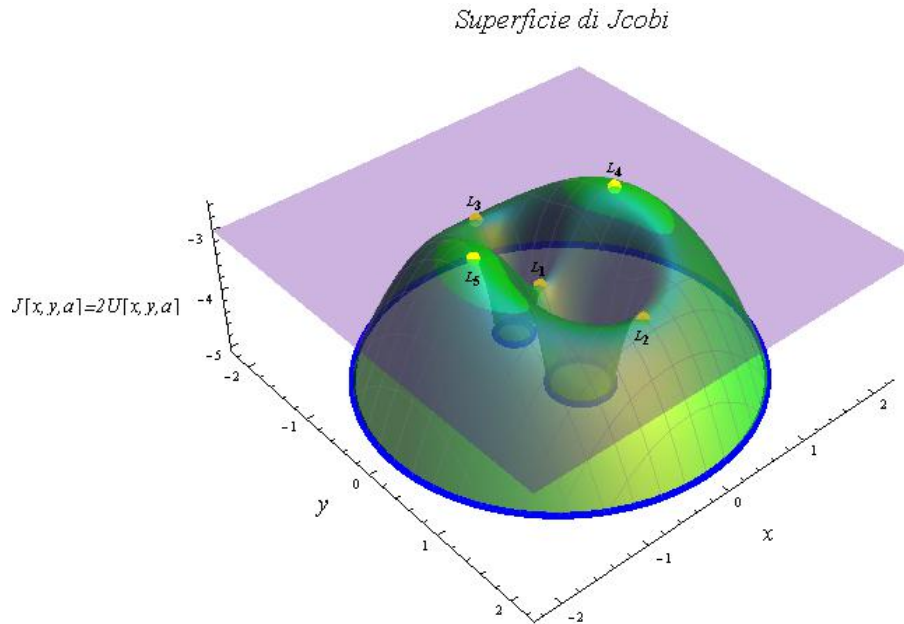
Sapere dunque il valore di  $\vec{C}_J$  per un'orbita permette di conoscere le regioni in cui il moto è concesso e, ancora, sapendo  $\vec{U}$  è possibile ricavare la superficie tridimensionale di Jacobi in ogni punto dello spazio. Si comprende ora il teorema (1.1): indipendentemente dal tipo di orbita che una



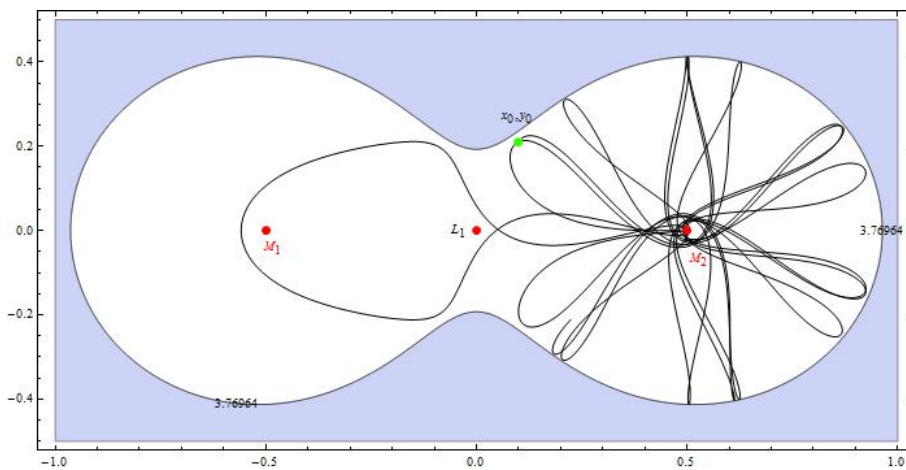
**Fig. 2.2:** *Proiezione di varie superfici equipotenziali per il potenziale del problema dei tre corpi. Poiché nel limite di velocità molto basse, la costante di Jacobi è ricavabile dal potenziale a meno di un fattore costante, studiando le superfici equipotenziali si ottengono le superfici di Jacobi.*



**Fig. 2.3:** *Proiezione monodimensionale nello spazio delle coordinate della superficie di Jacobi.* Il valore della superficie di Jacopi in questo caso dipende solo dalla coordinata  $x$  (e dal valore della massa ridotta  $a$ ) che, misurata ad un tempo qualsiasi ( $x(t_0) = x_0$ ), permette di ricavare un valore numerico (negativo) dall'equazione per la superficie di Jacobi. Nel caso specifico tale valore è uguale a  $-5.0$ . E' sul piano formato dall'intersezione tra tale valore costante e la superficie di Jacobi avviene il moto della particella di prova. La retta costante ( $J(x_0, a) = -5.0$ ) intercetta la superficie di Jacobi e dalla loro intersezione si ottengono le zone concesse al moto. In questa configurazione il basso valore della costante di Jacobi non consente alla particella di passare da un lobo ad un altro del sistema.



**Fig. 2.4:** *Proiezione bidimensionale nello spazio delle coordinate della superficie di Jacobi.* Come nel caso precedente ma ora è stata aggiunta anche la dipendenza dalla coordinata  $y$ :  $J = J(x, y, a)$ . L'intersezione con un valore costante ( $C_J = -3.0$ , piano *viola*) determina le zone concesse e proibite al moto.



**Fig. 2.5:** *Orbita di una particella di prova.* La particella di prova è all'interno della zona concessa al moto dalla condizione di Jacobi. Il vincolo energetico è rispettato.

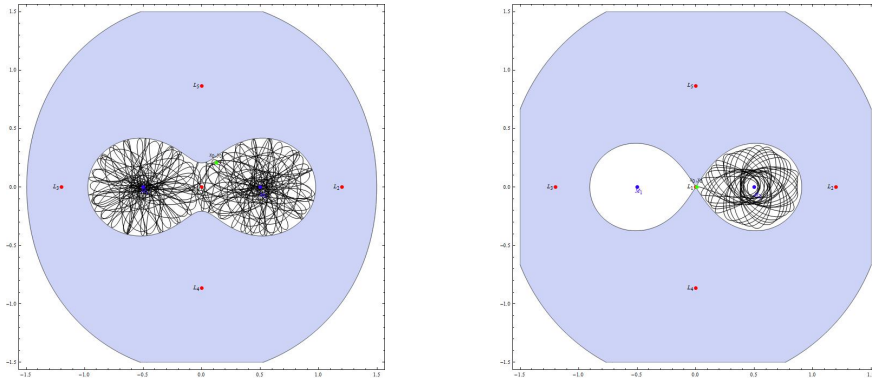
particella possiede, essa è vincolata all'interno di alcune zone ben definite che dipendono da un unico parametro indipendente dal tempo ( $C_J$ ).

Il risultato precedente permette di ridefinire il teorema (1.1) nel seguente modo:

**Teorema 2.2** (Stabilità di Hill).

‘Una particella non può mai attraversare una superficie a velocità nulla (figura 2.6). Le regioni in cui una particella può muoversi sono le uniche in cui la  $(\vec{v}(0) > 0)$ .’

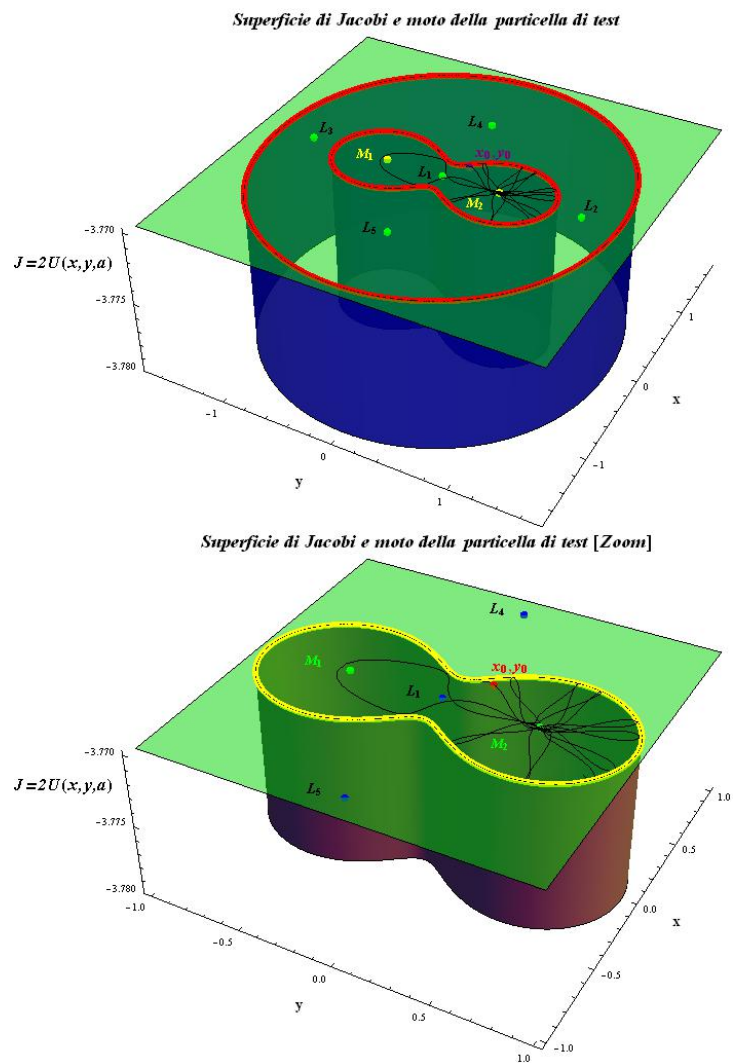
*Proof.* Si supponga che una particella ad un certo istante  $t$  abbia una velocità non nulla e che possa passare attraverso una superficie a velocità nulla. A tale istante  $t$  dunque, la differenza tra energia cinetica ( $T$ ) ed energia potenziale ( $U$ ) sarebbe diversa da quella calcolata utilizzando il valore  $C_J$  che, per definizione, è un integrale primo eq. (2.32) e che quindi deve rimanere costante. La particella deve arrivare alla superficie di velocità nulla con velocità uguale a zero.



**Fig. 2.6:** Due esempi di moto per particelle con condizioni iniziali differenti. Le orbite delle due particelle di prova sono vincolate all'interno delle superfici a velocità nulla. Sono presentati due differenti valori della costante di Jacobi e, conseguentemente, della posizione iniziale per le due particelle. E' possibile notare come tali orbite ricoprono *densamente* tutto lo spazio loro concesso in base al loro vincolo energetico. Quest'ultima osservazione è molto importante alla fine di comprendere i fenomeni caotici all'interno del problema dei tre corpi.

Si osserva come tale teorema garantisce un criterio di stabilità necessaria per un orbita (figura 2.6 e 2.7).

E' interessante inoltre notare come il valore precedente per l'integrale di Jacobi è stato scritto in un sistema di riferimento corotante. Si vuole ora procedere con la scrittura di tale costante in un *S.d.R.* inerziale. E' interessante notare come viene riscritta tale costante e come, fisicamente, sia possibile legarla ad una barriera di energia-momento angolare che permette



**Fig. 2.7:** Sezione tra il piano costante di Jacobi e la superficie di Jacobi generica. Sono indicati i punti lagrangiani (in verde), la posizione delle due masse  $M_1$  ed  $M_2$  (in giallo), la zona concessa al moto la posizione della condizione iniziale per la particella di prova  $x_0, y_0$  e l'orbita della particella (in nero). Sotto è proposto un ingrandimento.

di capire come, in un disco di planetesimi, esistano zone prive di particelle. Tale strumento di analisi viene qui solo presentato e è ampliato ed approfondito nel seguito di questa tesi. In pratica ciò che bisogna fare è sostituire il valore della velocità  $\vec{v}$  della particella con quello della  $\vec{V}$  (velocità misurata nel *S.d.R.* inerziale). Si ricorda innanzitutto come la velocità di un corpo nel *S.d.R.* inerziale è correlata con quella nel *S.d.R.* rotante dalla seguente identità vettoriale:

$$\vec{V} = \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (2.33)$$

Quindi:

$$\vec{v}^2 = \vec{V}^2 - 2\vec{V} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) + |\vec{\omega} \times \vec{r}|^2. \quad (2.34)$$

si riscriva poi  $\vec{\omega} \times \vec{r}$  come:

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} 0\hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & n \\ x & y & z \end{vmatrix} = -ny\hat{x} + nx\hat{y},$$

e  $|\vec{\omega} \times \vec{r}|^2$  come:

$$|\vec{\omega} \times \vec{r}|^2 = \vec{\omega} \cdot \vec{h}. \quad (2.35)$$

Il termine  $n \equiv$  *velocità angolare* della particella. utilizzando poi la seguente identità vettoriale:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) \quad (2.36)$$

è possibile riscrivere il secondo termine dell'equazione (3.33) come segue:

$$\vec{V} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{V}) \quad (2.37)$$

$$= \vec{\omega} \cdot \left( \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \quad (2.38)$$

$$= \vec{\omega} \cdot \vec{h}. \quad (2.39)$$

Dove si è fatto uso del termine  $\vec{h}$  per descrivere il momento angolare rispetto il sistema inerziale. Quindi in definitiva è possibile riscrivere l'equazione (3.34) come segue:

$$\vec{v}^2 = \vec{V}^2 - 2\vec{\omega} \cdot \vec{h} + \vec{\omega} \cdot \vec{h}, \quad (2.40)$$

che, inserita nella definizione di integrale di Jacobi da:

$$C_J = \frac{1}{2}V^2 - n^2 \left( \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \right) - \vec{\omega} \cdot \vec{h}. \quad (2.41)$$



E' infine possibile esprimere in termini dell'energia totale  $E$  del sistema il valore  $C_J$  (in questo modo si capisce come tale valore rappresenti un vincolo energetico al moto della particella). Si moltiplica tale costante per  $a^2$  (con a *semiasse maggiore* dell'orbita della particella) affinché risulti essere un termine adimensionale. Si ricorda come:

$$a^2 n^2 \mu_i = \frac{a^2 G(m_1 + m_2) m_i}{a^3(m_1 + m_2)} = \frac{G m_i}{a}. \quad (2.42)$$

Dove  $\mu_i$  ed  $m_i$  sono, rispettivamente, la massa ridotta e la massa fisica della particella di prova  $i$ -esima. E' possibile riscrivere infine l'integrale di Jacobi come:

$$C'_J = C_J a^2 = \frac{1}{2} V'^2 - \left( \frac{G m_1}{r_1} + \frac{G m_2}{r_2} \right) - m h'_z = E' - n h'_z. \quad (2.43)$$

I termini con l'apice sono stati ricavati tenendo presente che il nuovo valore di  $C'_J$  è adimensionale e quindi:

- $V a = V'$ ;
- $\vec{h} a^2 = \vec{h}'$ ;
- $\vec{\omega} \cdot \vec{h} = n h'_z$ ;
- $E' = \frac{1}{2} V'^2 - \left( \frac{G m_1}{r_1} + \frac{G m_2}{r_2} \right)$ .

Dunque, in forma compatta:

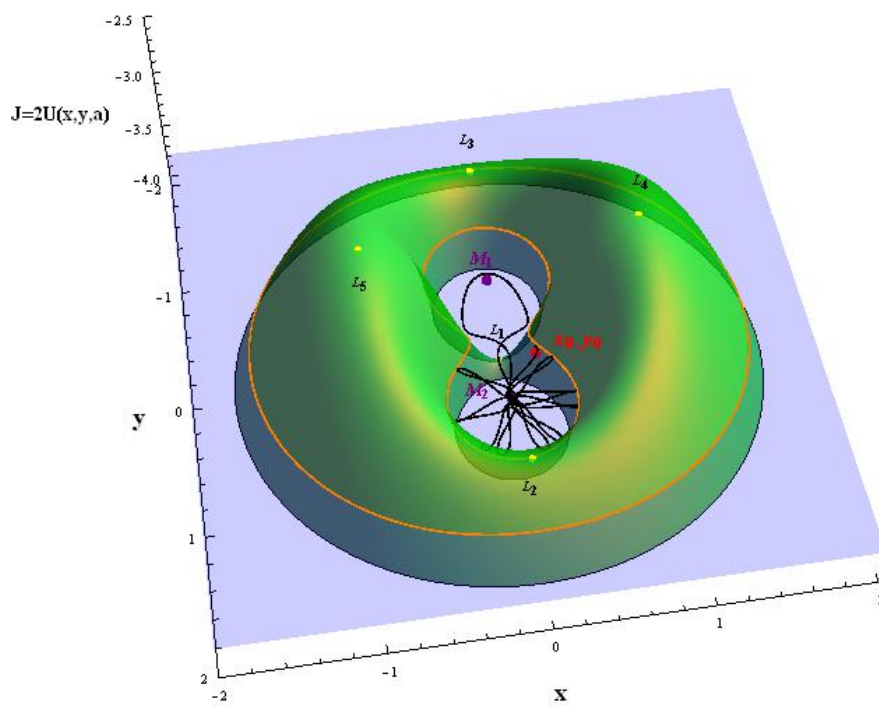
$$C_J = E' - n h'_z. \quad (2.44)$$

Il valore della costante di Jacobi ricavato in (2.24) è un integrale primo del moto nel *S.d.R.* inerziale ed è conservato. In altri termini una particella può modificare sia il valore dell'energia totale che del suo momento angolare, interagendo con altri corpi, ma la differenza tra i due deve rimanere costante nel tempo. E' questa la *barriera energia-momento angolare* che è stata citata precedentemente e che permette di capire in dettaglio i risultati dell'analisi lineare sulla stabilità che vengono proposti nel seguito.

### 2.3.1 La costante di Jacobi come misura della precisione di un algoritmo

Per realizzare le varie orbite presentate precedentemente, è stato scelto di integrare il problema dei tre corpi ristretto con il software *MATHEMATICA*<sup>®</sup> che presenta molte routine già testate al suo interno ed un'ottima versatilità, velocità di calcolo ed interaccia grafica (figura 2.8).

### Superficie di Jacobi con Moto



**Fig. 2.8:** Immagine che racchiude ciò che è stato detto fin'ora. La superficie di Jacobi, il piano costante di Jacobi e la traiettoria della particella. *MATHEMATICA*<sup>®</sup> offre delle librerie grafiche di notevole interesse per la realizzazione di grafici molto suggestivi come quello qui presentato.

Una così vasta scelta di algoritmi e strutture per l'integrazione di un sistema di equazioni alle derivate ordinarie comporta però una difficoltà sostanziale: la scelta dell'algoritmo. Sono infatti stati scelti sei algoritmi già implementati nel software a cui è stato aggiunto un settimo algoritmo definito dall'utente.

Nella tabella 1 è stato riportato il tempo necessario (fissata una condizione iniziale ed una precisione numerica) per i sette algoritmi utilizzati. Ciò è stato possibile attraverso il comando `//Timing`.

Method	MaxSteps	Working Precision	Timing [sec.]
Adams	50.000	32	11.466
ExpMod MidPoint	50.000	32	2.839
ExtrLinImpEuler	50.000	Automatic	12.995
StiffnessSwitching	50.000	Automatic	1.409
StiffSwitch+RK4th	50.000	Automatic	0.94
ExpRK9th	50.000	32	1.58
AdamsBM4th	50.000	32	13.244

**Table 2.1:** *I sei algoritmi numerici analizzati.* Se si effettua la scelta solo in base alla velocità con cui l'algoritmo integra il problema, si commette un errore in quanto ciò non tiene minimamente conto della precisione dello stesso. Si va infatti a prediligere il costo computazionale dell'algoritmo ma non la sua precisione.

Per studiare la precisione di ogni algoritmo è stato necessario utilizzare la costante di Jacobi. Essa come detto è un integrale primo del moto e, per definizione, si deve conservare nel tempo. Si calcola quindi la differenza tra il valore iniziale di tale costante (ottenuto inserendovi le condizioni di velocità e posizione iniziali) e quello ottenuto ad ogni step temporale d'integrazione:

$$\Delta C_J = \left( C_J(t) - C_J(0) \right) / C_J(0), \quad (2.45)$$

$$C_J(0) = 2U(x_0, y_0, a) - \dot{x}(t_0)^2 - \dot{y}(t_0)^2.$$

Più la differenza tra tali valori è piccola maggiore è la precisione con cui l'algoritmo conserva l'energia. Maggiore è la precisione con cui si conserva l'energia, maggiore è la fedeltà con cui viene riprodotta un'orbita (rispetto al vincolo dovuto a  $C_J$ ). I sistemi Hamiltoniani sono infatti sistemi *simpletici*, nel senso che non modificano, durante l'evoluzione temporale, il volume dello spazio delle fasi. Maggiore è l'accuratezza dell'algoritmo maggiore è la conservazione (numerica) di tale volume. Di seguito è riportata la sintassi che è stata utilizzata per ricavare tale valore.

```
int i=0;
```

```

int tfin=100;
for(i=0;i=tfin;i++){
C(i)=(C(i)-C(0))/C(i)
}
endfor

```

E' infine riportata, nella tabella 2 il valore massimo che assume questo parametro.

Method	Picco Massimo
Adams	$6 \times 10^{-9}$
ExpModMidPoint	diverge per $t > 12t_{din}$
ExtrLinImpEuler	0.015
StiffnessSwitching	0.02
StiffSwitch+RK4th	0.002
ExpRK9th	$6 \times 10^{-7}$
AdamsBM4th	$6 \times 10^{-8}$

**Table 2.2:** Valore di  $\Delta C_J^{max}$ . per ogni algoritmo. Per ogni algoritmo è stato calcolato il  $\Delta C_J$  ed è stato inserito nella tabella il discostamento massimo ottenuto durante l'integrazione dell'orbita. L'algoritmo di Adams ha una precisione maggiore rispetto gli altri.

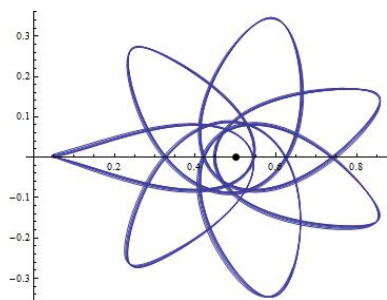
Come visto nella tabella 2.2 l'algoritmo di Adams ha una precisione molto elevata ed è stato dunque scelto per l'integrazione del problema dei tre corpi ristretto. Anche l'algoritmo di Adams Bashfort Moulton del quart'ordine (ADM4th) ha una precisione elevata. La differenza è che il metodo di Adams utilizza un ordine di integrazione che è fissato di default dal software. L'algoritmo di ABM4th è stato realizzato dall'utente e, fermandosi ad un ordine relativamente basso, presenta una buona seppur minore precisione rispetto il metodo di Adams (figura 2.9).

## 2.4 Feeding Zone

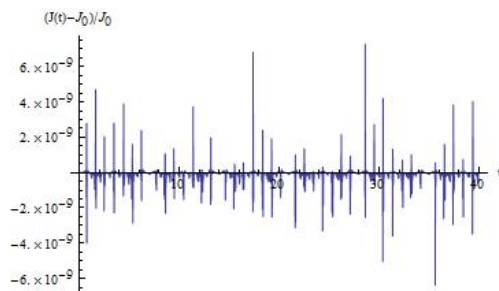
Un metodo certamente più rigoroso per ricavare un criterio di stabilità é il seguente.

Si definisce con:

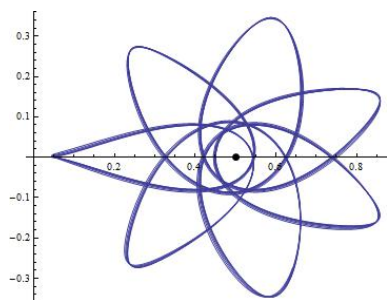
- $a_{out}$ : la distanza dell'orbita circolare della particella di prova,
- $a_{in}$ : la distanza dell'orbita circolare del secondario (pianeta),
- $\Delta = \frac{a_{out}}{a_{in}} - 1$ : parametro adimensionale che descrive la separazione orbitale tra i due corpi,



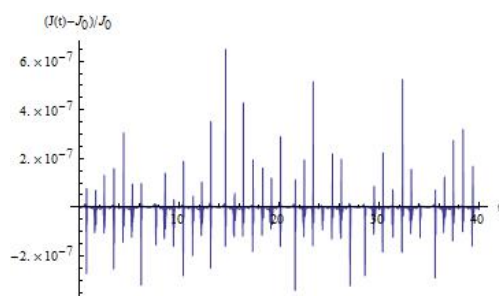
(a) Orbita nello spazio delle configurazioni utilizzando l'algoritmo di Adams.



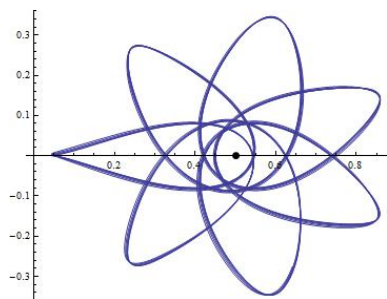
(b) Andamento di  $\Delta C_J$  per l'algoritmo di Adams.



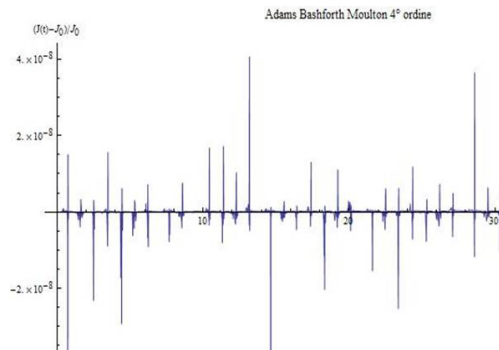
(c) Orbita nello spazio delle configurazioni utilizzando l'algoritmo di Runge-Kutta al nono ordine.



(d) Andamento di  $\Delta C_J$  per l'algoritmo di Runge-Kutta al nono ordine.



(e) Orbita nello spazio delle configurazioni utilizzando un algoritmo di tipo *Stiffness*.



(f) Andamento di  $\Delta C_J$  per l'algoritmo di tipo *Stiffness*

**Fig. 2.9:** Tre differenti algoritmi ognuno con una precisione differente. L'orbita scelta è la stessa e, come si vede la precesione dell'algoritmo è differente nei tre casi. Anche se non si riesce a notare la differenza da un punto di vista della traiettoria per i tre casi: (a), (c) ed (e). La differenza è invece evidente quando si osserva l'andamento di  $\Delta C_J$  (pannelli (b) (d) ed (f)). Nel caso dell'algoritmo di Adams questo valore è marcatamente più piccolo rispetto agli altri casi. Ciò consente di asserire che è quest'ultimo algoritmo a preservare meglio la struttura delle orbite senza introdurre errori numerici elevati.

- $q_{in} = \frac{M_p}{M_*}$ : rapporto tra le masse del secondario ( $M_p$ ) e del corpo primario ( $M_*$ ).

Riscrivendo con questo nuovo formalismo la condizione (2.32) si ottiene:

$$\Delta > 2.4q_{in}^{1/3}. \quad (2.46)$$

Il valore di tale parametro, confermato anche dalle nostre simulazioni numeriche, descrive la cosiddetta *feeding zone* o zona d'influenza (Donnison and Williams [1983]; G. B. Valsecchi [1983]). Poiché dimensionalmente  $[\Delta] = [r_H]$  è come dire che un pianeta perturba fortemente una particella di prova se essa si trova ad una certa distanza che è dell'ordine di qualche raggio di Hill. Il termine *fortemente* è stato messo in risalto poiché la forza gravitazionale è, come noto, una forza a lungo range e quindi tutto il disco risente dell'influenza del pianeta ma nella zona delimitata dall'equazione (2.46) l'interazione con il pianeta è così forte da generare delle modifiche sostanziali ai parametri orbitali dei planetesimi (o particelle di prova) quali l'eccentricità e l'inclinazione, tanto da scatterare i planetesimi su orbite non più circolari od ellittiche. In prima approssimazione l'estensione di tale zona è definita come *gap*. Si fa però fin da subito notare come ciò non sia del tutto vero in quanto esistono due differenti processi fisici che concorrono alla creazione di questo gap. Il primo non consente il moto a causa di vincoli energetici (la barriera di potenziale), mentre il secondo, genera traiettorie così instabili che dopo un tempo relativamente piccolo esse divergono e si ha un completo svuotamento della zona interessata da questo fenomeno. E' possibile estendere tale trattazione al caso in cui la particella di prova abbia una massa non trascurabile e che dunque, anch'essa abbia un'influenza gravitazionale sugli altri due corpi. Si generalizzano i parametri precedenti come segue:

- $q_{in} = \frac{M_p^{(1)}}{M_*}$ : rapporto tra le masse del secondario ( $M_p^{(1)}$ ) e del primario ( $M_*$ ),
- $q_{in} = \frac{M_p^{(2)}}{M_*}$ : rapporto tra le masse del secondario ( $M_p^{(2)}$ ) e del primario ( $M_*$ ).

In particolare è possibile identificare con  $M_p^{(2)}$  il planetesimo mentre con  $M_p^{(1)}$  il pianeta. In questo caso si ottiene un valore di stabilità "alla Hill" generalizzato (Gladman [1993]; Marchal and Bozis [1990]; Donnison [2010]):

$$\Delta > 2 \times 3^{1/6}(q_{out} + q_{in})^{1/3} + [2 \times 3^{1/3}(q_{out} + q_{in})^{2/3} - \dots] + O(q). \quad (2.47)$$

Si osserva come l'equazione precedente sviluppata nel caso generale in cui anche la particella di prova abbia una massa diversa da zero può essere ricon-

dotto al caso iniziale supponendo  $q_{out} \ll 1$ . Si ottiene il seguente risultato di stabilità lineare al prim'ordine in  $q$ :

$$\Delta > 2.4(q_{out} + q_{in})^{1/3}. \quad (2.48)$$

Analogo al criterio precedente ma in cui semplicemente è stato possibile introdurre un termine perturbativo dovuto della particella di prova, supposta ora "leggermente" massiva (X. Liu and Ma [2012]; Georgakarakos [2008]). Quest'ulteriore approssimazione risulta fisicamente più che giustificabile: il secondario identificato con l'indice <sup>(2)</sup> infatti è un planetesimo e quindi possiede una massa molto inferiore rispetto a quella del pianeta (che si ricorda esser stato identificato con l'indice <sup>(1)</sup>) e del primario ( $M_*$ ).

Analogamente è possibile introdurre anche la dipendenza dall'eccentricità e dall'inclinazione dei due secondari, generalizzando ulteriormente tale criterio, nel seguito è proposta una condizione semplificata, in cui si è assunto che i due secondari abbiano la stessa massa ( $q = q_{out} = q_{in}$ ) e che solo l'eccentricità risulti essere diversa da zero (Veras and Armitage [2004]):

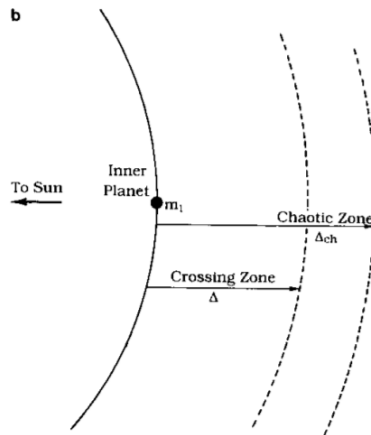
$$\Delta > \sqrt{\frac{8}{3}(e_{out}^2 + e_{in}^2) + 9q^{2/3}}. \quad (2.49)$$

E' inoltre importante far notare come, aggiungendo un altro secondario massivo, il sistema potrebbe essere ancora considerato stabile secondo Hill ma le interazioni tra i due secondari, anche se piccole, potrebbero sommarsi nel tempo (effetti di risonanza) e generare una configurazione instabile consentendo la fuga di una delle due masse. Quindi la stabilità secondo Hill risulta essere una condizione sufficiente non necessaria. Altri tipi di stabilità si possono studiare per problemi di questo tipo (stabilità di Lagrange che è un criterio necessario per la stabilità del sistema studiato, stabilità di Poincaré ...) ma una trattazione approfondita di queste condizioni esula dal programma di tesi.

## 2.5 Chaotic Zone

In realtà la dimensione del gap, come è possibile osservare dall'istogramma presentato qui di seguito (figura 2.10), è maggiore poiché entra in gioco non solo una barriera energia-momento angolare (come già detto in precedenza) ma anche la sovrapposizione di risonanze gioca un ruolo fondamentale per l'estensione del gap (Murray e Dermott, 2001; Morbidelli, 2001; Wisdom [1980]). Per chiarire meglio il concetto viene introdotta la figura sottostante che permette di osservare come, la sola condizione descritta nell'equazione (2.46) generi un gap minore rispetto quello generato introducendo anche l'interazione dovuta ai termini di risonanza. Ciò è visibile nella figura seguente nella quale è riportato dall'articolo di Gladman [1993], la differente ampiezza della zona priva di planetesimi. Il gap infatti

è composto da una zona più interna in cui una barriera di momento angolare ed energia vincola l'orbita dei planetesimi<sup>7</sup>, ed una zona più esterna in cui lo svuotamento di materiale, è regolato da fenomeni caotici dovuti alla sovrapposizione delle risonanze (*chaotic zone*), la somma di queste due zone definisce quella che è, comunemente chiamata *feeding zone*.



**Fig. 2.10:** *Estensione del gap per componenti.* Il gap che si osserva nelle simulazioni è generato da due fattori distinti. Il primo e più interno, dovuto ad una condizione sul momento angolare e sull'energia mentre, quello più esterno, dovuto alla sovrapposizione di risonanze.

Il motivo per il quale, nell'analisi di stabilità alla Hill, è stata ricavata solo la condizione ottenuta in (2.46) è che il potenziale utilizzato non tiene conto dei termini periodici del problema dei tre corpi e cioè, non tiene conto delle risonanze orbitali.

È possibile infatti osservare come l'introduzione di orbite risonanti all'interno del problema dei tre corpi cambi drasticamente il *tipo* di orbita per la particella di prova. Se infatti nei casi precedenti le orbite ricorrevano *densamente* la zona del moto, nel caso di orbite risonanti ciò non succede. È possibile notare ciò nella figura 2.11 in cui è stata integrata un'orbita in risonanza 1 : 1 con il pianeta. Come è possibile notare la particella di prova, anche se vincolata solo dalla zona azzurra non se ne discosta mai di molto. Ciò consente di capire la prima differenza tra orbite risonanti ed orbite non risonanti.

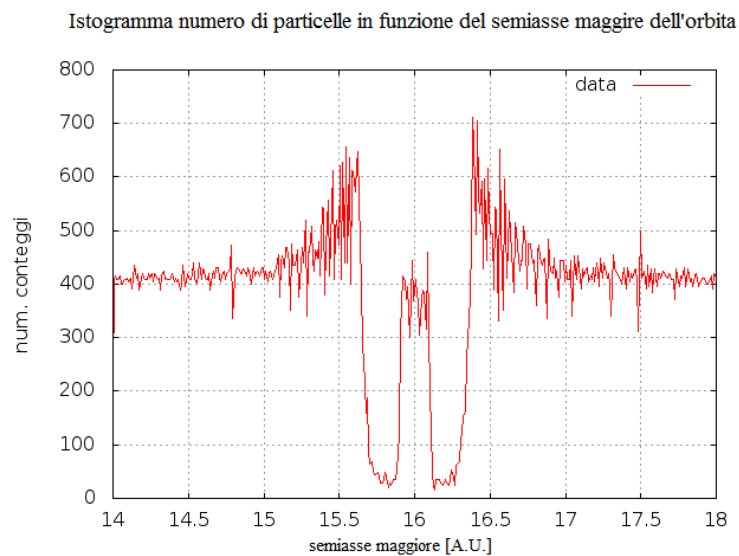
Per comprendere meglio la figura è necessario discutere la fisica alla base alle risonanze. Un'orbita si dice in risonanza quando il rapporto tra il periodo orbitale della particella che la percorre è in rapporto commensurabile con il periodo orbitale di uno dei due corpi massivi<sup>8</sup>.

<sup>7</sup>In questo caso tale zona viene definita *crossing zone*.

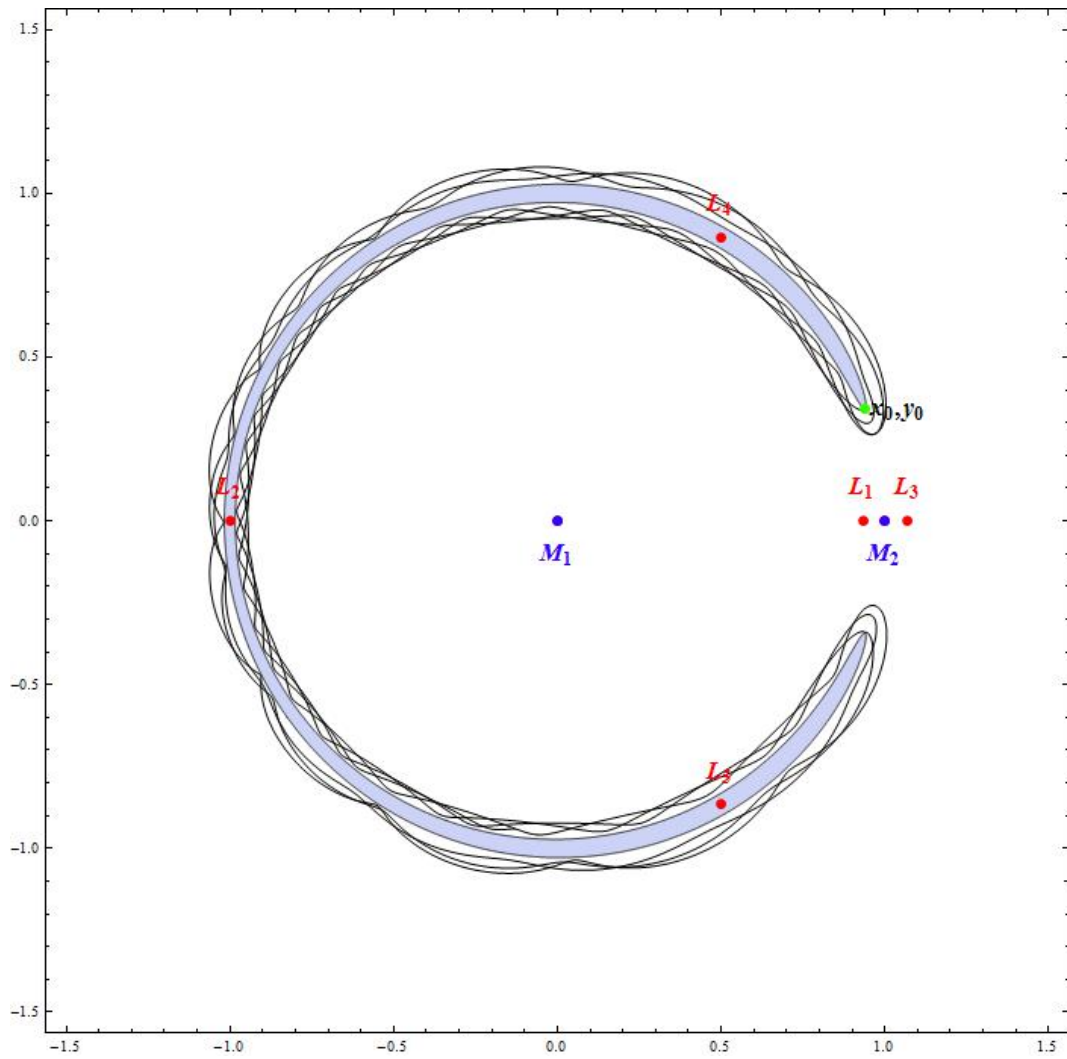
<sup>8</sup>Si possono citare moltissimi casi di orbite risonanti quali:

- le risonanze tra Giove e gli asteroidi *Troiani* ed *Ateniesi*;





**Fig. 2.11:** *Istogramma del numero di planetesimi in funzione del loro semiasse maggiore.* L'istogramma presentato in figura consente di osservare come una determinata zona, molto vicina al pianeta sia priva di particelle di prova. Avvicinandosi al pianeta ad una certa distanza il numero di particelle in unità di semiassemaggiore risulta diminuire drasticamente fino a zero per poi riniziare ad aumentare e tornare circa costante quanto più ci si avvicina al pianeta. Ciò viene spiegato anche con la cosiddetta sovrapposizione di risonanze. Nel caso corotante e controtante, cambiando la condizione di risonanza, cambia anche l'estensione di questa zona caotica.



**Fig. 2.12:** *Orbita in risonanza 1:1 con il pianeta. Tale orbita sia vincolata a rimanere vicino alla condizione iniziale di partenza  $(x_0, y_0)$ . Come se tale orbita fosse più stabile rispetto le orbite non risonanti.*

In formule, siano  $n$  ed  $n'$  le velocità angolari medie (periodi orbitali) di due corpi celesti, la condizione affinché essi siano in risonanza è la seguente:

$$\frac{n}{n'} = \frac{p}{p+q} \quad (2.50)$$

con  $p$  e  $q \in \mathbb{Z}^\pm$ .

Nel S.d.R. coorbitante la definizione precedente viene riscritta come:

$$\frac{n - \dot{\varpi}}{n' - \dot{\varpi}'} = \frac{p}{p+q} \quad (2.51)$$

con  $\varpi$  e  $\varpi'$  longitudini del pericentro delle due particelle. E' quindi possibile trovare la posizione  *nominale*  delle risonanze in funzione del semiasse maggiore dell'orbita del corpo massivo (figura 2.12).

Se però si sposta la condizione iniziale molto vicino al pianeta si osserva come l'orbita in risonanza, che prima era un'orbita anche stabile, diventa un'orbita molto più simile alle orbite non risonanti osservate nel paragrafo precedente (figura 2.13).

E' stato già detto come le orbite non risonanti riempiano "tutto" lo spazio a disposizione. Si definisce ora il concetto di orbita  *ergodica* .

**Definizione 2.1** (Orbita ergodica). Un'orbita si dice ergodica se, nel corso del tempo essa ricoprirà densamente (a meno di un insieme di misura nulla) la superficie  $(n-1)$ -dimensionale determinata dalla conservazione dell'energia.

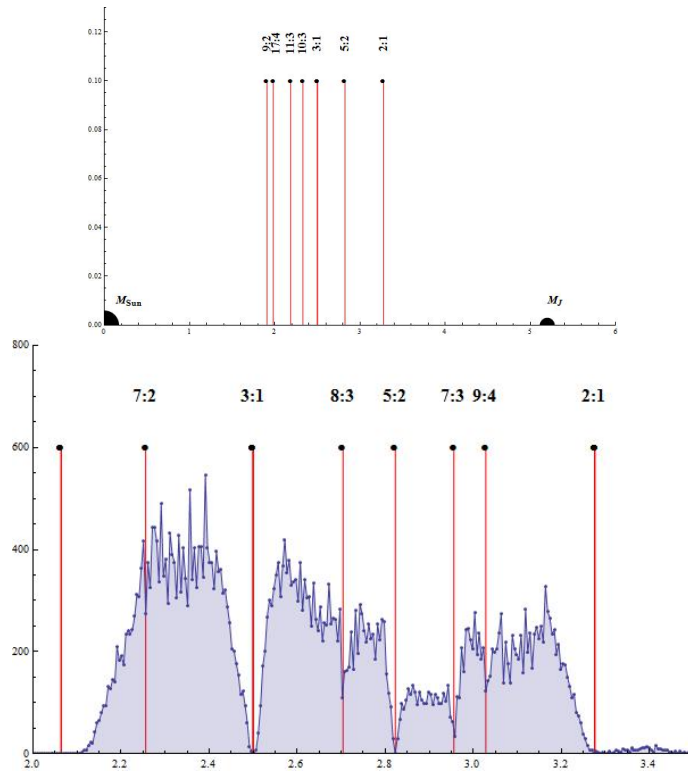
Il concetto di orbita ergodica non è nuovo nel problema dei tre corpi (Salo and Yoder [1987]). Ma una trattazione approfondita sull'argomento è, ad oggi, non nota per l'autore di questo elaborato. I risultati che seguono faranno luce dunque sul problema dei tre corpi ridefinendolo non più come semplicemente caotico (ergodico) od ordinato (stabile) bensì andando a definire il concetto in modo locale per differenti zone dello spazio delle fasi.

Lo strumento che permette di capire se le orbite di cui sopra sono effettivamente ergodiche o regolari è l'esponente caratteristico di Lyapunov (LCE). E' stato realizzato un codice (Appendice B) che consente l'integrazione delle equazioni del moto e attraverso il metodo delle  *shadow particles*  è possibile dare una risposta quantitativa sull'effettivo grado di caoticità delle varie orbite che sono state prima presentate.

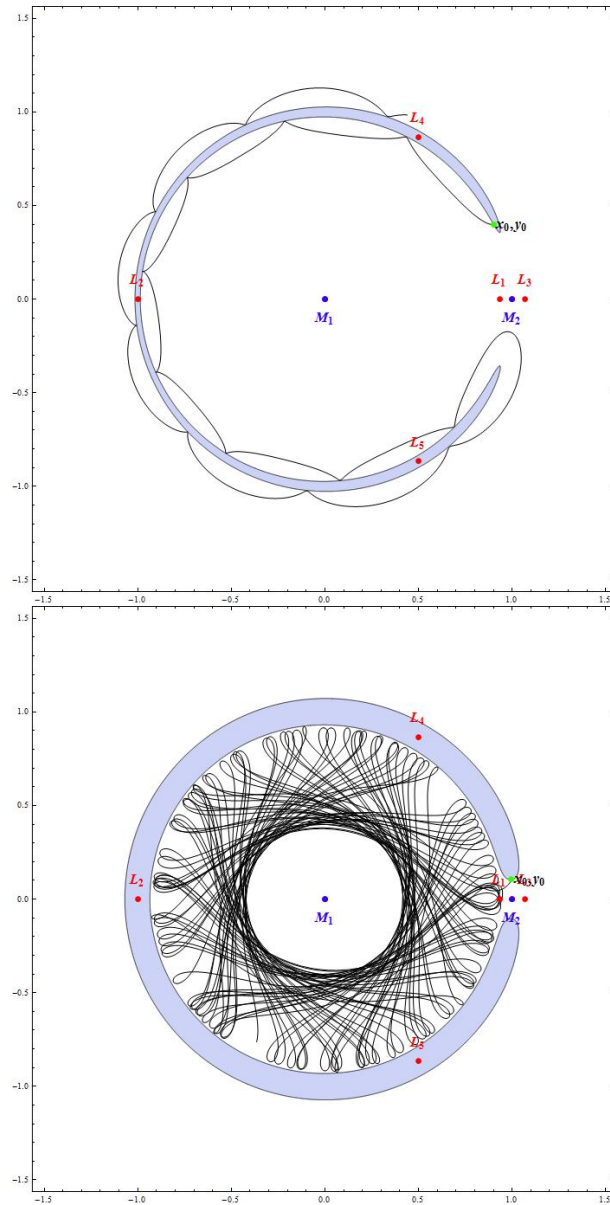
### 2.5.1 L'esponente caratteristico di Lyapunov

Dato un sistema dinamico è possibile studiarne la stabilità (o l'instabilità) esponenziale attraverso il metodo dell'esponente di Lyapunov (Casciati, 1993).

- 
- le risonanze nel sistema extrasolare KOI-730, in cui ben quattro pianeti hanno periodo orbitale commensurabile.



**Fig. 2.13:** *Posizione delle risonanze ed istogramma del numero di asteroidi in funzione della distanza.* In alto: posizione nominale delle risonanze per il sistema Sole-Giove. In Basso: istogramma del numero di asteroidi noti all'interno della Fascia Principale sovrapposto con la posizione di alcune risonanze con Giove. Si osserva come nella posizione di alcune delle risonanze non ci sono asteroidi  $3 : 1$  e  $5 : 2$  mentre in altre risonanze (come ad esempio  $3 : 2$  che non è indicata in questo grafico) se ne osservano parecchi e proprio nella posizione in cui tali risonanze sono definite.



**Fig. 2.14:** *Orbite di due particelle in risonanza 1 : 1 con un pianeta di massa Gioviiana.* In alto: Una risonanza che genera orbite stabili. La particella rimane vincolata alla sua superficie di velocità nulla. Si hanno dei piccoli spostamenti periodici da tale superficie. Tali spostamenti vengono chiamate librazioni. In Basso: La risonanza è la stessa (1 : 1), è cambiata invece la posizione iniziale della particella di prova che ora è molto vicina al pianeta. L'orbita è completamente differente dalla precedente ed è molto simile alle orbite non risonanti viste in precedenza.

Si può dimostrare che questo tipo di instabilità va di pari passo con il concetto di *stabilità stocastica* (cit. Khasminskii, 1993) e che la stabilità o meno di un sistema dinamico sia fortemente dipendente dalle condizioni iniziali<sup>9</sup> (Osdelec, 1981). Ma è anche vero il contrario: un sistema instabile secondo Lyapunov è un sistema stocastico e quindi presenta delle orbite di tipo ergotico. Si definisce un sistema dinamico continuo in uno spazio delle fasi  $n$ -dimensionale, dove  $n$  è il numero di coordinate del sistema, si considerano ora tutti i punti all'interno di un iper-sfera di raggio  $r_0$ . Durante l'evoluzione temporale nello spazio delle fasi, tale iper-sfera viene deformata e diventa, in generale, un ellissoide di assi principali  $r_i(t)$  (con  $i = 1, \dots, n$ ). E' possibile ricavare la distanza al tempo  $t$  generico partendo dalla distanza iniziale  $r_0$  attraverso la seguente formula:

$$r_i(t) = r_0 e^{\gamma_i(t-t_0)}, \quad (2.52)$$

dove il termine  $\gamma_i$  è definito come l' $i$ -esimo esponente di Lyapunov:

$$\gamma_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left( \frac{r_i(t)}{r_0} \right), \quad (2.53)$$

In generale solo sistemi con  $n > 3$  possono esibire comportamenti caotici e si può dimostrare che lo studio del solo Esponente Caratteristico di Lyapunov permette di distinguere tra moti caotici o meno. Studiando l'andamento di tale esponente (che ha le misure di un  $t^{-1}$ ) è possibile ricavare il *tempo di Lyapunov* che descrive la velocità con cui un sistema tende a diventare caotico (ergodico). In un piano *Log - Lin* o *Log - Log* l'evoluzione di tale esponente nel tempo permette di comprendere immediatamente se si è in presenza di orbite ergodiche o periodiche. Se infatti si ha una slope negativa (solitamente vicina a  $-1$ ) allora il moto è certamente regolare poichè la distanza tra le due orbite converge nel tempo. Se invece l'esponente è positivo o il suo andamento è costante nel tempo allora l'orbita è caotica (figura 2.14).

## 2.6 sovrapposizione di risonanze

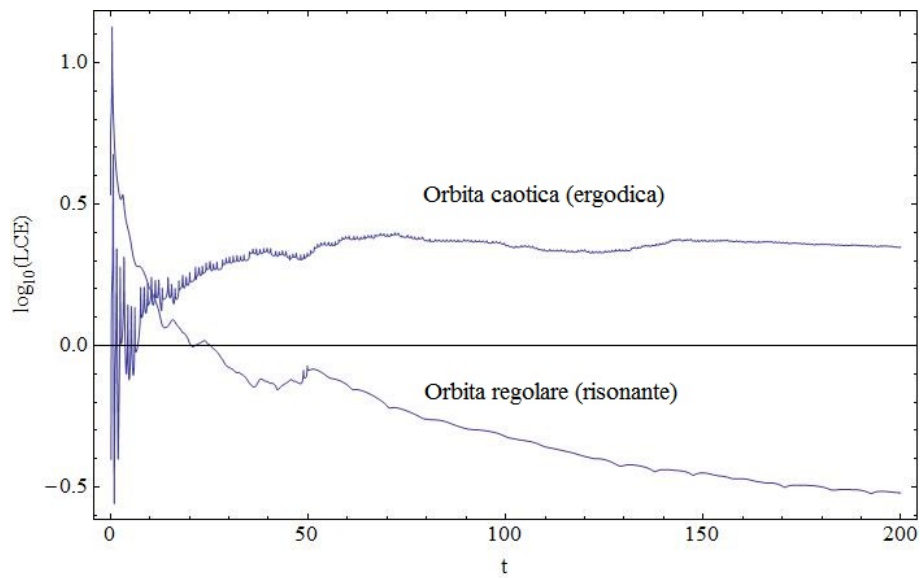
Come visto nella sezione 2.5 esistono orbite ergodiche (con esponente di Lyapunov positivo e/o costante), orbite risonanti ordinate (con esponente di Lyapunov decrescente nel tempo) ed infinite orbite risonanti ma caotiche.

Come già accennato questo *ritorno* al chaos delle orbite risonanti avviene quanto più ci si avvicina alla posizione del pianeta. Ciò è evidente nella figura 2.15 in cui due orbite in risonanza (1:1) presentano diversi andamenti nel tempo.

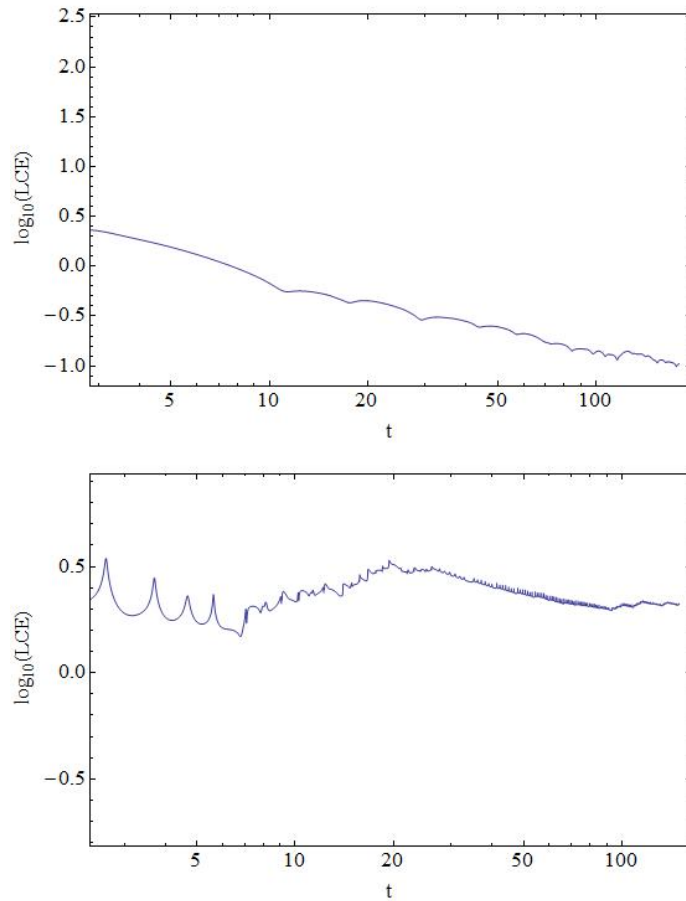
L'esponente di Lyapunov, ancora una volta, consente di comprendere quantitativamente la differenza tra le due orbite.

---

<sup>9</sup>Dimostrazione effettuata applicando il Teorema Ergodico.



**Fig. 2.15:** *Due orbite differenti per il problema dei tre corpi.* Si nota come l'orbita caotica ha un valore del LCE positivo e costante. Il solo fatto di essere positivo garantisce un'instabilità esponenziale nel tempo ma la cosa interessante è che, anche se fosse stato negativo ma comunque costante, tale orbita sarebbe comunque stata instabile. Il secondo caso è invece quello di un'orbita periodica e risonante. Come si può facilmente vedere la slope per tale orbita è circa  $-0.4$  quindi essa è regolare.



**Fig. 2.16:** *Andamento dell'Esponente Caratteristico di Lyapunov (LCE).* In alto: L'esponente di Lyapunov per un'orbita in risonanza (1 : 1) con il pianeta, è evidente che l'orbita in questione sia un'orbita regolare. In basso: Aumentando la vicinanza al pianeta (di massa  $M_1$ ) è possibile osservare un comportamento nuovamente caotico per l'orbita della particella di prova. Ciò è evidente nell'andamento nel tempo dell'Esponente Caratteristico di Lyapunov (LCE). Per un confronto, le orbite nello spazio delle coordinate sono presentate in figura 2.14.



Seguendo il procedimento presentato in "Modern Celstial Mechanics" (Morbidelli, 2001) è possibile spiegare gli andamenti precedenti.

Due orbite sono in risonanza quando il rapporto tra le due frequenze orbitali sono commensurabili, in formule:

$$|\Omega(r) - \Omega_p| = \frac{m}{n}k(r), \quad (2.54)$$

dove  $\Omega(r)$  ed  $\Omega_p$  sono, rispettivamente, la velocità angolare del pianeta e la frequenza orbitale della particella a distanza  $r$  dal centro del disco;  $k$  è la frequenza di epicyclo radiale dei planetesimi. Infine  $m$  ed  $n$  sono due interi. Dalla terza legge di Keplero si può ricavare l'andamento delle risonanze in funzione del semiasse maggiore. E' ora possibile esprimere la differenza tra due risonanze adiacenti ( $k + 1$  e  $k - 1$ ) come segue:

$$\Delta a = a_{planet} \left| \left( \frac{k-1}{k} \right)^{3/2} - \left( \frac{k}{k+1} \right)^{3/2} \right|. \quad (2.55)$$

In questo caso, si osserva subito come, per risonanze di ordine<sup>10</sup> molto elevato l'andamento dell'equazione (2.55) risulta essere il seguente:

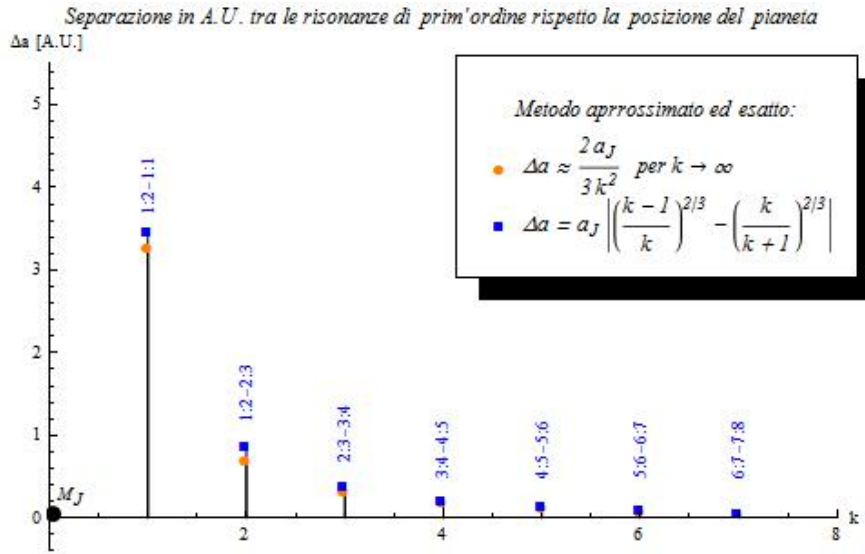
$$\Delta a = \frac{2a_{planet}}{3k^2}. \quad (2.56)$$

Aumentando l'ordine della risonanza diminuisce la distanza tra le stesse e la distanza con il pianeta in quanto il rapporto  $m : n$  (in questo caso  $k/k+1$ ) tende ad 1, cioè alla posizione del pianeta. E' evidente tutto ciò che nella figura 2.16 in cui sono presentate le due equazioni (equazioni 2.55 e 2.56).

Si aggiunge però come una particella posta in risonanza abbia un *periodo di librazione* ben preciso che non la vincola alla posizione nominale della risonanza bensì le consenta di muoversi un po'. Questo moto è evidente nella figura 2.17 in cui è presentata una particella in orbita risonante intorno al punto lagrangiano  $L_4$ . Tale particella non si discosta mai di molto dal bordo che divide la zona in cui il moto è concesso dalla zona in cui non lo è ma, comunque, non rimane sempre completamente vincolato ad esso. Si può comprendere in modo qualitativo questo fenomeno pensando ad una risonanza come ad un'interazione gravitazionale periodica tra il pianeta e la particella di test. Quando si ha la risonanza e cioè quando le due particelle sono in congiunzione l'integrazione gravitazionale è massima, quando sono in opposizione la forza gravitazionale è minima. In questo modo la particella ha un moto oscillatorio attorno al pianeta che, in un *S.d.R.* corrotante con esso, genera un'orbita con una forma caratteristica.

---

<sup>10</sup>L'ordine della risonanza, in questo caso è il valore  $k$ . In generale, per una risonanza di tipo  $m : n$  (con  $m > n$ ), l'ordine della risonanza è  $m - n$ . Altrimenti per valori di  $m < n$ , l'ordine della risonanza è semplicemente uguale ad  $m$ .



**Fig. 2.17:** Distanza tra risonanze adiacenti, normalizzata alla posizione del pianeta. In blu l'equazione non approssimata, in arancione quella approssimata per  $k$  molto grandi. Man a mano che l'ordine della risonanza aumenta, diminuisce la distanza tra le stesse e con il pianeta.

Un'analisi più approfondita di tale moto oscillatorio consente di quantificare la larghezza di questo spostamento radiale (*libration width*) in termini di semiasse maggiore ed eccentricità.

Questa trattazione segue quella del libro "Solar System Dynamics" di C.D. Murray e S.F. Dermott (2001) e ad esso si fa riferimento per una trattazione più approfondita.

E' possibile descrivere la distanza tra due corpi in termini dell'angolo che essi formano durante il moto, rispetto ad un asse di riferimento. Tale angolo è definito *angolo di risonanza*:

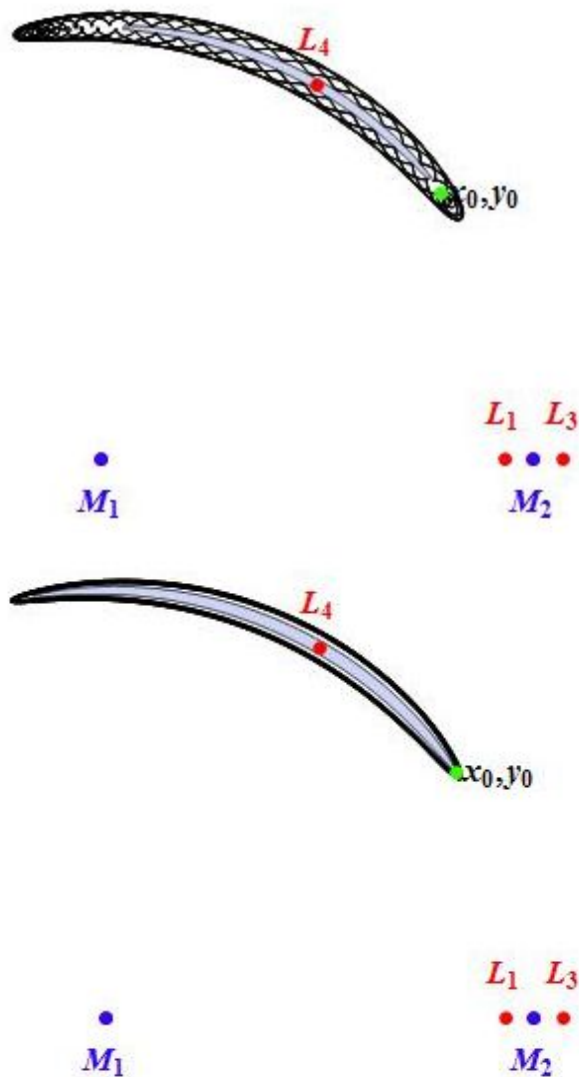
$$\varphi = (p + q)\lambda - p\lambda' - q\varpi, \quad (2.57)$$

dove  $\lambda$  e  $\lambda'$  rappresentano la longitudine media dei due corpi e  $\varpi$  è la longitudine del pericentro. Inoltre  $p$  e  $q$  sono due interi (positivi o negativi). Si derivi due volte l'equazione precedente rispetto al tempo e si ottiene:

$$\dot{\varphi} = (p + q)n - p(n' + \dot{\varepsilon}) - q\dot{\varpi}, \quad (2.58)$$

in questo caso  $\dot{\varepsilon}$  è la longitudine media della particella di prova ad un tempo arbitrario. La seconda derivazione:

$$\ddot{\varphi} = (p + q)\dot{n} - p\dot{\varepsilon} - q\ddot{\varpi}. \quad (2.59)$$



**Fig. 2.18:** In alto: Un'orbita in risonanza attorno al punto lagrangiano  $L_4$ . Queste orbite sono definite *tappole orbit* a causa della loro particolare forma. In Basso: La risonanza è la stessa (1 : 1), sono cambiate le componenti cartesiane della velocità iniziale. In questo caso l'orbita della particella di prova è eccentrica e la larghezza della librazione *libration width* è maggiore.

Nella (2.59) si ricorda come l'orbita del pianeta non varia nel tempo e quindi la derivata temporale di  $n'$  è uguale a zero.

Nel caso del problema dei tre corpi ristretto, le derivate  $\ddot{\epsilon}$  e  $\ddot{\omega}$  sono trascurabili. Inserendo la definizione di velocità angolare  $n$  in termini dell'angolo

di risonanza  $\varphi$  si può riscrivere l'equazione (2.59) come segue:

$$\ddot{\varphi} = -\alpha_0^2 \sin \varphi, \quad (2.60)$$

con  $\alpha_0^2$  costante.

Tale equazione descrive un oscillatore armonico di ampiezza  $\alpha_0^2$ . Tale valore si può esprimere in termini dei parametri orbitali della particella di prova. Per le risonanze di prim'ordine si ha:

$$\frac{\delta a_{max}}{a} = \pm \sqrt{\left(\frac{16|C_r|}{3n}e\right)}, \quad (2.61)$$

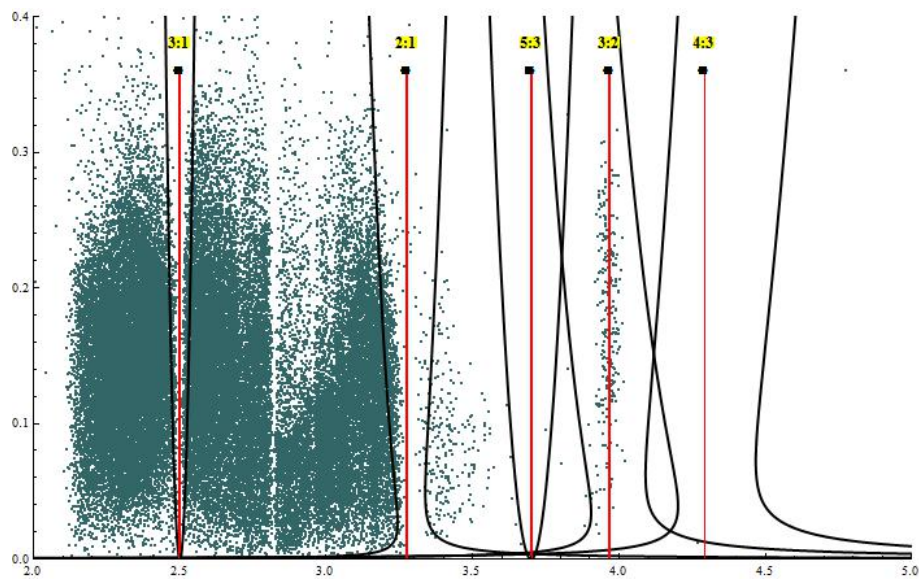
mentre per le risonanze di second'ordine:

$$\frac{\delta a_{max}}{a} = \pm \sqrt{\left(\frac{16|C_r|}{3n}e\right)\left(1 + \frac{1}{27e^3} \frac{|C_r|}{n}\right)} + \frac{2}{9e} \frac{|C_r|}{n}, \quad (2.62)$$

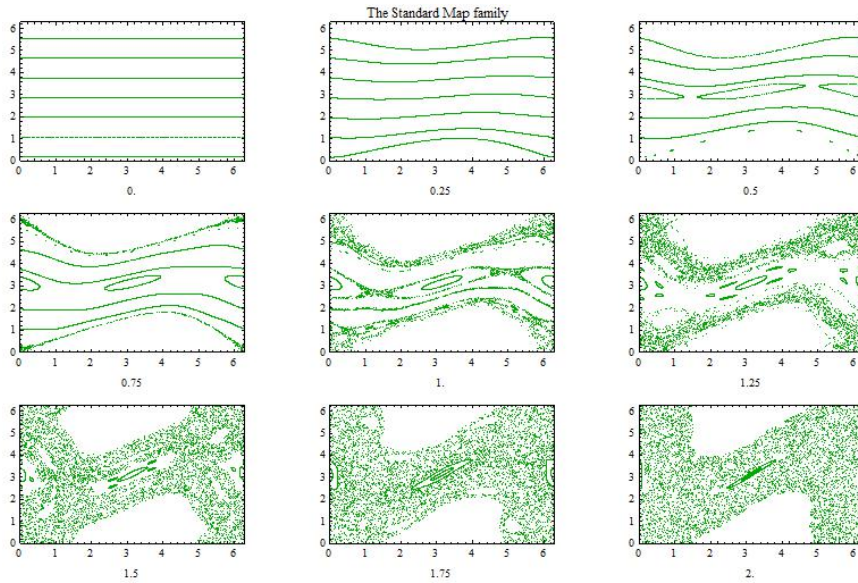
Nelle due equazioni (2.61) e (2.62) i termini  $|C_r|$ ,  $n$ ,  $e$  e  $a$  sono rispettivamente: una costante di integrazione, la velocità angolare media, l'eccentricità e il semiasse maggiore della particella.

L'equazione precedente rappresenta l'ampiezza massima di librazione della particella all'interno di una risonanza (*resonance libration width*) ottenuta con l'approssimazione di oscillatore armonico. La figura 2.18 descrive alcune di queste risonanze (di primo e second'ordine) calcolate per un pianeta nella posizione e della massa di Giove (5.2 *A.U.*) sovrapposte alla posizione reale, nel piano semiasse maggiore - eccentricità, degli asteroidi della *Fascia Principale*. Si può notare come il risultato approssimato ricavato nelle equazioni (2.61) e (2.62) siano in buon accordo con la posizione, nelle risonanze, sia dei *gap* (per esempio la risonanza al second'ordine 3 : 1) che delle zone ad alta densità (per esempio la risonanza al prim'ordine 3 : 2).

La figura 2.18 fa notare come, avvicinandosi al pianeta, la distanza nominale delle risonanze decresca mentre l'ampiezza di librazione aumenti. Infine si hanno delle risonanze in cui si ha una sovrapposizione della zona di librazione. Ciò genera delle orbite caotiche in quanto la particella di prova non è più vincolata ad un'unica risonanza bensì a due ed inizia ad oscillare tra esse in modo caotico, ciò permette di comprendere come nella figura 2.13, avvicinandosi al pianeta l'orbita, seppur in risonanza, di una particella di prova, tornasse ad avere un Esponente Caratteristico di Lyapunov costante (e positivo). Tale fenomeno è stato formalizzato matematicamente da B.V.Chirikov [1979] ed è stato applicato da Wisdom [1980] alle risonanze del problema dei tre corpi circolare ristretto. Di seguito è illustrato con una *mappa di Chirikov* come la sovrapposizione di risonanze possa generare orbite globalmente caotiche.



**Fig. 2.19:** *Ampiezza delle risonanze in funzione del semiasse maggiore e dell'eccentricità.* Nell'asse delle ascisse è riportato il semiasse maggiore mentre in ordinate l'eccentricità. Sovrapposto al grafico c'è la posizione reale degli asteroidi della Fascia Principale. Si nota come le risonanze possano produrre zone instabili, in cui non ci sono asteroidi (*gap*) e zone in cui, invece, gli asteroidi sono vincolati. Infine si fa notare come l'ampiezza di alcune delle risonanze sia così grande rispetto alla distanza nominale tra esse che, oltre alcuni valori di eccentricità si ha una sovrapposizione delle stesse. Questo è all'origine del chaos all'interno delle risonanze.



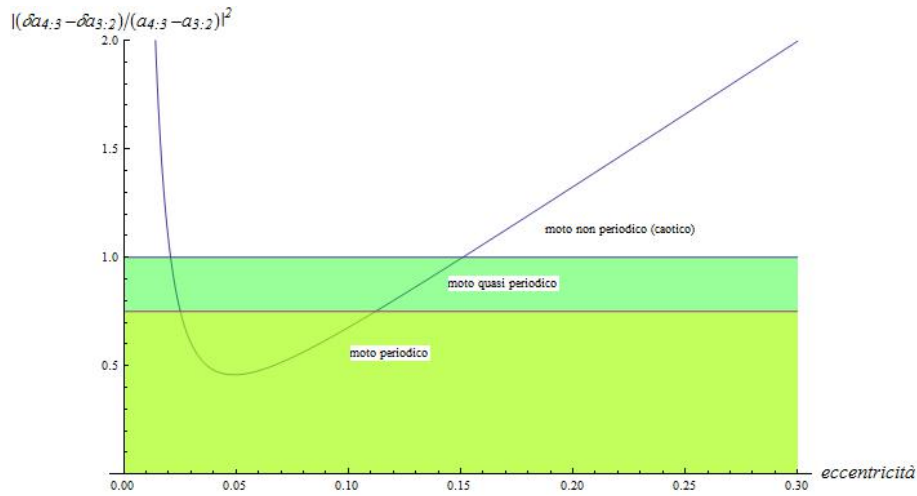
**Fig. 2.20:** *Mappa standard per un pendolo non lineare.* La trattazione presentata brevemente in precedenza e che consente di approssimare il moto di una particella in risonanza a quella di un moto armonico permette di utilizzare tale mappa ed il criterio correlato per lo studio della sovrapposizione di risonanze. Diverse risonanze poste a distanze molto grandi generano orbite ordinate, diminuendo la distanza tra le risonanze o, analogamente, aumentando l'ampiezza delle risonanze si creano dei moti globalmente caotici che lasciano solo alcune *isole di stabilità* in cui il moto continua ad essere quasi periodico. Aumentando ulteriormente l'ampiezza della risonanza il moto diventa totalmente caotico. I valori indicati sotto ad ogni figura sono una misura del grado di sovrapposizione delle risonanze e, conseguentemente, di caoticità.

L'indicatore per misurare la caoticità di un'orbita in risonanza è l'*indice di Chirikov*  $K$  che, nel problema dei tre corpi può essere definito come il rapporto tra la distanza tra le ampiezze massime di librazione per due risonanze adiacenti ( $\delta a_{n+1:n}$  e  $\delta a_{n:n-1}$ ) e la differenza tra la loro posizione nominale ( $a_{n+1:n}$  e  $a_{n:n-1}$ ):

$$K = \left( \frac{\delta a_{n+1:n} - \delta a_{n:n-1}}{a_{n+1:n} - a_{n:n-1}} \right)^2. \quad (2.63)$$

Quando tale valore è maggiore di 1 allora la sovrapposizione di tale risonanze genera dei moti globalmente caotici. Come è possibile osservare nella figura 2.19 i valori di  $K$  maggiori di 1 sono in corrispondenza dell'intersezione tra le due risonanze.

Il range in cui tali risonanze si sovrappongono completamente dando



**Fig. 2.21:** Criterio di Chirikov per l'insorgenza di moti caotici dovuti alla sovrapposizione di risonanze. In *giallo* la zona in cui le due risonanze sono ben distinte ed il moto di una particella di prova vincolata al loro interno è regolare. In *verde* la zona in cui si hanno moti caotici e regolari; una regione che può essere definita *quasi ergodica*. Oltre tale soglia, per  $K > 1$ , si hanno orbite completamente caotiche, le isole di stabilità della figura 2.18 non esistono più e le orbite sono completamente caotiche. La particella di prova non rimane più vincolata all'interno di un'unica risonanza e ciò comporta che la sua orbita diventi completamente ergodica e che possa muoversi, secondo il proprio vincolo energetico, all'interno di tutto lo spazio concesso al moto (proprio come per la risonanza in figura 2.15) creando uno spopolamento delle particelle di prova da tale regione.

origine ad un valore di  $K > 1$  è stato calcolato sia numericamente che analiticamente. Le simulazioni numeriche introdotte nella seconda parte della tesi danno come risultato una zona compresa tra  $1R_H$  e  $3.5R_H$ , in accordo con i risultati analitici. In conclusione dunque questo capitolo ha consentito di comprendere come esistano differenti tipi di orbite per il problema dei tre corpi: ergodiche non risonanti, non ergodiche risonanti ed ergodiche risonanti. E' stato possibile dare una misura quantitativa, utilizzando l'Esponente Caratteristico di Lyapunov, dell'ergodicità di questi tre tipi di orbite e comprendere i meccanismi che le producono. Tutto ciò è utilizzato nella seconda parte della tesi per capire a fondo la migrazione planetaria e darne un'interpretazione personale, oltre quella presentata nei capitoli 3, 4 e 5.





## Chapter 3

# Interazioni a due corpi: la frizione dinamica

Il metodo della *Dynamical Friction* (DF) applicato al problema della migrazione radiale di un pianeta in un disco di particelle è stata relativamente poco studiata (Melita and Woolfson [1996]; Haghhighipour [1999]; T. Muto and Ida [2011]) e ciò è dovuto principalmente all'idea generale che tale meccanismo si pensa possa essere molto lento nel generare una migrazione radiale rilevante rispetto invece al tempo che impiega a ridurre (damping) la dispersione di velocità delle particelle (Stewart and Wetherill [1988]; Ida S. [1992]). Quindi il meccanismo della DF produce due effetti contrari che, si pensava dovessero accadere su tempi scala molto differenti:

1. Radial migration (scala di tempo molto lungo);
2. Damping of velocity dispersion (scala di tempo breve).

In realtà ciò non autorizza a trascurare l'effetto della migrazione radiale se il tempo d'integrazione del sistema è abbastanza lungo ( $\sim 10^{8\div 9}$  anni). In questo capitolo viene descritto il fenomeno definito attrito dinamico (*dynamical friction*), vengono presentati, passo dopo passo, i risultati ottenuti in approccio classico (partendo dai risultati in approssimazione impulsiva basati sui lavori di S. Chandrasekhar), inserendo uno spettro di massa, come proposto nell'articolo di Ciotti [2010] e viene riproposta l'applicazione Popolo [2003] dell'attrito dinamico in un disco di planetesimi per spiegare la migrazione radiale di un corpo massivo al suo interno. Viene infine proposta una generalizzazione per un sistema con una distribuzione non omogenea di densità e distribuzione anisotropa nello spazio delle velocità.

### 3.1 Preliminari

La frizione dinamica, come il rilassamento a due corpi, è un concetto importantissimo che permette di spiegare la variazione dei parametri dinamici all'interno di sistemi gravitazionali complessi. Si considerino due corpi di massa  $m_1$  e  $m_2$ , in un sistema di riferimento inerziale  $S_0$  con velocità diversa rispetto quella del centro di massa. Sia ora  $S_1$  un nuovo sistema di riferimento inerziale, attraverso l'applicazione delle *trasformazioni galileiane* è possibile osservare come gli integrali primi del moto anche nel nuovo sistema di riferimento  $S_0$  si conservino.

L'integrazione di tale problema risulta essere possibile solo passando all'orbita relativa in cui, oltre agli integrali primi ammessi nel sistema  $S_0$ , è possibile trovare una combinazione delle coordinate e delle velocità che risultino essere conservate. Tutto ciò permette di ricavare la velocità nei due sistemi di riferimento, ammesso di conoscere la velocità relativa  $\vec{v}$  dei due sistemi studiati:

$$4 \tag{3.1}$$

Dalla (3.1) è possibile ricavare la variazione subita dai due oggetti in un sistema di riferimento inerziale solidale ad uno dei due e con velocità diversa rispetto quella del centro di massa:

$$5 \tag{3.2}$$

Lo studio della frizione dinamica risulta semplicemente dal calcolo della variazione della componente parallela della velocità relativa rispetto la velocità relativa iniziale. tale risultato è effettuato in approssimazione impulsiva (Chandrasekar, 1949):

$$\mu \Delta v_{\perp} \sim \frac{Gm_t m_f}{b^2} \Delta t, \tag{3.3}$$

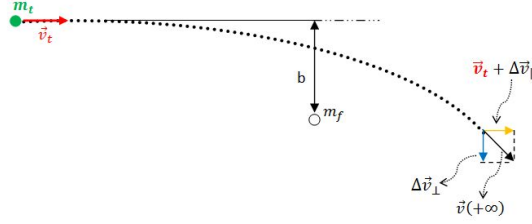
utilizzando adesso la (3.2) è possibile osservare come:

$$(\Delta \vec{v}_t)_{\parallel} = \frac{\mu}{m_t} \Delta \vec{v}_{\parallel}. \tag{3.4}$$

La figura riportata in seguito permette di capire meglio la formula precedente.

Utilizzando una semplice scomposizione vettoriale, gli integrali primi del sistema ed il teorema di Pitagora si ottiene:

$$\Delta v_{\parallel} \sim \frac{(\Delta v_{\perp})^2}{2v_t}, \tag{3.5}$$



**Fig. 3.1:** *Effetto schematizzato della frizione dinamica.* Una particella con massa  $m_t$  viene perturbata dalla forza gravitazionale esercitata da una particella di massa  $m_f$  e ciò ne causa la variazione della componente perpendicolare alla velocità relativa.

che, inserito nella (3.4) e sostituendo il valore di  $\Delta v_\perp$  con quello definito nella (3.3), permette di ottenere:

$$(\Delta \vec{v}_t)_\parallel = -\frac{2G^2 m_f (m_f + m_t)}{b^2 v_t^3} \cdot \left( \frac{\vec{v}_t}{v_t} \right) \quad (3.6)$$

Moltiplicando adesso tale valore per il semiasse maggiore dell'orbita  $a$ , si ottiene la variazione del momento angolare della massa di test ( $m_t$ ) soggetta all'interazione con la massa  $m_f$  (massa di campo).

Per un pianeta all'interno di un disco tridimensionale omogeneo, seguendo il calcolo effettuato nel testo di P.J. Armitage "Astrophysics of Planet Formation" (2010), è possibile scrivere la variazione del momento angolare come:

$$\Delta J = (\Delta \vec{v}_t)_\parallel a, \quad (3.7)$$

cioè:

$$\Delta J = \left| 2G^2 M_p^2 a b^2 \Delta v^3 \right|. \quad (3.8)$$

Il valore  $\Delta v$  è definito come la variazione di velocità relativa tra il pianeta ed il disco; poiché tutte le altre quantità risultano essere positive, la perdita o il guadagno di momento angolare dipende proprio dal segno di  $\Delta v$ . Il modulo è stato introdotto per osservare che il segno di tale equazione può essere sia negativo che positivo. Infine, citando lo stesso testo di Armitage: "The migration velocity... will then be proportional to  $M_p$ : more massive planets will migrate faster".

### 3.1.1 Eccentricità ed inclinazione del disco

In questo caso inoltre, supponendo che il pianeta sia immerso in un disco di particelle, la continua mutua interazione genera una circolarizzazione dell'orbita del pianeta. Un metodo per visualizzare tale fenomeno è quello di

calcolare l'energia totale del sistema, supponendo che tutte le particelle siano in orbita ellittica kepleriana coplanare (l'inclinazione relativa tra i planetesimi ed il pianeta è nulla):

$$E_{tot.}^{ell.} = -\frac{G^2 M_{tot.}^2 (1 - e_{tot.}^2)}{c_{tot.}^2}. \quad (3.9)$$

Dove  $c_{tot.}$  è il momento angolare totale del sistema che è costante nel tempo. A causa dell'interazione tra disco e pianeta l'equazione 3.7 può essere suddivisa in due termini:

$$E_{tot.}^{ell.} = E_{planet}^{ell.} + E_{disk}^{ell.} \quad (3.10)$$

La (3.9) ora è di più facile comprensione. l'energia totale deve conservarsi per il sistema ma i due termini, a causa della mutua interazione gravitazionale, varieranno in modo opposto. Ad una variazione dell'energia del pianeta ( $E_{planet}^{ell.}$ ) deve corrispondere una variazione dei parametri al membro di destra per un'equazione, governante l'energia totale del pianeta, analoga all'equazione 3.7 ma ad una variazione dell'energia del pianeta deve corrispondere un'uguale ed opposta variazione dell'energia del disco di planetesimi ( $E_{disk}^{ell.}$ ) e quindi una variazione dei parametri che descrivono tale equazione (analoga all'equazione 3.7). Ugualmente deve accadere per l'equazione che definisce l'energia del disco ( $E_{disk}^{ell.}$ ). Ora, per quanto riguarda il pianeta, una migrazione di tipo *inward* (verso l'interno), implica una diminuzione del momento angolare del pianeta, infatti in approssimazione di orbita circolare:

$$c_{planet} = \sqrt{GM_{tot}a}, \quad (3.11)$$

l'energia totale corrispondente aumenta al diminuire del semiasse maggiore (fissata l'eccentricità del pianeta).

Si passa ora al disco di planetesimi. In questo caso la variazione di momento angolare (totale) per i planetesimi non è grande  $c_{disk} \sim cost.$  mentre ciò che varia di molto è l'eccentricità degli stessi e quindi, in questo caso: l'energia totale del disco diminuirà di conseguenza. Poichè, come detto, l'energia totale definita in (3.9) deve conservarsi, l'unico modo affinché ciò avvenga è che l'eccentricità del pianeta, come premesso, diminuisca. A conferma di ciò è possibile citare l'abstract dell'articolo di ? : "*...e and i of a protoplanet immediately decrease because of the dynamical friction from the planetesimals and settle around the energy equipartition with planetesimals...*".

Tale ragionamento è del tutto qualitativo e non è detto che risulti essere totalmente corretto anzi, in generale bisogna utilizzare simulazioni numeriche per studiare ognuno dei parametri sopra descritti. È utile ricordare come lo scattering pianeta-pianeta possa aumentare l'eccentricità osservata e dunque risulti essere competitivo con il fenomeno descritto sopra (Rafikov [2002]; S. N. Raymond and Gorelick [2010]; S. N. Raymond and Gorelick [2009]).

Si osserva quindi come anche una distribuzione discreta di particelle possa generare delle perturbazioni sul pianeta tali da modificarne l'eccentricità in modo sostanziale.

E' utile far notare fin da subito che tale definizione di energia nulla ha a che fare con lo studio della dispersione di velocità utilizzata nel capitolo sei per descrivere il riscaldamento del disco di planetesimi a causa dell'interazione gravitazionale con il pianeta. Infatti si potrebbe pensare ad una contraddizione in quanto, come viene fatto notare nel capitolo sei, un pianeta interagendo con un disco di planetesimi ne aumenta l'eccentricità e, conseguentemente, la dispersione di velocità ( $\sigma$ ). Ciò può essere collegato con l'entropia del sistema e dunque, anche con la temperatura *dinamica* del disco stesso. Questo collegamento non deve trarre in inganno infatti un aumento della temperatura del disco non implica un aumento dell'energia totale dello stesso. La temperatura dinamica infatti è collegata solo alla dispersione di velocità del disco che, a sua volta, è collegata solo all'eccentricità dei planetesimi mentre l'energia totale del disco è collegata anche al momento angolare delle singole componenti.

Per quanto riguarda invece l'inclinazione dei planetesimi che compongono il disco è possibile, utilizzando sempre la frizione dinamica, osservare come la scala di tempo su cui opera il termine  $(\Delta \vec{v}_t)_\perp$  è molto più basso rispetto quello per il termine  $(\Delta \vec{v}_t)_\parallel$  (A. Del Popolo and Ercan [1999]) e quindi, in linea di principio, è possibile approssimare il disco di planetesimi (per tempi d'integrazione lunghi  $> 10^{6-8}$ ) ad uno con inclinazione iniziale uguale a zero, riducendo così il problema ad un problema bidimensionale che, per costruzione, rimane tale durante tutta l'integrazione.

### 3.2 Caso isotropo, omogeneo e non omogeneo, senza spettro di massa

Nell'ambito delle interazioni a due corpi, la frizione dinamica è uno degli argomenti più interessanti da trattare quando si pensa alla migrazione planetaria. Esistono vari approcci alla frizione dinamica. Nel seguito viene utilizzato l'approccio cinetico o impulsivo, formulato per la prima volta da Chandrasekhar (Chandrasekhar [1943]). Il risultato della frizione dinamica è, in generale, una variazione dell'energia cinetica di una particella di prova all'interno di un insieme, omogeneo ed infinito, di altre particelle dette di campo. L'interesse per la frizione dinamica è dovuto al fatto che essa può essere applicata ad un sistema di particelle che ad sistema fluido (cit. Del popolo e fluido dinamica). E' inoltre importante osservare come tale metodo è stato creato per un sistema di particelle omogeneo ed infinito. Le applicazioni e le generalizzazioni di tale metodo a sistemi non infiniti e non omogenei sono quindi da considerarsi una seconda (valida) approssimazione. La trattazione più semplice della DF prevede che:

1. Tutte le particelle abbiano la stessa massa;
2. la distribuzione di velocità è isotropa;
3. Il mezzo è infinito ed omogeneo.

Di seguito è definito il valore della decelerazione della componente della velocità parallela al moto della particella:

$$\frac{d\vec{v}_{t//}}{dt} = -4\pi G^2 nm(M+m) \ln \bar{\Lambda} \frac{\Psi(\vec{v}_t)}{v_t^3 \vec{v}_t}. \quad (3.12)$$

Nella formula precedente sono stati utilizzati i seguenti formalismi:

1.  $\ln \bar{\Lambda}$  : logaritmo di Coulomb mediato sulle velocità;
2.  $v_t := \|\vec{v}_t\|$ , velocità della particella di prova;
3.  $m$  : massa delle particelle di campo;
4.  $n$  : densità numerica di particelle.

Una prima osservazione alla formula è sul segno negativo, esso è dovuto al fatto che la particella di prova sta decelerando all'interno del mezzo lungo la direzione definita dal vettore  $\|\vec{v}_t\|$ . Venga poi definita la distribuzione di densità nello spazio delle fasi per le particelle di campo come:

$$DF = ng(v_f), \quad (3.13)$$

con

$$v_f := \|\vec{v}_f\|, \quad (3.14)$$

dove  $g$  è una funzione definita positiva. Inoltre si definisce come segue il valore della distribuzione delle particelle nello spazio delle velocità:

$$\Psi(\vec{v}_t) = 4\pi \int_0^{v_t} g(v_f) v_f^2 dv_f. \quad (3.15)$$

Tale funzione è normalizzata affinché il risultato è uguale ad 1. È utile poi osservare come solo le particelle che sorpassano la particella di prova, e che dunque interagiscono con essa, pesano ai fini della decelerazione dinamica. Si può formalizzare tale osservazione introducendo come limite superiore per l'integrale sulle velocità la  $v_t$ . Solo le particelle con  $v_f < v_t$  vengono dunque considerate in tale integrale. Questa osservazione ha una spiegazione profonda e deriva dalle assunzioni precedentemente fatte e cioè che:

1. la *velocity distribution function* delle particelle di campo è isotropa;

2. è possibile portar fuori dall'integrale il valore del logaritmo di Coulomb supponendolo costante;
3. si lavora in approssimazione impulsiva.

Tramite la sopracitata definizione è possibile riscrivere il valore dell'equazione 3.10 come:

$$\frac{d\vec{v}_{t//}}{dt} = -4\pi G^2 nm(M+m) \ln \bar{\Lambda} \frac{g(v_f)(v_t - v_f)}{\|v_t - v_f\|^3} d^3 \vec{v}_f. \quad (3.16)$$

Integrando tale equazione nello spazio delle velocità da 0 fino alla velocità della particella di test, si riottiene l'equazione (3.9). Si suppone ora che le particelle abbiano una distribuzione di velocità isotropa di tipo Maxwelliano<sup>1</sup>:

$$g(v_f) = \frac{e^{-v_f^2/2\sigma_0^2}}{(2\pi)^{3/2}\sigma_0^3}. \quad (3.17)$$

Quindi il valore della distribuzione di velocità può essere riscritto come segue:

$$\Psi(\|\vec{v}_t\|) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{v_t}{\sqrt{2}\sigma_0}} e^{-t^2} dt - 2 \frac{\tilde{v}_t e^{-\tilde{v}_t^2}}{\sqrt{\pi}}, \quad (3.18)$$

dove è stato utilizzato il valore  $\tilde{v}_t = \frac{v_t}{\sqrt{2}\sigma_0}$  per rendere più pulita l'equazione. In questo caso particolare, il valore della Dynamical Friction classica (3.14), con distribuzione di velocità Maxwelliana può essere riscritto come segue:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}_{t//}}{dt} = & \\ & - 4\pi G^2 nm(M+m) \ln \bar{\Lambda} \left[ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{v_t}{\sqrt{2}\sigma_0}} e^{-t^2} dt - 2 \frac{\tilde{v}_t e^{-\tilde{v}_t^2}}{\sqrt{\pi}} \right] \frac{\vec{v}_t}{\|\vec{v}_t\|^3}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

Si ricorda inoltre che la distribuzione di velocità nello spazio delle fasi è anche isotropa:

$$\int_0^{v_t} g(\|\vec{v}_f\|) \frac{(\vec{v}_t - \vec{v}_f)}{\|\vec{v}_t - \vec{v}_f\|^3} d^3 v_f = \frac{\Psi(\|\vec{v}_t\|)}{\|\vec{v}_t\|^3} \vec{v}_t. \quad (3.20)$$

Ciò consente inoltre la seguente riflessione. Il valore negativo nell'equazione 3.19 implica che tale variazione della componente parallela dell'accelerazione

---

<sup>1</sup>Si ricorda la differenza tra distribuzione di velocità isotropa e Maxwelliana. La prima distribuzione è infatti una qualsiasi distribuzione che non dipende da una direzione privilegiata. La seconda invece è una sottoclasse della prima e possiede anche altre proprietà caratteristiche quali: le particelle che compongono il sistema sono indistinguibili (se così non fosse si deve usare una distribuzione differente, ad esempio di Bose-Einstein o Fermi-Dirac); il sistema deve essere lineare nell'energia ( $E_{tot} = \sum e_i$ ) e deve soddisfare alla statistica di Markov.

è una decelerazione. Inoltre, per come è strutturata l'equazione, tale rallentamento avviene lungo la direzione definita dal vettore  $v_t$  :

$$\frac{d\vec{v}_{t//}}{dt} \propto -\vec{v}_t. \quad (3.21)$$

In realtà però la  $d\vec{v}_{t//}$  è parallela alla velocità relativa  $\vec{v}_0 = \vec{v}_t - \vec{v}_f$  e non alla  $\vec{v}_t$  ma, proprio perché si è supposta l'isotropia, quando si somma su tutti gli incontri, il valore medio della velocità di campo è identicamente nullo. Ciò non è vero nel caso anisotropo. Si considera ora l'equazione (3.16) e si osservi come il valore  $nm$  può essere definito come la densità delle particelle di campo che in caso non omogeneo può dipendere dalle coordinate del sistema considerato  $\rho := \rho(\vec{r})$ . Verranno ora proposte alcune distribuzioni di densità che possono generare soluzioni analitiche partendo da quelle più semplici (profilo isoterma singolare) fino a quelle più simili alle variazioni di densità in dischi protoplanetari (profilo di Myiamoto-Nagai). In questa prima sezione è stata approssimata la dispersione di velocità  $\sigma_0$  con una isotropa; nell'ultima sezione questa approssimazione viene rilassata a garanzia di una più veritiera dispersione di velocità per un disco di planetesimi.

### 3.2.1 profilo isoterma singolare

Nel primo caso si suppone che la densità è stratificata solo lungo la direzione radiale  $r$  e non lungo  $z$  (altezza del disco). Questa prima approssimazione può essere compresa nel seguente modo: un disco può avere uno spessore anche molto più grande rispetto quello di un pianeta al suo interno ed il profilo di densità del gas (o dei planetesimi) con l'altezza varia bruscamente solo nelle regioni più distanti dal piano equatoriale e quindi si può supporre che la frazione di gas con cui interagisce il pianeta ha andamento in densità costante lungo l'asse  $z$ . Inoltre sul piano equatoriale del disco la densità dei pianeti (almeno nel Sistema Solare) cresce con la vicinanza al Sole e analogamente deve fare fare la componente fassosa e di planetesimi ( Youdin e Shu, 2004; Bai e Stone, 2010). Dunque in prima approssimazione la densità può essere definita come segue:

$$\rho(r) = \frac{V_c^2}{4\pi G r^2}. \quad (3.22)$$

Dove  $V_c$  è la velocità circolare del gas o delle particelle ( $V_c^2 = 4\pi G \rho(0) a^2$ ) che compongono il disco. Poiché si è nell'approssimazione in cui la massa del pianeta è molto maggiore della massa dei planetesimi con cui interagisce è



possibile riscrivere la ( ) nel modo seguente:

$$F_{drag} = M \frac{d\vec{v}_t}{dt} = -4\pi G^2 \rho(r) M^2 \ln \bar{\Lambda} \left[ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{v_t}{\sqrt{2}\sigma_0}} e^{-t^2} dt - 2 \frac{\tilde{v}_t e^{-\tilde{v}_t^2}}{\sqrt{\pi}} \right] \frac{\vec{v}_t}{\|\vec{v}_t\|^3}. \quad (3.23)$$

Tale formula può essere immediatamente integrata utilizzando la ( ) e ricordando come  $\sigma_0 = V_c/\sqrt{2}$  e come la  $v_t = V_c$  (anche il pianeta si muove in orbita circolare) ottenendo così la formula per la forza dovuta alla frizione dinamica sul pianeta di massa  $M$  all'interno di una distribuzione di densità definita come sopra:

$$F_{drag} = -0.428 \frac{GM^2}{r^2} \ln \bar{\Lambda} \left[ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-t^2} dt - \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-1} \right] = -0.428 \frac{GM^2}{r^2} \ln \bar{\Lambda}. \quad (3.24)$$

Ricordando la relazione che lega il momento angolare con la forza:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{F_{drag} r}{M} = -0.428 \ln \bar{\Lambda} \frac{GM}{r} \quad (3.25)$$

È possibile, integrando tale funzione, ricavare la variazione del semiasse maggiore nel tempo ed il tempo di frizione dinamica  $t_{drag}$  lungo l'orbita. Infatti si suppone che  $L = rV_c$  (il pianeta come già detto si muove in orbita circolare). Si ottiene quindi:

$$V_c \frac{dr}{dt} + r \frac{dV_c}{dt} = \frac{F_{drag} r}{M} = -0.428 \ln \bar{\Lambda} \frac{GM}{r}. \quad (3.26)$$

Riordinando l'equazione precedente e ricordando che  $\frac{dV_c}{dt} = 0$  (perché  $V_c = \text{cost.}$ ) si ottiene:

$$r \frac{dr}{dt} = \frac{F_{drag} r}{M} = -0.428 \ln \bar{\Lambda} \frac{GM}{V_c} \quad (3.27)$$

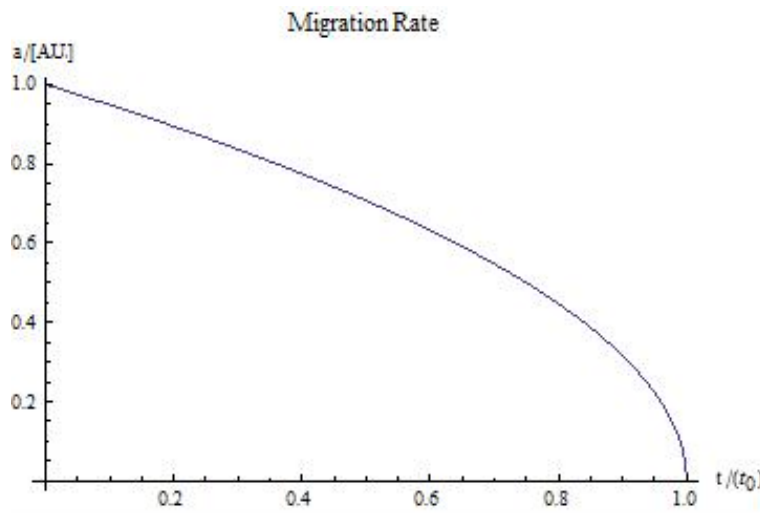
Che integrata da  $r_i$  ad un  $r_f = 0$  (si suppone che il pianeta è spiraleggiato verso il centro del sistema andando a finire nella stella centrale, il risultato non cambia se si suppone un raggio finale a cui si ferma tale migrazione) produce il tempo di migrazione dinamica:

$$t_{drag} = \frac{1.17 r_i^2 V_c}{\ln \bar{\Lambda} GM}. \quad (3.28)$$

Esplicitando tutto in funzione di  $r$  invece, si ottiene la variazione nel tempo del raggio del pianeta all'interno della data distribuzione di densità (figura 3.1):

$$r(t) = -t^{0.5} \times \sqrt{\frac{\ln \bar{\Lambda}GM}{1.17V_c}} + \text{cost.} \quad (3.29)$$

Si è voluto scrivere così la () per porre l'enfasi sulla dipendenza temporale. È inoltre importante osservare come, con la distribuzione di massa definita in () il tempo che impiega un pianeta per migrare da 1 *unità astronomica* ( $A.U.$ ) al centro del sistema è molto maggiore dell'età dell'Universo (8 ordini di grandezza!) e dunque è irragionevole pensare che, con questa approssimazione, la migrazione planetaria possa avere un ruolo importante.



**Fig. 3.2:** *Andamento del semiasse maggiore del pianeta nel tempo nel caso isotropo.* Come è possibile notare, in questo semplice esempio, poichè la velocità circolare delle particelle è la stessa indipendentemente dal raggio, e poichè la densità è maggiore al centro, è comprensibile come il pianeta viene attratto verso l'interno del sistema. Così non è nel caso in cui la velocità dei corpi dipenda dal raggio, in tal caso infatti l'effetto della densità è controbilanciato dall'effetto dell'energia cinetica dei corpi. Il valore  $t_0$  è il tempo che impiega un pianeta di  $10^{30}$  gr. (circa la massa della Terra) per migrare da una distanza di 1  $A.U.$  fino al centro ( $r = 0$ ) del sistema e corrisponde a circa  $10^{18}$  anni.

### 3.3 Caso non isotropo, omogeneo e non omogeneo, senza spettro di massa

Si generalizzano ora i risultati precedenti inserendo uno spettro di massa all'interno della funzione di distribuzione:

$$DF = \prod (m)g(v_f, m). \quad (3.30)$$

Con:

- $n = \int_0^\infty \prod (m)dm$  : nuova densità numerica di particelle;
- $n \langle m \rangle = \int_0^\infty m \prod (m)dm$ .

Inoltre la normalizzazione diventa:

$$\Psi(\vec{v}_t, m) = 4\pi \int_0^{v_t} g(v_f, m)v_f^2 dv_f, \quad (3.31)$$

con:

$$\Psi(v_t, m) = 1 \forall m. \quad (3.32)$$

Affinché è possibile effettuare un raffronto tra un sistema descritto da una  $DF$  "classica" ed un sistema in cui la  $DF$  è descritta utilizzando uno spettro di massa è necessario che:

- i due sistemi abbiano la stessa densità numerica totale di particelle per unità di volume;
- la massa delle particelle nel sistema classico deve essere identica alla massa media delle particelle nel nuovo sistema con spettro di massa;
- la dispersione di velocità Maxwelliana deve coincidere con la dispersione di velocità all'equipartizione del nuovo sistema<sup>2</sup>.

Dunque il raffronto tra i due sistemi può esser fatto se e solo se:

- il numero di particelle è identico per i due sistemi;
- la massa totale è la stessa;
- la densità di energia cinetica per le particelle di campo è la stessa.

---

<sup>2</sup>E' la stessa cosa anche se non si suppone l'equipartizione ma si ipotizza che le particelle di campo abbiano la stessa dispersione in velocità.

### 3.3.1 Equipartizione

Si assume ora che:

$$m\sigma_{eq.}^2 = \langle m \rangle \sigma_0^2, \quad (3.33)$$

e, inoltre:

$$g(v_f, m) = \frac{e^{-v_f^2/(2\sigma_{eq.}^2)}}{(2\pi)^{3/2}\sigma_{eq.}^3} = \frac{e^{-rv_f^2/(2\sigma_{eq.}^2)}r^{3/2}}{(2\pi)^{3/2}\sigma_0^3}. \quad (3.34)$$

L'eq (precedente) si può leggere così: *la dispersione di velocità all'equipartizione è quella calcolata utilizzando la massa media del sistema.*

Si ottiene dunque una condizione sulla  $\Psi(v_t, m)$  tale che:

$$\Psi(v_t, m) = \text{Erf}(v_t\sqrt{r}) - 2\frac{2v_t\sqrt{r}e^{-v_t^2}}{\sqrt{\pi}}. \quad (3.35)$$

Si ricordi ora che il numero di incontri  $\Delta n$  può essere definito come:

$$\Delta n = 2\pi bdb\|\vec{v}_t - \vec{v}_f\|\Delta t \prod (m)g(v_f, m)dmd^3\vec{v}_f \quad (3.36)$$

Che nel caso di un sistema a simmetria sferica diventa:

$$\frac{d\vec{v}_{t//}}{dt} = -4\pi G^2 \langle \ln \bar{\Lambda} \rangle \int_0^\infty m(M+m) \prod (m)\Psi(v_t, m)dm, \quad (3.37)$$

ciòè:

$$\frac{d\vec{v}_{t//}}{dt} = -4\pi G^2 n \langle m \rangle (M + \langle m \rangle) \langle \ln \bar{\Lambda} \rangle \frac{\Psi^*(v_t)}{v_t^3} \vec{v}_t. \quad (3.38)$$

Dove la  $\Psi^*(v_t)$  altro non è che il nuovo coefficiente della distribuzione di velocità.

La conoscenza di questo valore permette di ricavare in modo semplice la  $DF$  in un sistema con spettro di massa partendo da un sistema classico equivalente semplicemente scambiando:

1. la massa delle particelle del sistema classico con la massa media delle stesse del nuovo sistema;
2. la funzione  $\Psi(v_t)$  con la  $\Psi^*(v_t)$ ;
3. il logaritmo di Coulomb "normalizzato" con quello medio del nuovo sistema<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup>in realtà in prima approssimazione tali valori circa coincidono, ma, come si vedrà nell'ultima sezione di questo capitolo è proprio il logaritmo di Coulomb (se calcolato in modo approssimato) che rende il metodo della Dynamical Friction un *fine tuning*.

Sono necessarie alcune osservazioni a riguardo. Innanzitutto, se la velocità  $v_t$  è grande allora la  $\Psi(v_t) \rightarrow 1$  (analogamente al caso classico) e dunque il valore della decelerazione dinamica nel limite di alte velocità può essere interpretato come lo *scaling factor* tra il caso classico e quello con spettro di massa. Infatti tutte le specie in quest'ultimo caso hanno la stessa dispersione di velocità.

L'importanza di questo nuovo risultato e la differenza con il caso classico è evidente quando, per esempio, si hanno due popolazioni non all'equipartizione.

### 3.3.2 Spettro di massa esponenziale

Nel caso di uno spettro di massa definito come segue:

$$\prod(m) = \frac{ne^{-m/\langle m \rangle}}{\langle m \rangle}, \quad (3.39)$$

è possibile l'integrazione analitica della (equazione) semplicemente scambiando l'ordine d'integrazione ed ottenendo:

$$\int_0^\infty \prod(m)m(m+M)\Psi(v_t, m)dm = n\langle m \rangle^2 [RH_1(v_t) + H_2(v_t)] \quad (3.40)$$

con  $R := \frac{M}{\langle m \rangle}$ .

Infine paragonando il valore ottenuto qui sopra con il risultato generale definito nel capitolo precedente si ottiene:

$$\Psi(v_t) = \frac{[RH_1(v_t) + H_2(v_t)]}{R + 1}, \quad (3.41)$$

che porta al seguente risultato:

$$H_1(v_t) = \frac{v_t^3(5 + 2v_t^2)}{2(1 + v_t^2)^{5/2}}, \quad (3.42)$$

$$H_2(v_t) = \frac{v_t^3(35 + 28v_t^2 + 8v_t^4)}{4(1 + v_t^2)^{7/2}}. \quad (3.43)$$

E' importante ora osservare che quando la massa e/o la  $v_t$  tendono asintoticamente all'infinito si riottiene il risultato classico:

$$H_1 \sim 1; H_2 \sim 2. \quad (3.44)$$

E' interessante notare come, nel caso di spettro esponenziale e supponendo l'equipartizione, il *velocity factor* è più grande rispetto il caso classico soprattutto per le particelle di campo che si muovono con una  $v_t$  circa uguale alla dispersione di velocità all'equipartizione<sup>4</sup>.

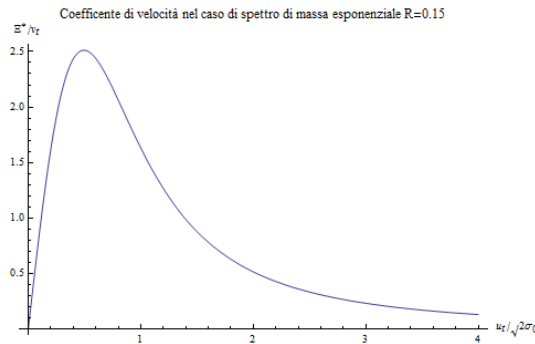
---

<sup>4</sup>Infatti per masse di test elevate il *maximum drag* è due volte maggiore rispetto il caso classico e dunque il tempo di frizione dinamica è conseguentemente circa due volte più basso.

Infine quando la  $v_t \rightarrow \infty$  e si trascura l'equipartizione, il fattore correttivo da adottare quando si usa la formula classica è  $\frac{2+R}{1+R}$  e supponendo  $R$  circa uguale ad 1, la DF classica sottostima la vera decelerazione dinamica di un fattore circa 1.5.

In conclusione quando è la velocità che la massa della particella di prova sono molto grandi, rispetto le stesse quantità delle particelle di campo, allora i risultati della DF classica e quella con spettro di massa sono gli stessi. Il risultato precedente risulta vero finché la densità numerica delle particelle rimane uguale nei due casi (classico e con spettro di massa). Più precisamente: l'evoluzione temporale della densità numerica dei due sistemi è in generale diversa ma la densità *iniziale* dei due sistemi deve essere la stessa.

Quando la  $v_t$  della particella di prova risulta minore della dispersione di velocità delle particelle di campo. In questo caso infatti la differenza tra la decelerazione dinamica calcolata nel modo classico e quella calcolata con uno spettro di massa è evidente. In figura 3.2 è presentato il caso con spettro di massa.



**Fig. 3.3:** Coefficiente di velocità per lo spettro di massa.

### 3.4 caso anisotropo, non omogeneo, senza spettro di massa

La trattazione precedente va bene per un sistema sferico o per un sistema in cui un corpo si muove lungo il piano equatoriale ed è soggetto ad una distribuzione di materia assi-simmetrica. Per oggetti che si trovano in un disco e che hanno un'inclinazione iniziale diversa da zero e quindi non rimangono stazionari sul piano equatoriale, si deve utilizzare una nuova e più ampia trattazione della *dynamical friction* considerando dunque sistemi con distribuzione di velocità anisotropa.

In molti casi infatti è stato usato l'approccio alla Chandrasekhar per calcolare la frizione dinamica (Stewart and Wetherill [1988]; Ida [1990]; Lissauer and Stewart [1993]). Tale procedura risulta errata infatti la DF in un disco

e differente rispetto quella sperimentabile all'interno di una distribuzione isotropa ed omogenea per almeno quattro motivi:

1. il contributo degli incontri "vicini" e paragonabile con quello degli incontri "lontani" (Donner and Sundelius [1993]);
2. gli effetti collettivi delle particelle sulla massa di prova all'interno di un disco sono più forti rispetto quelli sperimentati dallo stesso oggetto ma in una distribuzione tridimensionale (Thorne [1968]);
3. le velocità *peculiari* in un disco di planetesimi sono basse: la velocità differenziale Kepleriana (ordinata) del disco domina sulla velocità relativa (disordinata) dei planetesimi. Quest'osservazione è motivata dal fatto che un disco freddo (in cui domina la velocità Kepleriana) si pensa essere più stabile alle perturbazioni gravitazionali rispetto ad un disco caldo (in cui dominano le velocità disordinate).
4. La dispersione di velocità nel potenziale di un disco è anisotropa.

La teoria è stata descritta in Binney [1977] e vengono qui riproposti solo i risultati. Si fa inoltre notare come, a differenza del caso isotropo, anche la dispersione di velocità, per un disco, risulta essere anisotropa (Ohtsuki and Emori [1999]).

Si inizia con l'introdurre la distribuzione in velocità e configurazioni delle particelle per un disco:

$$n(\vec{x}, \vec{v}) = n(\vec{x}) \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{v_{\perp}^2}{2\sigma_{\perp}^2} + \frac{v_{//}^2}{2\sigma_{//}^2}\right] \frac{1}{\sigma_{\perp}^2 \sigma_{//}}, \quad (3.45)$$

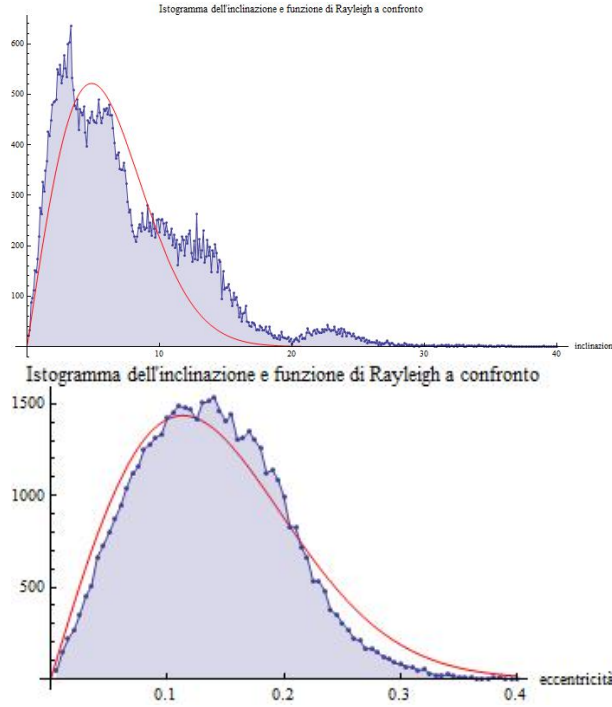
distribuzione "*di Raileigh*" (?; Rafikov [2003]; ?). La stessa distribuzione può essere riscritta in termini di eccentricità ed inclinazione, si ottiene la seguente riscrittura della 3.56:

$$n(e, i) = 4 \frac{\Sigma_p}{m} \frac{ei}{\langle e^2 \rangle \langle i^2 \rangle} \exp\left(-\frac{e^2}{\langle e^2 \rangle} + \frac{i^2}{\langle i^2 \rangle}\right). \quad (3.46)$$

Dove  $v_{//}$ ,  $\sigma_{//}$ ,  $v_{\perp}$  e  $\sigma_{\perp}$  sono, rispettivamente, la velocità e la dispersione di velocità parallele e perpendicolari alla direzione radiale delle particelle di campo.

È interessante far notare come la (numero equazione) è una distribuzione molto simile alla distribuzione in eccentricità ed inclinazione osservata per gli asteroidi nella fascia principale. Nella figura (numero figura) è riportato il confronto tra la distribuzione osservata e quella generata dalla (...).

Come è possibile osservare, la distribuzione analitica di Rayleigh in entrambi i casi riproduce fedelmente i dati osservati. La figura 3.3 consente



**Fig. 3.4:** *Istogramma dell'eccentricità e dell'inclinazione dei planetesimi nella Fascia Principale.* Sopra: Istogramma del numero di asteroidi nella fascia principale in funzione dell'inclinazione. E' sovrapposto a tale istogramma una distribuzione analitica di Rayleigh, ottenuta tramite un *best fit* con i dati osservati. Sotto: istogramma in funzione dell'eccentricità degli asteoidi, sovrapposto ad una distribuzione analitica di Rayleigh.

inoltre di comprendere come, anche in un sistema composto da più pianeti (otto), da molti pianeti nani (più di cinque) e con un età di miliardi di anni (sono passati circa 5 miliardi di anni dalla nascita del Sistema Solare), il disco di planetesimi non abbia subito un'evoluzione evidente rispetto alla teoria di un disco non autogravitante "eccitato" da un singolo pianeta per un tempo molto più breve. Per descrivere la frizione dinamica in caso isotropo è utile utilizzare il III teorema di Newton sul calcolo del potenziale di un omeoide, in questo caso infatti si cerca il potenziale dovuto ad una distribuzione di densità non più funzione delle coordinate spaziali ma della velocità:

$$\rho(\vec{v}) = \frac{\sqrt{2}Gln\Lambda}{\sqrt{\pi}\sigma_{\perp}^2\sigma_{\parallel}} \bar{n}m(M+m)M \exp\left(-\frac{v_{\perp}^2}{2\sigma_{\perp}^2} + \frac{v_{\parallel}^2}{2\sigma_{\parallel}^2}\right), \quad (3.47)$$

poiché inoltre si suppone che il valore delle due dispersioni di velocità risulta essere costante ed il loro rapporto è 2 : 1 ( ) è possibile riscrivere la



precedente equazione come:

$$\rho(\vec{r}) = \frac{\sqrt{2}Gln\Lambda}{\sqrt{\pi}\sigma_{\parallel}^2\sigma_{\perp}} \bar{n}m(M+m)M \exp\left[-\left(\frac{v_{\perp}^2 + 4v_{\parallel}^2}{8\sigma_{\parallel}^2}\right)\right]. \quad (3.48)$$

Il calcolo del potenziale all'interno di un ellissoide eterogeneo nel punto  $r_1$  (in cui si trova la massa di prova) può esser fatto come segue (Chandrasekhar, 1969):

$$\vec{F}(\vec{r}_1) = -\pi G \int \frac{dq}{\Delta(q, e)} \rho(m^2) \frac{2r_{1i}}{\left(\frac{a_i^2}{a_1^2} + q\right)}, \quad (3.49)$$

nella (...) si è fatto uso delle seguenti definizioni:

1.  $m^2(u) = \sum_{i=1}^3 \frac{r_{pi}^2}{a_i^2 + u}$ : ellissoide su cui è stratificata la densità ;
2.  $\Delta(q, e) \equiv (1 + q)\sqrt{(1 - e^2 + q)}$  ;
3.  $q \equiv \frac{u}{a_{1i}^2}$  ;
4.  $a_2 = a_1 \geq a_3$ : ellissoide oblato.

Inoltre in questo caso la densità stratificata in ellissoidi è definita come segue:

$$\rho(m^2(u)) = \rho_0 \exp\left[-\left(\frac{v_{\parallel}^2/2\sigma_{\parallel}^2}{1 + q} + \frac{v_{\perp}^2/2\sigma_{\perp}^2}{1 - e^2 + q}\right)\right], \quad (3.50)$$

$$\rho_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{GmM(m+M)ln\Lambda n(\vec{r})}{\sigma_{\parallel}^2\sigma_{\perp}}. \quad (3.51)$$

Inseriti nell'equazione generale per il calcolo della forza si ottiene l'equazione della forza per componenti:

$$F_{\parallel} = k_{\parallel}v_{1\parallel} = B_{\parallel}v_{1\parallel} \left[ 2\sqrt{2\pi}\bar{n}G^2 \log \Lambda m_1 m_2 (m_1 + m_2) \frac{\sqrt{1 - e^2}}{\sigma_{\parallel}^2\sigma_{\parallel}} \right], \quad (3.52)$$

$$F_{\perp} = k_{\perp}v_{1\perp} = B_{\perp}v_{1\perp} \left[ 2\sqrt{2\pi}\bar{n}G^2 \log \Lambda m_1 m_2 (m_1 + m_2) \frac{\sqrt{1 - e^2}}{\sigma_{\perp}^2\sigma_{\perp}} \right], \quad (3.53)$$

vengono inoltre date le definizioni di  $B_{//}$  e  $B_{\perp}$ :

$$B_{//} = \int_0^{\infty} \exp \left[ -\frac{v_{//}^2}{2\sigma_{//}^2} \frac{1}{1+q} - \frac{v_{//}^2}{2\sigma_{//}^2} \frac{1}{1-e^2+q} \right] \times \frac{dq}{[(1+q)^2(1-e^2+q)^{\frac{1}{2}}]}; \quad (3.54)$$

$$B_{\perp} = \int_0^{\infty} \exp \left[ -\frac{v_{\perp}^2}{2\sigma_{\perp}^2} \frac{1}{1+q} - \frac{v_{\perp}^2}{2\sigma_{\perp}^2} \frac{1}{1-e^2+q} \right] \times \frac{dq}{[(1+q)^2(1-e^2+q)^{\frac{3}{2}}]}; \quad (3.55)$$

$$e = \left( 1 - \frac{\sigma_{\perp}^2}{\sigma_{//}^2} \right)^{1/2}. \quad (3.56)$$

Si ricorda inoltre come, nel caso di un disco Kepleriano, il valore del rapporto tra le dispersioni delle velocità risulta essere costante e pari a 0.5. Dunque il valore di  $e = \frac{\sqrt{3}}{2} \sim 0.86$ .

Si nota come in questo caso la frizione dinamica non comprende uno spettro di massa infatti anche se l'interazione è descritta utilizzando due particelle con massa  $m_t$  ed  $m_f$  distinte, quest'ultime hanno tutte la medesima massa.

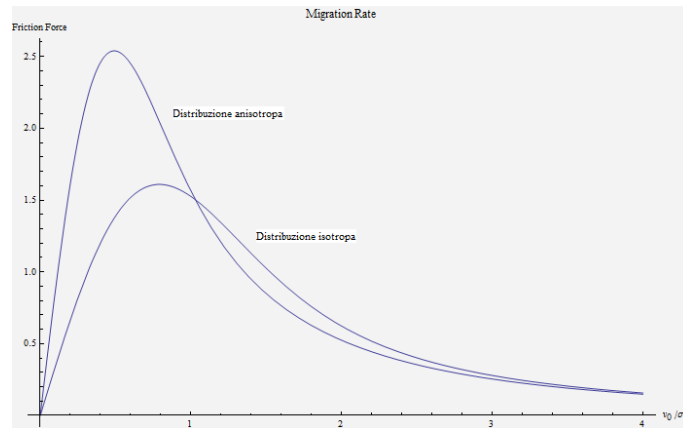
Viene presentato qui il differente andamento, rispetto al caso classico, che per il coefficiente di velocità. La comparazione tra i due casi permette di osservare come in un sistema "caldo" ( $v_t = \sigma_{field}$ ) la frizione dinamica con spettro di massa risulta molto differente rispetto il caso classico, mentre è del tutto irrilevante usarla in un sistema "freddo".

### 3.5 Il logaritmo di Coulomb

È importante però prendere in considerazione un aspetto fondamentale di questa teoria che, a volte può essere tralasciato o semplicemente sottovalutato: il logaritmo di Coulomb. Il logaritmo di Coulomb è definito come il rapporto tra il parametro d'impatto minimo ( $A_{min.}$ ) e quello massimo ( $A_{max.}$ ) all'interno di un sistema dinamico:

$$\ln \Lambda = \frac{A_{min.}}{A_{max.}}. \quad (3.57)$$

È infatti ormai noto che, in alcuni contesti specifici quali, per esempio, lo studio del moto dei *globular cluster* all'interno delle galassie, i risultati delle simulazioni numeriche fittano perfettamente con la teoria della dynamical



**Fig. 3.5:** *Coefficiente di velocità nel caso classico ed anisotropo.* Si osserva come le due curve siano molto differenti soprattutto per piccoli valori del parametro  $v_0/\sigma_T$ . Quando si è a valori minori di 1 la differenza tra le due funzioni può arrivare ad un fattore due.

friction a patto di modificare il logaritmo di Coulomb su valori fisicamente inaccettabili ( $\sim 0.1 \div 1$ ). Ciò è evidenziato per esempio nella Tabella 1 e nel paragrafo 5.1. dell'articolo di /citervanalb. In tale tabella sono evidenziati i valori del logaritmo di Coulomb al variare della massa del satellite, del raggio dello stesso e di altri parametri dinamici. Si osserva come questi valori oscillino tra un minimo di 0.02 fino ad un massimo di circa 2. Ma se, tramite un calcolo molto semplice se ne stima il valore empirico si trova che esso oscilla tra un minimo di 10 ed un massimo di 20 in praticamente tutti i sistemi astrofisici conosciuti. Ciò dunque divide in due la comunità scientifica e come detto risulta essere un argomento molto sottile e particolarmente difficile da interpretare. In questo capitolo non avendo i mezzi necessari per discernere se la teoria risulta essere completamente applicabile al problema analizzato, si andranno ad esaminare i risultati numerici ottenuti neltramite l'utilizzo del codice numerico SWIFTER.



## Chapter 4

# Interazione a più corpi

*"Non è morto ciò che può attendere in eterno,  
e col volgere di strani eoni anche la morte può morire."  
- Howard P. Lovecraft -*

### preliminari

In questo capitolo viene presentata la teoria delle onde di densità e degli ep cicli. Questa teoria è indispensabile per lo studio della migrazione degli oggetti all'interno di sistemi fluidi o particellari. Nel seguito partendo dalla teoria degli ep cicli è stato ricavato un nuovo tipo di migrazione radiale basato sull'interazione tra planetesimi. Sono presentati inoltre i due articoli di Nicholson [1999] e Rein and Papaloizou [2010] in cui tale nuova migrazione radiale è dedotta ed applicata agli anelli di Saturno. In questo elaborato si utilizza tale teoria anche ai dischi di planetesimi. Il capitolo è composto da due parti. La prima descrive le equazioni del moto e la teoria degli ep cicli in modo generale all'interno di un potenziale a simmetria assiale. La seconda parte descrive il fenomeno delle risonanze orbitali ed il calcolo del momento angolare.

### 4.1 Approssimazione ep ciclica

In questo capitolo si è interessati alle orbite di una particella all'interno di un sistema a simmetria assiale. I potenziali a simmetria assiale sono definiti tramite la seguente *legge di riflessione*:

$$\varphi(r, z) = \varphi(r, -z). \quad (4.1)$$

La teoria ep ciclica fonda le proprie basi nella teoria geometrica greca ma è grazie al fisico inglese Sir. I. Newton che è possibile darle un senso

fisico. Si definisce inizialmente il valore dell'accelerazione esercitata su una particella in questo S.d.R.:

$$\ddot{\vec{x}} = -\nabla\Phi = -\frac{\partial\Phi}{\partial r}\hat{e}_r - \frac{\partial\Phi}{\partial z}\hat{e}_z, \quad (4.2)$$

è possibile, poiché si è in un S.d.R cilindrico, scomporre il potenziale lungo le direzioni: radiale e azimutale. Sia poi  $\vec{x}$  un generico vettore posizione definito come segue:

$$\vec{x} = (r \cos \theta, r \sin \theta, z) = r\hat{e}_r + z\hat{e}_z, \quad (4.3)$$

si ricorda inoltre come:

$$\begin{cases} \hat{e}_r = (\cos \theta, \sin \theta, 0) \\ \hat{e}_z = (0, 0, 1) \end{cases}. \quad (4.4)$$

Si vuole la derivata temporale seconda della generica posizione  $\vec{x}$ . Si procede con ordine:

$$\dot{\vec{x}} = \dot{r}\hat{e}_r + \dot{z}\hat{e}_z, \quad (4.5)$$

si definisce poi:

1.  $v_r = \dot{r}$ : velocità radiale;
2.  $v_z = \dot{z}$ : velocità azimutale;
3.  $v_\theta = \dot{\theta}r$ : velocità tangenziale<sup>1</sup>.

Continuando nella derivazione si ottiene:

$$\ddot{\vec{x}} = \ddot{r}\hat{e}_r + 2\dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\hat{e}_r + \ddot{z}\hat{e}_z, \quad (4.6)$$

che in componenti può essere riscritto come:

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\partial\Phi}{\partial r} \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \\ \ddot{z} = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} \end{cases}. \quad (4.7)$$

Come si può subito notare la seconda equazione del sistema sopra descrive la conservazione del momento angolare:

$$2\frac{\dot{r}}{r} = -\frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}} \rightarrow \frac{d}{dt} \ln r^2 = -\frac{d}{dt} \ln \dot{\theta}. \quad (4.8)$$

---

<sup>1</sup>E' dovuto alla derivazione del termine  $\dot{e}_r = \dot{\theta}\hat{e}_\theta$

Ora, integrando tale equazione si ottiene:

$$\ln(r^2\dot{\theta}) = \text{cost.} \Rightarrow r^2\dot{\theta} = \text{cost.}, \quad (4.9)$$

e si definisce per comodità tale costante uguale a  $r_0^2\dot{\theta}_0$ . Come è dimostrato in seguito tale valore non è altro che il momento angolare del sistema  $J_0$ . E' inoltre essenziale far notare come il sistema precedente non sia risolubile analiticamente ma, visto che il momento angolare del sistema è conservato, la particella risulta vincolata a muoversi sempre nella stessa direzione e non può mai né fermarsi né tornare indietro. Infatti dall'equazione 4.9 ricavo che  $r^2 > 0$  e quindi  $\dot{\theta}$  non può cambiar segno altrimenti la costante non sarebbe univocamente determinata e quindi la direzione del moto rimane invariata nel tempo.

Lemma:

"il valore  $r_0^2\dot{\theta}_0$  e il momento angolare del sistema  $J_0$ ".

*Dimostrazione.*

Il momento angolare è per definizione uguale a:

$$\begin{aligned} \vec{J} = \vec{x} \wedge \vec{v} &= (r\hat{e}_r + z\hat{e}_z)(v_r\hat{e}_r + v_z\hat{e}_z + v_\theta\hat{e}_\theta) = \\ &= rv_z\hat{e}_\theta + rv_\theta\hat{e}_z + zv_r\hat{e}_\theta - zv_\theta\hat{e}_r. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Dunque lungo  $z$  ho solo il termine:  $rv_\theta = rr\dot{\theta} = r^2\dot{\theta}$ .

Poiché  $r^2\dot{\theta} = \vec{J}_{z0}$  è la proiezione del momento angolare lungo  $z$  (vedi Lemma), è possibile ricavare, sapendo  $r(t)$ , il valore di  $\dot{\theta}(t) = \frac{\vec{J}_{z0}}{r^2}$ .

Riprendendo il sistema di equazioni 4.11, è ora possibile lavorare solo con due delle tre equazioni iniziali:

$$\begin{cases} \ddot{r} - \frac{J_0^2}{r^3} = -\frac{\partial\Phi}{\partial r} \\ \ddot{z} = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} \\ \dot{\theta} = \frac{J_0}{r^2} \end{cases} \quad (4.11)$$

Si nota come, in questo nuovo sistema è stata rimossa la parte angolare.

E' utile osservare come il sistema di due equazioni differenziali (...) risulti dipendere dalle condizioni iniziali. Poiché inoltre il sistema è bidimensionale sono necessarie quattro condizioni iniziali (due per la velocità e la posizione radiale e due per la velocità e la posizione azimutale). Il moto della particella inoltre avviene su un particolare piano detto: *piano meridionale* ( $r$ - $z$ ). Si studia il moto delle particelle in tale piano. Un'ultima osservazione: il piano meridionale ruota con velocità  $\dot{\theta}$  circolare uniforme e con direzione uguale a quella della particella.

Tale osservazione permette di capire come le orbite descritte sul piano meridionale dalla particella non risultano essere uguali a quelle *vere* (cioè quelle descritte nello spazio). Una particella che ha un'orbita circolare, descriverà nel piano meridionale un punto.

Tuttavia la condizione iniziale sul momento angolare e cioè che esso risulti essere una costante del moto ( $J_z = J_{0z} \forall t$ ) non determina univocamente una sola orbita ma una famiglia di orbite. Però, una volta fissato il valore di tale costante, ogni famiglia di orbite ha come capostipite l'orbita circolare. Infine il piano meridionale determina il *deferente*. Un'orbita qualunque può essere pensata come alla combinazione dell'orbita circolare del deferente e di un'altra orbita qualsiasi attorno ad esso.

Si definisce ora il potenziale effettivo  $\Phi_{eff.} = \Phi + \frac{J_0^2}{2r^2}$ , tramite il quale è possibile riscrivere le equazioni del moto per la particella:

$$\begin{cases} \ddot{r} = -\frac{\partial \Phi_{eff.}}{\partial r} \\ \ddot{z} = -\frac{\partial \Phi_{eff.}}{\partial z} \end{cases} \quad (4.12)$$

Tale potenziale, come si può osservare da come è definito, è legato alle condizioni iniziali. Per quanto detto finora l'energia totale sul piano meridionale è conservata e si può riscrivere come:

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{\dot{z}^2}{2} + \Phi_{eff.} = E_{tot.}, \quad (4.13)$$

e quindi:

$$\Phi_{eff.} \leq E_{tot.} \quad (4.14)$$

Esiste allora una regione da cui la particella non può fuggire, è vincolata da una *curva di velocità zero* sul piano  $r$ - $z$ . Dunque fissato il valore di  $J_0$ , l'orbita circolare e quella ad energia minima.

#### 4.1.1 Teoria delle Perturbazioni

Si prenda ora l'orbita circolare del deferente, la si perturbi e si cerchi di riprodurre l'orbita vera. Prima di fare ciò è necessario dimostrare il seguente teorema:

Teorema:

*"L'orbita circolare e l'orbita ad energia minima."*

*Dimostro.*

Le condizioni per il minimo del potenziale sono due. Infatti il potenziale effettivo  $\Phi_{eff.}$  è una funzione sia di  $\vec{r}$  che di  $\vec{z}$ .

1.  $\frac{\partial \Phi_{eff.}}{\partial r} = 0$ . Tale risultato è vero quando la derivata seconda della posizione, sul piano meridionale, non dipende dal tempo e dunque solo



in caso di orbita circolare o ellittica. Se così non fosse si avrebbero delle oscillazioni radiali dell'orbita lungo il piano meridionale. Si richiede inoltre che anche la  $\vec{r}(t)$  non vari nel tempo e dunque la soluzione si riduce solo alle orbite circolari che hanno  $\vec{r}(t) = \text{cost} \forall t? r_0$ .

2.  $\frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial z} = 0$ . In questo caso dunque l'orbita è descritta su un piano di equazione  $z = \text{cost}$ , che, per semplicità è definito come il piano  $z = 0$ . Altrimenti sopra il piano equatoriale si svilupperebbe una forza che muove verso il basso la particella. [nb: esistono sistemi con  $\ddot{z} \neq 0$  e con orbite circolari ma non sono realistici].

Dalla prima condizione, calcolata in  $r_0$ , si ottiene che:

$$-\frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 0 = - \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \Phi + \frac{J_0^2}{2r^2} \right) \right] \Big|_{r=r_0}. \quad (4.15)$$

E dunque, segue immediatamente dalla prima equazione del sistema (4.12) che:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = \frac{J_0^2}{2r_0^3} = r_0 \dot{\theta}^2. \quad (4.16)$$

Cio significa quindi che, fissato un valore di  $J_0$  è possibile determinare il valore di  $r_0$ . Risolvendo dunque l'equazione, dati un valore di  $\Phi$  e di  $J_0$ , riesco a ricavare il raggio  $r_0$  dell'orbita circolare. Inoltre, è possibile riscrivere il valore di  $J_0$  come:

$$J_0 = r_0 v_0 \Rightarrow \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = \frac{v_0^2}{r_0} \right) \quad (4.17)$$

La forza centripeta ( $J_0$ ) spinge verso l'esterno la particella ma è controbilanciata dalla forza gravitazionale che la spinge verso il baricentro. Nel caso particolare di sistema a simmetria sferica  $\Phi = \frac{GM(r)}{r}$ , si ottiene la legge oraria per la velocità uguagliando i due termini:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{GM(r)}{r^2} = \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}} := \text{velocità Kepleriana}. \quad (4.18)$$

Esiste un secondo metodo per caratterizzare l'orbita circolare oltre a quello già trovato imponendo una condizione di minimo sul potenziale. Si scriva infatti l'energia totale del sistema:

$$E_{tot.} = \frac{v_r^2}{2} + \frac{v_z^2}{2} + \Phi_{eff.}, \quad (4.19)$$

ricordando che per un'orbita circolare:  $v_r = 0$  e  $v_z = 0$  si può riscrivere l'energia totale del sistema come:

$$E_{tot.}^{(0)} = \frac{v_r^2}{2} + \frac{v_z^2}{2} + \Phi_{eff.} \quad (4.20)$$

Si indaga ora in approssimazione epicyclica lo sviluppo di Taylor del potenziale effettivo. Si sceglie dunque la posizione di equilibrio  $r_0$  e si perturbi rispetto ad essa di una quantità  $r(t)$  piccola a piacere. Si ottiene dunque che:

$$\begin{aligned} \Phi_{eff}(r, z) = & \\ & \Phi(r_0, 0) + \left. \frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial r} \right|_{(r_0, 0)} \cdot \delta r + \left. \frac{\partial \Phi_{eff}}{\partial z} \right|_{(r_0, 0)} \cdot z \\ & + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial r^2} \right|_{(r_0, 0)} \cdot \delta r^2 + \left. \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial z \partial r} \right|_{(r_0, 0)} \cdot z \delta r + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial z^2} \right|_{(r_0, 0)} \cdot z^2 + \dots \end{aligned} \quad (4.21)$$

Si supponga di avere delle particelle tutte in orbita circolare e di perturbarne il moto. I fenomeni che seguono a tale perturbazione possono essere:

1. Oscillazioni lungo la posizione di equilibrio (moto epicyclico);
2. Fuga all'infinito delle particelle perturbate;
3. Cattura in una nuova orbita attorno al corpo perturbante;
4. Fenomeni di agglomerazione o accrescimento.

Si osserva come l'orbita circolare è un caso particolarissimo di orbita che può essere ricavato dalle equazioni del moto imponendo che la traiettoria del corpo abbia energia minima [corretto?]. Tenendo presente tale osservazione è dunque possibile comprendere come l'orbita circolare sia l'orbita più "fredda" in termini di energia mentre orbite con elevata eccentricità siano leggermente più "calde" ed orbite con elevate oscillazioni radiali o con traiettorie caotiche siano le più "calde". L'interazione gravitazionale, come verrà dimostrato in seguito, può generare un aumento dell'energia delle particelle e trasformare un disco "freddo" in uno "caldo". Sarà inoltre dimostrato che non è mai vero il contrario.

Il comportamento macroscopico delle particelle, perturbate da un corpo più massivo, descrive un'onda di densità a spirale. Tali perturbazioni sono evidenti, per esempio nell'anello A di Saturno o nella divisione di Enke. È d'obbligo far notare come l'osservazione di onde di densità sia l'indicazione indiretta della presenza di un corpo perturbante nelle vicinanze. Dallo studio di queste onde si possono ricavare, in modo indiretto, alcuni parametri fisici del corpo perturbatore. Si ripete come, l'ampiezza delle oscillazioni radiali introdotte dal corpo perturbatore sia maggiore vicino al corpo stesso mentre all'aumentare della distanza, tale fenomeno diminuisce d'intensità.

Si può inoltre descrivere, in modo qualitativo, che tipo di perturbazione riesca ad imprimere un comportamento di questo tipo su un anello o un disco di particelle. Tale perturbazione deve infatti essere:

1. periodica (cioè è dovuto alla natura periodica delle orbite circolari con cui si muovono il corpo perturbatore e le particelle);
2. ampiezza decrescente al variare della distanza dell'oggetto (la perturbazione infatti decresce con il quadrato della distanza);
3. il periodo aumenta con l'aumentare della distanza dall'oggetto.

La generazione di tale onda di densità non è altro che la sovrapposizione dei moti epicyclici delle singole particelle poste a distanza crescente dal corpo perturbatore.

Si osserva infine come tali perturbazioni mantengano bidimensionale la struttura del disco e dunque non provochino variazioni dell'altezza dello stesso come avviene invece per le perturbazioni osservate nell'anello F di Saturno [fig.4].

Il modello che viene descritto nel seguito ha le seguenti approssimazioni:

1. non sono presenti forze di tipo viscoso;
2. non sono presenti collisioni inelastiche tra le particelle (collisionless model);
3. le particelle sono perturbate ma non c'è agglomerazione tra esse e dunque si possono attraversare a vicenda.

#### 4.1.2 Risonanze

Come detto in precedenza, tanto più ci si allontana dall'oggetto perturbatore tanto minore è l'effetto della perturbazione sulla particella. Si ha dunque una diminuzione della lunghezza d'onda e dell'ampiezza delle perturbazioni mano a mano che ci si allontana dall'orbita del perturbatore. Esistono però delle zone in cui il fenomeno della perturbazione torna ad essere evidente. In queste zone il *modo* proprio con cui una particella oscilla rispetto alla posizione di equilibrio (*eigenfrequency*) coincide con la frequenza esterna dovuta alla perturbazione. Poiché infatti una particella che si muove in orbita circolare può essere rappresentata anche come un oscillatore armonico con periodo  $T := \Omega_k(r)$  allora è possibile che la frequenza dell'oggetto perturbatore o il suo periodo coincideranno con quelle della particella dando luogo al fenomeno detto: *risonanza*.

Ecco dunque che un oggetto perturbatore può generare diverse risonanze poiché può essere visto come una perturbazione continua e periodica con massimi d'interazione ogni  $\Omega_{pert.} = n\Omega_{part.}(r)$ . Ciò implica che le risonanze sono

multipli interi di una grandezza fondamentale e che quindi sono fenomeni quantizzati che presentano inoltre massimi e minimi in base a posizione e tempo. Si suppone infatti che un perturbatore orbiti di moto circolare e che un disco di particelle venga perturbato da esso. Il fenomeno risulterà massimo per tutte le particelle che si troveranno a distanza minima dal perturbatore ed inoltre risulterà predominante solo in zone in cui le frequenze orbitali della particella e del perturbatore sono un multiplo intero di una quantità fondamentale. In queste zone, la perturbazione costruttiva, crescerà nel tempo. Tutto ciò è evidente nella figura sottostante in cui è descritto nel piano *eccentricità-semiasse maggiore* il fenomeno della risonanza orbitale di un pianeta all'interno di un disco di particelle.

Quando avviene una risonanza la particella interessata inizia ad oscillare attorno ad una posizione di equilibrio con un *modo*  $m$ . Un esempio è l'outer edge dell'anello B del pianeta Saturno che oscilla con un modo  $m=2$  (2:1) dovuto alla presenza del satellite Mimas oppure, sempre per quanto riguarda gli anelli del pianeta Saturno, l'outer edge dell'anello A in cui l'oscillazione è  $m=7$  (7:6) ed è dovuta alla perturbazione del satellite Janus.

Si riprenda l'equazione 4.21 e si ricorda come il secondo termine è uguale a zero poiché è la derivata del potenziale effettivo fatta rispetto ad una costante. Anche il terzo ed il quinto termine sono uguali a zero. Quindi in definitiva si ottiene:

$$\Phi_{eff.}(r, z) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial r^2} \Big|_{(r_0, 0)} \cdot \delta r^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial z^2} \Big|_{(r_0, 0)} \cdot z^2. \quad (4.22)$$

Inserendo dunque questo sviluppo del potenziale effettivo nelle equazioni del moto si ottiene l'equazione del moto in approssimazione epiciclica:

$$\begin{cases} \ddot{\delta r} = -\kappa_c^2 \delta r \\ \ddot{z} = -\mu_c^2 z \end{cases}, \quad (4.23)$$

in questo caso la prima equazione presenta il termine  $\kappa_c$  definito come frequenza epiciclica radiale, mentre nella seconda equazione il termine  $\mu_c$  è definito come frequenza epiciclica verticale. Queste due frequenze sono definite come segue:

$$\begin{cases} \kappa_c^2 = \kappa^2(r_0) = \left( \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial r^2} \Big|_{(r_0, 0)} \right) \\ \mu_c^2 = \mu^2(r_0) = \left( \frac{\partial^2 \Phi_{eff}}{\partial z^2} \Big|_{(r_0, 0)} \right) \end{cases}. \quad (4.24)$$

Esiste infine un terzo tipo di frequenza che è la frequenza circolare  $\Omega_c$  definita come segue:

dunque in base al potenziale che viene scelto si ottengono delle particolari espressioni per tali parametri. Nel caso di un potenziale a-sferico si ottiene:

$$\begin{Bmatrix} \Omega^2(r) \\ \kappa^2(r) \\ \mu^2(r) \end{Bmatrix} = \frac{GM_s}{r^3} \left[ 1 + \begin{Bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \end{Bmatrix} J_2 \left( \frac{R_s}{r} \right)^2 \right], \quad (4.25)$$

dove nella precedente equazione si è fatto uso di  $J_2$  per indicare la funzione di Bessel del second'ordine. Ed i coefficienti  $A_2$ ,  $B_2$  e  $C_2$  sono rispettivamente uguali a:  $3/2$ ,  $-3/2$  e  $9/2$ . Infine una proprietà interessante per un potenziale a-sferico è quella di generare tre frequenze distinte tali che:  $\kappa < \Omega < \mu$  (molteplicità di frequenze uguale a 3).

### 4.1.3 Parametri fondamentali

La lunghezza d'onda è direttamente proporzionale alla distanza ( $s$ ) tra la particella ed il corpo perturbatore:

$$\lambda = 3\pi s. \quad (4.26)$$

Si studia il comportamento di tali onde in un S.d.R con origine nel corpo centrale e corotante con il perturbatore dunque si ha che:

$$\vec{\omega}_{SdR} = \vec{\Omega}_{K;pert.} \quad (4.27)$$

In questo nuovo S.d.R, seguendo l'impostazione del lavoro di Landau & Lifshitz 1970, una particella ad una distanza dal centro  $r_p$  con velocità  $\vec{v}_p$  avrà una nuova velocità  $\vec{u}_p$  definita come:

$$\vec{u}_p = \vec{v}_p(\vec{r}_p) - [\vec{\Omega}_p \wedge \vec{r}_p]. \quad (4.28)$$

Si suppone inoltre che il moto delle particelle e del perturbatore avvenga nello stesso piano che per convenzione è quello con  $z = 0$ , che le orbite iniziali siano tutte perfettamente circolari e che la distanza del corpo perturbatore sia  $r_s$ .

Dunque la componente azimutale ( $u_\phi$ ) della velocità delle particelle è:

$$u_\phi = (v_p)_\phi - \Omega_s r_p. \quad (4.29)$$

Ricordando poi che la proiezione azimutale della velocità vettoriale  $v_p$  della particella:  $(v_p)_\phi$  non è altro che il prodotto tra  $\Omega_p r_p$  e possibile riscrivere l'equazione sopra come:

$$u_\phi = (\Omega_p - \Omega_s) r_p. \quad (4.30)$$

Raccogliendo ed espandendo in serie di Taylor [metti il conto in nota] e poi possibile riscrivere ancora il valore sopra:

$$u_\phi \cong \left( \frac{\partial \Omega}{\partial r} \Big|_{r=r_s} \cdot s, \quad (4.31)$$

in regime Kepleriano puro il valore  $\Omega_K \sim r^{-3/2}$  e dunque il valore sopra puo essere riscritto infine come:

$$u_\phi \cong -\frac{3}{2} \Omega_s s. \quad (4.32)$$

Il periodo epiciclico della particella è poi:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega_s}. \quad (4.33)$$

Poiché inoltre è possibile riscrivere il valore della lunghezza d'onda come:

$$\lambda = |u_\phi T|, \quad (4.34)$$

inserendo il valore ricavato in precedenza e possibile riottenere l'eq. 4.26. Che avevamo dato solo come definizione:

$$\lambda = \frac{3}{2} \Omega_s s \frac{2\pi}{\Omega_s} = 3\pi s. \quad (4.35)$$

## 4.2 Interazione a tre corpi: la migrazione orbitale

Nella sezione precedente si è studiata la migrazione orbitale all'interno di un disco di particelle utilizzando il metodo della DF. Ora si cercherà di ricavare il rate di migrazione orbitale tramite la teoria epiciclica seguendo l'articolo di Nicholson [1999].

Si definiscono inizialmente i seguenti parametri fisici con cui verranno caratterizzati il corpo primario, il corpo secondario e le particelle che compongono il disco.

Il corpo primario è posizionato al centro del disco di particelle e possiede una massa  $M$ . Non possiede momento angolare intrinseco ed è supposto avere una distribuzione di materia a simmetria sferica. Il corpo secondario risulta avere una massa  $m$ , si muove in orbita circolare ad una distanza  $r_m$  dal corpo centrale. Vengono ora riscritte le equazioni del moto della particella di prova in coordinate cilindriche. Di seguito sono riportate la componente radiale ed azimutale. Si tenga presente che in questa trattazione il moto della particella avviene nello stesso piano in cui si ha anche il moto del sistema binario. Il disco di particelle è dunque supposto bidimensionale e coplanare con il sistema binario.

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{\partial \varphi_s}{\partial r} - \frac{GM}{r^2} r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \left( \frac{dr}{dt} \right) \left( \frac{d\theta}{dt} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_s}{\partial \theta} \quad (4.36)$$

dove nell'equazione precedente è stato fatto uso del valore  $\varphi_s$ : per descrivere il potenziale gravitazionale del corpo secondario. Si è supposto inoltre che la velocità angolare di tale corpo risulti essere, con buona approssimazione, uguale a:

$$\omega_s := \sqrt{\frac{G(M+m)}{r_m^3}} \cong \sqrt{\frac{GM}{r_m^3}}. \quad (4.37)$$

Quest'approssimazione permette inoltre di definire come baricentro del sistema la posizione del corpo più massivo (corpo centrale) e quindi di supporre che tutte le distanze siano calcolate rispetto ad esso. Sia poi  $r_0$  l'orbita di una particella rispetto al centro del sistema. Continuando a far uso della precedente approssimazione si definisce la sua velocità angolare della particella come:

$$\Omega \cong \sqrt{\frac{GM}{r_0^3}}. \quad (4.38)$$

Si definisca infine il parametro d'impatto  $b$  come segue:

$$b = r_0 - r_m, \quad (4.39)$$

mentre il parametro d'impatto normalizzato utilizzando il parametro di Hill  $r_H^2$ :

$$b = \frac{b}{r_H}. \quad (4.40)$$

Si può dunque ridefinire il valore  $r_0$  per la particella in orbita circolare imperturbata come:

$$r_0 = r_m + b. \quad (4.41)$$

Si definisca poi  $\varphi(t) = \Omega t$ . Infine si consideri l'oggetto secondario come il corpo perturbatore e dunque il potenziale  $\varphi_s$  come il potenziale perturbatore. Dunque è possibile riscrivere le nuove quantità nel modo seguente:

$$\begin{cases} r_0 = r_0 + x (x \ll r_0) \\ \theta(t) = \Omega t + \frac{y}{r_m} \end{cases}. \quad (4.42)$$

---

<sup>2</sup>Tale parametro è definito come:  $r_H = r_m (\frac{m}{3M})^{1/3}$ .

Si prosegue poi con la linearizzazione delle equazioni del moto (...) attorno all'orbita di equilibrio:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} - 2\Omega \frac{dy}{dt} - 3\Omega^2 x = -\left(\frac{\partial \varphi_s}{\partial r}\right)_0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2\Omega \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{r_0} \left(\frac{\partial \varphi_s}{\partial \theta}\right)_0 \end{cases} \quad (4.43)$$

Poiché molti dei procedimenti finora effettuati sono già stati commentati nel precedente paragrafo e superfluo reinserire le stesse osservazioni. Si rimandi al paragrafo precedente per una spiegazione più dettagliata. Si definisce poi la coordinata azimutale del corpo secondario ( $\theta$ ) come segue:

$$\theta_m = \omega t + \theta_{m,0}. \quad (4.44)$$

E' ora utile ridefinire il potenziale del corpo secondario (oggetto perturbatore):

$$\varphi_s = -\frac{Gm}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_m|} = -\frac{GM_s}{\sqrt{r_0^2 + r_m^2 - 2r_0r_m \cos(\theta - \theta_m)}}, \quad (4.45)$$

ed è dunque un potenziale dipendente dal tempo. Infatti:

$$\cos(\theta - \theta_m) = \cos[(\Omega - \omega)t - \theta_{m,0}]. \quad (4.46)$$

Calcolando poi il termine:

$$\frac{1}{r_0} \left(\frac{\partial \varphi_s}{\partial \theta}\right)_0 \Omega \frac{1}{r_0(\Omega - \omega)} \left(\frac{\partial \varphi_s}{\partial t}\right)_0, \quad (4.47)$$

ed inserendolo nell'equazione (4.43)b si ottiene, dopo un'integrazione:

$$\frac{dy}{dt} + 2\Omega x = -\left(\frac{\varphi_s}{r_0(\Omega - \omega)}\right)_0. \quad (4.48)$$

E' utile osservare come tale procedimento poteva esser fatto anche per l'equazione (...)b dando lo stesso identico risultato ma si è scelto di operare sulla seconda equazione per evitare che il calcolo risultasse troppo difficoltoso.

Si osservi ora come il termine  $(\varphi_s)_0$  risulti essere una funzione periodica. Essa infatti dipende da  $\frac{1}{\cos(\theta - \theta_m)}$  o analogamente da  $\frac{1}{\cos[(\Omega - \omega)t - \theta_{m,0}]}$ . Il periodo di tale funzione è dunque uguale a:

$$T = \frac{2\pi}{|\omega - \Omega|} = \Omega \frac{2\pi}{\beta}. \quad (4.49)$$



Poiché si necessita di una soluzione periodica (la perturbazione è infatti periodica), è necessario introdurre un termine di frizione che, se molto piccolo rispetto agli altri termini consente di dare un risultato indipendente dal termine stesso<sup>3</sup>. Si ottiene dunque:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \gamma \frac{dx}{dt} + \Omega^2 x = -\left(\frac{\partial \varphi_s}{\partial r} + \frac{2\Omega \varphi_s}{r_0(\Omega - \omega)}\right)|_0 \Omega S. \quad (4.50)$$

Come fatto in precedenza, è possibile sviluppare tale potenziale  $S$  in serie di Fourier:

$$S(r, \phi, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n e^{in\beta t}, \quad (4.51)$$

prenderne solo la parte reale e definire  $S_n$  come segue:

$$S_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\beta}} S(t) \exp\Omega(-in\beta t) dt. \quad (4.52)$$

La soluzione periodica dell'equazione precedente è:

$$x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{S_n e^{in\beta t}}{(\Omega^2 - n^2\beta^2 + i\gamma n\beta)}. \quad (4.53)$$

La quale può essere riscritta in termini della funzione di Green seguente:

$$G(\tau) \Omega \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{in\beta\tau}}{(\Omega^2 - n^2\beta^2 + i\gamma n\beta)}. \quad (4.54)$$

Concludendo, di conseguenza, è possibile riscrivere la soluzione come:

$$x = \beta \int_0^{\frac{2\pi}{\beta}} S(t-t') G(t') dt'. \quad (4.55)$$

Sviluppando questo termine utilizzando il formalismo delle trasformate di Fourier si arriva all'equazione finale per la variazione di momento angolare esercitata sul corpo secondario di massa  $m$  che ruota attorno ad un corpo primario di massa  $M$  ad una distanza  $r_m$  durante tutti gli incontri periodici all'interno del disco con densità superficiale  $\Sigma$ :

$$T = -17.8 \left( \frac{\Sigma}{Mr_m^{-2}} \right) \left( \frac{m}{M} \right)^{4/3}. \quad (4.56)$$

---

<sup>3</sup>Questo procedimento può sembrare strano ma è stato introdotto anche nel articolo fondamentale di Goldreich and Tremaine [1980] che è stato tra i primi ad indagare sul fenomeno delle onde di densità, delle risonanze e del trasporto di momento angolare in dischi di gas o particelle.

Come si osserverà più avanti tale risultato è molto simile a quello che andremo a ricavare e, in effetti, anche se utilizzando un metodo matematico differente sono entrambi basati sulle considerazioni ricavabili dalla teoria lineare delle onde di densità bidimensionali (?). La cosa interessante è che, in questo caso, è possibile ricavare anche una funzione analitica che permette di studiare l'andamento nel tempo del semiasse maggiore di un pianeta:

$$\frac{dr_m}{dt} = -35.6 \frac{\Sigma r_m^2}{M} \left(\frac{m}{M}\right)^{1/3} r_m \Omega. \quad (4.57)$$

Si osservano subito delle differenze con gli andamenti ricavati con lo studio della DF. Qui infatti c'è una dipendenza esplicita non solo dalla distanza a cui si trova il pianeta ma anche dalla velocità angolare  $\Omega$  a cui esso si stà muovendo.

L'affinità teorica tra questo modello e quello seguente ha permesso al candidato di non calcolare il valore il valore del momento torcente poiché risulta essere analogo a quello presentato di seguito a parte la differenza di un fattore costante di *scaling* tra i due modelli dovuto al diverso approccio utilizzato.

### 4.3 Interazione *multi*-corpi: la migrazione radiale

Si supponga ora che la densità di particelle nello spazio delle fasi sia descrivibile attraverso la seguente funzione  $f(\vec{r}, \vec{v}, t) \equiv$  *distribution function*. E dunque possibile seguire l'evoluzione temporale delle particelle studiando l'evoluzione temporale della funzione precedente:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}}) + (\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}) = c(f) \\ \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m} \end{cases} \quad (4.58)$$

La precedente equazione è definita *Kinetic equation*. In tale equazione sono stati utilizzati i seguenti parametri:

- $\vec{F}$  = forza totale su una particella;
- $c(f)$  = termine collisionale: descrive come varia la  $f$  a causa delle collisioni tra particelle.

E' utile osservare come dalla  $f$  sia possibile ricavare delle quantità medie per l'insieme macroscopico di particelle:

1. Densità:  $n(\vec{r}, t) = \int f(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3 \vec{v}$ .
2. velocità:  $\vec{V}(\vec{r}, t) = \frac{1}{n} \int \vec{v} f(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3 \vec{v}$ .
3. Temperatura:  $T(\vec{r}, t) = \frac{1}{n} \int \frac{1}{2} m (\vec{v} - \vec{V})^2 f(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3 \vec{v}$ .

Come è possibile osservare, i momenti di ordine  $n$  della  $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$  dipendono dai momenti di ordine  $n-1$  e dunque per chiudere il sistema precedente sarebbe necessario un insieme infinito di equazioni ognuna dipendente dalla precedente. Quello che si cerca di fare è sviluppare la  $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$  in "piccoli termini": si ottiene una trattazione perturbativa all'ordine lineare attorno ad uno stato di equilibrio. Tale procedura permette di ricavare i coefficienti del trasporto dell'equazione cinetica: viscosità, conduttività termica, densità, ...

È importante studiare in approssimazione fluidodinamica il comportamento delle particelle. In un disco bidimensionale è possibile eliminare la dipendenza dalla temperatura nel volume. Ciò è realizzato integrando lungo l'asse  $z$  l'equazione di continuità.

Si scrive dunque il seguente sistema:

$$\begin{cases} \left[ \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \right] \vec{V} = -\nabla(\Phi_p + \Phi_s), \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \nabla \cdot (\sigma \vec{V}) = 0 \end{cases}, \quad (4.59)$$

dove si è fatto uso dei due potenziali:

- $\Phi_p = -\frac{GM_p}{r}$  : potenziale dell'oggetto primario centrale (stella);
- $\Phi_s = -\frac{GM_s}{|\vec{r} - \vec{r}_s|} = -\frac{GM_s}{\sqrt{r^2 + r_s^2 - 2rr_s \cos(\phi - F_s t)}}$  : potenziale dell'oggetto secondario (pianeta).

Si impone ora che le perturbazioni per  $\vec{V}$  e per  $\sigma$  risultano sviluppabili in serie convergenti e cioè che:

- $\vec{V} = \sum_{i=0}^n \vec{V}_i$  tale che  $|V_{i+1}| \ll |V_i|$  ;
- $\sigma = \sum_{i=0}^n \sigma_i$  tale che  $|\sigma_{i+1}| \ll |\sigma_i|$  .

Si prosegue poi con la proiezione lungo la direzione radiale ed azimutale e con la linearizzazione delle equazioni del moto:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \Omega \frac{\partial}{\partial \phi} \right] v_r - 2\Omega v_\phi = -\frac{\partial \Phi_s}{\partial r}, \quad (4.60)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \Omega \frac{\partial}{\partial \phi} \right] v_\phi - \frac{1}{2}\Omega v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_s}{\partial r}, \quad (4.61)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \Omega \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \sigma = -\frac{\sigma_0}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right]. \quad (4.62)$$

Si continua poi espandendo in serie di Fourier il potenziale del corpo secondario:

$$\Phi_s(r, \phi, t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \Phi_{s,m}(r) e^{-im(\phi - \Omega_s t)}. \quad (4.63)$$

Ora, poiché il sistema precedente è un sistema di equazioni lineari, è possibile scegliere armoniche che vanno come  $\Phi_{s,m}(r)e^{-im(\phi-\Omega_s t)}$  e così anche per le perturbazioni in  $v_r$ ,  $v_\phi$  e  $\sigma$ :

$$v_{r,m} = -\frac{im}{rD}[(\Omega - \Omega_s)r \frac{d}{dr} + 2\Omega]\Phi_{s,m}; \quad (4.64)$$

$$v_{\phi,m} = \frac{1}{2rD}[\Omega r \frac{d}{dr} + 2m^2(\Omega - \Omega_s)]\Phi_{s,m}; \quad (4.65)$$

$$\sigma_m(r) = -\frac{\sigma_0}{imr(\Omega - \Omega_s)} \left[ \frac{\partial}{\partial r}(rv_{r,m}) + imv_{\phi,m} \right]. \quad (4.66)$$

Tali equazioni descrivono il moto di un onda di densità a spirale causata dalle risonanze dell'oggetto secondario all'interno di una distribuzione asferica (discoideale) di particelle massless. Imponendo ora che i denominatori siano tutti uguali a zero si ottiene:

$$\begin{cases} \Omega - \Omega_s = 0 \\ D = \kappa^2(r) - m^2[\Omega(r) - \Omega_s]^2 = 0 \end{cases} \quad (4.67)$$

Ciò consente di definire tre tipi distinti di risonanze:

1. *Risonanza corotazionale*:  $\Omega(r_{corot.}) = \Omega_s$ ;
2. Risonanza di Linbdland interna:  $\Omega(r_{in.}) = \frac{m}{m.-1}\Omega_s$ ;
3. Risonanza di Linbdland esterna:  $\Omega(r_{in.}) = \frac{m}{m.+1}\Omega_s$ .

Quindi, in conclusione, per questi particolari valori della posizione all'interno del disco, le onde a spirali sono eccitate dalle risonanze elencate sopra e vi è un aumento dell'effetto perturbativo del corpo secondario in queste zone.

E' ora possibile calcolare il momento angolare trasportato dal corpo perturbatore (oggetto secondario). E' infatti l'interazione tramite le risonanze, e cioè tramite le onde a spirali generate da tale oggetto, che genera uno scambio di momento angolare dal corpo secondario al disco di particelle. Poiché si è in regime non viscoso tale interazione è dovuta solamente alla forza di gravità esercitata dal corpo secondario sulle particelle del disco.

Si sviluppa in serie il momento angolare  $L$ :

$$\vec{L} = \sum_{i=0}^n \vec{L}^{(i)}, \quad (4.68)$$

e si calcola il primo termine, quello con indice  $i=0$  :

$$\vec{L}^{(0)} = - \int_{r_1}^{r_2} \sigma_0(r)rdr \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\partial \Phi_s}{\partial \phi'} d\phi' = - \int_{r_1}^{r_2} \sigma_0(r)rdr \cdot [\Phi_s(2\pi) - \Phi_s(0)], \quad (4.69)$$

questo termine risulta essere costante mentre il termine con indice  $i=1$ , dovuto alla perturbazione del corpo secondario, è non costante ed è definito come segue:

$$\vec{L}^{(1)} = - \int_{r_1}^{r_2} r dr \cdot \int_0^{2\pi} \sigma_1(r, \phi') \frac{\partial \Phi_s(r, \phi')}{\partial \phi'} d\phi'. \quad (4.70)$$

Ora, per sviluppare questo termine, è necessario posizionarsi *vicino* (in un intorno) alla Risonanza di Linbdland interna ( $r \cong r_m$ ) così da poter utilizzare uno sviluppo in serie di Tayler di ordine  $m$ :

$$L_m^{(1)} = \frac{2\pi m \sigma_0 A(r_m)^2}{r_m D(r_m)} \text{Im} \left[ \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{dx}{x} \right], \quad (4.71)$$

dove si è fatto uso della seguente notazione:

- $D\Omega(\frac{\partial D}{\partial r}|_{r=r_m})$  ;
- $A(r_m)\Omega - \frac{GM_s}{2r_s}([2mb + \beta \frac{db}{d\beta}]|_{\beta=\frac{r_m}{r_s}})$  ;
- $x := \frac{r-r_m}{r_m}$  ;
- $b\Omega \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos m\phi' d\phi'}{\sqrt{1+\beta^2-2\beta \cos \phi'}}$  .

E' possibile ora ridefinire il parametro  $x$  nel seguente modo:

$$x := \lim_{\alpha \rightarrow 0} (x + i\alpha), \quad (4.72)$$

ridefinire dunque l'integrale in (...) come:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \text{Im} \left[ \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{dx}{x + i\alpha} \right] = - \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{dx}{x^2 + \alpha^2} = -\pi \text{sgn}\alpha, \quad (4.73)$$

ed ottenere infine che:

$$L_m^{(1)} = - \frac{4\pi^2 \sigma_0 A(r_m)^2}{3\Omega(r_m)\Omega_s} \text{sgn}\alpha. \quad (4.74)$$

Fisicamente quindi valori di  $\alpha > 0$  danno valori di  $L_m^{(1)} < 0$  e quindi in questo caso il secondario toglie momento angolare al disco tramite la Risonanza di Linbdland Interna (RLI) e ne cede allo stesso tramite la Risonanza di Linbdland esterna (RLE). Come si osserva nel seguito tale differenza non è simmetrica per le due risonanze e, tale asimmetria consente di spiegare matematicamente il diverso tipo di interazione che un pianeta ha con la parte esterna ed interna del disco che lo circonda. Ora, seguendo la trattazione dell'articolo di Cionco and Brunini [2002] è possibile ridefinire il valore della

*torque Momento torcente.* alla risonanza di Linbdland trovato nell'equazione 4.80 nel modo seguente:

$$T_{l,m}^L = -m\pi^2\Sigma\frac{\Psi_{l,m}^2}{D'}, \quad (4.75)$$

dove con  $D'$  è il valore già definito precedentemente per l'equazione 4.77,  $D$  è stato già definito nell'equazione 4.73 ed infine  $\Psi_{l,m}^2$  è il termine definito nell'equazione 4.69. In questa trattazione il termine  $D'/T$  è negativo e, per un disco Kepleriano, il valore di  $D'$  risulta negativo nella zona esterna al disco, mentre è positivo nella zona interna (come per il valore di  $\alpha$  definito nell'equazione 4.80). Fisicamente il momento angolare è scambiato dal pianeta con le risonanze di Linbdland e trasportato verso l'esterno/interno del disco attraverso delle onde a spirale. Nel caso di un disco di planetesimi non ci sono delle onde a spirale ma solo delle *spiral trailing pattern* dovute all'interazione tra il pianeta e le risonanze del disco. Se si formano questo tipo di onde di densità il disco cede momento angolare dalla parte più interna verso quella più esterna. In un disco fluido quindi il momento angolare è scambiato sia attraverso le onde di densità dovute alla risonanze di Linbdland che all'interazione con un secondo tipo di risonanza definita *risonanza corotante* (Goldreich and Tremaine [1980]). Nel caso specifico però, non essendo implementata l'autogravità per i dischi simulati non sono presenti delle interazioni gravitazionali che permettono lo scambio di momento angolare tra il pianeta e quest'ultimo tipo di risonanze. Si dice quindi che le risonanze corotanti sono *eccitate* dall'interazione con il pianeta. Tali risonanze dunque non contribuiscono alla *torque* totale subita dal pianeta.

Si è scelto di simulare un disco con profilo di densità radiale costante poichè, in questo caso, lo studio della teoria lineare bidimensionale delle onde di densità assicura come l'unica fonte di asimmetria per il calcolo della *torque* deriva dalla funzione perturbatrice e dal profilo di velocità radiale del disco<sup>4</sup>.

Dalla letteratura si ottiene come nello studio dello sviluppo di Fourier della funzione perturbatrice, vengano introdotti i coefficienti di Laplace e le loro derivate prime e seconde:

$$b_{1/2}^m = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos m\theta}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos\theta}} = \frac{2}{\pi} \frac{K_0(x)}{\alpha^{1/2}}, \quad (4.76)$$

dove il termine  $K_0(x)$  è la funzione modificata di Bessel di ordine zero (Goldreich e Tremaine, 1980).

Si prosegue definendo la derivata prima di tale funzione:

$$\alpha \frac{db_{1/2}^m}{d\alpha} = -\frac{b_{1/2}^m}{2} - em \left[ \frac{\alpha + 1}{\alpha} \right] K_1(x), \quad (4.77)$$

---

<sup>4</sup>Nel caso specifico di disco Kepleriano si ha un gradiente di velocità negativo.

in questo il valore  $\epsilon = -\text{sgn}(D')$  ed è uguale ad 1 per la parte di disco esterna al pianeta mentre è uguale a  $-1$  per la parte interna, il valore  $m$  è il termine delle armoniche con cui è stato sviluppata la funzione perturbatrice e  $K_1(x)$  è la funzione modificata di Bessel di ordine uno. La derivata seconda:

$$\alpha^2 \frac{d^2 b_{1/2}^m}{d\alpha^2} = -\alpha \frac{db_{1/2}^m}{d\alpha} + \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{2\alpha^{3/2}} \left( m^2 \frac{(\alpha+1)^2}{\alpha} + 1 \right) K_0(x) + \frac{\epsilon m}{\alpha^2} \left( m^2 \frac{(\alpha+1)^2 - 2}{\alpha - 1} \right) K_1(x) \right] \quad (4.78)$$

con  $x = m|1 - \alpha|/\alpha^{1/2}$ .

Si analizzano i vari casi:

- nel caso in cui  $l = m$  si ottiene la cosiddetta *torque* di Linblad "circolare" che ha come effetto di far decadere verso il centro l'orbita dell'oggetto perturbatore;
- nel caso in cui  $l - m = -\epsilon$  si ha la *torque* di Linblad "eccentrica" che, come nel caso circolare, ha valori negativi;
- nel caso di potenziali con valori di  $l - m = -\epsilon$  la *torque* (calcolata per le risonanze corotanti) produce una migrazione di tipo *outward*<sup>5</sup>

Nello specifico si può, in teoria lineare dare un'espressione della *torque* totale per un disco di planetesimi (Ward, 1992; Wade e Donner, 1996; Cionco e Brunini, 2002 e referenze):

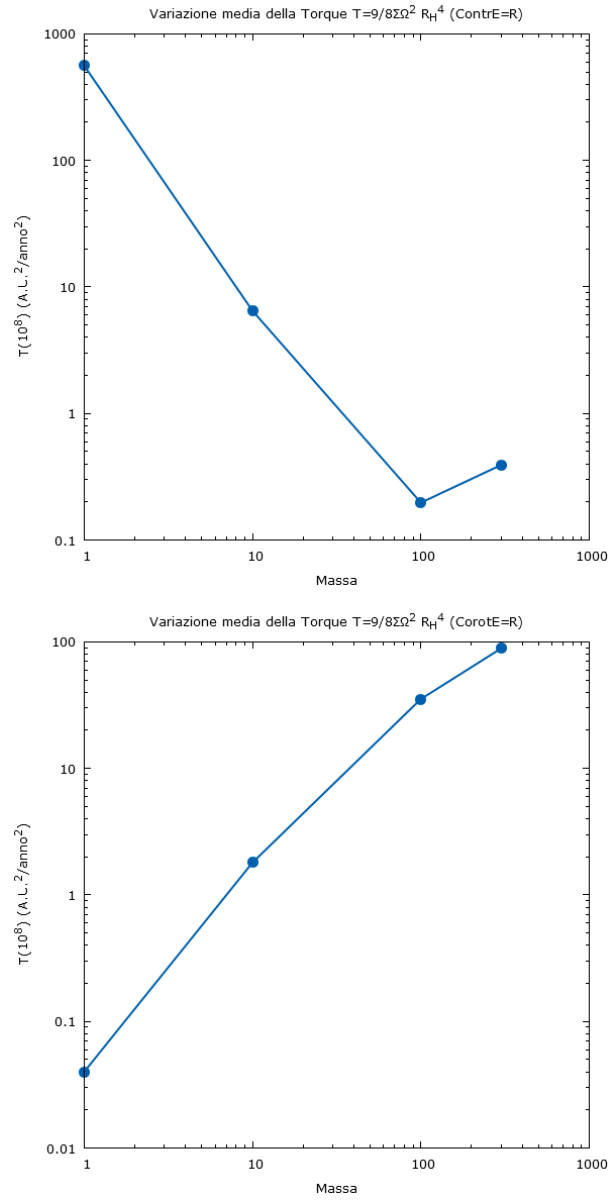
$$T = \frac{9}{8} \Sigma \Omega^2 R_H^4, \quad (4.79)$$

in cui  $R_H$  è l'usuale raggio di Hill del pianeta,  $\Omega$  è la frequenza orbitale del pianeta e  $\Sigma$  la densità superficiale del disco.

La figura 4.1 mostra l'andamento medio nel tempo del momento torcente in funzione della massa dei pianeti.

---

<sup>5</sup>Dipende dal gradiente di vorticità  $\Sigma/B$ , con  $\Sigma$  densità superficiale del disco e  $B$  costante di Oort.



**Fig. 4.1:** *Torque teorica media.* Si osserva come il momento torcente abbia un andamento opposto nei due casi presi in considerazione. Evidente segno di un'elevata asimmetria tra le due configurazioni corotante e controrotante.



## Chapter 5

# Il codice numerico: SWIFTER

*"Noi fummo i Gattopardi, i Leoni: chi ci sostituirà saranno gli sciacalletti, le iene;  
e tutti quanti, gattopardi, sciacalli e pecore, continueremo a crederci il sale della  
terra."*

- Il Gattopardo -

### Prefazione

Questo capitolo si compone di una prima e breve parte in cui viene descritto il programma SWIFTER, utilizzato per integrare il problema presentato in quest'elaborato, di una seconda parte in cui vengono presentati i tre algoritmi utilizzati per l'integrazione delle equazioni del moto ed infine di un'ultima parte in cui vengono presentati i risultati numerici ottenuti nel corso delle simulazioni.

### 5.1 Il codice

Il codice SWIFTER (<http://www.boulder.swri.edu/swifter>) è un software numerico sviluppato da D. E. Kaufmann sulla base del più vecchio SWIFT realizzato da H. Levison e M. Duncan. Quest'ultimo risolve un N-RTBP e dunque è importante, ad esempio, nello studio delle risonanze degli asteroidi o dei planetesimi ma non permette lo studio della migrazione planetaria.

Entrambi i codici sono stati realizzati per l'integrazione del problema degli *n*-corpi in particolari condizioni. Essi infatti consentono l'integrazione di due set di particelle: quelle massive (per esempio: pianeti o core planetari) e quelle non massive (particelle con massa trascurabile). Le particelle di prova inoltre non interagiscono tra loro. Quest'approssimazione garantisce una maggior velo di calcolo. La principale differenza tra i due codici è l'aggiunta dell'integratore numerico syMBA che viene analizzato in questo capitolo e che consente di aggiungere un set di particelle di massa non trascurabile, intermedia tra quella dei pianeti: i planetesimi. In questo modo anche

se la massa complessiva del disco risulta comunque molto bassa e può quindi essere trascurata rispetto la massa del corpo centrale che dunque genera la buca di potenziale in cui orbitano le particelle, garantisce comunque l'interazione tra tali particelle ed i pianeti all'interno del disco.

Le componenti principali del codice sono i sette algoritmi forniti e la possibilità di definire, in una cartella specifica, delle forze esterne alla gravitazione. Quest'ultima interessante particolarità ha consentito, ad esempio nell'articolo di C. C. Capobianco and Levison [2010] di realizzare delle simulazioni di migrazione planetaria all'interno di un disco di planetesimi aggiungendo la presenza di un disco gassoso.

Di seguito viene presentato l'elenco dei sette algoritmi proposti all'interno del codice:

- *Wisdom-Holman Mapping* (WHM). Algoritmo creato da Jack Wisdom e Matt Holman (1991; *AJ*, 102, 1528). Permette di integrare sistemi Hamiltoniani quasi integrabili ottenendo una soluzione esatta per il termine integrabile. Nel caso di un sistema governato da interazioni a lungo raggio, come il Sistema Solare, l'algoritmo usa i parametri orbitali ottenuti dal problema di Keplero come soluzione della parte integrabile dell'hamiltoniana ma senza considerare la possibilità di incontri ravvicinati tra particelle.
- *Regularized Mixed Variable Symplectic* (RMVS). Estensione del metodo WHM che permette incontri ravvicinati tra particelle di prova e pianeta. Algoritmo creato da H. Levison e M. Duncan (1994; *Icarus*, 108, 18).
- *Democratic Heliocentric* (DH, or HELIO). Algoritmo simplettico di base (i.e., no close approaches) che usa un sistema di coordinate definito: *democratic heliocentric coordinates*. Questo metodo è stato proposto e descritto da D. Duncan, H. Levison e Lee (1998; *AJ*, 116, 2067).
- *Symplectic Massive Body Algorithm* (SyMBA). Estensione del precedente HELIO che consente incontri ravvicinati tra planetesimi e pianeti. Algoritmo creato e descritto da D. Duncan, H. Levison e Lee (1998). Per approfondire si veda anche H. Levison e D. Duncan (2000; *AJ*, 120, 2117).
- *Metodo simplettico T+U del quart'ordine* (TU4). Creato da J. Candy e W. Rozmus (1991; *J. Comp. Phys.*, 92, 230). Per una comprensione maggiore si veda anche Gladman, Duncan, and Candy (1991; *CeMDA*, 52, 221).
- *Metodo non-simplettico del quint'ordine* che usa una griglia di Gauss-Radau (RADAU15, or RA15). Algoritmo descritto da Everhart (1985;

*ASSL Vol. 115: IAU Colloq. 83: Dynamics of Comets: Their Origin and Evolution, 185).*

- Bulirsch-Stoer (BS). Si veda, come esempio, il capitolo 16.4 del Press, Teukolsky, Vetterling, and Flannery (1992; *Numerical Recipes in Fortran 77*, 718).

Gli algoritmi utilizzati in questo elaborato sono tre. Due per l'integrazione del problema ristretto dei tre corpi ed uno per l'integrazione del problema *generale*. I tre algoritmi definiti precedentemente vengono descritti con maggior dettaglio nella seconda parte di questo capitolo e viene posta maggior enfasi sull'algoritmo SyMBA (Symplectic Massive Body Algorithm) il quale è utilizzato per integrare il problema generale dei tre corpi.

E' utile inserire un piccolo richiamo ai metodi d'integrazione simplettici per consentire al lettore di comprendere a pieno gli algoritmi che vengono presentati. Se non si è interessati o si ha già la conoscenza di tali metodi è possibile passare direttamente al prossimo paragrafo.

## 5.2 Algoritmo Simplettico

Una matrice  $M$   $2n \times 2n$  è definita *matrice simplettica* se vale la seguente uguaglianza:

$$MJM^T = J \quad (5.1)$$

In questo caso  $J$  indica la matrice  $2n \times 2n$  definita come segue:

$$J = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

Con  $\mathbf{1}$  matrice identità  $2n \times 2n$ .

Una seconda definizione utile è quella di *diffeomorfismo* (o trasformazione di coordinate) associato ad un'equazione Hamiltoniana. Un diffeomorfismo è definito *diffeomorfismo canonico* (o *trasformazione canonica*) se lo *Jacobiano* della trasformazione è una matrice simplettica.

In altri termini, tale trasformazione lascia inalterata la *forma* dell'equazione stessa. E' quindi possibile scrivere l'Hamiltoniana di partenza nel modo seguente:

$$H(p, q) \rightarrow K(P, Q) := H(p(P, Q), q(P, Q)). \quad (5.3)$$

In generale le trasformazioni canoniche servono per rendere più semplice il sistema in questione e quindi renderne più agevole la risoluzione senza introdurre alcun tipo di approssimazione o perdendo di generalità.

La particolarità interessante di un sistema Hamiltoniano è che la matrice che regola l'evoluzione temporale di un qualsiasi punto  $(x, y)$  nello spazio

delle coordinate è una matrice canonica. Si dice quindi che il *flusso Hamiltoniano* è una trasformazione canonica. Si può dunque riscrivere quanto detto ora come segue:

$$(x_t, y_t) = \phi^t(x, y). \quad (5.4)$$

In questo caso la matrice Jacobiana  $\phi^t$  è una matrice canonica. Tale matrice descrive il cambiamento di coordinate dal punto iniziale  $(x, y)$  al punto  $(x_t, y_t)$  che non è altro che l'evoluzione temporale del sistema Hamiltoniano.

Quindi, semplicemente, un algoritmo d'integrazione simplettico non è altro che una mappa definita come segue:

$$(x_\tau, y_\tau) = \psi^\tau(x, y). \quad (5.5)$$

che approssima la trasformazione  $\phi^t$  al tempo  $t = \tau$  in modo tale che:

$$\text{dist}(\psi^\tau(x, y), \phi^t(x, y)) = \mathcal{O}(\tau^k). \quad (5.6)$$

L'esponente  $k$  dipende dal tipo di algoritmo simplettico che si prende in considerazione. Una proprietà importante di alcuni di questi algoritmi simplettici è la *reversibilità temporale* degli stessi.

### 5.3 Gli algoritmi: WHM vs. RMVS

Vengono ora presentati gli algoritmi utilizzati nei test e nelle simulazioni numeriche.

#### 5.3.1 WHM

L'algoritmo di Wisdom e Holman (J. Wisdom e M. Holman, 1991) è una generalizzazione dell'algoritmo di Wisdom (Wisdom, 1982). Tale metodo risultava, all'epoca della scrittura, un ordine di grandezza più veloce rispetto agli altri algoritmi per l'integrazione del problema degli  $n$ -corpi e tre ordini di grandezza più veloce del precedente algoritmo di Wisdom. L'efficienza del metodo consiste nell'utilizzare timestep lunghi riducendo dunque il costo computazionale dell'integrazione. Il metodo risolve l'Hamiltoniana, che è stata suddivisa in diverse parti, utilizzando un'integrazione di tipo *leapfrog*. È possibile infatti suddividere l'Hamiltoniana del problema nel modo seguente:

$$H_{tot} = H_1 + \varepsilon H_2. \quad (5.7)$$

In questo caso il primo termine ( $H_1$ ) descrive l'interazione tra la stella ed i pianeti/planetesimi mentre il secondo termine descrive l'interazione tra pianeta e pianeta o, come nelle simulazioni condotte, tra pianeta e planetesimi. Il valore  $\varepsilon$  è solitamente posto uguale ad  $1/100$  e, assieme ad  $H_2$ , può esser visto come alla perturbazione dell'Hamiltoniana integrabile  $H_1$ .

Nel caso dell'algoritmo utilizzato, il primo termine è definito nel seguito come  $H_{Kepler}$  mentre il secondo termine descrive tutti gli altri contributi Hamiltoniani: l'interazione tra i vari corpi secondari (tra pianeta e pianeta o tra il pianeta ed i planetesimi), i termini *secolari* che non dipendono dalla longitudine media, i termini *orbitali* che dipendono dalla longitudine media e presentano rapide oscillazioni nell'evoluzione temporale ed i termini di *risonanza*.

Durante le integrazioni condotte in questo elaborato, è stato utilizzato un timestep uguale ad  $1/20$  dell'orbita della particella più interna. Si può arrivare a timestep uguali ad  $1/6$  (D. Viswanath, 2002) ma con l'aumento dell'eccentricità delle particelle in risonanza si hanno problemi di instabilità lineare (e non esponenziale grazie alla simpletti dell'algoritmo) durante l'integrazione e si è dunque preferito inserire questo limite inferiore sul timestep in ogni simulazione effettuata.

Il metodo si basa sul principio che i termini dell'Hamiltoniana che presentano oscillazioni su tempi scala brevi<sup>1</sup> non hanno un'evoluzione esponenziale nel tempo e possono dunque essere sostituiti con altri termini più semplici da studiare. Si usano, ad esempio, le funzioni a delta di Dirac periodiche (funzioni localmente integrabili) che consentono di scrivere le equazioni in modo esplicito e di studiarne l'evoluzione temporale (Chirikov, 1979).

Quello che si realizza è dunque una riscrittura del sistema inserendo al posto del termine Hamiltoniano che descrive le interazioni orbitali un nuovo termine Hamiltoniano generando così un nuovo sistema che approssima molto bene il sistema fisico e che, inoltre, ha la proprietà di essere un sistema Hamiltoniano autonomo. In questo caso, utilizzando un timestep abbastanza piccolo, è possibile tenere sotto controllo gli errori dovuti all'integrazione.

L'introduzione di queste funzioni consente di studiare il comportamento caotico, ad esempio, degli asteroidi in risonanza 3:1 con il moto di Giove. Essi infatti presentano per svariate centinaia di migliaia di anni un valore dell'eccentricità molto basso che, con una ricorrenza non periodica, aumenta di molto per un periodo di tempo limitato (Wisdom, 1983; Murray e Fox, 1984). Il punto fondamentale di questo metodo è la corretta scelta della trasformazione simplettica di coordinate con cui viene riscritta l'Hamiltoniana. Essa è infatti scritta utilizzando il sistema di coordinate di Jacobi che permette di rendere analitico ogni termine della nuova Hamiltoniana. Il risultato è una funzione analitica che descrive lo stato del sistema alla fine di ogni periodo della funzione delta, partendo dallo stato iniziale. L'evoluzione temporale si ottiene iterando questo procedimento. Il metodo d'integrazione per tali termini Hamiltoniani, come già detto, è una mappa simplettica e differisce completamente rispetto ad altri metodi utilizzati precedentemente<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Tali termini sono definiti nella parte Hamiltoniana orbitale, introdotta precedentemente.

<sup>2</sup> Si usa ad esempio il metodo di Encke su cui si basano le simulazioni di Roy et al. (1988).

Il nuovo sistema consiste quindi in un sistema puramente Kepleriano in cui le orbite dei singoli pianeti sono descritte dalle equazioni del moto dei due corpi in un potenziale centrale più l'aggiunta di perturbazioni che descrivono l'interazione tra i vari pianeti (o tra il pianeta ed i planetesimi) e sono ottenute integrando l'intero sistema Hamiltoniano per un tempo uguale al periodo delle funzioni delta di Dirac. Dunque ad ogni timestep il sistema Hamiltoniano integra le equazioni del moto Kepleriane e aggiunge, quando necessario, delle perturbazioni dovute ai termini a delta di Dirac. In pratica quello che succede ad ogni timestep e che si risolvono due Hamiltoniane separatamente, entrambe integrabili, la prima che descrive la parte Kepleriana del problema l'altra che descrive l'interazione orbitale tra i corpi e che è l'unica Hamiltoniana da integrare quando la funzione periodica associata risulta essere diversa da zero:

$$H_{tot} = H_0 + 2\pi\delta_{2\pi}(t)H_1 = \begin{cases} H_0, & \text{se } \delta_{2\pi}(t) = 0 \\ H_1, & \text{se } \delta_{2\pi}(t) \neq 0 \end{cases} \quad (5.8)$$

con:

$$\delta_{2\pi}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 2\pi n). \quad (5.9)$$

Ogni passo d'integrazione ( $\tau$ ) è gestito nel modo seguente:

$H_0$  : il termine Kepleriano è integrato per  $\frac{\tau}{2}$ ;

$H_1$  : il termine d'interazione è integrato per  $\tau$ ;

$H_0$  : è di nuovo integrato il termine Kepleriano per  $\frac{\tau}{2}$ .

O analogamente può essere definito nel modo seguente:

$$E_{Kep}(\tau)E_{Int}\left(\frac{\tau}{2}\right)E_{Sun}\left(\frac{\tau}{2}\right). \quad (5.10)$$

L'abilità è nello scomporre l'Hamiltoniana in modo tale che i termini siano, non solo integrabili, ma anche efficacemente trattabili dal punto di vista numerico e computazionale. Infatti continuando ad utilizzare il formalismo Kepleriano, che descrive il moto dei corpi tramite gli elementi orbitali, il termine d'interazione non viene trattato in modo efficiente poiché bisogna utilizzare un'espansione in serie per descriverlo. Qui si capisce la necessità di scomporre l'Hamiltoniana del problema.

Poiché infatti ogni termine dell'Hamiltoniana (5.7) viene risolto separatamente, nulla vieta di trattare ogni singolo termine con il set di coordinate più vantaggioso possibile<sup>3</sup>. Nel caso di un sistema di  $n$ -corpi la scelta

---

<sup>3</sup>E' possibile infatti studiare il termine  $H_{Kepler}$  utilizzando gli elementi orbitali in formalismo canonico (ad esempio le variabili di Delaunay) e il termine  $H_{interaction}$  con un set canonico di coordinate cartesiane. Un'idea migliore è quella di scrivere il termine  $H_{Kepler}$  in coordinate cartesiane canoniche utilizzando le funzioni  $f$  e  $g$  di Gauss (Danby, 1988) ed il termine  $H_{interaction}$  con un secondo set di coordinate cartesiane canoniche.

più semplice per scomporre i termini in modo efficace è utilizzare il set di coordinate di Jacobi (Plummer, 1960). Tale algoritmo è del second'ordine ma può essere portato anche ad ordini superiori. Inoltre l'errore che si commette con questo algoritmo non è  $Ch^3$  (con  $C$  costante) ma è molto minore ed è uguale a  $\frac{1}{24}\varepsilon h^3$  (McLachlan, 1995), infatti la dipendenza da  $\varepsilon$  rende l'algoritmo molto più accurato.

E' stata nominata, all'inizio del paragrafo, la velo di calcolo di quest'algoritmo che risulta essere di gran lunga superiore rispetto agli altri algoritmi che erano disponibili all'epoca della pubblicazione dell'articolo. L'enorme velo di calcolo è dovuta proprio al metodo con cui è scomposta l'Hamiltoniana di partenza. Infatti per particelle con eccentricità modesta il termine  $|H_{int}| \ll |H_{Kepler}|$  e ciò è dovuto al fatto che, il problema che si vuole risolvere, presenta una massa dominante (il Sole) e dunque le perturbazioni al moto Keplero (descritte dal termine  $H_{int}$ ) risulteranno modeste.

### 5.3.2 RMVS

L'algoritmo precedente fallisce nel risolvere con efficienza e precisione il problema considerato quando:

1. le particelle (planetesimi) sono molto vicini al corpo centrale (stella);
2. quando ci sono degli incontri ravvicinati tra i vari corpi.

L'Hamiltoniana che descrive l'interazione tra i corpi, utilizzando il formalismo di Wisdom e Holman può essere definita come segue:

$$H_{int} = G \sum_{i=1}^n \left( \frac{m_i m_0}{r'_i} - \frac{m_i m_0}{r_{i0}} \right) - G \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{m_i m_j}{r_{ij}}. \quad (5.11)$$

Nella precedente definizione il termine indica la  $r_{i0}$  distanza di ogni corpo rispetto al corpo centrale, il termine  $r_{ij}$  la distanza tra i vari corpi secondari (pianeta-pianeta o planetesimi e pianeta) mentre il termine  $r'_i$  rappresenta la distanza di ogni corpo rispetto al centro di massa del sistema ed è definita utilizzando le coordinate di Jacobi.

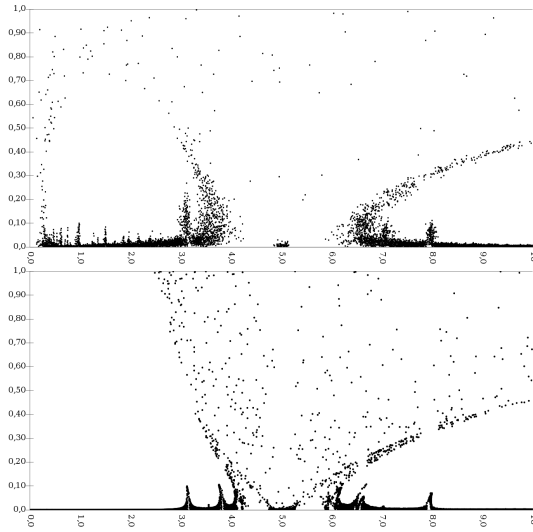
Ora, nel primo caso è facilmente comprensibile come il primo termine nella (5.10) divergendo renda la disuguaglianza  $|H_{int}| \ll |H_{Kepler}|$  non più vera, introducendo errori irreversibili durante la stima del moto delle particelle.

Analogamente anche per il secondo caso si ha un'analogia divergenza del termine d'interazione. Se i corpi hanno un'elevata distanza, allora l'algoritmo ha la stessa velo di un semplice *WVS* (metodo simplettico delle variabili miste: *Mixed Variable Symplectic method*) ma permette l'integrazione anche

---

Ciò consente di combinare immediatamente i risultati dell'integrazione dei due termini Hamiltoniani senza dover passare dagli elementi orbitali alle coordinate cartesiane.

di orbite ravvicinate. Per far ciò, ogni volta che due particelle si avvicinano il passo d'integrazione diminuisce in modo iterato fino alla precisione ottimale per una corretta risoluzione dell'orbita. La semplice diminuzione del passo d'integrazione non permette di solito di mantenere la struttura simplettica dell'algoritmo (Skeel e Gear, 1992; Lee, Duncan e Levison 1997). In figura 5.1 sono presentati due risultati a confronto. E' possibile osservare come l'algoritmo *RMVS* non presenti problemi nel trattare particelle con distanza molto vicine (o al pianeta o alla stessa centrale). Il gap nella parte centrale del disco simulato infatti è dovuto a problemi numerici nel codice.



**Fig. 5.1:** *Differenza tra l'algoritmo RMVS e WHM.* E' possibile osservare come i due algoritmi diano risultati numerici vistosamente differenti. L'algoritmo *WHM* (prima figura) non consente di studiare incontri ravvicinati con il pianeta o con la stella centrale generando così un gap nella zona centrale del disco assolutamente non fisico e aumentando la dimensione del gap fisico dovuto al pianeta.

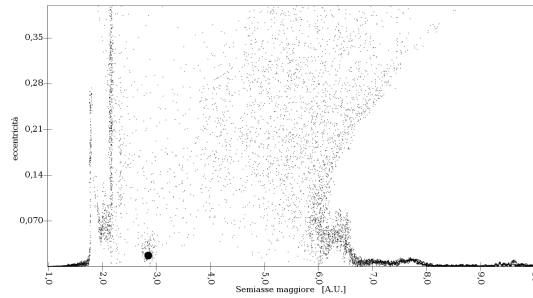
### 5.3.3 syMBA

La base di questo algoritmo è, come nei casi precedenti un algoritmo di tipo *MVS*, il vantaggio rispetto ad esempio ad un codice non simplettico (RADAU: adaptive step-size RK) è la velocità di esecuzione. Infatti syMBA è un ordine di grandezza più veloce rispetto al sopra citato algoritmo. Il vantaggio di questo algoritmo è che consente di risolvere incontri ravvicinati tra particelle di campo e pianeta, come visto nella sezione precedente infatti, anche in questo caso l'Hamiltoniana da integrare è divisa in tre parti: una parte dovuta all'interazione Kepleriana ( $H_{kep}$ ), una parte che descrive il termine d'interazione con l'oggetto centrale ( $H_{sun}$ ) ed una parte



che descrive l'interazione tra le particelle ( $H_{int}$ ). La potenza e la precisione di questo metodo sono dovuti al fatto che, in base al metodo che si è scelto per suddividere l'Hamiltoniana, è possibile ottenere tre termini indipendenti e, tutt'e tre integrabili.

Ripetendo passaggi analoghi a quelli descritti nella sezione precedente (*Kick – Drift – Kick*) questo algoritmo oltre a conservare la struttura simplettica permette di studiare l'interazione che un planetesimo ha con un pianeta. Quando infatti le distanze relative tra planetesimi e pianeta sono grandi, l'algoritmo è, a tutti gli effetti, un algoritmo di *RMVS*. Quando invece le distanze si fanno minori e quindi c'è bisogno di una precisione maggiore nel calcolare la variazione dei parametri orbitali dei planetesimi e del pianeta, viene ridefinito l'algoritmo precedente d'integrazione. Ciò consente di tracciare e calcolare l'interazione solo per quei planetesimi che sono molto vicini al pianeta. In questo caso la velocità dell'algoritmo rimane invariata poichè il numero di incontri ravvicinati, il numero di particelle che interagiscono ed il tempo su cui avvengono sono tutte quantità molto piccole e quindi la variazione nel tempo di calcolo è minima.



**Fig. 5.2:** *Algoritmo symBA*. E' possibile osservare come i due algoritmi diano risultati numerici non differenti. L'algoritmo *WHM* (prima figura) non consente di studiare incontri ravvicinati con il pianeta o con la stella centrale generando così un gap nella zona centrale del disco assolutamente non fisico e aumentando la dimensione del gap fisico dovuto al pianeta.



## Chapter 6

# Risultati Numerici

### Introduzione

In questo capitolo vengono presentati i risultati ottenuti dalle simulazioni e dai modelli analitici fin qui descritti ai due casi d'interesse trattati: il caso di disco controrotante e corotante. Nel primi due casi è possibile osservare dai grafici proposti come il problema ristretto dei tre corpi non risulti essere simmetrico. Il caso controrotante e corotante presentano infatti delle differenze sostanziali ascrivibili alla diversa interazione tra le particelle ed il pianeta: se nel caso *classico* (corotante) le differenze tra le velocità delle particelle e del pianeta sono *piccole*, nel caso controrotante invece le differenze sono più accentuate e ciò, oltre a generare degli scattering di tipo *impulsivo*, genera anche delle diverse risonanze stabili ed instabili. Abbiamo investigato poi anche il caso più realistico di un disco caldo in cui la distribuzione delle particelle segue una distribuzione di Rayleigh (o *alla Chandrasekhar*).

La parte centrale di questo capitolo è dedicata alle simulazioni numeriche in cui è stata introdotta una massa alle particelle di prova. Tali particelle ora non solo sentono il potenziale del pianeta e della stella centrale ma generano esse stesse una perturbazione e la loro interazione con il pianeta causa una variazione del semiasse maggiore di quest'ultimo. Infine abbiamo condotto delle simulazioni di osservabilità a distanza e dimensione variabile utilizzando le capacità dell'Atacama Large Millimeter Array (ALMA) ed i software di analisi e simulazione dati disponibili per esso: CASA (*Common Astronomy Software Applications*) e l'ALMA Observing Support Tool (OST). Le osservazioni simulate sono state realizzate attraverso il software CASA.

### 6.1 Problema dei tre corpi circolare ristretto

In questa sezione vengono presentati i risultati delle simulazioni condotte sul problema dei tre corpi ristretto. Vengono studiate le risonanze nei due casi proposti (il caso corotante e controrotante, in quanto il comportamento

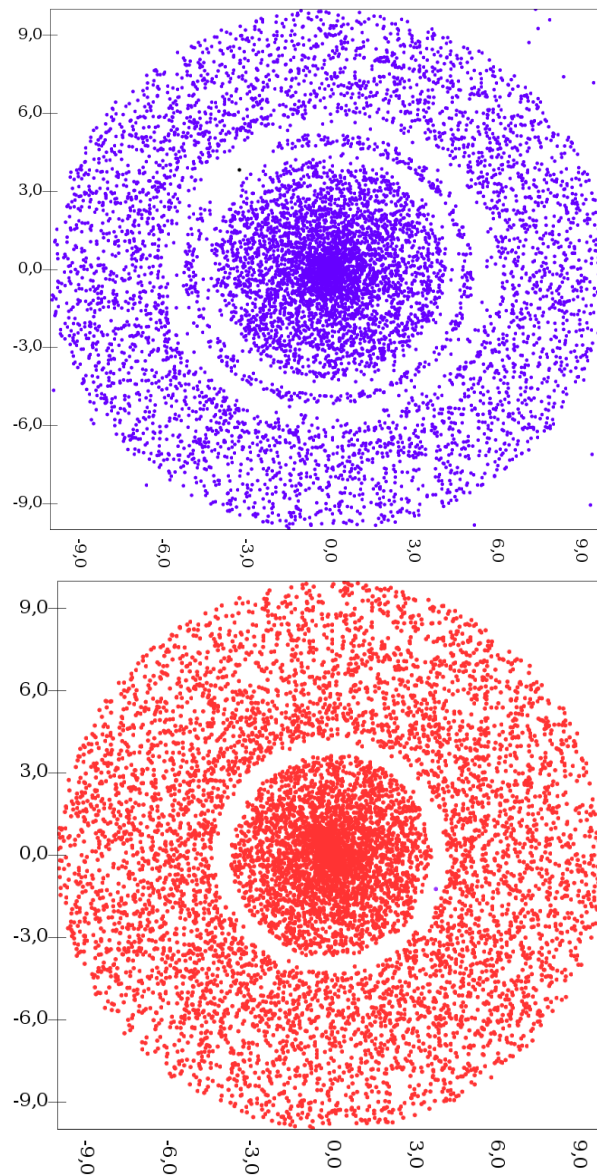
fisico il disco "caldo" è, in questa parte delle simulazioni uguale alla sovrapposizione dei due casi precedenti<sup>(1)</sup> e la dimensione del gap, confrontandola con i risultati analitici proposti nel capitolo due e qui di seguito. I risultati ottenuti sono più estesamente discussi nel capitolo sette. Un disco corotante al moto del pianeta è il modello più semplice di disco protoplanetario dinamicamente freddo. In questo caso infatti tutti i planetesimi del disco hanno un'orbita perfettamente circolare e quindi hanno un moto disordinato (*una dispersione di velocità*) pari a zero. Analogamente anche un disco controrotante è definibile come un disco dinamicamente freddo. La differenza tra i due casi è che, la velocità relativa tra i planetesimi ed il pianeta è molto maggiore in quest'ultimo caso rispetto al precedente. Il differente gradiente di velocità nei due casi è responsabile dei diversi comportamenti dei due dischi.

### 6.1.1 Il gap nel caso corotante e controrotante

Come visto nel capitolo due, il gap o *feeding zone* è definito come la zona in cui le risonanze si sovrappongono dando origine ad orbite caotiche. Nelle figure 6.1 e 6.2 è possibile osservare come l'estensione del gap sia differente nel caso corotante e nel caso controrotante. Inoltre è possibile osservare come non sia presente la popolazione di planetesimi in risonanza 1 : 1 con il pianeta. Il motivo di questa differenza è che, nel caso corotante, la velocità relativa tra il pianeta ed i planetesimi è prossima allo zero vicino all'orbita del pianeta e questo consente un'interazione gravitazionale maggiore. Nel caso controrotante invece la velocità relativa tra pianeta e planetesimi è sempre molto grande e dunque non c'è la possibilità di subire interazioni gravitazionali molto forti e di entrare in risonanza.

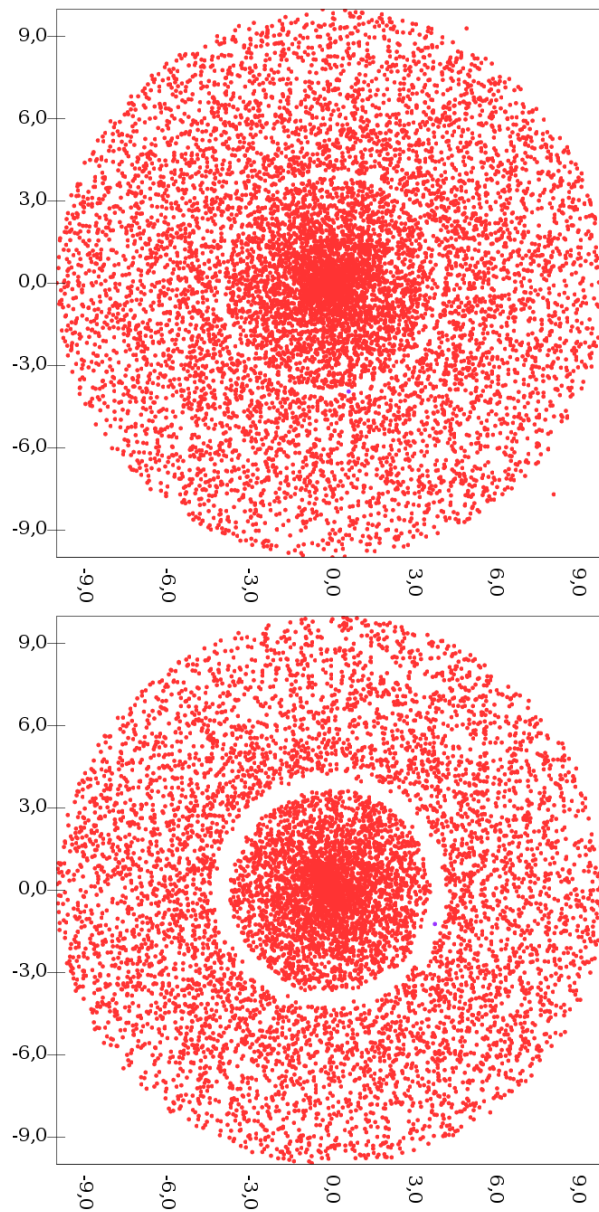
Dai risultati numerici si osserva come la dimensione del gap sia correlata con il raggio di Hill del problema. Nel caso corotante la dimensione del gap va da  $1 R_H$  per l'orbita più interna fino a  $3.5 R_H$  per la parte esterna. La barriera interna è dovuta all'estensione delle risonanze 1 : 1<sup>1</sup> mentre quella esterna è dovuta all'estensione massima della zona di sovrapposizione di risonanze. Un semplice modello che consente di calcolare tale gap è quello ricavabile da Wisdom (1980) che applica il criterio della sovrapposizione di risonanze (criterio di Chirikov) al problema planare circolare dei tre corpi ristretto. Nel caso controrotante invece le risonanze non danno origine a nessuna sovrapposizione e quindi l'estensione del gap è minore. Ciò che si osserva immediatamente è come la zona di risonanza 1 : 1 che, nel caso corotante, dava origine ad orbite stabili, sia qui completamente rimpiazzata da una zona priva di planetesimi con dimensioni di  $1 R_H$  che è definita come la sezione d'urto gravitazionale di un corpo. I planetesimi all'interno di questo raggio entrano in interazione gravitazionale così forte con il pianeta che la loro orbita è calcolabile attraverso un problema dei due corpi piuttosto

<sup>1</sup>Si ricorda come ogni risonanza ha un periodo di librazione ben preciso che può essere calcolato in funzione del semiasse maggiore e dell'eccentricità dell'orbita della particella.



**Fig. 6.1:** *Gap nel caso di un disco corotante e controrotante.* In alto: gap nel caso corotante. E' evidente la zone in cui si hanno planetesimi in risonanza 1 : 1 con il pianeta. In basso: disco controrotante. In questo caso manca la popolazione di planetesimi in risonanza e la dimensione del gap è meno estesa. Ciò è dovuto alla maggiore stabilità delle orbite controrotanti rispetto a quelle corotanti. La massa e la posizione del pianeta nei due dischi è la stessa.

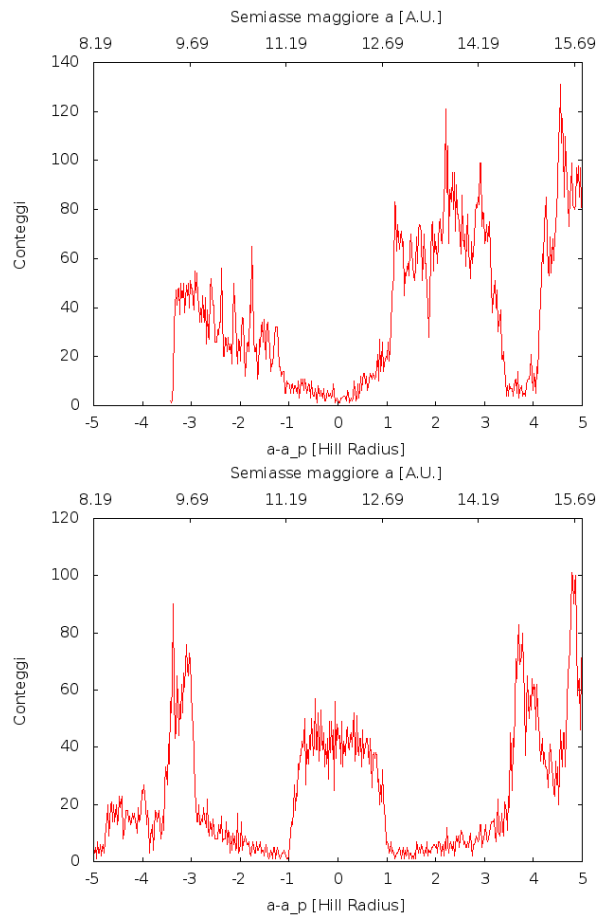
che con un problema dei tre corpi. Il risultato è che essi o si scontrano con il pianeta o entrano in orbita attorno ad esso oppure subiscono uno



**Fig. 6.2:** *Dischi controrotanti con pianeta di massa differente.* In alto: Disco controrotante con pianeta di massa  $10 M_{\oplus}$ , situato ad una distanza di  $4 A.U.$ . In basso: stesso disco, stesso numero di planetesimi e stessa distanza per il pianeta. Cambia però la massa dello stesso ( $300 M_{\oplus}$ ) e, conseguentemente, la dimensione del gap.

scattering gravitazionale così forte da fuggire da questa zona verso orbite molto distanti spopolando quindi tale regione dello spazio. Infine è possibile osservare come la dimensione del gap aumenti con l'aumentare della massa

del pianeta (figura 6.2) infatti il raggio di Hill è funzione della massa del pianeta. Rimangono però inalterate, in unità del suddetto raggio di Hill, i coefficienti numerici per la parte interna ( $1 R_H$ ) e per la parte esterna ( $3.5 R_H$ ). E' evidente tutto ciò dagli istogrammi presentati in figura 6.3, nel caso specifico di un disco controrotante infatti, le risonanze non si creano ed anzi, si genera un gap dovuto solo alla forza gravitazionale che il pianeta esercita nelle immediate vicinanze ( $1R_H$ ), nel caso corotante invece la situazione è differente. Il gap che si forma ha un'estensione maggiore e presenta anche una zona, interna, con dimensioni uguali a  $1R_H$  in cui i planetesimi sono "dolcemente" perturbati dal pianeta ma riescono comunque a rimanere su orbite stabili ed in risonanza.



**Fig. 6.3:** *Istogramma del numero di planetesimi in funzione del semiasse maggiore dell'orbita. A parità di condizioni iniziali di massa e posizione, l'estensione di un gap dipende anche dall'inclinazione del pianeta. Nei due casi limiti simulati è infatti possibile osservare la differente dimensione del gap (in unità del raggio di Hill) tra i due casi presi in esame.*

Si può dunque definire un'apparente complementarità tra i due dischi simulati: si hanno delle zone di vuoto nel caso corotante ove invece, per il caso controrotante, si osservano planetesimi in orbita stabile. Il motivo profondo di tale differenza è che, nel caso controrotante il numero di risonanze e la posizione sono completamente differenti rispetto al caso corotante e questo modifica la topologia dello spazio delle fasi del sistema pianeta-stella-planetesimo diminuendo l'estensione delle zone fortemente ergodiche.

### 6.1.2 Il riscaldamento del disco

Nel caso delle simulazioni di un  $N$ -R3BP, si è analizzata la distribuzione in eccentricità delle particelle che hanno interagito con il pianeta. In questo caso infatti, partendo da un disco completamente freddo (orbite kepleriane circolari), l'introduzione del pianeta ha generato uno scattering delle particelle su orbite fortemente ellittiche generando così un disco "caldo" nel senso di dispersione di velocità diversa da zero. Viene infatti riportata la definizione di dispersione di velocità:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n M_i (v_i - v_{K,i})^2}{\sum_{i=1}^n M_i}}, \quad (6.1)$$

dove il termine  $v_i$  rappresenta la velocità effettiva della particella mentre il termine  $v_{K,i}$  rappresenta la velocità della stessa particella come se fosse in un'orbita circolare Kepleriana. Il termine  $M_i$  rappresenta la massa della particella presa in considerazione. Questa definizione è ben posta quando si prende in considerazione una massa per le particelle mentre non è ben definita quando si cerca di applicarla al caso di particelle prive di massa. Il problema viene però ridefinito prendendo in considerazione una variante della precedente definizione e cioè la dispersione di velocità relativa all'eccentricità delle particelle. Se infatti si prende in considerazione una certa distribuzione di velocità per le particelle, è possibile, calcolandone il momento di ordine due, ottenere la dispersione di velocità. Si evita l'introduzione della massa delle particelle e, ricordando la definizione di velocità orbitale kepleriana circolare e velocità orbitale kepleriana ellittica (si è interessati solo alle particelle con eccentricità  $\leq 1$ ):

$$v_{K,i} = \sqrt{\frac{\mu}{r}}, \quad (6.2)$$

$$v_i = \sqrt{\mu \frac{2}{r} - \frac{1}{a}}, \quad (6.3)$$

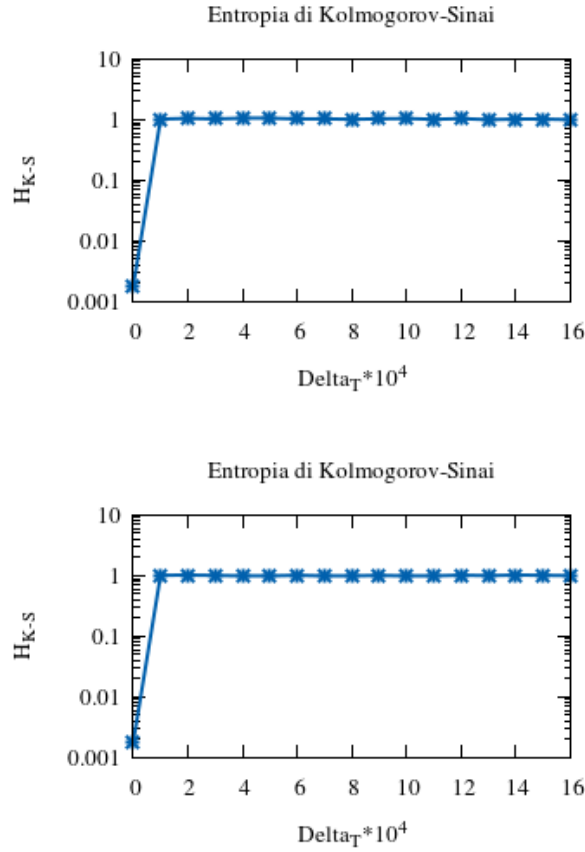
dove il termine  $r$  definisce il raggio dell'orbita equivalente alla distanza radiale del corpo in funzione della sua eccentricità,  $\mu$  è definita come la



costante di gravitazione planetaria ( $\mu = G \cdot M_{tot}$ ), si ottiene una nuova definizione di dispersione di velocità che dipende dalla *sola* eccentricità:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\mu \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \left( \frac{2}{1-e_i} - 1 \right)^2}{n-1}} \quad (6.4)$$

L'evoluzione di tale parametro è collegata con il riscaldamento del disco e, a parte fattori costanti, presenta lo stesso andamento nel tempo. Vengono inoltre rappresentati in figura 6.4 i due valori dell'entropia di Kolmogorov Sinai e (in figura 6.5) della  $\sigma_{din.}$  definita in precedenza per il disco corotante.



**Fig. 6.4:** *Evoluzione nel tempo dell'entropia per il caso controrotante e corotante.* L'entropia di Kolmogorov Sinai, che dovrebbe tracciare la differente evoluzione dell'eccentricità e della densità nello spazio delle fasi risulta essere identica per i due dischi studiati. Questo metodo non consente quindi di differenziare dischi corotanti e controrotanti.

Quello che però si osserva è la, prataticamente, identica corrisopndenza

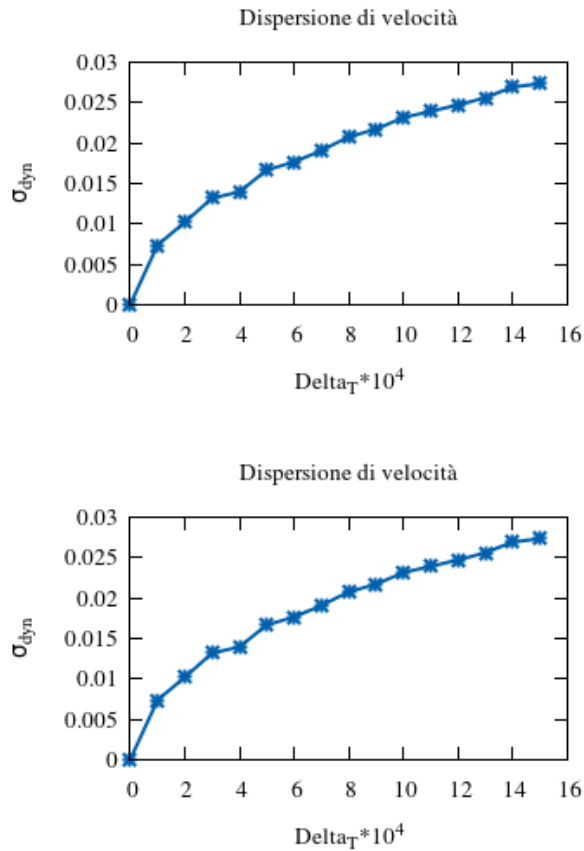
tra le coppie di grafici e dunque, attraverso questo metodo si può solo dedurre in modo indiretto la presenza di un pianeta perturbatore all'interno di un disco di planetesimi o, da un punto di vista formale, che un sistema isolato non collisionale e bidimensionale soggetto alla forza gravitazionale di un corpo centrale e di un corpo secondario presenta fenomeni di diffusione (sia nello spazio delle fasi sia nello spazio semiasse maggiore - eccentricità) che aumentano nel tempo ma che raggiungono, praticamente istantaneamente una configurazione di equilibrio. Questo ci ha consentito di comprendere come, dalla sola analisi dell'entropia o della  $\sigma_{din}$  non si possa avere alcuna informazione sul tipo di disco che si sta analizzando. Interessante osservazione è invece il raggiungimento dell'equilibrio per entrambi i dischi di planetesimi. Un'ulteriore conferma che il problema dei tre corpi può essere definito né completamente caotico (altrimenti l'evoluzione dell'entropia sarebbe indefinita nel tempo) né non caotico (in quanto l'entropia e la dispersione di velocità, sarebbero dovute rimanere costanti attorno al loro valore iniziale). In accordo con quanto definito da F. Casciati (1993) (figura 11, pag. 14) per sistemi dinamici simili (oscillatore armonico di Duffing), il valore unitario dell'entropia ed il raggiungimento dello stesso in tempi relativamente brevi consente di definire il problema dei tre corpi come intermedio tra un problema regolare (moti ordinati) ed un problema interamente imprevedibile (in cui i moti non possono essere prevedibili in alcun modo), si ritiene quindi che il problema dei tre corpi è, dallo studio condotto in questa tesi, un problema di tipo stocastico e non completamente ergodico.

La motivazione di usare una funzione di Rayleigh è dovuta al fatto che, inizialmente, l'eccentricità di planetesimi è stata definita utilizzando tale distribuzione che, per un set bidimensionale è quella con minore energia Rafikov [2002]. In questo caso dunque si è fatta un'assunzione di base molto forte e cioè che l'evoluzione dell'eccentricità del disco sia simile a se stessa nel tempo. Cambia la larghezza della distribuzione ma non il profilo. Ciò è giustificato dal fatto che l'andamento dell'eccentricità degli asteroidi nella fascia principale dopo  $5 \times 10^9$  anni rimane abbastanza simile ad una funzione di Rayleigh (figura 6.3).

Inoltre la differenza nelle risonanze nei due casi, corotante e contro-rotante, genera un differente riscaldamento e quindi un differente andamento nell'istogramma dell'eccentricità. La prima differenza che si osserva è che, all'aumentare dell'eccentricità nel caso corotante diminuisce il numero di particelle mentre nel caso contro-rotante si osservano sporadici ma costanti picchi in tale istogramma (figura 6.4).

Anche qui, come nel caso precedente, il valore della  $\sigma$  dipende dalla massa del pianeta. Ciò è visibile nella figura 6.5 in cui sono presentati tre istogrammi per il caso contro-rotante, con stesso numero di planetesimi e pianeta posto alla stessa distanza ( $2A.U.$ ) ma con masse differenti, rispettivamente di  $10M_{\oplus}$ ,  $100M_{\oplus}$  e  $300M_{\oplus}$ .

Per spiegare ciò si fa ricorso all'analogia con un gas riscaldato da una

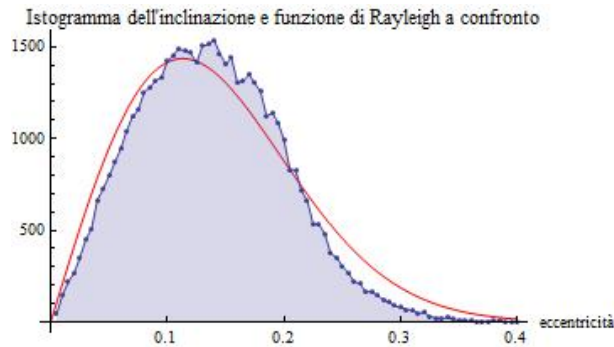


**Fig. 6.5:** *Evoluzione nel tempo della  $\sigma$ .* Come si può osservare i valori della sigma, calcolati per due differenti dischi protoplanetari: controrotante (in alto) e corotante (in basso) danno gli stessi.

sorgente termica (che in questo caso è rappresentata dal pianeta). Poichè il riscaldamento è di tipo dinamico maggiore è la massa del pianeta, maggiore è il momento angolare che esso trasmette ai planetesimi e maggiore è il loro riscaldamento. Un terzo metodo usato per osservare il differente andamento dell'evoluzione dell'eccentricità nei due casi proposti è il calcolo dell'entropia di Kolmogorov-Sinai. In questo caso si parte dalla definizione di densità numerica di particelle nello spazio delle fasi.

## 6.2 Problema dei tre corpi circolare generale

In questa sezione viene inserita anche la massa ai planetesimi e quindi si studia l'effetto che il disco ha sul pianeta. Nel caso precedente si è posto l'accento su come un disco corotante e uno controrotante rispondessero dif-



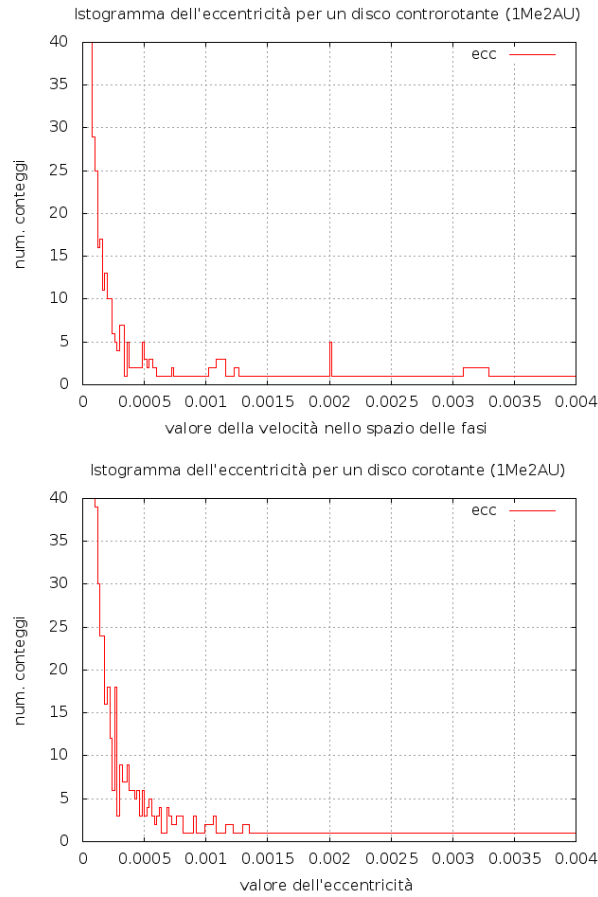
**Fig. 6.6:** *Istogramma dell'eccentricità degli asteroidi nella fascia principale e confronto con il fit di una funzione di Rayleigh analitica.* La somiglianza tra le due consente di supporre come, anche per un sistema così complesso come il sistema solare e per un tempo molto più lungo delle simulazioni effettuate in questo elaborato, si conservi la distribuzione di Rayleigh iniziale variando solamente la larghezza di tale funzione.

ferentemente all'interazione gravitazionale con un pianeta.

Aggiungendo la massa ai planetesimi si ha uno scambio di momento angolare che coinvolge anche il pianeta e che perdendone più di quanto ne riceve dai planetesimi è (generalmente) vincolato a migrare verso l'interno.

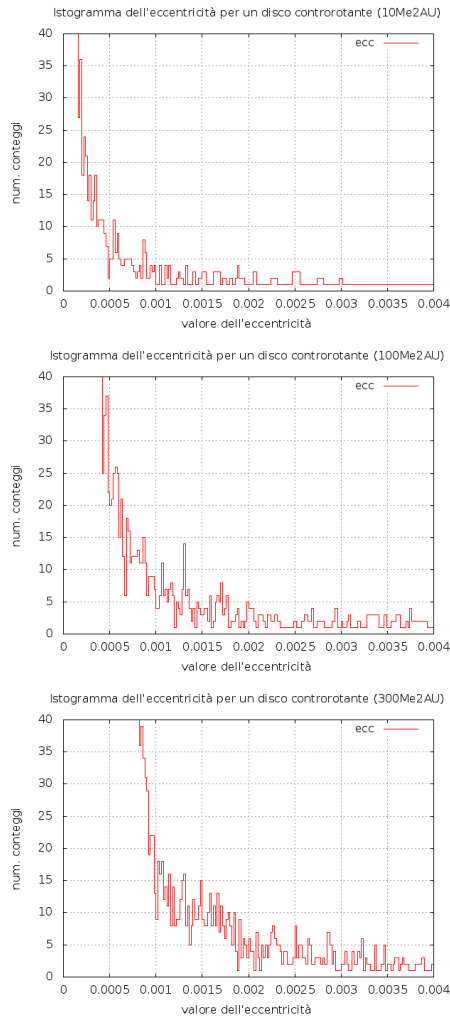
Le simulazioni che sono state condotte in questo caso, presentano un disco di  $4 \times 10^4$  planetesimi con una massa  $1/600$  della massa del pianeta<sup>2</sup> distribuiti in modo omogeneo su un intervallo di semiasse maggiore di  $10 A.U.$  con  $r_{in} = 20 A.U.$  e  $r_{fin} = 30 A.U.$ . La distribuzione omogenea è stata definita anche in Cionco e ... (2002) ed è stata qui riutilizzata. Il pianeta è posto ad una distanza di 22, 25 e 28 unità astronomiche ( $A.U.$ ). La massa dei pianeti è stata scelta per simulare quella di un pianeta di tipo terrestre ( $1 M_{\oplus}$ ), di una "super-terra" ( $10 M_{\oplus}$ ) e di un gigante gassoso ( $300 M_{\oplus}$ ). Seguendo l'articolo di Cionco (2001) sono state calcolate le stesse quantità definite in tale articolo per le simulazioni proposte in questa tesi ed è stata fornito inoltre un confronto con le stesse condizioni iniziali di una delle simulazioni per confermare i risultati ottenuti. Nonostante i differenti codici, il differente metodo con cui sono state calcolate le quantità d'interesse, il timestep e il valore dell'eccentricità media (non definito nell'articolo citato)

<sup>2</sup>Il rapporto di massa così definito è fisicamente corretto poiché, nella teoria di formazione planetaria esistono due stadi durante i quali i planetesimi, a causa di scontri fisici, aumentano la propria massa in modo differenziale: planetesimi più massivi aumentano molto velocemente la loro massa (runaway growth) per poi rallentare il rate di accrescimento nel tempo ma rimanendo sempre massivi rispetto agli altri planetesimi (oligarchic growth). In questo caso dunque si crea una distribuzione in massa dei planetesimi in cui molti hanno una massa relativamente bassa, alcuni hanno una massa intermedia mentre pochi, quelli che hanno iniziato un accrescimento iniziale molto veloce hanno una massa molto elevata (CITA....).



**Fig. 6.7:** *Istogramma del numero di planetesimi in funzione dell'eccentricità per il caso controrotante e corotante.* In alto: Istogramma dell'eccentricità per un disco controrotante con un pianeta posto a  $2A.U.$  con una massa di  $1M_{\oplus}$  ed un numero di planetesimi uguale a  $10^4$ . In basso: come nel caso precedente ma adesso il disco è controrotante. Si nota un aumento del numero di particelle ad alta eccentricità rispetto al caso precedente e una conseguente diminuzione del loro numero per eccentricità molto basse. Viene riportato un ingrandimento del grafico poichè non si è interessati ad osservare la distribuzione totale per la quale il numero di planetesimi con eccentricità uguale a zero rimane comunque molto alto. Si è scelto quindi di binnare tali grafici ad un valore di conteggi uguale a 40 per meglio osservare le differenze tra i due casi.

i risultati sono conformi entro un fattore 4.



**Fig. 6.8:** *istogramma del numero di planetesimi in funzione dell'eccentricità per il caso controrotante al variare della massa del pianeta.* La dipendenza della  $\sigma$  dalla massa del pianeta, fissato il semiasse maggiore ed il numero di planetesimi. Maggiore è la massa del pianeta maggiore è l'allargamento dell'istogramma e, analogamente, peggiore è il numero di planetesimi scaturati ad eccentricità maggiori. La posizione del pianeta è la stessa ma cambia la massa che, dall'alto verso il basso, è rispettivamente di 10, 100 e 300  $M_{\oplus}$ . Come nel caso precedente, anche ora, si è effettuato un ingrandimento dei grafici per meglio osservare le caratteristiche dei differenti istogrammi.

### 6.2.1 La migrazione del pianeta: disco corotante

Si presentano ora i risultati delle simulazioni numeriche condotte per un disco corotante con distribuzione di eccentricità nulla e con densità superficiale

costante. Nella simulazione mostrata in figura 6.9 è mostrato l'andamento del semiasse maggiore di un pianeta di  $1 M_J$  all'interno di un disco composto da un numero fisso di planetesimi ma a cui è stata, nelle varie simulazioni, diminuita la massa affinché il rapporto tra la massa di un planetesimo e la massa del pianeta fosse uguale a  $1/600$ ,  $1/6000$  e  $1/600000$ .

Un risultato interessante è come nel caso di un disco molto massivo e di un disco molto poco massivo sembra che si instauri un differente meccanismo di stallo che rallenta la migrazione planetaria. Nel primo caso infatti (quando il rapporto tra la massa del pianeta e la massa di un planetesimo è uguale a  $1/600$ ) l'interazione gravitazionale è così forte che il pianeta migra per tutta la dimensione radiale del disco fino ad uscirne e, solo in quel momento, cambia l'andamento del semiasse maggiore nel tempo, raggiungendo una configurazione di equilibrio. Nel caso opposto invece, il pianeta, trovandosi ancora all'interno del disco, dovrebbe continuare una lenta ma costante migrazione verso il centro del sistema causata dall'interazione continua con i planetesimi che compongono il disco circostante. Ciò invece non si osserva e anzi per tempi maggiori di  $10^6$  giorni, sembra che ci sia un brusco cambiamento nella variazione del semiasse maggiore dell'orbita. Tale fenomeno è stato già osservato e, in parte formalizzato, in B. C. Bromley [2013], A. Bromley [2009] e Hahn and Malhotra [1999]. Nelle conclusioni verrà brevemente riportato quanto qui descritto e verrà inoltre chiarita l'importanza di questo risultato.

Nel caso invece di un disco corotante senza distribuzione di eccentricità i risultati sono ancora più interessanti.

Il risultato è stato interpretato come possibile ulteriore prova della differente interazione che il pianeta ha con il disco.

### 6.2.2 La migrazione del pianeta: disco controrotante

Nel caso di un disco controrotante l'interazione impulsiva con i planetesimi, la differente forma e posizione delle risonanze nonché la differente estensione del gap generano degli andamenti del semiasse maggiore nel tempo che permettono di comprendere come, in questo caso, la presenza o meno di una distribuzione di eccentricità per i planetesimi diversa da zero sia irrilevante.

Ciò è mostrato nella figura 6.10 in è riportata la variazione temporale del semiasse maggiore nel caso di un disco corotante con distribuzione di Rayleigh in eccentricità e lo stesso disco con distribuzione iniziale uguale a zero.

## 6.3 Simulazioni di osservazioni ALMA

Negli ultimi decenni si è fatto sempre più frequentemente uso delle tecniche di interferometria per guadagnare risoluzione e sensibilità per osservare oggetti

più lontani e deboli con maggior dettaglio. ALMA (Atacama Large Millimeter Array) è un interferometro di nuova generazione costruito in Cile e in fase di completamento.

ALMA è un insieme (array) di antenne che osservano una particolare regione dello spettro elettromagnetico che va dal millimetrico al submillimetrico. Composto da 66 antenne: l'array "principale" conta 50 antenne, ognuna con un diametro di 12 metri che costituiscono l'interferometro più grande mentre le rimanenti 16 costituiscono il secondo e più compatto array di telescopi (ACA: Atacama Compact Array). Le 16 antenne hanno diverso diametro: 12 avranno diametro di 7 metri mentre le restanti 4 di 12 metri.

Il primo array ha una *baseline*<sup>3</sup> massima di 16 chilometri, mentre l'array "secondario" ha una baseline massima di 250 metri. Inoltre grazie a supporti mobili è possibile riconfigurare la distanza tra le varie antenne per l'array primario. A realizzazione terminata, tutte le antenne verranno equipaggiate con dieci ricevitori operanti in altrettante bande di frequenza (nel range tra i 31 *GHz* ed i 950 *GHz*) centrate in corrispondenza di alcune *finestre* in cui l'atmosfera terrestre risulta essere più trasparente alla radiazione proveniente dallo spazio (figura 6.6). Entro il range di lunghezze d'onda che va da 3.6 *mm* a 380  $\mu\text{m}$  è, attualmente, possibile osservare nelle bande tre, sei, sette e nove, le cui proprietà sono riassunte in tabella 6.1. ma verrà presto ampliato con altre tre bande e, nel prossimo futuro è pianificato di arrivare ad un numero totale di dieci bande permettendo osservazioni a lunghezze d'onda dell'ordine del centimetro.

Sebbene i dettagli sul funzionamento di un interferometro e sulle tecniche di sintesi e di analisi di un'immagine radio vadano oltre gli scopi della presente tesi, di seguito illustriamo le caratteristiche utili a definire le simulazioni di osservabilità dei dischi protoplanetari in oggetto.

Secondo il teorema di Van Cittert (1934) e Zernike (1938), sotto certe condizioni, la visibilità complessa è la trasformata di Fourier della distribuzione di brillantezza di una sorgente. Il numero finito ( $N$ ) di antenne che un interferometro possiede genera un numero finito  $(N(N - 1))/2$ , di baseline distinte, che all'osservazione producono una funzione di visibilità campionata che verrà poi utilizzata mediante trasformazioni inverse di Fourier per ricostruire la distribuzione d'intensità luminosa della sorgente. Maggiore è il campionamento (o copertura) del piano delle visibilità complesse ( $u, v$ ) e migliore è la ricostruzione dell'immagine. Un miglior campionamento può essere ottenuto aumentando il numero di antenne, osservando per tempi più lunghi la sorgente e sovrapponendo diverse configurazioni delle antenne. Sia il numero di antenne che la possibilità di posizionarle su un ampio range di distanza permette ad ALMA di essere considerato uno degli interferometri più potenti in termini di sensibilità (la capacità di raccogliere fotoni dalla

---

<sup>3</sup>E' la distanza tra due telescopi. Tipicamente, tale distanza viene misurata in unità di lunghezza d'onda a cui si sta effettuando un'osservazione.



Tabella 6.1. Capacità ALMA

Banda	Frequenza (GHz)	Lunghezza d'onda (mm)	Beam primario (FOV; ")	Sensibilità (mJy/beam)		Configurazione compatta		Configurazione estesa	
				Riga	Cont.	Risoluzione angolare (")	MAS	Risoluzione angolare (")	MAS
3	84-116	2.6-3.6	72-52	8.9	0.11	4.4-3.2	29-21	0.7-0.5	10-7
6	211-275	1.1-1.4	29-22	13	0.14	1.7-1.3	12-9	0.27-0.21	4.1-3.1
7	275-373	0.8-1.1	22-16	21	0.24	1.4-1.0	8.9-6.6	0.21-0.15	3.1-2.3
9	602-720	0.4-0.5	10-8.5	80	2.2	0.6-0.5	4.1-3.4	0.09-0.08	1.4-1.2

**Table 6.1:** Capacità durante il ciclo di osservazioni per l'interferometro ALMA. E' ovvio far notare come la risoluzione angolare di ALMA dipende dalla banda (e quindi dalla frequenza) a cui si effettua l'osservazione e dalla configurazione dell'interferometro.

sorgente) e potere risolutivo (capacità di caratterizzare la sorgente osservandone i dettagli). Per un telescopio singolo la risoluzione è proporzionale al rapporto tra la lunghezza d'onda alla quale si effettua l'osservazione e le dimensioni dell'antenna o specchio che si utilizza per osservare la sorgente. La risoluzione di un interferometro non dipende dal diametro delle singole antenne di cui è composto ma esclusivamente dalla distanza (*baseline*) tra le coppie di antenne. Si può collegare la distanza massima delle antenne ( $D$ ) che compongono l'interferometro con la dimensione del *synthesized beam* ( $\phi$ ) (che misura la risoluzione dello strumento e che per una sorgente puntiforme coincide con la PSF<sup>4</sup>) tramite la seguente relazione:

$$\phi = 1.22 \frac{\lambda}{D}. \quad (6.5)$$

Nella precedente equazione si nota come la risoluzione angolare del telescopio dipenda sia dalla lunghezza d'onda a cui si osserva una sorgente sia dalla dimensione della baseline massima raggiungibile dall'interferometro.

Una volta completato, nella configurazione più compatta (con *baseline* massima di 200 metri), l'interferometro ALMA raggiungerà una risoluzione angolare di un arcosecondo (1 arcsec.) ad una lunghezza d'onda di 1 mm. La risoluzione massima si ottiene invece nella configurazione più estesa (con *baseline* massima di 16000 metri) è sarà di circa 0.001 arcsec. molto elevata a parità di frequenza rispetto agli altri telescopi ed interferometri operanti nel millimetrico. Un utile formula per calcolare la risoluzione angolare in arcosecondi per ALMA è la seguente:

$$\phi['] = 62 \times \frac{1}{baseline[km] \times \nu[GHz]}. \quad (6.6)$$

La differente configurazione delle antenne con cui l'interferometro può lavorare consente una differente risoluzione. Più precisamente le configurazioni più compatte (in cui i telescopi sono più vicini e quindi l'array ha una densità di antenne maggiore e una baseline massima piccola) consentono di osservare meglio sorgenti estese; le configurazioni estese avendo una baseline massima maggiore danno invece una risoluzione minima maggiore.

La risoluzione massima di ALMA consente di osservare dettagli su scala del subarcsec oggetti come i dischi protoplanetari a distanze superiori a 100 parsec (pc).

Un interferometro è inoltre caratterizzato da una baseline minima (distanza minima tra due antenne) che consente di calcolare la dimensione massima di un oggetto osservabile. Nel caso di una sorgente estesa con un certo profilo di luminosità decrescente nello spazio la sua trasformata di Fourier

---

<sup>4</sup>La *Point Spread Function* è definita come la risposta dello strumento alla luce di una sorgente puntiforme. Un telescopio infatti ha una certa risoluzione angolare che, per una sorgente puntiforme posta all'infinito, è definita proprio come la dimensione della PSF. Ed è pari alla dimensione minima sotto la quale un telescopio non può osservare i dettagli.

è, come detto, tanto più stretta quanto più larga è la corrispettiva funzione di luminosità nello spazio reale. Quindi, oggetti con intensità molto diffusa nel cielo hanno una trasformata di Fourier molto piccata e, campionandola con baseline minime troppo grandi (che nel piano di Fourier o piano *delle visibilità* corrispondono a distanze dall'origine troppo grandi) non si riescono ad osservare (figura 6.8).

Poichè è possibile calcolare l'energia cinetica  $E$  di un fotone con frequenza  $\nu$  tramite la seguente formula:

$$E = h\nu \quad (6.7)$$

dove  $h = 1.23eV \cdot \mu m$  è la costante di Planck, è dunque possibile ottenere la temperatura di corpo nero<sup>5</sup> del fotone osservato:

$$k_B T_{BB} \simeq E, \quad (6.8)$$

in questo caso  $k_B = 8.6 \times 10^{-5} eV \cdot K^{-1}$  è definita costante di Boltzmann e  $T_{BB}$  è, appunto, la temperatura di corpo nero del fotone osservato. Il numero esatto di fotoni che un interferometro raccoglie è direttamente proporzionale alla superficie di raccolta totale. Quindi, maggiore è il numero di antenne nell'array, maggiore è il numero di fotoni raccolti e maggiore è la sensibilità raggiungibile. Grazie all'elevata area di raccolta efficace (dovuta al gran numero di antenne) ALMA permette di osservare oggetti più deboli rispetto ad altri telescopi che osservano alle stesse lunghezze d'onda e dello stesso tipo. Seguendo il ragionamento precedente è possibile comprendere come ALMA permetta di osservare le regioni più fredde dell'Universo (nell'intervallo  $70 \div 2$  gradi Kelvin) come i dischi protoplanetari nella loro fase finale di formazione in cui il gas diffuso è quasi completamente finito e rimane solamente il disco di planetesimi o i dense core (nubi oscure fredde di gas e polveri da cui nasceranno poi i sistemi planetari).

Inoltre la sensibilità ottenibile da un interferometro è descritta dalla "equazione del rendimento" che fornisce una stima del *noise* strumentale  $\sigma$ :

$$\sigma \propto \frac{T_{sys}}{\eta A_{eff} \cdot \sqrt{\Delta\nu \cdot t \cdot p}} \quad (6.9)$$

dove  $T_{sys}$  è la temperatura di sistema che racchiude sia la temperatura dello strumento, sia quella dell'atmosfera che il vapor acqueo durante l'osservazione,

---

<sup>5</sup>Un fotone non ha una temperatura ma, poichè trasporta energia, è possibile dimostrare come esso contribuisca, ad esempio, al raffreddamento di un gas. E' allora sensato parlare di temperatura di un fotone e, in particolare, di temperatura di corpo nero associata ad un fotone di data energia. In questo caso infatti si suppone che il fotone osservato provenga da una distribuzione di tipo Maxwell-Boltzmann.

$\eta$  è un parametro che descrive l'efficienza del ricevitore,  $A_{eff}$  è l'area efficace dell'array,  $\Delta\nu$  è la larghezza di banda,  $t$  il tempo d'integrazione e  $p$  il numero di polarizzazioni osservate. A parità di condizioni osservative è possibile migliorare la sensibilità osservando per tempi più lunghi. A differenza della maggior parte dei radiotelescopi ALMA consente all'utente di richiedere il raggiungimento di una soglia di sensibilità nelle immagini che vengono prodotte. In fase di preparazione delle proposte osservative è pertanto rilevante l'utilizzo di strumenti di simulazione per verificare la fattibilità dell'osservazione come quelli che descriviamo nella prossima sezione.

### 6.3.1 CASA e OST: i software di simulazione ALMA

Ipotizzate le caratteristiche del target osservativo in termini di dimensioni angolari e flussi emessi alle varie frequenze è possibile, grazie alle formule riportate nel capitolo precedente, stabilire quale sia la migliore configurazione delle antenne, la frequenza e la larghezza di banda necessarie e, non ultimo, la durata dell'osservazione. Sono questi i parametri fondamentali per condurre una efficace simulazione, utile in fase di stesura delle proposte per l'osservazione di una sorgente. Un metodo semplice e veloce per ricavare delle osservazioni simulate con ALMA è quello di utilizzare la pagina online dell'ALMA Observing Support Tool (OST)<sup>6</sup> che consente, andando ad editare dei semplici comandi, l'analisi e la visualizzazione dell'immagine a partire da un modello fornito dall'utente. Questo strumento viene comunemente usato durante la fase di preparazione dei progetti osservativi per verificare rapidamente la fattibilità di un'osservazione anche da utenti non esperti. Inizialmente si sceglie il tipo di strumento con cui effettuare un'osservazione. Si può scegliere tra le configurazioni complete dell'interferometro comprensive dei due array (ALMA e ACA) o una delle due, si può inoltre scegliere a quale ciclo (*Cycle*) fare riferimento per le osservazioni. La differenza è nella scelta della baseline massima e nel numero di antenne utilizzabili: per il *Cycle* 1 sono disponibili 32 antenne ed una *baseline* massima di 3 Km mentre per il *Cycle* 0: le antenne sono 16 si può scegliere tra la configurazione compatta (con *baseline* di 100 metri) e quella estesa (con *baseline* di circa 400 metri). In figura 6.8 è rappresentato quanto appena detto. Sarà presto disponibile anche una versione per il prossimo *Cycle* 2.

Nei cicli successivi sarà possibile accedere a *baseline* più lunghe e ad un numero maggiore di antenne fino al cosiddetto *Full ALMA* che comprende tutte e 66 le antenne ed una *baseline* massima di 16 Km.

Si passa poi a definire i vari parametri per l'osservazione. Essi sono divisi in due gruppi. Il primo consente di definire i parametri della sorgente (*Sky Model*):

- un modello (immagine reale), all'interno di una libreria, già implemen-

---

<sup>6</sup><http://almaost.jb.man.ac.uk/>.

tata tra le scelte disponibili. Nel caso specifico, una versione semplificata di un disco bidimensionale protoplanetario gassoso (*OST Library: Protoplanetary Disk*);

- il modello fornito dall'utente (*file.fits*) che si vuole osservare;
- la declinazione per la sorgente (che influisce sulle proprietà dell'immagine);
- il flusso massimo (o di picco) per ogni punto in cui si trova la sorgente (si ottiene dunque che il flusso della sorgente è riscalo in base a questo valore).

Il secondo gruppo invece consente di definire i parametri dello strumento (*Observation Setup*):

- la frequenza a cui si vuole effettuare l'osservazione (nel caso particolare si è scelto di operare ad una frequenza di  $700\text{ GHz}$  e  $900\text{ GHz}$  come si spiega in seguito);
- la larghezza della banda (*Bandwidth*) fissata a  $8\text{GHz}$  per sfruttare il massimo della sensibilità disponibile con ALMA per osservazioni nel continuo;
- la risoluzione richiesta per le osservazioni (nel caso particolare è stata fissata a  $0.004\text{ arcsec}$ ).
- il tempo di osservazione della sorgente posto, in modo arbitrario, uguale a 5.0 ore. Stime più raffinate hanno portato ad individuare un valore minimo di circa 1.2 ore che sono già sufficienti a raggiungere un rapporto segnale rumore pari a 5.

L'umidità atmosferica è stata posta all'ottimistico valore di  $PWV = 0.472\text{ mm}$  (*1st Octile*), maggiore è questo valore, e con esso la  $T_{sys}$ , minore è la sensibilità con cui verrà osservata l'immagine. Sono riportate in figura 6.9 due osservazioni simulate con tale software online. Entrambe rappresentano lo stesso disco posto ad una distanza di  $70\text{ pc}$  ma con flussi differenti. Le osservazioni sono state effettuate a  $700\text{ GHz}$  poichè, per tali frequenze, il flusso della sorgente è molto alto. Le immagini realizzate attraverso l'analisi con il software CASA, invece, sono realizzate a  $900\text{ GHz}$ , a questa frequenza il flusso della sorgente è minore ma le caratteristiche fisiche fondamentali vengono comunque ottimamente tracciate. Inoltre questa scelta è stata motivata dal fatto che, a differenza di quanto fatto nel caso dell'OST, qui la  $PWM$  è uguale a

Il software CASA (Common Astronomy Software Application) è un pacchetto di visualizzazione, riduzione e analisi dati per interferometria realizzato in linguaggio Python. Il software opera attraverso *tasks* che possono

essere editate dall'utente. CASA gestisce i dati attraverso *tabelle*: le visibilità di frangia vengono salvate in tabelle definite *Measurement Set*. Tali tabelle sono composte da una tabella principale (DATA) e da sottotabelle con informazioni aggiuntive sui dati che contengono. All'interno della tabella principale sono definite delle righe ognuna delle quali rappresenta uno *stamp* temporale a cui sono state prese su una singola finestra spettrale e per una singola baseline delle informazioni sulla sorgente e sullo strumento (configurazione delle antenne, puntamento, flussi della sorgente). Colonne secondarie servono per allocare una versione modificata dei dati per esempio durante il processo di calibrazione o di inversione di Fourier. Questo consente di non modificare le colonne del DATA ma di scriverne altre.

Le task dedicate alla simulazione in CASA permettono di definire molti più dettagli rispetto all'OST, ma richiedono anche una più approfondita conoscenza dei funzionamenti degli algoritmi e dell'interferometria.

Nel nostro caso si è fatto uso di due task per la realizzazione dell'immagine. La prima task utilizzata è 'simobserve' che permette di indicare i parametri dell'osservazione e simularla. Tale task permette di passare da un'immagine della sorgente all'immagine in cui è stata aggiunta la risposta dello strumento<sup>7</sup> (ALMA) così da mostrare come la sorgente sia visibile nel piano delle visibilità di frangia.

*Simobserve* consente di introdurre anche una componente aggiuntiva alla *corruzione* dell'immagine, analogamente a quanto fatto con OST, e cioè il rumore termico dovuto allo strumento, all'atmosfera e al suolo. Nelle simulazioni eseguite in questa tesi tale parametro è stato però trascurato.

I comandi che sono stati editati all'interno di questa task seguono, a parte qualche eccezione che viene spiegata più avanti, quelli utilizzati nella pagina guida<sup>8</sup> realizzata seguendo le indicazioni dell'articolo di Wolf e D'Angelo (2005). Per una più completa spiegazione delle varie task e comandi utilizzati si fa riferimento alla guida online<sup>9</sup>. Vengono qui brevemente riassunti nella tabella 6.2 in cui sono presentati i valori delle *keyword* delle varie task. Una spiegazione completa delle varie task, assieme alla definizione dello *header*<sup>10</sup>

<sup>7</sup>Le operazioni di osservazioni per un interferometro prevedono che, ad un immagine modello venga applicato il procedimento di trasformazione di Fourier che, assieme alla risposta dello strumento convoluta con le proprietà del beam generano un'immagine iniziale della sorgente sul piano delle visibilità (file.ms). L'operazione di cleaning invece effettua una trasformazione di Fourier inversa sul file.ms (tramite un algoritmo di ricostruzione dell'immagine nelle zone non campionate del piano ( $u - v$ )) deconvolverla per il beam dello strumento ed ottenere l'immagine finale.

<sup>8</sup>[http://casaguides.nrao.edu/index.php?title=Protoplanetary\\_Disk\\_Simulation\\_\(CASA\\_4.1\)](http://casaguides.nrao.edu/index.php?title=Protoplanetary_Disk_Simulation_(CASA_4.1)).

<sup>9</sup>[http://casaguides.nrao.edu/index.php?title=Simulating\\_Observations\\_in\\_CASA](http://casaguides.nrao.edu/index.php?title=Simulating_Observations_in_CASA).

<sup>10</sup>L'header di un file fits è una tabella in cui sono definiti dei parametri caratteristici che danno delle informazioni sull'immagini quali la dimensione dei pixel, il flusso all'interno di essi, il numero di dimensioni del file, la frequenza di osservazione e molti altri. Una trattazione completa dei parametri inseriti nell'header dei file è data nell'Appendice C.2.

dell'immagine e dello script utilizzato per avviare le procedure definite e presentata nell'Appendice C.

mapsize	0.1 arcsec
totaltime	18000s
imsize	1000
niter	100

**Table 6.2:** *Parametri definiti per le task simobserve e simanalyze.* Le task qui riportate sono state modificate rispetto quanto proposto nella guida CASA (4.0). Gli altri parametri che sono stati editati e vengono descritti in modo esaustivo nell'Appendice C non sono qui riportati. E' importante infatti far notare come i parametri importanti siano la dimensione dell'immagine, il numero di pixel, il numero di iterazioni per il cleaning e il livello minimo a cui fermarlo. Nel caso delle simulazioni effettuate è stato ommesso tale parametro per evitare che la procedura di cleaning continuasse ad analizzare zone di background dove, per costruzione dell'immagine non era presente alcun flusso.

Il modello iniziale dell'immagine è una mappa di  $1000 \times 1000$  pixel quadrati di dimensioni ( $d_{pixel}$ ) uguali alla dimensione totale dell'immagine ( $dim_{immagine}$ ) diviso per il numero totale di pixel ( $n_{pixel}$ ):

$$d_{pixel}["] = \frac{dim_{immagine}["]}{n_{pixel}}. \quad (6.10)$$

### 6.3.2 Risultati

Nel caso dei dischi protoplanetari formati da planetesimi, la necessità di osservazioni nel submillimetrico non è dovuta allo spessore ottico del disco che non consente, ad esempio nell'ottico, di osservarne i dettagli interni rendendolo opaco, ma all'assenza di emissione da parte del poco gas diffuso rimasto. E' dominante invece l'emissione dei grani di polvere (Holland et al. 1998) e, per riflessione della luce della stella centrale, quella dei planetesimi (proprio come, per riflessione è possibile osservare i pianeti del nostro Sistema Solare durante la notte). Infine c'è il contributo diretto dei planetesimi tramite l'emissione di radiazioni nel millimetrico. Il contributo della riflessione dei planetesimi è trascurabile rispetto l'emissione che è, a sua volta, molto più basso rispetto l'emissione dovuta alla polvere che ha un picco nell'infrarosso. In figura 6.10 è presentata una *SED* (*spectral energy distribution*) di un disco al cui interno sono evidenziati i contributi dei vari pianeti e del disco di planetesimi. Nel millimetrico è possibile osservare l'emissione del piano equatoriale dovuta alla polvere sedimentata ed ai planetesimi.

La SED mostrata permette di comprendere come la temperatura di un

disco di planetesimi, in cui il gas è ormai freddo e non ci sono più processi che possono riscaldarlo (disco passivo) sufficientemente, è funzione della distanza radiale dalla stella centrale che, assieme alla gravità, permette di stabilire un profilo radiale di temperatura per un disco. Da tale profilo è poi possibile ottenere un valore del flusso di emissione per un oggetto ad una certa distanza. L'osservazione delle emissioni a lunghezze d'onda analoghe a quelle descritte precedentemente nella didascalia della figura permette di studiare la componente di gas a quella distanza dalla stella centrale.

Studi condotti nel vicino infrarosso (*NIR* con  $\lambda \leq 33\mu m$ ) sulle regioni di formazione stellare mostrano come molte stelle giovani<sup>11</sup> siano circondate da dischi protoplanetari (Hillenberd et al., 2011; Kim et al., 2005). L'osservazione di tali dischi può essere condotta attraverso l'emissione di riga (Semenov et al., 2008; tesi di Dall'Olio "IRAS 16293-2422 as seen with ALMA: chemistry and morphology", 2011) o attraverso l'immagine diretta nell'ottico e nell'*MIR* (medio infrarosso) (Jang-Condell, 2009) che consente di osservare l'emissione propria del pianeta all'interno del disco<sup>12</sup>. Caratteristiche interessanti di questi dischi protostellari sono, ad esempio, le asimmetrie nel profilo di brillantezza nell'infrarosso per il disco di  $\beta$ Pictoris che fanno presagire la presenza di un pianeta in formazione o in interazione con il disco di materiale che lo circonda. Un aumento della densità locale dovuta all'accrescimento sul pianeta fa aumentare l'emissione delle polveri in quella particolare zona del disco e può essere utilizzata per identificare la posizione e la massa del pianeta attraverso lo studio di strutture asimmetriche ad anello (Ozernoy et al., 2000; Telasco et al., 2005). Nel caso dell'articolo di Ozernoy et al. (2000) si osservano non solo degli aumenti di luminosità con morfologia ad anello asimmetrico ma anche delle cavità in cui la luminosità è molto minore e dove si può localizzare il pianeta. Le masse calcolate da dischi simulati che presentano lo stesso eccesso infrarosso e millimetrico sono molto simili a quelle dei dischi di Vega, Fomalhaut, HR 8799 e HR 97048 (rispettivamente studiati in Lambrechts e Johansen, 2012; Quanz et al., 2012) in cui il pianeta è situato tra le 14 *A.U.* e le 68 *A.U.* e di  $\epsilon$  Eri (Greaves et al., 1998), anche per quest'ultimo caso il pianeta si troverebbe ad una distanza molto elevata (50 *A.U.*) rispetto alla distanza tipica di un pianeta gigante gassoso (5 *A.U.*). Tale risultato, come quelli precedenti, confermerebbe la presenza di un pianeta all'interno di un gap ad una distanza maggiore di 80*A.U.* osservato nel disco protoplanetario di TW Hydrae, una stella gio-

---

<sup>11</sup>Le stelle di massa solare o sub-solare sono definite, in questa fase, T-Tauri mentre quelle di massa maggiore Herbig Ae/Be.

<sup>12</sup>Un pianeta troppo lontano dal disco potrebbe non venire osservato in quanto l'interazione che genera su questo disco è minima. Per esempio osservando il disco di planetesimi del nostro Sistema Solare (la Kuiper belt) ad una distanza di circa 100 pc sarebbe possibile determinare l'esistenza di soli due pianeti giganti gassosi: Giove e Saturno, e nessun osservabile si potrebbe ottenere per determinare la presenza di pianeti terrestri (Liou e Zook, 1999).



vane (circa  $8 \times 10^6$  *anni*) ad una distanza di circa  $40pc$  dal Sole con un gap di dimensione totale  $\Delta a = 21A.U.$  e con un pianeta con masse stimate tra le  $6M_{\oplus}$  e le  $28M_{\oplus}$ . Un calcolo utilizzando la dimensione della *feeding zone* ricavata nel capitolo due permette di ottenere risultati analoghi. In questo caso infatti, imponendo che la dimensione del gap sia uguale a quella osservata si può ricavare, tramite la formula per il raggio di Hill la massa del pianeta che è di circa  $1 M_{\oplus}$ , solo un fattore due di differenza (Debes et al., 2013). Tale ultimo esempio viene ripreso nella sottosezione relativa alla osservazioni simulate poichè è un caso molto semplice da studiare e da comprendere a causa dell'inclinazione del disco rispetto all'osservatore (*face-on disk* cioè con inclinazione di 90 gradi rispetto la linea di vista dell'osservatore). Verrà infatti preso in esame come modello di base su cui compiere confronti con le simulazioni numeriche condotte nella tesi.

Tale disco è stato osservato in un intervallo di lunghezze d'onda non raggiungibili da ALMA ( $0.5 \div 2.2 \mu m$ ) ma a queste lunghezze d'onda il contributo della stella è più significativo rispetto a quello osservato nel millimetrico.

Tale emissione è stata spiegata attraverso la cattura su orbite risonanti<sup>13</sup> di planetesimi dovuta ad un pianeta posto all'interno del disco. Nel caso di  $\beta$  *Pictoris* questo eccesso infrarosso (15 volte la brillantezza media del disco), in un intervallo di lunghezze d'onda tra gli  $8.7 \mu m$  e  $18 \mu m$ , è localizzato ad una distanza di  $52 A.U.$  che è circa la stessa a cui è stato localizzato un pianeta tramite osservazione diretta (Lagrange et al., 2010), confermando così l'idea che un pianeta non ancora rilevato possa lasciare un'impronta rilevabile all'interno di un disco di planetesimi.

Osservazioni nel millimetrico sono quindi indispensabili per studiare i processi che coinvolgono i planetesimi. Si può speculare però su come un insieme di planetesimi che essendo poco numerosi, ad una temperatura estremamente bassa e di dimensioni ridotte, possano generare un'emissione molto bassa. In realtà simulazioni numeriche mostrano come un disco di planetesimi possa andare incontro a fenomeni di collisione ed interazione che lo portano a (ri)creare un disco di polveri di dimensioni caratteristiche ben definite (qualche millimetro) e con un'emissione rilevabile dagli strumenti attuali (Rodmann et al., 2005). E' inoltre importante notare come la dimensione dei grani sia circa uguale alla lunghezza d'onda a cui essi emettono e quindi in base all'intervallo in cui si osserva è possibile studiare le proprietà dei grani di polvere in un intervallo preciso di dimensioni. Dunque in base al diverso eccesso di flusso nelle bande che vanno dall'infrarosso al millimetrico è possibile capire le dimensioni e quindi che tipo di grani di polvere sono predominanti e comprendere a che fase evolutiva si trova il disco di planetesimi. Nel caso di un eccesso di emissione a lunghezze d'onda di  $1 \div 7mm$  e un'emissione infrarossa ed ottica bassa si può dedurre che il disco

---

<sup>13</sup>Planetesimi in orbite "a ferro di cavallo" (*horseshoe*) e strutture ad anello o ad arco (*arc structures* e *ring structures*).

che si osserva è in una fase avanzata in cui il gas è stato quasi completamente diffuso o utilizzato per la formazione dei pianeti gassosi giganti. Rimane invece un disco di polveri dovuto alla frammentazione del disco di planetesimi ormai formato.

Si potrebbe obiettare che basta la SED per scoprire la presenza di un pianeta all'interno di un disco di gas e polveri o planetesimi ma ciò non risulta vero per almeno tre motivi. Il primo è che la luminosità totale ( $L$ ) di un corpo celeste di dimensioni  $R$  e temperatura effettiva  $T_{eff}$  è calcolata utilizzando la legge di Stefan-Boltzmann nel modo seguente:

$$L = 4\pi\sigma R^2 T_{eff}^4, \quad (6.11)$$

oggetti troppo piccoli hanno luminosità e quindi flussi<sup>14</sup> che, a parità di dimensioni fisiche, sono troppo piccoli per essere osservati e, analogamente oggetti con temperature troppo basse ma molto estesi hanno una luminosità (un flusso) molto alto. Questo è il motivo per cui un pianeta all'interno di un disco protoplanetario, anche se è un pianeta gigante gassoso giovane e caldo<sup>15</sup> è difficile<sup>16</sup> se non impossibile da osservare direttamente: il rapporto tra la luminosità del pianeta e quella totale del disco è così vicino all'unità che, con la sensibilità attuale, è molto difficile se non impossibile differenziare le due emissioni. Il semplice calcolo della luminosità per accrescimento del materiale del disco sul pianeta permette di dimostrare quanto appena detto (Wolf et al., 2005). Si definisce con  $r$  il raggio al quale si ha accrescimento sul pianeta:

$$r = 6 \times 10^{-5} r_H. \quad (6.12)$$

Nella precedente formula  $r_H$  definisce, come fatto nel capitolo due, il *raggio di Hill* del pianeta. La luminosità di accrescimento è data dalla quantità di materiale che nell'unità di tempo fluisce attraverso il disco ( $\dot{M}_p$ ) moltiplicato la differenza di potenziale calcolata tra il raggio di accrescimento ( $\Phi_p(r_p^{acc.})$ ) e la superficie ( $\Phi_p(S_p)$ ):

$$L_{acc.} = -\dot{M}_p [\Phi_p(S_p) - \Phi_p(r_p^{acc.})] = GM_p \dot{M}_p \left( \frac{1}{S_p} - \frac{1}{r_p^{acc.}} \right) \quad (6.13)$$

---

<sup>14</sup> $F = L/4\pi d^2$  dove  $d$  è la distanza a cui è posta la sorgente rispetto l'osservatore

<sup>15</sup>In questo caso si fa riferimento alla definizione di pianeta gigante gassoso caldo non perchè si trova ad una piccola distanza dalla stella centrale ma poichè nella teoria di formazione dei pianeti giganti gassosi, nelle prime fasi di formazioni essi sono più caldi a causa del gas caldo che accresce su di essi e a causa del riscaldamento ulteriore dovuto all'irraggiamento diretto della stella centrale (Hubbard et al., 2002).

<sup>16</sup>Per correttezza si cita l'articolo di Wolf e Hillenbrand (2005) e l'articolo già citato di Moro-Martín e Malhotra (2002), che descrivono come le modifiche ad una SED di un disco protoplanetario possono rilevare la presenza di un pianeta al suo interno ma per lunghezze d'onda minori di  $100\mu m$  a cui ALMA non arriva. Rimane comunque un campo di ricerca aperto e non si è arrivati ad una solida e univoca conclusione.

con  $\Phi_p = -GM_p/s$ ,  $s$  la distanza del pianeta ed  $S_p$  raggio del pianeta. Per valori di accrescimento realistici ( $\dot{M} \simeq 2 \times 10^{-5} M_{disco}$ , massa del pianeta uguali a  $1M_J$  e della stella centrale  $0.5M_*$ , raggio del disco 5 A.U. e raggio del pianeta 0.0005 A.U. si ottengono luminosità comprese tra  $L^{acc.} \approx 10^{-4 \div -5} L_\odot$  molto simili a quelle calcolate in Burrows (1997). Il secondo motivo è che i modelli che permettono di ottenere dei parametri fisici del disco e/o del pianeta da una SED presentano una degenerazione: singole caratteristiche possono essere dovute a differenti parametri fisici. In realtà è possibile osservare come un gap modifichi la SED di un disco. L'evoluzione della SED di un disco di gas è stata molto studiata (Adams, 1986) e l'emissione dipende dalla dimensione del disco che se presenta delle zone estese in cui non si ha il gas (cavità), ha delle caratteristiche differenti (Dent et al., 2000). L'emissione propria di un disco ( $dS$ ) per unità di area ( $dA$ ) invece si può calcolare come segue:

$$dS = \frac{1}{D^2} B_\nu(T) (1 - e^{-\tau}) \cos(i) dA, \quad (6.14)$$

dove  $B_\nu(T)$  è la funzione di Planck,  $i$  è l'inclinazione rispetto la linea di vista dell'osservatore e  $\tau$  è lo spessore ottico del disco che è funzione della densità ( $\Sigma(r)$ ), dell'emissività della polvere ( $k_\nu$ ) e dell'inclinazione del disco ( $i$ ):

$$\tau = \frac{\Sigma(r) k_0 \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^\beta}{\cos(i)}, \quad (6.15)$$

in questo caso  $\beta$  dipende dal tipo di grano di polvere ed è uguale ad uno per grani di dischi protoplanetari (Pollack et al., 1994). Per grani con dimensioni maggiori della  $\lambda$  a cui si osserva il valore di  $\beta$  è uguale a zero, in questo caso infatti l'emissione dipende solo dalla loro sezione geometrica. Infine la risoluzione angolare degli strumenti è essenziale per comprendere la zona da cui si ha un certo tipo di emissione: l'emissione del disco infatti dipende dalla temperatura che, come detto, è sua volta funzione della distanza dalla stella centrale. Poca risoluzione angolare implica una scorretta mappatura del flusso proveniente da zone differenti del disco.

La situazione cambia se si osserva un gap e non direttamente il pianeta all'interno di un disco protostellare, in quel caso infatti il contrasto di luminosità tra il gap ed il disco è molto maggiore ed è più semplice da rilevare.

Tutto ciò porta a favorire l'imaging diretta di un disco che, come visto nell'elaborato, soggetto all'interazione con un pianeta, presenta delle modifiche strutturali ben definite e riconoscibili quali i vortici creati dalla *baroclinic instability* (Wolf e Klahr, 2002) o i gap dovuti all'interazione tra il disco ed il pianeta (Wolf e D'angelo, 2005). ALMA possiede la giusta combinazione di risoluzione, lunghezze d'onda e sensibilità per garantire l'imaging di dischi protoplanetari fino a distanze minori di 140 pc per

dischi di dimensioni dell'ordine di qualche decina di unità astronomica consentendo quindi di identificare in modo indiretto la presenza di un pianeta. Questo risultato è davvero interessante perchè se fino a poco tempo fa il metodo d'identificazione di pianeti più utilizzato era quello delle velocità radiali (Mayor e Queloz, 1995; Marcy e Butler, 2000) che aveva un'efficienza che diminuiva con la distanza del pianeta dalla stella centrale, ora, grazie all'interferometro ALMA, è possibile osservare ed individuare pianeti giganti gassosi, giovani, anche molto distanti dalla stella centrale.

L'interazione del pianeta con il disco può generare dei dischi in cui si estendono ampie perturbazioni di densità (*density spiral waves*) (Bryden et al. 1999; Kley, 1999; Kley et al. 2001; Lubow et al. 1999; Bate et al., 2003; Winters et al, 2003; Nelson e Papaloizou, 2003) che però hanno una densità non molto più elevata rispetto l'ambiente circostante (circa il 10% della densità media del disco) o dei dischi con strutture risonanti detti *debris disks* (Liou e Zook, 1999; Zuckermann, 2001). Queste particolari strutture sono state osservate in molti dischi protoplanetari come Fomalhaut (Holland et al., 2003), HR 4796A (Schneider et al., 1999) e, come archi di anello, in Vega (Koenner et al., 2001). Tutte queste caratteristiche sono state osservate a distanze maggiori di 50 *A.U.* dalla stella centrale. Nel caso di Fomalhaut, per esempio, l'articolo di Holland (2003) descrive la presenza di *clumpy* di luminosità ovvero delle zone ben definite in cui la luminosità è maggiore rispetto alle zone circostanti. La luminosità di questi *clumpy* è, misurata ad una lunghezza d'onda di  $450\mu m$ , il  $5\%L_{tot}$  che corrisponde ad un corpo celeste non rilevato con una massa di circa 0.075 volte la massa della Luna o più che un addensamento localizzato potrebbe essere un arco o un anello. Nella tabella ... sono riassunti i flussi, le lunghezze d'onda e le frequenze a cui è stato osservato il disco protostellare.

distanza della stella	7.7 parsec
lunghezza d'onda di osservazione [ $\mu m$ ]	300-3600
frequenza di osservazione [GHz]	900-84
flusso osservato alla data frequenza [mJy]	600-100

**Table 6.3:** Tabella riassuntiva delle caratteristiche del disco di Fomalhaut (Holland, 2003).

Flussi analoghi vengono utilizzati per i dischi simulati in questo elaborato. Si cita anche il flusso misurato per HL TAU a  $2.7mm$  che è uguale a  $0.11Jy$  (Beckwith, 1986), per L1551-IRS5 (sempre a  $2.7mm$ ) che è uguale a  $0.13Jy$  (Keene e Masson, 1990) e di circa  $1Jy$  nell'intervallo compreso tra  $100\mu m$  e  $1000\mu m$  (Varnière et al., 2005). Kim et al. (2005) fissa il rapporto tra la luminosità del disco di planetesimi nel nostro Sistema Solare definito

come Fascia di Kuiper e la luminosità del Sole uguale a  $L_{dust}^{IR}/L_{\odot} < 10^{-6}$  nell'intervallo compreso tra i  $150\mu m$  e i  $240\mu m$ . La cavità osservata ha una dimensione di circa 10 unità astronomiche anche se non si ha la capacità risolutiva per risolverla è stato possibile localizzare il picco dell'emissione a circa  $125 \div 135 A.U.$  dalla stella centrale dovuto molto probabilmente a della polvere e planetesimi in risonanza orbitale con un corpo massivo ed una cavità ad una distanza di 100 unità astronomiche dove potrebbe essere localizzato il pianeta.

Le teorie di formazione planetaria per instabilità gravitazionale consentono la formazione di pianeti a queste distanze (Cossins et al., 2010; Marois et al., 2008; Kalos et al., 2008).

Il codice utilizzato in questa tesi non presenta però un algoritmo che tracci la frammentazione dei planetesimi ma come è stato dimostrato dalle simulazioni numeriche condotte nell'articolo di Richardson, Lufkin e Leinhardt (2005) in cui si dimostra come i frammenti creati durante i processi d'interazione tra planetesimi (oggetti con orbite fortemente circolari a causa della precedente interazione con il disco di gas che ha anche portato alla loro sedimentazione sul piano equatoriale del disco) e tra planetesimi e comete (oggetti con orbite altamente eccentriche che possono interagire fortemente con i planetesimi) non influenzano l'evoluzione dinamica (la migrazione radiale) del pianeta all'interno di tale disco. Inoltre l'interazione tra pianeta e disco di planetesimi non genera un numero elevato di planetesimi con eccentricità maggiore di uno (meno del 20%), bensì ne aumenta l'eccentricità fino ad un valore di soglia che dipende dalla distribuzione iniziale in eccentricità dei planetesimi e dalla massa del pianeta (Lufkin et al., 2006). Il motivo per cui solo così pochi planetesimi vengono espulsi e portati su orbite iperboliche o paraboliche è che la componente perpendicolare del termine di frizione dinamica (Del Popolo et al., 1999) e l'interazione con il gas riportano i valori di eccentricità ed inclinazione dei planetesimi a valori modesti "raffreddando" così il disco precedentemente riscaldato dall'interazione con il pianeta. Un effetto importante, come visto nelle simulazioni di questo elaborato è che pianeti di massa maggiore interagiscono con un numero maggiore di planetesimi, interagendo con un numero maggiore di corpi a causa della maggiore estensione della loro *feeding zone*. Il flusso misurato a lunghezze d'onda millimetriche (in cui si trovano i grani più grandi che non seguono più il comportamento fluidodinamico del disco di gas e che tendono ad essere accresciuti sulla stella centrale a causa della perdita/guadagno di momento angolare dopo l'interazione con il pianeta) diminuisce in base alla massa del pianeta. In figura 6.11 è presentato schematicamente ed in modo approssimativo quanto detto. Osservativamente si ha una diminuzione del flusso a lunghezze d'onda millimetriche che, assieme al gap, può servire per stimare meglio la massa del pianeta all'interno del disco. Il problema è che questa caratteristica osservativa può essere scambiata per una cavità centrale dovuta alla presenza di un secondo pianeta.

Le condizioni iniziali per le simulazioni realizzate in questa tesi seguono solo in parte quelle sviluppate da Wolf (2005) nel quale la SED simulata è dovuta a dei grani con dimensioni caratteristiche comprese tra gli  $0.005\mu m$  e  $1\mu m$ , con una distribuzione in dimensione di tipo legge di potenza  $n(a) \propto a^{-3.5}$ . La luminosità osservata è dovuta a tre componenti: la riemissione dei fotoni provenienti dalla stella (scattering); la riemissione dovuta al pianeta e all'emissione ed assorbimento proprio dei grani di polvere. Nelle simulazioni compiute in questa tesi invece, si suppone che i grani abbiano una dimensione maggiore compresa tra  $7\mu m$  e  $1mm$  poichè il disco è in una fase evoluta e quindi i grani hanno avuto tempo per coagulare ed accrescere gli uni sugli altri fino a raggiungere queste dimensioni, inoltre la frammentazione dei planetesimi ha generato un disco abbastanza omogeneo e diffuso ma abbastanza massivo da emettere a lunghezze d'onda che vanno dal sub-millimetrico al millimetrico. Infine grani di dimensioni minori hanno avuto il tempo di accrescere sulla stella centrale (Weidenschilling, 1977) interagendo con il disco di gas. Le osservazioni sono state condotte ad una frequenza di  $900GHz$ , analogamente a quanto fatto in questo elaborato. Ciò è dovuto al fatto che, a questa banda si ha la massima risoluzione consentita per ALMA (fissata una configurazione dell'interferometro). La massa del pianeta rientra nel intervallo di masse simulato nell'articolo è infatti uguale a  $1M_J$ , come la massa della stella centrale ( $M_* = 1M_\odot$ ), il semiasse maggiore dell'orbita del pianeta ( $5A.U.$ ) e la massa del disco:  $M_d = 7 \times 10^{-2} M_\odot$ . La larghezza della banda (*bandwidth*) di osservazione di  $8GHz$ .

Cambia invece il rapporto tra la massa del gas e la massa della componente solida nel disco, il gas infatti è quasi del tutto scomparso a causa dei fenomeni di accrescimento sul pianeta sui grani o espulso per effetto della pressione di radiazione della stella centrale. I risultati di tali osservazioni simulate mostrano come, per un disco ad una distanza maggiore di 50 pc il pianeta deve trovarsi a distanze maggiori di  $5A.U.$  dalla stella centrale affinché sia possibile osservare il gap che forma durante l'interazione con il disco. Infatti la dimensione minima del beam raggiungibile da ALMA è di circa 0.004 arcosecondi. Ciò infatti limita la dimensione del minimo del gap ( $\Delta a$ ) che si riesce ad osservare, che può essere calcolata nel modo seguente (Wetherill e Stewart, 1993):

$$\Delta a = 2a_p \left[ \frac{4}{3} (e_p^2 + i_p^2) + 12 \left( \frac{r_H}{a_p} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \sim 7r_H. \quad (6.16)$$

Nell'equazione 6.14 si è definito con  $a_p$  il semiasse maggiore dell'orbita del pianeta, con  $e_p$  e  $i_p$  la sua eccentricità ed inclinazione e con  $r_H$  il suo raggio

---

<sup>17</sup>La massa del disco è essenziale per garantire una corretta osservazione dello stesso, dischi troppo tenui infatti non emetterebbero abbastanza. Un disco posto a distanza di circa 140 pc con dimensioni di circa  $100A.U.$  dovrebbe avere una massa minima di  $0.0005 M_\oplus$  per poter essere rilevato correttamente (Ruge et al., 2013)

di Hill. Come si vede questo risultato è un modo alternativo per calcolare la dimensione completa della *feeding zone* calcolata nel capitolo due. La risoluzione strumentale dev'essere minore o al più uguale alla dimensione del gap che si vuole osservare. Si capisce come, aumentando la distanza del pianeta dal disco, aumenta la dimensione del gap e, analogamente la possibilità di osservarlo.

Un secondo risultato importante è che il rapporto tra la massa del pianeta e la massa della stella centrale non può essere molto basso poichè, altrimenti, i venti stellari e i fenomeni di accrescimento verso il centro diminuirebbero in poco tempo la densità superficiale del disco che non potrebbe più essere osservato. E' ottimale dunque un sistema di tipo Sole-Giove.

Le simulazioni di Gonzales et al. (2012) invece prevedono un disco con una dimensione compresa tra 4  $A.U.$  e 160  $A.U.$  una massa del disco simile a quella simulata in questo elaborato ( $M_d = 2 \times 0.02 M_\odot$ ), una stella di una massa solare, una densità superficiale costante. Il pianeta simulato ha una massa fissata uguale a 1  $M_J$ , le osservazioni sono condotte ad una lunghezza d'onda di  $850\mu m$ , il tempo di osservazione è di un ora. Tempi d'esposizione maggiori non danno risultati molto migliori a causa dell'alto rapporto segnale rumore che generano. Infine si fa notare, nell'articolo, come alle lunghezze d'onda di riferimento per le osservazioni il flusso sia maggiore ma, analogamente anche il noise lo è. La differenza sostanziale è che il disco simulato presenta una parte gassosa predominante e diverse componenti di grani di dimensioni variabili fino ad un centimetro non interagenti con il disco di gas. Tale disco ha un valore di  $H/r = 0.05$  (spessore normalizzato) è isoterma ( $t = T_0/r$ ) e non autogravitante ed è tridimensionale, il tempo d'integrazione è di otto tempi dinamici. Alla distanza a cui è posizionato il pianeta (circa 30  $A.U.$ ) un tempo dinamico corrisponde a circa 250 anni. Nelle simulazioni effettuate in questa tesi un disco non autogravitante di polvere bidimensionale corotante e controrotante è stato simulato permettendo di osservare differenze e similitudini con quanto trovato precedentemente da Gonzales: in entrambi i casi si riesce ad osservare un gap nell'imaging di un disco corotante con distanza dalla stella centrale di 15  $A.U.$ , mentre a causa dell'operazione di cleaning non perfetta e del basso flusso considerato per la sorgente (0.1  $Jy$ ), la distanza massima a cui si riesce ad osservare tale gap è circa la metà di quella ottenuta nell'articolo.

L'importanza di osservare il disco ad una certa lunghezza d'onda è inoltre sottolineato dal diverso comportamento che i grani di polvere di dimensioni differenti hanno quando interagiscono con un disco di gas. Grani grandi, con dimensioni da  $100\mu m$  fino a qualche centimetro non sono molto legati al gas e ciò cambia completamente l'emissione e l'imaging del gap (Gonzales et al., 2012). Tale disaccoppiamento è dovuto alla presenza di forti onde d'urto localizzate vicino alla zona di formazione del pianeta (*strong spiral shoks*) e possono rendere i grani con dimensioni maggiori di  $0.1\mu m$  non accoppiati al gas. Nell'articolo si osserva, tramite simulazioni numeriche, come

l'approssimazione di studiare la polvere come ben legata alla componente gassosa del disco (*well-mixed gas and dust approximation*) genera un gap con dimensioni minori e, all'interno dell'intervallo di lunghezze d'onda proprie dell'interferometro ALMA, l'emissione è molto minore a causa della migrazione e sedimentazione verticale dei grani di polvere. Si osservano infatti *deficit* nell'emissione nell'infrarosso nelle zone centrali del disco. Questa *feature* può essere, erroneamente, scambiata per un indicatore della presenza di un disco "transitorio" (*transient disk*) con una cavità nella regione più interna (Varnière, 2006; Varnière et al., 2005; Dodson-Robinson e Salyk, 2011). Inoltre un disco di planetesimi o grani di polvere nell'intervallo sopra definito, il gap si forma su tempi minori rispetto a quanto avviene nel caso di un disco di gas poichè la viscosità (che tende a far migrare e diffondere il gas all'interno nel disco verso il centro) agisce in modo da riempire nuovamente il gap appena formato diminuendone l'estensione e il contrasto in densità con le zone circostanti. Questo fenomeno è evidente nella figura 6.12 in cui un disco fluidodinamico simulato attraverso il codice FARGO non presenta più la zona di materiale in risonanza.

Dunque si comprende ancora una volta l'importanza di studiare il disco protoplanetario nel millimetrico e sub-millimetrico dove è possibile identificare in modo migliore il gap formato dal pianeta. Uno dei risultati finali a cui giunge l'articolo è che non è possibile determinare la dimensione del gap da una singola immagine presa ad un'unica lunghezza d'onda poichè la precisione su tale dimensione è limitata dal beam che, come detto precedentemente, varia in base alla lunghezza d'onda a cui avviene l'osservazione. In formule dunque:

$$\Delta a_{oss} = \Delta a_{vero} \pm \text{Errore}(\lambda). \quad (6.17)$$

Nella migliore delle ipotesi tale errore è uguale a circa 0.01 arcosecondi per ALMA. Gap con dimensioni minori della dimensione del *synthesized beam* non possono essere risolti e per questo motivo e per la dipendenza della risoluzione dalla dimensione massima dell'interferometro si scelgono configurazioni particolari che aumentino la risoluzione senza però perdere molto flusso (ad esempio nell'articolo di Ruge et al., 2013 è stata scelta la configurazione 14, mentre in questo elaborato è stata scelta la configurazione 20 per le antenne). E' possibile riassumere quanto detto nella tabella 6.3.

Nell'articolo di Ruge et al. (2013) si osserva come un disco per avere un gap osservabile deve avere un rapporto tra la massa del pianeta e la massa della stella centrale almeno dell'ordine di 0.001 ed una massa di circa  $3 \times 10^{-4} M_{\odot}$ . In dischi di gas il contributo dovuto al campo magnetico della stella e del disco stesso genera dei gap di dimensioni maggiori (Uribe et al., 2011) e più lentamente (Nelson e Papaloizou, 2003) rispetto a quanto succede in dischi di planetesimi. Se si utilizza la dimensione del gap per studiare la massa del pianeta si possono pertanto avere risultati errati ed è



lunghezze d'onda migliori per l'osservazione di un gap	
430 $\mu m$	2000 $\mu m$
alta risoluzione	bassa risoluzione
flusso basso	flusso alto
alto spessore ottico	basso spessore ottico

**Table 6.4:** *Intervallo di lunghezze d'onda a cui si hanno le migliori osservazioni per un gap di un disco protoplanetario.* La temperatura di un disco è globalmente molto bassa e analogamente il flusso misurato che presenta un picco di emissione nel millimetrico. La riemissione della luce assorbita dai grani invece ha un picco nel submillimetrico. Sono queste le lunghezze d'onda migliori per tracciare le varie componenti del disco, le proprietà della polvere e la presenza di un gap o di onde di densità attraverso l'immagine diretta.

stato quindi scelto non simulare la fase gassosa<sup>18</sup> del disco protostellare ma di concentrare le simulazioni sulle fasi finali dell'evoluzione di sistemi in cui il gas è già stato utilizzato per la formazione dei pianeti e planetesimi, è stato accresciuto sulla stella centrale o, ancora, è stato spazzato via dall'intenso vento stellare che caratterizza le fasi iniziali di evoluzione della stella (*YSO winds*).

Le simulazioni condotte in questa parte della tesi sono analoghe a quelle condotte nei capitoli precedenti e consistono in una simulazione fatta per l'assunzione di una luminosità definita comparandola con quella trovata in letteratura per altri dischi protostellari. Analogamente Moro-Martín e Malhotra (2002) utilizzano il codice SWIFTER con l'algoritmo syMBA. Simulano l'emissione da un disco di polveri con grani di dimensioni che vanno da 3  $\mu m$  a 120  $\mu m$  per un disco con densità di 1  $gr/cm^3$  e tra 1  $\mu m$  a 40  $\mu m$  per un disco con densità di 2.7  $gr/cm^3$ . I due differenti dischi sono stati usati per simulare come la densità della parte solida del disco aumenta avvicinandosi alla stella centrale con un brusco calo della densità una volta passata la cosiddetta *snowline*<sup>19</sup>.

Ozernoy et al. (2000) definisce un disco di planetesimi con densità iniziale costante (come quello simulato in questa tesi) ma con una distribuzione di planetesimi inversamente proporzionale alla distanza dalla stella centrale

<sup>18</sup>Un secondo motivo legato a tale problema è che le dimensioni di un gap in un disco gassoso sono dipendenti dalla scelta del codice utilizzato: i codici *SPH* aumentano le dimensioni del gap rispetto ai codici a *griglia* (Gonzales et al., 2010).

<sup>19</sup>Definita anche come *frost line*, *ice line*, *snow boundary* è la distanza alla quale si possono formare dei grani con un mantello ricoperto di ghiaccio (*icy grains*). Ciò avviene quando la temperatura del disco scende tra i 150 e i 170 gradi Kelvin. La discontinuità che si ha nella componente solida del disco fa variare la massa raggiungibile attraverso il solo accrescimento di planetesimi definita anche *isolation mass* di un fattore otto aumentando anche la velocità di accrescimento sugli stessi. Per un disco di gas invece la snowline non rappresenta una barriera a cui si ha una discontinuità nella densità.

( $n \sim a^{-1} = \Sigma_0(a_0/a)$ ) ciò implica che le particelle hanno uno spettro di massa affinché la densità (in  $gr/cm^3$ ) rimanga costante<sup>20</sup>. I dischi che sono stati simulati in questa tesi sono non autogravitanti nel senso che non si studia l'interazione che un planetesimo ha con gli altri. Nel caso delle osservazioni ALMA l'introduzione dell'autogravità del disco introduce delle particolari caratteristiche globali quali delle onde a spirali molto pronunciate (Cossins et al., 2010) e delle zone sovradense visibili nel vicino infrarosso (con risoluzione molto elevata  $\theta \sim 0.01''$ ) e non osservabili nel millimetrico (Muto 2012). Realisticamente quindi si simula un disco già formato, privo di gas, in cui l'emissione è data dai grani di polvere dovuti all'interazione e alla frammentazione dei planetesimi che compongono il disco. Il gas è ormai in quantità minima quindi è realistico trascurare nelle simulazioni l'effetto che tale disco di gas avrebbe sulla migrazione del pianeta: ha infatti una massa non sufficiente a generare una migrazione rivelante o paragonabile a quella invece molto pronunciata dovuta all'interazione con il disco di planetesimi (da Wolf, 2007: "...larger bodies in this size regime [ $> 10km$ ] are predicted to undergo collision events (Weidenschilling, 1970), creating fragments which may allow to trace the location...of the cm to km sized parent body"). Un disco del genere è definito *debris disk* e il suo profilo di luminosità è dovuto solo alla gravità e alla radiazione della stella centrale (Zuckerman et al., 1995).

Beam size (RA; ")	$\delta()$	$d(pc)$	dischi
0.10"	+25	140	Taurus
0.05"	+1	140	Serpens
0.12"	-24	260	Ophicus
0.09"	-34	120	Lupus (I)
0.09"	-77	150	Chamaeleon (I)

**Table 6.5:** *Posizione nel cielo di alcuni dischi protoplanetari.* La cosa rilevante è che le dimensioni fisiche dei dischi, la distanza (espressa in  $pc$ ) e quindi la loro dimensioni angolari sono molto ridotte. Inoltre questo campione di dischi è stato ampiamente caratterizzato e studiato e consente di portare un paragone ai dischi simulati in questa tesi. L'influenza che la loro posizione ha sull'imaging è, secondo l'articolo di Gonzales molto ridotta poichè ALMA presenta una buona copertura del piano  $(u,v)$  che permette una corretta ricostruzione dell'immagine della sorgente anche se non si trova precisamente allo *zenit* dell'interferometro.

Le osservazioni simulate con ALMA si propongono di raggiungere flussi

---

<sup>20</sup>Uno spettro di massa non è implementato nella versione di SWIFTER utilizzata in questa tesi ma è stato introdotto nella versione di C. Capobianco (Capobianco et al., 2010).

limite di  $0.1 Jy$  con un numero di particelle uguale a  $4 \times 10^4$ , con dischi bidimensionali osservabili a frequenze di  $700 GHz$  dove si ha un valido compromesso tra flusso della sorgente, sensibilità e risoluzione angolare dello strumento. Nella figura (6.13) è presentato un disco corotante ed un disco controrotante con una dimensione di  $20 A.U.$  ad una distanza di  $70 pc$ . Si nota come il basso flusso degli oggetti, permetta una corretta osservazione del gap (che ha dimensioni simili al beam, in blu nell'immagine) ma non permette di comprendere se la popolazione di planetesimi in risonanza 1:1 con il pianeta è effettivamente presente.

Nel caso preso in esame la piccola dimensione angolare del disco non consente, anche con un interferometro come ALMA, di rilevare attraverso la sola procedura di imaging la presenza di un pianeta corotante o controrotante al disco protostellare. Si può però osservare distintamente il gap creato dal pianeta. Il problema che si ha in questo caso è che, poichè i gap nel caso corotante e controrotante sono differenti, non si può calcolare la massa del pianeta con precisione utilizzando l'estensione del gap se non si ha informazione sulla direzione di rivoluzione del pianeta stesso. Infatti nei due casi corotante e controrotante, a parità di massa del pianeta, il gap ha un'estensione differente (maggiore nel caso corotante).

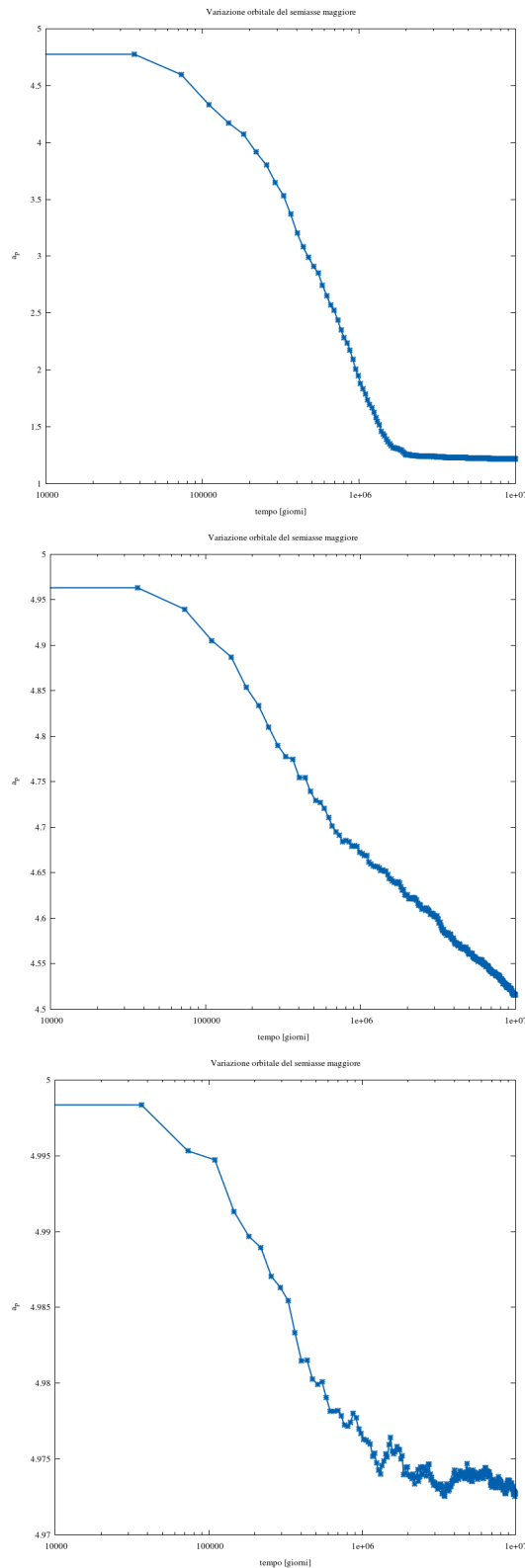
La situazione però cambia se si considera un disco più esteso ( $100 A.U.$ ) e alla stessa distanza del caso precedente o posto a distanza minore  $30 pc$  e con la stessa dimensione lineare ( $20 A.U.$ ) di quelli mostrati in figura 6.14 .

Quello che cambia è il flusso osservato nel caso del disco più distante cambiando la banda di osservazione poichè passando da  $700 GHz$  a  $900 GHz$  si guadagna un fattore quattro in flusso a parità di tempo di osservazione, si può colmare la perdita di sensibilità allungando il tempo d'osservazione della sorgente.

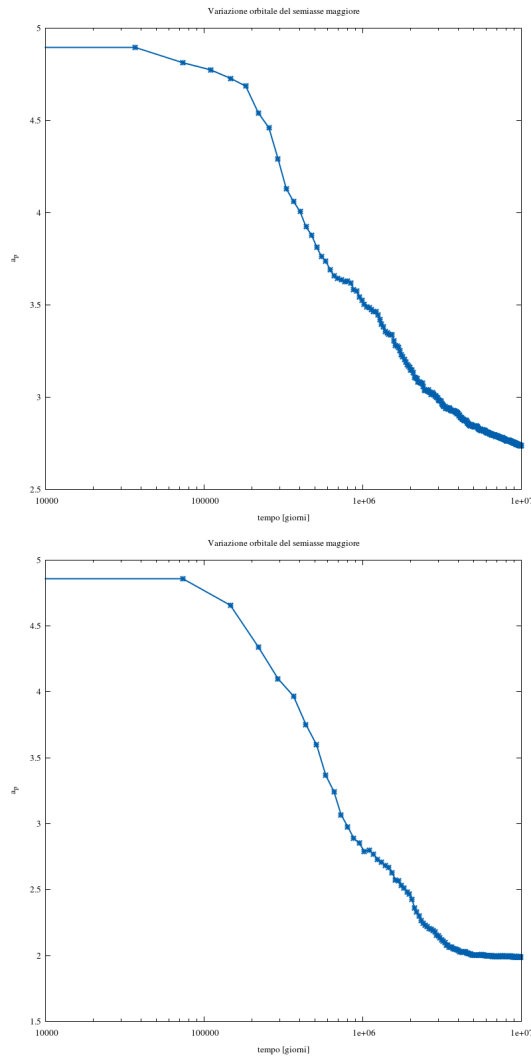
Infine si è simulato un disco con una certa inclinazione (60 gradi). In questo caso l'inclinazione del disco rispetto la linea di vista dell'osservatore modifica la dimensione del gap.

Concludendo, le simulazioni effettuate in questa tesi indicano che è possibile osservare dischi con flussi paragonabili a quelli realmente esistenti (da  $0.1 Jy$  fino a  $1 Jy$ ) a distanze maggiori di  $70 pc$ , e con dimensioni che vanno dalle  $20 A.U.$  alle  $100 A.U.$  in accordo con quanto visto in lavori precedenti.

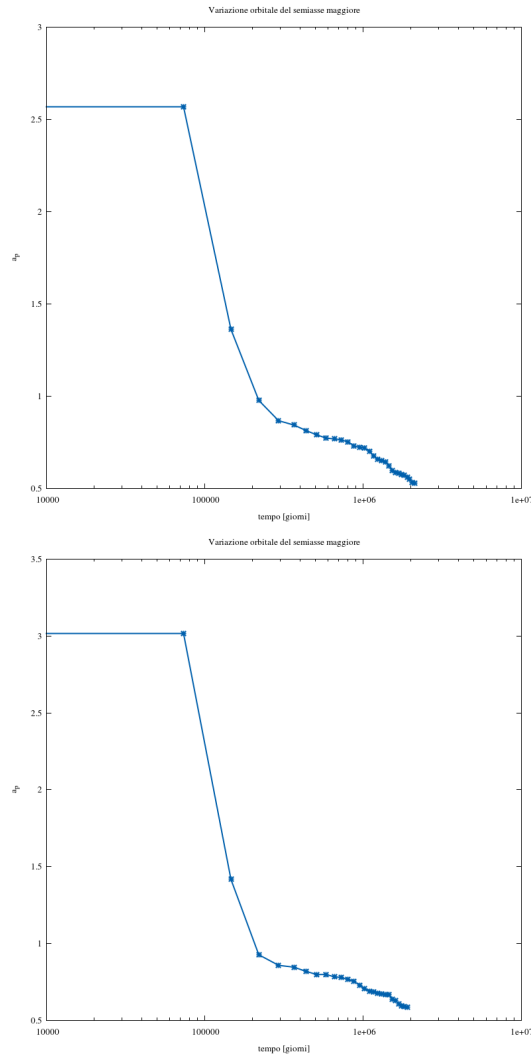
Abbiamo inoltre dimostrato che è possibile identificare dischi corotanti e controrotanti dalla caratterizzazione del gap osservato e dalla presenza o meno di una famiglia di planetesimi e polveri in risonanza 1 : 1 con il pianeta. L'inclinazione rispetto la linea di vista, il basso flusso, la distanza e la dimensione modesta di queste sorgenti gioca un ruolo rilevante per l'identificazione e la caratterizzazione del pianeta che si trova al loro interno.



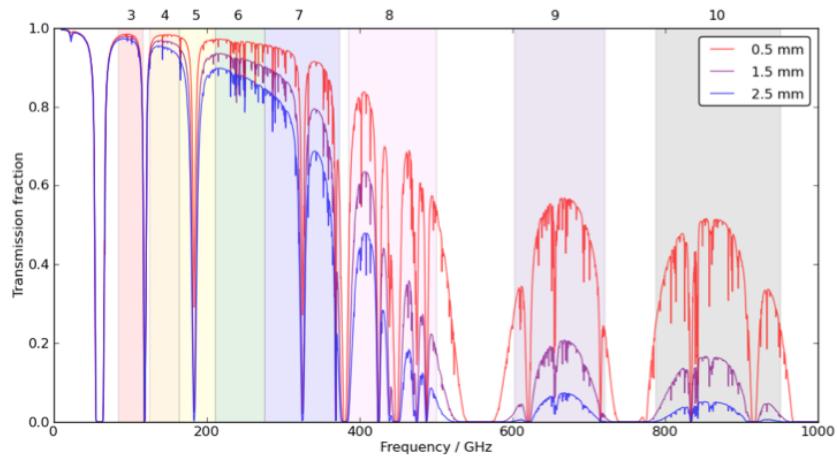
**Fig. 6.9:** *Variazione del semiasse maggiore nel tempo per un pianeta di  $1 M_J$  e con densità del disco variabile. Si osserva come, diminuendo la densità superficiale del disco è possibile ottenere dei rate di migrazione via via minori. L'andamento funzionale dell' semiasse maggiore nel tempo nelle tre simulazioni risulta comunque abbastanza simile anche se con ampiezza radiali differenti.*



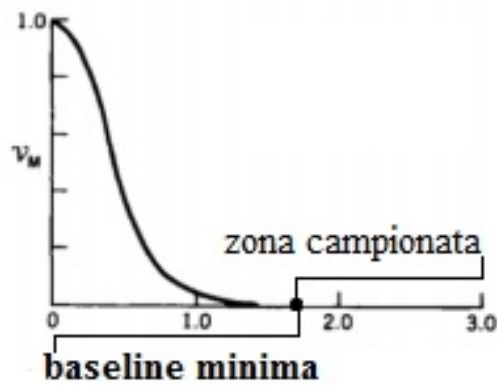
**Fig. 6.10:** *Variazione del semiasse maggiore nel tempo per un pianeta di  $100 M_{\oplus}$  e differente distribuzione di eccentricità per il disco. A parità di massa, densità superficiale e posizione iniziale, nel caso controrotante la presenza o meno di una distribuzione di eccentricità modifica visivamente la parte finale delle due simulazioni, nella simulazione in cui è presente una distribuzione di eccentricità (in alto) l'andamento del semiasse maggiore del pianeta nel tempo è minore rispetto al caso in cui l'eccentricità è posta uguale a zero (in basso).*



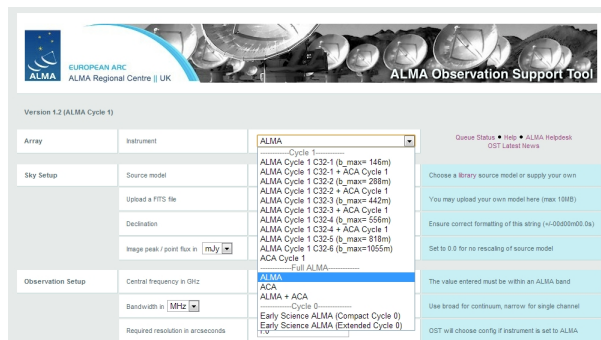
**Fig. 6.11:** *Variazione del semiasse maggiore nel tempo per un pianeta di  $100 M_{\oplus}$  e differente distribuzione di eccentricità per il disco. A parità di massa, densità superficiale e posizione iniziale, nel caso controrotante la presenza o meno di una distribuzione di eccentricità non modifica l'andamento del semiasse maggiore del pianeta nel tempo.*



**Fig. 6.12:** *Trasmissione atmosferica sopra l'interferometro e relativa posizione e larghezza delle dieci bande ALMA in funzione della frequenza.* Come si può notare la trasmissione dell'atmosfera è minima in alcuni range di frequenza ed è invece talvolta prossima ad uno in alcune delle bande di operatività di ALMA.

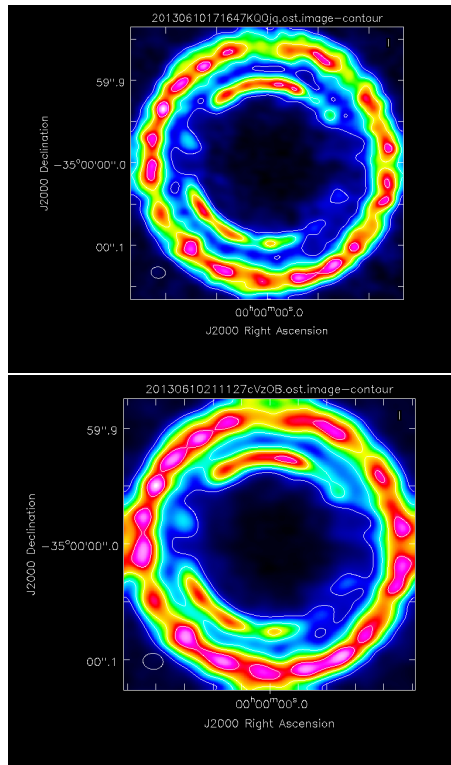


**Fig. 6.13:** *Immagine d'interferenza di un profilo di luminosità gaussiano.* Se la baseline minima è troppo grande non si ha un campionamento dell'immagine d'interferenza e quindi non viene vista nessuna sorgente.

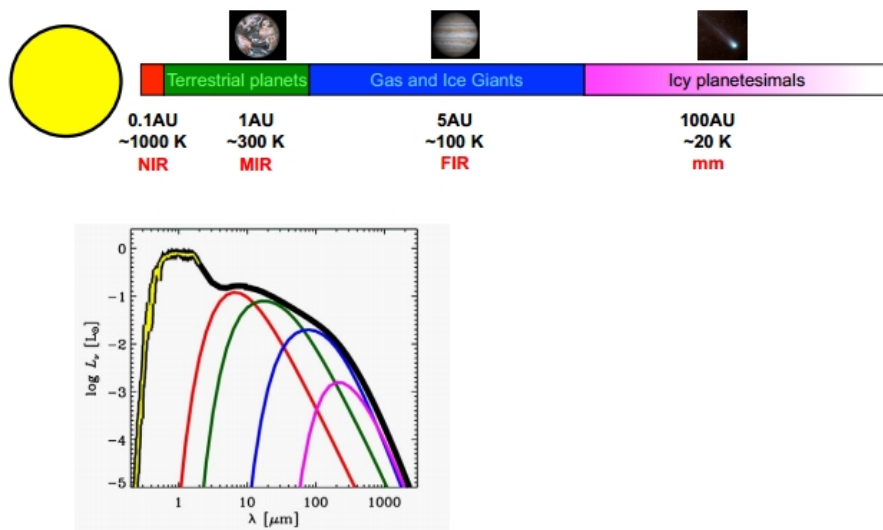


**Fig. 6.14:** *Interfaccia OST.* Il menù a scorrimento consente di scegliere non solo la configurazione dello strumento ma anche il ciclo di osservazioni a cui si fa riferimento.

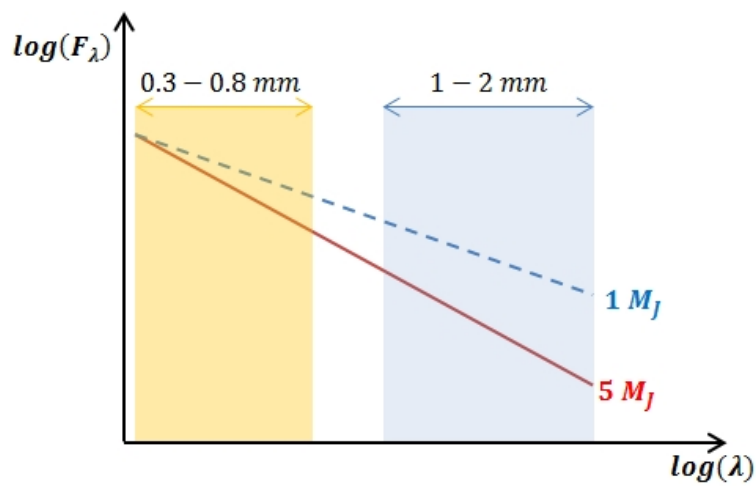




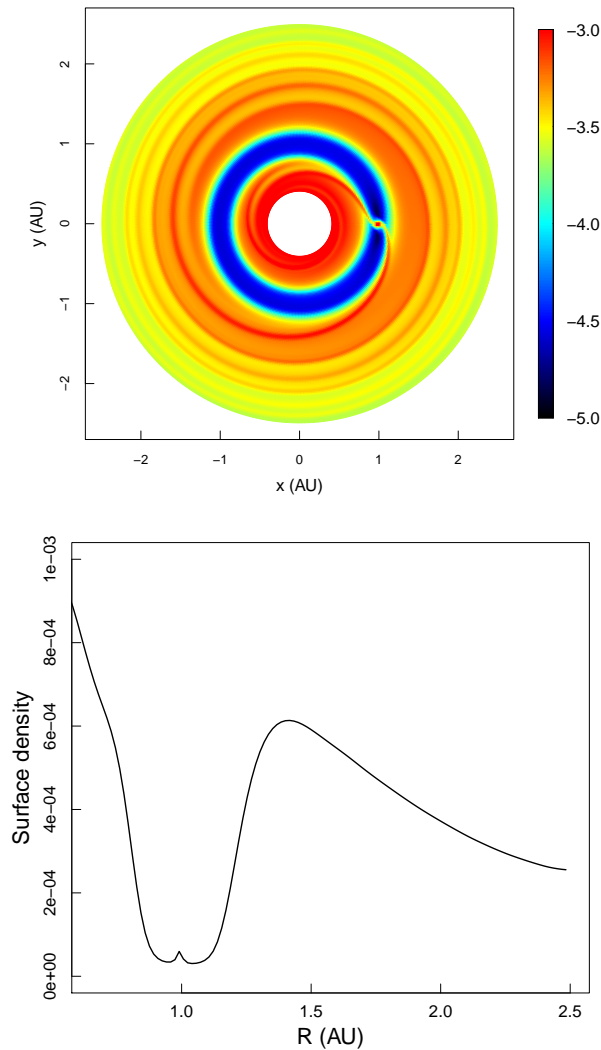
**Fig. 6.15:** *Simulazioni osservative con l'utilizzo del software online OST.* In alto: Disco corotante posto a 70 pc di distanza. Il flusso in questo caso è stato scelto essere uguale a  $0.00003 Jy/pixel$  sono evidenziate le isofote di flusso uguale a quello di background e massimo. Si osservano inoltre le due zone popolate da planetesimi in risonanza centrate attorno ai punti lagrangiani  $L_4$  ed  $L_5$ . In basso a sinistra le dimensioni della PSF. In basso: Disco corotante posto a 70 pc di distanza. Il flusso in questo caso è stato scelto essere uguale a  $0.00001 Jy/pixel$  (un fattore tre in meno rispetto il flusso precedente). Sono ancora evidenziate le isofote di flusso minimo e massimo. Si osservano però come le varie zone siano meno chiare rispetto al caso precedente. Una corretta combinazione di distanza, flusso ricevuto, risoluzione e dimensioni angolari delle sorgente permette di osservare le caratteristiche desiderate.



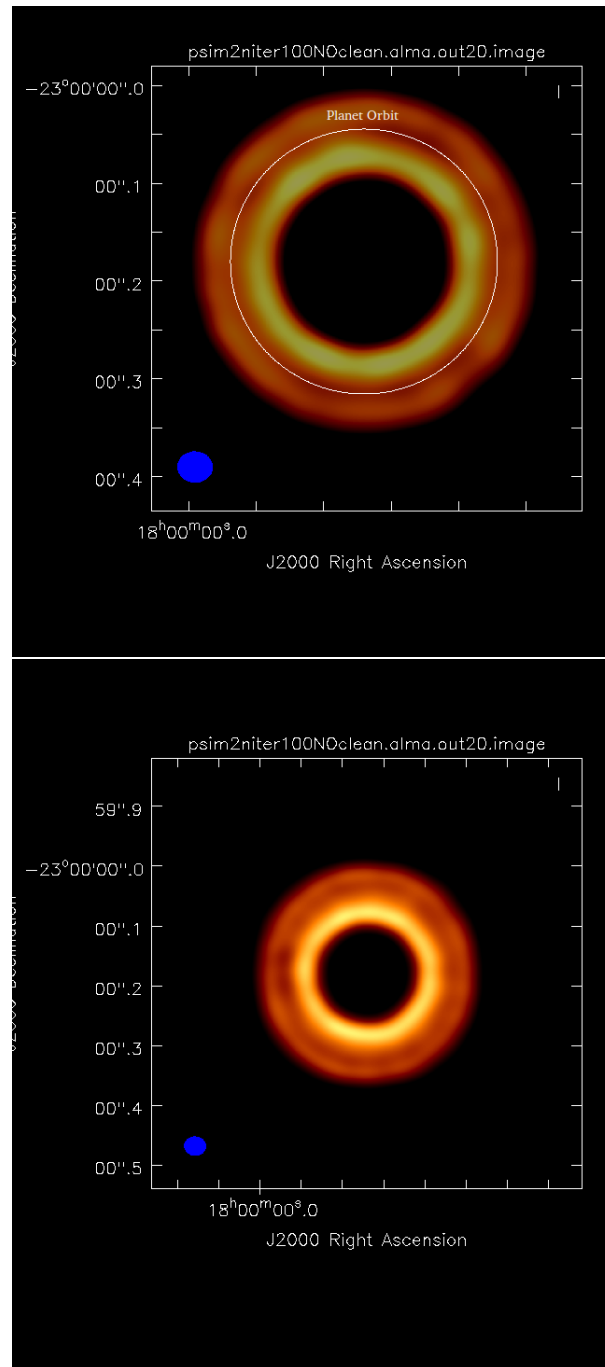
**Fig. 6.16:** SED modello di un disco di planetesimi protostellare in cui sono presenti i vari contributi all'emissione. In *rosso* la parte più calda del disco ad una temperatura di circa 1000 gradi Kelvin, in *verde* la parte di disco in cui si osservano i pianeti di tipo terrestre, ad una temperatura di circa 300 Kelvin e un'emissione che ha il picco nel *MIR* (attorno a  $10\mu m$ ), poi la zona, più distante rispetto alla stella centrale, in cui si hanno i pianeti giganti gassosi con temperatura di circa 100 Kelvin ed emissione di picco nel lontano infrarosso (*FIR*) ed infine l'emissione dei planetesimi nella zona più esterna a distanze variabili da 20 a  $100A.U.$  ed emissione osservabile nel millimetrico.



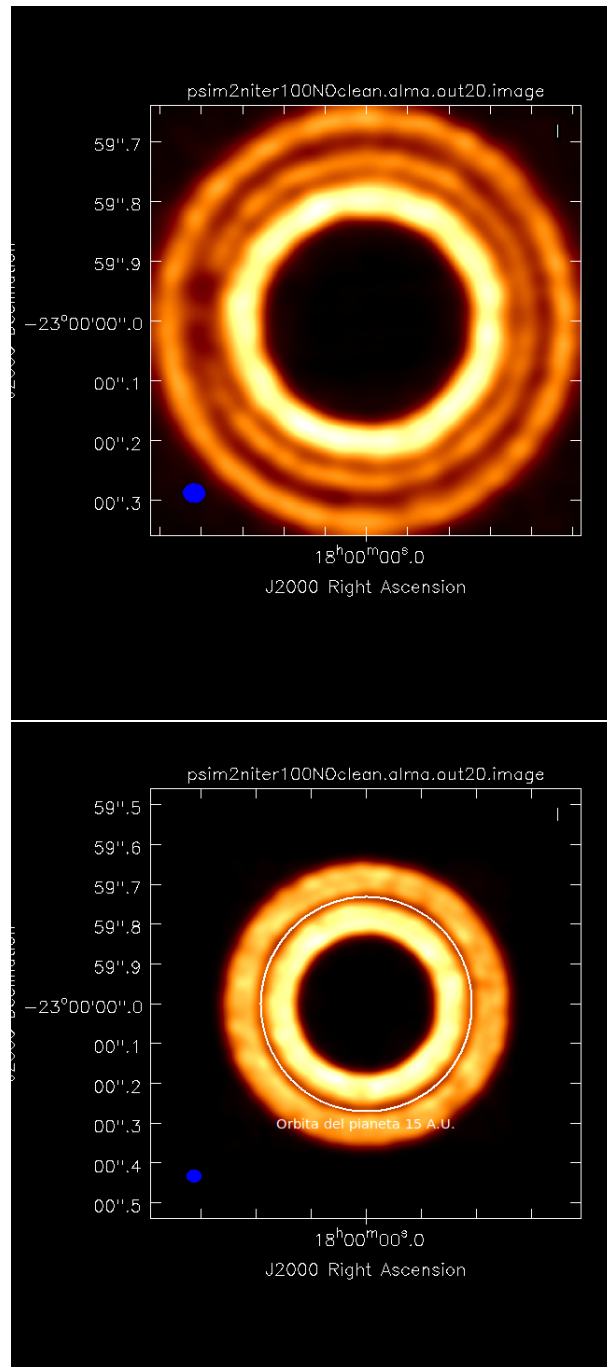
**Fig. 6.17:** *Flusso del disco di planetesimi in funzione della lunghezza d'onda e della massa del pianeta al suo interno.* Grani di dimensioni di circa qualche millimetro (e quindi flussi osservati ad analoghe lunghezze d'onda) sono più influenzati dinamicamente dal pianeta e, a causa di questa interazione, spiraleggiano verso il centro più velocemente rispetto a quanto farebbero grani di dimensioni minori. Tale effetto è anche dipendente dalla massa del pianeta. *In rosso* l'andamento del flusso del disco al cui interno c'è un pianeta con una massa di  $5 M_J$  mentre *in blu* il flusso dell'analogo disco per alle stesse lunghezze d'onda ma, stavolta, il pianeta ha una massa minore ( $1 M_J$ ).



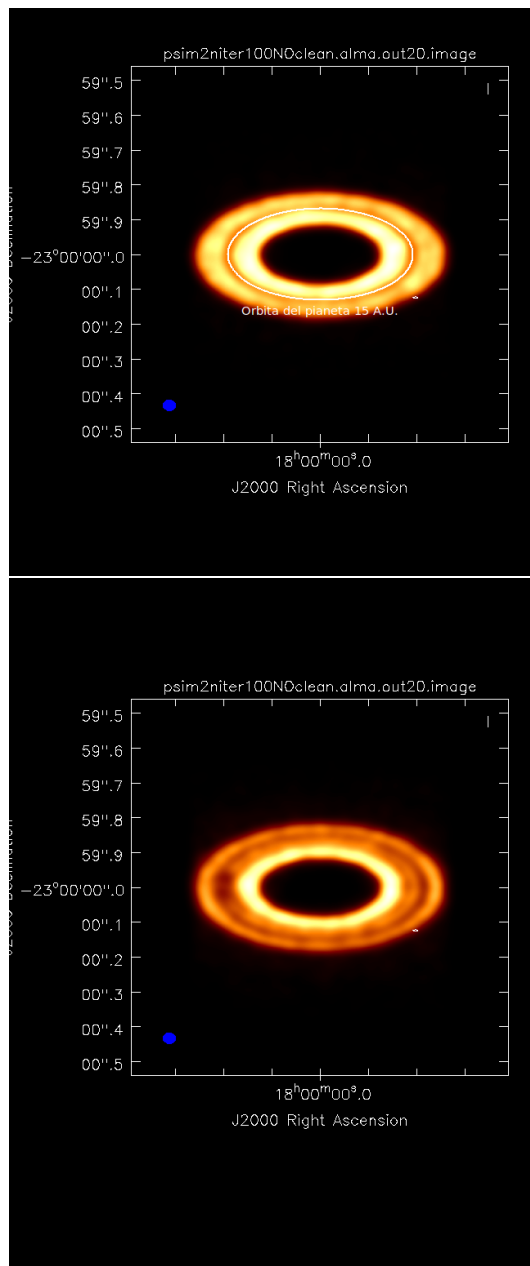
**Fig. 6.18:** *Simulazione di apertura di un gap in un disco fluido.* Si osserva come un pianeta ad una distanza di 1  $A.U.$  all'interno di un disco di gas genera, come nel caso corotante un gap in cui la densità di materia diminuisce drasticamente. Ciò è evidente nel profilo di densità radiale in cui si osserva una netta diminuzione della massa del disco all'interno di una zona con estensione ben definita. Si osserva come, anche in questo caso la dimensione di tale zona sia paragonabile a quella ricavata in questa tesi ( $3.5 R_H$ ). La differenza sostanziale è che, in questo caso, manca la coorte di materiale in risonanza 1 : 1 con il pianeta. In questo caso il pianeta non è in orbita controrotante e ciò che spopola la zona interessata è la viscosità del disco fluidodinamico, assente nel caso di un disco di planetesimi, e che genera una dissipazione del materiale da tale zona (Pringle, 1974). La simulazione è stata effettuata da Marzari che ha gentilmente permesso la sua pubblicazione in questo elaborato.



**Fig. 6.19:** *Simulazione di osservazione ALMA.* Si osserva come un disco di 20  $A.U.$  di dimensione posto ad una distanza di 70  $pc$  abbia una dimensione troppo ridotta per poter consentire di osservare la presenza o meno di una popolazione risonante di planetesimi all'interno del gap. Ma il gap è osservabile e, di conseguenza, si può determinare la presenza di un pianeta al suo interno. In basso a sinistra, in blu, la dimensione del synthesized beam di ALMA a 900  $GHz$  in configurazione 20.



**Fig. 6.20:** *Simulazione di osservazione ALMA.* In questo caso il disco con-  
 trorotante ha una dimensione di 20  $A.U.$  ed è posto ad una distanza di 30  $pc$   
 mentre nel caso del disco corotante la dimensione è di 100  $A.U.$  ed è posto ad  
 una distanza di 70  $pc$ . In basso a sinistra, in blu, la dimensione del syntetized  
 beam di ALMA a 700  $GHZ$ . E' possibile notare la presenza del gap nei due  
 casi e come esso risulti differente per la presenza di materiale in risonanza  
 1 : 1 nel caso corotante.



**Fig. 6.21:** *Simulazione di osservazione ALMA.* I due dischi simulati hanno un'inclinazione di 60 gradi rispetto la linea di vista dell'osservatore. La loro dimensione è analoga a quella dei dischi mostrati nella figura precedente. L'inclinazione comporta una diminuzione della dimensione del gap che adesso è visto in sezione. Ciò può sfavorire la corretta valutazione delle dimensioni del gap e conseguentemente della massa del pianeta ed anche l'identificazione di un disco corotante o controrotante. In basso a sinistra, in blu, la dimensione del beam di ALMA.





# Chapter 7

## Conclusioni

### Introduzione

In quest'ultimo capitolo vengono riassunti i risultati che abbiamo raggiunto e i possibili sviluppi futuri di questa tesi.

Utilizzando i risultati delle simulazioni numeriche abbiamo cercato di individuare il meccanismo che meglio descrive la migrazione planetaria tra: interazione a tre corpi, onde di densità e Dynamical Friction. Abbiamo concluso che tutte queste teorie, seppur ben descritte dai risultati numerici di questo elaborato e di altri articoli, non sono in grado di spiegare completamente i dati osservativi.

Abbiamo inoltre cercato di spiegare come la massa dei pianeti giochi un ruolo fondamentale, insieme all'inclinazione, nella variazione del semi-asse maggiore della loro orbita, giustificando quindi il risultato osservativo per cui: i pianeti in sistemi extrasolari a singolo pianeta hanno quasi tutti una massa maggiore a quella di Giove e presentano una distribuzione in semiasse maggiore bimodale. Uno dei due picchi è situato a distanza elevata dalla stella centrale ed è giustificabile, secondo i nostri risultati, con la bassa efficienza che la migrazione planetaria ha per questi pianeti massivi a causa della bassa densità del disco di planetesimi. Il secondo picco invece, quello posto a distanze minori può essere spiegato, viceversa, dall'alta densità del disco di planetesimi che aumenta il tasso di migrazione radiale dei pianeti. Inoltre l'assenza osservativa di pianeti di piccola massa in questi sistemi è spiegabile, sempre secondo questo lavoro, attraverso l'elevata efficienza che i dischi massivi hanno nel far decadere molto velocemente le orbite di pianeti di tipo terrestre. Infine abbiamo simulato osservazioni con l'interferometro ALMA e dimostrato che esse consentono di caratterizzare i pianeti all'interno dei dischi protoplanetari attraverso lo studio del gap che viene formato dall'interazione tra il pianeta ed i planetesimi. Nel caso il pianeta sia controrotante rispetto al disco di planetesimi esso genera un gap di dimensione minore (semiampiezza uguale a  $1 R_H$ ) rispetto al caso

corotante ( $3.5 R_H$ ) e non presenta la popolazione di planetesimi in risonanza 1 : 1. Questa caratteristica permette di identificare immediatamente pianeti in dischi corotanti da pianeti in dischi controrotanti.

## 7.1 Il problema dei tre corpi ristretto: la dispersione di velocità, l'apertura del gap e le risonanze orbitali

I risultati finora elencati possono essere interpretati come dovuti all'effetto dell'introduzione di un corpo perturbatore secondario (pianeta) che fa variare l'eccentricità di alcune zone particolari del disco di planetesimi in modo differente nel caso corotante e controrotante.

E' dunque possibile assimilare il disco di planetesimi ad un bagno termico a *temperatura* uguale a zero (nel caso di disco freddo corotante e controrotante) o massima<sup>1</sup> (nel caso di un disco caldo). Il pianeta invece è un bagno termico a temperatura maggiore che, riscaldando il disco, ne aumenta l'energia cinetica delle particelle. Nel caso di planetesimi senza massa il pianeta rimane in orbita circolare alla distanza iniziale e cede una quantità di energia ben precisa ai planetesimi tramite scattering gravitazionali. Essi però non potendo interagire gravitazionalmente con il pianeta in modo attivo ne sentono la gravità ma non ne modificano i parametri orbitali. In questo esempio il pianeta è visto come una fonte finita di energia termica che cede ai planetesimi fino a che non si instaura un equilibrio energetico oltre il quale essi non assorbono più energia. Tale equilibrio è giustificato dalla presenza di un limite nel valore della dispersione di velocità dei planetesimi ( $\sigma$ ). Quest'ultima è collegata con la temperatura dinamica del disco e, raggiungendo l'equilibrio, non fa variare nemmeno la temperatura del disco. Questo consente di trattare il problema dei tre corpi da un punto di vista statistico, utilizzando una statistica dell'equilibrio solo dopo un certo intervallo di tempo. Si definisce il valore dell'entropia in due modi distinti: partendo dalla dispersione di velocità nello spazio delle fasi e utilizzando il valore dell'eccentricità.

Come è possibile osservare, la massa del pianeta gioca un ruolo fondamentale nel calcolo della dispersione di velocità infatti essa è in relazione con la quantità di *energia* che il pianeta cede al disco di planetesimi. L'energia che il pianeta cede è ovviamente di tipo gravitazionale ed è legata ad una perdita di momento angolare che i planetesimi, invece, guadagnano andando a variare la loro distribuzione iniziale e dunque aumentando la loro dispersione di eccentricità. La variazione di tale quantità con la massa del pianeta ( $M_p$ ) è

---

<sup>1</sup>Il termine massimo in questo caso è dovuto alla definizione di temperatura dinamica che, nel caso bidimensionale con orbite perfettamente circolari, è massima quando la velocità media dei planetesimi che lo compongono è uguale a zero. Per far ciò si sono quindi inserite entrambe le componenti corotanti e controrotanti di planetesimi.

spiegata ricordando la definizione di dispersione di velocità che dipende dalla massa del pianeta tramite la quantità  $\mu$  (massa ridotta) che nel caso di un  $N$ -R3PB è semplicemente  $\mu = G \cdot M_{tot}$ . Poichè la relazione tra dispersione di velocità ed eccentricità non è lineare, si ha che un aumento di un ordine di grandezza nella massa, fa variare solo di un fattore due l'eccentricità.

Risolvendo il problema dei tre corpi, lo sviluppo dell'Hamiltoniana nel caso corotante e controrotante porta a risultati differenti quando si vuole calcolare il numero di risonanze e la loro posizione. Ricordando la condizione di risonanza:

$$|\Omega(r) - \Omega_p| = \frac{m}{n} \kappa(r), \quad (7.1)$$

dove  $\Omega_p$  è la velocità angolare del pianeta mentre  $\Omega(r)$  è la velocità angolare di un planetesimo a distanza  $r$  dal centro del disco,  $\kappa$  è la frequenza di epiciclo radiale dei planetesimi ed  $m$  ed  $n$  sono due numeri interi positivi per risonanze corotanti (negativi per risonanze controrotanti) (Morais e Guppione, 2010).

è possibile comprendere il seguente grafico in cui sono presenti sia una componente di planetesimi corotanti al pianeta, sia una componente controrotante allo stesso. Si nota come le orbite controrotanti siano più stabili rispetto a quelle corotanti. Figura 2: in figura è mostrato un grafico eccentricità-semiasse maggiore. E' possibile notare come le due differenti componenti descrivano differenti risonanze poste in differenti posizioni e con ampiezza in eccentricità differente. La diversa quantità di planetesimi in risonanza genererà un, seppur minimo, differente tasso di migrazione planetaria quando viene definita una massa per i planetesimi stessi.

E' inoltre possibile notare come, utilizzando un disco con un'unica componente ed integrando per un tempo di  $10^4$  anni è possibile notare nella figura ... come siano presenti delle zone in cui l'eccentricità delle particelle aumenti di molto (fino ad un valore costante di circa 0.1). Queste zone sono ben definite e, durante tutto il tempo dell'integrazione, non presentano ulteriori variazioni di ampiezza in eccentricità. Tali zone non sono dovute ad un particolare tipo di risonanza bensì sono, come noto dal problema dei tre corpi (capitolo due), le cosiddette *ali di Jacobi*, sono cioè quelle zone in cui la costante di Jacobi assume un particolare valore e costringe le particelle a rimanere vincolate su questa zona (figura tisserand map). L'asimmetria grafica delle *ali* permette di comprendere anche come esista una differenza nello scambio di momento angolare tra la parte interna ed esterna di un disco di planetesimi. Tale asimmetria è riscontrabile anche in un disco fluidodinamico (Golreich e Tremaine 1980; Ward, 1996) e più in generale è dovuta al fatto che i dischi hanno un profilo di velocità radiale con gradiente non nullo. La differente distribuzione in eccentricità, forma e numero di planetesimi che compongono le ali è uno dei motivi fondamentali che permette di comprendere il fenomeno della migrazione planetaria. Infatti ad

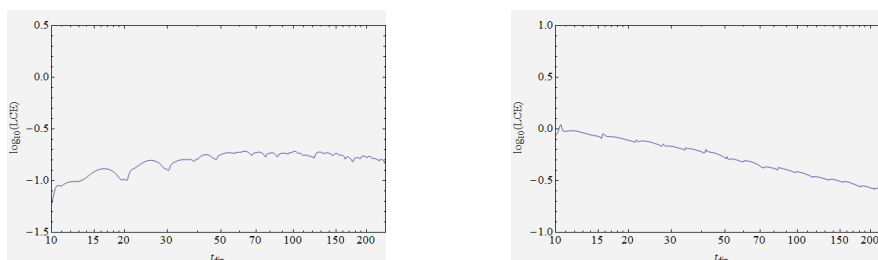
un'asimmetria di tale distribuzione corrisponde un'asimmetria nello scambio di momento angolare che i planetesimi cedono al pianeta. Dunque il momento torcente totale esercitato dalla parte interna ed esterna non è uguale ed opposto e quindi il pianeta subisce un guadagno netto di momento angolare che gli permetterà di migrare radialmente rispetto alla posizione iniziale. Dalle conclusioni analitiche e dalle simulazioni numeriche (Kirsh et al., 2009) si deduce che il risultato di tale interazione è una migrazione inward del pianeta e quindi il parametro più importante in questo tipo d'interazione è il numero di planetesimi che interagiscono fortemente con il pianeta. Esso è maggiore nell'ala esterna e favorisce una diminuzione del momento angolare del pianeta rispetto il guadagno dovuto allo scambio dello stesso con i planetesimi dell'ala interna garantendo così una lenta migrazione del pianeta verso l'interno del sistema. L'elevata eccentricità inoltre garantisce una veloce perdita di planetesimi nelle ali che, passando molto vicino al pianeta, vengono dispersi fino ad eccentricità maggiori di 1 e quindi, le ali, vengono spopolate del tutto.

Figura 3: grafico eccentricità-semiasse maggiore presenta. Il disco monocomponente freddo (orbite perfettamente circolari) con un pianeta posto a 5.0 A.U. presenta anche le *ali di Jacobi*, zone in cui la costante di Jacobi assume valori particolari. E' possibile notare come, rispetto all'ampiezza in eccentricità delle risonanze osservate, le ali di Jacobi presentino un valore di eccentricità che cresce fino a valori maggiori di 1. Nel tempo le particelle andranno ad interagire con il pianeta in modo così forte da essere dispersi (soggetti a fenomeni di *scattering* gravitazionale) su orbite aperte e, quindi, le ali vengono spopolate completamente. Si nota inoltre la differenza nella posizione delle risonanze che è anch'essa indicazione della natura asimmetrica del problema dei tre corpi rispetto l'asse di simmetria passante per il pianeta e che è una delle cause della migrazione dello stesso all'interno del disco di planetesimi.

Come notato nella figura 7.2, il gap formato all'interno del disco, altresì visibile in istogrammi di figure 7.4, è dovuto alla sovrapposizione di risonanze. Se infatti la distanza tra le singole risonanze, come detto, è una legge di potenze d'ordine  $3/2$ , allora, molto vicino al pianeta si formano delle risonanze la cui distanza è minore della loro stessa estensione (*libretion width*). Ogni risonanza  $n:m$  ha un'ampiezza diversa da zero e permette ai planetesimi non perfettamente posizionati alla distanza di risonanza di interagire in modo costruttivo così che le zone interessate hanno un'ampiezza in semiasse maggiore finita (Morbidelli, 2001). Tale processo genera orbite altamente caotiche che privano di planetesimi la zona vicina all'orbita del pianeta.

E' inoltre essenziale notare come nel caso di disco corotante e contro-rotante la popolazione di planetesimi in risonanze 1:1 non sia in entrambi i casi presente. Nel caso contro-rotante i planetesimi hanno una velocità relativa al pianeta sempre diversa da zero, anche nel caso in cui si è molto

vicini al pianeta stesso; nel caso corotante diminuendo la distanza con il pianeta i planetesimi entrano in risonanza con lo stesso e a non interagire con esso. Questo rende le orbite dei planetesimi vicino al pianeta corotante più instabili rispetto a quanto succede nel caso controrotante. La figura ... mostra l'evoluzione dell'Esponente Caratteristico di Lyapunov (*LCE: Lyapunov Characteristic Exponent*) per due orbite poste a circa  $2 R_H$  di distanza dal pianeta nei due casi di disco corotante e controrotante.



**Fig. 7.1:** *Esponente Caratteristico di Lyapunov.* A parità di condizioni iniziali sulla posizione e velocità di una particella di prova l'andamento dell'esponente caratteristico di Lyapunov nel caso di un disco corotante e controrotante è differente. L'andamento mostrato in figura è relativo a due particelle di prova poste ad una distanza di  $2 R_H$  dal pianeta.

Si osserva come la differenza tra gli andamenti dell'esponente di Lyapunov descrive una differenza nella stabilità delle orbite delle particelle di prova nei due casi.

Ciò è inoltre molto importante poiché il numero di interazioni forti (e cioè quelle che generano una diminuzione di planetesimi nelle vicinanze del pianeta), come detto, determina il tasso di migrazione del pianeta all'interno del disco. Infine l'estensione del gap nel caso corotante e controrotante non è identica e ciò permette di comprendere la natura non simmetrica del problema. Ciò è più evidente non solo nelle differenti condizioni di stabilità viste nel capitolo tre ma anche dalla figura descritta sotto in cui è presentato un istogramma del numero di particelle in funzione del semiasse maggiore delle stesse.

Riassumendo dunque si è compreso come:

- la presenza di un gap all'interno di dischi protoplanetari è dovuta alle interazioni gravitazionali con il pianeta;
- le dimensioni del gap sono collegate (anche se in modo differente nel caso corotante e controrotante) alla massa del pianeta;
- nel caso di un disco corotante l'estensione di questa zona *feeding zone* è dovuta alla sovrapposizione di risonanze (Widson, 1980; Morbidelli, 2001; Murray e Dermott, 1983), nella zona di sovrapposizione, i planetesimi sono soggetti ad orbite caotiche;

- la presenza di planetesimi in una zona in risonanza coorbitale (1 : 1) con il pianeta è dovuta alla bassa velocità relativa tra essi. Questa zona di stabilità permette di calcolare un ben definito valore dell'accrescimento di materiale sul pianeta;
- lo studio dell'Esponente Caratteristico di Lyapunov permette di capire come orbite stabili in risonanza, sovrapponendosi, diventino orbite caotiche che portano, nel tempo, a privare la zona interessata, di tutto il materiale presente.

I nuovi risultati trovati in questo lavoro di tesi sono:

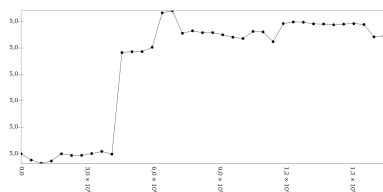
- nel caso di un disco controrotante il gap ha una dimensione caratteristica uguale alla sezione d'urto gravitazionale del pianeta ( $1 R_H$ );
- la differente dimensione di tale gap è ascrivibile alla creazione di differenti tipi di risonanze orbitali, rispetto al caso corotante;
- la minore dimensione del gap aumenta la zona di stabilità delle orbite dei planetesimi nel disco;
- l'assenza di planetesimi in una zona in risonanza coorbitale (1 : 1) con il pianeta è dovuta alla differente velocità relativa tra essi che, essendo sempre negativa, permette a tutti i planetesimi nel gap di accrescere o venir fortemente scatterati dal pianeta, cambia così il tasso di accrescimento di materiale rispetto al caso corotante;
- lo studio dell'entropia di Kolmogorov Sinai, della dispersione di velocità indotta dall'aumento dell'eccentricità e il valore quadratico medio dell'eccentricità nel tempo nel caso corotante confermano una maggiore stabilità delle orbite rispetto al caso corotante;
- lo studio del problema dei tre corpi attraverso l'esponente di Lyapunov consente di ridefinire tale problema solo *localmente* ergodico poiché l'orbita di una particella di prova non riempie densamente tutto lo spazio delle fasi concesso dal vincolo energetico: ciò è vero nel caso delle risonanze orbitali (orbite regolari) ma la sovrapposizione delle stesse fa tornare le orbite dei planetesimi, seppur in risonanza, in un regime caotico.

## 7.2 La migrazione

Abbiamo introdotto nella simulazione l'interazione tra planetesimi e pianeta generando così uno scambio di momento angolare tra il pianeta stesso ed i planetesimi. Nel caso corotante e controrotante è stato possibile osservare (in alcune simulazioni) una migrazione del pianeta verso l'esterno (*outward*

*migration*), in figura 7. è presentato un caso particolare. Mentre nel caso di disco con distribuzione di eccentricità alla Rayleigh è stato possibile osservare una migrazione verso l'interno (*inward migration*). I tassi di migrazione medi osservati sono in discreto accordo sia con le simulazioni riportate nell'articolo di Cionco e Brunini (2002) sia con i risultati analitici presentati in questa tesi.

Differenti sono invece le simulazioni effettuate per i casi di un disco freddo corotante e controrotante quando vengono introdotti un numero ridotto di planetesimi e una massa di poco minore di quella del pianeta. Viene riportata la variazione del semiasse maggiore nel tempo per un caso caratteristico in figura .....

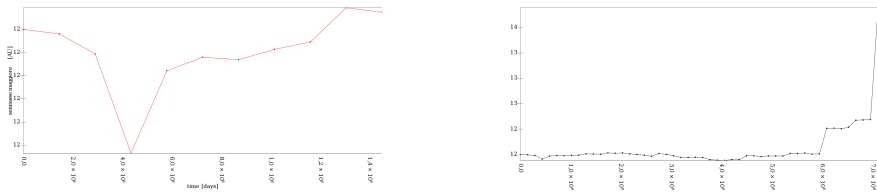


**Fig. 7.2:** *Variazione del semiasse maggiore del pianeta rispetto alla posizione iniziale.* Come è possibile osservare in questo caso si ha una prima variazione, quasi istantanea, del semiasse maggiore e poi una migrazione di tipo *stocastico* che dura per tutto il tempo d'integrazione.

Tale migrazione può esser definita di tipo stocastico (Kirish, 2007) in quanto, dopo un certo periodo di tempo, il semiasse maggiore dell'orbita del pianeta risulta rimanere quasi costante anche se si notano delle brusche variazioni dello stesso come in Ida et. al (2000). Questo tipo di migrazione stocastica è differente da quella introdotta in altri lavori (citati) nei quali è dovuta ad un comportamento realmente fisico del disco studiato. Aumentando inoltre il tempo d'integrazione delle simulazioni si è scoperto come tale configurazione non risulti essere stabile bensì presenti, come nel caso precedente, brusche variazioni di semiasse maggiore per il pianeta interagente all'interno del disco. Quanto detto è osservabile nella figura ....

Abbiamo osservato inoltre che, quando sono stati inseriti dei valori più realistici per la massa dei planetesimi: che ha come limite superiore quella calcolata nelle simulazioni precedenti (da  $1/600 M_p$  a  $1/60000 M_p$ ), un loro numero adeguato ( $4 \times 10^4$ ) ed un intervallo d'integrazione abbastanza lungo ( $3^4$  anni) il risultato atteso è stato del tutto differente.

Ciò è mostrato in figura .....e permette di essere compreso alla luce dei risultati sull'eccentricità e sulle risonanze ottenuti in precedenza. La presenza di differenti risonanze, posizionate anche a differente distanza dal pianeta, l'assenza di una zona di risonanza 1:1 che protegge molti planetesimi dall'interagire fortemente con il pianeta, la differente velocità relativa tra planetesimi e pianeta e il differente tipo di onde di densità che vengono



**Fig. 7.3:** *Variazione del semiasse maggiore del pianeta rispetto alla posizione iniziale per un disco controrotante.* Pianeta situato a  $5A.U.$  di distanza dalla stella centrale, disco di dimensioni  $10A.U.$  con  $10^4$  planetesimi con massa  $1/600$ -esimo della massa della Terra. Anche in questo caso si osserva un fenomeno analogo al caso precedente in cui il pianeta raggiunge una configurazione di equilibrio che perdura per quasi tutto il tempo d'integrazione. Ma tale configurazione di equilibrio risulta essere precaria, infatti continuando con l'integrazione si osserva una migrazione istantanea e veloce del pianeta all'interno del disco.

prodotte nel disco stesso, permette di comprendere le differenze osservate nelle due simulazioni.

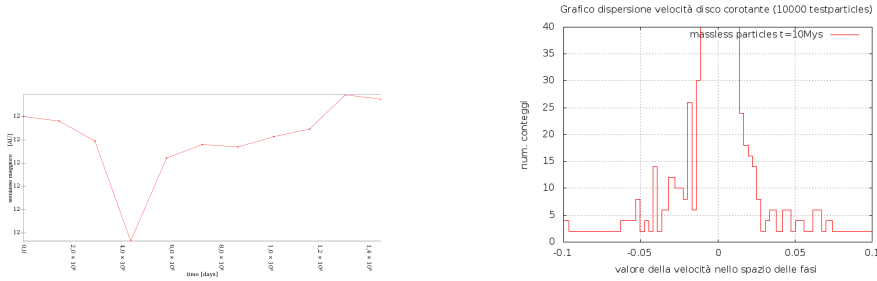
Nel caso infatti di un disco di planetesimi controrotante la velocità relativa tra i planetesimi ed il pianeta è tale da generare delle interazioni molto rapide e quindi lo scambio di momento angolare tra planetesimi e pianeta è molto basso. Ciò è confermato dalla differente distribuzione di velocità nel caso corotante e controrotante e viene riportata nella figura 7.10. Quando però si iniziano a formare le onde di densità all'interno del disco i singoli planetesimi si comportano come un'unica *corpo* macroscopico con una certa energia (o momento angolare) e l'effetto totale è la perdita repentina di momento angolare da parte del pianeta quando interagisce con l'onda stessa.

Anche se il numero di planetesimi è stato aumentato non sono però da escludere completamente che i risultati ottenuti in questa tesi siano dovuti anche al modesto numero di particelle (Kirsh e Levison, 2012) e al tempo d'interazione (capitolo cinque). Le simulazioni che presentano una direzione della migrazione verso l'esterno risultano ancora inspiegate e necessitano di ulteriori comprensioni.

E' riportata qui di seguito una tabella in cui sono presentati i tassi di migrazione media nei casi di disco freddo corotante e controrotante con una distribuzione di eccentricità di Rayleigh e gli analoghi con eccentricità uguale a zero per tutti i planetesimi.

Si osserva come il tasso medio di migrazione per il caso corotante e controrotante, quando l'eccentricità del disco di dei planetesimi è posta inizialmente uguale a zero, non risulta essere molto differente. La differente asimmetria nelle ali di Jacobi, la presenza o meno di risonanze e la diversa estensione giocano un ruolo fondamentale nel differente tasso di migrazione osservato in dischi corotanti e controrotanti. Invece una differenza significativa (di un





**Fig. 7.4:** *Differenze nel valore della velocità nello spazio delle fasi per il disco corotante e controrotante.* La distribuzione con meno picchi nel caso controrotante e la differente posizione delle risonanze nei due dischi consente di comprendere l'asimmetria del problema. Una quantità, seppur ridotta, di planetesimi nel caso controrotante ha infatti una velocità relativa, in modulo, maggiore rispetto quella nel caso corotante e quindi l'interazione con il pianeta e di tipo impulsivo. Questo genera una perdita di momento angolare per il pianeta minore.

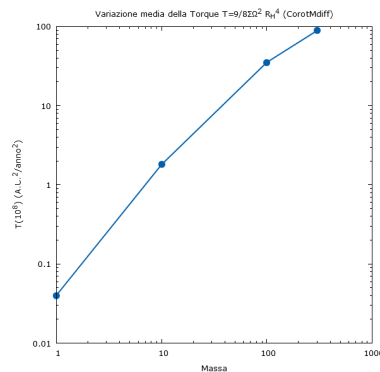
Massa del pianeta	$\langle da/dt \rangle \times 10^6$ [A.U./anno]	Distribuzione dell'eccentricità	inclinazione d
100	6.81	0	180
-	8.03	0	0
-	6.03	R	180
-	12.07	R	0

**Table 7.1:** *Tasso di migrazione radiale medio.* In tabella è descritta, per pianeti con la stessa massa ( $M_p = 100 M_\oplus$ ), e con stesso semiasse maggiore iniziale (5 A.U.), la variazione media del semiasse maggiore nel tempo per sistemi corotanti per i quali l'inclinazione tra il pianeta ed il piano equatoriale del disco di planetesimi è di 0 gradi, controrotanti (l'inclinazione del pianeta è di 180 gradi) con distribuzione di eccentricità alla Rayleigh (R) od uguale a zero (0).

fattore due) è presente quando si inserisce una distribuzione di eccentricità alla Rayleigh per i due dischi di planetesimi. Questo risultato sottolinea:

- l'importanza che l'eccentricità ha nel favorire la migrazione di un pianeta nel caso corotante;
- l'indipendenza dall'aggiunta di una distribuzione di eccentricità per il tasso di migrazione medio nel caso controrotante;
- la differenza, a parità di distribuzione di eccentricità, che ha l'inclinazione del pianeta rispetto al piano equatoriale del disco di planetesimi.

La nostra conclusione è che a parità di massa, numero di planetesimi, densità superficiale del disco, posizione iniziale del pianeta e tempo d'integrazione, dischi protoplanetari con pianeti controrotanti sono meno efficienti nel trasferire momento angolare dal pianeta sul disco. Una teoria sulla migrazione planetaria deve tener presente non solo della distribuzione in eccentricità dei planetesimi ma anche della distribuzione in inclinazione degli stessi. Inoltre, uno dei risultati fondamentali è che, a parità di massa del pianeta, posizione iniziale ed inclinazione, la densità superficiale del disco ne modifica l'andamento medio del semiasse maggiore nel tempo. In figura .... è presentato quanto appena detto per una particolare configurazione di massa ( $M = 1 M_J$ ), numero di planetesimi ( $10^4$ ) e rapporto di massa variabile (da  $1/600 M_p$  a  $1/60000 M_p$ ).



**Fig. 7.5:** *Differenze nel tasso di migrazione orbitale medio in funzione del numero di planetesimi.* Il differente valore della densità del disco di planetesimi, a causa del differente rapporto tra la massa del pianeta e quella dei singoli planetesimi permette di osservare una netta diminuzione della variazione, circa lineare, del semiasse maggiore del pianeta.

Tablelle delle torque !!!!!

Le teorie analitiche proposte in questa tesi quindi devono tener conto di tali risultati. Nello specifico:

- il metodo della DF utilizzato negli articoli di Del Popolo (e trattato in questa tesi nel capitolo tre) introduce la dipendenza funzionale dalla distribuzione di eccentricità del disco di planetesimi ma non nell'inclinazione del pianeta rispetto al disco né sul differente peso che le risonanze possiedono nell'interagire con il pianeta togliendo momento angolare. Inoltre i vari metodi con cui è possibile calcolare il logaritmo di Coulomb e i differenti valori che possono essere ottenuti genera di per se un finetuning all'interno del metodo che, grazie a questa costante, può essere portato a riprodurre i dati numerici ottenuti (Bontekoe e van Albada, 1986);
- la teoria sulle onde di densità, proposta nel capitolo due, descrive accuratamente l'interazione che le risonanze hanno con il pianeta ma non descrive la dipendenza dell'inclinazione del pianeta rispetto al disco di planetesimi, inoltre in regime lineare, il momento torcente ricavato con questa teoria è in disaccordo, anche di un ordine di grandezza, rispetto quello ottenuto dalle simulazioni numeriche (Cionco e Brunini, 2002);
- la variazione del semiasse maggiore calcolata con il metodo dei tre corpi generale non tiene conto né della distribuzione in eccentricità dei planetesimi né dell'inclinazione del pianeta rispetto al disco ma permette una buona corrispondenza tra dati osservativi e numerici (Rein et al., 2010).

### 7.3 ALMA

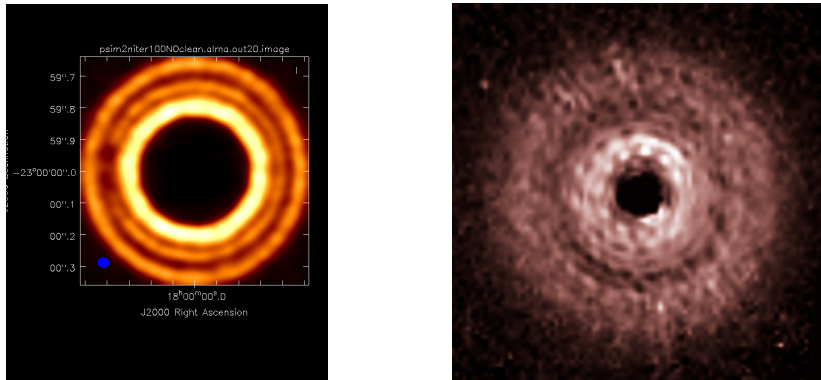
Infine con lo strumento di nuova generazione ALMA è possibile confermare o meno tali teorie e, utilizzando le task di simulazione del software CASA (simulatore di osservazioni ALMA) è stato possibile confrontare il modello con i dati osservativi ed osservare, grazie all'elevata risoluzione garantita da ALMA, la struttura dei nostri dischi protoplanetari con un dettaglio minimo (circa 0.004 arcsec a 900 GHz) tale da risolvere correttamente i gap formati dall'interazione tra il disco ed un pianeta al loro interno di massa gioviana con semiasse maggiore di 15  $A.U.$  dal centro del sistema e posti fino a distanze di 70  $pc$  rispetto l'osservatore. Quanto detto è presentato in figura 7... nella quale, tramite lo studio del profilo di brillantezza radiale (condotto con l'utilizzo della routine CASAvier<sup>2</sup>) è possibile determinare l'esistenza e le caratteristiche del gap all'interno in un disco protoplanetario. Questo risultato è importante e ci ha permesso di dare, oltre che alla ricerca nell'immagine, della posizione del gap anche un secondo metodo più formale per determinarne dimensione, posizione e l'estensione.

Inoltre la caratterizzazione tramite singola immagine di un disco di planetesimi ci ha consentito, se il disco ha una dimensione di almeno 100  $A.U.$ ,

---

<sup>2</sup>Routine di visualizzazione ed analisi immagini fornita all'interno del software CASA.

di distinguere un pianeta controrotante o corotante rispetto alla direzione di rotazione del disco in cui si è formato. Ciò è in parziale accordo con la letteratura (Wolf et Klahr, 2002; Wolf e D'Alessio, 2005) che osservano gap a distanze due volte maggiori ( $150 pc$ ). La differenza è dovuta ai differenti meccanismi di emissione che i dischi di planetesimi possiedono (emissione da grani di polvere) rispetto quelli presenti all'interno di dischi gassosi (riscaldamento e raffreddamento molecolare, accrescimento sulla stella centrale e sul pianeta, riscaldamento indotto dalla stella centrale). Queste differenze consentono di spiegare sia la scelta della banda di osservazione (nel millimetrico infatti l'emissione è dovuta principalmente alla componente polverosa del disco) sia il più basso flusso iniziale inserito all'interno delle nostre simulazioni ( $0.1 Jy$  rispetto, per esempio, a  $0.4 Jy$  per il disco di  $\beta Pictoris$ ). Infine una futura estensione di tale lavoro è quella di applicaere ad un caso reale i modelli finora trattati. In figura 7... è infatti proposto il nostro modello a confronto con il disco protoplanetario TW Hydrae osservato dal telescopio spaziale Hubble (Debes et al., 2013). La distanza ( $50 pc$ ) e le dimensioni fisiche (circa  $100 A.U.$ ) ne fanno uno dei primi e migliori candidati per l'applicazione del modello di disco proposto in questo elaborato ad un caso reale.



**Fig. 7.6:** *Confronto tra un disco reale ed uno simulato.* Il disco della stella TW Hydrae posto ad una distanza di  $50 pc$  dal Sistema solare è confrontato con il disco corotante simulato nella tesi. La semplicità del modello numerico consente comunque di apprezzare la somiglianza tra i due dischi protoplanetari. Inoltre l'estesa dimensione del gap  $21 A.U.$  consente di calcolare la massa di un pianeta (circa  $40 M_{\oplus}$ ) non osservabile situato al suo interno.

## 7.4 Sviluppi futuri

Come è stato possibile osservare in questo elaborato, il problema della migrazione planetaria in un disco di planetesimi può essere affrontato in molti

modi e rappresenta una sfida sia dal punto di vista numerico che dal punto di vista analitico.

Si è cercato di mettere in risalto i possibili aspetti fondamentali e regolatori di tale meccanismo quali:

- La densità di particelle ed il profilo di densità superficiale del disco;
- la massa totale del disco;
- la direzione di rivoluzione del disco rispetto al pianeta;
- le differenti eccentricità nel caso corotante e controrotante;
- la differenza nel caso di un disco con distribuzione di eccentricità alla Rayleigh e freddo;
- l'asimmetria nel calcolo della momento torcente interna ed esterna al disco;
- la differente estensione del gap nei casi corotante e controrotante;
- l'interazione collettiva dei planetesimi.

Quello che ancora rimane da comprendere è come questi meccanismi in effetti regolino efficacemente l'interazione con il pianeta quando, ad esempio, il disco sia anch'esso gravitazionalmente interagente (e quindi i planetesimi possano interagire tra loro), cosa accada quando s'inserisca anche la componente gassosa nel disco e come essa vari il rate di migrazione del pianeta e le risonanze osservate, per tempi d'integrazione molto lunghi ( $10 \times 10^9$  anni) e soprattutto quando vengono inseriti anche altri pianeti all'interno di tale scenario.

Tutti questi fenomeni varieranno in modo sostanziale i risultati di questa tesi ma alcuni di essi possono essere già presi in considerazione almeno da un punto di vista qualitativo.

E' infatti possibile attenersi ai risultati di Cionco e... per quanto riguarda un disco in cui c'è una componente gassosa, essi infatti hanno modificato il codice utilizzato in questa tesi inserendo anche le equazioni della fluidodinamica. I risultati sono...

L'interazione tra planetesimi è qualcosa di ancora controverso e non permette una facile comprensione (cit...).

L'interazione con altri pianeti invece può essere descritta in termini di scattering pianeta pianeta (come già fatto nel paragrafo... del capitolo due) e tramite i risultati numerici di Armitge e Richardson (2005) che descrivono  
.....



# Bibliography

- A. Morbidelli A. Bromley, F. Masset. Long range outward migration of giant planets with application to Fomalhaut b. *astro-ph.EP*, 2009.
- H.R. Viturro R. G. Cionco A. Brunini, P. J. Santamaria. On the number of particles in N-body simulations of planet-disk interaction. *Planetary and Space Science*, 2007.
- E. Spedicato A. Del Popolo and E. N. Ercan. Kuiper Belt evolution due to dynamical friction. *Astronomy and Astrophysics*, 1999.
- P. J. Armitage. Astrophysics of planet formation. *Cambridge*, 2010.
- S. J. Kenyon B. C. Bromley. Migration of planets embedded in a circumstellar disk. *astro-ph.EP*, 2011.
- S. J. Kenyon B. C. Bromley. Migration of small moons in Saturn's rings. *astro-ph.EP*, 2013.
- J. Binney. Dynamical friction in aspherical clusters. *Mon. Not. R. astr. Soc.*, 1977.
- B.V.Chirikov. A universal instability of many-dimensional oscillator systems. *Phys. Rep. 52*, 1979.
- M. Duncan C. C. Capobianco and F. Levison. Planetesimal-driven Planet Migration in the Presence of Gas Disk. *astro-ph-EP*, 2010.
- S. Chandrasekhar. Stochastic Problems in Physics and Astronomy. *Reviews of Modern Physics*, 1943.
- R. G. Cionco and A. Brunini. Orbital migrations in planetesimal disks: N-body simulations and the resonant dynamical friction. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 2002.
- L. Ciotti. Dynamical Friction from field particles with a mass spectrum. American Institute of Physics Conference Series, 2010.
- C.J. Clarke and G. Lodato. Limits on the location of planetesimal formation in self-gravitating protostellar discs. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 2009.

- R. Brasser D. R. Kirsh, M. Duncan and H. F. Levison. Simulations of planet migration driven by planetesimal scattering. *Icarus*, 2008.
- K. J. Donner and B. Sundelius. Dynamical Friction in Disc Galaxies. *MNRAS*, 1993.
- J. R. Donnison and I. P. Williams. THE STABILITY OF COPLANAR THREE-BODY SYSTEMS WITH APPLICATION TO THE SOLAR SYSTEM. *Celestial Mechanics*, 1983.
- J.R. Donnison. The Hill stability of inclined small mass binary systems in the three-body systems with special application to triple star systems, extrasolar planetary systems and Binary Kuiper Belt systems. *Planetary and Space Science*, 2010.
- A.E. Roy G. B. Valsecchi, A. Carusi. THE EFFECT OF ORBITAL ECCENTRICITIES ON THE SHAPE OF THE HILL-TYPE ANALYTICAL STABILITY SURFACES IN THE GENERAL THREE-BODY PROBLEM. *Celestial Mechanics*, 1983.
- N. Georgakarakos. Stability criteria for hierarchical triple systems. *Celestial Mech Dyn Ast-Review Article*, 2008.
- G. Gladman. Dynamics of systems of two Close Planet. *Icarus*, 1993.
- P. Goldreich and S. Tremaine. DISK-SATELLITE INTERACTIONS. *The Astronomical Journal*, 1980.
- N. Haghighipour. Dynamical friction and resonance trapping in planetary systems. *MNRAS*, 1999.
- J. M. Hahn and R. Malhotra. ORBITAL EVOLUTION OF PLANETS EMBEDDED IN A PLANETESIMAL DISK. *The Astronomical Journal*, 1999.
- M. Henon and J-M. Petit. SERIES EXPANSIONS FOR ENCOUNTER-TYPE SOLUTIONS OF HILL'S PROBLEM. *Celestial Mechanics*, 1986.
- S. Ida. Stirring and dynamical friction rates of planetesimals in the solar gravitational field. *ICARUS*, 1990.
- Lin D.N.C. Ida S., Bryden G. and Tanaka H. Orbital Migration of Neptune and Orbital Distribution of Trans-Neptunian Objects. *apj*, 2000.
- Makino J. Ida S. N-body simulation of gravitational interaction between planetesimals and a protoplanet. II - Dynamical friction. *Icarus*, 1992.
- J.J. Lissauer and G.R. Stewart. Growth of planets from planetesimals. In *Protostars and Planets III*, 1993.



- C. Marchal and G. Bozis. HILL STABILITY AND DISTANCE CURVES FOR THE GENERAL THREE-BODY PROBLEM. *Celestial Mechanics*, 1990.
- M.D. Melita and M.M. Woolfson. Planetary commensurabilities driven by accretion and dynamical friction. *MNRAS*, 1996.
- M.H.M. Morais and C.A. Giuppone. Stability of prograde and retrograde planets in circular binary systems. *astro-ph.EP*, 2012.
- P. D. Nicholson. Planetary Rings. *ASPC*, 1999.
- K. Ohtsuki and H. Emori. Local N-body simulations for the distribution and evolution of particle velocities in planetary rings. *The Astronomical Journal*, 1999.
- A. Del Popolo. Planetary migration in protoplanetary disks. *astro-ph*, 2003.
- R. R. Rafikov. Planetesimal disk evolution driven by embryo-planetesimal gravitational scattering. *astro-ph*, 2002.
- R. R. Rafikov. DYNAMICAL EVOLUTION OF PLANETESIMALS IN PROTOPLANETARY DISKS. *astro-ph-EP*, 2003.
- H. Rein and J. C. B. Papaloizou. Stochastic orbital migration of small bodies in Saturn's rings. *astro-ph.EP*, 2010.
- E. Kokubo S. Ida and K. Makino. The origin of anisotropic velocity dispersion of particles in a disc potential. *MNRAS*, 1993.
- P. J. Armitage S. N. Raymond and N. Gorelick. PLANET-PLANET SCATTERING IN PLANETESIMAL DISKS. *The Astronomical Journal*, 2009.
- P. J. Armitage S. N. Raymond and N. Gorelick. PLANET-PLANET SCATTERING IN PLANETESIMAL DISKS II. PREDICTIONS FOR OUTER EXTRASOLAR PLANETARY SYSTEMS. *The Astronomical Journal*, 2010.
- H. Salo and C.F. Yoder. The dynamics of coorbital satellite systems. *Astronomy and Astrophysics*, 1987.
- G. R. Stewart and G. W. Wetherill. Evolution of planetesimal velocities. *ICARUS*, 1988.
- T. Takeuchi T. Muto and S. Ida. ON THE INTERACTION BETWEEN A PROTOPLANETARY DISK AND A PLANET IN AN ECCENTRIC ORBIT: APPLICATION OF DYNAMICAL FRICTION. *ApJ*, 2011.
- R.M. Thorne. An Estimate of the Enhancement of Dynamical Friction by Stellar Co-Operative Effects. *ApJ*, 1968.

- D. Veras and P. J. Armitage. The Dynamics of Two Massive Planets on Inclined Orbits. *astro-ph*, 2004.
- W. R. Ward. Protoplanet Migration by Nebula Tides. *Icarus*, 1996.
- J. Wisdom. THE RESONANCE OVERLAP CRITERION AND THE ONSET OF STOCHASTIC BEHAVIOR IN THE RESTRICTED THREE-BODY PROBLEM. *The Astronomical Journal*, 1980.
- J.E. Pringle P.J. Armitage W.K.M. Rice, G. Lodato and I.A. Bonnell. Accelerated planetesimal growth in self-gravitating protoplanetary discs. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 2002.
- S. Wolf and G. D'Alessio. On the Observability of Giant Protoplanets in Circumstellar Disks. *The Astronomical Journal*, 2005.
- N. Georgakarakos J. R. Donnison X. Liu, H. Baoyin and X. Ma. The Hill stability of triple minor planets in the Solar System. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 2012.

## Appendix A

# Il generatore di condizioni iniziali

Il codice SWIFTER non possiede, al suo interno, una routine per generare delle condizioni iniziali ottimali per lo studio del problema definito in questa tesi. E' stato dunque realizzato dal candidato, in linguaggio JAVA un programma che permettesse di creare un file di dati in input leggibile dal programma di integrazione numerica.

Viene qui di seguito riportato.

```
import java.io.*;
import java.util.*;

class initial_CONTIDION_massiveplanetesimal {
    public static void main (String args[]) {
int iniziale, incremento, finale, no3D;
        double a, b, tot, afin, ain, PMass, SunMass, Eccentricity, eccHill, M, n, Pi, Ra
        no3D = 0;
        Rplanet=0.0001; // 15000 km in unità astronomiche
        Rtest=0.0000002; // 30 km di dimensione
        b=12.0; // planet position
        a=10.0; // planetesimal position is a(i)
        ain=10.0;
        afin=20.0;
        M=0.;
        Eccentricity=0.01; //se calcolo e_H per un disco di planetesimi esso è = Rhill/a
        iniziale = 1; /*ID FIRST PARTICLE*/
        finale = 10000; /*ID LAS PARTICLES:it's the number of particles*/
        Pi = Math.acos(-1); // è lo stesso risultato che scrivere Math.PI;
        incremento = 1; /*step*/
        PMass=9.0E-10; //la massa della terra=9e-10
        TestMass=3.0e-12; // 1/600 Planet mass
```

```

SunMass=2.959139768995959E-04;

try
{
    FileOutputStream file = new FileOutputStream("prova.in"); /*name of the new file
    PrintStream Output = new PrintStream(file);
Output.println(" 10002" ) ;
Output.println(" 111111 2.959139768995959E-04" ) ;
Output.println("  .0 .0 .0" ) ;
Output.println("  .0 .0 .0" ) ;

Rapporto = (PMass/(3*SunMass)) ;
RHill = b*(Math.cbrt(Rapporto)) ;

Output.println(" 1111112 "+PMass+" "+RHill+" ");

M = ((Math.random()*(Math.acos(-1)*2));

Output.println(" "+ b*(Math.cos(M)) +" "+ b*(Math.sin(M)) +" "+ no3D);

Arg = (SunMass+PMass)/(Math.pow(b,3));
n = Math.sqrt(Arg);

Output.println(" "+ -n*b*Math.sin(M) +" "+ +n*b*Math.cos(M) +" "+ no3D) ;

// INIZIO IL CICLO PER I PLANETESIMI

    for (iniziale=1; iniziale <= finale;iniziale++)
    {

eccHill = 0.00002;      //Eccentricity/Rapporto;

Rap = (TestMass/(3*SunMass)) ;
RHillTest = b*(Math.cbrt(Rap)) ;

Output.println(" "+iniziale+"1 "+TestMass+" ") ;

Random generator = new Random();

ecc = Math.sqrt(-eccHill*Math.log(1-generator.nextDouble()));

M = ((Math.random()*(Math.acos(-1)*2));

```

```

E = M+(ecc-Math.pow(ecc,3)/8)*(Math.sin(M))+0.5*Math.pow(ecc,2)*(Math.sin(2*M))+(3/8
Output.println(" "+ a*(Math.cos(E-ecc)) +" "+ a*(Math.sqrt(1-Math.pow(ecc,2)))*(Math

        Arg = (SunMass+TestMass)/(Math.pow(a,3));

n = Math.sqrt(Arg); /*mean motion*/

Output.println(" "+ -(n*a*Math.sin(E))/(1-ecc*Math.cos(E)) +" "+ (n*a*Math.sqrt(1-Ma

tot = (afin-ain)/finale;

a = a + tot*incremento; /*semimajor axes: linear distribution of test particles: one
    }
}
    catch (IOException e) {
        System.out.println("Errore: " + e);
        System.exit(1);
    }
}
}
}

```

La flessibilità di tale generatore di condizioni iniziali permette di generare degli input di dati anche per altri software di integrazione numerica quali la versione OPEN-MP (Cabobianco et al. 2010) o la versione in cui è inserita anche l'effetto della migrazione indotta dal gas sul pianeta (Cabobianco et al. 2010).



## Appendix B

# Le routine numeriche

Vengono qui definite le varie routine numeriche che sono state utilizzate per generare le immagini nel capitolo tre della tesi.

### B.0.1 L'integrazione del problema dei tre corpi ristretto

Sono presentati due codici il primo ha un integratore che è quello con cui, di default MATHEMATICA integrale le equazioni differenziali, nel secondo caso è stato realizzato un codice più semplice che permettesse di richiamare i differenti algoritmi che sono stati utilizzati per la scelta delle integrazioni numeriche delle orbite in risonanza vicino al pianeta e per lo studio dell'Esponente Caratteristico di Lyapunov.

Definizione delle variabili, delle equazioni del moto e calcolo della posizione dei punti lagrangiani:

```
Urule=U->(1-mu)/r1+mu/r2+0.5(x[t]^2+y[t]^2);
rrule={r1->Sqrt[(mu+x[t])^2+y[t]^2],
r2->Sqrt[(-1+mu+x[t])^2+y[t]^2]};
(eq1=D[U/.Urule/.rrule,x[t]]==0)//TraditionalForm
(eq2=D[U/.Urule/.rrule,y[t]]==0)//TraditionalForm

{L[4],L[5],L[3],L[2],L[1]}=
{eq1,eq2}/.mu->0.5//
NSolve[#, {x[t],y[t]}]&;
{L[4],L[5],L[3],L[2],L[1]}//
ColumnForm

CLpt=L[#]&/@Range[5];
{x[t],y[t]}/.{L[4],L[5],L[3],L[2],L[1]}//
TableForm[#,TableHeadings->{"L[4]","L[5]","L[3]","L[2]","L[1]"},
{x[t],y[t]}]&
```

```

r1==r2==1/.rrule/.L[4]/.mu->0.5

(*definisce i punti lagrangiani*)
Lgraph=
Graphics[
  {{PointSize[0.02],Hue[0.4],
  Map[Point,{x[t],y[t]}/.CLpt]},
  Text[Subscript[L, #],{x[t],y[t]-0.15}/.
  CLpt[#]]&/@Range[5]}}];

(*Scrivo "massa" nella posizione voluta*)
equilateral=
Graphics[
  {PointSize[0.02],Point[{-0.5,0}],
  Point[{0.5,0}],
  Text["massa 1",{-0.5,0.1}],
  Text["massa 2",{0.5,0.1}]
  }]

(*DISEGNA ENTRAMBI*)

Show[Lgraph,equilateral,
AspectRatio->Automatic]

jacobi=C==-(x'[t]^2+y'[t]^2)+2U/.Urule

(*SUPERFICI DI VELOCITÀ NULLA*)
jacGC=ContourPlot[
2U/.Urule/.rrule/.mu->0.5//
Evaluate,
{x[t],-2,2},{y[t],-2,2},
Contours->Range[3.00,4.00,0.2],
ContourShading->None,
PlotPoints->66,ContourStyle->Blue,
DisplayFunction->Identity];

r=Show[jacGC,Lgraph,equilateral,
DisplayFunction->${DisplayFunction},
ImageSize->700]

Export["jacobi.jpg",r]

```



Integrazione delle equazioni del moto:

```
Needs["DifferentialEquations`NDSolveProblems`"];
Needs["DifferentialEquations`NDSolveUtilities`"];

PMotion[mu1_, {x0_, y0_, vx0_, vy0_}, tmax_, step_: 10000] :=
Module[{rrule, Urule, eqMotion, r1, r2, mu, U},
rrule={r1->Sqrt[(mu+x[t])^2+y[t]^2],
r2->Sqrt[(-1+mu+x[t])^2+y[t]^2]};
Urule={U->(1-mu)/r1+mu/r2+0.5(x[t]^2+y[t]^2)};

eqMotion=
{x'[t]-2y'[t]==D[U/.Urule/.rrule,x[t]],
y'[t]+2x'[t]==D[U/.Urule/.rrule,y[t]}};
NDSolve[{eqMotion/.mu->mu1,x[0]==x0,
y[0]==y0,x'[0]==vx0,y'[0]==vy0}//
Flatten,{x,y},{t,0,tmax},
MaxSteps->step]//Flatten]

Mgraph[fx_,fy_,t_,tfinal_,Opts___]:=
ParametricPlot[{fx[t],fy[t]}//Evaluate,
{t,0,tfinal},
Opts,
AspectRatio->Automatic,
DisplayFunction->Identity];
Protect[PMotion,Mgraph];

Clear["Global`*"];

u=0.5;
x0= 0.01;
y0= 0.0001;
vx0= 0.038;
vy0= 0.02;
tfin=40.;

sol=PMotion[u,{x0,y0,vx0,vy0},tfin,500000];
fx[t_]:=x[t]/.sol;
fy[t_]:=y[t]/.sol;

pt1=Mgraph[fx,fy,t,tfin,
PlotPoints->100,
PlotStyle->Black,
Epilog->{
```

```

{
AbsolutePointSize[7], Hue[0.7],
Text["!\(\(*SubscriptBox[\(M\), \((1\)]\)\)",{-0.48,-0.04}],
Text["!\(\(*SubscriptBox[\(M\), \((2\)]\)\)",{0.53,-0.07}],
Point[{-0.5,0}],Point[{0.5,0}]
}
,
{
AbsolutePointSize[7],Hue[0.3],
Point[{x0,y0}],
Text["!\(\(*SubscriptBox[\(x\), \((0\)]\)\),!\(\(*SubscriptBox[\(y\), \((0\)]\)\)",{x0,y0+0.
}
,
DisplayFunction->$DisplayFunction,
ImageSize->700]

(*Export["solomoto.jpg",pt1]*)

Urule=U->(1-mu)/r1+mu/r2+0.5(x[t]^2+y[t]^2);
rrule={r1->Sqrt[(mu+x[t])^2+y[t]^2],
r2->Sqrt[(-1+mu+x[t])^2+y[t]^2]};
(eq1=D[U/.Urule/.rrule,x[t]]==0)//TraditionalForm ;
(eq2=D[U/.Urule/.rrule,y[t]]==0)//TraditionalForm ;

{L[4],L[5],L[3],L[2],L[1]}=
{eq1,eq2}/.mu->u//
NSolve[#, {x[t],y[t]}]&;
{L[4],L[5],L[3],L[2],L[1]}//ColumnForm ;

CLpt=L[#]&/@Range[5];
{x[t],y[t]}/.{L[4],L[5],L[3],L[2],L[1]}//
TableForm[#,TableHeadings->{"L[4]","L[5]","L[3]","L[2]","L[1]"},
{x[t],y[t]}]& ;

(*DISEGNA I PUNTI*)
Lgraph=
Graphics[
{{PointSize[0.01],RGBColor[1,0,0],
Map[Point,{x[t],y[t]}/.CLpt]},
Text[Subscript[L, #],{x[t]-0.04,y[t]}/.
CLpt[[#]]&/@Range[5]}}];
jacobi=J==-(x'[t]^2+y'[t]^2)+2U;
T=(jacobi/.Urule/.rrule/.mu->u/.y[t]->y0/.x'[t]->vx0/.x[t]->x0/.y'[t]->vy0)[[2]]

```

```

cont=ContourPlot[2U/.Urule/.rrule/.mu->u//
Evaluate,
({x[t],-1.5,1.5},{y[t],-1.5,1.5},
ContourShading->False,
AspectRatio->Automatic,
Contours->{T}
,PlotPoints->100,
Epilog->{{AbsolutePointSize[7],Hue[0.7],
Text["!\(\*SubscriptBox[\(M\), \(\1\)]\)\"},{-0.48,-0.04}],
Text["!\(\*SubscriptBox[\(M\), \(\2\)]\)\"},{0.53,-0.07}],Point[{-0.5,0}],Point[{0.5,0}],
{AbsolutePointSize[7],Hue[0.3],Point[{x0,y0}]},
["!\(\*SubscriptBox[\(x\), \(\0\)]\)\",!\(\*SubscriptBox[\(y\), \(\0\)]\)\"},{x0,y0+0.06}],
,DisplayFunction->$DisplayFunction,ImageSize->700];
ev=2U/.Urule/.rrule/.mu->u//Evaluate;
region=RegionPlot[
ev<T,{x[t],-1.5,1.5},{y[t],-1.5,1.5},
AspectRatio->Automatic,PlotPoints->100,
Epilog->{{AbsolutePointSize[7],Hue[0.7],
Text["!\(\*SubscriptBox[\(M\), \(\1\)]\)\"},{-0.48,-0.04}],
Text["!\(\*SubscriptBox[\(M\), \(\2\)]\)\"},{0.53,-0.07}],
Point[{-0.5,0}],Point[{0.5,0}]},{AbsolutePointSize[7],
Hue[0.3],Point[{x0,y0}]},
Text["!\(\*SubscriptBox[\(x\), \(\0\)]\)\",!\(\*SubscriptBox[\(y\), \(\0\)]\)\"},{x0,y0+0.06}],
DisplayFunction->$DisplayFunction,ImageSize->700];
r=Show[region,pt1,cont,Lgraph,DisplayFunction->$DisplayFunction,
ImageSize->700])

```

Il seguente codice, Donnison [2010] come detto, è più compatto del precedente e di più facile comprensione, presenta alcune limitazioni (non si calcola la posizione dei punti lagrangiani né il valore della costanti di Jacobi per le varie condizioni iniziali) ma anche alcune importanti differenze e migliorie (si ricava un metodo per studiare la stabilità dell'algoritmo molto semplice e di facile comprensione).

```

Needs["DifferentialEquations`NDSolveProblems`"];
Needs["DifferentialEquations`NDSolveUtilities`"];
Clear[Omega,r1,r2,X,Y,mu,Vx,Vy]

```

```

tin=0.;
tfin=40;

```

```

Omega=(1/2)((1-mu)r1^2+mu r2^2)+mu/r2+(1-mu)/r1;

```

```

r1=((X[t]-mu)^2+Y[t]^2)^(1/2);
r2=((X[t]+1-mu)^2+Y[t]^2)^(1/2);

VxEquation=Simplify[
D[Vx[t],t]-2Vy[t]-D[Omega,X[t]]];
VyEquation=Simplify[
D[Vy[t],t]+2Vx[t]-D[Omega,Y[t]]];
xEquation=D[X[t],t]-Vx[t];
yEquation=D[Y[t],t]-Vy[t];

Clear[X,Y,Vx,Vy]

mu=.5;

InitialConditions={X[0]==0.044,Vx[0]==0.,Y[0]==0.,Vy[0]==0.};

EquationList=Join[
  {VxEquation==0},{VyEquation==0},
  {xEquation==0},{yEquation==0},
  InitialConditions]
Orbit=NDSolve[EquationList,{X[t],Y[t],Vx[t],Vy[t]},{t,tin,tfin},
  Method->"Adams",WorkingPrecision->32,MaxSteps->50000];

X[t_]=First[X[t]/.Orbit];
Y[t_]=First[Y[t]/.Orbit];
Vx[t_]=First[Vx[t]/.Orbit];
Vy[t_]=First[Vy[t]/.Orbit];

r=ParametricPlot[{X[t],Y[t]},{t,tin,tfin},
  AspectRatio->Automatic,PlotPoints->100,
  Epilog->{AbsolutePointSize[7],
  Point[{mu-1,0}],Point[{mu,0}]}}]
Export["motionADAMS.jpg",r]
C0=(2 Omega-Vx[t]^2-Vy[t]^2)/.t->0;
deltaC=(2 Omega-Vx[t]^2-Vy[t]^2-C0)/C0;
k=Plot[Evaluate[deltaC],{t,tin,tfin},
  PlotRange->All,
  AxesLabel->{"t","(J(t)-\!\(\*\SubscriptBox[\(J), \(\0\)]\))/\!\(\*\SubscriptBox[\(J), \)
  Export["intgrADAMS.jpg",k]

```

## B.0.2 L'esponente di Lyapunov

Lo studio dell'Esponente Caratteristico di Lyapunov (LCE) è stato ampiamente discusso nella tesi e qui si riporta solo l'algoritmo. Esso è composto

da due parti: nella prima vengono definiti i due set di equazioni differenziali che descrivono il problema e le differenti condizioni iniziali con cui verranno integrate, nella seconda parte, all'interno di un ciclo *Do* si calcola il valore dell'esponente caratteristico di Lyapunov come mostrato nell'equazione 3.4 del capitolo 3.

```

\[Mu]=0.000954;
SuperStar\[Mu]=1-\[Mu];
Subscript[r1, 1]=
Sqrt[(Subscript[y1, 1][t]+\[Mu])^2+Subscript[y1, 2][t]^2];
Subscript[r1, 2]=
Sqrt[(Subscript[y1, 1][t]-SuperStar\[Mu])^2+Subscript[y1, 2][t]^2];
deq1=Subscript[y1, 3][t];
deq2=Subscript[y1, 4][t];
deq3=
2 Subscript[y1, 4][t]+
Subscript[y1, 1][t]-(SuperStar\[Mu] (Subscript[y1, 1][t]+\[Mu]))/
\!\(\*SubsuperscriptBox[\(r2\), \(\1\), \(\3\)]\)-
(\[Mu] (Subscript[y1, 1][t]-SuperStar\[Mu]))/
\!\(\*SubsuperscriptBox[\(r1\), \(\2\), \(\3\)]\);
deq4=
-2 Subscript[y1, 3][t]+Subscript[y1, 2][t]-
(SuperStar\[Mu] Subscript[y1, 2][t])/
\!\(\*SubsuperscriptBox[\(r1\), \(\1\), \(\3\)]\)-
(\[Mu] Subscript[y1, 2][t])/
\!\(\*SubsuperscriptBox[\(r1\), \(\2\), \(\3\)]\);
Subscript[r2, 1]=Sqrt[(Subscript[y2, 1][t]+
\[Mu])^2+Subscript[y2, 2][t]^2];
Subscript[r2, 2]=Sqrt[(Subscript[y2, 1][t]-
SuperStar\[Mu])^2+Subscript[y2, 2][t]^2];
deq5=Subscript[y2, 3][t];
deq6=Subscript[y2, 4][t];
deq7=2 Subscript[y2, 4][t]+Subscript[y2, 1][t]-
(SuperStar\[Mu] (Subscript[y2, 1][t]+\[Mu]))/
\!\(\*SubsuperscriptBox[\(r2\), \(\1\), \(\3\)]\)-
(\[Mu] (Subscript[y2, 1][t]-SuperStar\[Mu]))/
\!\(\*SubsuperscriptBox[\(r2\), \(\2\), \(\3\)]\);
deq8=-2 Subscript[y2, 3][t]+Subscript[y2, 2][t]-
(SuperStar\[Mu] Subscript[y2, 2][t])/
\!\(\*SubsuperscriptBox[\(r2\), \(\1\), \(\3\)]\)-
(\[Mu] Subscript[y2, 2][t])/
\!\(\*SubsuperscriptBox[\(r2\), \(\2\), \(\3\)]\);
a=R Cos[p]/. R->0.5 Sqrt[3+(1-3 mu)^2]/. mu->0.000954/. p->3 \[Degree];
b=R Sin[p]/. R->0.5 Sqrt[3+(1-3 mu)^2]/. mu->0.000954/. p->3 \[Degree];

```

```

c=0.;
d=0.;
dx0=0.001;
e=R Cos[p]/. R->0.5 Sqrt[3+(1-3 mu)^2]/. mu->0.000954/. p->6 \[Degree];
f=R Sin[p]/. R->0.5 Sqrt[3+(1-3 mu)^2]/. mu->0.000954/. p->6 \[Degree];
g=0.;
h=0.;
tin=0.;
tfin=180.;
tstep=0.005;
acc=13;
lcedata={};
sum=0;
d0=Sqrt[(a-e)^2+(b-f)^2+(c-g)^2+(d-h)^2];
For[i=1,i<tfin/tstep,i++,
sdeq={
Derivative[1][Subscript[y1, 1]][t]==deq1,
Derivative[1][Subscript[y1, 2]][t]==deq2,
Derivative[1][Subscript[y1, 3]][t]==deq3,
Derivative[1][Subscript[y1, 4]][t]==deq4,
Derivative[1][Subscript[y2, 1]][t]==deq5,
Derivative[1][Subscript[y2, 2]][t]==deq6,
Derivative[1][Subscript[y2, 3]][t]==deq7,
Derivative[1][Subscript[y2, 4]][t]==deq8,
Subscript[y1, 1][0]==a,
Subscript[y1, 2][0]==b,
Subscript[y1, 3][0]==c,
Subscript[y1, 4][0]==d,
Subscript[y2, 1][0]==e,
Subscript[y2, 2][0]==f,
Subscript[y2, 3][0]==g,
Subscript[y2, 4][0]==h};
sol=NDSolve[sdeq,{
Subscript[y1, 1][t],
Subscript[y1, 2][t],
Subscript[y1, 3][t],
Subscript[y1, 4][t],
Subscript[y2, 1][t],
Subscript[y2, 2][t],
Subscript[y2, 3][t],
Subscript[y2, 4][t]},
{t,0,tstep},
MaxSteps->[Infinity],
Method->"Adams",PrecisionGoal->acc,AccuracyGoal->acc];

```

```

xx1[t_]=Subscript[y1, 1][t]/. sol[[1]];
yy1[t_]=Subscript[y1, 2][t]/. sol[[1]];
zz1[t_]=Subscript[y1, 3][t]/. sol[[1]];
kk1[t_]=Subscript[y1, 4][t]/. sol[[1]];
xx2[t_]=Subscript[y2, 1][t]/. sol[[1]];
yy2[t_]=Subscript[y2, 2][t]/. sol[[1]];
zz2[t_]=Subscript[y2, 3][t]/. sol[[1]];
kk2[t_]=Subscript[y2, 4][t]/. sol[[1]];
d1=Sqrt[
(xx1[tstep]-xx2[tstep])^2+
(yy1[tstep]-yy2[tstep])^2+(zz1[tstep
]-zz2[tstep])^2+(kk1[tstep]-kk2[tstep])^2];

sum+=Log[d1/d0];
dlce=sum/(tstep i);
AppendTo[lcedata,{tstep i,Log10[dlce]};
w1=((xx1[tstep]-xx2[tstep]) d0)/d1;
w2=((yy1[tstep]-yy2[tstep]) d0)/d1;
w3=((zz1[tstep]-zz2[tstep]) d0)/d1;
w4=((kk1[tstep]-kk2[tstep]) d0)/d1;
a=xx1[tstep];
b=yy1[tstep];
c=zz1[tstep];
d=kk1[tstep];
e=a+w1;
f=b+w2;
g=c+w3;
h=d+w4;
i=i++;
If[Mod[tstep i,50]==0,Print[" For t = ",tstep i," , "," LCE = ",dlce]]]
S1=ListLogLinearPlot[
{lcedata},Frame->True,
PlotRange->All,Axes->True,
PlotRange->All,Joined->True,
FrameLabel->{"t","!\(\(*SubscriptBox[\(log\), \(\(10\)\)\](LCE)"}},
FrameStyle->Directive["Helvetica",17],
ImageSize->550]

```

### B.0.3 L'ampiezza delle risonanze di primo e second'ordine

La figura 3.4. mostra l'ampiezza delle risonanze di primo e second'ordine calcolate in approssimazione armonica (Murray e Dermott, 2001) e l'equazione 2.3 ne descrive l'andamento in funzione del semiasse maggiore e dell'eccentricità.

E' stata calcolata l'ampiezza di varie risonanze prendendo in consider-

azione i coefficienti ricavati in Dermott e Murray (2001). E' poi stata sovrapposta ai vari andamenti una mappa della posizione reale degli asteroidi noti nella Fascia di Kupier.

```
Needs["PlotLegends`"]

omega[a_] := 2 Pi/a^(3/2);
{val1} = FindRoot[omega[a]/omega[5.2] == 2, {a, 1}] ;
{val2} = FindRoot[omega[a]/omega[5.2] == 3, {a, 1}];
{val3} = FindRoot[omega[a]/omega[5.2] == 5/3, {a, 1}];
{val4} = FindRoot[omega[a]/omega[5.2] == 3/2, {a, 1}];
{val5} = FindRoot[omega[a]/omega[5.2] == 4/3, {a, 1}];
j = -1;

a21 = 3.275794729726671;
a31 = 2.49999;
a53 = 3.6991708;
a32 = 3.9683436;
a43 = 4.2925064;
alfaF21 = 0.749964;
alfaF31 = 0.287852;
alfaF53 = 2.32892;
alfaF32 = 1.54553;
alfaF43 = 2.34472;
mu = 10^-3;
tot1 = alfaF21*mu;
tot2 = alfaF31*mu;
tot3 = alfaF53*mu;
tot4 = alfaF32*mu;
tot5 = alfaF43*mu;
d = 0.38;
n = 0.36;
r = Show[
  ParametricPlot[{a21 (Sqrt[((16 tot1*x)/3]
    Sqrt[(1 + tot1/(27 x^3))]) - (2 tot1)/(9 j*x)) + a21 ,
    x}, {x, 0.00001, 1},
    PlotRange -> {{2., 4.7}, {0, n}},
    AxesLabel -> {"x", "y"},
    AspectRatio -> Automatic,
    PlotStyle -> {Black, Thick} ],
  ParametricPlot[{a21 (-Sqrt[((16 tot1*x)/3]
    Sqrt[(1 + tot1/(27 x^3))]) - (2 tot1)/(9 j*x)) + a21 ,
    x}, {x, 0.00001, 1},
    PlotRange -> {{2., 4.7}, {0, n}},
```



```

AxesLabel -> {"x", "y"},
AspectRatio -> Automatic,
PlotStyle -> {Black, Thick}],
ParametricPlot[{2 (-Sqrt[((16 tot2*x)/3])) + a31 , x}, {x, 0.00001,
  1},
  PlotRange -> {{2., 4.7}, {0, n}},
  AxesLabel -> {"x", "y"},
AspectRatio -> Automatic,
PlotStyle -> {Black, Thick} ],
ParametricPlot[{2 (Sqrt[(16 tot2*x)/3]) + a31 , x}, {x, 0.00001,
  1},
  PlotRange -> {{2., 4.7}, {0, n}},
  AxesLabel -> {"x", "y"},
AspectRatio -> Automatic,
PlotStyle -> {Black, Thick}],
ParametricPlot[{2 (-Sqrt[((16 tot3*x)/3])) + a53 , x},
{x, 0.00001,
  1},
  PlotRange -> {{2, 5.}, {0, n}}, AxesLabel -> {"x", "y"},
AspectRatio -> Automatic,
PlotStyle -> {Black, Thick} ],
ParametricPlot[{2 (Sqrt[(16 tot3*x)/3]) + a53 , x}, {x, 0.00001,
  1},
  PlotRange -> {{2, 5.}, {0, n}}, AxesLabel -> {"x", "y"},
AspectRatio -> Automatic,
PlotStyle -> {Black, Thick}],
ParametricPlot[{a32 (-Sqrt[(16 tot4*x)/3 (1 + tot4/(27 x^3))]) - (
  2 tot4)/(9 j*x)) + a32 , x}, {x, 0.00001, 1},
  PlotRange -> {{2, 5.}, {0, n}}, AxesLabel -> {"x", "y"},
AspectRatio -> Automatic, PlotStyle -> {Black, Thick} ],
ParametricPlot[{a32 (Sqrt[(16 tot4*x)/3 (1 + tot4/(27 x^3))]) - (
  2 tot4)/(9 j*x)) + a32 , x}, {x, 0.00001, 1},
  PlotRange -> {{2, 5.}, {0, n}}, AxesLabel -> {"x", "y"},
AspectRatio -> Automatic, PlotStyle -> {Black, Thick}],
ParametricPlot[{a43 (-Sqrt[(16 tot5*x)/3 (1 + tot5/(27 x^3))]) - (
  2 tot5)/(9 j*x)) + a43 , x}, {x, 0.00001, 1},
  PlotRange -> {{2, 5.}, {0, n}}, AxesLabel -> {"x", "y"},
AspectRatio -> Automatic, PlotStyle -> {Black, Thick} ],
ParametricPlot[{a43 (Sqrt[(16 tot5*x)/3 (1 + tot5/(27 x^3))]) - (
  2 tot5)/(9 j*x)) + a43 , x}, {x, 0.00001, 1},
  PlotRange -> {{2, 5.}, {0, n}}, AxesLabel -> {"x", "y"},
AspectRatio -> Automatic, PlotStyle -> {Black, Thick}]]];

```

```

p = ListPlot[Flatten[Table[{
  {a /. FindRoot[omega[a]/omega[5.2] == 2, {a, 1}], n},
  {a /. FindRoot[omega[a]/omega[5.2] == 3, {a, 1}], n},
  {a /. FindRoot[omega[a]/omega[5.2] == 5/3, {a, 1}], n},
  {a /. FindRoot[omega[a]/omega[5.2] == 3/2, {a, 1}], n},
  {a /. FindRoot[omega[a]/omega[5.2] == 4/3, {a, 1}], n}},
{j, 1, 9, 1}, {i, 2, 4, 1}], 1],
Filling -> Axis, FillingStyle -> {Red},
PlotRange -> {{2., 5.}, {0, 0.4}}, PlotMarkers -> Automatic,
PlotStyle -> Black, ImageSize -> 700];
m = ListPlot[{AstronomicalData[#, "SemimajorAxis"]/149597870691,
  AstronomicalData[#, "Eccentricity"]} & /@
  AstronomicalData["MinorPlanet"],
PlotStyle -> {RGBColor[0.2, 0.4, 0.4], PointSize[0.002]},
PlotRange -> {{2., 5.}, {0, .4}}, Epilog ->
{Red,
  Text[
    Style["2:1", Background -> Yellow, Medium, Bold,
      Black], {a /. val1, d}],
  Text[
    Style["3:1", Background -> Yellow, Medium, Bold,
      Black], {a /. val2, d}],
  Text[
    Style["5:3", Background -> Yellow, Medium, Bold,
      Black], {a /. val3, d}],
  Text[
    Style["3:2", Background -> Yellow, Medium, Bold,
      Black], {a /. val4, d}],
  Text[
    Style["4:3", Background -> Yellow, Medium, Bold,
      Black], {a /. val5, d}]]];
n = Show[m, r, p, ImageSize -> 700]

```

## Appendix C

# Lo script CASA

Viene riportato lo script utilizzato per le simulazioni di osservazione e la spiegazione delle task utilizzate.

- *default("simobserve")*: si chiama la task scelta e si azzerano i parametri al suo interno;
- *imhead("NomeFile.fits")*: si richiama l'header<sup>1</sup> dell'immagine fits in cui sono inserite le varie indicazioni per la corretta visualizzazione dell'immagine (si possono modificare anche all'interno di CASA).
- *ia.open("NomeFile.fits")*: in questo caso non si fa riferimento ad una task ma ad un *tool*<sup>2</sup>. La differenza è che queste ultime routine sono più avanzate e permettono di lavorare meglio sui dati CASA, per modificare i dati tramite un tool bisogna prima aprirlo all'interno della task e poi chiuderlo: *nomeTool.open("NomeFile.fits")* e poi *nomeTool.close("NomeFile.fits")*;
- *axesLength = ia.shape()*: si sta inizializzando la procedura per definire il numero dei pixel (*shape*) dell'immagine;
- *centerPixel = [x/2.0 for x in axesLength[: 2]]*: si calcola il centro dell'immagine;  
*(raRadians, decRadians) = ia.toworld(centerPixel)['numeric'][: 2]*: si definiscono le coordinate spaziali di declinazione ed ascensione retta per il centro dell'immagine; *ia.close()*: si chiude il tool per l'analisi dell'immagine (*image analysis*);

---

<sup>1</sup>L'header di un file fits è una tabella in cui sono definiti dei parametri caratteristici che danno delle informazioni sull'immagini quali la dimensione dei pixel, il flusso all'interno di essi, il numero di dimensioni del file, la frequenza di osservazione e molti altri. Una trattazione completa dei parametri inseriti nell'header dei file è data nell'Appendice C.2.

<sup>2</sup>Per una comprensione esaustiva di questo e degli altri tool presenti in CASA si fa riferimento a <http://casa.nrao.edu/docs/CasaRef/CasaRef.html>.

- $RaHms = qa.formxxx(str(raRadians)+"rad", format = 'hms', prec = 5)$ : si apre il tool per la conversione delle unità di misura ( $qa$ ) e si ottiene la posizione del centro dell'immagine in gradi;
- $decDms = qa.formxxx(str(decRadians)+"rad", format = 'dms', prec = 5)$ : come per il tool precedente si fa la stessa cosa anche per la declinazione. Si nota come tale comando presenta diverse opzioni quali: il tipo di conversione da realizzare, il formato finale dell'output e la precisione con cui calcolare la conversione.
- $project = "NomeProgetto"$ : viene definita una cartella ed il prefisso con vengono chiamati i gli output provenienti da questa task;
- $skymodel = "NomeFile.fits"$ : vengono definiti ora i parametri che servono per rappresentare la sorgente nel cielo quali la dimensione angolare, la posizione del centro della sorgente ed il tipo di puntamento;
- $setpointings = True$ : tipo di puntamento, poichè la sorgente è molto piccola non è richiesto un *mosaico* della sorgente;
- $direction = "J200018h00m00.031s - 22d59m59.6s"$ : posizione della sorgente nel cielo durante l'osservazione, sorgenti con declinazione, in valore assoluto, troppo diversa da quella dell'interferometro non possono essere visualizzate o appariranno molto *corrotte* dai lobi secondari del beam dell'interferometro<sup>3</sup>;
- $mapsize = "0.76arcsec"$ : dimensione della sorgente, può essere calcolata come segue:  $mapsize[""] = \frac{dimensione[A.U.]}{distanza[A.U.]}$ ;
- $obsmode = "int"$ : serve per editare il tipo di osservazione che si desidera, in questo caso si vuole un'osservazione di tipo interferometrico;
- $totaltime = "1200s"$ : tempo di osservazione della sorgente. Maggiore è questo valore maggiore è, in generale, il flusso raccolto dalla sorgente;
- $antennalist = "alma.out20.cfg"$ : tipo di configurazione per le antenne. La lista di configurazione è stata creata in modo che maggiore è il numero rappresentato (in questo caso 20), migliore è la risoluzione angolare dello strumento;
- $simobserve()$ : ora si può far partire la task.

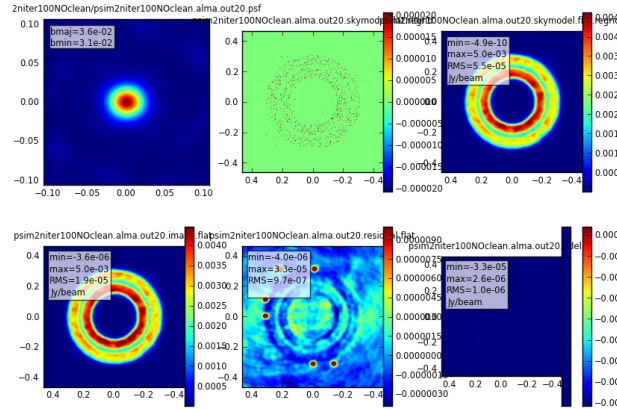
Ora che è stata simulata la visibilità di frangia della sorgente, si vuole generare l'immagine della sorgente. Ciò è fatto tramite la task 'simanalyze'. Anche in questo caso si fa riferimento alla guida ALMA sopra citata

<sup>3</sup>Allontanandosi dallo zenit dell'interferometro la risposta dello strumento cambia e va via via diminuendo in efficienza.

e si riportano qui i vari comandi utilizzati, nell'Appendice C.2 come detto, viene presentato lo script con le varie task e tool configurati per le immagini visualizzate in questa tesi.

- *default("simanalyze")*: si chiama la task scelta e si azzerano i parametri al suo interno;
- *project = "NomeProgetto"*: si definisce la stessa cartella e prefisso per le immagini di questa task come fatto nel caso precedente;
- *image = True*: si vuole osservare, alla fine dell'operazione di cleaning l'immagine ottenuta;
- *modelimage = "NomeFile.fits"*: qual'è l'immagine che si vuole analizzare;
- *vis = project + ".alma.out20.ms"*
- *imsiz*e = [192, 192]: dimensione in pixel dell'immagine finale;
- *niter* = 10000: numero di iterazioni per il cleaning;
- *threshold = "1e - 7Jy"*: livello di soglia minimo oltre il quale far fermare la procedura di cleaning;
- *weighting = "natural"*: da un peso alle zone del piano delle visibilità che sono state osservate più volte (in questo piano ogni punto è dovuto ad ognuna delle baseline e gli *archi* osservati sono dovuti alla rotazione delle coppie di antenne nel tempo), nel caso specifico l'opzione '*natural*' consente di dare più peso alle zone che sono state osservate più volte. Per questo motivo in esse si ha una sensibilità doppia rispetto agli altri punti sul piano ( $u - v$ );
- *analyze = True; showuv = False; showresidual = True; showconvolved = True*: opzioni di visualizzazione alla fine della procedura di analisi, descrive quali immagini devono essere visualizzate se ad esempio: l'immagine dei residui (*showresidual*), l'immagine convoluta con la risposta dello strumento (*showconvolved*) o l'immagine del piano ( $u, v$ ) (*showuv*);
- *graphics = "both"*: visualizzazione a schermo e salvataggio in un file.png;
- *verbose = True*: numero di informazioni da visualizzare, in questo caso vengono visualizzate anche la posizione delle antenne;
- *overwrite = True*: consente di riscrivere la tabella appena generata;
- *simanalyze()*: ora si può far partire la task.

Nella figura C.1 è possibile visualizzare un output d'immagine ottenuto con questa procedura.



**Fig. C.1:** *Output dopo le routine CASA.* Vengono riportate la dimensione del beam (in alto a sinistra), l'immagine modello (in alto al centro), l'immagine osservata da ALMA prima della convoluzione con la risposta dello strumento ed il beam (in alto a sinistra). In basso a sinistra è presentata l'immagine finale ALMA convoluta per la risposta dello strumento e per il beam, al centro in basso la mappa dei residui e in basso a destra la mappa di cleaning.

In questa sezione viene descritto lo script in Python che è stato utilizzato per la realizzazione delle immagini proposte nell'elaborato.

```
# In CASA
default("simobserve")

imhead("NomeFile.fits")

ia.open("100Me15AUcontrALMA.fits")

axesLength = ia.shape()

center_pixel = [ x / 2.0 for x in axesLength[:2] ]

(raRadians, decRadians) = ia.toworld( center_pixel )['numeric'][:2]
ia.close()
RaHms = qa.formxxx(str(raRadians)+"rad",format='hms',prec=5)
decDms = qa.formxxx(str(decRadians)+"rad",format='dms',prec=5)
project = "NomeProgetto"
skymodel = "NomeFile.fits"
```

```
setpointings      = True
direction         = "  "
mapsize          = "0.1arcsec"
obsmode          = "int"
totaltime        = "18000s"
antennalist       = "alma.out20.cfg"
simobserve()
default(("simanalyze"))
project = "NomeProgetto"
image = True
modelimage = "NomeFile.fits"
vis = project + ".alma.out20.ms"
imsize = [1500, 1500]
niter = 100
#threshold = "1e-7Jy"
weighting = "natural"
analyze = True
showuv = True
showresidual = True
showconvolved = True
graphics = "both"
verbose = True
overwrite = True
simanalyze()
```