ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

OTTIMIZZAZIONE DI UN PORTAFOGLIO

Tesi di Laurea in Finanza Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Andrea Pascucci

Presentata da:
Martina Valeri

I Sessione
Anno Accademico 2012/2013

A mia madre,
affinché questo importante traguardo
le dia la forza di lottare.

Introduzione

La Finanza Matematica è una disciplina sviluppatasi recentemente allo scopo di risolvere problemi di tipo economico-finanziario utilizzando teorie matematiche, in particolare concetti di una branca della matematica che è la Probabilità. Uno degli argomenti affrontati in Finanza Matematica è l'ottimizzazione di un portafoglio, tema di questa tesi.
Ottimizzare un portafoglio significa trovare la migliore strategia di investimento che ci permetta di massimizzare il guadagno e allo stesso tempo minimizzare il rischio.
In questa tesi, cercheremo, dunque, di capire come risolvere il problema dell'ottimizzazione di un portafoglio in termini matematici.
Nel Capitolo 1 illustreremo le nozioni basilari della Finanza Matematica e i problemi cruciali di cui si occupa, ossia la valutazione e la copertura delle opzioni europee con le relative soluzioni.
Nel Capitolo 2 tratteremo l'argomento della tesi, l'ottimizzazione di un portafoglio, esprimendolo in termini matematici.
Nel Capitolo 3 cercheremo, invece, di risolvere questo problema utilizzando il metodo della Programmazione Dinamica (PD) e studieremo il caso dell'utilità logaritmica in un modello binomiale sia nel caso dell'utilità attesa dalla ricchezza finale, sia nel caso dell'utilità attesa dal consumo intermedio e dalla ricchezza finale.

Indice

Capitolo 1

Elementi di finanza matematica

In questo capitolo ricorderemo le nozioni fondamentali della Finanza Matematica che ci permetteranno di comprendere al meglio il tema dell'ottimizzazione di un portafoglio.

Un *derivato finanziario*, definito anche *strumento derivato*, è un contratto il cui valore dipende da uno o più titoli o beni, detti sottostanti o anche titoli primitivi. L'esempio più semplice di derivato finanziario è l'opzione.
Un'*opzione* è un contratto che dà il diritto ma non l'obbligo, a chi lo detiene, di comprare o vendere (nel caso di un'*opzione Call* o *Put*) una certa quantità di un titolo sottostante ad una data futura (*scadenza*) e ad un prezzo prefissato (*strike*).
L'opzione che consideriamo è quella europea che si distingue da quella americana per il fatto che, mentre con l'opzione americana posso acquistare (o vendere) il sottostante entro la data di scadenza, con quella europea posso acquistare (o vendere) il sottostante solo dopo la data di scadenza.

L'opzione europea presenta, però, due problemi:

1. la **valutazione**: determinare il prezzo iniziale equo dell'opzione. Tale prezzo è il *premio* che chi compra l'opzione deve pagare al tempo iniziale per acquisire il diritto stabilito nei termini del contratto;

2. la **copertura** (o **replicazione**): chi vende il derivato deve determinare una strategia di investimento che, utilizzando il premio (i soldi ricevuti vendendo il derivato), riesca a replicare a scadenza il *payoff* (il valore finale dell'opzione), qualsiasi esso sia.

Per risolvere questi problemi definiamo un modello di mercato a tempo discreto.

1.1 Mercati discreti

Consideriamo uno spazio di probabilità (Ω, $\mathcal{F}$, P) dove Ω è un insieme costituito da un numero finito di elementi, $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_M\}$, la $\sigma-$algebra è costituita dai possibili sottoinsiemi di Ω, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ e $P(\{\omega_k\}) > 0$,
$\forall k = 1, ..., M$.
Fissiamo $t_0, t_1, ..., t_N \in \mathbb{R}$ con

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = T$$

per rappresentare le date in cui avvengono le contrattazioni, dove $t_0 = 0$ indica la data odierna e $t_N = T$ la scadenza di un derivato.
Il modello di mercato discreto (S,B) è composto da d+1 titoli ($d \in \mathbb{N}$) di cui uno non rischioso B (*bond*), corrispondente al deposito in banca, e d titoli rischiosi $S = S^1, ..., S^d$ (*stocks*), corrispondenti, ad esempio, a d azioni quotate in borsa.
Il bond, a differenza dei titoli rischiosi, ha una dinamica deterministica, cioè possiamo prevedere in ogni istante di tempo quale sia il suo valore nel futuro:

$$\begin{cases} B_0 = 1, \\ B_n = B_{n-1}(1 + r_n), \quad n = 1, ..., N \end{cases} \tag{1.1}$$

dove B_0 indica il valore del bond oggi, B_n il valore del bond all'istante t_n e r_n, tale che $1 + r_n > 0$, indica il tasso privo di rischio nel periodo n-esimo $[t_{n-1}, t_n]$.
I titoli rischiosi, invece, hanno la seguente dinamica stocastica:

$$\begin{cases} S_0^i \in \mathbb{R}_+, \\ S_n^i = S_{n-1}^i(1 + \mu_n^i), \quad n = 1, ..., N \end{cases} \tag{1.2}$$

per $i = 1, ..., d$, dove S_0^i indica il prezzo dell' i-esimo titolo rischioso oggi, S_n^i il prezzo dell' i-esimo titolo all'istante t_n e μ_n^i, tale che $1 + \mu_n^i > 0$, è una variabile aleatoria reale che rappresenta il tasso di rendimento dell' i-esimo titolo rischioso del periodo n-esimo $[t_{n-1}, t_n]$.

1.2 Portafoglio

Definizione 1.1 Un *portafoglio* (o *strategia*) è un processo stocastico in $\mathbb{R}^{d+1}$

$$(\alpha, \beta) = (\alpha_n^1, ..., \alpha_n^d, \beta_n)_{n=1,...,N}$$

dove α_n^i rappresenta il numero dei titoli S^i, e rispettivamente β_n il numero dei bond, presenti nel portafoglio nel periodo n-esimo $[t_{n-1}, t_n]$.

Definizione 1.2 Si definisce *valore del portafoglio* (α, β) *nel periodo n-esimo* $[t_{n-1}, t_n]$

$$V_n^{(\alpha,\beta)} = \alpha_n S_n + \beta_n B_n = \sum_{i=1}^{d} \alpha_n^i S_n^i + \beta_n B_n, \qquad n = 1, ..., N \tag{1.3}$$

Infatti dato $\alpha = (\alpha^1, ..., \alpha^d)$ ed utilizzando la notazione vettoriale per il processo dei prezzi $S = (S^1, ..., S^d)$ indichiamo con

$$\alpha S = \sum_{i=1}^{d} \alpha^i S^i$$

il prodotto scalare in $\mathbb{R}^d$.

Definiamo, inoltre, il *valore iniziale del portafoglio*

$$V_0^{(\alpha,\beta)} = \alpha_1 S_0 + \beta_1 B_0 = \sum_{i=1}^{d} \alpha_1^i S_0^i + \beta_1 B_0 \tag{1.4}$$

Si osservi che α_n^i e β_n possono assumere anche valori negativi. Questo accade nel caso della *vendita allo scoperto* che consiste nella vendita di titoli non direttamente posseduti dal venditore.

Definizione 1.3 Un *portafoglio* (α, β) si dice *autofinanziante* se vale la seguente relazione

$$V_{n-1} = \alpha_n S_{n-1} + \beta_n B_{n-1}, \qquad \forall n = 1, ..., N \tag{1.5}$$

Per l'equazione (1.3), vale quindi che in un portafoglio autofinanziante

$$\alpha_{n-1} S_{n-1} + \beta_{n-1} B_{n-1} = \alpha_n S_{n-1} + \beta_n B_{n-1}$$

Questa uguaglianza si interpreta nel modo seguente:
al tempo t_{n-1}, avendo a disposizione il capitale $V_{n-1} = \alpha_{n-1} S_{n-1} + \beta_{n-1} B_{n-1}$, si costruisce la strategia per il periodo n-esimo $[t_{n-1}, t_n]$ con le nuove quantità α_n, β_n in modo da non mutare il valore complessivo del portafoglio. Notiamo che (α_n, β_n) indica la composizione del portafoglio che si costruisce all'istante t_{n-1}.

Definizione 1.4 Un *portafoglio* (α, β) è *predicibile* se (α_n, β_n) è $\mathcal{F}_{n-1}$- misurabile, $\forall n = 1, ..., N$.
Ossia, un portafoglio si dice predicibile se siamo a conoscenza di informazioni sul titolo fino all'istante t_{n-1}, che è il momento in cui costruiamo la nostra strategia.

Notazione 1.5 Indichiamo con $\mathcal{A}$ l'insieme delle strategie autofinanzianti e predicibili:

$$\mathcal{A} = \{(\alpha, \beta) \mid \text{strategia autofinanziante e predicibile}\}$$

Osservazione 1.6 *Una strategia autofinanziante è determinata dalla coppia (α, β) oppure, equivalentemente, da (V_0, α) dove $V_0 \in \mathbb{R}$ è il valore iniziale della strategia e α è un processo predicibile $d-$dimensionale.*
Vale infatti:

Proposizione 1.7 *Il valore di una strategia autofinanziante (α, β) è determinato dal valore iniziale V_0 e ricorsivamente dalla relazione*

$$V_n = V_{n-1}(1 + r_n) + \sum_{i=1}^{d} \alpha_n^i S_{n-1}^i (\mu_n^i - r_n), \qquad n = 1, ..., N \tag{1.6}$$

Corollario 1.8 *Dati $V_0 \in \mathbb{R}$ e un processo predicibile α, esiste ed è unico il processo predicibile β tale che $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}$ e valga $V_0^{(\alpha,\beta)} = V_0$.*
Tale processo predicibile β si ricava dall'equazione (1.5) *da cui*

$$\beta_n = \frac{V_{n-1} - \alpha_n S_{n-1}}{B_{n-1}}, \qquad n = 1, ..., N \tag{1.7}$$

Osservazione 1.9 *Sia $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}$. Il valore finale di una strategia è dato dal suo valore iniziale e dal suo rendimento, indicato con $g_n^{(\alpha,\beta)}$ (che può essere positivo o negativo):*

$$\begin{aligned} V_n &= V_0 + g_n^{(\alpha,\beta)} \\ &= V_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k (S_k - S_{k-1}) + \beta_k (B_k - B_{k-1})) \\ &= V_0 + \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{d} \alpha_k^i S_{k-1}^i \mu_k^i + \beta_k B_{k-1} r_k \Big) \end{aligned} \tag{1.8}$$

per n= 1, ..., N.

1.3 Portafoglio relativo

É possibile esprimere un portafoglio anche in termini relativi, indicando le proporzioni del valore totale investite nei singoli titoli.

Definizione 1.10 Si definiscono le *proporzioni investite nel periodo n-esimo* $[t_{n-1}, t_n]$, per n= 1, ..., N

$$\pi_n^i = \frac{\alpha_n^i S_{n-1}^i}{V_{n-1}}, \qquad i = 1, ..., d \tag{1.9}$$

e

$$\pi_n^0 = \frac{\beta_n B_{n-1}}{V_{n-1}} = 1 - \sum_{i=1}^{d} \pi_n^i \tag{1.10}$$

se $V_{n-1} \neq 0$.

Se, invece, $V_{n-1} = 0$, si pone per convenzione $\pi_n^i = 0$, per i= 0, ..., d.

Proposizione 1.11 *Il valore di una strategia autofinanziante* (α, β) *è determinato dal valore iniziale* $V_0 \in \mathbb{R}$ *e dai processi* $\pi^1, ..., \pi^d$ *mediante la relazione ricorsiva*

$$V_n = V_{n-1}(1 + \pi_n \mu_n + \pi_n^0 r_n) \tag{1.11}$$

che per l'equazione (1.10) *è equivalente a*

$$V_n = V_{n-1}\Big(1 + r_n + \sum_{i=1}^{d} \pi_n^i(\mu_n^i - r_n)\Big) \tag{1.12}$$

e per le equazioni (1.1), (1.2) *è anche equivalente a*

$$\frac{V_n - V_{n-1}}{V_{n-1}} = \pi_n \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}} + \pi_n^0 \frac{B_n - B_{n-1}}{B_{n-1}} \tag{1.13}$$

Quest'ultima equazione esprime il fatto che il rendimento relativo di un portafoglio autofinanziante è combinazione lineare dei rendimenti dei titoli che lo compongono con pesi espressi dal portafoglio relativo.

Osservazione 1.12 *Si noti che, dati $V_0 \in \mathbb{R}$ e $\pi^1, ..., \pi^d$ processi predicibili, per le equazioni* (1.9), (1.10) *è possibile ricavare la corrispondente strategia* $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}$ *mediante le formule*

$$\alpha_n^i = \frac{\pi_n^i V_{n-1}}{S_{n-1}^i}, \tag{1.14}$$

$$\beta_n = \frac{V_{n-1}}{B_{n-1}}\Big(1 - \sum_{i=1}^{d} \pi_n^i\Big) \tag{1.15}$$

1.4 Mercato scontato

Nel mercato scontato i prezzi dei titoli sono espressi in unità del titolo B, comunemente chiamato *numeraire.*

Definizione 1.13 Il *prezzo scontato dell' i-esimo titolo rischioso* è definito da

$$\tilde{S}_n^i = \frac{S_n^i}{B_n}, \qquad n = 0, ..., N \tag{1.16}$$

e il *prezzo scontato del bond*

$$\tilde{B}_n \equiv 1, \qquad n = 0, ..., N \tag{1.17}$$

Si definisce, inoltre, *valore scontato della strategia* (α, β)

$$\begin{aligned} \tilde{V}_n &= \alpha_n \tilde{S}_n + \beta_n \tilde{B}_n \\ &= \alpha_n \tilde{S}_n + \beta_n, \qquad n = 1, .., N \end{aligned} \tag{1.18}$$

per la (1.17).

In una condizione di autofinanziamento, vale quindi la seguente relazione

$$\tilde{V}_{n-1} = \alpha_n \tilde{S}_{n-1} + \beta_n, \qquad n = 1, .., N \tag{1.19}$$

o equivalentemente

$$\tilde{V}_n = \tilde{V}_{n-1} + \alpha_n(\tilde{S}_n - \tilde{S}_{n-1}), \qquad n = 1, .., N \tag{1.20}$$

Estendendo la proposizione (1.7) nel mercato scontato si ottiene:

Proposizione 1.14 *Il valore scontato di una strategia autofinanziante* (α, β) *è determinato dal valore iniziale* V_0 *e ricorsivamente dalla relazione*

$$\tilde{V}_n = \tilde{V}_{n-1} + \sum_{i=1}^{d} \alpha_n^i \tilde{S}_{n-1}^i \mu_n^i, \qquad n = 1, ..., N \tag{1.21}$$

Osservazione 1.15 *Osserviamo che, poichè* $\tilde{B}_0 = 1, \tilde{S}_0^i = S_0^i$*, si ha quindi*

$$\begin{aligned} \tilde{V}_0 &= \alpha_1 \tilde{S}_0 + \beta_1 \tilde{B}_0 \\ &= \alpha_1 S_0 + \beta_1 = V_0 \end{aligned} \tag{1.22}$$

Estendendo anche l'osservazione (1.9) nel mercato scontato, si ha:

Osservazione 1.16 *Il valore finale scontato di una strategia* $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}$ *è dato dal suo valore iniziale (che, per l'osservazione appena fatta, è uguale al valore iniziale scontato) e dal suo rendimento scontato, indicato con* $G_n^{(\alpha)}$*:*

$$\begin{aligned} \tilde{V}_n &= V_0 + G_n^{(\alpha)} \\ &= V_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\tilde{S}_k - \tilde{S}_{k-1}) \\ &= V_0 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{d} \alpha_k^i \tilde{S}_{k-1}^i \mu_k^i, \qquad n = 1, .., N \end{aligned} \tag{1.23}$$

in quanto $\tilde{B}$ *è costante.*

1.5 Arbitraggio e misura martingala

All'inizio del capitolo abbiamo parlato dei problemi di un'opzione europea (la valutazione e la copertura o replicazione). Il procedimento per risolvere questi problemi si divide in tre fasi:

- costruire un modello matematico per il fenomeno, cioè una qualche maniera matematica per descrivere il titolo azionario;
- utilizzare i principi economici, cioè una volta costruito il modello si utilizzano teoremi e principi di tipo economico in modo tale da arrivare ad una soluzione;

- soluzione del problema.

Uno dei principi economici più importanti, sul quale si basano quasi tutti i modelli di valutazione di Finanza Matematica, è il '*Principio di non arbitraggio*'.

1.5.1 Principio di non arbitraggio

Supponiamo di avere due investimenti rischiosi, in cui X_t, Y_t rappresentano il prezzo al tempo t dei due investimenti. Secondo il principio di non arbitraggio

$$\text{se} \quad X_T = Y_T \quad \Rightarrow \quad X_t = Y_t, \quad \forall t \leq T$$

Cioè se attualmente due investimenti hanno lo stesso valore, allora anche inizialmente avevano lo stesso valore.
Se $X_t < Y_t$, l'arbitraggio consiste nel vendere allo scoperto Y_t e, con i soldi guadagnati nella vendita, comprare X_t, che vale meno. Se poi, al tempo T, $X_T = Y_T$ vendiamo X_T e compriamo Y_T. In questo modo abbiamo guadagnato soldi a costo 0, cioè senza investire nulla, e senza accollarci dei rischi. Questo è definito **arbitraggio** ed è illegale.

1.5.2 Arbitraggio

Un *arbitraggio* è, quindi, un'operazione che consiste nell'acquistare un bene o un'attività finanziaria su un mercato rivendendolo su un altro sfruttando le differenze di prezzo al fine di ottenere un profitto senza correre alcun rischio. L'arbitraggio si distingue dalla *speculazione* per il fatto che, mentre il primo è un modo di lucrare sulle differenze di prezzo presenti in mercati diversi, la seconda opera sulle differenze di prezzo di uno stesso bene sullo stesso mercato in tempi diversi. Quindi, la speculazione lucra agendo sul fattore tempo (vendita successiva all'acquisto), mentre l'arbitraggio gioca sul fattore spazio (acquisto e vendita su due mercati diversi).
Introduciamo, di seguito, la nozione formale di strategia d'arbitraggio.

Definizione 1.17 Un *arbitraggio* è una strategia $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}$ che verifica le seguenti condizioni:

1) $V_0^{(\alpha,\beta)} = 0$

2) $V_N^{(\alpha,\beta)} \geq 0$

3) $P(V_N^{(\alpha,\beta)} > 0) > 0$

Ossia, un arbitraggio è una strategia che, pur non richiedendo un investimento iniziale ($V_0^{(\alpha,\beta)} = 0$) e non esponendo ad alcun rischio ($V_N^{(\alpha,\beta)} \geq 0$), ha la possibilità di assumere un valore positivo ($P(V_N^{(\alpha,\beta)} > 0) > 0$).

In un modello di mercato dobbiamo fare in modo di NON avere situazioni di arbitraggio (anche se ciò non è affatto semplice).

Definizione 1.18 Un *modello di mercato* (S, B) è *libero da arbitraggi* se la famiglia $\mathcal{A}$, delle strategie autofinanzianti e predicibili, non contiene arbitraggi.

Quindi, per costruire un modello di mercato libero da arbitraggi dobbiamo fare in modo di non rispettare le tre condizioni viste dell'arbitraggio.

1.5.3 Misura martingala

Definizione 1.19 Una *misura martingala* è una misura di probabilità Q su $(\Omega, \mathcal{F})$ tale che:

1) Q è equivalente a P, il che significa che le due probabilità hanno gli stessi eventi trascurabili, ossia possono assegnare probabilità diverse, ma se l'evento di uno è zero lo è anche l'evento dell'altro

$$P(\{\omega_i\}) = 0 \Leftrightarrow Q(\{\omega_i\}) = 0, \quad \forall \omega_i \in \Omega, \text{per } i = 1, ..., M.$$

e inoltre, se si verifica l'evento di uno, si verifica anche l'evento dell'altro

$$P(\{\omega_i\}) > 0 \Leftrightarrow Q(\{\omega_i\}) > 0, \quad \forall \omega_i \in \Omega, \text{per } i = 1, ..., M$$

2) il prezzo scontato del titolo rischioso, $\tilde{S}$, è una Q-martingala, ossia

$$\tilde{S}_{n-1} = E^Q[\tilde{S}_n \mid \mathcal{F}_{n-1}], \qquad \forall n = 1, ..., N$$

Per la seconda proprietà di misura martingala, si ha dunque

$$\tilde{S}_k = E^Q[\tilde{S}_n \mid \mathcal{F}_k], \qquad \forall k \leq n \tag{1.24}$$

e di conseguenza

$$E^Q[\tilde{S}_n] = E^Q[E^Q[\tilde{S}_n \mid \mathcal{F}_0]] = \tilde{S}_0 \tag{1.25}$$

Questa formula è importante in termini economici in quanto esprime il fatto che il valore atteso dei prezzi futuri scontati è uguale al prezzo attuale.

Teorema 1.20 (Primo Teorema fondamentale della valutazione) *Un mercato discreto è libero da arbitraggi se e solo se esiste almeno una misura martingala.*

Prima di procedere alla dimostrazione del Primo Teorema fondamentale della valutazione, occorre fare alcune osservazioni.

Osservazione 1.21 *Se Q è una misura martingala e $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}$, allora $\tilde{V}^{(\alpha,\beta)}$ è una Q-martingala:*

$$\tilde{V}_{n-1}^{(\alpha,\beta)} = E^Q[\tilde{V}_n^{(\alpha,\beta)} \mid \mathcal{F}_{n-1}], \qquad n = 1, ..., N \tag{1.26}$$

e in particolare

$$V_0^{(\alpha,\beta)} = E^Q[\tilde{V}_n^{(\alpha,\beta)}], \qquad n = 1, ..., N \tag{1.27}$$

Osservazione 1.22 *In un mercato libero da arbitraggi, se esistono due strategie $(\alpha, \beta), (\alpha', \beta') \in \mathcal{A}$ che hanno stesso valore finale, $V_N^{(\alpha,\beta)} = V_N^{(\alpha',\beta')}$, allora*

$$V_n^{(\alpha,\beta)} = V_n^{(\alpha',\beta')}[1], \qquad n = 0, ..., N$$

Fatte queste osservazioni, possiamo ora procedere nella dimostrazione del Primo Teorema fondamentale della valutazione.

Dimostrazione del Primo Teorema fondamentale della valutazione. Supponiamo per assurdo che $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}$ sia un arbitraggio. Allora, per l'osservazione (1.21), dato che per ipotesi esiste una misura martingala Q, varrà che:

$$0 = V_0^{(\alpha,\beta)} = E^Q[\tilde{V}_n^{(\alpha,\beta)}] = \sum_k v_k Q(\tilde{V}_n^{(\alpha,\beta)} = v_k) > 0$$

in quanto $v_k \geq 0$ e $Q(\tilde{V}_n^{(\alpha,\beta)} = v_k) > 0$.
Ma questo è assurdo. Quindi, se esiste una misura martingala, il mercato è libero da arbitraggi. □

[1] Questo è ciò che avevamo definito *'Principio di non arbitraggio'*.

1.6 Valutazione e copertura

All'inizio del capitolo abbiamo parlato dei problemi di un'opzione:

1. la valutazione;
2. la copertura (o replicazione): esiste una strategia $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}$ tale che $V_N^{(\alpha,\beta)} = X$? Cioè esiste una strategia autofinanziante e predicibile che alla scadenza assuma lo stesso valore di un derivato X?
   Se tale strategia esiste, X si dice *derivato replicabile* e (α, β) *strategia replicante per X.*

Definizione 1.23 Un *modello di mercato* si dice *completo* se e solo se ogni derivato è replicabile.

Teorema 1.24 (Secondo Teorema fondamentale della valutazione) *Un mercato libero da arbitraggi (quindi, per il Primo Teorema fondamentale della valutazione, esiste almeno una misura martingala) è completo se e solo se la misura martingala è unica.*

Osserviamo, quindi, che la completezza necessita dell'unicità della misura martingala, mentre la libertà da arbitraggio dell'esistenza della misura martingala.

Detto ciò rimane da risolvere il primo problema di un'opzione europea, la valutazione.
Sia (S, B) un modello di mercato e supponiamo esista Q misura martingala (quindi stiamo supponendo che il modello sia sensato, cioè libero da arbitraggi). É importante dare al derivato (X) un prezzo corretto, altrimenti rischiamo che qualcuno crei un arbitraggio.

Notazione 1.25 Definiamo:

$$\mathcal{A}_x^+ = \{(\alpha, \beta) \in \mathcal{A} \mid V_N^{(\alpha,\beta)} \geq X\}$$

l'insieme delle strategie *super-replicanti*, e

$$\mathcal{A}_x^- = \{(\alpha, \beta) \in \mathcal{A} \mid V_N^{(\alpha,\beta)} \leq X\}$$

l'insieme delle strategie *sub-replicanti.*

Indichiamo con $H_0 \in \mathbb{R}$ il prezzo iniziale del derivato X.
Affinché non si creino situazioni di arbitraggio il prezzo iniziale dell'opzione deve essere compreso nel seguente intervallo:

$$V_0^{(\alpha',\beta')} \leq H_0 \leq V_0^{(\alpha,\beta)} \tag{1.28}$$

$\forall(\alpha', \beta') \in \mathcal{A}_x^-$ e $\forall(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}_x^+$.
Considerata una misura martingala Q, per l'osservazione (1.21), vale dunque

$$V_0^{(\alpha,\beta)} = E^Q[\tilde{V}_N^{(\alpha,\beta)}]$$

Valutando in modo analogo l'opzione X, fissata una misura martingala Q, si ha

$$H_0 = E^Q[\tilde{X}] = E^Q\left[\frac{X}{B_N}\right] \tag{1.29}$$

Dato che H_0 è il valore atteso, rispetto ad una misura neutrale al rischio, del payoff scontato si dice anche che H_0 è il *prezzo neutrale al rischio di X.*
Tale prezzo è corretto (ossia non crea nel mercato opportunità di arbitraggio) in quanto soddisfa la condizione (1.28), infatti:

Lemma 1.26 *Per ogni misura martingala Q, vale*

$$\sup_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{A}_x^-} V_0^{(\alpha,\beta)} \leq E^Q\left[\frac{X}{B_N}\right] \leq \inf_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{A}_x^+} V_0^{(\alpha,\beta)} \tag{1.30}$$

Vediamo, invece, cosa accade nel caso in cui il derivato sia replicabile.

Teorema 1.27 *Sia (S, B) un modello di mercato libero da arbitraggi (quindi, per il Primo Teorema fondamentale della valutazione, esiste almeno una misura martingala) e sia X un derivato replicabile (cioè esiste una strategia $(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}$ tale che $X = V_N^{(\alpha,\beta)}$). Allora vale:*

$$V_0^{(\alpha,\beta)} = E^Q\left[\frac{X}{B_N}\right] \tag{1.31}$$

$\forall Q$ misura martingala e $\forall(\alpha, \beta) \in \mathcal{A}$ strategia replicante.

Riassumendo, per avere un mercato libero da arbitraggi, il prezzo del derivato deve essere compreso nell'intervallo:

$$\sup_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{A}_x^-} V_0^{(\alpha,\beta)} \leq E^Q\left[\frac{X}{B_N}\right] \leq \inf_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{A}_x^+} V_0^{(\alpha,\beta)}$$

Ma, nel caso in cui il derivato sia replicabile, l'unico prezzo che non crea arbitraggio è il prezzo neutrale al rischio di X:

$$V_0^{(\alpha,\beta)} = E^Q\left[\frac{X}{B_N}\right]$$

1.7 Modello Binomiale

All'inizio del capitolo abbiamo definito un modello di mercato a tempo discreto ma, per la costruzione di uno specifico problema come quello della valutazione o della copertura, occorre definire il modello in modo più preciso. A tal proposito introduciamo il modello binomiale che è l'esempio più semplice di mercato discreto.
In questo tipo di modello il mercato è composto da un titolo non rischioso B (*bond*) e da un solo titolo rischioso S (*stoke*).
Nello stesso modo in cui abbiamo proceduto per i mercati discreti, fissiamo $t_0, t_1, ..., t_N \in \mathbb{R}$ con

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = T$$

per rappresentare le date in cui avvengono le contrattazioni, dove $t_0 = 0$ indica la data odierna e $t_N = T$ la scadenza di un derivato.
Nel modello binomiale, il bond ha la seguente dinamica deterministica:

$$\begin{cases} B_0 = 1, \\ B_n = B_{n-1}(1+r) = B_0(1+r)^n = (1+r)^n, \quad n = 1, ..., N \end{cases} \tag{1.32}$$

dove r, che indica il tasso di interesse privo di rischio, è costante durante tutto il periodo $[0, T]$.
Per quanto riguarda invece il titolo rischioso, assumiamo che nel passaggio dal tempo t_{n-1} al tempo t_n l'azione possa solo aumentare o diminuire il suo valore con tassi di crescita (u) e decrescita (d) costanti. Il titolo rischioso, a differenza del titolo non rischioso, segue la seguente dinamica stocastica:

$$\begin{cases} S_0 \in \mathbb{R}_+ \\ S_n = S_{n-1}(1+\mu_n), \quad n = 1, ..., N \end{cases} \tag{1.33}$$

dove le μ_n sono variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite (i.i.d.) su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ aventi come distribuzione una combinazione lineare di Delta di Dirac [2]

$$p\delta_{u-1} + (1-p)\delta_{d-1}$$

e tali che

$$1 + \mu_n = \begin{cases} u & \text{con probabilità } p, \\ d & \text{con probabilità } 1-p, \end{cases}$$

con $p \in]0,1[$ e $0 < d < u$. Osserviamo, inoltre, che vale

$$P(S_n = u^k d^{n-k} S_0) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad 0 \le k \le n \le N$$

Teorema 1.28 *Nel modello binomiale il mercato è completo, ossia per il Secondo Teorema fondamentale della valutazione esiste una ed una sola misura martingala, se e solo vale la seguente relazione*

$$d < 1 + r < u$$

Dimostrazione. Supponiamo che nel modello binomiale esista una misura martingala, dunque vale

$$\tilde{S}_{n-1} = E^Q[\tilde{S}_n \mid \mathcal{F}_{n-1}], \qquad \forall n = 1, ..., N$$

Allora

$$\frac{S_{n-1}}{B_{n-1}} = E^Q\left[\frac{S_n}{B_n} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right] \quad \Longrightarrow \quad \frac{S_{n-1}}{(1+r)^{n-1}} = E^Q\left[\frac{S_n}{(1+r)^n} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right]$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{(1+r)}{(1+r)^n} S_{n-1} = \frac{1}{(1+r)^n} E^Q[S_n \mid \mathcal{F}_{n-1}]$$

$$\Longrightarrow \quad (1+r)S_{n-1} = E^Q[S_n \mid \mathcal{F}_{n-1}]$$

[2] La distribuzione di Delta di Dirac è un esempio di distribuzione $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$ (dove $\mathscr{B}$ è la σ- algebra di Borel), in cui fissato un punto $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\delta_{x_0}(H) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in H, \\ 0 & \text{se } x_0 \notin H \end{cases}$$

con $H \in \mathscr{B}$.

$$\Longrightarrow \quad (1+r)S_{n-1} = E^Q[S_{n-1}(1+\mu_n) \mid \mathcal{F}_{n-1}]$$

$$\Longrightarrow \quad (1+r)S_{n-1} = S_{n-1}E^Q[1+\mu_n \mid \mathcal{F}_{n-1}]$$

dato che S_{n-1} è $\mathcal{F}_{n-1}-$ misurabile, e dunque vale che:

$$E^Q[S_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}] = S_{n-1}$$

Si ha quindi che

$$\begin{aligned} (1+r) &= E^Q[1+\mu_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= uQ(1+\mu_n = u \mid \mathcal{F}_{n-1}) + dQ(1+\mu_n = d \mid \mathcal{F}_{n-1}) \end{aligned} \quad (1.34)$$

dove ponendo
$Q(1+\mu_n = u \mid \mathcal{F}_{n-1}) = q_n$ (variabile aleatoria), e dunque
$Q(1+\mu_n = d \mid \mathcal{F}_{n-1}) = 1 - q_n$
si ottiene che

$$1+r = uq_n + d(1-q_n) \quad \Longrightarrow q_n = \frac{1+r-d}{u-d} \quad \in \quad]0,1[$$

in quanto vogliamo che la misura di probabilità Q sia equivalente a P, che è la prima condizione affinché Q sia una misura di martingala. Dunque:

$$0 < q_n < 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 < \frac{1+r-d}{u-d} < 1 \quad \Longrightarrow d < 1+r < u.$$

$\square$

1.8 Strategie con consumo

In questo paragrafo introduciamo un caso particolare di strategie, le quali considerano anche quanto abbiamo consumato del patrimonio iniziale.
Nel capitolo successivo, infatti, analizzeremo il problema dell'ottimizzazione di un portafoglio sia nel caso delle strategie autofinanzianti, che nel caso delle strategie autofinanzianti con consumo.

Definizione 1.29 In un mercato discreto, una *strategia con consumo* (α, β, C) è una terna dove: (α, β) è una strategia e $C = (C_n)_{n=0,...,N}$ è un *processo di consumo*, cioè un processo stocastico adattato e non negativo in cui C_n indica l'ammontare del capitale consumato all'istante t_n.

Definizione 1.30 Una *strategia con consumo* (α, β, C) si dice *autofinanziante* se vale la seguente relazione

$$V_{n-1} = \alpha_n S_{n-1} + \beta_n B_{n-1} + C_{n-1}, \qquad n = 1, ..., N \tag{1.35}$$

Richiamiamo, ora, le proposizioni e le osservazioni fatte precedentemente estendendole nel caso della strategia con consumo.
Per la proposizione (1.7):

Proposizione 1.31 *Il valore di una strategia autofinanziante con consumo (α, β, C) è determinato dal valore iniziale V_0 e ricorsivamente dalla relazione*

$$V_n = (V_{n-1} - C_{n-1})(1 + r_n) + \sum_{i=1}^{d} \alpha_n^i S_{n-1}^i (\mu_n^i - r_n) \tag{1.36}$$

per n= 1, ..., N.

Per il corollario (1.8):

Corollario 1.32 *Dati $V_0 \in \mathbb{R}$, un processo predicibile α e un processo di consumo C, esiste ed è unico il processo predicibile β tale che (α, β, C) sia una strategia autofinanziante con consumo di valore iniziale V_0.*
Tale processo predicibile β si ricava dall'equazione (1.35) *da cui*

$$\beta_n = \frac{V_{n-1} - \alpha_n S_{n-1} - C_{n-1}}{B_{n-1}}, \qquad n = 1, ..., N \tag{1.37}$$

Da questa equazione possiamo notare che β_n dipende da V_0, dal processo predicibile α e dal processo adattato $(C_0, ..., C_{N-1})$ ma non dipende da C_N.

Notazione 1.33 Fissati $V_0 \in \mathbb{R}$ e un processo predicibile α, indichiamo con $V^{(\alpha)}$ il valore della strategia autofinanziante (α, β) di valore iniziale V_0.
Analogamente, fissato anche un processo di consumo C, indichiamo con $V^{(\alpha,C)}$ il valore della strategia autofinanziante con consumo (α, β, C) di valore iniziale V_0.

Definizione 1.34 Dati $V_0 \in \mathbb{R}$ e un processo predicibile α, diciamo che un *processo di consumo* C è $(V_0, \alpha)-$ *ammissibile* se la strategia autofinanziante con consumo (α, β, C) di valore iniziale V_0 è ammissibile, ossia vale

$$V_N^{(\alpha,C)} \geq C_N \tag{1.38}$$

cioè se alla fine il valore del portafoglio è maggiore (o tutt'al più uguale) a quanto abbiamo consumato.
Notiamo, in particolare, che il valore finale V_N di una strategia ammissibile è non negativo.

Per l'osservazione (1.9):

Osservazione 1.35 *Il valore finale di una strategia con consumo* (α, β, C) *è dato dal suo valore iniziale, dal suo rendimento, indicato con* $g_n^{(\alpha,\beta)}$*, (che può essere positivo o negativo) a cui, però, occorre sottrarre quanto abbiamo consumato fino ad allora in ogni istante:*

$$\begin{aligned} V_n &= V_0 + g_n^{(\alpha,\beta)} - \sum_{k=0}^{n-1} C_k \\ &= V_0 + \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{d} \alpha_k^i S_{k-1}^i \mu_k^i + \beta_k B_{k-1} r_k \Big) - \sum_{k=0}^{n-1} C_k \end{aligned} \tag{1.39}$$

per n= 1, ..., N.

Trattiamo, di seguito, della strategia con consumo in termini relativi.
Estendendo la proposizione (1.11) nel caso della strategia con consumo:

Proposizione 1.36 *Il valore di una strategia autofinanziante con consumo* (α, β, C) *è determinato dal valore iniziale* $V_0 \in \mathbb{R}$ *e dai processi* $\pi^1, ..., \pi^d$ *e* C *mediante la relazione ricorsiva*

$$V_n = (V_{n-1} - C_{n-1})(1 + r_n) + V_{n-1} \sum_{i=1}^{d} \pi_n^i (\mu_n^i - r_n) \tag{1.40}$$

Per l'osservazione (1.12):

Osservazione 1.37 *Dati $V_0 \in \mathbb{R}$, dei processi predicibili $\pi^1, ..., \pi^d$ e un processo di consumo C, è possibile ricavare la corrispondente strategia con consumo (α, β, C) mediante le formule*

$$\alpha_n^i = \frac{\pi_n^i V_{n-1}}{S_{n-1}^i}, \tag{1.41}$$

$$\beta_n = \frac{V_{n-1} - C_{n-1}}{B_{n-1}} - \frac{V_{n-1}}{B_{n-1}} \sum_{i=1}^{d} \pi_n^i \tag{1.42}$$

Infine, andiamo ad analizzare la strategia con consumo nel mercato scontato. Per le equazioni (1.20) e (1.21), la condizione di autofinanziamento per una strategia con consumo (α, β, C) espressa in termini di valori scontati diventa

$$\tilde{V}_n = \tilde{V}_{n-1} - \tilde{C}_{n-1} + \alpha_n(\tilde{S}_n - \tilde{S}_{n-1}), \qquad n = 1, ..., N \tag{1.43}$$

ossia

$$\tilde{V}_n = \tilde{V}_{n-1} - \tilde{C}_{n-1} + \sum_{i=1}^{d} \alpha_n^i \tilde{S}_{n-1}^i \mu_n^i, \qquad n = 1, ..., N \tag{1.44}$$

Per l'osservazione (1.16):

Osservazione 1.38 *Il valore finale scontato di una strategia con consumo (α, β, C) è dato dal suo valore iniziale (che è uguale al valore iniziale scontato), dal suo rendimento scontato, indicato con $G_n^{(\alpha)}$, a cui, però, occorre sottrarre quanto abbiamo consumato fino ad allora in ogni istante:*

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_n &= V_0 + G_n^{(\alpha)} - \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{C}_k \\
&= V_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(\tilde{S}_k - \tilde{S}_{k-1}) - \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{C}_k \\
&= V_0 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{d} \alpha_k^i \tilde{S}_{k-1}^i \mu_k^i - \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{C}_k, \qquad n = 1, .., N
\end{aligned} \tag{1.45}$$

in quanto $\tilde{B}$ è costante.

Capitolo 2

Ottimizzazione di un portafoglio

Questo capitolo è dedicato ad uno dei primi problemi matematici affrontati nel campo delle applicazioni finanziarie: l'ottimizzazione di un portafoglio.
*Ottimizzare un portafogli*o consiste nel trovare la migliore strategia che ci permetta di massimizzare il rendimento atteso, ossia il guadagno, e minimizzare il rischio.
Uno dei problemi che deve affrontare un soggetto, possessore di un dato patrimonio, è di come investire questo patrimonio su un dato periodo di tempo in modo da poter consumare in maniera ottimale e alla fine possedere ancora un residuo che conduce ad un beneficio.
Nella sezione 2.1 spiegheremo cosa vuol dire minimizzare il rischio in termini finanziari; nella sezione 2.2, invece, parleremo del criterio di ottimalità più comune, cioè la *massimizzazione dell'utilità attesa.* A tal proposito, innanzitutto introdurremo la nozione di *funzione d'utilità* utilizzandola per definire il problema dell'ottimizzazione di un portafoglio, poi descriveremo più dettagliatamente la problematica distinguendola nel sotto-problema più semplice della *massimizzazione dell'utilità attesa dalla ricchezza finale* e di quello più completo della *massimizzazione dell'utilità attesa derivante dal consumo intermedio e dalla ricchezza finale residua.*

2.1 Minimizzazione dei rischi

Ricordiamo che:

Definizione 2.1 Data una variabile aleatoria $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, costituita da un numero finito di elementi $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\}$, si definisce

- il *valore atteso di X*
$$E[X] = \sum_{k=1}^{n} x_k P(X = x_k)$$
- la *varianza di X*
$$var(X) = E\left[(X - E[X])^2\right]$$
che è una stima di quanto X dista dal suo valore atteso.

In termini finanziari, la varianza rappresenta la rischiosità, dunque minimizzare il rischio equivale a trovare una strategia che ci permetta di avere una minor varianza possibile.

2.2 Massimizzazione dell'utilità attesa

2.2.1 Funzione d'utilità

Definizione 2.2 Si consideri l'intervallo reale $I =]a, +\infty[$, con $a \leq 0$ costante fissata, eventualmente $a = -\infty$.
Una *funzione d'utilità* è una funzione di classe C^1
$$u : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
tale che

(I) u è strettamente crescente:
$$\forall x, y \in I,\ \ x < y \quad \Rightarrow \quad u(x) < u(y)$$

(II) u è strettamente concava:
$$\forall x, y \in I, \forall t \in [0, 1], \quad (1 - t)u(x) + tu(y) < u((1 - t)x + ty)$$
o equivalentemente
$$u''(x) < 0, \quad \forall x \in I$$

(III) Se $a > -\infty$, vale:

$$\lim_{v \to a^+} u'(v) = +\infty$$

se, invece, $a = -\infty$: u è superiormente limitata.

Per convenzione si usa estendere il dominio di una funzione d'utilità u a tutto $\mathbb{R}$ ponendo:

$$u(v) = -\infty, \quad \text{per } \ v \leq a$$

Questo deriva dal fatto che il nostro obbiettivo è quello di massimizzare l'utilità, quindi porre $u(v) = -\infty$, per $v \in \mathbb{R} \setminus I$ equivale ad escludere che i valori al di fuori dell'intervallo considerato I siano ottimali.

Alcuni classici esempi di funzione d'utilità sono i seguenti:

1) la **funzione d'utilità logaritmica**

$$u(v) = \log v, \quad v \in \mathbb{R}_+;$$

2) la **funzione d'utilità potenza**

$$u(v) = \frac{v^\gamma}{\gamma}, \quad v \in \mathbb{R}_+$$

dove γ è un parametro reale tale che $\gamma < 1, \gamma \neq 0$;

3) la **funzione d'utilità esponenziale**

$$u(v) = -e^{-v}, \quad v \in \mathbb{R}.$$

Possiamo verificare con facilità che le funzioni appena elencate sono d'utilità, infatti soddisfano tutte e tre le proprietà della funzione d'utilità:

1) la funzione logaritmica

$$u(v) = \log v, \quad v \in \mathbb{R}_+$$

(I) è strettamente crescente:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \ x < y \quad \Rightarrow \quad \log x < \log y$$

(II) è strettamente concava:

$$u''(v) = -\frac{1}{v^2} < 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}_+$$

(III) nel caso della funzione logaritmica $a = 0$, e vale:

$$\lim_{v \to a^+} u'(v) = \lim_{v \to 0^+} \frac{1}{v} = +\infty$$

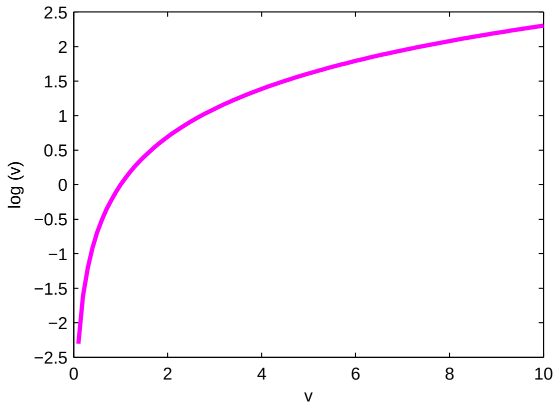

Figura 2.1: Funzione logaritmica

2) la funzione potenza

$$u(v) = \frac{v^\gamma}{\gamma}, \quad v \in \mathbb{R}_+$$

dove γ è un parametro reale tale che $\gamma < 1, \gamma \neq 0$

(I) è strettamente crescente:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \ \ x < y \quad \Rightarrow \quad \frac{x^\gamma}{\gamma} < \frac{y^\gamma}{\gamma}$$

(II) è strettamente concava:

$$u''(v) = (\gamma - 1)v^{\gamma-2} < 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}_+$$

in quanto $\gamma < 1, \gamma \neq 0$;

(III) nel caso della funzione potenza $a = 0$, e vale:

$$\lim_{v \to a^+} u'(v) = \lim_{v \to 0^+} v^{\gamma-1} = +\infty$$

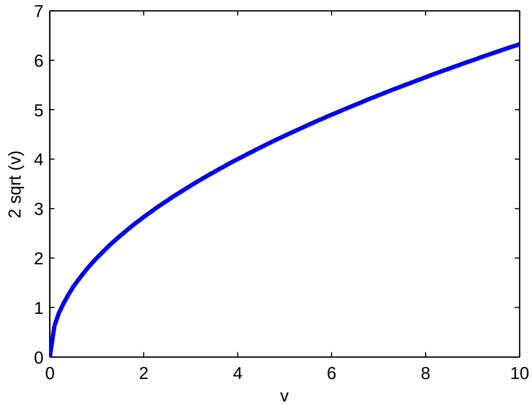

Figura 2.2: Funzione potenza, nel caso in cui $\gamma = \frac{1}{2}$

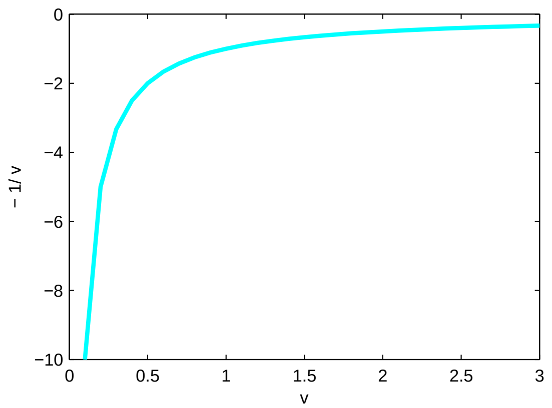

Figura 2.3: Funzione potenza, nel caso in cui $\gamma = -1$

3) la funzione esponenziale

$$u(v) = -e^{-v}, \quad v \in \mathbb{R}$$

(I) è strettamente crescente:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \ x < y \quad \Rightarrow \quad -e^{-x} < -e^{-y}$$

(II) è strettamente concava:

$$u''(v) = -e^{-v} < 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}$$

(III) nel caso della funzione esponenziale $a = -\infty$ e, come possiamo vedere anche dal grafico, u è superiormente limitata.

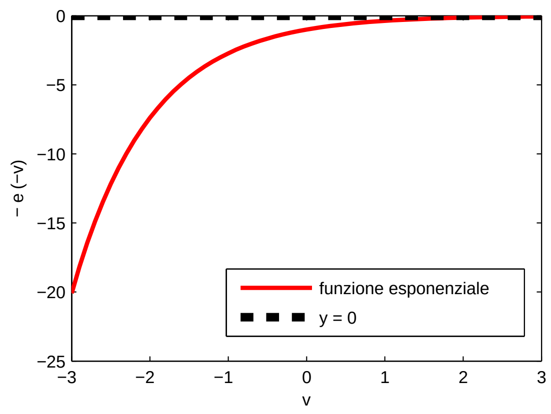

Figura 2.4: Funzione esponenziale

Considerati il valore della strategia autofinanziante (α, β), $V^{(\alpha)}$, il valore della strategia autofinanziante con consumo (α, β, C), $V^{(\alpha,C)}$ e le funzioni d'utilità $u, u_0, u_1, ..., u_N$ definite su I, siamo interessati ai seguenti classici problemi di ottimizzazione di portafoglio:

- **massimizzazione dell'utilità attesa dalla ricchezza finale:** fissato $V_0 \in \mathbb{R}_+$, il problema consiste nel determinare, se esiste,

$$\max_{\alpha} E\left[u\left(V_N^{(\alpha)}\right)\right] \tag{2.1}$$

dove il massimo è ricercato fra i processi α predicibili tali che $V_N^{(\alpha)} \in I$;

- **massimizzazione dell'utilità attesa dal consumo intermedio e dalla ricchezza finale:** fissato $V_0 \in \mathbb{R}_+$, il problema consiste nel determinare, se esiste,

$$\max_{\alpha,C} E\left[\sum_{n=0}^{N} u_n(C_n) + u\left(V_N^{(\alpha,C)} - C_N\right)\right] \tag{2.2}$$

dove il massimo è ricercato fra i processi α predicibili e C di consumo $(V_0, \alpha)-$ammissibili tali che $C_0, ..., C_N \in I$ e $\left(V_N^{(\alpha,C)} - C_N\right) \in I$.

Osservazione 2.3 *Un caso particolare del problema* (2.2) *è quello in cui* $u \equiv 0$, *ossia* $u\left(V_N^{(\alpha,C)} - C_N\right) = 0$. *In questo modo il secondo problema di ottimizzazione di portafoglio si riduce alla massimizzazione dell'utilità attesa dal solo consumo intermedio. Quindi, per la condizione di ammissibilità* *della strategia con consumo, secondo cui* $V_N^{(\alpha,C)} \geq C_N$, *e per la proprietà di monotonia della funzione d'utilità u, la strategia ottimale è tale che* $V_N^{(\alpha,C)} = C_N$, *ossia all'istante finale tutto il capitale viene consumato.*

Nelle sezioni successive osserveremo che questi problemi di ottimizzazione di un portafoglio hanno soluzione solo nel caso in cui il mercato sia libero da arbitraggi.

2.2.2 Utilità attesa dalla ricchezza finale

Analizzando il problema della massimizzazione dell'utilità attesa dalla ricchezza finale, osserviamo che vale il seguente teorema:

Teorema 2.4 *Esiste una strategia ottimale per il problema* (2.1) *se e solo se il mercato è libero da arbitraggi.*

Dimostrazione. Innanzitutto proviamo che se esiste una strategia ottimale per il problema della massimizzazione dell'utilità attesa dalla ricchezza finale, allora il mercato è libero da arbitraggi.
Sia α una strategia ottimale di valore iniziale $V_0^{(\alpha)} = v$ e supponiamo per assurdo che il mercato non sia libero da arbitraggi, cioè esista una strategia d'arbitraggio $\bar{\alpha}$ per la quale valga:

1) $V_0^{(\bar{\alpha})} = 0$

2) $V_N^{(\bar{\alpha})} \geq 0$

3) $P(V_N^{(\bar{\alpha})} > 0) > 0$

Allora la strategia $\alpha + \bar{\alpha}$ è tale che:

1) $V_0^{(\alpha+\bar{\alpha})} = V_0^{(\alpha)} + V_0^{(\bar{\alpha})} = v + 0 = v$

2) $V_N^{(\alpha+\bar{\alpha})} = V_N^{(\alpha)} + V_N^{(\bar{\alpha})} \geq V_N^{(\alpha)}$

3) $P(V_N^{(\alpha+\bar{\alpha})} > V_N^{(\alpha)}) > 0$

Risulta quindi che

$$V_N^{(\alpha+\bar{\alpha})} \geq V_N^{(\alpha)}$$

e dunque essendo la funzione d'utilità u strettamente crescente vale che

$$u(V_N^{(\alpha+\bar{\alpha})}) > u(V_N^{(\alpha)})$$

il che contraddice l'ottimalità di α.
Questo prova che se esiste una strategia ottimale, allora il mercato è libero da arbitraggi.

Viceversa, dimostriamo ora che se il mercato è libero da arbitraggi, allora esiste una strategia ottimale per il problema (2.1).
Indichiamo con $\mathcal{V}_v$ l'insieme dei valori finali raggiungibili con una strategia autofinanziante di valore iniziale pari a v:

$$\mathcal{V}_v = \{V_N^{(\alpha)} \mid \alpha \text{ predicibile}, V_0^{(\alpha)} = v\}$$

Per dimostrare la tesi ambientiamo il problema in uno spazio Euclideo indicando con M la cardinalità di $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_M\}$.
Sia Y una variabile aleatoria su Ω a valori reali e poniamo $Y(\omega_j) = Y_j$ identificando con Y il vettore di $\mathbb{R}^M$

$$Y = (Y_1, ..., Y_M) \tag{2.3}$$

Allora il valore atteso di Y vale

$$E^P[Y] = \sum_{j=1}^{M} Y_j P(\{\omega_j\}) \tag{2.4}$$

e il problema di ottimizzazione (2.1) equivale ad un problema di massimizzazione della funzione

$$f(V) := \sum_{j=1}^{M} u(V_j) P(\{\omega_j\}) = E^P[u(V)], \tag{2.5}$$

per $V \in \mathcal{V}_v \cap I^M$, cioè V è un vettore di $\mathbb{R}^M$ che indica il valore finale di una strategia predicibile con valore iniziale pari a v.
Si noti che $\mathcal{V}_v \cap I^M \neq \emptyset, \forall v > 0$: infatti la strategia α, che consiste nel detenere tutto il capitale nel titolo non rischioso (*bond*), ha valore iniziale $B_0 = v > 0$ e valore finale pari a $B_N = v(1+r)^N > a$ [1].

[1] In quanto avevamo definito il dominio della funzione d'utilità $I =]a, +\infty[$, con $a \leq 0$ costante fissata (eventualmente $a = -\infty$), mentre $v > 0, 1 + r > 0$.

Osserviamo anche che, per l'equazione (1.23) [2], vale

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_v &= \{V_N^{(\alpha)} \mid \alpha \text{ predicibile}, V_0^{(\alpha)} = v\} \\
&= \{B_N \tilde{V}_N^{(\alpha)} \mid \alpha \text{ predicibile}, V_0^{(\alpha)} = v\} \\
&= \{B_N\Big(V_0 + \sum_{n=1}^{N} \alpha_n(\tilde{S}_n - \tilde{S}_{n-1})\Big) \mid \alpha \text{ predicibile}, V_0^{(\alpha)} = v\} \\
&= \{B_N v + B_N \sum_{n=1}^{N} \alpha_n(\tilde{S}_n - \tilde{S}_{n-1}) \mid \alpha \text{ predicibile}, V_0^{(\alpha)} = v\} \quad (2.6)
\end{aligned}$$

In particolare, per come è stato appena definito, $\mathcal{V}_v$ è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^M$, ossia un sottoinsieme di $\mathbb{R}^M$ passante per il punto $B_N v \in \mathbb{R}^M$ e parallelo a $B_N \sum_{n=1}^{N} \alpha_n(\tilde{S}_n - \tilde{S}_{n-1})$, il quale è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^M$. Pertanto $\mathcal{V}_v$ è un insieme chiuso.

Per ipotesi avevamo considerato un mercato libero da arbitraggi, dunque, per il Primo Teorema fondamentale della valutazione (1.20), esiste una misura martingala Q. Rispetto a Q, per la (1.27), ogni $V \in \mathcal{V}_v$ verifica la seguente condizione

$$v = E^Q[B_N^{-1}V] = B_N^{-1}\sum_{j=1}^{M} V_j Q(\{\omega_j\}) \quad (2.7)$$

Ora utilizziamo la proprietà **(III)** della funzione d'utilità u.
Proviamo prima la tesi assumendo che il dominio I della funzione d'utilità sia inferiormente limitato, ossia $I =]a, +\infty[$, con $a > -\infty$.
Sia $(V^n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathcal{V}_v \cap I^M$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} E[u(V^n)] = \sup_{V \in \mathcal{V}_v \cap I^M} E[u(V)] \quad (2.8)$$

Poiché $V_j^n > a$ [3], segue dalla (2.7) che le componenti V_j^n sono limitate uniformemente in j e n. Questo deriva dal fatto che, per l'equazione (2.7), deve valere che $B_N^{-1}\sum_{j=1}^{M} V_j Q(\{\omega_j\}) = v$ costante, dunque se ci fossero delle V_j che tendono a $+\infty$, ci dovrebbero anche essere delle V_j che tendono a $-\infty$ in modo tale da 'bilanciare' la sommatoria e far risultare che $B_N^{-1}\sum_{j=1}^{M} V_j Q(\{\omega_j\}) = v$ costante. Ma $V_j^n > a > -\infty$, quindi non esistono

[2] E sapendo che $\tilde{V}_N = \frac{V_N}{B_N}$.

[3] In quanto $(V^n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione appartenente a $\mathcal{V}_v \cap I^M$ e ,per quanto osservato precedentemente, la strategia α, che consiste nel detenere tutto il capitale nel titolo non rischioso (*bond*), ha valore iniziale $B_0 = v > 0$ e valore finale pari a $B_N = v(1+r)^N > a$.

V_j che tendono a $-\infty$ e dunque le componenti V_j^n sono limitate uniformemente in j e n. Allora, a meno di passare ad una sotto-successione, (V^n) è convergente ad un limite $\hat{V}$

$$\lim_{n\to\infty} V^n = \hat{V}$$

e tale limite $\hat{V} \in \mathcal{V}_v$, essendo $\mathcal{V}_v$ un insieme chiuso. In particolare esiste una strategia predicibile $\hat{\alpha}$ tale che

$$V_0^{(\hat{\alpha})} = v, \qquad V_N^{(\hat{\alpha})} = \hat{V} \tag{2.9}$$

Concludiamo ora la prova mostrando che $\hat{V} \in I^M$, ossia

$$\hat{V}_j > a, \qquad j = 1, ..., M \tag{2.10}$$

Supponiamo per assurdo che $F := \{\hat{V} = V_N^{(\hat{\alpha})} = a\} \neq \emptyset$.[4]
Consideriamo la strategia α, di valore iniziale $V_0^{(\alpha)} = v$ e valore finale
$V_N^{(\alpha)} = v(1+r)^N$, che consiste nel detenere tutto il capitale nel titolo non rischioso (*bond*).
Sappiamo che, data una generica funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se f è concava vale la seguente relazione: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$f(x_1) - f(x_2) \leq f'(x_2)(x_1 - x_2)$$

o equivalentemente

$$f(x_2) - f(x_1) \geq f'(x_2)(x_2 - x_1)$$

Allora, per la concavità di u (proprietà **(II)** della funzione d'utilità),

[4]Non potrebbe valere che $\hat{V}_j < a$, in quanto avevamo posto $a > -\infty$, mentre $\hat{V}$ è finito.

$\forall \varepsilon \in]0,1[$ vale

$$
\begin{aligned}
&E\left[u\left(\varepsilon V_N^{(\alpha)}+(1-\varepsilon)V_N^{(\hat{\alpha})}\right)-u\left(V_N^{(\hat{\alpha})}\right)\right]\\
&\geq E\left[u'\left(\varepsilon V_N^{(\alpha)}+(1-\varepsilon)V_N^{(\hat{\alpha})}\right)\left(\varepsilon V_N^{(\alpha)}+(1-\varepsilon)V_N^{(\hat{\alpha})}-V_N^{(\hat{\alpha})}\right)\right]\\
&= E\left[u'\left(\varepsilon V_N^{(\alpha)}+(1-\varepsilon)V_N^{(\hat{\alpha})}\right)\left(\varepsilon V_N^{(\alpha)}+V_N^{(\hat{\alpha})}-\varepsilon V_N^{(\hat{\alpha})}-V_N^{(\hat{\alpha})}\right)\right]\\
&= \varepsilon E\left[u'\left(\varepsilon V_N^{(\alpha)}+(1-\varepsilon)V_N^{(\hat{\alpha})}\right)\left(V_N^{(\alpha)}-V_N^{(\hat{\alpha})}\right)\right]\\
&= \varepsilon\left(E\left[\mathbb{1}_F u'\left(\varepsilon V_N^{(\alpha)}+(1-\varepsilon)V_N^{(\hat{\alpha})}\right)\left(V_N^{(\alpha)}-V_N^{(\hat{\alpha})}\right)\right]\right)\\
&\quad+\varepsilon\left(E\left[\mathbb{1}_{\Omega\setminus F} u'\left(\varepsilon V_N^{(\alpha)}+(1-\varepsilon)V_N^{(\hat{\alpha})}\right)\left(V_N^{(\alpha)}-V_N^{(\hat{\alpha})}\right)\right]\right)\\
&= \varepsilon\left(E\left[\mathbb{1}_F u'\left(\varepsilon V_N^{(\alpha)}+(1-\varepsilon)a\right)\left(v(1+r)^N-a\right)\right]\right)\\
&\quad+\varepsilon\left(E\left[\mathbb{1}_{\Omega\setminus F} u'\left(\varepsilon V_N^{(\alpha)}+(1-\varepsilon)V_N^{(\hat{\alpha})}\right)\left(v(1+r)^N-V_N^{(\hat{\alpha})}\right)\right]\right)\\
&=: \varepsilon\left(I_1(\varepsilon)+I_2(\varepsilon)\right)
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

A questo punto, per arrivare all'assurdo, basta far vedere che esiste un ε per cui l'espressione

$$\varepsilon\left(I_1(\varepsilon)+I_2(\varepsilon)\right)>0$$

In questo modo, infatti, si avrebbe che

$$u\left(\varepsilon V_N^{(\alpha)}+(1-\varepsilon)V_N^{(\hat{\alpha})}\right)-u\left(V_N^{(\hat{\alpha})}\right)>0 \quad\Rightarrow\quad u\left(\varepsilon V_N^{(\alpha)}+(1-\varepsilon)V_N^{(\hat{\alpha})}\right)>u\left(V_N^{(\hat{\alpha})}\right)$$

il che è assurdo in quanto contraddice l'ottimalità di $\hat{V}$.
In effetti

$$u'\left(\varepsilon V_N^{(\alpha)}+(1-\varepsilon)a\right)=u'\left(\varepsilon v(1+r)^N+(1-\varepsilon)a\right)\longrightarrow+\infty$$

per $\varepsilon\to 0^+$, dato che per la proprietà **(III)** della funzione d'utilità se $a>-\infty$, $\lim_{v\to a^+}u'(v)=+\infty$.
Quindi anche

$$I_1(\varepsilon)+I_2(\varepsilon)\longrightarrow+\infty$$

per $\varepsilon\to 0^+$, essendo $I_2(\varepsilon)$ limitato come funzione di ε.
Dunque

$$\varepsilon\left(I_1(\varepsilon)+I_2(\varepsilon)\right)>0$$

se ε è sufficientemente piccolo.
Siamo così arrivati all'assurdo e allora

$$F:=\{\hat{V}=V_N^{(\hat{\alpha})}=a\}=\emptyset \quad\Longrightarrow\quad \hat{V}_j>a,\quad j=1,...,M \quad\Longrightarrow\quad \hat{V}\in I^M$$

Abbiamo così dimostrato la tesi nel caso in cui il dominio della funzione d'utilità sia inferiormente limitato, ossia $I =]a, +\infty[$, con $a > -\infty$.

Proviamo ora le tesi assumendo che la funzione d'utilità u sia superiormente limitata e che il suo dominio $I = \mathbb{R}$, ossia $a = -\infty$.
Osserviamo anzitutto che, per la concavità di u, si ha

$$\lim_{v \to -\infty} u(v) = -\infty \tag{2.12}$$

Come nel caso precedente, consideriamo una successione $(V^n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{V}_v$ tale che

$$\lim_{n \to \infty} E[u(V^n)] = \sup_{V \in \mathcal{V}_v} E[u(V)] \tag{2.13}$$

La tesi consiste nel dimostrare che (V^n) ammette una sotto-successione convergente. Procediamo per assurdo ed assumiamo che (V^n) non ammetta alcuna sotto-successione convergente e sia quindi non limitata. Utilizzando l'equazione (2.7) è facile provare che esistono due successioni di indici (k_n) e (j_n) tali che

$$\lim_{n \to \infty} V_{j_n}^{k_n} = -\infty$$

Ma allora dall'ipotesi di limitatezza superiore di u e dall'equazione (2.12) segue che

$$\lim_{n \to \infty} E[u(V^n)] = -\infty$$

e questo contraddice la (2.13) in quanto si avrebbe

$$\lim_{n \to \infty} E[u(V^n)] = \sup_{V \in \mathcal{V}_v} E[u(V)] = -\infty$$

il che è un assurdo.
Dunque, (V^n) è convergente, a meno di sotto-successioni, in $\mathcal{V}_v$ al valore finale di una strategia ottimale.

Con questo teorema abbiamo dunque provato che, considerata una funzione d'utilità u che gode delle proprietà **(I)**, **(II)**, **(III)**, esiste una strategia ottimale $\hat{\alpha}$ che ci permette di massimizzare l'utilità attesa dalla ricchezza finale

$$\max_{\hat{\alpha}} E[u(\hat{V})]$$

se e solo se il mercato è libero da arbitraggi.

□

2.2.3 Utilità attesa dal consumo intermedio e dalla ricchezza finale

Analogamente a quanto appena visto per l'utilità attesa dalla ricchezza finale, introduciamo il seguente teorema.

Teorema 2.5 *Esiste una strategia ottimale per il problema* (2.2) *se e solo se il mercato è libero da arbitraggi.*

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella del teorema (2.4).
Innanzitutto proviamo che se esiste una strategia ottimale che ci permette di massimizzare l'utilità attesa dal consumo intermedio e della ricchezza finale, allora il mercato è libero da arbitraggi.
Sia (α, C) una strategia con consumo ottimale di valore iniziale $V_0^{(\alpha,C)} = v$ e supponiamo per assurdo che il mercato non sia libero da arbitraggi, cioè che esista una strategia d'arbitraggio $\bar{\alpha}$ per la quale valga:

1) $V_0^{(\bar{\alpha})} = 0$

2) $V_N^{(\bar{\alpha})} \geq 0$

3) $P(V_N^{(\bar{\alpha})} > 0) > 0$

Allora la strategia $(\alpha + \bar{\alpha}, C)$ è tale che:

1) $V_0^{(\alpha+\bar{\alpha},C)} = V_0^{(\alpha,C)} + V_0^{(\bar{\alpha},C)} = v + 0 = v$

2) $V_N^{(\alpha+\bar{\alpha},C)} = V_N^{(\alpha,C)} + V_N^{(\bar{\alpha},C)} \geq V_N^{(\alpha,C)}$

3) $P(V_N^{(\alpha+\bar{\alpha},C)} > V_N^{(\alpha,C)}) > 0$

Dato che per ipotesi esiste una strategia con consumo ottimale per il problema (2.2), si ha che α è predicibile e C è un processo di consumo
$(V_0, \alpha)-$ ammissibile, dunque vale che

$$V_N^{(\alpha,C)} \geq C_N \quad \Longrightarrow \quad V_N^{(\alpha+\bar{\alpha},C)} \geq V_N^{(\alpha,C)} \geq C_N$$

e quindi C è anche un processo di consumo $(V_0^{(\alpha+\bar{\alpha},C)}, \alpha + \bar{\alpha})-$ ammissibile o equivalentemente $(v, \alpha + \bar{\alpha})-$ ammissibile.
Inoltre, per quanto appena visto,

$$P(V_N^{(\alpha+\bar{\alpha},C)} > V_N^{(\alpha,C)}) > 0$$

ed essendo la funzione d'utilità u strettamente crescente vale che

$$u\left(V_N^{(\alpha+\bar{\alpha},C)}\right) > u\left(V_N^{(\alpha,C)}\right)$$

il che contraddice l'ottimalità di (α, C).
Viceversa, dimostriamo ora che se il mercato è libero da arbitraggi allora esiste una strategia ottimale per il problema (2.2).
Indichiamo con $\mathcal{W}_v$ l'insieme delle coppie dei valori finali raggiungibili con una strategia autofinanziante con consumo di valore iniziale pari a v e dei processi di consumo C $(V_0, \alpha)-$ ammissibili:

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_v = \{(V, C)\ |\text{C processo di consumo}, C_N \leq V = V_N^{(\alpha,C)},\\ \text{con } \alpha \text{ predicibile}, V_0^{(\alpha,C)} = v\}\end{aligned} \tag{2.14}$$

In modo analogo a quanto fatto per la dimostrazione del teorema (2.4), ambientiamo il problema in uno spazio Euclideo, indicando con M la cardinalità di $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_M\}$.
Il problema di ottimizzazione (2.2) equivale al problema di determinazione del massimo della funzione

$$f(V, C) := \sum_{j=1}^{M} \left(\sum_{k=0}^{N} u_k(C_{k,j}) + u(V_j - C_{N,j}) \right) P(\{\omega_j\}) \tag{2.15}$$

sull'insieme

$$\mathcal{W}_{v,a} = \mathcal{W}_v \cap A$$

dove

$$A = \{(V, C) \mid C_{k,j} > a, \quad V_j - C_{N,j} > a, \quad \text{per } j = 1, ..., M, \quad k = 0, ..., N\}.^5$$

Si osservi che se $a < 0$, $\mathcal{W}_{v,a} = \mathcal{W}_v$ in quanto $\mathcal{W}_v$ diventa un caso particolare di A.
In base alla (1.45), si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_v = \Bigg\{ &(V, C) \mid \text{C adattato e non negativo}, C_N \leq V = V_N^{(\alpha,C)},\\ &V = B_N \left(v + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k(\tilde{S}_k - \tilde{S}_{k-1}) - \sum_{h=0}^{N-1} \tilde{C}_h \right), \text{con } \alpha \text{ predicibile} \Bigg\}\end{aligned} \tag{2.16}$$

[5] Ricordiamo che la funzione d'utilità u è definita sull'intervallo $I =]a, +\infty[$, con $a \leq 0$ ed eventualmente $a = -\infty$.

In particolare, analogamente a quanto visto nel teorema precedente, $\mathcal{W}_v$ è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^M$ ed è pertanto un insieme chiuso.
Inoltre, poiché per ipotesi il mercato è libero da arbitraggi, per il Primo Teorema fondamentale della valutazione (1.20), esiste almeno una misura martingala Q. Rispetto a Q, per le equazioni (1.27), (2.16) vale quindi che

$$v = V_0^{(\alpha,C)} = E^Q \left[B_N^{-1} V + \sum_{k=0}^{N-1} B_k^{-1} C_k \right] \tag{2.17}$$

$\forall (V, C) \in \mathcal{W}_v$.
Dalla (2.17) segue facilmente che $\mathcal{W}_v$ è limitato e avendo visto precedentemente che è anche chiuso, per il teorema di Heine-Borel [6], segue che $\mathcal{W}_v$ è compatto.
Nel caso in cui $a < 0$, questo è sufficiente a concludere la prova: infatti abbiamo già notato che in questo caso $\mathcal{W}_{v,a} = \mathcal{W}_v$ ed essendo $\mathcal{W}_v$ compatto anche $\mathcal{W}_{v,a}$ sarà compatto e quindi, considerando la funzione continua f, per il teorema di Weierstrass [7], f ha massimo su tale dominio.
Nel caso, invece, in cui $a = 0$, l'esistenza di una strategia ottimale si prova procedendo come nella dimostrazione del teorema (2.4): consideriamo una successione $(V^n, C^n) \in \mathcal{W}_{v,a}$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} f(V^n, C^n) = \sup_{\mathcal{W}_{v,a}} f$$

Dato che $\mathcal{W}_v$ è compatto, e dunque chiuso e limitato, a meno di passare ad una sotto-successione, esiste

$$\lim_{n\to\infty} (V^n, C^n) =: (\hat{V}, \hat{C}) \in \mathcal{W}_v$$

Rimane infine da provare che in effetti $(\hat{V}, \hat{C}) \in \mathcal{W}_{v,a}$. Per far ciò, avendo visto che $(\hat{V}, \hat{C}) \in \mathcal{W}_v$, occorre dimostrare che $(\hat{V}, \hat{C}) \in A$, ossia

$$\hat{C}_{k,j} > 0, \quad \hat{V}_j - \hat{C}_{N,j} > 0, \quad j = 1, ..., M, \quad k = 0, ..., N$$

La dimostrazione prosegue analogamente a quella del teorema (2.4) e si basa sull'ipotesi che $\lim_{v\to 0^+} u'(v) = +\infty$. □

[6] Teorema di Heine-Borel:
un sottoinsieme K di $\mathbb{R}^N$ è compatto se e solo se K è chiuso e limitato.

[7] Teorema di Weierstrass:
Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme chiuso e limitato e sia $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f ammette minimo e massimo.

Capitolo 3

Metodo della Programmazione Dinamica

Per risolvere il problema dell'ottimizzazione di un portafoglio ci sono due approcci distinti: il metodo "martingala" e il metodo della Programmazione Dinamica.
Il **metodo "martingala"**, il quale è ispirato al problema della copertura di un derivato, decompone il problema dell'ottimizzazione in due sottoproblemi:

- un problema "statico", in cui, a partire da un dato patrimonio iniziale, determina il valore finale ottimale del portafoglio autofinanziante;
- il problema della determinazione della strategia di investimento ottimale la quale replica il valore finale ottimale del portafoglio.

Il **metodo della Programmazione Dinamica (PD)**, invece, è un metodo generale per l'ottimizzazione intertemporale sia in un contesto deterministico che stocastico e lo analizzeremo in questo capitolo in modo tale da vedere concretamente come si risolve il problema dell'ottimizzazione di un portafoglio.

3.1 Algoritmo del metodo PD

In uno spazio di probabilità finito (Ω, $\mathcal{F}$, P) consideriamo un processo stocastico $(V_n)_{n=0,\dots,N}$ (per fissare le idee, si può pensare a V come al valore di un portafoglio) la cui evoluzione dipende dalla scelta di un "processo di controllo" (che solitamente è un investimento e/o un processo di consumo).
Più precisamente assumiamo che valga la seguente relazione ricorsiva

$$V_k = G_k(V_{k-1}, \mu_k; \eta_{k-1}(V_{k-1})) \tag{3.1}$$

per $k = 1, ..., N$, dove

- $\mu_1, ..., \mu_N$ sono variabili aleatorie $d-$dimensionali indipendenti (tipicamente esse rappresentano i fattori di rischio che guidano la dinamica dei titoli di un mercato discreto);
- $\eta_0, ..., \eta_N$ sono generiche funzioni

$$\eta_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^l, \qquad k = 0, ..., N$$

  con $l \in \mathbb{N}$, dette *funzioni di controllo* o, più semplicemente, *controlli*;
- $G_1, ..., G_N$ sono generiche funzioni

$$G_k : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^l \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad k = 1, ..., N.$$

Questa equazione ci dice dunque che il valore attuale del portafoglio è funzione del valore dello stesso fino all'istante precedente, dei fattori di rischio che guidano la dinamica dei titoli di un mercato discreto e degli investimenti fatti.

Esempio 3.1 (Algoritmo nel caso di una strategia autofinanziante) In un mercato discreto del tipo (1.1), (1.2), consideriamo una strategia autofinanziante e indichiamo con $\pi^1, ..., \pi^d$ le proporzioni investite sui titoli rischiosi, definite nell'equazione (1.9). Supponiamo che la strategia sia funzione del valore del portafoglio, ossia valga

$$\alpha_k = \alpha_k(V_{k-1}), \qquad k = 1, ..., N$$

allora, per la proposizione (1.11), il valore della strategia di solo investimento senza consumo verifica la relazione ricorsiva (3.1) dove

$$V_k = G_k(v, \mu_k; \eta_{k-1}) = v \left(1 + r_k + \sum_{i=1}^{d} \eta_{k-1}^i (\mu_k^i - r_k) \right) \tag{3.2}$$

in cui η è il processo $d-$dimensionale le cui componenti sono le proporzioni investite sui titoli rischiosi

$$\eta_k = \begin{cases} (\pi_{k+1}^1, ..., \pi_{k+1}^d) & \text{per } k = 0, ..., N-1, \\ 0 & \text{per } k = N \end{cases} \tag{3.3}$$

Esempio 3.2 (Algoritmo nel caso di una strategia autofinanziante con consumo)
Consideriamo, ora, una strategia autofinanziante con consumo e assumiamo che la strategia e il consumo siano funzioni del valore del portafoglio, ossia valga

$$\alpha_k = \alpha_k(V_{k-1}), \qquad C_k = C_k(V_k), \qquad k = 1, ..., N$$

Allora, per la proposizione (1.31), il valore della strategia verifica la relazione ricorsiva (3.1) dove

$$V_k = G_k(v, \mu_k; \eta_{k-1}) = v\left(1 + r_k + \sum_{i=1}^{d} \eta_{k-1}^{i}(\mu_k^i - r_k)\right) - (1 + r_k)\eta_{k-1}^{d+1} \quad (3.4)$$

con η processo $(d+1)-$dimensionale le cui componenti sono le proporzioni investite sui titoli rischiosi e il consumo

$$\eta_k = \begin{cases} (\pi_{k+1}^1, ..., \pi_{k+1}^d, C_k) & \text{per } k = 0, ..., N-1, \\ (0, ..., 0, C_N) & \text{per } k = N \end{cases} \quad (3.5)$$

Notazione 3.3 Fissati $v \in \mathbb{R}_+$ e $n \in \{0, 1, ..., N-1\}$, indichiamo con

$$(V_k^{n,v})_{k=n,...,N}$$

il processo definito da $V_n^{n,v} = v$ e ricorsivamente dalla relazione (3.1) per $k > n$.
Inoltre poniamo

$$U^{n,v}(\eta_n, ..., \eta_N) = E\left[\sum_{k=n}^{N} u_k(V_k^{n,v}, \eta_k(V_k^{n,v}))\right] \quad (3.6)$$

dove $u_0, ..., u_N$ sono funzioni assegnate

$$u_n : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^l \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad n = 0, ..., N$$

Ricordiamo che il nostro obbiettivo è quello di ottimizzare un portafoglio, il che consiste nel determinare l'estremo superiore di $U^{0,v}(\eta_0, ..., \eta_N)$ al variare dei controlli $\eta_0, ..., \eta_N$, ossia

$$\sup_{\eta_0, ..., \eta_N} U^{0,v}(\eta_0, ..., \eta_N) \quad (3.7)$$

In secondo lungo, siamo anche interessati a determinare, nel caso esistano, i controlli ottimali che realizzano tale estremo superiore.
Il metodo della Programmazione Dinamica (PD) per risolvere il problema di ottimizzazione (3.7) *è basato sull'idea che se un controllo è ottimale su un'intera successione di periodi, allora deve essere ottimale su ogni singolo periodo.*
Più precisamente, il metodo PD è basato sul seguente risultato:

Teorema 3.4 *Per ogni* $n = 0, ..., N$ *vale*

$$\sup_{\eta_n,...,\eta_N} U^{n,v}(\eta_n, ..., \eta_N) = W_n(v) \tag{3.8}$$

dove W_n *è definito ricorsivamente da*

$$\begin{cases} W_N(v) = \sup\limits_{\xi \in \mathbb{R}^l} u_N(v, \xi), \\ W_{n-1}(v) = \sup\limits_{\xi \in \mathbb{R}^l} \Big(u_{n-1}(v, \xi) + E\Big[W_n\big(G_n(v, \mu_n; \xi)\big) \Big] \Big), \qquad n = N, \ \dots, \ 1 \end{cases} \tag{3.9}$$

Ossia, il metodo della Programmazione Dinamica con il sistema (3.9) *fornisce un algoritmo deterministico in cui ad ogni passo si determinano, ricorsivamente a ritroso, il valore e il controllo ottimi mediante un'usuale operazione di massimizzazione scalare. Osserviamo, infatti, che, sotto opportune ipotesi che garantiscano che l'estremo superiore nella* (3.8) *è raggiunto (ossia in realtà è un massimo), l'algoritmo permette anche di determinare i controlli ottimi* $\bar{\eta}_0, ..., \bar{\eta}_N$. *Tali controlli risultano essere definiti dai punti di massimo delle funzioni da ottimizzare nella* (3.9)*: più precisamente assumiamo che per ogni* n *esista* $\bar{\xi}_n \in \mathbb{R}^l$ *che massimizza la funzione*

$$\xi \longmapsto u_{n-1}(v, \xi) + E\Big[W_n\big(G_n(v, \mu_n; \xi)\big) \Big]$$

e osserviamo che $\bar{\xi}_n$ *dipende implicitamente da* v. *Allora la funzione* $\bar{\eta}_{n-1}$, *tale che* $\bar{\eta}_{n-1}(v) = \bar{\xi}_n$, *è un controllo ottimo.*

Nel capitolo 2 abbiamo parlato dei classici problemi di ottimizzazione di un portafoglio:

- la massimizzazione dell'utilità attesa dalla ricchezza finale;
- la massimizzazione dell'utilità attesa dal consumo intermedio e dalla ricchezza finale.

Cerchiamo ora di analizzarli utilizzando il metodo della Programmazione Dinamica.

Esempio 3.5 (Massimizzazione dell'utilità attesa dalla ricchezza finale)
Il valore di una strategia autofinanziante è definito ricorsivamente da

$$V_k = G_k(V_{k-1}, \mu_k; \pi_k) = V_{k-1}\left(1 + r_k + \sum_{i=1}^{d} \pi_k^i(\mu_k^i - r_k)\right), \tag{3.10}$$

per k= 1, ..., N.
Abbiamo, inoltre

$$U^{n,v}(\pi_{n+1}, ..., \pi_N) = E\left[u(V_N^{n,v})\right]$$

e utilizzando il teorema (3.4) è possibile ricavare il valore e il controllo ottimi attraverso la seguente relazione ricorsiva

$$\sup_{\pi_{n+1},\dots,\pi_N} E\left[u(V_N^{n,v})\right] = W_n(v) \tag{3.11}$$

dove

$$\begin{cases} W_N(v) = u(v), \\ W_{n-1}(v) = \sup\limits_{\bar{\pi}_n \in \mathbb{R}^d} E\Big[W_n\big(G_n(v, \mu_n; \bar{\pi}_n)\big)\Big], \qquad \text{n= N, ..., 1} \end{cases} \tag{3.12}$$

in cui u è la funzione d'utilità definita nel capitolo 2.

Notazione 3.6 Nell'equazione (3.12) utilizziamo il simbolo soprassegnato $\bar{\pi}$ per distinguere i vettori in $\mathbb{R}^d$ dalle funzioni indicate semplicemente con π come abbiamo fatto nel problema di ottimizzazione (3.11).

Esempio 3.7 (Massimizzazione della utilità attesa dal consumo intermedio e dalla ricchezza finale)
Il valore di una strategia autofinanziante con consumo è definito ricorsivamente da

$$V_k = G_k(V_{k-1}, \mu_k; \pi_k, C_{k-1}) = (V_{k-1} - C_{k-1})(1 + r_k) + V_{k-1}\sum_{i=1}^{d} \pi_k^i(\mu_k^i - r_k), \tag{3.13}$$

per k= 1, ..., N.
In questo caso abbiamo

$$U^{n,v}(\pi_{n+1},...,\pi_N,C_n,...,C_N) = E\left[\sum_{k=n}^{N} u_k(C_k) + u(V_N^{n,v} - C_N)\right]$$

Per il teorema (3.4) vale dunque

$$\sup_{\substack{\pi_{n+1},...,\pi_N \\ C_n,...,C_N}} E\left[\sum_{k=n}^{N} u_k(C_k) + u(V_N^{n,v} - C_N)\right] = W_n(v) \tag{3.14}$$

dove

$$\begin{cases} W_N(v) = \sup\limits_{\bar{C}_N \leq v} (u_N(\bar{C}_N) + u(v - \bar{C}_N)), \\ W_{n-1}(v) = \sup\limits_{\substack{\bar{\pi}_n \in \mathbb{R}^d \\ \bar{C}_{n-1} \in \mathbb{R}_+}} \Big(u_{n-1}(\bar{C}_{n-1}) + E\Big[W_n\big(G_n(v,\mu_n;\bar{\pi}_n,\bar{C}_{n-1})\big)\Big]\Big), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{n= N, ..., 1} \end{cases} \tag{3.15}$$

Studiamo ora il caso della funzione d'utilità logaritmica nel modello binomiale e vediamo come risolvere i problemi di ottimizzazione di un portafoglio utilizzando il metodo della Programmazione Dinamica.

3.2 Utilità logaritmica finale con il metodo PD

Consideriamo il problema della massimizzazione dell'utilità attesa dalla ricchezza finale nel caso della funzione d'utilità logaritmica in un modello binomiale (paragrafo 1.7) a N periodi, con tassi di crescita u, di decrescita d, tasso privo di rischio r e indichiamo con p la probabilità di crescita. Vediamo come si può risolvere tale problema usando il metodo PD.
Riprendendo l'esempio (3.5), la dinamica del valore del portafoglio è data da

$$V_n = G_n(V_{n-1},\mu_n;\pi_n) = \begin{cases} V_{n-1}(1+r+\pi_n(u-1-r)), & \text{se } \mu_n = u-1, \\ V_{n-1}(1+r+\pi_n(d-1-r)), & \text{se } \mu_n = d-1, \end{cases}$$

dove π, che indica la proporzione del titolo rischioso nel portafoglio, costituisce il processo di controllo.

Osserviamo che, a partire da $V_{n-1} > 0$, si ha

$$V_n > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 1 + r + \pi_n(u - 1 - r) > 0 \\ 1 + r + \pi_n(d - 1 - r) > 0 \end{cases}$$

o equivalentemente, ricordando che nel modello binomiale per avere un mercato libero da arbitraggi deve valere la condizione secondo cui $d < 1 + r < u$, si ha

$$V_n > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \pi_n \in D =]a, b[$$

dove

$$a = -\frac{1+r}{u-1-r}, \qquad b = \frac{1+r}{1+r-d} \tag{3.16}$$

Considerando l'algoritmo (3.12) nel caso della funzione d'utilità logaritmica abbiamo

$$W_N(v) = \log v, \tag{3.17}$$

$$W_{N-1}(v) = \max_{\bar{\pi}_N \in D} E\Big[\log G_N(v, \mu_N; \bar{\pi}_N)\Big] = \log v + \max_D f \tag{3.18}$$

con $v \in \mathbb{R}_+$ e

$$f(\pi) = p \log(1 + r + \pi(u - 1 - r)) + (1 - p) \log(1 + r + \pi(d - 1 - r))$$

Vale dunque

$$f'(\pi) = p \frac{u - 1 - r}{1 + r + \pi(u - 1 - r)} + (1 - p) \frac{d - 1 - r}{1 + r + \pi(d - 1 - r)}$$

e tale derivata si annulla nel punto

$$\bar{\pi} = \frac{(1 + r)(pu + (1 - p)d - 1 - r)}{(u - 1 - r)(1 + r - d)} \tag{3.19}$$

Si nota facilmente che $\bar{\pi} \in D =]a, b[$, con a, b definiti nella (3.16), per ogni scelta di parametri $p \in]0, 1[$ e con $d < 1 + r < u$. Osserviamo, inoltre, che

$$\lim_{\pi \to a^+} f(\pi) = \lim_{\pi \to b^-} f(\pi) = -\infty$$

e dunque $\bar{\pi}$ è un punto di massimo assoluto per f e definisce la strategia ottimale

$$\pi_N^{max}(v) = \bar{\pi}, \quad v \in \mathbb{R}_+$$

Inoltre vale

$$\begin{aligned}\max_D f &= f(\bar{\pi}) \\ &= p\log\Big(\frac{p(u-d)}{1+r-d}\Big)+(1-p)\log\Big(\frac{(1-p)(u-d)}{u-1-r}\Big)+\log(1+r)\end{aligned} \tag{3.20}$$

Al passo successivo abbiamo

$$\begin{aligned}W_{N-2}(v) &= \max_{\bar{\pi}_{N-1}\in D} E\Big[\log G_{N-1}(v,\mu_{N-1};\bar{\pi}_{N-1})\Big]+\max_D f \\ &= \log(v)+2\max_D f \\ &= \log v + 2f(\bar{\pi})\end{aligned} \tag{3.21}$$

e dunque ricorsivamente al generico passo n si ha

$$W_{N-n}(v)=\log v + nf(\bar{\pi})$$

In definitiva, il valore ottimo dell'utilità attesa a partire da un capitale iniziale $V_0 = v > 0$ è pari a

$$W_0(v)=\log v + Nf(\bar{\pi})$$

dove $f(\bar{\pi})$ l'avevamo definita nell'equazione (3.20), e la relativa strategia ottima è costate e pari a

$$\pi_n^{max}(v)=\bar{\pi}, \quad v\in\mathbb{R}_+, \quad n=1,...,N$$

con $\bar{\pi}$ definito nell'equazione (3.19).

Osservazione 3.8 *Ricordiamo che nel modello binomiale la misura martingala l'avevamo definita nel seguente modo*

$$q=Q(1+\mu_n=u)=\frac{1+r-d}{u-d}$$

Detto questo, l'equazione (3.19) della strategia ottimale può essere riscritta nel seguente modo

$$\bar{\pi}=\frac{(1+r)(p-q)}{(u-d)q(1-q)}$$

Inoltre vale anche

$$W_n(v)=\log v+(N-n)\Big(p\log\frac{p}{q}+(1-p)\log\frac{1-p}{1-q}+\log(1+r)\Big)$$

3.3 Consumo intermedio nel caso dell'utilità logaritmica con il metodo PD

Consideriamo il problema della massimizzazione dell'utilità attesa dal consumo intermedio e dalla ricchezza finale nel caso della funzione d'utilità logaritmica in un modello binomiale a N periodi, con tassi di crescita u, di decrescita d, tasso privo di rischio r e con probabilità p di crescita. Vediamo come si può risolvere tale problema usando il metodo PD.
Riprendendo l'esempio (3.7), la dinamica del valore del portafoglio è data da

$$
\begin{aligned}
V_n &= G_n(V_{n-1}, \mu_n; \pi_n, C_{n-1}) \\
&= (V_{n-1} - C_{n-1})(1+r) + V_{n-1}\pi_n(\mu_n - r) \\
&= (V_{n-1} - C_{n-1})(1+r) + \begin{cases} V_{n-1}\pi_n(u-1-r) \\ V_{n-1}\pi_n(d-1-r) \end{cases}
\end{aligned}
$$

dove π indica la proporzione del titolo rischioso nel portafoglio e C è il processo di consumo.
A differenza di quanto fatto con il caso dell'utilità finale, qui non imponiamo a π e C di garantire che $V_n \geq 0$. Questo costituirebbe un vincolo nel problema di ottimizzazione e introdurrebbe complicazioni nei calcoli. Piuttosto ci limiteremo a verificare se $V_n \geq 0$.
Seguendo sempre l'esempio (3.7) con la scelta delle funzioni d'utilità

$$
\begin{aligned}
u_n(C) &= \log C, \quad n = 0, ..., N \\
u(C) &\equiv 0
\end{aligned}
$$

in base all'algoritmo (3.15) nel caso della funzione d'utilità logaritmica abbiamo

$$
W_N(v) = \max_{\bar{C}_N \leq v} u_N(\bar{C}_N) = \log v,
$$

$$
\begin{aligned}
W_{n-1}(v) &= \max_{\bar{\pi}_n, \bar{C}_{n-1}} \Big(\log \bar{C}_{n-1} + E\Big[W_n(G_n(v, \mu_n; \bar{\pi}_n, \bar{C}_{n-1}))\Big]\Big) \\
&= \max_{\bar{\pi}_n, \bar{C}_{n-1}} f_{n,v}(\bar{\pi}_n, \bar{C}_{n-1})
\end{aligned}
$$

per $n = N, ..., 1$, con $v \in \mathbb{R}_+$ e

$$
\begin{aligned}
f_{n,v}(\pi, C) = \log C &+ pW_n\Big((v-C)(1+r) + \pi v(u-1-r)\Big) \\
&+ (1-p)W_n\Big((v-C)(1+r) + \pi v(d-1-r)\Big)
\end{aligned}
$$

Supponendo che $f_{n,v}$ ammetta massimo assoluto nel punto $(\bar{\pi}_{n,v}, \bar{C}_{n-1,v})$, questo definisce la strategia ottimale

$$\pi_n^{max}(v) = \bar{\pi}_{n,v}, \quad C_{n-1}^{max}(v) = \bar{C}_{n-1,v}$$

per $v \in \mathbb{R}_+, \quad n = 1, ..., N.$

Bibliografia

[1] A. Pascucci, W. J. Runggaldier, *'Finanza Matematica'*, Springer- Verlag, Milano, 2009.

[2] A. Pascucci, *'Calcolo stocastico per la finanza'*, Springer- Verlag, Milano, 2007

[3] E. Rosazza Gianin, C. Sgarra, *'Esercizi di finanza matematica'*, Springer-Verlag, Milano, 2007

Ringraziamenti

Desidero innanzitutto ringraziare il professor Andrea Pascucci che con pazienza ed impegno mi ha aiutata a realizzare questa tesi. I professori che con i loro elogi e rimproveri mi hanno fatta crescere molto facendomi diventare la persona che sono, determinata e forte. Ringrazio infinitamente la dottoressa Alice Barbieri a cui mi sono sempre rivolta per i suoi preziosi consigli. E poi vorrei ringraziare coloro che hanno permesso tutto ciò, i miei genitori, che come me hanno fatto sacrifici in modo tale che potessi raggiungere questo importante traguardo. Ringrazio mio padre, perché con il suo sano ottimismo e la sua positività mi ha rincuorata e sostenuta nei momenti più difficili. Mia madre, perché con i suoi abbracci e la sua fiducia mi ha dato la forza di andare avanti e a lei dedico questa tesi, affinché questo importante traguardo le dia la forza di lottare. Ringrazio mia sorella Alice, suo marito Alessio e Maya, la mia piccola ma già viziata nipotina, che sono per me una seconda famiglia su cui so' che posso sempre contare ed è grazie a loro che non sono impazzita in questi 3 anni. Ringrazio il mio ragazzo Luca perché è riuscito a starmi accanto in questi anni meritando una laurea per la pazienza dimostrata. Ringrazio col cuore tutti i miei parenti ed amici che in questo momento così difficile che la mia famiglia sta' attraversando ci stanno dimostrando tutto il loro affetto non facendoci sentire mai soli. Poi, un ringraziamento speciale va' a mia nonna Egle che assiste alla mia laurea in prima fila dà lassù. Ed infine vorrei congratularmi con me stessa perché se sono qui oggi lo devo sopratutto alla mia testardaggine e determinazione che mi hanno impedito di non mollare nei momenti più difficili.
Grazie a tutti voi.