Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

LOGICHE MODALI
E
TEORIA DEGLI INSIEMI

Tesi di Laurea in Principi della Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Piero Plazzi

Presentata da:
Claudia Cicero

Sessione 1
Anno Accademico 2012/13

Indice

Introduzione

La logica modale è la logica della necessità e della possibilità, del deve essere e del può essere. Con ciò si intende che la logica modale considera non solo la verità e falsità rispetto a ciò che è o non è per come le cose stanno attualmente, ma considera anche cosa sarebbe vero o falso se le cose fossero diversamente. G. E. Hughes, H. Cresswell in [Hughes-Cresswell 1973]

La logica modale solleva un enorme numero di problemi filosofici che, nel corso della stesura della tesi, non è stato possibile ignorare totalmente, soprattutto per quanto riguarda le questioni filosofiche legate a punti essenziali, ad esempio il paragrafo sull'identità del capitolo 3: non avendo le competenze adeguate, ci siamo limitati ad accennarle.

Lo scopo di questa tesi è studiare, da un punto di vista prettamente logico-matematico, una parte del panorama delle logiche modali, introdotte da Aristotele ma sviluppate solo nel secolo scorso, illustrandone la storia, i contenuti e una delle numerose applicazioni.

Nel capitolo 1 ci soffermeremo sulla loro storia e il loro sviluppo nel corso degli anni, trascurando le logiche modali aristoteliche e quelle medioevali che, seppur importanti perché in esse si trovano le basi della logica modale che oggi conosciamo, erano prive di un'adeguata semantica che giustificasse le formule contenenti operatori modali. A proposito della semantica, ci è sembrato opportuno prestare maggiore attenzione al lavoro di Kripke: fu infatti egli a trovarne una adatta sia alla la logica modale, che ad un'altra logica non classica, quella intuizionista, più legata al pensiero matematico.

Il capitolo 2 è dedicato alla logica proposizionale modale, con riferimento ai tre sistemi maggiormente studiati e discussi (T, $S4$ ed $S5$). In esso verranno presentati gli operatori modali di necessità e possibilità ed introdotti assiomi opportuni che, ampliando il sistema di assiomi di Hilbert-Ackermann per la logica classica, daranno luogo ai tre sistemi di cui verificheremo la consistenza. Verrà inoltre descritta la semantica per i sistemi modali e fatto il confronto con la logica intuizionista da cui è possibile definire delle traduzioni che trasformano fbf intuizioniste in fbf modali.

La completezza dei sistemi modali verrà dimostrata nel capitolo 3 dove, dopo aver introdotto la logica modale dei predicati, definiremo un metodo, detto degli insiemi consistenti massimali, per dimostrare la completezza di ogni sistema proposizionale o predicativo. Dedicheremo poi attenzione ai sistemi modali con identità: questi, come già accennato, sono importanti anche per le questioni filosofiche che ne derivano.

Infine, nel capitolo 4, l'attenzione si sposta all'applicazione della logica modale alla teoria degli insiemi. Dopo un breve accenno alla teoria delle classi e degli insiemi, definiremo una traduzione dal linguaggio della logica classica al linguaggio modale, costruiremo una famiglia di S4-modelli (si veda il capitolo 2 per definizione di S4-modello) e dimostreremo, non solo che le traduzioni degli assiomi della teoria degli insiemi, compreso l'assioma di scelta, sono valide in ognuno di questi modelli, ma anche che l'ipotesi del continuo è indipendente da essi.

Capitolo 1

Premessa storica

Esiste un settore della logica, detto *logica filosofica* che tratta tematiche tipiche della filosofia, ad esempio: la ricerca circa i significati dei concetti di necessità e possibilità e la costruzione di logiche che trattano di concetti imprecisi.

Le logiche modali ne sono un esempio significativo; in questo capitolo ne esporremo brevemente la storia, seguendo [Geymonat 1973]. Il termine *modali* deriva dalla tradizione scolastica secondo cui le espressioni *possibile(Pos), impossibile, necessario(Nec), contingente* rappresentano modi d'essere delle espressioni a cui si riferiscono. Sviluppata in epoca medievale soprattutto da Guglielmo da Ockam che, nella *Summa Logicae*, riconosceva la pluralità delle modalità degli enunciati e il carattere esemplare delle quattro già citate, era già stata introdotta da Aristotele negli *Analitici primi* e nella *Metafisica*.

Il filosofo greco dopo aver fissato una definizione di *necessario* come *impossibilità del contrario* alla quale si riconducono tutte le altre definizioni di necessità, e caratterizzato il *possibile* mediante il principio *se qualcosa esiste, è legittimo inferire che è possibile* e dunque, partendo dal presupposto che il concetto di possibile compare già nella definizione di necessario, mostrava l'equivalenza tra *necessario* e *non possibile non*, equivalenza descritta nel *De Interpretatione* dal seguente quadrato logico che noi presentiamo utilizzando le notazioni moderne

$$\begin{array}{ll} Nec(a) \leftrightarrow \neg Pos(\neg a) & Nec\neg(a) \leftrightarrow \neg Pos(a) \\ \neg Nec(\neg a) \leftrightarrow Pos(a) & \neg Nec(a) \leftrightarrow Pos(\neg a) \end{array} \tag{1.1}$$

In epoca moderna le modalità cessarono di essere studiate nell'ambito della logica e divennero competenza esclusiva della filosofia. Persino i *Principia*

Mathematica di Russell e Whitehead ignoravano le modalità e un'eventuale loro collocazione nell'ambito della logica. Ciò dipende dall'aver ammesso una rigida semantica proposizionale, per cui ogni proposizione può essere interpretata estensionalmente solo come vera o falsa e dall'aver introdotto su questa base i connettivi logici come funzioni di verità considerate solo estensionalmente (cioè vero-funzionali).

1.1 Gli anni Venti del Novecento: i sistemi di C. I. Lewis

Negli anni Venti dello scorso secolo si assistette a una rinnovata fase di indagine sulla logica e sui fondamenti della matematica. Una delle ragioni è che in quel periodo erano molte le critiche rivolte ad alcuni assiomi di esistenza su cui si basavano i *Principia Mathematica* e ai paradossi da essi derivanti. Questo era il periodo dei tentativi di formalizzazione della logica intuizionista e del confronto tra le idee di questa con quelle delle altre scuole di filosofia della matematica. È stato anche il decennio del ridimensionamento della scuola logicista a causa di critiche esterne, dei ripensamenti che autori come F.P. Ramsey pubblicavano in quegli anni, dello sviluppo della scuola formalista di Hilbert e degli importanti risultati sulla teoria degli insiemi. Infine in questi anni che si svilupparono le cosiddette logiche non classiche. Il logico americano C. I. Lewis riteneva che il linguaggio dei *Principia Mathematica* fosse troppo povero a livello proposizionale e inadeguato ad esprimere le connessioni inferenziali e che occorressero connettivi più flessibili di quelli tradizionali che necessitavano però di interpretazioni diverse e più sfumate.

Il primo sistema fu presentato da Lewis nel 1918 e perfezionato nel 1932 nel suo *Symbolic Logic*. Egli si proponeva di sviluppare un calcolo proposizionale che non fosse ristretto a relazioni estensionali e fosse basato su una relazione di implicazione che non presentasse i paradossi dell'implicazione materiale che si possono esprimere dicendo ad esempio che una proposizione vera è implicata da qualunque proposizione, da cui la tautologia $[p \to (q \to p)]$ o che una proposizione falsa implica qualunque proposizione $[\neg q \to (q \to p)]$ o che qualunque siano gli enunciati p e q uno dei due implica sempre l'altro $(p \to q) \vee (q \to p)$. Se si definisce *p è consistente con q* come *p non implica la falsità di q* $(\neg(p \to \neg q))$ e *q è indipendente da p* come *p non implica q* $(\neg(p \to q))$, diventa impossibile che due o più proposizioni qualunque possano essere contemporaneamente consistenti ed indipendenti. Ciò, secondo Lewis, derivava dall'avere limitato lo studio della logica al momento estensionale, trascurando le relazioni intensionali fra le proposizioni e così sviluppò un calcolo basato sul significato di *implicazione* come *deducibilità* di una proposizione dall'altra.

Nel suo calcolo, q è deducibile da p ($p \twoheadrightarrow q$) non quando $p \rightarrow q$ è vera ma quando essa è *necessariamente* vera, cioè:

$$p \twoheadrightarrow q = \neg\Diamond(p \wedge \neg q)$$

ossia

$$p \twoheadrightarrow q = \Box(p \rightarrow q)$$

dove $\Box$ è l'operatore di necessità, $\Diamond$ quello di possibilità e, come accennato prima, vale l'equivalenza $\Box A = \neg\Diamond\neg A$.

La teoria dell'implicazione materiale ($\rightarrow$) si ricava come sottosistema del sistema dell'implicazione stretta (o implicitazione, $\twoheadrightarrow$) ma le due relazioni non coincidono, infatti, con opportune premesse che vedremo nel prossimo capitolo, è possibile dimostrare $(p \twoheadrightarrow q) \twoheadrightarrow (p \rightarrow q)$ ma l'implicazione inversa non è derivabile come teorema. Sulla base di questo sistema Lewis costruì altri quattro sistemi via via più forti, aggiungendo come assiomi degli enunciati non derivabili nel sistema iniziale. Il significato semantico di questi sistemi, tuttavia, non è chiaro intuitivamente, quindi Lewis era costretto a ricorrere all'uso di tavole di verità con più di due valori di verità (matrici) per i singoli connettivi, costruite caso per caso, per ottenere le dimostrazioni di indipendenza.

La mancanza di un'analisi semantica completa dei sistemi modali di Lewis è rimasta per decenni l'ostacolo più grave alla diffusione delle idee del matematico.

1.2 Gli anni sessanta: la semantica di Kripke

In questa sezione e nelle seguenti seguiremo [Mangione-Bozzi 1993].

Saul Kripke aveva scopi diversi da quelli dei suoi predecessori quando, nel 1965, riprese lo studio delle logiche modali per fornire una sistemazione soddisfacente alla semantica per la logica intuizionista, prendendo spunto dai sistemi di Lewis.

Partendo dalla nozione di intensione introdotta da R. Carnap nel 1947, egli vede negli operatori modali delle funzioni che si applicano non all'estensione (il valore di verità) di un enunciato ma alla sua intensione (cioè al suo significato). Quest'ultima viene vista come una funzione che associa a diversi mondi possibili, in corrispondenza a diverse circostanze, diverse estensioni. Diversamente da Carnap, Kripke non concepisce l'insieme dei mondi possibili come determinato una volta per tutte dall'insieme di tutte le descrizioni coerenti di stati possibili, ma considera più astrattamente i mondi possibili come indici scelti in un insieme prefissato. Egli associa al dominio M di un'interpretazione $\mathfrak{M}$ una funzione di interpretazione I che ad ogni $m \in M$ associa una valutazione classica, nel caso proposizionale, o una struttura classica nel caso di logiche del primo ordine.

Dunque, l'*intensione* di una formula $\mathcal{A}$ in un'interpretazione è l'insieme dei mondi in cui $\mathcal{A}$ è vera, cioè l'insieme degli $m \in M$ per cui $\mathfrak{M} \vDash_m \mathcal{A}$, assegnata induttivamente, utilizzando le clausole classiche per $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$ e valutando $\Box$ facendo riferimento all'insieme M dei mondi possibili.

Successivamente sono emersi i limiti della semantica di Kripke ma fu attraverso le sue strutture che K. Segerberg, D. Gabbay, D. Makinson e molti altri gettarono le basi di una vera e propria teoria dei modelli per la logica proposizionale modale, studiando decidibilità, proprietà di interpolazione. La sua analisi, infatti, forniva uno strumento unificante in grado di mettere in luce relazioni, fino ad allora insospettate, tra tutti i diversi sistemi noti, portando alla creazione di nuovi, superando così il grosso ostacolo all'accettazione delle logiche modali, cioè la mancanza di una semantica chiara e sufficientemente articolata da permettere di ottenere risultati di completezza.

1.2.1 Le critiche di essenzialismo

Dal punto di vista filosofico, invece, il contributo più importante dell'analisi di Kripke fu il riscattare la logica modale dalle accuse di essenzialismo aristotelico che Quine aveva denunciato dalla fine degli anni quaranta. Le critiche di Quine colpivano quei tentantivi che erano stati condotti, a partire dai lavori di Ruth Barcan Marcus del 1946, per estendere la logica modale enunciativa ad una predicativa del primo ordine. In tali sistemi compariva la *formula di Barcan*, dal significato marcatamente essenzialista: $\Diamond\exists xP \rightarrow \exists x\Diamond Px$ che afferma come lecito il passaggio dalla possibile esistenza di un ente all'esistenza di un ente possibile (la formula di Barcan verrà approfondita nel capitolo 3 di questa tesi).

Kripke riusciva ad estendere la sua semantica al caso predicativo in un modo tale da rendere praticamente impossibile la derivazione della formula di Barcan. L'idea è quella di assegnare ad ogni mondo possibile un insieme di oggetti esistenti in esso e di unire tutti questi insiemi in un unico universo U che rappresenta l'insieme degli oggetti possibili che esistono in qualche mondo. L'interpretazione dei quantificatori non viene estesa a tutto U ma la verità in un dato mondo di un enunciato contenente un quantificatore verrà valutata restringendo l'interpretazione del quantificatore all'insieme degli elementi di quel mondo. In questo modo mostrava come la refutazione della formula di Barcan fosse connessa alla possibilità che, passando da un mondo ad uno accessibile, l'universo degli individui si allarghi e come la necessità di ogni identità corrispondesse al fatto che in questo passaggio si assumesse la conservazione tanto dell'esistenza quanto della diversità degli individui.

Un'altra critica mossa da Quine riguardava incongruenze legate all'identità. Nella logica classica dei predicati, l'identità viene rappresentata dall'operatore binario di uguaglianza $=$ e $x = y$ significa che x e y sono lo stesso individuo, aggiungendo i due assiomi:

I1 $a = a$

I2 $(a = b) \to (\alpha \to \beta)$ dove α e β differiscono solo per il fatto che in uno o più occorrenze in cui α presenta libera a, β ha libera b.

Le stesse aggiunte possono essere fatte a tutti i sistemi dei predicati modali introdotti da Lewis ma in questi ogni affermazione di identità vera è necessariamente vera, se $x = y$ è necessario che essi siano lo stesso oggetto. Dato però che le logiche intensionali, in particolare quelle modali, dipendono dalla descrizione, è facile escogitare controesempi. Per esempio l'enunciato *l'uomo della porta accanto è il sindaco* è un dato contingente, perché è logicamente possibile che l'uomo della porta accanto non sia il sindaco. Oppure, per usare un esempio di Frege, anche se la stella del mattino è lo stesso corpo astrale della stella della sera, questo è un fatto astronomico contingente, non una verità necessaria della logica.

Un modo per evitare i controesempi sarebbe quello di costruirli in modo che esprimano una verità necessaria. Nell'esempio citato, sia l'essere della porta accanto, che l'essere il sindaco sono proprietà contingenti, non necessarie. Però se si intende come tale da significare che l'oggetto che possiede la proprietà di essere l'uomo della porta accanto è identico all'oggetto che ha la proprietà di essere il sindaco, allora lo stiamo costruendo come una frase che asserisce che un oggetto variamente descritto è identico a se stesso, senza difficoltà a considerarla una verità necessaria.

1.3 I successori di Kripke

La semantica predicativa di Kripke non è l'unica possibile, altre furono sviluppate da J. Hintikka, R. Thomason e altri e studi sistematici sulle varie alternative sono stati condotti da K. Fine, K. Bowen ed altri tra gli anni sessanta e i primi anni settanta. Le variazioni riguardano sostanzialmente l'interpretazione delle costanti predicative e quelle dei quantificatori. Lavorando opportunamente a livello semantico si è giunti a diverse formulazioni della logica modale con identità che, pur discostandosi dall'interpretazione classica, risultano facilmente assiomatizzabili.

A partire dagli anni sessanta si è assistito a uno sviluppo delle ricerche volte ad individuare strutture modello in grado di fornire interpretazioni rispetto alle quali i vari sistemi conosciuti fossero completi. In quegli anni furono molte le ricerche nell'ambito della logica dell'intensione e con lo stesso slancio ricevuto dalle scoperte di Kripke. Mentre molti si dedicavano alla pubblicazione di manuali dedicati alla logica modale, per esempio [Hughes-Cresswell 1973] e quello di J.Zeeman del 1973, altri si dedicavano alle applicazioni delle tecniche di Kripke a settori della logica fino ad allora inesplorati.

Inoltre si fece largo la tendenza a non disperdersi nella ricerca di risultati parziali relativi a singoli sistemi, per tentare uno studio organico e generale della pluralità dei possibili sistemi modali: i tre volumi di Krister Serberger *An Essay in classical modal logic* del 1972 sono dedicati ad un'esplorazione sistematica della semantica della logica modale; Bengt Hansson e Peter Gärdenfors, nel 1973, cercarono di mettere ordine nello spettro dei sistemi modali analizzando la potenza della semantica di Kripke in relazione ad altre semantiche- in particolare quella degli intorni e quella booleana- e tentarono un'analisi dei sistemi modali utilizzando le nozioni di *ampiezza* (una misura dell'intervallo tra la logica più debole e quella più forte tra quelle che possono essere determinate da una struttura semantica del tipo in questione) e *profondità* (la misura del numero di logiche tra i due estremi che possono essere determinate da tali strutture).

Di particolare interesse sono le ricerche di Robert Goldblatt e S.K. Thomason sulle semantiche al secondo ordine in cui si assume che ogni modello sia corredato di una famiglia privilegiata di insiemi di mondi, ciascuno dei quali corrisponde intuitivamente a una proposizione.

Un passo ulteriore verso il potenziamento della logica intensionale e in particolare di quella modale venne compiuto nel 1974 da D.Gallin che nel volume *Intensional and higher order modal logic* sviluppava una teoria degli oggetti intensionali sotto forma di una logica modale di ordine superiore.

La semantica di Kripke è stata estesa anche alla fisica, per esempio Aldo Bressan nel 1972 applicava la logica modale quantificata a problemi di fondazione della fisica. Bas Van Fraassen infatti aveva osservato che la nozione di mondo possibile, a dispetto della sua apparente metafisicità, si presta a delle naturali applicazioni empiriche.

Un esempio di applicazione alla matematica, preso in considerazione in questa tesi, è l'applicazione alla teoria assiomatica degli insiemi, ZF. R. Smullyan e M. Fitting nel 1996 hanno pubblicato [Smullyan-Fitting 1996] dove, dopo aver esposto gli assiomi di ZF e presentato una traduzione dal linguaggio della logica classica al linguaggio modale, costruiscono una famiglia di modelli modali rispetto ai quali gli assiomi di ZF sono veri e in cui si riesce a dimostrare l'indipendenza da questi dell'ipotesi del continuo e dell'assioma di scelta.

Ancora oggi in questo campo molte questioni rimangono aperte e molte alternative non indagate: la cosa non stupisce, dato che questi problemi sono strettamente legati ad antichi interrogativi filosofici sulla natura dell'identità, della necessità e del concetto di individuo.

Capitolo 2

Logica proposizionale modale

Tra le proposizioni vere possiamo distinguere quelle che sono vere solo occasionalmente e quelle che devono necessariamente essere vere. Allo stesso modo avviene la distinzione tra proposizioni occasionalmente false e proposizioni che devono essere necessariamente false.

Introduciamo informalmente le seguenti definizioni. Indichiamo con p e q due enunciati (proposizioni vere o false) qualsiasi.

Definizione 2.1. Una proposizione che deve essere vera in qualunque contesto di un certo tipo è detta *necessariamente vera* o *verità necessaria* e $\Box$ è chiamato *operatore di necessità.* Se si afferma che p dev'essere necessariamente vera, si scrive $\Box p$, ottenendo così un nuovo enunciato.

Definizione 2.2. Una proposizione che deve essere falsa in qualunque contesto di un certo tipo è detta *impossibile.*

Definizione 2.3. Una proposizione che non è né necessaria né impossibile è detta *contingente.*

Definizione 2.4. Una proposizione non impossibile è detta *possibile* e $\Diamond$ è chiamato *operatore di possibilità.*

Osservazione 1.

1. Poiché la classe delle proposizioni possibili include tutte le proposizioni vere, in essa sono comprese tutte le proposizioni, anche quelle necessarie, eccetto quelle impossibili o false.

2. Per necessità si intende la necessità legata a un certo tipo di affermazioni (per esempio di natura giuridica, fisica, eccetera), nel senso che una proposizione necessaria è vera indipendentemente da come stanno le cose o da come si presenta il mondo.

3. Analogamente per impossibilità, possibilità e contingenza si intende l'impossibilità, la possibilità e la contingenza legata a un certo tipo di affermazioni.

4. Esse sono strettamente correlate l'una all'altra: è infatti possibile definire qualunque delle tre nei termini della quarta. Già Aristotele, come accennato nel capitolo 1 (pag. 7 e seguenti) , aveva affermato che una proposizione è necessaria se non è possibile che sia falsa.

Definizione 2.5. Diremo che p *implicita* o *implica strettamente* q e scriveremo $p \twoheadrightarrow q$ se q segue necessariamente da p.

Gli operatori $\Box$, $\Diamond$ e $\twoheadrightarrow$ sono detti *operatori modali* e i sistemi di logica il cui linguaggio li comprende vengono chiamati *logiche modali*. Questi sistemi sono tutti fondati sul calcolo proposizionale classico, ma gli operatori modali non sono vero-funzionali, in quanto il valore di verità di una proposizione in cui appaiono non è determinato dal valore di verità delle proposizioni a cui vengono applicati, e per questo non si possono rappresentare mediante i connettivi classici ($\neg$, $\vee$ e i loro composti) perché questi sono tutti vero-funzionali: di qui la neessità di un loro sviluppo sintattico.

La non vero-funzionalità degli operatori modali non permette di ricavare una qualche ovvia definizione formale di validità per formule modali, tale da fornire sempre risultati inequivocabili. Ci sono certe condizioni che un sistema debba soddisfare per essere interpretato come sistema modale. Considereremo quindi un certo numero di sistemi modali assiomatici che siano tali da soddisfare tutti questi requisiti ma che siano differenti l'uno dall'altro per la presenza o assenza di alcune delle formule meno ovviamente valide.

I requisiti intuitivi sono quelli che seguono:

1. Data la connessione tra necessità e possibilità, devono essere valide le seguenti equivalenze:

$$\Box p \leftrightarrow \neg\Diamond\neg p$$
$$\Diamond p \leftrightarrow \neg\Box\neg p.$$

   Non è necessario che sistemi che contengono queste equivalenze abbiano come primitivi sia $\Box$ che $\Diamond$ in quanto è possibile, grazie ad esse, definire uno in funzione dell'altro.

2. Ci sono state diverse controversie filosofiche circa l'analisi corretta dell'implicitazione ma nessuno ha mai messo in discussione che tutte le volte che p implicita q è impossibile che p sia vera senza che q sia a sua volta vera. Per questo bisogna che sia valida:

$$(p \twoheadrightarrow q) \rightarrow \neg\Diamond(p \wedge \neg q).$$

Assumendo che valga il viceversa, l'implicazione appena descritta diventa l'equivalenza:

$$(p \twoheadrightarrow q) \leftrightarrow \neg\Diamond(p \wedge \neg q).$$

Grazie a questa equivalenza, a quelle del punto 1. e alla definizione di $\rightarrow$, diventa possibile definire $\twoheadrightarrow$ con $\Box(p \rightarrow q)$.

Quando due proposizioni si implicano strettamente a vicenda, diciamo che ciascuna delle due è *strettamente equivalente* all'altra e utilizziamo il simbolo $=$.

3. Poiché gli operatori modali non sono vero-funzionali, occorre che in qualunque sistema modale plausibile $\Box p$ non sia sempre equivalente a una qualche funzione di verità di p e, poiche tutti gli altri operatori modali sono definibili in termini di $\Box$ è sufficiente formulare le condizioni solo relativamente ad esso. Richiederemo quindi che, in generale, non debba ritenersi valida nessuna delle seguenti quattro possibilità che sono le uniche per un connettivo unario:

$$\Box p \leftrightarrow p$$
$$\Box p \leftrightarrow \neg p$$
$$\Box p \leftrightarrow (p \vee \neg p)$$
$$\Box p \leftrightarrow (p \wedge \neg p).$$

4. Imponiamo che $\Box p \rightarrow p$, infatti tutto ciò che è necessariamente vero dovrebbe essere vero. Questa formula viene chiamata *assioma di necessità*. Un principio analogo è l'*assioma di possibilità*, $p \rightarrow \Diamond p$ che afferma che tutto ciò che è vero è possibile.

5. Se α è una formula valida, lo sarà anche $\Box\alpha$. Quindi in un sistema modale assiomatico ci si aspetta di avere la regola di trasformazione secondo cui, se α è una formula modale valida, tale è $\Box\alpha$.

6. L'ultimo principio intuitivamente corretto è che tutto ciò che segue logicamente da una verità necessaria è a sua volta necessariamente vero. Richiederemo dunque che sia valida:

$$(\Box p \wedge (p \twoheadrightarrow q)) \rightarrow \Box q.$$

Questi sistemi corrispondono ai sistemi assiomatici di tipo Hilbert-Ackermann (per leggi logiche).

Seguendo [Hughes-Cresswell 1973] esporremo i tre più conosciuti.

2.1 Il sistema T

Il sistema più debole che soddisfa tutte le condizioni enunciate è il sistema T, proposto per la prima volta da Robert Feys nel 1937. L'alfabeto di T è quello che segue:

Simboli primitivi

variabili proposizionali (lettere) p, q, ...

operatori unari $\neg$, $\Box$

operatore binario $\vee$

parentesi (,)

Le regole di formazione delle fbf sono:

FR1 Una variabile a sé stante è una fbf.

FR2 Se α è una fbf, tali sono $\neg\alpha$ e $\Box\alpha$.

FR3 Se α e β sono fbf, lo è anche $(\alpha \vee \beta)$.

Interpreteremo le lettere p, q,... come variabili i cui valori sono proposizioni. Le lettere greche, invece, verranno usate per rappresentare qualsiasi fbf indifferentemente. Esse sono variabili del metalinguaggio, nel senso che non sono simboli del sistema ma vengono utilizzati quando si parla di esso. A livello semantico ogni proposizione assume esattamente un valore di verità: **T** (true, vero) o **F** (false, falso).

Definizioni

$\wedge$, $\rightarrow$, e $\leftrightarrow$ vengono definiti come nella logica classica, inoltre:

$\Diamond\alpha := \neg\Box\neg\alpha$

$\alpha \twoheadrightarrow \beta := \Box(\alpha \rightarrow \beta)$

$\alpha \eqcirc \beta := (\alpha \twoheadrightarrow \beta) \wedge (\beta \twoheadrightarrow \alpha) = (\Box(\alpha \rightarrow \beta)) \wedge (\Box(\beta \rightarrow \alpha))$

Assiomi

Assiomi classici (di Hilbert Ackermann) :

A1 $(p \vee p) \to p$

A2 $q \to (p \vee q)$

A3 $(p \vee q) \to (q \vee p)$

A4 $(q \to r) \to ((p \vee q) \to (p \vee r))$

Assiomi modali :

A5 $\Box p \to p$ (assioma di necessità)

A6 $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ (distributività di $\Box$ rispetto a $\to$)

Regole di trasformazione

Valgono le regole classiche di sostituzione uniforme e Modus Ponens (MP), oltre alla

Regola di necessitazione (N) : Se α è derivabile in T, lo è anche $\Box\alpha$.

Osservazione 2. Come si può intuire dall'uso della regola di sostituzione, dagli assiomi di H.-A. e da MP, i sistemi modali estendono il sistema delle tautologie classiche.

Osservazione 3. Data la regola di sostituzione, enunciamo molti teoremi con riferimento alle lettere enunciative.

2.1.1 Regole di trasformazione derivate

Tutte le regole derivate per tautologie sono soddisfatte.

Si può ricavare un'ulteriore regola di trasformazione utile per dimostrare diversi teoremi in T. Se $(\alpha \to \beta)$ è una tesi (ossia un teorema di T), per la regola di necessitazione, anche $\Box(\alpha \to \beta)$ è una tesi. Sostituendo in **A6**, è una tesi $\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$. Per Modus Ponens, quindi, è una tesi $\Box\alpha \to \Box\beta$.

Otteniamo così la prima regola di trasformazione:

DR1: Se $(\alpha \to \beta)$ è una tesi, lo è anche $\Box\alpha \to \Box\beta$.

Vedremo com'è possibile derivare ulteriori regole di trasformazione utilizzando dei teoremi di T: metteremo in evidenza le più importanti.

Teorema 2.1.1.
$p \to \Diamond p$.

Dimostrazione. Sostituendo in **A5** $\neg p$ a p, si ha $\Box(\neg p) \to \neg p$, da cui segue $\neg\neg p \to \neg\Box(\neg p)$.

Poiché $p \to \neg\neg p$, dall'implicazione trovata e dalla definizione di $\Diamond$, si conclude. $\Box$

Dal teorema, per MP, segue la regola di trasformazione:
DR2: Se α è derivabile in T, lo è anche $\Diamond\alpha$.

Teorema 2.1.2.
$(p \eqcirc q) \to (\Box p \leftrightarrow \Box q)$ *(per il viceversa vedi sotto, teoremi 2.1.3, 2.1.4).*

Dimostrazione. Per **A6** e per definizione di $\twoheadrightarrow$, $(p \twoheadrightarrow q) \to (\Box p \to \Box q)$ e, scambiando p con q, $(q \twoheadrightarrow p) \to (\Box q \to \Box p)$.

Quindi $((p \twoheadrightarrow q) \wedge (q \twoheadrightarrow p)) \to ((\Box p \to \Box q) \wedge (\Box q \to \Box p))$: per definizione di $\eqcirc$ e $\leftrightarrow$, il teorema è dimostrato. $\Box$

Teorema 2.1.3 (Legge di distribuzione)**.**
$\Box(p \wedge q) \leftrightarrow (\Box p \wedge \Box q)$.

Dimostrazione. Applichiamo **DR1** ai seguenti teoremi della logica classica che, ovviamente, valgono anche in T:

$$(p \wedge q) \to p$$

$$(p \wedge q) \to q.$$

Otteniamo

$$\Box(p \wedge q) \to \Box p$$

e

$$\Box(p \wedge q) \to \Box q$$

da cui, per la legge classica di composizione,

$$\Box(p \wedge q) \to (\Box p \wedge \Box q). \tag{2.1}$$

Adesso applichiamo **DR1** alla legge classica di aggiunzione. Otteniamo

$$\Box p \to \Box(q \to (p \wedge q)). \tag{2.2}$$

Sostituendo q a p e $(p \wedge q)$ a q in A6, otteniamo

$$\Box(q \to (p \wedge q)) \to (\Box q \to \Box(p \wedge q)). \tag{2.3}$$

Per la transitività dell'implicazione, da 2.2 e 2.3 si ottiene

$$\Box p \to (\Box q \to \Box(p \wedge q))$$

che è classicamente equivalente a

$$(\Box p \wedge \Box q) \to \Box(p \wedge q). \tag{2.4}$$

Da 2.1 e 2.4, per la legge di aggiunzione e definizione di $\leftrightarrow$, si ottiene

$$\Box(p \wedge q) \leftrightarrow (\Box p \wedge \Box q).$$

$\Box$

Questo teorema esprime una proprietà importante della necessità logica, cioè che una congiunzione è necessaria se e solo se ciascuno dei congiunti è necessario singolarmente. $\Box p \wedge \Box q$ è detta *forma distribuita di* $\Box(p \wedge q)$.

Dai risultati appena dimostrati, segue anche:

Teorema 2.1.4.
$\Box(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p = q)$.

Si veda [Hughes-Cresswell 1973] per la dimostrazione.

Da questi teoremi segue la regola di trasformazione:

DR3: Se $\alpha \leftrightarrow \beta$ è una tesi, lo è anche $\Box\alpha \leftrightarrow \Box\beta$.

Facciamo vedere che in T vale la **regola di sostituzione di equivalenti**:

se α è derivabile in T e β differisce da α solo per avere qualche fbf δ in una o più occorrenze in cui α ha una fbf γ, allora se $(\gamma \leftrightarrow \delta)$ è un teorema di T, anche β è una tesi.

Dimostrazione. Il modo standard per stabilire che vale la regola di sostituzione di equivalenti consiste nel provare che se $(\gamma \leftrightarrow \delta)$ è una tesi, lo sono anche:

$$\neg\gamma \leftrightarrow \neg\delta$$

$$(\gamma \vee \zeta) \leftrightarrow (\delta \vee \zeta)$$

e, per le logiche modali, bisogna aggiungere alla lista

$$\Box\gamma \leftrightarrow \Box\delta.$$

Le prime due sono teoremi della logica classica, la terza segue da DR3. Quindi, se α è una qualunque fbf costruita a partire da γ usando $\neg$ e $\Box$ come unici operatori unari e $\vee$ come unico operatore binario, e β è costruita a partire da δ esattamente nello stesso modo in cui è costruita α, per induzione sulla costruzione di fbf di T, se $(\gamma \leftrightarrow \delta)$ è una tesi di T, lo è anche $(\alpha \leftrightarrow \beta)$: da quest'ultima equivalenza, se α è una tesi, lo è anche β. $\Box$

Teorema 2.1.5.
$\Box p \leftrightarrow \neg\Diamond\neg p$.

Dimostrazione. Poiché $p \leftrightarrow \neg\neg p$, $\Box p \leftrightarrow \neg\neg\Box p$ e quindi $\Box p \leftrightarrow \neg\neg\Box\neg\neg p$ che, per definizione di $\Diamond$, è equivalente a $\Box p \leftrightarrow \neg\Diamond\neg p$. □

Si dimostrano facilmente i seguenti corollari del teorema 2.1.5:

Corollario 2.1.6. $\Box\neg p \leftrightarrow \neg\Diamond p$.

Corollario 2.1.7. $\neg\Box p \leftrightarrow \Diamond\neg p$.

Corollario 2.1.8. $\Box\Box p \leftrightarrow \neg\Diamond\Diamond\neg p$.

Corollario 2.1.9. $\Box\Box\neg p \leftrightarrow \neg\Diamond\Diamond p$.

Corollario 2.1.10. $\Diamond\Diamond\neg p \leftrightarrow \neg\Box\Box p$.

Corollario 2.1.11. $\Box\Diamond\neg p \leftrightarrow \neg\Diamond\Box p$.

Da questi, la regola: in una qualunque sequenza di $\Box$ e $\Diamond$, questi due operatori possono essere rimpiazzati l'uno con l'altro, purché sia inserito o soppresso un $\neg$ sia subito prima che subito dopo la sequenza. Questa è detta *regola di interscambio tra* $\Box$ *e* $\Diamond$.

Teorema 2.1.12.
$\neg\Diamond(p \vee q) \leftrightarrow (\neg\Diamond p \wedge \neg\Diamond q)$.

Dimostrazione. Per la legge di distribuzione: $\Box(\neg p \wedge \neg q) \leftrightarrow (\Box\neg p \wedge \Box\neg q)$, da cui segue, per la regola di interscambio, $\neg\Diamond\neg(\neg p \wedge \neg q) \leftrightarrow (\neg\Diamond p \wedge \neg\Diamond q)$ e, dato che $\neg(\neg p \wedge \neg q) = (p \vee q)$, il teorema è dimostrato. □

Teorema 2.1.13 (Legge di $\Diamond$-distribuzione)**.**
$\Diamond(p \vee q) \leftrightarrow (\Diamond p \vee \Diamond q)$.

Teorema 2.1.14.
$(p \twoheadrightarrow q) \rightarrow (\Diamond p \rightarrow \Diamond q)$.

Abbiamo così un'ulteriore regola derivata:
DR4: Se $\alpha \rightarrow \beta$ è una tesi, lo è anche $\Diamond\alpha \rightarrow \Diamond\beta$.
L'ultima regola derivata si ricava dalle precedenti, applicando i seguenti teoremi.

Teorema 2.1.15.
$(\Box p \vee \Box q) \rightarrow \Box(p \vee q)$.

Teorema 2.1.16.
$\Diamond(p \wedge q) \rightarrow (\Diamond p \wedge \Diamond q)$.

Teorema 2.1.17 (Consequentia Mirabilis per T)**.**
$(\neg p \twoheadrightarrow p) \leftrightarrow \Box p$.

Dimostrazione. Applicando **DR3** a $(\neg p \to p) \leftrightarrow p$, si ottiene

$$\Box(\neg p \to p) \leftrightarrow \Box p$$

che, per definizione di $\twoheadrightarrow$ è la tesi. $\Box$

Teorema 2.1.18.
$(p \twoheadrightarrow \neg p) \leftrightarrow \Box\neg p$.

Teorema 2.1.19.
$((p \twoheadrightarrow p) \wedge (\neg q \twoheadrightarrow p)) \leftrightarrow \Box p$.

Teorema 2.1.20 (Primo paradosso dell'implicazione stretta)**.**
$\Box p \to (q \twoheadrightarrow p)$.

Teorema 2.1.21 (Secondo paradosso dell'implicazione stretta)**.**
$\Box\neg p \to (p \twoheadrightarrow q)$.

Teorema 2.1.22.
$\Box p \to (\Diamond q \to \Diamond(p \wedge q))$.

DR5: Se α è una tesi, lo è anche $(\Diamond\beta \to \Diamond(\alpha \wedge \beta))$.

2.1.2 Consistenza di T

In questo paragrafo dimostreremo che T è consistente, cioè, se α è derivabile in T, $\neg\alpha$ non è una tesi di T.

Per prima cosa costruiamo la trasformata classica α' di una fbf α di T, riscrivendola in notazione primitiva e sopprimendo ogni occorrenza di $\Box$. La trasformata di una fbf di T sarà dunque una fbf classica tale che $\neg(\alpha')$ sarà la trasformata di $\neg\alpha$, $(\alpha \vee \beta)' = \alpha' \vee \beta'$ e questo per tutti i connettivi.

Proviamo ora che la trasformata di una tesi di T è una fbf valida della logica classica (una tautologia).

Ciò vale sia per i primi quattro assiomi, che sono già di per sé tautologie, che per **A5** e **A6**, in quanto le loro trasformate sono A5' e A6', cioè

$$\neg p \vee p$$

e

$$\neg(\neg p \vee q) \vee (\neg p \vee q)$$

entrambe tautologie.

Ogni tesi di T o è un assioma o è una fbf ottenuta dall'applicazione delle regole di sostituzione, Modus Ponens e Necessitazione a uno o più assiomi.

Siano α', β',... rispettivamente le trasformate di α, β,...

Se β è ottenuta da α per sostituzione uniforme di γ a qualche variabile di α, β' si può ottenere da α' sostituendo γ' a quella stessa variabile in α'. La sostituzione uniforme conserva la validità nella logica classica, quindi se α' è valida, lo è anche β'.

Se β è ottenuta da α e $\alpha \to \beta$ per Modus Ponens, si tratta di provare che β' è una tautologia. Poiché β' si ottiene per Modus Ponens da α' e $(\alpha \to \beta)'$, e visto che $(\alpha \to \beta)' = (\alpha' \to \beta')$, e Modus Ponens conserva la validità nella logica classica, β' è effettivamente valida.

Infine, dato che la trasformata di α è identica a quella di $\Box\alpha$, se β è ottenuta da α per necessitazione e α' è valida, anche $\beta' = \alpha'$ sarà valida.

La trasformata classica di ogni tesi di T è dunque una fbf valida nella logica classica. Da questo segue che per ogni fbf α di T, α e $\neg\alpha$ non possono essere entrambe tesi.

Quindi T è consistente. La completezza di T sarà trattata nel prossimo capitolo.

2.2 Il sistema S4

Il sistema T non soddisfa ancora tutti i requisiti intuitivi propri di una logica modale elencati in precedenza perché la traduzione di $\Box p \leftrightarrow p$ (si veda punto 3 di pagina 17) è ancora una legge logica; esso è però il sistema più debole tra quelli in grado di soddisfarli. Le tesi che esso contiene, infatti, sono soltanto quelle che verrebbero considerate indubitabili solo da chi accettasse i requisiti minimi; formule meno intuitive come $\Box p \to \Box\Box p$ non compaiono tra le tesi di T, come si può vedere.

Una delle motivazioni è il fatto che queste formule contengono sequenze di operatori modali, l'uno immediatamente successivo all'altro, dette *modalità iterate*. Non tutte le formule contenenti modalità iterate presentano difficoltà: ad esempio $\Box\Box p \to \Box p$ è un esempio per sostituzione di **A5**, ma quando ci chiediamo se è valido $\Box p \to \Box\Box p$, ci siamo chiedendo se tutto ciò che è necessario è anche necessariamente necessario. Ammettere questo fatto giustifica la costruzione di un sistema più forte di T in cui questa formula sia un assioma.

Chiameremo $S4$ il sistema che si ottiene aggiungendo agli assiomi e alle regole di T l'assioma

A7 $\Box p \to \Box\Box p$.

Tutte le tesi di T sono anche tesi di $S4$, ma grazie a questo assioma è possibile dimostrare anche teoremi che si possono provare indimostrabili in T (vedi sotto), come:

Teorema 2.2.1.
$\Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$.

Dimostrazione. Sostituendo $\neg p$ a p in **A7** si ha $\Box\neg p \rightarrow \Box\Box\neg p$. Per la regola di interscambio, $\neg\Diamond p \rightarrow \neg\Diamond\Diamond p$ da cui si conclude. $\Box$

Teorema 2.2.2.
$\Box p \leftrightarrow \Box\Box p$.

Dimostrazione. Sostituendo $\Box p$ a p in **A5**, si ha $\Box\Box p \rightarrow \Box p$ che è l'implicazione inversa di **A7**. $\Box$

Analogamente si dimostrano i seguenti teoremi:

Teorema 2.2.3.
$\Diamond p \leftrightarrow \Diamond\Diamond p$.

Teorema 2.2.4.
$\Diamond\Box\Diamond p \rightarrow \Diamond p$.

Teorema 2.2.5.
$\Box\Diamond p \leftrightarrow \Box\Diamond\Box\Diamond p$.

Teorema 2.2.6.
$\Diamond\Box p \leftrightarrow \Diamond\Box\Diamond\Box p$.

2.2.1 Modalità in S4

Definizione 2.6. Una *modalità* è una qualunque sequenza ininterrotta di zero o più operatori monadici ($\neg$, $\Box$, $\Diamond$). Esprimeremo il caso zero col simbolo $\sim$.

In qualunque sistema contenente la regola di interscambio, quindi anche in T, ogni modalità può essere espressa o senza segni di negazione o con un segno solo. Una modalità espressa in questo modo è in *forma standard.*

Definizione 2.7. Due modalità A e B sono *equivalenti* in un dato sistema se e solo se, sostituendo A con B (o B con A) in qualsiasi formula, si ottiene una formula equivalente in quel sistema alla formula originale.

Osservazione 4. In un sistema contenente le regole di sostituzione uniforme e di sostituzione di equivalenti, come T e, di conseguenza, $S4$, due modalità sono equivalenti se e solo se $Ap \leftrightarrow Bp$, dove Ap e Bp sono le formule ottenute premettendo rispettivamente A e B a p, è derivabile in quel sistema.

Definizione 2.8. Se A e B sono equivalenti in un certo sistema e A contiene meno operatori modali di B, B si dice *riducibile ad* A in quel sistema.

Se non esiste alcuna modalità A a cui B è riducibile in un sistema, B è detta *irriducibile* nel sistema dato.

Siamo ora in grado di dimostrare un risultato importante:

Teorema 2.2.7. *In $S4$, ogni modalità è equivalente ad una delle seguenti modalità:*

1. $\sim$
2. $\Box$
3. $\Diamond$
4. $\Box\Diamond$
5. $\Diamond\Box$
6. $\Box\Diamond\Box$
7. $\Diamond\Box\Diamond$

o alle loro negazioni ($\neg \sim$, $\neg\Box$, eccetera).

Dimostrazione. Tralasciando 1, 2. e 3. sono le sole modalità con un solo operatore. I teoremi 2.2.2 e 2.2.3 consentono di sostituire $\Box\Box$ con $\Box$ e $\Diamond\Diamond$ con $\Diamond$, per cui, aggiungendo un operatore modale a 2. o 3., otterremmo o una modalità equivalente all'originale o 4. o 5. Nello stesso modo, aggiungendo un operatore modale a 4. o 5., le sole modalità irriducibili a tre operatori che si possono ottenere sono 6. e 7. Se, tuttavia, aggiungiamo un operatore modale a 6. o 7. il risultato è sempre equivalente all'originale o, per i teoremi 2.2.5 e 2.2.6, a 4. o a 5.; quindi non ci possono essere modalità irriducibili con quattro o più operatori.

I casi negativi si trattano analogamente. $\Box$

Se premettiamo una modalità a una fbf α, il risultato è una fbf. Le relazioni di implicazione che valgono in $S4$ tra le formule così ottenute da 1.-6. sono schematizzate dal diagramma seguente:

$$\begin{tikzcd}
 & & \Box\alpha \arrow[dl] \arrow[ddr] & \\
 & \Box\Diamond\Box\alpha \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
\Diamond\Box\alpha \arrow[dr] & & \Box\Diamond\alpha \arrow[dl] & \alpha \arrow[ddl] \\
 & \Diamond\Box\Diamond\alpha \arrow[dr] & & \\
 & & \Diamond\alpha &
\end{tikzcd}$$

Per i casi negativi, possiamo ottenere un diagramma analogo negando tutte le formule ed invertendo la direzione di tutte le frecce.

La situazione è diversa in T che contiene un numero infinito di modalità distinte, poiché, mancando in questo sistema i teoremi utilizzati per la dimostrazione precedente, per ogni modalità possiamo costruirne una più lunga non equivalente ad essa, indipendentemente dal numero degli operatori modali che essa contiene.

2.3 Il sistema S5

La base di $S5$ è quella di T più:

A8 $\Diamond p \to \Box\Diamond p$.

I primi tre teoremi di $S5$ si dimostrano nello stesso modo di quelli di $S4$, utilizzando però **A8** anziché **A7**.

Teorema 2.3.1.
$\Diamond\Box p \to \Box p$.

Teorema 2.3.2.
$\Diamond p \leftrightarrow \Box\Diamond p$.

Teorema 2.3.3.
$\Box p \leftrightarrow \Diamond\Box p$.

L'assioma caratteristico di $S4$, **A7**, non è un assioma di $S5$ ma ne è un teorema e la dimostrazione è la seguente:

Teorema 2.3.4 (A7).
$\Box p \to \Box\Box p$.

Dimostrazione. Per il teorema 2.1.1, con $\Box p$ al posto di p, $\Box p \to \Diamond\Box p$. Da questa, per il teorema 2.3.2, $\Box p \to \Box\Diamond\Box p$, dunque, applicando il teorema 2.3.3 $\Box p \to \Box\Box p$. □

2.3.1 Funzioni modali e teorema di riduzione

Definizione 2.9. Qualunque fbf contenente un operatore modale è detta una *funzione modale* delle sue variabili o *formula modale*.

Induttivamente si definisce il *grado* di una formula modale. Diremo che:

1. Una lettera ha grado 0;
2. Se α è di grado n, allora $\neg\alpha$ è di grado n;
3. Se α è di grado n e β è di grado m, allora $(\alpha \vee \beta)$ è di grado $max\{m, n\}$;
4. Se α è di grado n, $\Box\alpha$ è di grado n+1.

La nozione di formula modale di grado n estende la nozione di formula contenente una modalità con n operatori modali, ma non coincide con essa: una formula contenente una modalità con n operatori modali sarà almeno di grado n, ma una formula di grado n può non contenere modalità con n operatori modali, per esempio $\Diamond(p \to \Box q)$ è una formula di secondo grado che non contiene modalità iterate.

Definizione 2.10. Diremo che una formula di grado n è *riducibile (nel sistema)* a una formula di grado $m < n$ se è equivalente ad essa in quel sistema.

I teoremi 2.2.2, 2.2.3, 2.3.2 e 2.3.3, detti anche *leggi di riduzione* consentono di sopprimere tutti gli operatori di una sequenza di operatori modali unari, salvo l'ultimo, nel modo seguente: in qualunque coppia di operatori modali adiacenti, il primo si può eliminare. La conseguenza è che $S5$ contiene al massimo le sei modalità distinte:

1. $\sim$
2. $\neg \sim$
3. $\Box$
4. $\neg\Box$

5. $\Diamond$

6. $\neg\Diamond$

Da qui segue che ogni formula di grado più alto del primo unicamente a motivo della presenza in essa di modalità iterate può essere ridotta a una formula di primo grado. Dimostreremo un risultato più forte, detto *Teorema di riduzione.*

Prima però introdurremo dei teoremi di $S5$ su cui si basa la dimostrazione di questo teorema.

Teorema 2.3.5.
$\Box(p \vee q) \rightarrow (\Box p \vee \Diamond q)$.

Dimostrazione. Per **A6**, $\Box(\neg q \rightarrow p) \rightarrow (\Box\neg q \rightarrow \Box p)$. Per definizione di $\rightarrow$, $\Box(q \vee p) \rightarrow (\neg\Box\neg q \vee \Box p)$ che equivale a $\Box(p \vee q) \rightarrow (\Box p \vee \Diamond q)$. $\Box$

Teorema 2.3.6.
$\Box(p \vee \Box q) \leftrightarrow (\Box p \vee \Box q)$.

Teorema 2.3.7.
$\Box(p \vee \Diamond q) \leftrightarrow (\Box p \vee \Diamond q)$.

Teorema 2.3.8.
$\Diamond(p \wedge \Diamond q) \leftrightarrow (\Box p \wedge \Box q)$.

Teorema 2.3.9.
$\Diamond(p \wedge \Box q) \leftrightarrow (\Diamond p \wedge \Box q)$.

Teorema 2.3.10 (Teorema di riduzione per S5)**.**
Ogni formula di grado più alto del primo è riducibile in $S5$ a una formula di primo grado con le stesse lettere.

Dimostrazione. La dimostrazione è costruttiva e si basa sul descrivere una procedura effettiva per ridurre una qualunque formula di grado più alto del primo a una del primo grado mediante trasformazioni di equivalenza. Sarà sufficiente provare come ogni formula di secondo grado può essere ridotta al primo, poiché l'iterazione della procedura consentirà di trattare con formule di qualsiasi grado più alto. Esemplifichiamo con la fbf $\alpha = \Diamond(p \rightarrow \Box q)$.

I passi da seguire sono quattro, anche se non saranno tutti necessari.

1. Usando definizioni appropriate, eliminiamo tutti gli operatori, tranne $\neg$, $\Box$, $\Diamond$, $\vee$ e $\wedge$. α diventa $\Diamond(\neg p \vee \Box q)$.

2. Eliminiamo ogni occorrenza di $\neg$ immediatamente precedente a una parentesi o a un operatore modale tramite le leggi di De Morgan e la regola di interscambio. Ne risulterà che $\neg$ sarà premesso soltanto a variabili. Questo passo non è necessario per α.

3. Riduciamo poi tutte le modalità iterate a singoli operatori modali mediante delle leggi riduttive (teoremi 2.2.2, 2.2.3, 2.3.2 e 2.3.3). Non necessario per α.

4. Se la formula che risulta dall'applicazione dei primi tre passi è ancora di secondo grado, sarà nella forma $\Box\alpha$ o $\Diamond\alpha$, dove α è di primo grado ed è una congiunzione o una disgiunzione. Allora, applicando più volte le leggi di distribuzione, l'operatore modale si accosterà a ciascuno degli operatori modali contenuti in α, facendosi assorbire da essi. α diviene $((\Diamond\neg p) \vee \Diamond\Box q)$ (teorema 2.1.16), cioè $\Diamond(\neg p) \vee \Diamond q$ (teorema 2.3.2) che, per il teorema 2.1.16, è $\Diamond(\neg p \vee q)$, cioè $\Diamond(p \to q)$.

$\Box$

Questo risultato vale persino per fbf non contenenti operatori modali; infatti, qualunque fbf α è equivalente ad $\alpha \wedge (\Box p \vee \neg\Box p)$, dove p è una variabile di α. Non è difficile rendersi conto del fatto che ci può essere solo un numero finito di funzioni modali distinte di primo grado di un insieme finito di variabili, infatti ogni formula di primo grado è una funzione di verità di variabili proposizionali e di fbf formate da $\Box$ seguito da una funzione di verità di variabili proposizionali e c'è solo un numero finito di funzioni modali non equivalenti di un numero finito di variabili. Il teorema di riduzione di $S5$ prova quindi che in $S5$ c'è solo un numero finito di funzioni modali non equivalenti di un numero finito di variabili.

2.3.2 Consistenza di S4 ed S5

Che i sistemi $S4$ ed $S5$ siano consistenti si può provare semplicemente aggiungendo alla dimostrazione di consistenza pr T l'osservazione che le trasformate di **A7** e **A8** sono valide nella logica classica.

La trasformata di entrambi è

$$\neg p \vee p.$$

2.4 La logica intuizionista degli enunciati

Le logiche modali sono state studiate da Kripke anche per trovare una collocazione alla semantica della logica intuizionista, una delle alternative alla logica matematica classica più interessanti e più studiate, sin da quando fu assiomatizzata da Arendt Heyting nel 1930.

Il motivo di questo interesse sta nel suo sviluppo articolato e ricco che consente notevoli applicazioni e nel fatto che la logica intuizionista vuole essere più vicina all'attività mentale che non a riscontri in supposti mondi oggettivi. Ogni affermazione va intesa non come un'espressione di verità, ma di una conoscenza o di una costruzione mentale: per questo essa non è giustificata se non c'è un appello costruttivo a qualcosa che le garantisce, di solito una dimostrazione.

Una delle maggiori differenze con la logica classica è il fatto che nella logica intuizionista un enunciato α è vero solo quando se ne può fornire una dimostrazione diretta. Di conseguenza $\neg\alpha$ è l'affermazione che non si può conoscere α e coincide con la dimostrazione che α è impossibile o non lo si conoscerà mai; anche la disgiunzione può essere affermata solo se almeno uno dei due termini della disgiunzione è conosciuto o assodato: questa impostazione implica l'eliminazione del principio del terzo escluso $p \vee \neg p$ come legge logica.

Consideriamo solo la logica proposizionale intuizionista; della logica dei predicati corrispondente verrà fatta una diversa trattazione in seguito. I linguaggi sono gli stessi della logica classica. Consideriamo, seguendo [Lolli 1991, Appendice 2], un calcolo per la logica proposizionale classica, con la regola del Modus Ponens e gli assiomi relativi a $\neg$ e $\rightarrow$:

A1 $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$

A2 $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

A3 $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$

A4 $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta)$

La logica intuizionista si distingue da quella classica per il fatto che si può esporre assiomaticamente sostituendo **A4** con lo schema debole di riduzione all'assurdo (Consequentia Mirabilis):

A4' $(\alpha \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha$.

Scriviamo $\alpha_1, ..., \alpha_n \vdash_I \beta$ per dire che β è derivabile nel calcolo proposizionale intuizionista dalle premesse $\alpha_1, ..., \alpha_n$, cioè che esiste una derivazione che termina con β in cui tutte le proposizioni sono o casi particolari degli schemi

A1, **A2**, **A3**, **A4'**, o una delle α_i, oppure ottenute con Modus Ponens. Le fbf α derivabili nel calcolo proposizionale intuizionista senza premesse (cioè tali che $\vdash_I \alpha$), sono dette *leggi logiche intuizioniste*.

Le leggi della logica proposizionale intuizionista sono anche leggi della logica classica ma non vale il viceversa, tranne per le leggi che si derivano nel calcolo proposizionale classico senza usare **A4**: in particolare:

- tutte quelle che non coinvolgono la negazione;
- la transitività: $(\beta \to \gamma) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$;
- lo scambio degli antecedenti: $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$.

Per la logica intuizionista vale ancora il

Teorema 2.4.1 (Teorema di deduzione)**.**
$\alpha_1, ..., \alpha_n, \alpha \vdash_I \beta$ *se e solo se* $\alpha_1, ..., \alpha_n \vdash_I \alpha \to \beta$.

Per il calcolo proposizionale intuizionista non è sufficiente però avere assiomi per $\neg$ e $\to$, dato che gli altri connettivi non sono più definibili in termini di questi soltanto. Occorre dunque aggiungere gli assiomi per $\vee$ e $\wedge$ ($\leftrightarrow$ di definisce nel solito modo):

B1 $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$

B2 $(\alpha \wedge \beta) \to \beta$

B3 $\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))$

B4 $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$

B5 $\beta \to (\alpha \vee \beta)$

B6 $(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma))$.

Con i nuovi assiomi si ha ancora (si veda [Lolli 1991] per le dimostrazioni):

$\vdash_I (\neg\alpha \vee \beta) \to (\alpha \to \beta)$ ma non il viceversa;

Legge di De Morgan per $\wedge$ $\vdash_I (\neg\alpha \vee \neg\beta) \to \neg(\alpha \wedge \beta)$ ma non il viceversa;

Legge di De Morgan per $\vee$ $\vdash_I \neg(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$;

Legge debole del terzo escluso $\vdash_I \neg\neg(\alpha \vee \neg\alpha)$;

Legge di non contraddizione $\vdash_I \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$.

Teorema 2.4.2.
Il calcolo classico si ottiene aggiungendo agli assiomi intuizionisti $\alpha \vee \neg\alpha$.

Dimostrazione. Sostituendo simultaneamente in **B6** β a γ e $\neg\alpha$ a β,

$$(\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to ((\alpha \vee \neg\alpha) \to \beta)).$$

Con scambi e transitività si ottiene:

$$(\alpha \vee \neg\alpha) \to (((\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \beta)))$$

per cui, se si dispone di $\alpha \vee \neg\alpha$, si ottiene **A4**.

Quindi **A4'** e $\alpha \vee \neg\alpha$ sostituiscono **A4** in un'assiomatizzazione della logica proposizionale classica equivalente ad **A1-A4**. $\square$

Molto interessante è la seguente stretta relazione tra logica classica e intuizionista:

Teorema 2.4.3.
Se $\vdash \alpha$ *(cioè* α *è derivabile nel calcolo classico), allora* $\vdash_I \neg\neg\alpha$.

In realtà valgono:

Corollario 2.4.4.
$\vdash \alpha$ *se e solo se* $\vdash_I \neg\neg\alpha$.

Corollario 2.4.5.
$\vdash \neg\alpha$ *se e solo se* $\vdash_I \neg\alpha$.

2.4.1 Semantica di I

Oltre ai risultati in campo sintattico ricordati finora, diverse ricerche sono state fatte per trovare una semantica per la logica intuizionista, cioè una nozione di interpretazione e validità tale che il calcolo sia completo rispetto ad essa.

Per trovarla, occorrerebbero sistemi con infiniti valori di verità o matrici infinite; una semantica più elegante e significativa è quella, già citata, proposta da Kripke, detta *semantica dei mondi possibili.* I mondi possibili sono un insieme, anche infinito di interpretazioni classiche, collegate da una relazione che rappresenta la possibile evoluzione del mondo nel tempo.

Definizione 2.11. Un I-modello è una terna $< W, R, \vDash_I >$ dove:

W è un insieme non vuoto di assegnazioni di valori di verità (i "mondi") e scriveremo $i(\alpha) = \mathbf{T}$ se α è vera in $i \in W$;

R è una relazione binaria riflessiva e transitiva in W detta *relazione di accessibilità*: se iRj si dice che " j è accessibile da i", intuitivamente j è possibile dal punto di vista di i $(i, j \in W)$;

$\vDash_I$ è una relazione tra mondi e proposizioni definita da:

per p lettera, $i \vDash_I p$ (i *forza* x) se e solo se $j(p) = \mathbf{T}$ per ogni j tale che iRj;

$i \vDash_I \alpha \wedge \beta$ se e solo se valgono entrambe le affermazioni $i \vDash_I \alpha$ e $i \vDash_I \beta$;

$i \vDash_I \alpha \vee \beta$ se e solo se vale almeno una tra le affermazioni $i \vDash_I \alpha$ o $i \vDash_I \beta$;

$i \vDash_I \neg\alpha$ se e solo se per ogni j tale che iRj, $j \nvDash_I \alpha$ dove $i \nvDash_I \alpha$ indica che $\vDash_I$ *non* vale tra i e α;

$i \vDash_I \alpha \to \beta$ se e solo se per ogni j tale che iRj se $j \vDash_I \alpha$ allora $j \vDash_I \beta$.

Una proposizione α si dice *valida* nell'I-Modello $< W, R, \vDash_I >$ se $i \vDash_I \alpha$ per ogni $i \in W$. In questo caso $< W, R, \vDash_I >$ è un modello di α. α si dice *I-valida* se è valida in ogni I-modello.

Teorema 2.4.6.
Le leggi intuizioniste sono I-valide.

La dimostrazione, che consiste nella verifica che gli assiomi sono I-validi e che il Modus Ponens è corretto, si basa sul seguente

Lemma 2.4.7 (Lemma di monotonia)**.**
Per ogni I-modello $< W, R, \vDash_I >$ e ogni proposizione α, per ogni $i, j \in W$ con iRj, se $i \vDash_I \alpha$ allora $j \vDash_I \alpha$.

È facile vedere che certe leggi classiche non sono leggi intuizioniste costruendo controesempi. $\neg\neg p \to p$, per esempio, non è una legge intuizionista: infatti, se si considera l'insieme con due mondi $W = \{i, j\}$ l'uno accessibile all'altro con $i(p) = \mathbf{F}$ e $j(p) = \mathbf{T}$, allora $i \nvDash_I \neg p$ e $j \nvDash_I \neg p$, quindi $i \vDash_I \neg\neg p$ ma $i \nvDash_I p$.

L'interpretazione della negazione e la riflessività di R fanno sì che nessuna i possa forzare sia α che $\neg\alpha$; quindi ogni i, in ogni I-modello forza $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$. Per quanto riguarda $\neg\neg\alpha$, invece, si ha che $i \vDash_I \neg\neg\alpha$ se e solo se per ogni j con iRj esiste k con jRk tale che $j \vDash_I \alpha$: questo non implica che $i \vDash_I \alpha$. Viceversa, se $i \vDash_I \alpha$, per il lemma di monotonia ogni j con iRj forza α e quindi $i \vDash_I \neg\neg\alpha$.

Il concetto di consistenza sintattica è definito anche per la logica intuizionista come impossibilità di derivare sia una proposizione che la sua negazione, ma si comporta qui in modo diverso che nel caso classico. Non è più vero che se $\nvDash_I \alpha$ allora $\neg\alpha$ è consistente rispetto al sistema intuizionista (la definizione di formula consistente rispetto a un sistema verrà data nel prossimo capitolo a pagina 44): infatti, se $\nvdash_I \alpha$ ma $\vdash_I \neg\neg\alpha$, allora, $\vdash_I (\neg\alpha \to \neg\neg\alpha)$ e $\vdash_I (\neg\alpha \to \neg\alpha)$, cioè $\neg\alpha$ non è consistente rispetto al sistema.

La completezza del calcolo rispetto agli I-modelli, cioè l'assenza nel calcolo di enunciati indecidibili, si basa su una generalizzazione del metodo degli insiemi consistenti massimali ma si possono dare diverse formulazioni di completezza, non tutte intuizionisticamente equivalenti. Ad esempio

Teorema 2.4.8 (Teorema di completezza).
Se $T \nvdash_I \alpha$ esiste un I-modello in cui tutte le proposizioni di T sono valide ma non α.

Dimostrazione. Chiamiamo *primo* un insieme di proposizioni S chiuso rispetto a $\vDash_I$ ($\alpha \vee \beta \in S$ implica $\alpha \in S$ o $\beta \in S$). Si dimostra che per ogni S esiste S' primo tale che $S \subseteq S'$ e che se $T \nvdash_I \alpha$ allora esiste T' primo tale che $T \subseteq T'$ e $\alpha \notin T'$.

Ad ogni T' si può associare una interpretazione che dà a una lettera il valore $\mathbf{T}$ se e solo se la lettera appartiene a T'.

Sia W l'insieme dei T' che estendono T e a cui non appartiene α, con la relazione di inclusione come relazione di accessibilità. Si ottiene un I-modello per cui si dimostra per induzione sulla complessità di α che per ogni $S \in W$ e per ogni proposizione α, $S \vDash_I \alpha$ se e solo se $\alpha \in S$.

W così definito è il modello cercato. $\square$

2.5 Semantica di Kripke per le logiche modali degli enunciati

Che i mondi coincidano con insiemi di proposizioni corrisponde bene alla interpretazione intuizionistica della semantica di Kripke, dove più che a mondi si pensa a stati di conoscenza. La terminologia dei mondi possibili fa pensare alla nozione di possibilità e a quella collegata di necessità che sono trattate dalle logiche modali. In effetti, come già discusso nell'introduzione, la semantica di Kripke nasce per le logiche modali che non sono però prive di relazioni con quella intuizionista.

La semantica di Kripke per T è una generalizzazione della semantica per la logica intuizionista introdotta nella sezione precedente. L'idea è che verità necessaria significa verità in tutti i mondi possibili modificata dall'idea che i mondi possibili dipendono da quello da cui ci si trova.

Un T-modello è una terna $< W, R, \vDash_T >$ dove:
W è un insieme non vuoto di assegnazioni di valori di verità (i mondi);
R è una relazione (di accessibilità) binaria riflessiva in W;

$\models_T$ è una relazione tra mondi e proposizioni del linguaggio di T definita da:

- per qualunque p lettera $i \models_T p$ se e solo se $i(p) = \mathbf{T}$ (p è vera con l'assegnazione fatta da i);
- $i \models_T \alpha \wedge \beta$ se e solo se valgono entrambe $i \models_T \alpha$ e $i \models_T \beta$;
- per qualsiasi fbf α e β e per qualunque $i \in W$, $i \models_T \alpha \vee \beta$ se e solo se vale almeno una tra le affermazioni $i \models_T \alpha$ o $i \models_T \beta$;
- per qualsiasi fbf α e per qualsiasi $i \in W$, $i \models_T \neg\alpha$ se e solo se $i \not\models_T \alpha$;
- per ogni fbf α e per qualunque $i \in W$, $i \models_T \Box\alpha$ se e solo se $j \models_T \alpha$ per ogni j accessibile da i.

Come conseguenza, $i \models_T \Diamond\alpha$ se e solo se esiste j tale che iRj e $j \models_T \alpha$ e inoltre la condizione naturale per $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ e per $\twoheadrightarrow$.

Analogamente al caso intuizionista si definiscono le nozioni di validità rispetto al T-modello e di T-validità delle proposizioni.

Si definiscono analogamente gli S4-modelli (in $S4$ l'operatore di derivabilità è $\vdash_{S4}$), aggiungendo la condizione che R sia transitiva, e gli S5 modelli (in $S5$ l'operatore di derivabilità è $\vdash_{S5}$), aggiungendo la condizione che R sia simmetrica.

Dimostreremo nel prossimo capitolo che T, S4 ed S5 sono completi rispetto ai rispettivi modelli.

Un legame tra la logica intuizionista e la logica modale $S4$ è dato dalla seguente traduzione da [Lolli 1991] che non è l'unica possibile. Ce ne sono molte altre. Una in particolare, verrà ripresa e utilizzata nell'ultimo capitolo. Ad ogni proposizione α del linguaggio intuizionista si associa una proposizione $M(\alpha)$ del linguaggio modale:

$$M(p) = \Box p \ \textit{per } p \textit{ lettera};$$
$$M(\alpha \wedge \beta) = M(\alpha) \wedge M(\beta);$$
$$M(\alpha \vee \beta) = M(\alpha) \vee M(\beta);$$
$$M(\neg\alpha) = \Box\neg M(\alpha);$$
$$M(\alpha \rightarrow \beta) = \Box(M(\alpha) \rightarrow M(\beta)).$$

Proposizione 2.5.1. *α è I-valida se e solo se $M(\alpha)$ è S4-valida.*

La transitività della relazione di accessibilità e il lemma di monotonia stabiliscono il legame tra S4 e la logica intuizionista.

Per l'esposizione di questi ultimi due paragrafi abbiamo seguito ancora la citata appendice di [Lolli 1991].

Capitolo 3

Logica dei predicati modale

3.1 Calcolo dei predicati del primo ordine

Come per la logica proposizionale, la logica dei predicati modale si ottiene aggiungendo ai simboli primitivi della logica classica (senza simboli di costante o funzione, del resto evitabili) l'operatore $\Box$ con regole e definizioni viste nel capitolo precedente.

I simboli primitivi diventano quindi:

1. Un insieme di variabili individuali: v_0, $v_1, ...$ (simboli metalinguistici x, y, z, ...).

2. Un insieme di predicati: A, B,... (con simboli metalinguistici P, Q, ...) di grado fisso $n \geq 1$.

3. I simboli $\neg$, $\vee$, $\Box$, (,), $\forall$ (detto *quantificatore universale*).

Le regole di formazione:

FR1 Un espressione costituita di predicati, seguiti da n variabili individuali, dove n è il grado del predicato, è una fbf.

FR2 Se α è una fbf, tale è $\neg\alpha$.

FR3 Se α e β sono fbf, tale è anche $\alpha \vee \beta$.

FR4 Se α è una fbf e x una qualunque variabile individuale, $(\forall x)\alpha$ è una fbf. Scriveremo anche $(\forall x)\alpha(x)$.

FR5 Se α è una fbf, tale è $\Box\alpha$.

Le definizioni di $\wedge$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ sono quelle abituali e quelle di $\Diamond$, $\twoheadrightarrow$ e $\eqcirc$ sono quelle di pagina 18. Introduciamo il simbolo $\exists$ con la definizione:

$$(\exists x)\alpha := \neg(\forall x)\neg\alpha.$$

Utilizzeremo schemi di assiomi e, parallelamente a questi, schemi di teoremi, ossia principi generali per cui qualsiasi fbf di quella data forma è un teorema.

Gli schemi di assiomi che useremo sono i seguenti:

PC Se α è un esempio per sostituzione di una fbf valida nel calcolo proposizionale, allora α è un assioma.

$\forall 1$ Se x è una qualunque variabile individuale, α una qualunque fbf, e β una fbf diversa da α solo per avere qualche variabile individuale y libera per x in α rimpiazzante ogni occorrenza libera di x in α, allora

$$((\forall x)\alpha) \rightarrow \beta$$

è un assioma.

A5 $(\Box\alpha) \rightarrow \alpha$. Scriveremo anche $\Box\alpha \rightarrow \alpha$.

A6 $\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)$.

Chiameremo $LPC{+}T$ il calcolo predicativo modale che contiene i quattro assiomi qui enunciati.

Il calcolo predicativo modale $LPC + S4$ si ottiene aggiungendo lo schema di assiomi:

A7 $\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$.

Il calcolo predicativo modale $LPC + S5$ si ottiene aggiungendo ancora lo schema di assiomi:

A8 $\Diamond\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$.

Le regole di trasformazione primitive sono:

$\forall 2$ Se x è una qualunque variabile individuale e α e β due fbf qualsiasi tali che x non è libera in α, allora se $\alpha \rightarrow \beta$ è derivabile nel calcolo predicativo modale, lo è anche $\alpha \rightarrow (\forall x)\beta$.

MP Se α e $\alpha \to \beta$ sono tesi del calcolo predicativo modale, lo è anche β.

N Se α è derivabile nel calcolo predicativo modale, lo è anche $\Box\alpha$.

Chiaramente le regole derivate nel capitolo 2 valgono pure nei calcoli dei predicati corrispondenti e così valgono pure tutti i loro teoremi.

3.1.1 La formula di Barcan

Un teorema presente in molti sistemi di logica dei predicati modale (non in $LPC+T$ né in $LPC+S4$) è la cosiddetta *formula di Barcan* (vedi capitolo 1):

Teorema 3.1.1 (BF)**.** $(\forall x)\Box\alpha \to \Box(\forall x)\alpha$.

BF è una formula di una certa importanza, che ha dato luogo a diverse controversie filosofiche. Il suo nome deriva da Ruth C. Barcan che ha richiamato l'attenzione su una formula equivalente alla prima in LPC+T, ossia:

$$\Diamond(\exists x)\alpha \twoheadrightarrow (\exists x)\Diamond\alpha.$$

Questa seconda formula segue da BF per definizione di $\Diamond$, di $\exists$, equivalenze standard della logica proposizionale classica e N e la derivazione inversa è altrettanto immediata; per questo chiameremo *formula di Barcan*, indifferentemente, ciascuna delle due formule.

Dimostriamo adesso un caso particolare della sufficienza (la necessità si dimostra invertendo i passaggi ed usando N al posto di A5).

Per A5 e per definizione di $\twoheadrightarrow$, da

$$\Diamond(\exists x)Px \twoheadrightarrow (\exists x)\Diamond Px$$

segue

$$\Diamond(\exists x)Px \to (\exists x)\Diamond Px$$

che, per definizione di $\exists$ e $\Diamond$ è:

$$\neg\Box\neg\neg(\forall x)\neg Px \to \neg(\forall x)\neg\neg\Box\neg Px,$$

sopprimendo la doppia negazione

$$\neg\Box(\forall x)\neg Px \to \neg(\forall x)\Box\neg Px.$$

Posto $\alpha = \neg Px$, otteniamo

$$\neg\Box(\forall x)\alpha \to \neg(\forall x)\Box\alpha$$

che è equivalente a

$$(\forall x)\Box\alpha \rightarrow \Box(\forall x)\alpha.$$

Diversamente da BF, la sua inversa è facilmente dimostrabile in $LPC{+}T$, quindi, se avessimo la formula di Barcan, potremmo facilmente derivare:

$$\Box(\forall x)\alpha \leftrightarrow (\forall x)\Box\alpha$$

e

$$\Diamond(\exists x)\alpha \leftrightarrow (\exists x)\Diamond\alpha.$$

Due teoremi correlati che si possono facilmente dimostrare senza la formula di Barcan sono:

Teorema 3.1.2.
$\Diamond(\forall x)\alpha \rightarrow (\forall x)\Diamond\alpha.$

Teorema 3.1.3.
$(\exists x)\Box\alpha \rightarrow \Box(\exists x)\alpha.$

Il viceversa di entrambi non è però dimostrabile nemmeno con la formula di Barcan. Si veda [Hughes-Cresswell 1973, parte 2, capitolo 1] per approfondimenti.

La formula di Barcan, pur non essendo derivabile né in $LPC + T$ né in $LPC + S4$, è consistente con ciascuno di essi e potrebbe essere aggiunta a uno dei due, senza rafforzarlo fino a $LPC + S5$. Disponiamo quindi di due versioni di ciascuno di questi due sistemi, uno senza e uno con la formula di Barcan come assioma. Chiameremo i primi $LPC + T$ e $LPC + S4$, i secondi $T + BF$ e $S4 + BF$.

Di $LPC + S5$, tuttavia, abbiamo solo una versione, in quanto la formula di Barcan ne è un teorema.

3.1.2 Validità negli LPC modali

Il procedimento per stabilire la validità in un LPC modale è simile a quello già mostrato per i sistemi proposizionali.

Un T+BF-modello è una quadrupla ordinata $< W, R, D, V >$ in cui W è un insieme di mondi, R è una relazione riflessiva tra i membri di W, D è un insieme di individui e V è un assegnamento di valore alle variabili in D e ai predicati nei mondi che soddisfa le condizioni che adesso illustreremo.

Osservazione 5. Per i sistemi proposizionali, abbiamo parlato di relazione tra mondi e proposizioni e abbiamo definito T-valida una formula in un mondo i se valeva la relazione tra il mondo e la formula. La V di cui parleremo in questo paragrafo assegna a ogni coppia mondo-fbf il valore $\mathbf{T}$ (true, vero) se la relazione è soddisfatta, $\mathbf{F}$ (falso) altrimenti, ma le proprietà rimangono invariate.

Facciamo in modo che la V assegni a ciascuna variabile individuale $x \in T$ un elemento $u \in D$ e scriveremo $V(x) = u$ e a ogni predicato n-ario A, un insieme di (n+1)-uple ordinate, ciascuna della forma $< u_1, ..., u_n, i >$ dove $u_k \in D$ per ogni k compreso tra 1 e n e $i \in W$.

Calcoleremo $V(\alpha, i)$, per ogni fbf α e ogni $i \in W$, mediante le regole seguenti:

1. Se φ è una fbf atomica n-aria qualsiasi, $V(\varphi(x_1, ..., x_n), i) = \mathbf{T}$ se $< V(x_1), ..., V(x_n), i > \in V(\varphi)$, altrimenti $V(\varphi(x_1, ..., x_n), i) = \mathbf{F}$;

2. Per qualunque fbf α e qualunque $i \in W$, $V(\neg\alpha, i) = \mathbf{T}$ se $V(\alpha, i) = \mathbf{F}$, altrimenti $V(\neg\alpha, i) = \mathbf{F}$;

3. Per ogni fbf α e β e qualunque $i \in W$, $V(\alpha \vee \beta, i) = \mathbf{T}$ se $V(\alpha, i) = \mathbf{T}$ o $V(\beta, i) = \mathbf{T}$. Altrimenti $V(\alpha \vee \beta, i) = \mathbf{F}$;

4. Per qualunque fbf α, qualunque variabile individuale x e per ogni $i \in W$, $V((\forall x)\alpha, i) = \mathbf{T}$ se per ogni T+BF-assegnamento V' che faccia lo stesso assegnamento fatto da V a tutte le variabili diverse da x, $V'(\alpha, i) = \mathbf{T}$. Altrimenti $V((\forall x)\alpha, i) = \mathbf{F}$ (x-variante, si veda [Lolli 1991]);

5. Per qualunque fbf α e per qualunque $i \in W$, $V(\Box\alpha, i) = \mathbf{T}$ se per ogni $j \in W$ tale che iRj, $V(\alpha, j) = \mathbf{T}$. Altrimenti $V(\Box\alpha, i) = \mathbf{T}$.

Una fbf α è detta T+BF-valida se per ogni T+BF-modello $< W, R, D, V >$, $V(\alpha, i) = \mathbf{T}$ per ogni $i \in W$.

Per $S4 + BF$ il discorso è analogo, aggiungendo la transitività di R.

Per $LPC + S5$, bisogna aggiungere alle richieste la transitività e la simmetria di R.

3.1.3 La consistenza degli LPC modali

Tutti i sistemi considerati fin qui sono consistenti. La dimostrazione, schematicamente, è quella che segue.

Sia α una qualunque fbf. La sua trasformata classica, α', si ottiene:

1. eliminando, utilizzando le definizioni, tutte le occorrenze di $\twoheadrightarrow$ e $\mathrel{=\!\!=}$;

2. sopprimendo tutti gli operatori modali, tutti i quantificatori e tutte le variabili individuali;

3. rimpiazzando ciascuna distinta fbf atomica con una distinta variabile proposizionale.

La trasformata di ogni assioma di $T + BF$, $S4 + BF$ e $LPC + S5$ è una fbf valida della logica proposizionale classica.

Inoltre, se β è ottenuta per MP da due fbf α e $\alpha \to \beta$, ciascuna delle quali ha una trasformata valida, la trasformata di β sarà pure valida. Se $\Box\alpha$ è ottenuta per N da una fbf α con trasformata valida, la sua trasformata, essendo identica a quella di α, sarà anch'essa valida. La situazione è analoga per $\forall 2$.

Quindi la trasformata di ogni tesi dei tre sistemi predicativi modali è valida. Da ciò segue, nello stesso modo illustrato nella dimostrazione della consistenza dei sistemi proposizionali modali, la consistenza di $T + BF$, $S4 + BF$ e $LPC + S5$.

3.2 La completezza degli LPC modali

3.2.1 Dimostrazioni alla Henkin

In questo paragrafo dimostreremo la completezza dei sistemi modali visti finora, servendoci di dimostrazioni di Henkin, cioè di dimostrazioni che seguono i principi generali usati da Leon Henkin nel 1942 per dimostrare la completezza dei sistemi di logica proposizionale classica (cfr. [Lolli 1991]).

Queste dimostrazioni si applicano non solo a $T+BF$, $S4+BF$ e $LPC+S5$, ma anche ai sistemi proposizionali modali e per prima cosa mostreremo il modo in cui esse operano per sistemi più semplici, prima di accostarci ai calcoli predicativi più complicati.

Definizione 3.1. Una formula α di un sistema S si dice *consistente relativamente ad* S se e solo se $\neg\alpha$ non è una tesi di S.

Un insieme finito di formule $\alpha_1, ..., \alpha_n$ di S è consistente se $\neg(\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n)$ non è derivabile in S.

Un insieme infinito di formule Λ è consistente se e solo se non contiene nessun insieme finito inconsistente di formule.

Definizione 3.2. Un insieme di formule è detto *consistente massimale* se è consistente ed è tale che qualunque formula non vi sia contenuta, se aggiunta ad esso, renderebbe inconsistente l'insieme. In altre parole, un insieme di formule di S è consistente massimale se e solo se è consistente ed ogni formula di S che non si trova in esso è con esso inconsistente.

Definizione 3.3. Un sistema S è detto *completo* quando esiste qualche formula α che è S-valida se e solo se è derivabile in S.

Poiché uno dei metodi per provare che α non è S-valida, consiste nel costruire un S-modello falsificante per α, una dimostrazione alla Henkin dimostra che S è completo provando che per ogni formula di S c'è un S-modello verificante. A tale scopo, seguendo [Hughes-Cresswell 1973], procederemo provando:

1. che se α è una qualunque formula consistente di un sistema S, possiamo costruire un particolare insieme di formule di S, detto insieme consistente massimale, che contiene α;

2. che possiamo formare un S-modello che verifica ogni formula dell'insieme e, tra le altre, α.

Proveremo adesso che, comunque presa una formula α (o un insieme Λ) consistente relativamente ad S, possiamo sempre costruire un insieme consistente massimale Γ contenente α (o Λ).

Assumiamo che le formule di S, essendo un'infinità numerabile, siano disposte in successione e siano queste $\alpha_1, ..., \alpha_n, ...$.

Ora costruiamo Γ formando una successione di insiemi, nel modo che segue. Poniamo $\Gamma_0 = \{\alpha\}$ (o Λ e analogamente in ciò che segue). Se α_1 è consistente relativamente a Γ_0, poniamo $\Gamma_1 = \{\alpha, \alpha_1\}$, altrimenti $\Gamma_1 = \Gamma_0$ e procediamo in modo analogo per ciascuno degli insiemi Γ_i. In generale, per $n \geq 0$,

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\alpha_{n+1}\} & \textit{se questo insieme è consistente} \\ \Gamma_n & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

Infine prendiamo come Γ l'unione degli insiemi $\Gamma_0, \Gamma_1, ..., \Gamma_n, ...$.

Chiaramente, ciascuno degli insiemi della successione è consistente, infatti Γ_0 è consistente per ipotesi e Γ_{n+1} è consistente se lo è Γ_n. Ora, sia Δ un qualunque sottoinsieme finito di Γ e sia α_m l'ultima formula di Δ. Allora Δ è un sottoinsieme di Γ_m e, poiché ogni sottoinsieme di un insieme consistente deve necessariamente essere consistente, Δ è consistente.

A questo punto possiamo affermare che Γ, non contenendo insiemi finiti inconsistenti, è consistente. Inoltre, presa α_m, formula consistente con Γ, sarà consistente con qualunque sottoinsieme di Γ e in particolare con Γ_{m-1}.

Perciò, nella costruzione di Γ, essa sarà stata aggiunta a Γ_{m-1} per formare Γ_m e quindi, essendo contenuta in Γ, Γ è massimale.

Per tutti gli insiemi consistenti massimali valgono le seguenti proprietà di Γ:

1. Dato che Γ è consistente massimale relativamente a S, per qualunque fbf α, α e $\neg\alpha$ non sono entrambe in Γ.

   Dimostrazione. Se per assurdo entrambe fossero in Γ, essendo questo consistente, anche il suo sottoinsieme $\{\alpha, \neg\alpha\}$ sarebbe consistente e in T non sarebbe derivabile $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$.

   Ma ciò è assurdo, perché $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ è derivabile in T.

   Segue immediatamente:

2. Poiché Γ è consistente massimale relativamente a S, per qualunque fbf α vale esattamente una tra $\alpha \in \Gamma$ e $\neg\alpha \in \Gamma$.

   Inoltre:

3. Dato che Γ è consistente massimale relativamente a S, per fbf qualsiasi α e β, se $\alpha \in \Gamma$ e $(\alpha \to \beta) \in \Gamma$, allora $\beta \in \Gamma$. Inoltre, se $\alpha \in \Gamma$ e in S è derivabile $(\alpha \to \beta)$, allora $\beta \in \Gamma$.

3.2.2 La completezza semantica di T, S4 ed S5

La completezza di T

In questo paragrafo proveremo che, se α è una qualunque formula consistente relativamente a T, allora possiamo costruire un T-modello verificante per α, ossia un T-modello $< W, R, \vDash_T >$ tale che per qualche $i \in W$, $i \vDash_T \alpha$.

Per farlo, abbiamo bisogno del seguente lemma, valido per tutti i sistemi contenenti T.

Lemma 3.2.1. *Siano $\beta, \gamma_1, ..., \gamma_n$, fbf qualsiasi. Se $\{\Box\gamma_1, ..., \Box\gamma_n, \Diamond\beta\}$ è consistente, $\{\gamma_1, ..., \gamma_n, \beta\}$ è anch'esso consistente.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $\{\gamma_1, ..., \gamma_n, \beta\}$ sia inconsistente, cioè che

$$\neg(\gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_n \wedge \beta)$$

sia derivabile in T.

Per N e la regola di interscambio tre $\Box$ e $\Diamond$, anche

$$\neg\Diamond(\gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_n \wedge \beta) \tag{3.1}$$

è derivabile in T.

Sostituendo nel teorema 3.1.2, in T sarà derivabile anche

$$(\Diamond\beta \wedge \Box(\gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_n)) \rightarrow \Diamond(\gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_n \wedge \beta). \tag{3.2}$$

Da 3.1 e 3.2 per PC segue che è una tesi di T:

$$\neg(\Diamond\beta \wedge \Box(\gamma_1 \wedge ... \wedge \gamma_n)),$$

da cui per il teorema 3.1.3, in T è derivabile

$$\neg(\Diamond\beta \wedge \Box\gamma_1 \wedge ... \wedge \Box\gamma_n),$$

pertanto $\{\Box\gamma_1, ..., \Box\gamma_n, \Diamond\beta\}$ è inconsistente in contraddizione con l'ipotesi. $\Box$

Per una dimostrazione alla Henkin della completezza di T dobbiamo costruire non un singolo insieme consistente massimale, ma un intero sistema di tali insiemi iniziante con una data formula consistente α. Γ stavolta indicherà il sistema e i Γ_i saranno gli insiemi che lo compongono.

Costruiamo Γ_α prendendo $\{\alpha\}$ come insieme di partenza e rendendolo consistente massimale relativamente a T nel modo già descritto.

Quindi, per ogni fbf della forma $\Diamond\beta$ appartenente a Γ_α, costruiamo un insieme consistente massimale Γ_β prendendo come insieme di partenza l'insieme costituito da β e da tutte le fbf $\gamma_1, ..., \gamma_k, ...$ tali che $\Box\gamma_1, ..., \Box\gamma_k, ... \in \Gamma_\alpha$ e procedendo nel solito modo. La cosa è resa possibile dal fatto che l'insieme di partenza è consistente perché, ogni suo qualunque sottoinsieme finito. per il lemma appena dimostrato, è consistente ($\{\Diamond\beta, \Box\gamma_1, ..., \Box\gamma_k\}$ è un sottoinsieme di Γ_α e quindi sarà consistente come questo).

Γ_β è detto *subordinato* di Γ_α.

Γ è il sistema degli insiemi consistenti massimali formati a partire da un insieme consistente massimale Γ_α, costruendo un insieme subordinato per ogni fbf della forma $\Diamond\beta$ in Γ_α e successivamente nei Γ_β che si formano via via.

Poiché gli insiemi consistenti massimali costruiti in questo modo sono un'infinità numerabile, da adesso in poi li indicheremo con Γ_i.

Possiamo ora costruire un T-modello $< W, R, \vDash_T >$ nel modo che segue:

W: a ciascun Γ_i in Γ, associamo un mondo possibile che, per comodità, chiameremo i. L'insieme W sarà l'insieme di tutti i mondi così fatti.

R: è la relazione tale che $\forall i, j \in W, iRj$ se è solo se Γ_j è un subordinato di Γ_i o i due insiemi coincidono.

$\models_T$: Per ogni variabile proposizionale p_k e per ogni $i \in W$, $i \models_T p_k$ se e solo se $p_k \in \Gamma_i$. Si dimostra che per $\neg$, $\vee$ e $\Box$, $\models_T$ risponde alle condizioni standard.

Teorema 3.2.2. *Dato il T-modello sopra definito, per ogni fbf β di T e per ogni $i \in W$, $i \models_T \beta$ se e solo se $\beta \in \Gamma_i$.*

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema per induzione sulla costruzione delle formule di T.

1. Se β è una fbf atomica, il teorema vale per β per il modo in cui abbiamo costruito il modello.

2. Se il teorema vale per una fbf β, allora vale anche per $\neg\beta$, infatti:

   - se $\neg\beta \in \Gamma_i$, allora $\beta \notin \Gamma_i$. Quindi $i \not\models_T \beta$ e $i \models_T \neg\beta$;
   - se $\neg\beta \notin \Gamma_i$, $\beta \in \Gamma_i$. Quindi $i \models_T \beta$ da cui segue $i \not\models_T \neg\beta$.

3. Se il teorema vale per due fbf β e γ, allora vale anche per $\beta \vee \gamma$, infatti:

   - se $(\beta \vee \gamma) \in \Gamma_i$, sicuramente $\beta \in \Gamma_i$ oppure $\gamma \in \Gamma_i$.
     Se così non fosse, infatti, per la proprietà 2 degli insiemi consistenti massimali, $\neg\beta \in \Gamma_i$ e $\neg\gamma \in \Gamma_i$ e quindi, poiché un teorema della logica classica e quindi di T afferma che $\neg\beta \to (\neg\gamma \to \neg(\beta \vee \gamma))$, per la proprietà 3, $\neg(\beta \vee \gamma) \in \Gamma_i$. Quindi, per la proprietà 1, $(\beta \vee \gamma) \notin \Gamma_i$ e ciò contraddice l'ipotesi.
     Ora, se $\beta \in \Gamma_i$, $i \models_T \beta$. Analogamente, se $\gamma \in \Gamma_i$, $i \models_T \gamma$, quindi $i \models_T \beta \vee \gamma$;
   - si supponga $(\beta \vee \gamma) \notin \Gamma_i$. Per la proprietà 2, $\neg(\beta \vee \gamma) \in \Gamma_i$ e quindi, da $\neg(\beta \vee \gamma) \to \neg\beta$ e da $\neg(\beta \vee \gamma) \to \neg\gamma$, per la proprietà 3, $\neg\beta \in \Gamma_i$ e $\neg\gamma \in \Gamma_i$. Per la proprietà 3, allora, $\beta \notin \Gamma_i$ e $\gamma \notin \Gamma_i$. Quindi $i \not\models_T \beta$ e $i \not\models_T \gamma$, da cui $i \not\models_T (\beta \vee \gamma)$.

4. Se il teorema vale per una fbf β, vale anche per $\Box\beta$, infatti:

   - se $\Box\beta \in \Gamma_i$, allora, per ogni Γ_j subordinato a Γ_i, $\beta \in \Gamma_j$. Quindi $j \models_T \beta$. Inoltre, per la proprietà 3, essendo $\Box\beta \to \beta$ un assioma di T, $\beta \in \Gamma_i$, da cui $i \models_T \beta$. Poiché per ogni $j \in W$ tale che iRj $j \models_T \beta$, si ottiene $i \models_T \Box\beta$;

- se $\Box\beta \notin \Gamma_i$, per la proprietà 2, $\neg\Box\beta \in \Gamma_i$. Poiché $\neg\Box\beta \rightarrow \Diamond\neg\beta$ è un teorema di T, $\Diamond\neg\beta \in \Gamma_i$. Per costruzione di Γ, ci sarà qualche Γ_j subordinato a Γ_i tale che $\neg\beta \in \Gamma_j$ e pertanto $\beta \notin \Gamma_j$. Quindi $j \nvDash_T \beta$ ed, essendo iRj, $i \nvDash_T \Box\beta$.

Il teorema vale dunque per tutte le fbf di T. □

Poiché la nostra formula iniziale $\alpha \in \Gamma$, $< W, R, \vDash_T >$ è un modello verificante per α e, per quanto già detto in precedenza, questo basta per dimostrare la completezza di T.

La completezza di S4 ed S5

La dimostrazione è analoga a quella della completezza di T con le sole varianti che seguono.

Per quanto riguarda $S4$, ogni Γ_i in Γ dev'essere consistente massimale relativamente ad $S4$ e R è definita in modo tale che $\forall i, j \in W, iRj$ se e solo se Γ_j è un *subordinato** di Γ_i, dove per subordinato* di Γ_i intendiamo un insieme che o è Γ_i stesso, o un suo subordinato, o un subordinato di un subordinato di Γ_i (ciò corrisponde alla richiesta che R sia transitiva in un S4-modello).

Per trattare con $S5$, invece dobbiamo anche richiedere che R sia simmetrica. Dobbiamo pertanto dire che ogni qualvolta Γ_j è un subordinato* di Γ_i, non solo iRj, ma anche jRi.

3.2.3 La completezza degli LPC modali

Anche per gli LPC modali cercheremo di costruire un modello verificante per ogni formula consistente del sistema, ma prima ci servirà introdurre alcune definizioni.

Definizione 3.4. Di un insieme Λ si dice che possiede la *E-proprietà* se e soltanto se, per ogni fbf della forma $(\exists x)\beta$ in Λ, c'è in Λ un'altra fbf che indicheremo con $\beta[y/x]$ che differisce da β solo nell'avere, ovunque β ha libera x, una variabile individuale y libera in $\beta[y/x]$ ma non in β.

Definizione 3.5. Una *E-formula relativamente a x* è una qualunque fbf nella forma $(\exists x)\beta \rightarrow \beta[y/x]$.

Definizione 3.6. Tutte le E-formule che differiscono tra di loro per il fatto che ciascuna di esse è una E-formula relativamente ad una variabile differente, saranno dette avere la stessa *E-forma* (una E-forma si può pensare come l'insieme di tutte le E-formule con lo stesso antecedente).

Definizione 3.7. Un insieme di fbf si dice in possesso della *E'-proprietà* se contiene almeno una E-formula di ogni E-forma.

Non è difficile dimostrare che se un insieme consistente massimale possiede la E'proprietà, allora possiede pure la E-proprietà.

Cominciamo considerando una formula α consistente nei confronti di $T + BF$ e costruiamo un sistema di insiemi consistenti massimali, Γ, in cui gli insiemi sono correlati tra loro come nel caso di T. Richiederemo anche che Γ abbia la E-proprietà.

La costruzione di Γ non è immediata ma abbiamo bisogno di estendere alla logica modale le nozioni appena definite.

Definizione 3.8. Una *E_M-formula relativamente a y* è definita nel modo che segue:

1. Qualunque fbf della forma $(\exists x)\beta \to \beta[y/x]$ è una E_M-formula relativamente a y. Tutte le E-formule relativamente a y sono anche E_M-formule relativamente a y.

2. Se γ è una E_M-formula relativamente a y e δ una qualunque fbf non contenente y libera, allora $\Diamond\delta \to \Diamond(\delta \wedge \gamma)$ è una E_M-formula relativamente a y.

Analogamente alle definizioni precedenti, si definiscono le E_M-forme e la E'_M-proprietà.

Enunciamo due lemmi che serviranno nella costruzione degli insiemi consistenti massimali. Per le rispettive dimostrazioni, si veda [Hughes-Cresswell 1973].

Lemma 3.2.3. *Se γ è una E_M-formula relativamente a y, allora $(\exists y)\gamma$ è derivabile in $T + BF$.*

Lemma 3.2.4. *Se Λ è un insieme consistente di formule, nessuna delle quali contiene occorrenze di y, e γ è una E_M-formula relativamente a y, allora $\Lambda \cup \{\gamma\}$ è consistente.*

Facciamo vedere ora come, partendo da una qualunque fbf consistente α, possiamo costruire un sistema Γ di insiemi consistenti massimali relativamente a $T + BF$.

Assumiamo che le fbf di $T + BF$ siano state disposte in un qualche ordine standard e assumiamo la stessa cosa per le E_M-forme. Per costruire Γ_1 partiamo da $\{\alpha\}$. Aggiungiamo, per ciascuna delle E_M-forme, qualche E_M-formula relativamente a una variabile non occorrente prima della costruzione dell'insieme. Per il secondo lemma, l'insieme rimane consistente. Accresciamo l'insieme, fino a renderlo consistente massimale, nel modo standard. Γ_1 chiaramente possiede la E'_M-proprietà e quindi la E-proprietà.

Si dimostra (si veda [Hughes-Cresswell 1973]) che, dato un qualunque insieme consistente massimale Γ_α, costruito a partire da α, con la E'_M-proprietà, si può costruire per ogni fbf $\Diamond\beta \in \Gamma_\alpha$ un insieme consistente massimale Γ_β contenente β e tutte le fbf γ tali che $\Box\gamma \in \Gamma_\alpha$ ed in possesso esso stesso della E'_M-proprietà.

La costruzione di Γ procede come nel caso di T proposizionale.

Definiamo il seguente T+BF-modello $< W, R, D, V >$:

W: a ciascun Γ_i in Γ, associamo un mondo possibile che chiameremo i. L'insieme W sarà l'insieme di tutti i mondi così fatti.

R: è la relazione tale che $\forall i, j \in W, iRj$ se è solo se Γ_j è un subordinato di Γ_i o i due insiemi coincidono.

D: è l'insieme delle variabili individuali considerate come oggetti.

V: Poniamo $V(x) = x$ per ogni variabile individuale x.

Per qualunque fbf φ n-aria, $V(\varphi)$ è l'insieme formato solo dalle (n+1)-uple ordinate $< x_1, ..., x_n, i >$ tali che $\varphi(x_1, ...x_n) \in \Gamma_i$ per ogni $\Gamma_i \in \Gamma$.

Il valore assegnato a V da una qualunque fbf può essere determinato dalle regole viste per la semantica di LPC modale.

Teorema 3.2.5.
Dati W, R, D e V come sopra definiti, per una qualunque fbf β di $T + BF$ e per qualunque $i \in W$, $V(\beta, i) = \boldsymbol{T}$ se e solo se $\beta \in \Gamma_i$.

Dimostrazione. La dimostrazione è ancora per induzione sulla costruzione di una fbf.

Per formule atomiche il teorema vale in virtù dell'assegnamento di valore iniziale.

Per $\neg$, $\vee$ e $\Box$ le dimostrazioni sono come per T. Rimane da dimostrare che il teorema vale per la quantificazione.

Supponiamo che il teorema valga per una qualunque fbf β e per ogni suo esempio per sostituzione di variabili individuali.

- Se $(\forall x)\beta \in \Gamma_i$, dobbiamo provare che $V((\forall x)\beta, i) = \mathbf{T}$, cioè che, per ogni V' differente da V solo per l'assegnamento che fa ad x, $V'(\beta, i) = \mathbf{T}$.

  Sia $y = V'(x)$. y sicuramente sarà un membro di D.

a. Si supponga che in β, x non occorra nel campo d'azione di un qualunque quantificatore contenente y. In tal caso $V'(\beta) = V(\beta[y/x])$. Ma per $\forall 1$, $(\forall x)\beta \rightarrow \beta[y/x]$ è derivabile in $T + BF$. Pertanto, per la proprietà 3 degli insiemi consistenti massimali, $\beta[y/x] \in \Gamma_i$. Questa è un esempio per sostituzione di β e quindi $V(\beta[y/x], i) = \mathbf{T}$. Quindi $V'(\beta, i) = \mathbf{T}$.

b. Se y è una variabile per cui x non è libera in β, formiamo una variante alfabetica vincolata (o rinomina) di β, in cui non occorra né $(\forall y)$ né $(\exists y)$ e la chiamiamo γ. Sostituiamo in γ ovunque x libera con y. Ne risulta $\gamma[y/x]$. Poiché β e γ sono varianti alfabetiche vincolate, per un assioma di LPC, $(\forall x)\beta \leftrightarrow (\forall x)\gamma$ e quindi, poiché $(\forall x)\beta \in \Gamma_i$, $(\forall x)\gamma \in \Gamma_i$. Per $\forall 1$, $(\forall x)\gamma \rightarrow \gamma[y/x]$ e quindi $\gamma[y/x] \in \Gamma_i$. Ora, $\gamma[y/x]$ è un esempio per sostituzione di γ e quindi $V(\gamma[y/x], i) = \mathbf{T}$. Come per il punto a., $V'(\gamma, i) = V(\gamma[y/x], i) = \mathbf{T}$. Ora, poiché γ è una variante alfabetica vincolata di β, qualunque assegnamento di valore darà a ciascuna lo stesso valore. Così, $V'(\beta, i) = V'(\gamma, i) = \mathbf{T}$.

- Se $(\forall x)\beta \notin \Gamma_i$, dobbiamo dimostrare che per qualche V' differente da V solo per l'assegnamento ad x, $V'(\beta, i) = \mathbf{F}$.

  Per la proprietà 2, $\neg(\forall x)\beta \in \Gamma_i$. Dal momento che Γ_i possiede la E-proprietà, in Γ_i ci sarà un'fbf $\neg\beta[y/x]$ e quindi, per la proprietà 1, $\beta[y/x] \notin \Gamma_i$. Pertanto, per l'ipotesi induttiva, $V(\beta[y, x], i) = \mathbf{F}$. Poniamo che V' differisca da V solo per il fatto che $V'(x) = y$. In tal caso $V'(\beta, i) = V(\beta[y, x], i) = \mathbf{F}$.

$\square$

Per la completezza di $S4 + BF$ e $LPC + S5$ facciamo le stesse modifiche fatte per i sistemi proposizionali corrispondenti e quindi anche questi due sistemi sono completi.

3.3 Identità negli LPC modali

Come i linguaggi predicativi non modali, anche un LPC modale può essere arricchito con una costante predicativa binaria per rappresentare l'identità. Per questo predicato usiamo il simbolo = che scriviamo tra i suoi argomenti.

L'interpretazione privilegiata è che $x = y$ significa che x è lo stesso individuo che è y e diremo che x è *identico* a y. Abbrevieremo $\neg(x = y)$ con $x \neq y$.

Alla base di LPC modale aggiungiamo i seguenti due schemi di assiomi:

I1 $x = x$;

I2 $(x = y) \to (\alpha \to \beta)$ dove α e β sono fbf modali che differiscono solo per il fatto che in una o più occorrenze in cui α ha libera x, β ha libera y.

Considereremo in questo paragrafo solo i sistemi che contengono la formula di Barcan, anche se molti risultati si applicano anche ai sistemi corrispondenti privi di questa. Chiameremo $T + BF$, $S4 + BF$ e $LPC + S5$, con l'aggiunta di I1 e I2, $T + I$, $S4 + I$ e $S5 + I$ rispettivamente.

Tra i teoremi che possiamo ora derivare ce ne sono due che sotto l'interpretazione privilegiata sembrano intuitivamente inaccettabili.

Il primo è derivabile anche in $T + I$.

Teorema 3.3.1 (LI)**.**
$(x = y) \to \Box(x = y)$.

Dimostrazione. Sostituendo in I2 ad α, $\Box(x = x)$ e rimpiazzando la seconda occorrenza di x con y, si ottiene

$$(x = y) \to (\Box(x = x) \to \Box(x = y))$$

che è equivalente a

$$\Box(x = x) \to ((x = y) \to \Box(x = y)). \tag{3.3}$$

Inoltre, applicando N a I1, otteniamo

$$\Box(x = x). \tag{3.4}$$

Da 3.3 e 3.4, per Modus Ponens, si ricava

$$(x = y) \to \Box(x = y)$$

che è la tesi. □

Il secondo teorema è strettamente correlato con LI ma è derivabile solo in $S5 + I$ e in nessuno dei sistemi più deboli. Si dimostra come LI.

Teorema 3.3.2 (LNI)**.**
$(x \neq y) \to \Box(x \neq y)$.

Ciò che LI significa è che ogni volta che x e y sono lo stesso oggetto, è verità necessaria che siano lo stesso oggetto, cioè che non ci sono affermazioni di identità contingente vere. Sembra facile escogitare controesempi. Per esempio l'enunciato *l'uomo della porta accanto è il sindaco* sembra asserire una identità necessaria tra l'uomo della porta accanto e il sindaco. Se è così, possiamo riscriverlo, semiformalmente, come: *l'uomo della porta accanto = sindaco.*

Eppure questa non è una verità necessaria, perché è logicamente possibile che l'uomo della porta accanto non sia il sindaco.

Un modo per evitare i controesempi sarebbe quello di costruire le proposizioni in modo che esprimano una verità necessaria. Nell'esempio citato, l'uomo che di fatto è l'uomo della porta accanto, avrebbe potuto vivere in qualche altro posto. Non è necessario che viva nella porta accanto, per cui l'essere della porta accanto è una proprietà che appartiene in modo contingente all'uomo a cui appartiene. Analogamente è un dato contingente che l'uomo che in effetti è il sindaco sia il sindaco, perché in sua vece avrebbe potuto essere qualcun altro.

Però se si intende questa proposizione come tale da significare che l'oggetto che, come dato di fatto contingente, possiede la proprietà di essere l'uomo della porta accanto è identico all'oggetto che, come dato di fatto contingente, ha la proprietà di essere il sindaco, allora la stiamo costruendo come una frase che asserisce che un oggetto variamente descritto è identico a se stesso, senza difficoltà a considerarla una verità necessaria.

Tutto ciò ci darebbe un modo di costruire affermazioni di identità che rende LI perfettamente accettabile, infatti ogni qualvolta $x = y$ è vera possiamo prenderla come tale da esprimere la verità necessaria che un certo oggetto è identico a se stesso.

Inoltre è ammissibile che, intuitivamente, LI e LNI devono reggere o cadere insieme e che se un sistema modale contiene LI, dovrebbe contenere LNI. Abbiamo visto che entrambi sono derivabili in $S5+I$ ma non nei sistemi più deboli. Possiamo comunque aggiungere consistentemente LNI come assioma extra a uno dei due, senza rafforzarlo fino a renderlo $S5+I$. Chiameremo queste seconde versioni di $T+I$ e $S4+I$, $T+LNI$ e $S4+LNI$ rispettivamente.

3.3.1 Semantica per LPC modali con identità

Ci limitiamo per ora ai sistemi contenenti LNI. Possiamo definire la validità per questi sistemi aggiungendo semplicemente alle condizioni formulate per i modelli di ogni LPC modale, la seguente regola:

Per variabili individuali qualsiasi x e y e per qualunque mondo possibile $i \in W$, $V((x=y),i) = \mathbf{T}$ se $V(x) = V(y)$, altrimenti $V((x=y),i) = \mathbf{F}$.

Per questa regola $x = y$ deve valere come vera se e solo se a x e y è assegnato lo stesso oggetto. Stiamo definendo $V(=)$ come l'insieme di triple $< u, u, i >$ per ogni $u \in D$ e per ogni $i \in W$. La definizione di validità è allora come quella data precedentemente.

Chiaramente la pura e semplice aggiunta della regola per l'identità non può incidere sulla validità di formule non contenenti l'operatore di identità. Inoltre, ogni volta che $V((x = y), i) = \mathbf{T}$, $V(x) = V(y)$ e quindi $V((x = y), j) = \mathbf{T}$ per ogni altro $j \in W$ e quindi $V(\Box(x = y), i) = \mathbf{T}$. Analogamente, se $V((x = y), i) = \mathbf{F}$ e quindi $V((x \neq y), i) = \mathbf{T}$, sarà $V((x \neq y), j) = \mathbf{T}$ per ogni $j \in W$ e quindi $V(\Box(x \neq y), i) = \mathbf{T}$. Pertanto questa semantica convalida LI e LNI in tutti i sistemi.

La validità di I1 è ovvia perché $V(x) = V(x)$. I2, analogamente, è valido in quanto se $V((x = y), i) = \mathbf{T}$, α e β differiscono solo per qualche variabile libera a cui sia assegnato lo stesso valore; quindi se $V(\alpha, i) = \mathbf{T}$, anche $V(\beta, i) = \mathbf{T}$).

Perciò, tutte le tesi di $T + LNI$, $S4 + LNI$ ed $S5 + I$ sono valide.

3.3.2 Sistemi con identità contingente

Per sistemi con identità contingente si intendono quei sistemi in cui non si possono derivare LI ed LNI.

Uno di questi è quello in cui si è introdotta una restrizione in I2 che ora diventa:

I2' $(x = y) \to (\alpha \to \beta)$ dove α e β differiscono solo per il fatto che in uno o più posti in cui α ha libera x, *non occorrente nel campo d'azione di un operatore modale*, β ha libera y.

Se chiamiamo CI I1+I2', possiamo ora formare i sistemi $T+CI$, $S4+CI$, $S5 + CI$, contenenti I1 e I2' ma non I2 e LNI.

Il rimpiazzamento di I2 con I2' lascia inalterati i sistemi finché entrano in gioco tesi non modali, ma blocca immediatamente le dimostrazioni date di LI ed LNI. In effetti queste due tesi non si possono dimostrare nemmeno in $S5 + CI$ (si veda [Hughes-Cresswell 1973]).

La semantica vista per i sistemi con LNI, con le dovute modificazioni, renderebbe valida la formula

$$(\Box(\exists x)\varphi(x)) \to (\exists x)\Box\varphi x$$

e cioè la conversa del teorema 3.1.3 che è intuitivamente inaccettabile. Infatti, per riprendere un esempio proposto da Quine, in certi giochi è necessario che qualche giocatore vinca, ma non c'è nessun giocatore che, individualmente preso, è per forza destinato a vincere.

Questa formula non è un teorema di nessun sistema di identità contingente perché questi sono ottenuti indebolendo i sistemi LNI e la formula non è un sistema in nessuno di questi. Ciò dimostra che quella che sembra la semantica più naturale per i sistemi CI è incapace di caratterizzarli.

Una semantica adeguata per i sistemi CI non dovrebbe richiedere né che valgano come oggetti solo le stringhe costituite unicamente di un singolo membro di D, né che valga come oggetto una stringa qualunque di membri di D. Faremo in modo adesso che il modello specifichi quali assegnamenti a variabili individuali sono ammissibile.

Formalmente bisogna fare in modo che il modello includa un insieme Θ di assegnamenti di valore, prendendo poi uno di essi, V_1 come assegnamento designato e facendo in modo che una fbf α sia valida se e solo se $V_1(\alpha, i) = \mathbf{T}$ per ogni $i \in W$ di tutti i modelli siffatti.

Un T+CI-modello (e, con le aggiunte opportune, un S4+CI-modello e un S5+CI-modello) è una quintupla ordinata $< W, R, D, V_1, \Theta >$ in cui W, R e D sono determinati come per i sistemi LNI, $V_1 \in \Theta$ e Θ è un insieme di assegnamenti di valore tali che per ogni $V \in \Theta$ e per ogni coppia di variabili individuali qualsiasi x e y c'è qualche $V' \in \Theta$ che differisce da V solo per l'assegnamento a x, cioè $V(x, i) = V'(y, i)$ per ogni $i \in W$.

Le proprietà di V per negazione, unione e operatore di necessità sono le stesse. Rimpiazziamo solo la proprietà riguardante il quantificatore con:

Per qualunque fbf α, qualunque variabile individuale x e qualunque $i \in W$, $V((\forall x)\alpha, i) = \mathbf{T}$ se e soltanto se per ogni $V' \in \Theta$ che differisce da V solo per l'assegnamento a x, $V'(\alpha, i) = \mathbf{T}$.

I modelli per i sistemi LNI ora diventano equivalenti a quel sottoinsieme di CI-modelli in cui Θ contiene esattamente quegli assegnamenti che danno a qualunque variabile individuale lo stesso valore in ogni mondo del modello. Da ciò segue che la conversa del teorema 3.1.3, non essendo valida in nessun sistema LNI, non è valida nemmeno per questa semantica.

Gli assiomi proposizionali e quantificazionali di $T{+}CI$, $S4{+}CI$ ed $S5{+}CI$ sono tutti validi per questa semantica. I1 analogamente è valido in quanto ogni $V \in \Theta$ assegna un valore unico a qualunque delle variabili individuali in un dato mondo e quindi $V(x = x, i) = \mathbf{T}$ per ogni $i \in W$.

Anche I2' è valida in quanto qualunque parte modale di α sarà ripetuta esattamente in β e, dati i valori in i di queste sottoformule modali, i valori di α e β in i dipenderanno unicamente dagli assegnamenti di valore fatti alle variabili in i. Ma α differisce da β solo perché ha y libera dove β ha libera x e per ipotesi x e y hanno lo stesso valore in i.

I2 tuttavia non è valida, infatti possiamo costituire un modello falsificante per

$$(x = y) \to (\Box\varphi x \to \Box\varphi y)$$

che è un esempio di I2 e non di I2'.

3.3.3 Semantica per T+I e S4+I

La validità per questi due sistemi si può definire introducendo un'unica modifica alla semantica vista per i sistemi CI.

Il cambiamento in questione è una restrizione sulla regola per gli assegnamenti di valore a variabili individuali. Consentiamo ancora a un $V \in \Theta$ di assegnare a una variabile individuale valori differenti in mondi differenti, ma se due variabili individuali hanno lo stesso valore in un dato mondo i, esse devono avere lo stesso valore (anche se non necessariamente il valore che hanno in i), in ogni mondo accessibile a i. La regola perciò ora sarà:

Per qualunque variabile individuale x, qualunque $V \in \Theta$ e qualunque $i \in W$, $V(x,i) \in D$, purché per ogni variabile individuale y se $V(x,i) = V(y,i)$, allora, per ogni $j \in W$ tale che iRj, $V(x,j) = V(y,j)$.

Tutto il reso rimane come nella definizione dei modelli e della validità visti per CI.

Ovviamente gli I-modelli sono un sottoinsieme dei CI-modelli e perciò tutto ciò che è valido nei sistemi di identità contingente è valido in questi.

Capitolo 4

Modelli modali per la teoria degli insiemi

4.1 Cenni sulla teoria delle classi

Il sistema che studieremo in questo paragrafo è conosciuto come NBG (da Von Neumann, Bernays e Gödel. Nell'esposizione data da [Smullyan-Fitting 1996], l'idea base è che certe collezioni di oggetti sono chiamate *classi* e altre *insiemi*. Ogni insieme è anche una classe ma non tutte le classi sono insiemi.

Una collezione (insieme) V è chiamata *modello* della teoria delle classi se soddisfa gli assiomi di NBG che illustreremo in seguito (ne supporremo l'esistenza). Fissato V, che chiameremo *classe universale o classe di tutti gli insiemi*, chiameremo insieme del modello (o, più semplicemente, insieme) ogni elemento di V e classe del modello (o classe) ogni sottocollezione di V.

Scriveremo $x \in A$ per indicare che x è un elemento della classe A e $x \notin A$ come abbreviazione di $\neg(x \in A)$.

Definizione 4.1. Se A e B sono classi, diremo che A è una *sottoclasse* di B e scriveremo $A \subseteq B$ se ogni elemento di A è elemento di B, cioè

$$A \subseteq B := ((\forall x)(x \in A \to x \in B)).$$

Un primo assioma presente in tutte le versioni di NBG è detto **assioma di estensione**: esso dice che se le classi A e B contengono esattamente gli stessi elementi, allora sono identiche. Formalmente:

(E) $(\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B) \to A = B$

o, equivalentemente,

$$((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)) \to A = B.$$

Utilizzeremo le lettere maiuscole A, B,... per indicare le classi e le minuscole a, b,... per indicare gli insiemi.

Sia ora $\varphi(A_1, ..., A_n, x)$ una proprietà (considereremo quelle esprimibili mediante fbf: vedi sotto) delle classi $A_1, ..., A_n$ e dell'insieme x. Gli assiomi di separazione si ottengono dallo **schema di separazione**:

(S) $(\forall A_1)...(\forall A_n)(\exists B)(\forall x)[x \in B \leftrightarrow \varphi(A_1, ...A_n, x)]$.

Anche S compare in tutte le versioni di NBG. Intuitivamente, ogni assioma di separazione dice che, comunque prese le sottoclassi A_1,...,A_n di V, esiste la classe B di tutti gli insiemi x di V che soddisfano la condizione $\varphi(A_1, ..., A_n, x)$. Lo schema di separazione vale anche per $n = 0$, cioè quando φ non ha variabili che siano classi.

Un'importante conseguenza dello schema di separazione è il seguente:

Teorema 4.1.1.
Non tutte le classi sono insiemi.

Dimostrazione. La dimostrazione è una variante del paradosso di Russell e consiste nel costruire una classe che non può essere un insieme.

Consideriamo $\varphi(x) = \neg(x \in x)$. Esisterà un'unica classe O (l'unicità deriva dall'assioma di estensione) i cui elementi sono tutti e soli gli insiemi x tali che $x \notin x$.

Così, per ogni insieme x, abbiamo

$$x \in O \leftrightarrow x \notin x.$$

Chiaramente, se O fosse un insieme, avremmo

$$O \in O \leftrightarrow O \notin O$$

che è una contraddizione. Quindi O non può essere un insieme. □

Prima di enunciare gli assiomi che caratterizzano V abbiamo bisogno di due ulteriori definizioni:

Definizione 4.2. Una classe A è detta *transitiva* se ogni elemento di A è una sottoclasse di A; in altre parole, se A è transitiva, contiene, con ogni elemento y, tutti gli elementi x di y cioè

$$(\forall x)(\forall y)[(x \in y \wedge y \in A) \rightarrow x \in A].$$

Definizione 4.3. Diremo una classe A *ricca* (swelled) se ogni sottoclasse di ogni elemento di A è un elemento di A, cioè

$$(\forall x)(\forall y)[(x \subseteq y \wedge y \in A) \rightarrow x \in A].$$

Una classe che è sia transitiva che ricca è chiamata *supercompleta*.
I primi due assiomi che caratterizzano V in questa esposizione sono:

A_1 Ogni insieme è una classe, cioè ogni elemento di V è una sottoclasse di V. In altre parole, V è transitiva.

A_2 Ogni sottoclasse di un insieme è un insieme, cioè ogni sottoclasse di ogni elemento di V è un elemento di V. V è ricca.

Quindi, per A_1 e A_2, V è supercompleto. Il secondo assioma e il teorema 4.1.1 hanno come importante conseguenza il

Teorema 4.1.2.
V non è un insieme.

Dimostrazione. Se V fosse un insieme, per A_2 ogni sua sottoclasse sarebbe un insieme, contrariamente a quanto dimostrato nel teorema 4.1.1. Quindi V non è un insieme. $\square$

Una classe A è detta *vuota* se non ha nessun elemento, cioè se

$$(\forall x)(x \notin A).$$

Per il principio di estensione, non possono esistere più di una classe vuota. Inoltre, per lo schema di separazione, esiste almeno una classe vuota, infatti possiamo prendere in considerazione una proprietà $\varphi(x)$ che non vale per nessun x, per esempio $\varphi(x) = \neg(x = x)$ e ottenere la classe che consiste di tutti e soli gli insiemi che godono di φ. Una tale classe deve per forza essere vuota. Quindi esiste una e una sola classe vuota che denoteremo con $\emptyset$ che gode delle seguenti proprietà:

1. $\emptyset$ è una sottoclasse di ogni classe A, cioè
$$(\forall x)(x \in \emptyset \to x \in A);$$

2. $\emptyset$ è banalmente supercompleta.

Per quanto visto finora, V potrebbe essere una classe vuota, perché se $\emptyset$, essendo supercompleta, soddisfa gli assiomi A_1 e A_2. Introduciamo un assioma, chiamato **assioma dell'insieme vuoto**, che dice che la classe vuota è un insieme. Esso è il seguente:

A_3 La classe $\emptyset$ è un insieme, cioè
$$\emptyset \in V.$$

Per A_3, V contiene almeno un elemento, $\emptyset$, quindi non è vuota. Dobbiamo però assicurarci che $\emptyset$ non sia l'unico elemento di V, perché ciò non è garantito dai primi tre assiomi. Per questo introduciamo l'**assioma della coppia**.

Per ogni insieme $a \in V$, possiamo costruire la classe di tutti gli insiemi x tali che $x = a$ (tale classe esiste per lo schema di separazione ed è unica per il principio di estensione). Questa classe, che ha a come unico elemento, verrà denotata con $\{a\}$ e chiamata *singoletto* a. In particolare $\{\emptyset\}$ è la classe che ha come unico elemento l'insieme vuoto.

I singoletti hanno le seguenti proprietà:

1. $\emptyset$ e $\{\emptyset\}$ sono due classi diverse per il principio di estensione, infatti la seconda non è vuota, avendo $\emptyset$ come elemento, mentre la prima lo è.

2. La classe $\{\emptyset\}$ è supercompleta.

3. Per ogni a e b insiemi, $a = b$ se e solo se $\{a\} = \{b\}$.

Definizione 4.4. Siano a e b insiemi qualunque. La *coppia non ordinata* $\{a, b\}$ è la classe i cui soli elementi sono a e b, cioè la classe degli insiemi x tali che $x = a$ o $x = b$. Questa classe esiste ed è unica per estensione e separazione. Se $a = b$, $\{a, a\} = \{a\}$.

Poiché per ogni a e b insiemi, la coppia non ordinata $\{a, b\}$ esiste come classe, non necessariamente come insieme, il prossimo assioma sarà:

A_4 Per ogni coppia di insiemi a e b, la classe $\{a, b\}$ è un insieme.

Un ovvia conseguenza dell'assioma della coppia è:

Corollario 4.1.3.
Per ogni insieme x, la classe $\{x\}$ è un insieme.

Definizione 4.5. Comunque presi a e b insiemi, la *coppia ordinata* $< a, b >$ è l'insieme $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Chiaramente $\{a, b\} = \{b, a\}$ ma, se $a \neq b$, $< a, b >$ sarà diverso da $< b, a >$ e, dati gli insiemi a, b, c e d, $< a, b >=< c, d >$ se e soltanto se $a = c$ e $b = d$.

Possiamo definire induttivamente le *n-uple* nel seguente modo:

$$< x_1, x_2, x_3 >=<< x_1, x_2 >, x_3 >$$

e in generale, per $n > 2$

$$< x_1, ..., x_n, x_{n+1} >=<< x_1, ..., x_n >, x_{n+1} >$$

.

Definizione 4.6. Sia A una classe. L'*unione degli elementi di* A, che denoteremo con $\bigcup A$ è la classe di tutti gli elementi di tutti gli elementi di A. Vale $x \in \bigcup A$ se e solo se $(\exists y)(x \in y \wedge y \in A)$.

A_4 **assioma dell'unione** : Se x è un insieme, anche $\bigcup x$ lo è.

Strettamente collegato al concetto di unione, è il concetto di intersezione.

Definizione 4.7. Sia A una classe. L'*intersezione di tutti gli elementi di* A, che denoteremo con $\bigcap A$ è la classe di tutti gli elementi che appartengono a tutti gli elementi di A, cioè $x \in \bigcap A$ se e solo se $(\forall y)(y \in A \to x \in y)$.

Data una qualunque classe A, le classi $\bigcup A$ e $\bigcap A$ esistono per lo schema di separazione e sono unici per l'assioma di estensione. Vale il seguente:

Teorema 4.1.4.

1. *Per ogni classe non vuota* A, $\bigcap A$ *è un insieme;*
2. $\bigcap \emptyset = V$.

Dimostrazione.

1. sia A non vuota e sia x un insieme appartenente ad A. Poiché ogni elemento di $\bigcap A$ appartiene ad ogni elemento di A, apparterrà anche ad x e quindi $\bigcap A \subseteq x$. Per A_2, essendo una sottoclasse di un insieme, $\bigcap A$ è anch'essa un insieme.
2. Banalmente, poiché $\emptyset$ non ha alcun elemento, ogni elemento di V appartiene ad ogni elemento di $\emptyset$ e quindi ogni elemento di V appartiene a $\bigcap \emptyset$. Quindi $V \subseteq \bigcap \emptyset$ e, poiché $\bigcap \emptyset \subseteq V$, $V = \bigcap \emptyset$.

□

Definizione 4.8. Sia x un insieme. La sua *classe delle parti*, $\mathbb{P}(x)$ è la classe di tutti i sottoinsiemi di x. Ancora una volta, $\mathbb{P}(x)$ esiste ed è unico.

A_6 **assioma dell'insieme delle parti** Se x è un insieme, $\mathbb{P}(x)$ è un insieme.

$$x \in V \to \mathbb{P}(x) \in V.$$

Per il prossimo assioma, introdurremo, senza dilungarci troppo, i numeri naturali e la loro interpretazione come insiemi.

Von Neumann definì i numeri naturali in modo che ognuno di essi risulti essere l'insieme di tutti i numeri naturali minori. Ciò significa che, non esistendo numeri naturali minori di 0, 0 deve essere obbligatoriamente l'insieme vuoto.

Definizione 4.9. Per ogni insieme x, definiamo il *successore di* x: $x' = x \cup \{x\}$.

Possiamo ora, dato un numero naturale n, definirlo in un numero finito di passi come l'n-simo successore di 0. Non siamo ancora in grado però di determinare quando un insieme x è un numero naturale.

Definizione 4.10. Una classe A è detta *induttiva* se soddisfa entrambe le seguenti condizioni:

1. $0 \in A$;

2. per ogni x, se $x \in A$, $x' \in A$.

Da A_3 e A_6 segue che V è induttivo. Vogliamo adesso definire l'insieme dei numeri naturali in modo tale che valgano gli assiomi di Peano.

Definizione 4.11. Diremo che un insieme x è un numero naturale se x appartiene a ogni insieme induttivo. Chiamiamo ω la classe dei numeri naturali.

Poiché dagli assiomi precedenti non è possibile dedurre che ω è un insieme, introduciamo l'assioma:

A_7 **assioma dell'infinito** : ω è un insieme.

Una classe che soddisfa gli assiomi E, S, A_1-A_7 è chiamata *universo di Zermelo* e ha la particolarità di contenere l'elemento infinito ω.

A questo punto rimane da esporre solo l'**assioma di sostituzione** di Fraenkel.

Definizione 4.12. Per ogni classe A e per ogni funzione F(dove per funzione intendiamo una classe univoca, cioè tale che $[(< x, y > \in F) \wedge (< x, y' > \in F)] \rightarrow y = y'$), scriviamo $F''(A)$ per indicare la classe di tutti gli elementi y tali che $y = F(x)$ per qualche $x \in A$. $F''(A)$ è detta *immagine di A tramite F.*

A_8 Per ogni funzione F e ogni insieme x, la classe $F''(x)$ è un insieme.

Una classe V che soddisfa gli assiomi E, S, A_1-A_8 è chiamata *universo di Zermelo-Fraenkel.*

Diremo V *universo di primo ordine di Zermelo-Fraenkel ben fondato* se soddisfa E, S, A_1, A_2^*, A_3, A_4, A_5, A_6^*, A_7, A_8^* e A_9 (vedi [Smullyan-Fitting 1996, Capitolo 13, par.1]) dove:

A_2^* V è ricca al primo ordine, cioè contiene con ogni elemento x, tutti i sottoinsiemi di x che sono *definibili al primo ordine su* V, che significa definiti mediante una formula φ i cui argomenti sono tutti in V.

A_6^* Per ogni $x \in V$, $\mathbb{P}(x) \cap V \in V$.

A_8^* Per ogni funzione F, se F è definibile al primo ordine su V, allora per ogni $x \in V$, $F''(x)$ è un insieme.

A_9 Ogni sottoclasse non vuota A di V ha un *elemento iniziale*, cioé esiste un $x \in A$ tale che $x \cap A = \emptyset$.

Osservazione 6. L'assioma A_6 dice che per ogni $x \in V$, l'insieme di tutti i sottoinsiemi di x è ancora in V. A_6^* afferma che per ogni $x \in V$, l'insieme di tutti i sottoinsiemi di x che stanno in V è un elemento di V. Un universo di Zermelo-Fraenkel contiene l'insieme non numerabile $\mathbb{P}(\omega)$, mentre un universo di primo ordine potrebbe contenere anche solo un'infinità numerabile di sottoinsiemi di ω e quindi $\mathbb{P}(\omega) \cap V$ potrebbe essere un insieme numerabile.

Ovviamente, se V è ricca, i due assiomi sono equivalenti. perché in quel caso $\mathbb{P}(\omega) \cap V = \mathbb{P}(\omega)$.

Per il resto del capitolo, V sarà un universo di primo ordine di Zermelo-Fraenkel.

L'importanza degli universi di primo ordine sta nel fatto che, data una qualunque classe transitiva V, essa è un universo di primo ordine se e solo se tutti gli assiomi della teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel (più brevemente ZF) valgono in V. Questi assiomi sono:

ZF1: assioma di estensione $(\forall z)(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to (x = y)$

ZF2: schema di separazione $(\forall x)(\exists z)(\forall y)(y \in z \leftrightarrow (y \in x \wedge \varphi(x, y_1, ..., y_n)))$

ZF3: assioma dell'insieme vuoto $(\exists x)\neg(\exists y)(y \in x)$

ZF4: assioma delle coppie non ordinate

$$(\exists y)(\forall z)(z \in y \leftrightarrow (z = x_1 \vee z = x_2))$$

ZF5: assioma dell'unione $(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \leftrightarrow (\exists w)(z \in w \wedge w \in x))$

ZF6: assioma dell'insieme delle parti $(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$

ZF7: assioma dell'infinito

$$(\exists w)(\emptyset \in w \wedge ((\forall x)x \in w \to (\exists z)(\forall v)(v \in z \leftrightarrow (v \in x \vee v = x))))$$

ZF8: schema di sostituzione $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\varphi(x,y) \wedge \varphi(x,z) \to y = z) \to (\exists v)(\forall y)(y \in v \leftrightarrow (\exists x)(x \in w \wedge \varphi(x,y)))$

ZF9: assioma di regolarità (o fondazione)

$$(\forall x)((\exists y)(y \in x) \to (\exists y)(y \in x \wedge (\forall z)(z \in x \to \neg(z \in y))).$$

Come ZF, possiamo arricchire anche V con due ulteriori assiomi: l'ipotesi del continuo e l'assioma di scelta.

Per quanto riguarda il primo, altro non è che la risposta alla domanda: esiste un insieme x di cardinalità più alta di ω ma più bassa della cardinalità di $\mathbb{P}(\omega)$?

L'**ipotesi del continuo (CH)** di Cantor afferma che tale x non esiste, cioè che ogni insieme più grande di ω dev'essere almeno grande come $\mathbb{P}(\omega)$. Allo stesso modo, l'**ipotesi del continuo generalizzata (GCH)** afferma che, per ogni insieme infinito x non esiste alcun insieme di cardinalità compresa tra quella di x e quella di $\mathbb{P}(x)$.

Gödel, nel 1938, provò la consistenza dell'ipotesi del continuo rispetto a ZF (quindi CH non è refutabile in ZF); Cohen, nel 1963, provò che la negazione dell'ipotesi del continuo è consistente rispetto a ZF (quindi CH non è dimostrabile in ZF): dunque CH è indipendente da ZF.

Un altro importante risultato di indipendenza riguarda l'assioma di scelta. Anch'esso è indipendente da ZF ma il risultato più importante, dovuto a Cohen è che, anche se aggiungiamo l'assioma di scelta agli assiomi di ZF, è ancora impossibile dimostrare l'ipotesi del continuo.

4.2 Una traduzione dalla logica non modale alla logica modale

In 2.5 abbiamo accennato a una traduzione dalla logica intuizionista alla logica modale $S4$, ma questa non è l'unica. Quella che utilizzeremo in questo capitolo è la seguente traduzione della logica dei predicati classica in $S4$.

Definizione 4.13. 1. per p atomica, $[\![p]\!] = \Box\Diamond p$;

2. $[\![\neg\alpha]\!] = \Box\Diamond\neg[\![\alpha]\!]$;

3. $[\![\alpha \wedge \beta]\!] = \Box\Diamond([\![\alpha]\!] \wedge [\![\beta]\!])$;

4. $[\![(\exists x)\varphi]\!] = \Box\Diamond(\exists x)[\![\varphi]\!]$.

Proposizione 4.2.1. *([Smullyan-Fitting 1996, Capitolo 16, Proposition 4.3]) Le seguenti affermazioni sono tutte valide in $S4$:*

1. $[\![\alpha]\!] \leftrightarrow \Box[\![\alpha]\!]$;
2. $[\![\alpha]\!] \leftrightarrow \Box\Diamond[\![\alpha]\!]$;
3. $[\![\alpha \wedge \beta]\!] \leftrightarrow ([\![\alpha]\!] \wedge [\![\beta]\!])$;
4. $[\![\neg\alpha]\!] \rightarrow \neg[\![\alpha]\!]$;
5. $(\exists x)[\![\varphi]\!] \rightarrow [\![(\exists x)\varphi]\!]$.

Osservazione 7. Sappiamo che, se $i \vdash_{S4} \Box\alpha$ e iRj, allora $j \vdash_{S4} \Box\alpha$. Dunque, per la proposizione precedente, da $i \vdash_{S4} [\![\alpha]\!]$ segue $j \vdash_{S4} [\![\alpha]\!]$.

Proposizione 4.2.2. *([Smullyan-Fitting 1996, Capitolo 16, Proposition 4.4 e Proposition 4.5])*
Le seguenti affermazioni sono valide in S4:

1. $[\![\alpha \vee \beta]\!] \leftrightarrow \Box\Diamond([\![\alpha]\!] \vee [\![\beta]\!])$;
2. $[\![\alpha \rightarrow \beta]\!] \leftrightarrow \Box\Diamond[\![\alpha \rightarrow \beta]\!]$;
3. $[\![(\forall x)\varphi]\!] \leftrightarrow \Box\Diamond(\forall x)[\![\varphi]\!]$;
4. $[\![\alpha \rightarrow \beta]\!] \rightarrow ([\![\alpha]\!] \rightarrow [\![\beta]\!])$;
5. $([\![\alpha]\!] \vee [\![\beta]\!]) \rightarrow [\![\alpha \vee \beta]\!]$;
6. $[\![(\forall x)\varphi(x)]\!] \rightarrow (\forall x)[\![\varphi(x)]\!]$.

In questo capitolo le proprietà dei connettivi modali sono state usate solo per stabilire il comportamento della traduzione $[\![\,]\!]$ e sarà questo comportamento ad essere utilizzato direttamente, non le proprietà di $\Box$ e $\Diamond$ viste nei capitoli precedenti.

Proposizione 4.2.3.
Sia α una formula chiusa della logica classica. α è classicamente valida se e solo se $[\![\alpha]\!]$ è valida in tutti gli S4-modelli.

Dimostrazione. La prima implicazione è banale.

Viceversa supponiamo $[\![\alpha]\!]$ S4-valida e α non vera in un modello classico M. Consideriamo l'S4-modello $< W, R, D, V >$, dove $W = i$ dove i è un qualunque oggetto arbitrario. Per riflessività, iRi e poniamo, per ogni formula atomica p, $V(i,p) = \mathbf{T}$ se e solo se p è vera in M. In un tale modello, per ogni formula γ, $V(i,\gamma) = \mathbf{T}$ se e solo se $V(i,\Box\gamma) = \mathbf{T}$ se e solo se $V(i,\Diamond\gamma) = \mathbf{T}$. Segue, per induzione sul grado, che ogni formula chiusa γ è vera in M se e solo se $V(i,[\![\gamma]\!]) = \mathbf{T}$. Poiché abbiamo supposto α non vera in M, $[\![\alpha]\!]$ non è vera in i nell'S4-modello costruito e ciò è contro l'ipotesi. $\Box$

Prima di andare avanti, riassumiamo brevemente le proprietà della traduzione da noi appena descritta:

1. Se $[\![\alpha]\!]$ è vera in $i \in W$, sarà vera in ogni mondo accessibile da i.
2. Se in i $[\![\alpha]\!]$ non è vera, allora in qualche mondo j accessibile da i, $[\![\neg\alpha]\!]$ è vera.
3. Se $[\![\neg\alpha]\!]$ è vera in i, $[\![\alpha]\!]$ non lo è.
4. $[\![\alpha \wedge \beta]\!]$ è vera in i se e soltanto se sia $[\![\alpha]\!]$ che $[\![\beta]\!]$ sono vere in i.
5. Se $[\![\alpha]\!]$ o $[\![\beta]\!]$ è vera in i, lo è anche $[\![\alpha \vee \beta]\!]$.
6. Se $[\![\alpha \vee \beta]\!]$ è vera in i, allora, in qualche mondo j accessibile da i, almeno una tra $[\![\alpha]\!]$ o $[\![\beta]\!]$ è vera.
7. Se $[\![\alpha \to \beta]\!]$ e $[\![\alpha]\!]$ sono vere in i, lo è anche $[\![\beta]\!]$.
8. Se $[\![\alpha \to \beta]\!]$ non è vera in i, allora, in qualche j accessibile da i, $[\![\alpha]\!]$ e $[\![\neg\beta]\!]$ sono vere.
9. Se qualche istanza (cioè un'assegnazione di valore a x) di $[\![\varphi(x)]\!]$ è vera in i, lo è anche $[\![(\exists x)\varphi(x)]\!]$.
10. Se $[\![(\exists x)\varphi(x)]\!]$ è vera in i, allora in qualche mondo j accessibile da i, qualche istanza di $[\![\varphi(x)]\!]$ è vera.
11. $[\![(\forall x)\varphi(x)]\!]$ è vera in i se e soltanto se ogni istanza di $[\![\varphi(x)]\!]$ è vera in i.

4.3 La costruzione di S4-modelli per ZF

Presenteremo adesso una famiglia di modelli, piuttosto che uno singolo, perché abbiamo bisogno di un modello per dimostrare l'indipendenza dell'ipotesi del continuo, di un altro per dimostrare quella dell'assioma di scelta e così via. Tutti questi modelli, però, avranno qualcosa in comune.

Indichiamo con M una sottoclasse transitiva di V che è un universo ben fondato di primo ordine su cui assumeremo che valgano sia l'assioma di scelta che l'ipotesi del continuo. Creeremo la nostra famiglia di modelli all'interno di M e mostreremo come le traduzioni degli assiomi di ZF sono valide in ognuno di essi.

Siano W una collezione di elementi e R una relazione riflessiva e transitiva su W. Assumiamo che la coppia ordinata $< W, R >$ sia un membro di M e per questo la chiameremo M-insieme.

Per costruire il dominio $D = D^W$ di uno di questi modelli abbiamo bisogno della seguente:

Definizione 4.14. Per ogni ordinale $a \in M$, definiamo il seguente insieme:

1. $R_0^W = \emptyset$ $(0 \in M)$;
2. Se $a = b + 1$ e $a \in M$, anche $b \in M$ e R_a^W è l'insieme di tutti i sottoinsiemi (in M) del prodotto cartesiano $W \times R_b^W$;
3. Se $a = \lambda$ ordinale limite, $R_\lambda^W = \bigcup_{b<\lambda} R_b^W$.

Poniamo $D = \bigcup_a R_a^W$ dove gli a sono tutti e soli gli ordinali in M.

Definizione 4.15. Diciamo che $p \in D$ ha *W-rango* a se $p \in R_{a+1}^W$ ma $p \notin R_a^W$.

Rimane da definire V e lo faremo in tre passi. Per cominciare, introduciamo una prima

Definizione 4.16. Per $i \in W$ e $p, q \in D$, diremo che p è *subito dopo* q in i e scriveremo $p\varepsilon q$ se $< i, p > \in q$, cioè se $p \in q''(\{i\})$ $(p = q(\{i\})$.

Quindi, per le fbf modali atomiche nella forma $p\varepsilon q$ vale, per ogni $i \in W$, $V(i, p\varepsilon q) = \mathbf{T}$ se e solo se $< i, p > \in q$.

Ora, se con $\approx$ indichiamo l'uguaglianza tra insiemi in un modello classico di ZF, indichiamo con $\approx_a$, per ogni ordinale a, la a-esima approssimazione a $\approx$, la cui veridicità in $i \in W$ è definita induttivamente nel modo seguente.

Definizione 4.17. Per $i \in W$ e $p, q \in D$:

1. $V(i, p \approx_0 q) = \mathbf{F}$;
2. $V(i, p \approx_{a+1} q) = \mathbf{T}$ se e soltanto se $V(i, \alpha) = \mathbf{T}$ dove
$$\alpha = [\![(\forall x)[(x\varepsilon p) \to (\exists y)(y\varepsilon q \wedge y \approx_a x)] \wedge (\forall x)[(x\varepsilon q) \to (\exists y)(y\varepsilon p \wedge y \approx_a x)]]\!];$$
3. per λ ordinale limite $V(i, p \approx_\lambda q) = \mathbf{T}$ se e soltanto se per qualche $a < \lambda$ $V(i, p \approx_a q) = \mathbf{T}$.

Infine:

Definizione 4.18. Per $p, q \in D$, e per $i \in W$, poniamo $V(i, p \approx q) = \mathbf{T}$ se e solo se $V(i, p \approx_a q) = \mathbf{T}$ per qualche ordinale a.

Il prossimo passo è mostrare che le traduzioni di tutti gli assiomi di ZF sono valide in ogni S4-modello $\mathcal{M}$ definito come sopra. Per le dimostrazioni che sono state tralasciate, rimandiamo a [Smullyan-Fitting 1996, cap.17, par. 1-6].

Iniziamo con alcuni risultati utili per provare ciò a proposito dell'assioma di estensione:

Teorema 4.3.1. *([Smullyan-Fitting 1996, Theorem 2.7])*
Supponiamo $p, q \in D$ e supponiamo α e β fbf classiche che differiscono solo perché β ha un'occorrenza di q in un posto in cui α ha p. Se $V(i, [\![p \approx q]\!]) = \boldsymbol{T}$ in $i \in W$, allora $V(i, [\![\alpha]\!] \leftrightarrow [\![\beta]\!]) = \boldsymbol{T}$.

Corollario 4.3.2. *([Smullyan-Fitting 1996, Corollary 2.8])*
Supponiamo che $\varphi(x)$ sia una formula classica con solo x libera e senza occorrenze di y. Allora

$$[\![(\forall x)(\forall y)[(x \approx y) \rightarrow (\varphi(x) \leftrightarrow \varphi(y))]]\!]$$

è S4-valida in $\mathcal{M}$.

Teorema 4.3.3. *([Smullyan-Fitting 1996, Theorem 2.10])*
Se $V(i, (\forall x)[\![x \in p \leftrightarrow x \in q]\!]) = 1$, allora $V(i, [\![p \approx q]\!]) = \boldsymbol{T}$.

Il teorema ha come corollario la validità in $\mathcal{M}$ della traduzione dell'assioma di estensione, cioè:

Corollario 4.3.4. *([Smullyan-Fitting 1996, Corollary 2.11])*

$$[\![(\forall x)(\forall y)[(\forall z)(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow (\forall z)(x \in z \leftrightarrow y \in z)]]\!]$$

è S4-valida in $\mathcal{M}$.

Dimostrazione. Se non fosse S4-valida in $\mathcal{M}$, allora per qualche mondo $i \in W$ e qualche a, b, $V(i, [\![(\forall z)(z \in a \leftrightarrow z \in b) \rightarrow (\forall z)(a \in z \leftrightarrow b \in z)]\!]) = \mathbf{F}$. Ma allora, per qualche $j \in W$ tale che iRj, $V(j, [\![(\forall z)(z \in a \leftrightarrow z \in b)]\!]) = \mathbf{T}$ e $V(j, [\![\neg(\forall z)(a \in z \leftrightarrow b \in z)]\!]) = 0$. Per il teorema 4.3.3 $V(j, [\![a \approx b]\!]) = \mathbf{T}$. Allora, per il teorema 4.3.1 $V(j, [\![\neg(\forall z)(a \in z \leftrightarrow b \in z)]\!]) = 1$ e ciò è impossibile. □

Il prossimo passo sarà mostrare che l'assioma dell'insieme vuoto e quello dell'infinito sono validi in $\mathcal{M}$. Iniziamo con la

Definizione 4.19. Sia x un insieme ben fondato. Definiamo ricorsivamente, sul rango di x, un insieme $\widehat{x} \in D = D^W$, $\widehat{x} = \{< i, \widehat{y} >| \; i \in W \text{ e } y \in x\}$.

Definizione 4.20. Definiamo induttivamente le Σ-*formule* nel modo che segue:

1. Una fbf $\varphi(x_1, ..., x_n)$ che non contiene costanti è una Σ-formula;
2. se φ e ψ sono Σ-formule, tali sono anche $\neg\varphi$, $\varphi \vee \psi$ e $\varphi \wedge \psi$;
3. se φ è una Σ-formula, lo è anche $(\exists x)\varphi$;
4. se φ è una Σ-formula, lo sono anche $(\exists x \in y)\varphi$ e $(\forall x \in y)\varphi$.

Dalla seguente

Proposizione 4.3.5. *([Smullyan-Fitting 1996, Corollary 3.4])*
Siano $\varphi(x_1, ..., x_n)$ una Σ-formula e $s_1, ..., s_n \in X$. Se $\varphi(s_1, ..., s_n)$ è vera in M, allora $[\![\varphi(\widehat{s_1}, ..., \widehat{s_n})]\!]$ è valida in ogni S4-modello $\mathcal{M}$ definito in questo capitolo.

segue

Corollario 4.3.6. *([Smullyan-Fitting 1996, Corollary 3.5]*
Sia N l'assioma dell'insieme vuoto e I quello dell'infinito. Sia $[\![N]\!]$ che $[\![I]\!]$ sono vere per ogni $i \in W$.

Vediamo adesso come le traduzioni degli assiomi della coppia non ordinata, dell'insieme delle parti, dell'unione e della regolarità, sono validi in $\mathcal{M}$. Cominceremo con quello dell'unione che è il più semplice da verificare.

Teorema 4.3.7. *([Smullyan-Fitting 1996, Theorem 4.1])*
Per ogni $p \in D$ esiste $q \in D$ tale che

$$[\![(\forall x)(x \in q \leftrightarrow x \in \bigcup p)]\!]$$

è valida in $\mathcal{M}$, dove con $x \in \bigcup p$ intendiamo dire $(\exists y)(y \in p \wedge x \in y)$.

Corollario 4.3.8. *([Smullyan-Fitting 1996, Corollary 4.2])*

$$[\![(\forall p)(\exists q)(\forall x)(x \in q \leftrightarrow x \in \bigcup p)]\!]$$

è valida in $\mathcal{M}$.

Dimostrazione. Se non fosse vero, per qualche $i \in W$,

$$V(i, [\![(\forall p)(\exists q)(\forall x)(x \in q \leftrightarrow x \in \bigcup p)]\!]) = \mathbf{F}$$

e quindi, per qualche $p \in D$

$$V(i, [\![(\exists q)(\forall x)(x \in q \leftrightarrow x \in \bigcup p)]\!]) = \mathbf{F}.$$

Allora, per qualche $j \in W$ tale che iRj e per qualche $q \in D$,

$$V(j, [\![(\forall x)(x \in q \leftrightarrow x \in \bigcup p)]\!]) = \mathbf{F}$$

e questo contraddice il teorema precedente. □

L'assioma della coppia è trattato in modo simile a quello dell'unione: si ottiene

Teorema 4.3.9. *([Smullyan-Fitting 1996, Theorem 4.3])*
Per ogni $p, q \in D$, esiste $r \in D$ tale che

$$[\![(\forall x)(x \in r \leftrightarrow x \in \{p, q\}]\!]$$

è valido in $\mathcal{M}$ dove $x \in \{p, q\}$ significa $x \approx p \vee x \approx q$.

Adesso vedremo la traduzione dell'assioma dell'insieme delle parti. Prima però abbiamo bisogno del seguente:

Lemma 4.3.10.
Supponiamo $p \in R^W_{a+1}$ e $[\![q \subseteq p]\!]$ vera in i. Allora per qualche $r \in R^W_{a+1}$, $[\![a \approx b]\!]$ è vera in i.

Teorema 4.3.11. *([Smullyan-Fitting 1996, Theorem 4.5])*
Per ogni $p \in D$, esiste $q \in D$ tale che

$$[\![(\forall x)(x \in q \leftrightarrow x \subseteq p]\!]$$

è valida in $\mathcal{M}$ dove $x \subseteq p$ abbrevia $(\forall y)(y \in x \rightarrow y \in p)$.

Infine, per l'assioma di regolarità, vale il:

Teorema 4.3.12. *([Smullyan-Fitting 1996, Theorem 4.7])*
Per ogni $p \in D$, la formula

$$[\![(\exists y)(y \in p) \rightarrow (\exists y)(y \in p \wedge (\forall z)(z \in p \rightarrow \neg(z \in y))]\!]$$

è valida in $\mathcal{M}$.

Dimostreremo adesso la validità dello schema di rimpiazzamento, mostrando la validità di uno schema di assiomi equivalente ad esso, cioè lo **schema di collezione** che è il seguente:

(C) Per ogni relazione R e per ogni classe A, se per ogni $a \in A$ esiste x tale che $R(a, x)$, allora esiste una classe B tale che per ogni $a \in A$ esiste $b \in B$ tale che $R(a, b)$: cioè, per ogni formula $\varphi(x, y)$ con solo x e y libere,

$$(\forall a)[(\forall x \in a)(\exists y)\varphi(x, y) \rightarrow (\exists b)(\forall x \in a)(\exists y \in b)\varphi(x, y).$$

Mostreremo che la traduzione di ognuno di questi assiomi è valido in ogni S4-modello $\mathcal{M}$ definito precedentemente.

Iniziamo, definendo

$$q^* = \{< j, p > | < i, p > \in q \text{ } per \text{ } qualche \text{ } i \in W \text{ } tale \text{ } che \text{ } iRj\}.$$

q^* è ancora un membro di D e, se per qualche $i \in W$ $V(i, p\varepsilon q) = \mathbf{T}$, allora $V(i, [\![p\varepsilon q^*]\!]) = \mathbf{T}$.

Proposizione 4.3.13. *([Smullyan-Fitting 1996, Proposition 6.1])* *Sia $i \in W$, $p \in D$ e $V(i, [\![(\forall x)(x \in p \to (\exists y)\varphi(x, y)]\!]) = \boldsymbol{T}$, per qualche formula classica φ. Allora, per qualche $q^* \in D$,*

$$V(i, [\![(\forall x)(x \in p \to (\exists y)(y \in q^* \wedge \varphi(x, y)))]\!]) = \boldsymbol{T}.$$

Dalla proposizione segue la validità dello schema di collezione in $\mathcal{M}$ e anche la validità in $\mathcal{M}$ dello schema di sostituzione.

4.3.1 Validità dell'assioma di scelta

Utilizzando l'assioma di scelta su M, ogni insieme R_a^W può essere ben ordinato e sia $<$ la relazione d'ordine su R_a^W. Utilizzeremo adesso questo ordinamento per scegliere membri dai sottoinsiemi di R_a^W relativamente a ogni mondo possibile $i \in W$.

Definizione 4.21. Per ogni $i \in W$ e $p \in D$, sia $m(i, p)$ il più piccolo $q \in R_a^W$ tale che $V(i, \Diamond[\![q \in p]\!]) = \mathbf{T}$ se tale q esiste. Altrimenti $m(i, p)$ è indefinito.

Osservazione 8. Se per qualche $q \in R_a^W$, $V(i, \Diamond[\![q \in p]\!]) = \mathbf{T}$, allora $m(i, p)$ è definito e $m(i, p) \leq q$.

Inoltre, poiché $[\![q \in p]\!] \to \Diamond[\![q \in p]\!]$ è valida in ogni S4-modello, se $V(i, [\![q \in p]\!]) = \mathbf{T}$, $m(i, p)$ è definito.

Definizione 4.22. Supponiamo $m(i, p)$ definito. Diciamo che la coppia $< i, p >$ stabilizza j se iRj e se per ogni k con jRk, $m(k, p)$ è definito, $m(i, p) = m(k, p)$ e $V(k, [\![m(k, p) \in p]\!] = \mathbf{T}$.

Adesso fissiamo $i_0 \in W$.

Definizione 4.23. Sia $r \in R_{a+1}^W$:

$$s = \{< j, m(i, p) > | \text{ } i_0 Rj, \text{ } p \in R_a^W, \text{ } V(q, [\![p \in r]\!] \text{ } e \text{ } m(j, p) \text{ } esiste\}.$$

Dalla definizione, segue che $s \in R_{a+1}^W$. Dimostreremo che s agisce come un insieme di scelta per r.

Lemma 4.3.14.
Supponiamo i_0Ri *e* $V(i, [\![p\varepsilon r \wedge q\varepsilon p]\!]) = \boldsymbol{T}$. *Allora* $m(i,p)$ *è definito,* $< i, p >$ *stabilizza qualche* j *e*

$$[\![m(i,p) \in p \wedge m(i,p) \in s]\!]$$

è vera in j.

Adesso, prima di dimostrare che la traduzione dell'assioma di scelta è vera in $\mathcal{M}$, assumiamo:

$$V(i_0, [\![(\forall p)(p \in r \to (\exists x)(x \in p)]\!]) = \mathbf{T}$$

cioè che in i_0 si sa che r contiene insiemi non vuoti.

Proposizione 4.3.15. *([Smullyan-Fitting 1996, Proposition 7.8])*

$$V(i_0, [\![(\forall p)(p \in r \to (\exists x)(x \in p \wedge x \in s))]\!]) = \boldsymbol{T}.$$

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che non sia vero. Allora per qualche i tale che i_0Ri e per qualche p, $V(i, [\![p \in r]\!]) = \mathbf{T}$ e $V(i, [\![\neg(\exists x)(x \in p \wedge x \in s)]\!]) = \mathbf{T}$.

Per qualche p', sia $[\![p \approx p']\!]$ che $[\![p'\varepsilon r]\!]$ siano vere in i. Per l'assunzione, $[\![p' \in r \to (\exists x)(x \in p')]\!]$ è vera in i_0 e quindi in i. Poiché $V(i, [\![p' \in r]\!]) = \mathbf{T}$, allora $V(i, [\![(\exists x)(x \in p')]\!]) = \mathbf{T}$. Allora, per qualche q e qualche i' tale che iRi', $V(i', [\![q \in a']\!]) = \mathbf{T}$. Quindi ancora, per qualche q', $[\![q \approx q']\!]$ che $[\![q'\varepsilon p']\!]$ sono vere in i'.

Segue che $[\![p'\varepsilon r \wedge q'\varepsilon p']\!]$ è vera in i'.

Applicando il lemma precedente, per qualche j con iRj,

$$[\![m(i', p') \in p' \wedge m(i', p') \in s]\!]$$

è vera in j, da cui segue che $[\![(\exists x)(x \in p' \wedge x \in s)]\!]$ è vera in j e, per le proprietà dell'uguaglianza, anche $[\![(\exists x)(x \in p \wedge x \in s)]\!]$ lo è.

Questo però contraddice il fatto che $[\![\neg(\exists x)(x \in p \wedge x \in s)]\!]$), essendo vera in i, lo è anche in j. □

Abbiamo dimostrato che in i_0 è vero che s sceglie qualcosa da ogni membro di r. Si dimostra analogamente che in i_0 è vero che s sceglie un unico oggetto da ogni membro di r, cioè la seguente

Proposizione 4.3.16. *([Smullyan-Fitting 1996, Proposition 7.10])*

$$[\![(\forall p)(\forall x)(\forall y)[(p \in r \wedge x \in p \wedge x \in s \wedge y \in p \wedge y \in s) \to x \approx y]]\!]$$

è vera in i_0.

Dalle proposizioni 4.3.15 e 4.3.16 segue che, se l'assioma della scelta è vero in M, sarà valido in ogni S4-modello $\mathcal{M}$ della famiglia definita precedentemente.

4.3.2 Validità dell'ipotesi del continuo

Per dimostrare la S4-validità dell'ipotesi del continuo, costruiamo un modello in cui questa è valida, nel modo seguente.

Una *condizione di forzatura* (forcing condition) è una coppia $< P, N >$ dove P e N sono insiemi di interi finiti e disgiunti.

Sia W l'insieme di tutte le condizioni di forzatura e per $i_1 =< P_1, N_1 >\in W$ e $i_2 =< P_2, N_2 >\in W$, poniamo $i_1 R i_2$ se e solo se $P_1 \subseteq P_2$ e $N_1 \subseteq N_2$. R è una relazione riflessiva e transitiva.

Determinare W e R ci permette già di avere un modello $\mathcal{M} = (W, R, D, V)$ della famiglia definita precedentemente.

Adesso costruiamo $p_0 \in R^W_{\omega+1} - R^W_\omega$ nel modo seguente:

$$p_0 = \{< i, \widehat{n} >\mid i =< P, N > \ \ e\ n \in P\}.$$

(Si veda pagina 70 per la definizione di $\widehat{n}$).

Per definizione, $V(< P, N >, \widehat{n}\varepsilon p_0) = \mathbf{T}$ se e soltanto se $n \in P$. Per definizione di R, per ogni coppia $< P', N' >$ tale che $< P, N > R < P', N' >$, $P \subseteq P'$, di conseguenza $n \in P'$ e $V(< P', N' >, \widehat{n}\varepsilon p_0) = \mathbf{T}$, quindi $V(< P, N >, \Box(\widehat{n}\varepsilon p_0)) = \mathbf{T}$ da cui segue $V(< P, N >, [\![\widehat{n}\varepsilon p_0]\!]) = \mathbf{T}$. Allo stesso modo, se $n \in N$, poiché P ed N sono disgiunti, $n \notin P$ e $V(< P, N >, \widehat{n}\varepsilon p_0) = \mathbf{F}$ da cui, per lo stesso ragionamento,

$$V(< P, N >, [\![\widehat{n}\varepsilon p_0]\!]) = \mathbf{F}$$

La dimostrazione della S4-validità dell'ipotesi generalizzata del continuo si basa sul seguente

Lemma 4.3.17.
Siano λ e μ cardinali infiniti con $\lambda \leq \mu$. Se in qualche $i \in W$, sia

$$[\![(\forall x)(x \in s \leftrightarrow x \subseteq \widehat{\lambda})]\!]$$

che

$$[\![f : \widehat{\mu} \xrightarrow[su]{1-1} s]\!]$$

sono vere, allora $\mu \leq 2^\lambda$.

Teorema 4.3.18. *([Smullyan-Fitting 1996, Theorem 18.6.2])*
La traduzione dell'ipotesi generalizzata del continuo è valida in $\mathcal{M}$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che non lo sia. Allora, per qualche $i \in W$, la seguente formula sarebbe vera:

$$\begin{aligned}&[\![(\exists\lambda)(\exists\mu)(\exists\nu)(\exists p)(\exists s)\\ &[C(\lambda) \wedge C(\mu) \wedge C(\nu)\wedge\\ &\widehat{\omega} \in \lambda \wedge \lambda \in \nu \wedge \nu \in \mu\wedge\\ (\forall x)(x \in s \leftrightarrow x \subseteq \lambda) \wedge f : \mu &\xrightarrow[su]{1-1} s]\!]]\end{aligned}$$

dove $C(\lambda)$ (o μ o ν) significa che λ (o μ o ν) è un numero cardinale.

Dunque esisteranno $j \in W$ con iRj e tre ordinali λ, μ e ν tali che in j è vera:

$$\begin{aligned}&[\![C(\lambda) \wedge C(\mu) \wedge C(\nu)\wedge\\ &\widehat{\omega} \in \widehat{\lambda} \wedge \widehat{\lambda} \in \widehat{\nu} \wedge \widehat{\nu} \in \widehat{\mu}\wedge\\ (\forall x)(x \in s \leftrightarrow x \subseteq \widehat{\lambda}) \wedge f : \widehat{\mu} &\xrightarrow[su]{1-1} s]\!].\end{aligned}$$

Per un teorema sugli ordinali ([Smullyan-Fitting 1996, Theorem 5.5]), λ, μ e ν sono cardinali di M. Per il lemma precedente $\mu \leq 2^\lambda$ e, poiché $\lambda \in \nu \in \mu$ l'ipotesi generalizzata del continuo non è valida in M. E ciò è assurdo per il teorema precedente. □

4.4 Indipendenza dell'ipotesi del continuo

In questo paragrafo mostreremo che l'ipotesi del continuo (e quindi l'ipotesi del continuo generalizzata) non può essere provata in ZF con l'assioma di scelta, costruendo un opportuno S4-modello in cui la dimensione dell'insieme delle parti di ω, $\mathbb{P}(\omega)$, è almeno $\aleph_2$, dove per $\aleph_2$ intendiamo il secondo cardinale successivo ad $\aleph_0$ che è un altro modo di indicare ω come il più piccolo cardinale infinito.

Come nel paragrafo precedente, costruiremo un S4-modello su M che è ancora un universo di primo ordine ben fondato in cui assumeremo sia l'assioma di scelta che l'ipotesi del continuo. Per costruire un S4-modello in cui l'insieme $\mathbb{P}(\omega)$ ha una dimensione specifica, ci sono due modi di cui noi esporremo il secondo: il primo utilizza la nozione di cardinalità, il secondo quella di insieme delle parti.

4.4.1 Il modello

Per il resto del capitolo, quando useremo $\aleph_2$ come ordinale piuttosto che come cardinale, lo indicheremo con ω_2. Quindi ω_2 è un ordinale che, in M è il secondo cardinale maggiore di $\omega = \aleph_0$.

Le condizioni di forzatura che utilizzeremo sono diverse da quelle precedentemente utilizzate perché adesso abbiamo bisogno di condizioni che garantiscano che ω abbia esattamente ω_2 sottoinsiemi.

Definizione 4.24. Una *condizione di forzatura* è una funzione i con dominio ω_2 tale che:

1. Per ogni $a \in \omega_2$, $i(a) =< P_a, N_a >$ dove P_a e N_a sono insiemi finiti e disgiunti di interi;
2. $i(a) \neq< \emptyset, \emptyset >$ per al più un numero finito di $a \in \omega_2$.

W è l'insieme di tutte queste condizioni di forzatura e, per ogni $i, j \in W$, poniamo iRj se e solo se per ogni $a \in \omega_2$, se $i(a) =< P_a, N_a >$ e $j(a) =< P'_a, N'_a >$, $P_a \subseteq P'_a$ e $N_a \subseteq N'_a$. R è sicuramente riflessiva e transitiva. Definiamo D e V come nei paragrafi precedenti, ottenendo un modello $\mathcal{M} =< W, R, D, V >$.

Adesso, per ogni $a \in \omega_2$, porremo:

$$p_a = \{< i, \widehat{n} >| \ i \in W, \ i(a) =< P_a, N_a > \ \ e \ n \in P_a\}.$$

Noi daremo per scontato che per ogni $a \in \omega_2$, $p_a \in \omega$ (per la dimostrazione si veda [Smullyan-Fitting 1996]) ed enunceremo senza dimostrare la seguente

Proposizione 4.4.1. *([Smullyan-Fitting 1996, Capitolo 19, Proposition 4.1]) Se $a \neq b$, allora*

$$[\![\neg(p_a \approx p_b)]\!]$$

è valida in $\mathcal{M}$.

Adesso mostreremo un membro di D che agisce in $\mathcal{M}$ come una corrispondenza iniettiva tra ω_2 e un sottoinsieme di $\mathbb{P}(\omega)$.

Definiamo prima due applicazioni da D in se stesso:

1. $Up(x, y) = W \times \{x, y\}$;
2. $Op(x, h) = Up(Up(x, y), Up(x, y))$.

Si noti che, se $p, q \in R^W_a$, $Up(p, q) \in R^W_{a+1}$ e $Op(p, q) \in R^W_{a+2}$. Di conseguenza, per $a \in \omega_2$. $Up(\widehat{a}, p_a) \in R^W_{\omega_2+2}$ e quindi, se definiamo:

$$f = \{Op(\widehat{a}, p_a) \mid a \in \omega_2\}$$

$f \in R^W_{\omega_2+3}$.

Sia invece

$$s = W \times \{p_a \mid a \in \omega_2\}.$$

$s \in R^W_{\omega_2+2}$ e quindi $f, s \in D$.

Vale la seguente:

Proposizione 4.4.2. *([Smullyan-Fitting 1996, Capitolo 19, Proposition 4.3])*

$$[\![(f : \widehat{\omega_2} \xrightarrow[su]{1-1} s) \land (\forall x)(x \in s \to x \subseteq \widehat{\omega})]\!]$$

è valida in $\mathcal{M}$.

Dalla proposizione segue il

Corollario 4.4.3. *([Smullyan-Fitting 1996, Capitolo 19, Corollary 4.4])*
La seguente è valida in $\mathcal{M}$

$$\begin{aligned}[]
[\![(\exists a)(\exists b)(\exists c)(\exists s)(\exists f)\\
[a = \omega \land C(b) \land C(c) \land\\
a \in b \land b \in c \land (\forall x)(x \in s \to x \subseteq a)\\
\land(f : x \xrightarrow[su]{1-1} s)]]\!].
\end{aligned}$$

Il corollario afferma la validità di una fbf che asserisce che $Card(\mathbb{P}(\omega)) \geq \aleph_2$. Di conseguenza la traduzione della negazione dell'ipotesi del continuo è valida in un modello $\mathcal{M}$ in cui sono valide le traduzioni degli assiomi di ZF più l'assioma di scelta. Da ciò segue la sua indipendenza.

Bibliografia

[Mangione-Bozzi 1993] Corrado Mangione, Silvio Bozzi, *Storia della logica. Da Boole ai giorni nostri*, Garzanti Libri, Milano, 1993

[Geymonat 1973] Ludovico Geymonat, *Storia del pensiero filosofico e scientifico*, Vol. VII e VIII Il Novecento, Garzanti, Milano, 1973

[Lolli 1991] Gabriele Lolli, *Introduzione alla logica formale*, Il Mulino, Bologna, 1991

[Hughes-Cresswell 1973] G.E. Hughes, M.J. Cresswell, *Introduzione alla logica modale*, Il saggiatore, Milano, 1973

[Hughes-Cresswell 1990] G.E. Hughes, M.J. Cresswell, *Guida alla logica modale*, Clueb, Bologna, 1990

[Smullyan-Fitting 1996] Raymond M. Smullyan, Melvin Fitting, *Set Theory and the Continuum Probem*, Oxford University Press, Oxford, 1996