ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

Trasformazioni Naturali
E
Sottocategorie Riflessive

Tesi di Laurea in Matematica

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Francesca Cagliari

Presentata da:
Alessia Magnani

I Sessione
Anno Accademico 2012-2013

Dietro ogni astrazione si nasconde
l'intuizione di una Totalità
E. Severino

Introduzione

Le scienze hanno una naturale propensione verso la diversificazione e la specializzazione. In particolare, la matematica contemporanea consiste di molti diversi rami ed è intimamente connessa a vari altri campi. Ognuno di questi rami e campi è in rapida crescita e va esso stesso diversificandosi. Fortunatamente, tuttavia, vi è una notevole quantità di terreno comune, idee simili, concetti e costruzioni. Questi forniscono una base per una teoria generale di strutture.

Così alcuni concetti come quelli di categoria e di funtore, inizialmente usati solo come un linguaggio formale e logico e considerati solo come un insieme di simboli per tradurre e sintetizzare rapporti tra determinati enti, si sono poi mostrati pervasivi e dotati di una coerenza propria, diventando quindi una teoria, la teorie delle categorie.

In questa tesi si dà una trattazione generale dei concetti base della teoria delle categorie, presentando molti esempi al fine di mostrare quanto generale e diffuso siano l'utilizzo e l'utlità di questa teoria.

Ci si sofferma poi sullo studio delle trasformazioni naturali, per poter costuire la 2-categoria **Cat** e su un particolare tipo di sottocategorie, le sottocategorie riflessive, di cui si trovano esempi molto significativi in algebra e geometria.

Nel primo capitolo si danno le definizioni di base della teoria, come quella di funtore covariante e contravariante, si danno alcuni cenni sulla dualità, come la definizione di categoria opposta e la presentazione del principio di dualità e si dà una caratterizzazione di alcuni tipi particolari di morfismi, ovvero i morfismi semplificabili.

Nel secondo capitolo sulle trasformazioni naturali si mostrano le due possibili composizioni tra trasformazioni naturali, la composizione verticale e quella orizzontale e si costruisce la 2-categoria **Cat**, infine si presenta il Lemma di Yoneda e alcune conseguenze.
L'ultimo capitolo riguarda invece le sottocategorie con particolare riguardo alle sottocategorie piene e quindi alle sottocategorie riflessive.

Indice

Capitolo 1

Teoria delle categorie

Per prima cosa iniziamo con il dare le definizioni di base della teoria delle categorie, come la definizione di categoria e di funtore e ne forniremo poi alcuni esempi significativi.

1.1 Categorie

Definizione 1.1. Una *categoria* $\mathcal{C}$ consiste di:

1. Una classe $\mathrm{ob}(\mathcal{C})$ i cui elementi sono chiamati oggetti di $\mathcal{C}$.
2. Per ogni coppia di oggetti A, B un insieme indicato con $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ o con $\mathcal{C}(A, B)$ i cui elementi sono chiamati morfismi o frecce tra A e B.
3. Per ogni tripla di oggetti A, B, C una legge di composizione:

$$\mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \to \mathcal{C}(A, C)$$

4. Per ogni oggetto A un morfismo $1_A \in \mathcal{C}(A, A)$ chiamato identità.

in modo che valgano i seguenti assiomi:

a La composizione ove è possibile è associativa.

b L'identità agisce come elemento neutro per la composizione dove è definita.

Osservazione 1. Sia $\mathcal{C}$ una categoria, per ogni oggetto $A \in \mathcal{C}$ si ha che il morfismo identico $1_A \in \mathcal{C}(A, A)$ è unico. Infatti, se $i_A \in \mathcal{C}(A, A)$ è un altro morfismo identico di A, per le proprietà dei morfismi identici si ha:

$$i_A = i_A o 1_A = 1_A$$

ESEMPI:
Esempi classici di categorie sono:

- **Set**: la categoria avente come oggetti la classe di tutti gli insiemi e come morfismi le usuali applicazioni tra insiemi.

- **V($\mathbb{K}$)**: la categoria che ha per oggetti tutti gli spazi vettoriali di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$ e come morfismi le trasformazioni lineari tra essi.

- **Grp**: la categoria di tutti i gruppi avente come morfismi gli omomorfismi di gruppo.

- **Ab**: la categoria che ha come oggetti i gruppi abeliani e come morfismi gli omomorfismi tra essi. Vedremo che la categoria **Ab** è una sottocategoria di **Grp**.

- **Top**: la categoria di tutti gli spazi topologici e delle funzioni continue tra essi. In seguito per l'insieme delle funzioni continue da X a Y spazi topologici useremo anche la notazione $\mathfrak{C}(X, Y)$

- **CS**: la categoria che ha per classe degli oggetti tutti i complessi simpliciali e per morfismi le applicazioni simpliciali tra essi.

- **Rel**: la categoria i cui oggetti sono tutte le coppie (X, ρ) dove X è un insieme e ρ è una relazione binaria in X.
  I morfismi $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ sono le mappe che preservano le relazioni, ovvero le funzioni tra insiemi $f : X \to Y$ tali che se $x\rho x'$ allora $f(x)\sigma f(x')$.

Esempi più particolari sono invece:

- **HT** è la categoria che ha come oggetti gli spazi topologici e classi di omotopia di funzioni continue come morfismi. Si osserva che questo è un esempio di categoria in cui i morfismi non possono essere pensati come semplici funzioni.

- $\mathbf{Mat}_{\mathbb{K}}$: la categoria che ha come oggetti la classe dei numeri naturali e per ogni coppia di numeri naturali n, m l'insieme dei morfismi $\mathbf{Mat}_{\mathbb{K}}(n, m)$ è l'insieme di tutte le matrici A di dimensioni (m, n) con m righe ed n colonne in un fissato campo $\mathbb{K}$.
  L'identità $1_n : n \to n$ è la matrice identità (n, n) e la legge di composizione viene dal prodotto riga per colonna delle matrici, ovvero $A \circ B = A \cdot B$ dove $A \cdot B$ è l'usuale prodotto di matrici.

- Un *insieme parzialmente ordinato* $(X, \leq)$ può essere visto come una categoria che ha come oggetti gli elementi di X, e per ogni coppia di oggetti $x, y \in ob(X)$ l'insieme dei loro morfismi $X(x, y)$ è l'insieme con un solo elemento se $x \leq y$, ed è l'insieme vuoto altrimenti.
  La legge di composizione dei morfismi viene dalla transitività dell'ordine parziale.
  L'identità viene invece dall'assioma di riflessività.

- Un *monoide* $(M, \cdot, e)$, cioè un insieme dotato di un' operazione binaria associativa e di un elemento neutro, può essere visto come un categoria con un singolo elemento $*$ e l'insieme $M(*, *) = M$ visto come insieme di morfismi.
  La legge di composizione viene dall'associatività dell'operazione in M, mentre l'identità è l'elemento neutro di M.

Monoidi e insiemi parzialmente ordinati a volte nelle notazioni non si distinguono dalla categoria corrispondente, descritta nei due precedenti esempi.

Osservazione 2. Come si evince dall'ultimo esempio se $\mathcal{C}$ è una categoria, $\forall A \in ob(\mathcal{C})$, l'insieme di tutti i morfisrni da A in se stesso, $\mathcal{C}(A, A)$, con la legge di composizione $\circ$ è una struttura algebrica; precisamente $(\mathcal{C}(A, A), \circ)$ è un monoide.

1.2 Funtori covarianti e contravarianti

Definizione 1.2. Un *funtore* (*covariante*) $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ dalla categoria $\mathcal{A}$ alla categoria $\mathcal{B}$ consiste di:

1. Una mappa $\mathcal{F} : ob(\mathcal{A}) \to ob(\mathcal{B})$ tra le classi di oggetti di $\mathcal{A}$ e di $\mathcal{B}$, che associa ad un oggetto A di $\mathcal{A}$ l'oggetto $\mathcal{F}(A)$ di $\mathcal{B}$.

2. Per ogni coppia di oggetti $A, A' \in ob(\mathcal{A})$ una mappa

$$\mathcal{A}(A, A') \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(A'))$$

   che associa ad ogni morfismo $f : A \to A'$ in $\mathcal{A}$, un morfismo
   $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(A) \to \mathcal{F}(A')$ in $\mathcal{B}$.

in modo che valgano i seguenti assiomi:

a Per ogni coppia di morfismi $f \in \mathcal{A}(A, A'), g \in \mathcal{A}(A', A'')$ vale:

$$\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$$

b Per ogni oggetto $A \in \mathcal{A}$ vale $\mathcal{F}(1_A) = 1_{\mathcal{F}(A)}$

Dati due funtori $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}, \mathcal{G} : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ una composizione punto per punto produce immediatamente un nuovo funtore $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e questa legge di composizione risulta essere associativa.
Inoltre per ogni data categoria $\mathcal{A}$ esiste il funtore identità, cioè il futore $id_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ tale che $id_{\mathcal{A}}(A) = A$ per ogni oggetto di $\mathcal{A}$ e $id_{\mathcal{A}}(f) = f$ per ogni morfismo in $\mathcal{A}$.
Il funtore identità è chiaramente l'elemento neutro per la legge di composizione appena citata.

Per avere la categoria delle categorie a questo punto è necessario che la classe dei funtori tra due categorie sia solo un insieme; a questo proposito ci restringeremo ai funtori tra categorie piccole, ovvero le categorie descritte nella definizione seguente.

Definizione 1.3. Una categoria $\mathcal{C}$ si dice categoria *piccola* se la sua classe degli oggetti ob($\mathcal{C}$) é un insieme.

Si osserva che in una categoria piccola anche i morfismi formano un insieme.
Allora abbiamo:

Proposizione 1.2.1. *Categorie piccole e funtori tra esse costituiscono una categoria, che indicheremo con* ***Cat****.*

Il limite di questo approccio si trova nel fatto che insiemi, gruppi ecc. non sono categorie piccole; si può però facilmente sostituire tali categorie con categorie piccole che siano tuttavia altrettanto utilizzabili, ad esempio si può prendere invece della categoria di tutti gli insiemi solo i sottoinsiemi di un insieme di cardinalità sufficientemente elevata da permettere di svolgere all'interno di tale insieme di insiemi tutte le operazioni di cui si ha bisogno, lo stesso si può dire per i gruppi o gli spazi topologici, perchè anche le strutture algebriche o topologiche possibili su un insieme sono un insieme.

Definizione 1.4. Consideriamo il funtore $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e per ogni coppia di oggetti $A, A' \in ob(\mathcal{A})$ la mappa

$$\alpha_{A,A'} : \mathcal{A}(A, A') \to \mathcal{B}(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(A'))$$

$$f \to \mathcal{F}(f)$$

1. Il funtore $\mathcal{F}$ si dice *embedding* se è iniettivo sui morfismi.

2. Il funtore $\mathcal{F}$ è *fedele* se le mappe $\alpha_{A,A'}$ sono iniettive per ogni A, A'.

3. Il funtore $\mathcal{F}$ è *pieno* se le mappe $\alpha_{A,A'}$ sono suriettive per ogni A, A'.

4. Il funtore $\mathcal{F}$ è *isomorfismo tra categorie* se è pieno, fedele e induce una biezione $ob(\mathcal{A}) \to ob(\mathcal{B})$ sulle classi degli oggetti.

5. Le categorie $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono *isomorfe* se e solo se esiste un isomorfismo $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tra esse.

Osservazione 3. Se un funtore $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ è un embedding, ed è cioè iniettivo sui morfismi, è di conseguenza iniettivo anche sugli oggetti.
Questo deriva dal fatto che essendo iniettivo sui morfismi è in particolare iniettivo sui morfismi identici 1_A per ogni $\mathcal{A}$-oggetto A, che si possono in qualche modo identificare con gli oggetti A su cui sono definiti.

Osservazione 4. Chiaramente essere isomorfi è una relazione di equivalenza tra le categorie, e categorie isomorfe sono considerate essenzialmente la stessa, sono indistinguibili dal punto di vista categoriale e possono essere sostituite l'una con l'altra.
La condizione di isomorfismo di categorie è però molto restrittiva e di conseguenza è raramente soddisfatta.

Diamo ora un elenco di funtori spesso utilizzati.
ESEMPI:

1. Date due categorie $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ e B oggetto fissato di $\mathcal{B}$ si può definire il funtore *costante*:
$$\triangle_B : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$$
tale che:
   - $\triangle_B(A) = B$ per ogni $\mathcal{A}$-oggetto A.
   - $\triangle_B(f) = 1_B$ per ogni $\mathcal{A}$-morfismo f.

2. Il funtore *dimenticante* è un funtore che ha come dominio una qualsiasi categoria che abbia come oggetti insiemi strutturati e come morfismi funzioni che rispettano questa struttura, e ha come codominio la categoria degli insiemi **Set**. Il funtore dimenticante associa ad ogni insieme

strutturato l'insieme sottogiacente e ad ogni morfismo la funzione tra gli insiemi.
Per esempio esiste il funtore dimenticante $\mathcal{U} : \mathbf{Ab} \to \mathbf{Set}$ che associa ad ogni gruppo l'insieme dei suoi elementi e ad ogni omomorfismo la funzione sugli insiemi definita da tale morfismo; oppure il funtore dimenticante $\mathcal{U} : \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$, che associa ad ogni spazio topologico l'insieme sottogiacente e ad ogni funzione continua associa la corrisponde funzione tra insiemi.

3. Definiamo il funtore *potenza* $\mathcal{P} : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ che a ogni insieme A associa $\mathcal{P}(A)$ l'insieme potenza di A o insieme delle parti di A, e ad ogni morfismo $f : A \to B$ associa $\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$, che manda un sottoinsieme $U \in A$ in $f(U) \in B$.

4. La *realizzazione geometrica* é un funtore dalla categoria dei complessi simpliciali a quella degli spazi topologici, che associa ad ogni complesso simpliciale K il corpo o realizzazione geometrica di K, $|K|$, e manda ogni applicazione simpliciale nell'applicazione continua associata.

5. Dato un campo $\mathbb{K}$ ed un insieme A, sia $\mathbb{K}[A]$ lo spazio vettoriale costruito prendendo A come base.
   Si ottiene un funtore dalla categoria degli insiemi a quella degli spazi vettoriali, chiamato *funtore libero*, che associa quindi ad ogni insieme A lo spazio $\mathbb{K}[A]$, e ad ogni funzione tra insiemi l'applicazione lineare naturale estensione di tale funzione, che é unica poichè ho fissato il suo valore sugli elementi della base A.

6. Data una categoria $\mathcal{A}$ e un suo oggetto $A \in ob(\mathcal{A})$ definiamo il funtore

$$\mathcal{A}(A, -) : \mathcal{A} \to \mathbf{Set}$$

   che associa ad ogni $\mathcal{A}$-oggetto B l'insieme $\mathcal{A}(A, B)$ dei morfismi da A ad B.

Per ogni $\mathcal{A}$-morfismo $f : B \to C$ ho:

$$\mathcal{A}(A, -)(f) = \mathcal{A}(A, f) : \mathcal{A}(A, B) \to \mathcal{A}(A, C)$$

tale che $\mathcal{A}(A, f)(g) = f \circ g$ per ogni morfismo $g : A \to B$.
Questo funtore è detto funtore *rappresentato* dall'oggetto A di $\mathcal{A}$.
Molti funtori covarianti sono in qualche modo legati a questo funtore.
Ad esempio, se si prende $\mathcal{A} = \mathbf{Top}$, ed $A = I = [0, 1]$, $Hom_{\mathrm{Top}}(A, X) = \mathfrak{C}([0, 1]; X)$ é l'insieme dei cammini di X: il funtore associa ad ogni spazio X l'insieme $\mathfrak{C}([0, 1]; X)$ dei suoi cammini, e ogni funzione $f : X \to Y \in \mathfrak{C}(X, Y)$ trasforma il cammino di X $\alpha \in \mathfrak{C}([0, 1], X)$ nel cammino di Y $f \circ \alpha \in \mathfrak{C}([0, 1], Y)$.

Definizione 1.5. Un funtore *contravariante* $\mathcal{F}$ dalla categoria $\mathcal{A}$ alla categoria $\mathcal{B}$ consiste di:

1. Una mappa $\mathcal{F} : ob(\mathcal{A}) \to ob(\mathcal{B})$ tra le classi di oggetti di $\mathcal{A}$ e di $\mathcal{B}$, che associa ad un oggetto A di $\mathcal{A}$ l'oggetto $\mathcal{F}(A)$ di $\mathcal{B}$.

2. Per ogni coppia di oggetti $A, A' \in ob(\mathcal{A})$ una mappa

$$\mathcal{A}(A, A') \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{F}(A'), \mathcal{F}(A))$$

   che associa ad ogni morfismo $f : A \to A'$ in $\mathcal{A}$, un morfismo
   $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(A') \to \mathcal{F}(A)$ in $\mathcal{B}$.

Devono inoltre valere i seguenti assiomi:

a Per ogni coppia di morfismi $f \in \mathcal{A}(A, A'), g \in \mathcal{A}(A', A'')$ vale:

$$\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$$

b Per ogni oggetto $A \in \mathcal{A}$ vale $\mathcal{F}(1_A) = 1_{\mathcal{F}(A)}$

ESEMPI:

- Il funtore $\mathcal{P}^* : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ è un funtore contravariante tal che $\mathcal{P}^*(X) = X$ per ogni insieme X, e per ogni applicazione di insiemi $f : X \to Y$,

$$\mathcal{P}^*(f) : \mathcal{P}^*(Y) \to \mathcal{P}^*(X)$$

  è definita da $\mathcal{P}^*(f)(U) = f^{-1}(U)$.

- Allo stesso modo in cui abbiamo definito il funtore rappresentato dall'oggetto A di una categoria $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}(A, -)$, possiamo definire il funtore

$$\mathcal{A}(-, A) : \mathcal{A} \to \mathbf{Set}$$

  tale che ad ogni oggetto $B \in \mathcal{A}$ associa l'insieme $\mathcal{A}(B, A)$ e ad ogni $\mathcal{A}$-morfimo $f : B \to C$ associa il morfismo

$$\mathcal{A}(-, A)(f) = \mathcal{A}(f, A) : \mathcal{A}(C, A) \to \mathcal{A}(B, A)$$

  che ad ogni freccia $g : C \to A$ associa $\mathcal{A}(f, A)(g) = g \circ f$.
  Quello appena definito è un altro esempio di funtore contravariante, chiamato funtore *corappresentato* da A.

1.3 Cenni sulla dualità

Definizione 1.6. Data una categoria $\mathcal{A}$, la *categoria duale* o *categoria opposta* $\mathcal{A}^*$ o $\mathcal{A}^{\text{op}}$ è definita da:

1. Gli oggetti sono gli stessi di $\mathcal{A}$: $ob(\mathcal{A}^*) = ob(\mathcal{A})$

2. Per ogni coppia di oggetti A, B di $\mathcal{A}^*$ si ha : $\mathcal{A}^*(A, B) = \mathcal{A}(B, A)$ e scriveremo $f^* : A \to B$ per indicare il morfismo in $\mathcal{A}^*$ corrispondente al morfismo $f : A \to B$ in $\mathcal{A}$.

3. La legge di composizione in $\mathcal{A}^*$ deriva da quella in $\mathcal{A}$: $f^* \circ g^* = (g \circ f)^*$.

ESEMPI:

1. Se $\mathcal{A} = (X, \leq)$ è un insieme parzialmente ordinato visto come categoria, allora la categoria duale è $\mathcal{A}^* = (X, \geq)$.

2. Se $\mathcal{A} = (M, \cdot, e)$ è un monoide considerato come categoria, allora la categoria duale è $\mathcal{A}^* = (M, \hat{\cdot}, e)$ con $a \hat{\cdot} b = b \cdot a$, con $a, b \in M$.

3. Data una categoria $\mathcal{A}$ e un suo oggetto A, il duale del funtore $\mathcal{A}(A, -)$ rappresentato da A è il funtore corappresentato da A, $\mathcal{A}(-, A)$.

Data questa definizione introduciamo un importante teorema della teoria delle categorie che permette di dimostrare facilmente proposizioni in una categoria a partire da risultati già ottenuti nella sua categoria duale.

Teorema 1.3.1 (Principio di dualità). *Supponiamo che in ogni categoria valga una affermazione che esprime l'esistenza di qualche oggetto, morfismo o l'uguaglianza di qualche composizione; allora l'**affermazione duale** è valida in ogni categoria. L'affermazione duale è ottenuta dall'affermazione data invertendo la direzione di ogni morfismo e sostituendo ad ogni composizione $f \circ g$ la composizione $g \circ f$.*

Dimostrazione. Sia S l'affermazione data e S^* l'affermazione duale.
Provare S^* in una categoria $\mathcal{A}$ è equivalente a provare S nella categoria $\mathcal{A}^*$, ma per ipotesi S vale in ogni categoria, quindi ho provato il principio. □

ESEMPI:

- Un funtore contravariante da $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ non è altro che un funtore covariante da $\mathcal{A}^*$ a $\mathcal{B}$ o un funtore covariante da $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}^*$.

- Un fatto interessante in teoria della categorie è che ci sono nozioni che sono duali di loro stesse, per esempio:
  $f : A \to B$ è *isomorfismo* se esiste $g : B \to A$ tale che $g \circ f = 1_A$ e $f \circ g = 1_B$.

La nozione duale è un morfismo $f : B \to A$ tale che esiste un morfismo $g : A \to B$ per cui $f \circ g = 1_A$ e $g \circ f = 1_B$, e questa è ancora la definizione di f come isomorfismo.

1.4 Monomorfismi, epimorfismi e isomorfismi

Nella teoria degli insiemi le nozioni di semplificabilità a sinistra, invertibilità a sinistra e di iniettività coincidono, e la stessa cosa vale per semplificabilità a destra, invertibilità a destra e suriettività.
Nella teoria delle categorie non è possibile estendere la nozione di iniettività (o di suriettività) ma è possibile estendere la più debole delle nozioni date, ovvero la semplificabilità.
Diamo quindi la definizione di semplificabilità a destra e a sinistra e forniamo esempi di categorie diverse da **Set** in cui le tre nozioni non sono equivalenti.

Definizione 1.7. Sia $\mathcal{C}$ una categoria. Un morfismo $f : A \to B$ si dice *monomorfismo* o *semplificabile a sinistra* se, data una coppia di morfismi $g, h : C \to A$, $f \circ g = f \circ h$ implica che $g = h$.
Dualmente un morfismo $f : A \to B$ si dice *epimorfismo* o *semplificabile a destra* se, data una coppia di frecce $i, j : B \to D$, $i \circ f = j \circ f$ implica che $i = j$.

ESEMPI:

1. Come accade in **Set**, anche in **Grp**, **Ab**, e **Top** vale che i monomorfismi sono tutte e sole le iniezioni, gli epimorfismi sono tutte e solo le suriezioni e gli isomorfismi coincidono con le biezioni.

2. Non tutti i monomorfismi in categorie concrete sono iniettivi: prendiamo ad esempio la categoria dei gruppi divisibili **Div**, ovvero la categoria dei gruppi G tali che $\forall x \in G, \forall n \in \mathbb{N}, \exists y \in G$ tale che $x = n \cdot y$ e dei morfismo di gruppo tra di essi.
   Il morfismo quoziente $q : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ è epimorfismo ma non è iniettivo, infatti sia G gruppo divisibile e $f, g : G \rightrightarrows \mathbb{Q}$ due omomorfismi

di gruppo tali che $q \circ f = q \circ g$. Ponendo $h = f - g$ abbiamo che $q \circ h = 0$ e quindi $h = 0$ e $f = g$. Infatti se esistesse un $x \in G$ tale che $h(x) \neq 0$ si avrebbe che $h\left(\frac{x}{2h(x)}\right) = \frac{1}{2}$ e quindi $q \circ h\left(\frac{x}{2h(x)}\right) \neq 0$, che è in contraddizione con l'ipotesi che $q \circ h = 0$.

3. Non tutti gli epimorfismi in categorie concrete sono suriettivi: prendiamo ad esempio la categoria **Rng** degli anelli e degli omomorfismi di anelli e l' inclusione $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, che si dimostra essere epimorfismo nonostante non sia suriettiva.

   Considero un anello A e due omomorfismi di anelli $f, g : \mathbb{Q} \rightrightarrows A$ che coincidono sugli interi, cioè $f \circ i = g \circ i$ e prendo un intero $z \in \mathbb{Z}, z \neq 0$. Allora z è invertibile in $\mathbb{Q}$ e perciò $f(z)$ e $g(z)$ sono invertibili in A con $\frac{1}{f(z))} = f\left(\frac{1}{z}\right)$ e $\frac{1}{g(z))} = g\left(\frac{1}{z}\right)$. Poichè $f(z) = g(z)$ se z è intero allora $f\left(\frac{1}{z}\right) = g\left(\frac{1}{z}\right)$ e preso un qualunque $\frac{z'}{z} \in \mathbb{Q}$ ho:

$$f\left(\frac{z'}{z}\right) = f\left(z' \cdot \frac{1}{z}\right) = f(z') \cdot f\left(\frac{1}{z}\right) = g(z') \cdot g\left(\frac{1}{z}\right) = g\left(\frac{z'}{z}\right)$$

   e quindi $f = g$.

4. Un altro esempio interessante è costituito dalla categoria degli spazi di Hausdorff e delle funzioni continue tra essi. In questo caso gli epimorfismi sono le funzioni con immagine densa.

   Infatti è ben noto che due funzioni continue tra spazi di Hausdorff che coincidono su un sottoinsieme denso del dominio sono uguali.

Capitolo 2

Trasformazioni naturali

Vogliamo ora considerare i funtori come oggetti di una nuova categoria, e per far questo dobbiamo definire i morfismi tra di essi, ovvero le trasformazione naturali.

2.1 Trasformazioni naturali

Definizione 2.1. Considero due funtori $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ dalla categoria $\mathcal{A}$ alla categoria $\mathcal{B}$. Una *trasformazione naturale* α tra $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ è data da una classe di morfismi $\alpha_A : \mathcal{F}(A) \to \mathcal{G}(A)$, dove A è un oggetto di $\mathcal{A}$, tali che per ogni A, A' oggetti di $\mathcal{A}$ e per ogni $\mathcal{A}$-morfismo $f : A \to A'$ il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"] & & \mathcal{F}(A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"'] & \mathcal{G}(A) \arrow[d, "\mathcal{G}(f)"] \\
A' & & \mathcal{F}(A') \arrow[r, "\alpha_{A'}"'] & \mathcal{G}(A')
\end{tikzcd}$$

sia commutativo.
Se α è una trasformazione naturale tra il funtore $\mathcal{F}$ e il funtore $\mathcal{G}$ scriveremo $\alpha : \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$.

ESEMPI:

1. Sia **Set** la categoria degli insiemi, sia $id_{\mathbf{Set}}$ il funtore identico e $\mathcal{P}$ il funtore potenza $\mathcal{P} : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ definito nel capitolo precedente.
   Una trasformazione naturale tra $id_{\mathbf{Set}}$ e $\mathcal{P}$ è σ, la cui componente σ_A sull'insieme A manda un suo elemento x nel singoletto $\{x\}$, in modo che si abbia il diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\sigma_A"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{P}(A) \arrow[d, "\mathcal{P}(f)"] \\ B \arrow[r, "\sigma_B"'] & \mathcal{P}(B) \end{tikzcd}$$

   dove vale:

$$f(\{a\}) = \mathcal{P}(f) \circ \sigma_A(a) = \sigma_B \circ f(a) = \{f(a)\}$$

2. Considero la categoria degli spazi vettoriali di dimensione finita $\mathbf{V}(\mathbb{K})$, e sia

$$()^{**} : \mathbf{V}(\mathbb{K}) \to \mathbf{V}(\mathbb{K})$$

   il funtore biduale.
   Chiamiamo $\sigma_V : V \to V^{**}$ l'isomorfismo canonico tra uno spazio vettoriale V e il suo biduale.
   Allora è definita una trasformazione naturale $\sigma : id_{\mathbf{V}(\mathbb{K})} \to ()^{**}$ tra il funtore identico della categoria degli spazi vettoriali e il funtore biduale, tale che, per ogni $f : V \to W$ applicazione lineare tra gli spazi

vettoriali V e W, il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\sigma_V"] \arrow[d, "f"'] & V^{**} \arrow[d, "f^{**}"] \\
W \arrow[r, "\sigma_W"] & W^{**}
\end{tikzcd}$$

commuta.

Tornando alle nostre intenzioni originarie, per poter avere la categoria dei funtori bisogna definire la composizione tra trasformazioni naturali.
Il modo usuale di fare tale composizione è quella conosciuta come *composizione verticale.*
Date due categorie $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ e $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ funtori da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ e le trasformazioni naturali $\alpha : \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$ e $\beta : \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{H}$, abbiamo una trasformazione naturale $\beta \circ \alpha : \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{H}$ data da

$$(\beta \circ \alpha)_A := \beta_A \circ \alpha_A$$

per ogni oggetto A di $\mathcal{C}$. La definizione appena data richiede una breve dimostrazione, che è banale: si tratta di dimostrare per ogni $\mathcal{C}$-morfismo $f : A \to B$, con $A, B \in ob(\mathcal{C})$, la commutatività del rettangolo esterno di questo diagramma:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "\mathcal{F}(f)"'] & \mathcal{G}(A) \arrow[r, "\beta_A"] \arrow[d, "\mathcal{G}(f)"] & \mathcal{H}(A) \arrow[d, "\mathcal{H}(f)"] \\
\mathcal{F}(B) \arrow[r, "\alpha_B"'] & \mathcal{G}(B) \arrow[r, "\beta_B"'] & \mathcal{H}(B)
\end{tikzcd}$$

che è ovvia dalla commutatività dei due quadrati.
Il motivo per cui la composizione $\circ$ è chiamata composizione verticale è illustrata nel diagramma seguente:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "H"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta\circ\alpha"] & \mathcal{D}
\end{tikzcd}
\quad := \quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, "G" description] \arrow[r, bend right=50, "H"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\beta"] & \mathcal{D}
\end{tikzcd}
$$

Con questa composizione e l'accortezza di prendere un categoria piccola possiamo avere la categoria dei funtori come asserito dalla seguente proposizione:

Proposizione 2.1.1. *Siano $\mathcal{A}$ un categoria piccola e $\mathcal{B}$ una qualsiasi categoria. I funtori tra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ e le loro trasformazioni naturali costituiscono oggetti e morfismi di una nuova categoria.*
Questa categoria è piccola se e solo se lo è $\mathcal{B}$.

2.2 Isomorfismo e equivalenza di categorie

Definizione 2.2. Siano $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ due categorie.

1. Due funtori $\mathcal{H}, \mathcal{K} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ si dicono *naturalmente isomorfi* se esiste una trasformazione naturale $\eta : \mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{K}$ tale che η_A sia un isomorfismo per ogni oggetto A in $\mathcal{A}$.

2. Una *equivalenza* fra le categorie $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ si può definire come una coppia di funtori $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $\mathcal{G} : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ tali che $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ sia naturalmente isomorfo all' identità di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ sia naturalmente isomorfo all' identità di $\mathcal{B}$.

3. Due categorie $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sono dette *equivalenti* se esiste un' equivalenza da $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$.

Osservazione 5. Si verifica facilmente che un funtore $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ è una equivalenza tra le due categorie se è pieno, fedele e denso per isomorfismo, nel senso che per ogni oggetto B in $\mathcal{B}$ esiste un oggetto A in $\mathcal{A}$ tale che $\mathcal{F}(A)$ è isomorfo a B.

A differenza della condizione di isomorfismo di categorie, la condizione di equivalenza appena data, è piu debole ma anche più flessiblie e più frequentemente soddisfatta. Inoltre si vede che categorie equivalenti hanno lo stesso comportamento rispetto a tutte le interessanti proprietà categoriali, e la nozione di equivalenza risulta più consona alla teoria delle categorie in cui il concetto principale non è l'uguaglianza ma l'isomorfismo.
Se due categorie $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ sono isomorfe, ovvero se esistono due funtori $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $\mathcal{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tali che $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} = id_{\mathcal{D}}$ e $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} = id_{\mathcal{C}}$, questo implica che sia gli oggetti che i morfismi in $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ sono in corrispondenza biunivoca tra loro.
Nella equivalenza tra categorie questa condizione viene indebolita: non si richiede che $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ sia uguale all'identità sugli oggetti e sui morfismi ma si chiede che sia isomorfa all'identità, e la stessa cosa per $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$. In questo caso non si ha più una corrispondenza biunivoca tra gli oggetti e i morfismi di $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, ma posso non ritrovare in $\mathcal{D}$ tutti gli oggetti isomorfi che avevo $\mathcal{C}$ e viceversa.
ESEMPIO:
La categoria V($\mathbb{K}$) è equivalente alla categoria $\mathbf{Mat}_{\mathbb{K}}$, ma non sono isomorfe tra loro.
Per verificare questa asserzione definiamo due funtori $\mathcal{F}$:$\mathbf{Mat}_{\mathbb{K}} \to$ V($\mathbb{K}$) e $\mathcal{G}$:V($\mathbb{K}$) $\to \mathbf{Mat}_{\mathbb{K}}$ e dimostriamo che esistono due isomorfismi naturali $\eta : 1_{\mathrm{V}(\mathbb{K})} \Rightarrow \mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ e $\xi : 1_{\mathbf{Mat}_{\mathbb{K}}} \Rightarrow \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$.
Prendiamo come $\mathcal{F}$ il funtore che sugli oggetti associa ad ogni numero naturale n lo spazio vettoriale $\mathbb{K}^n$ con la base canonica, mentre sui morfismi manda una matrice A in $\mathbf{Mat}_{\mathbb{K}}(m, n)$ nel morfismo $\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ tale che $\phi(v) = Av$, cioè A è la matrice che rappresenta il morfismo nelle basi standard.
Dopo aver fissato in ogni spazio vettoriale V una base $\mathfrak{B}_V$ che per $\mathbb{K}^n$ sia quella naturale, si può definire il funtore $\mathcal{G}$ come segue: sugli oggetti associa a uno spazio vettoriale V^n il numero naturale n tale che $n = dim(V^n)$, mentre sui morfismi manda $\phi : V^n \to W^m$ nella matrice A_ϕ che rappresenta ϕ nelle basi fissate negli spazi V e W, cioè $A_\phi = M_{\mathfrak{B}_V, \mathfrak{B}_W}(\phi)$.

Si vede che le due categorie date non sono isomorfe tra loro perchè ad ogni numero naturale n in $\mathbf{Mat}_{\mathbb{K}}$ corrispondono tutti gli spazi vettoriali di dimensione n in $\mathbf{V}(\mathbb{K})$ e non ho quindi una corrispondenza biunivoca tra gli oggetti delle due categorie.
Vogliamo invece dimostrare che sono equivalenti e per farlo facciamo vedere che esistono i due isomorfismi naturali:

- Consideriamo prima $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$:V($\mathbb{K}$)$\to$V($\mathbb{K}$):
  sugli oggetti si ha che uno spazio V^n va con $\mathcal{G}$ nel numero naturale $\mathcal{G}(V^n) = n = dim(V^n)$ e con $\mathcal{F}$ va poi nello spazio vettoriale $\mathbb{K}^n = \mathcal{F}(\mathcal{G}(V^n))$. Quindi per ogni spazio vettoriale V^n di dimensione n, definisco la componente dell' isomorfismo naturale η sull'oggetto V^n

  $$\eta_V : V^n \to \mathbb{K}^n$$

  come l'isomorfismo tra V^n e $\mathbb{K}^n$ associato alla base $\mathfrak{B}_V$.
  Sui morfismi invece si ha che un morfismo di V($\mathbb{K}$) $\phi : V^n \to W^m$ va tramite $\mathcal{G}$ nella matrice A_ϕ definita sopra e tramite $\mathcal{F}$ va poi in $\tilde{\phi} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, tale che $\tilde{\phi}(v) = A_\phi v$, quindi $\mathcal{F}(\mathcal{G}(\phi)) = \tilde{\phi}$

  $$\begin{tikzcd} & A_\phi \arrow[dr] & \\ \phi \arrow[ur] \arrow[rr] & & \tilde{\phi} \end{tikzcd}$$

  Allora per come abbiamo definito η otteniamo il seguente diagramma commutativo:

  $$\begin{tikzcd} V^n \arrow[d, "\phi"] \\ W^m \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V^n \arrow[r, "\eta_V"] \arrow[d, "\phi"'] & \mathbb{K}^n \arrow[d, "\tilde{\phi}"] \\ W^m \arrow[r, "\eta_W"'] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

- Adesso analizziamo $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$:$\mathbf{Mat}_{\mathbb{K}}$$\to$$\mathbf{Mat}_{\mathbb{K}}$:

sugli oggetti manda un numero naturale n nello spazio vettoriale n-dimensionale $\mathbb{K}^n$ tramite $\mathcal{F}$ e poi ritorna nello stesso numero naturale con $\mathcal{G}$, in modo tale che $\mathcal{G}(\mathcal{F}(n)) = n$ sia questa volta l'identità sugli oggetti, e cioè

$$\xi_n : n \to n$$

è proprio l'identità.
Sui morfismi una matrice A in $\mathbf{Mat}_{\mathbb{K}}(m, n)$ viene mandata con $\mathcal{F}$ in un morfismo di V($\mathbb{K}$) $\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ tale che $\phi(v) = Av$, dove A rappresenta il morfismo nelle basi canoniche, ma allora con $\mathcal{G}$ il morfismo ϕ ritorna nella matrice A di partenza, quindi poichè la base scelta per $\mathbb{K}^n$ è quella naturale ho il diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} n \arrow[d, "A"] \\ m \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} n \arrow[r, "\xi_n"] \arrow[d, "A"'] & n \arrow[d, "A"] \\ m \arrow[r, "\xi_m"'] & m \end{tikzcd}$$

perchè in questo caso $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ non è solo naturalmente isomorfo all'identità $id_{\mathbf{Mat}_{\mathbb{K}}}$, ma è proprio uguale all'identità.

2.3 2-categorie

Oltre alla composizione verticale esiste un altro modo di comporre le trasformazioni naturali: quella che si chiama *composizione orizzontale*.
Date tre categorie $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, i funtori $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $\mathcal{H}, \mathcal{K} : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, e le trasformazioni naturali $\alpha : \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$ and $\beta : \mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{K}$ come nel seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha"] & \mathcal{B} \arrow[r, bend left, "H"] \arrow[r, bend right, "K"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \beta"] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

definiamo la *composizione orizzontale*, o *Godement product*, di α e β scritto $\beta * \alpha : \mathcal{H} \circ \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{K} \circ \mathcal{G}$ come segue: per prima cosa prendiamo un oggetto $A \in ob(\mathcal{A})$, e poichè β è una trasformazione naturale abbiamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}(\mathcal{F}(A)) \arrow[r, "\beta_{\mathcal{F}(A)}"] \arrow[d, "\mathcal{H}(\alpha_A)"'] \arrow[dr, dashed, "(\beta*\alpha)_A"] & \mathcal{K}(\mathcal{F}(A)) \arrow[d, "\mathcal{K}(\alpha_A)"] \\
\mathcal{H}(\mathcal{G}(A)) \arrow[r, "\beta_{\mathcal{G}(A)}"'] & \mathcal{K}(\mathcal{G}(A))
\end{tikzcd}$$

Da questo diagramma vediamo che $\beta * \alpha$ deve essere il morfismo in diagonale (freccia tratteggiata) da $\mathcal{H}(\mathcal{F}(A)$ a $\mathcal{K}(\mathcal{G}(A)$ definito da:

$$(\beta * \alpha)_A = \beta_{\mathcal{G}(A)} \circ \mathcal{H}(\alpha_A) = \mathcal{K}(\alpha_A) \circ \beta_{\mathcal{F}(A)}$$

La composizione $*$ appena definita ha le seguenti proprietà:

1. $\beta * \alpha$ è una trasformazione naturale.

2. $*$ è associativa.

3. $\beta * 1_{\mathcal{F}} = \beta$, e $1_{\mathcal{H}} * \alpha = \alpha$, dove β and α sono le trasformazioni naturali descritte nel primo diagramma, e $1_{\mathcal{F}}$ è la trasformazione naturale identità sul funtore $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $1_{\mathcal{H}}$ è la trasformazione naturale identità sul funtore $\mathcal{H} : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$

4. Le due composizioni $\circ$ e $*$ soddisfano la *legge di interscambio*.

   Infatti se abbiamo la seguente situazione:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left=40, "F"{name=F}] \arrow[r, "H"{name=H, description}] \arrow[r, bend right=40, "L"'{name=L}] & B \arrow[r, bend left=40, "G"{name=G}] \arrow[r, "K"{name=K, description}] \arrow[r, bend right=40, "M"'{name=M}] & C
\arrow[from=F, to=H, Rightarrow, "\alpha"]
\arrow[from=H, to=L, Rightarrow, "\gamma"]
\arrow[from=G, to=K, Rightarrow, "\beta"]
\arrow[from=K, to=M, Rightarrow, "\delta"]
\end{tikzcd}$$

allora vale:

$$(\delta * \gamma) \circ (\beta * \alpha) = (\delta \circ \beta) * (\gamma \circ \alpha)$$

Definizione 2.3. Una *2-categoria* $\mathcal{C}$ consiste di:

1. Una classe di 0-celle o oggetti.

2. Per ogni coppia di oggetti A, B, una categoria $\mathcal{C}$(A,B). Gli oggetti $f, g : A \to B$ appartenenti alla categoria $\mathcal{C}$(A,B) sono detti 1-celle e i morfismi tra essi $\alpha : f \Rightarrow g$ sono dette 2-celle. La loro legge di composizione è detta composizione verticale e indicata con $\circ$, è associativa e ha come elemento neutro id_A.

3. Dati 3 oggetti A, B, C è dato un funtore

$$* : \mathcal{C}(B, C) \times \mathcal{C}(A, B) \to \mathcal{C}(A, C)$$

   detto composizione orizzontale, che è associativa e ammette come elemento neutro la 2-cella identità di id_A.

4. Inoltre $\circ$ e $*$ soddisfano la legge di interscambio.

Allora si può vedere la categoria **Cat** come una 2-categoria in cui le 0-celle sono le categorie piccole, le 1-celle sono i funtori tra esse, le 2-celle sono le trasformaioni naturali tra i funtori e la composizione vericale e la composizione orizzontale sono quelle descritte inizialmente.

2.4 Lemma di Yoneda

Definizione 2.4. Un funtore covariante $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to$ **Set** da una categoria $\mathcal{C}$ alla categoria degli insiemi si dice *rappresentabile* se esiste un oggetto $A \in ob(\mathcal{C})$ ed un isomorfismo naturale da $\mathcal{F}$ al funtore $\mathcal{C}(A, -) = Hom_{\mathcal{C}}(A, -)$ (rappresentato da A). Si dice allora che A rappresenta $\mathcal{F}$.

Sia $\mathcal{A}$ una categoria piccola, possiamo considerare **Fun**($\mathcal{A}$,**Set**) la categoria dei funtori da $\mathcal{A}$ alla categoria degli insiemi e delle trasformazioni naturali tra essi.
Definiamo

$$Y^* : \mathcal{A} \to \mathbf{Fun}(\mathcal{A}, \mathbf{Set})$$

tale che $Y^*(A) = \mathcal{A}(A, -)$ e per ogni $\mathcal{A}$-morfismo $f : A \to A'$ si ha $Y^*(f) = \mathcal{A}(f, -)$ con A, A' oggetti di $\mathcal{A}$.
Dati due morfismi $f : A \to B$ e $g : B \to C$ in $\mathcal{A}$ otteniamo $Y^*(g \circ f) = Y^*(f) \circ Y^*(g)$ come si vede dalla definizione di $\mathcal{A}(f, -)$.
Y^* è un funtore contravariante chiamato *immersione di Yoneda*

Possiamo dualizzare l' immersione di Yoneda, passando da funtore contravariante a funtore covariante: sia **Fun***($\mathcal{A}$,**Set**) la categoria dei funtori contravarianti da una categoria piccola $\mathcal{A}$ a **Set**. Definiamo il funtore covariante $Y_* : \mathcal{A} \to$**Fun***($\mathcal{A}$,**Set**) tale che $Y_*(A) = \mathcal{A}(-, A)$ e $Y_*(f) = \mathcal{A}(-, f)$.

Proposizione 2.4.1 (**Lemma di Yoneda**). *Considero un funtore $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to$ **Set** con $\mathcal{A}$ categoria arbitraria, un oggetto $A \in ob(\mathcal{A})$ e il funtore rappresentato da A $Hom_{\mathcal{A}}(A, -)$ o $\mathcal{A}(A, -) : \mathcal{A} \to$ **Set**.*
Allora c'è una corrispondenza biunivoca

$$\theta_{\mathcal{F},\mathcal{A}} : Nat(\mathcal{A}(A, -), \mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{F}(A)$$

In particolare $Nat(\mathcal{A}(A, -), \mathcal{F})$ è un insieme.

Dimostrazione. Prendiamo una trasformazione naturale $\alpha : \mathcal{A}(A, -) \Rightarrow \mathcal{F}$ allora definiamo $\theta_{\mathcal{F},\mathcal{A}}(\alpha) = \alpha_A(1_A)$ con $\alpha_A : \mathcal{A}(A, A) \to \mathcal{F}(A)$.
Viceversa dato un elemento $a \in \mathcal{F}(A)$ gli associamo per ogni $B \in ob(\mathcal{A})$ una mappa $\tau(a)_B(f) = \mathcal{F}(f)(a)$. Viene definita una trasformazione naturale $\tau(a) : \mathcal{A}(A, -) \Rightarrow \mathcal{F}$: all'oggetto B in $\mathcal{A}$ associa il morfismo $\mathcal{A}(A, B) \to \mathcal{F}(B)$ così definito: preso $f : A \to B$ $\mathcal{A}$-morfismo allora $\tau(a)_B(f) = \mathcal{F}(f)(a)$.
Per ogni morfismo $g : B \to C$ in $\mathcal{A}$ vale la relazione

$$\mathcal{F}(g) \circ \tau(a)_B = \tau(a)_C \circ \mathcal{A}(A, g)$$

perchè ho il diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(A,B) \arrow[r, "\tau(a)_B"] \arrow[d, "\mathcal{A}(A,g)"'] & \mathcal{F}(B) \arrow[d, "\mathcal{F}(g)"] \\
\mathcal{A}(A,C) \arrow[r, "\tau(a)_C"'] & \mathcal{F}(C)
\end{tikzcd}$$

Dimostriamo ora che $\theta_{\mathcal{F},\mathcal{A}}$ e τ sono una l'applicazione inversa dell'altra, infatti si vede dalle definizioni e dal diagramma che:

- $\theta_{\mathcal{F},\mathcal{A}}(\tau(a)) = \tau(a)_A(1_A) = \mathcal{F}(1_A)(a) = 1_{\mathcal{F}(A)}(a) = a$
- $\tau(\theta_{\mathcal{F},\mathcal{A}}(\alpha))_B(f) = \tau(\alpha_A(1_A))_B(f) = \mathcal{F}(f)(\alpha_A(1_A)) = \alpha_B(\mathcal{A}(A,f)(1_A)) =$

  $= \alpha_B(f \circ 1_A) = \alpha_B(f)$

$\square$

L'identificazione che abbiamo dimostrato $Nat(\mathcal{A}(A,-),\mathcal{F}) = \mathcal{F}(A)$ ha una ulteriore interpretazione. Si può pensare che associare ad un oggetto $A \in ob(\mathcal{A})$ il funtore $\mathcal{A}(A,-)$ é di nuovo un funtore controvariante, dalla categoria $\mathcal{A}$ alla categoria **Fun**($\mathcal{A}$,**Set**) dei funtori dalla categoria data a quella degli insiemi.
Si può anche provare che la categoria $\mathcal{A}$ é equivalente alla sottocategoria piena di **Fun**($\mathcal{A}$,**Set**) formata dai funtori rappresentabili.
Una delle applicazioni del lemma di Yoneda é il seguente. Spesso per costruire un oggetto A in una categoria $\mathcal{A}$ si segue la strategia: si costruisce un funtore $\mathcal{F}$ a valori nella categoria degli insiemi e si prova che é rappresentabile. L'oggetto A deve essere un oggetto che rappresenta $\mathcal{F}$. L'unicità di A a meno di unico isomorfismo segue dal:

Corollario 2.4.1. *Se A e B sono due oggetti della categoria $\mathcal{A}$ che rappresentano lo stesso funtore $\mathcal{F}$ dal lemma di Yoneda abbiamo un isomorfi-*

smo naturale tra $\mathcal{A}(A,-)$ e $\mathcal{A}(B,-)$ che quindi proviene da un ben definito isomorfismo tra A e B.

Proposizione 2.4.2. *L'immersione di Yoneda contravariante descritto Y^* : $\mathcal{A} \rightarrow$**Fun($\mathcal{A}$,Set)** è un funtore pieno e fedele.*

Dimostrazione. Dobbiamo provare che per ogni coppia di oggetti $A, B \in ob(\mathcal{A})$ le mappe

$$\mathcal{A}(A,B) \rightarrow \mathcal{B}(Y^*(B), Y^*(A)) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(B,-), \mathcal{A}(A,-))$$

$$f \rightarrow Y^*(f) = \mathcal{A}(f,-)$$

sono iniettive e suriettive.
Ma $\mathcal{B}(\mathcal{A}(B,-), \mathcal{A}(A,-)) = Nat(\mathcal{A}(B,-), \mathcal{A}(A,-))$.
Quindi questo è un caso particolare del lemma di Yoneda prendendo come funtore $\mathcal{F} = \mathcal{A}(A,-)$ e come oggetto B, e si ottiene così che le mappe sono isomorfismi, cioè sono iniettive e suriettive come si voleva dimostrare. □

Dualmente si può dimostrare il caso del funtore covariante di Yoneda.

Capitolo 3

Sottocategorie riflessive

In questo capitolo tratteremo le sottocategorie con particolare riguardo per le sottocategorie piene e quindi per le sottocategorie riflessive.

3.1 Sottocategorie

Definizione 3.1. Una *sottocategoria* $\mathcal{A}$ della categoria $\mathcal{B}$ consiste di:

1. Una sottoclasse $ob(\mathcal{A}) \subseteq ob(\mathcal{B})$ della classe di oggetti di $\mathcal{B}$.

2. Per ogni coppia di oggetti $A, A' \in ob(\mathcal{A})$ un sottoinsieme $Hom_{\mathcal{A}}(A, A') \subseteq Hom_{\mathcal{B}}(A, A')$ tale che :

   a Se $f \in Hom_{\mathcal{A}}(A, A')$ e $g \in Hom_{\mathcal{A}}(A', A'')$ allora deve essere $g \circ f \in Hom_{\mathcal{A}}(A, A'')$.

   b Per ogni oggetto $A \in \mathcal{A}$ l'identità 1_A deve appartenere a $Hom_{\mathcal{A}}(A, A)$.

Inoltre la categoria $\mathcal{A}$ di dice *sottocategoria piena* di $\mathcal{B}$ se in aggiunta alle precedenti ipotesi si ha anche che per ogni coppia di oggetti A, A' di $\mathcal{A}$, $Hom_{\mathcal{A}}(A, A') = Hom_{\mathcal{B}}(A, A')$.

Osservazione 6. Notiamo che a causa della natura delle sottocategorie piene, una sottocategoria piena della categoria $\mathcal{B}$ può essere definita semplicemente specificando la classe dei suoi oggetti in $ob(\mathcal{B})$.

ESEMPI:
Forniamo ora alcuni esempi di sottocategorie e sottocategorie piene:

1. Per ogni categoria $\mathcal{B}$ la categoria vuota e la stessa categoria $\mathcal{B}$ sono sottocategorie di $\mathcal{B}$

2. Gli spazi topologici di Hausdorff $\mathbf{Top}_2$ sono una sottocategoria piena degli spazi topologici e delle applicazioni continue **Top**.

3. La categoria dei gruppi e degli omomorfismi di gruppo **Grp** è sottocategoria di **Mon**.
   Con **Mon** si intende la categoria dei monoidi e degli omomorfismi tra monoidi, cioè le applicazioni $f : M \to N$ tra $(M, *, 1_M)$ e $(N, \times, 1_N)$ monoidi, tali che $f(a * b) = f(a) \times f(b)$ per $a, b \in M$.

4. La categoria **Prost**, ovvero la categoria degli insiemi dotati di una relazione di preordine, cioè una relazione riflessiva e transitiva, è sottocategoria piena di **Rel** e la categoria **Pos** degli insiemi $(X, \leq)$ con $\leq$ relazione di ordine parziale, è sottocategoria piena di **Prost**.

5. Non é detto che una sottocategoria sia piena. Ad esempio **Set** come sottocategoria di **Rel** non è sottocategoria piena. Un'altra sottocategoria non piena è la sottocategoria di **Set** che ha come oggetti tutti gli insiemi e come morfismi le applicazioni iniettive (o suriettive).

Proposizione 3.1.1.

Un funtore $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ è un embedding (pieno) se e solo se esiste un sottocategoria (piena) $\mathcal{C}$ di $\mathcal{B}$ con il funtore inclusione $\mathcal{E} : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ e un isomorfismo $\mathcal{G} : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ con $\mathcal{F} = \mathcal{E} \circ \mathcal{G}$.

Dimostrazione. Una direzione è immediata e l'altra è una conseguenza del fatto che gli embedding (pieni) sono chiusi per la composizione. □

3.2 Riflessioni e sottocategorie riflessive

Ora premettiamo la definizione di riflessione per poi arrivare a definire le sottocategorie riflessive.

Definizione 3.2. Sia $\mathcal{A}$ una sottocategoria di $\mathcal{B}$ e sia B un oggetto di $\mathcal{B}$. Una $\mathcal{A}$-*riflessione* per B è un $\mathcal{B}$-morfismo $r : B \to A$ da B ad un $\mathcal{A}$-oggetto A con la seguente proprietà universale:
per ogni $\mathcal{B}$-morfismo $f : B \to A'$ con A' oggetto di $\mathcal{A}$ esiste un unico $\mathcal{A}$-morfismo $f' : A \to A'$ tale che il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dd, "f'"] \\ B \arrow[ur, "r"] \arrow[dr, "f"'] & \\ & A' \end{tikzcd}$$

sia commutativo.

Definizione 3.3. Sia $\mathcal{A}$ una sottocategoria di $\mathcal{B}$. $\mathcal{A}$ è chiamata *sottocategoria riflessiva* di $\mathcal{B}$ se ogni oggetto $B \in ob(\mathcal{B})$ ha una $\mathcal{A}$-riflessione.

ESEMPI:

1. Sia $\mathcal{A}$ = **Sym** la sottocategoria piena di $\mathcal{B}$ = **Rel** costituita dalle relazione simmetriche. Per ogni (X, ρ) oggetto di **Rel** definisco $r_X : (X, \rho) \to (X, \rho \cup \rho^{-1})$ come l'applicazione in **Rel** che sia l'identità sull'insieme X. Allora r_X è una $\mathcal{A}$-riflessione per (X, ρ).
   Prendiamo ora un altro oggetto (Y, σ) di **Sym** e un morfismo di **Rel** $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$, cioè un morfismo f tale che se $x\rho x'$ allora $f(x)\sigma f(x')$. Prendendo come f' ancora il morfismo f, il seguente diagramma com-

muta:

$$\begin{tikzcd}
 & (X, \rho \cup \rho^{-1}) \arrow[dd, "f"] \\
(X, \rho) \arrow[ur, "r_X"] \arrow[dr, "f"'] & \\
 & (Y, \sigma)
\end{tikzcd}$$

Dobbiamo dimostrare solo che se $x\rho^{-1}x'$ allora $f(x)\sigma f(x')$, ma questo segue immediatamente dal fatto che $x\rho^{-1}x' \Leftrightarrow x'\rho x$ e dalla commutatività della relazione σ, cioè dal fatto che se $f(x)\sigma f(x')$ allora $f(x')\sigma f(x)$.

2. Considero la sottocategoria $\mathcal{A} = \mathbf{Pos}$, degli insiemi parzialmente ordinati e delle mappe che preservano l'ordine, della categoria $\mathcal{B} = \mathbf{Prost}$, degli insiemi dotati di una relazione di preordine. Sia $(X, \leq)$ un insieme preordinato, definiamo una relazione di equivalenza $\approx$ su X come: $x \approx y \Leftrightarrow (x \leq y \text{ e } y \leq x)$. Sia poi p la proiezione canonica $p : X \to X/\approx$. Allora

$$\tilde{p} : (X, \leq) \longrightarrow (X/\approx, (p \times p)[\leq])$$

è una $\mathcal{A}$-riflessione per $(X, \leq)$.
Se prendo un insieme parzialmente ordinato $(Y, \preccurlyeq)$ e un morfismo di **Prost** $f : (X, \leq) \to (Y, \preccurlyeq)$, allora il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & (X/\approx, (p \times p)[\leq]) \arrow[dd, "f'"] \\
(X, \leq) \arrow[ur, "\tilde{p}"] \arrow[dr, "f"'] & \\
 & (Y, \preccurlyeq)
\end{tikzcd}$$

dove f' è la mappa f applicata alle classi $\tilde{p}(x)$ di $X/\approx$. Allora dati due elementi x, y in X tali che $x \leq y$ e $y \leq x$, questi coincideranno in $X/\approx$, proprio per come è stato definito, cioè $\tilde{p}(x) = \tilde{p}(y)$. In Y, poichè

f conserva l'ordine sarà $f(x) \leq f(y)$ e $f(y) \leq f(x)$ e quindi coincideranno anche $f(x)$ e $f(y)$ perchè la relazione $\preccurlyeq$ gode della proprietà antisimmetrica.

3. Sia $\mathcal{A} = \mathbf{Top}_0$ sottocategoria piena della categoria $\mathcal{B} = \mathbf{Top}$ degli spazi topologici T_0, ovvero degli spazi topologici X tali che presi $x, y \in X$, con $x \neq y$, allora esiste un aperto U che contiene x e non contiene y, o che contiene y e non contiene x. Sia X uno spazio topologico e definiamo la relazione di equivalenza $\approx$ su X tale che: $x \approx y \Leftrightarrow$ la chiusura di $\{x\}$ è uguale alla chiusura di $\{y\}$.
Allora la mappa canonica $p_0 : X \to X/\approx$ è una $\mathcal{A}$-riflessione per X.
Dimostriamo innanzitutto che lo spazio topologico $X/\approx$ che abbiamo definito è uno spazio T_0; cioè dimostriamo che se in uno spazio topologico T per ogni $x, y \in T$ si ha $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}} \Rightarrow x = y$, allora T è uno spazio T_0.
Prendiamo due elementi $x \neq y \in T$, allora $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ e quindi ci sono due possibilità:

   - o $x \notin \overline{\{y\}}$ e $T - \overline{\{y\}}$ è un intorno di x che non contiene y
   - o $x \in \overline{\{y\}}$, ma in tal caso $y \notin \overline{\{x\}}$, perchè altrimenti si avrebbe $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$ e quindi $T - \overline{\{x\}}$ è un aperto contenente y e non x.

   Quindi T è uno spazio T_0.
Viceversa dimostriamo anche che se uno spazio T è T_0 allora $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}} \Rightarrow x = y$.
Siano x, y due punti in T tali che $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$, allora $x \in \overline{\{y\}}$, quindi ogni aperto U contenente x contiene y e analogamente ogni aperto contenente y contiene x. Essendo T uno spazio T_0 ciò è possibile solo se $x = y$.
Mostriamo ora che p_0 è una riflessione.
Prendiamo Y spazio topologico T_0 e $f : X \to Y$ un'applicazione continua, allora chiamata f' l'applicazione canonica individuata da f nel

quoziente $X/\approx$, si ha il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & X/\approx \arrow[dd, "f'"] \\
X \arrow[ur, "p_0"] \arrow[dr, "f"'] & \\
 & Y
\end{tikzcd}$$

Dobbiamo verificare che se due elementi x, y in X sono tali che la chiusura di $\{x\}$ è uguale alla chiusura di $\{y\}$[1], cioè tali che $p_0(x) = p_0(y)$, allora anche $f(x) = f(y)$. Sappiamo che se una funzione è continua $f(\overline{x}) \subseteq \overline{f(x)}$ e chiaramente $f(x)$ appartiene sempre a $f(\overline{x})$
Detto ciò, se $\overline{x} = \overline{y}$ allora $f(\overline{x}) = f(\overline{y})$ e quindi $f(x) \in f(\overline{x}) = f(\overline{y}) \subseteq \overline{f(y)}$ e allo stesso modo si vede che $f(y) \in \overline{f(x)}$.
Allora $\overline{f(x)} \subseteq \overline{f(y)}$ e $\overline{f(y)} \subseteq \overline{f(x)}$ e quindi $\overline{f(x)} = \overline{f(y)}$, così essendo Y uno spazio T_0, per quello che abbiamo mostrato in precedenza, questo implica $f(x) = f(y)$

4. Considero la sottocateogria dei gruppi abeliani $\mathcal{A} = \mathbf{Ab}$ della categoria $\mathcal{B} = \mathbf{Grp}$. Sia G un gruppo e G_0 il sottogruppo dei commutatori di G. Allora la mappa canonica $p : G \to G/G_0$, che manda il gruppo G in quella che si chiama l'abelianizzazione di G, è una $\mathcal{A}$-riflessione per G. Considero un gruppo abeliano F e un morfismo di gruppi $f : G \to F$. Presi a, b in G, la coppia di elementi $a \cdot b$ e $b \cdot a$ possono non essere uguali in G ma $p(a \cdot b) = p(b \cdot a)$ in G/G_0, perchè $p(a)p(b) = p(b)p(a)$. Per avere la commutatività del seguente diagramma allora deve essere $f(a \cdot b) = f(b \cdot a)$ e questo accade per la definizione di omomorfismo di gruppo e per l'abelianità di F, infatti $f(a \cdot b) = f(a)f(b) = f(b)f(a) =$

[1] In seguito scriveremo $\overline{x}$ per indicare la chiusura dell'insieme $\{x\}$, per evitare la scrittura $\overline{\{x\}}$ che risulta pesante.

$f(b \cdot a)$.

$$\begin{tikzcd} & G/G_0 \arrow[d, "f"] \\ G \arrow[ur, "p"] \arrow[r, "f"'] & F \end{tikzcd}$$

5. Sia $\mathcal{A} = \mathbf{TfAb}$ la sottocategoria piena dei gruppi abeliani privi di torsione, della categoria dei gruppi abeliani $\mathcal{B} = \mathbf{Ab}$. Sia G un gruppo abeliano e sia $T(G)$ il sottogruppo di torsione di G, ovvero il sottogruppo degli elementi di G avente periodo finito. Allora la mappa canonica $t : G \to G/T(G)$ è una $\mathcal{A}$-riflessione per G.
   Infatti per ogni gruppo privo di torsione H e per ogni morfismo $f : G \to H$ ho il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} & G/T(G) \arrow[d, "f'"] \\ G \arrow[ur, "t"] \arrow[r, "f"'] & H \end{tikzcd}$$

   dove f' è la mappa f applicata alle classi $t(x)$ di $G/T(G)$. Devo verificare che se prendo un elemento a con periodo finito in G, e cioè tale che $t(a) = 0$ allora anche $f(a) = 0$. L'elemento a è tale che $n \cdot a = 0$, allora $f(n \cdot a) = 0 = n \cdot f(a)$ e poichè in H non esistono elementi di periodo finito diversi da 0, allora $f(a) = 0$.

6. Sia $\mathcal{A} = \mathbf{Mon}$ la sottocategoria dei monoidi della categoria dei semigruppi $\mathcal{B} = \mathbf{Sgr}$, cioè la categoria degli insiemi muniti di un'operazione binaria associativa, e degli omomorfismi tra semigruppi.
   Si osserva che la categoria **Mon** non è una sottocategoria piena di **Sgr**, poichè si ha che un'applicazione fra gli insiemi degli elementi dei due monoidi che sia un omomorfismo di semigruppi è un omomorfismo di monoidi solo se soddisfa anche l'ulteriore condizione sull'elemento neutro, non automaticamente realizzata.

Se $(X,\cdot)$ è un semigruppo allora l'estensione

$$t : (X,\cdot) \hookrightarrow (X \cup e, \hat{\cdot}, e)$$

ottenuta aggiungendo un elemento unità $e \notin X$ dell'operazione $\hat{\cdot}$, è una $\mathcal{A}$-riflessione per $(X,\cdot)$.
Si osserva che nel caso il semigruppo $(X,\cdot)$ sia in particolare anche un monoide, si deve comunque aggiungere una nuova unità e perchè come già detto la vecchia unità in un morfismo tra semigruppi potrebbe avere un' immagine diversa dall'unità del codominio.
Sia $f : (X,\cdot) \to (Y,*,i)$, un morfismo di semigruppi, con $(Y,*,i)$ monoide con identità i, e sia f' l'omomorfismo tra monoidi estensione della f, tale che $f'(e) = i$. Allora il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{tikzcd} & (X \cup e, \hat{\cdot}, e) \arrow[dd, "f'"] \\ (X,\cdot) \arrow[ur, hook, "t"] \arrow[dr, "f"'] & \\ & (Y,*,i) \end{tikzcd}$$

Infatti dato un elemento x in X vale $t(x\hat{\cdot}e) = t(e\hat{\cdot}x) = t(x)$, ma per le proprietà del monoide Y vale anche $f(x * i) = f(i * x) = f(x)$ e il diagramma commuta.

Osservazione 7. Osserviamo che nell'ultimo esempio, il morfismo di riflessione non è mai suriettivo. Questo fatto potrebbe stupire considerando che negli altri esempi le $\mathcal{A}$-riflessioni sono isomorfismi per ogni $\mathcal{A}$-oggetto, invece questo fatto è coerente con la **Proposizione 3.2.2** enunciata in seguito, sapendo che **Mon** non è sottocategoria piena di **Sgr**.

ESEMPIO NON BANALE:
Sia $\mathcal{A} = \mathbf{Top}_2$, sottocategoria della categoria **Top**, degli spazi topologici di Hausdorff, ovvero degli spazi topologici T tali che per ogni coppia di punti

distinti x e y in T esistono degli intorni U di x e V di y disgiunti, cioè tali che $U \cap V = \varnothing$.
Allora per ogni X spazio topologico esiste un quoziente $X/\approx$ di X che sia uno spazio di Hausdorff e tale che la proiezione canonica $p : X \to X/\approx$ sia una $\mathcal{A}$-riflessione per X.
Si dimostra che in **Top** ogni sottocategoria piena chiusa per prodotti e sottospazi è riflessiva.
Un caso particolare è la sottocategoria $\mathbf{Top_0}$, per cui abbiamo già dato la costruzione delle riflessioni, nel caso di $\mathbf{Top_2}$ è molto più complicato e diamo solo una costruzione generale.
Sia X uno spazio topologico e siano $\{f_i\}_{i\in I}$ tutte le funzioni suriettive
$f_i : X \to Y_i$ che hanno come dominio lo spazio dato e come codominio tutti gli spazi topologici di Hausdorff, prendendone uno solo come rappresentante della classe di spazi omeomorfi per poter considerare solo un insieme di Y_i e quindi poter fare il prodotto.
Prendo $\prod Y_i$ il prodotto di tali spazi di Hausdorff e chiamo $f : X \to \prod Y_i$ la funzione tale che, detta $\pi_i : \prod Y_i \to Y_i$ la proiezione dal prodotto degli Y_i in Y_i, $\pi_i \circ f = f_i$.
Poichè gli Y_i sono spazi di Hausdorff, anche il loro prodotto $\prod Y_i$ è di Hausdorff. Così anche $f(X)$, immagine di X tramite f, essendo un sottospazio di tale prodotto è uno spazio di Hausdorff.

$$\begin{tikzcd} & \prod Y_i \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\bar f"'] & f(X) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Allora $\bar f : X \to f(X)$ è la riflessione cercata. Si può osservare che tale riflessione è un quoziente topologico, infatti è suriettiva per come è stata definita, inoltre ha la topologia più fine che renda continua $\bar f$: se consideriamo la topologia quoziente indotta da $\bar f$ otteniamo uno spazio Z che ha lo stesso insieme sottogiacente di $f(X)$ e ha una topologia più fine di $f(X)$; essendo $f(X)$

di Hausdorff, anche Z risulta tale. In virtù della proprietà universale della riflessione, si ottiene che Z è omeomorfo a $f(X)$. Si osservi che il quoziente individuato da $\bar{f}$ è dato dalla relazione: $\forall x, y \in X \; x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ ed in particolare, per come abbiamo definito la f, $x \sim y \Leftrightarrow f_i(x) = f_i(y)$ per ogni $i \in I$.

Per quanto mostrato negli esempi precedenti e per la generalità con cui abbiamo definito le riflessioni abbiamo un elenco di sottocategorie riflessive:

1. La sottocategoria **Sym** della categoria **Rel**.

2. La sottocategoria degli insiemi preordinati **Prost** della categoria **Pos**.

3. $\mathbf{Top}_0$ sottocategoria degli spazi che soddisfano l'assioma di separazione T_0 e $\mathbf{Top}_2$ sottocategoria degli spazi di Hausdorff sono sottocategorie riflessive della categoria **Top**, degli spazi topologici.

4. La sottocategoria dei gruppi abeliani privi di torsione **TfAb** è sottocategoria riflessiva della categoria dei gruppi abeliani **Ab**, che a sua volta è sottocategoria riflessiva della categoria di tutti i gruppi **Grp**.

5. La sottocategoria dei monoidi **Mon** è sottocategoria riflessiva della categoria dei semigruppi **Sgr**.

Diamo ora qualche risultato per quanto riguarda le riflessioni e quindi le sottocategorie riflessive.

Proposizione 3.2.1. *Le riflessioni sono essenzialmente uniche, ovvero: se $r : B \to A$ e $r' : B \to A'$ sono $\mathcal{A}$-riflessioni per B allora esiste un $\mathcal{A}$-isomorfismo $k : A \to A'$ tale che il diagramma seguente*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dd, "k"] \\ B \arrow[ur, "r"] \arrow[dr, "r'"'] & \\ & A' \end{tikzcd}$$

commuti.
Inoltre se $r : B \to A$ *è una* $\mathcal{A}$*-riflessione per* B *e* $k : A \to A'$ *è un* $\mathcal{A}$*-isomorfismo, allora* $k \circ r : B \to A'$ *è una* $\mathcal{A}$*-riflessione per* B*.*

Dimostrazione. L'esistenza di un morfismo k tale che $r' = k \circ r$ viene direttamente dalla definizione di riflessione e dal fatto che A' è un $\mathcal{A}$-oggetto. Allo stesso modo esiste k' tale che $r = k' \circ r'$. Allora si ha: $(k' \circ k) \circ r = k' \circ (k \circ r) = k' \circ r' = r = 1_A \circ r$, così per il requisito di unicità nella definizione di riflessione $k \circ k' = 1_A$. Analogamente si vede che $k' \circ k = 1_{A'}$ e quindi k è isomorfismo. La seconda affermazione è invece ovvia. □

Proposizione 3.2.2. *Sia* $\mathcal{A}$ *una sottocategoria di* $\mathcal{B}$*, allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. $\mathcal{A}$ *è una sottocategoria piena di* $\mathcal{B}$
2. *Per ogni* $\mathcal{A}$*-oggetto* A*,* $1_A : A \to A$ *è una riflessione*
3. *Per ogni oggetto* $A \in ob(\mathcal{A})$*, le* $\mathcal{A}$*-riflessioni* $r : A \to A'$ *sono* $\mathcal{A}$*-isomorfismi.*
4. *Per ogni oggetto* $A \in ob(\mathcal{A})$*, le* $\mathcal{A}$*-riflessioni* $r : A \to A'$ *sono* $\mathcal{A}$*-morfismi.*

Dimostrazione. È chiaro che (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4). Allora basta mostrare che (4) $\Rightarrow$ (1): sia $f : A \to A^*$ un $\mathcal{B}$-morfismo tra $\mathcal{A}$-oggetti. Per definizione di riflessione esiste un $\mathcal{A}$-morfismo $f' : A' \to A^*$ con $f = f' \circ r$. Quindi f è composizione di $\mathcal{A}$-morfismi ed è così $\mathcal{A}$-morfismo. □

Proposizione 3.2.3. *Sia* $\mathcal{A}$ *una sottocategoria riflessiva di* $\mathcal{B}$ *e per ogni* $\mathcal{B}$*-oggetto* B *sia* $r_B : B \to A_B$ *una* $\mathcal{A}$*-riflessione. Allora esiste un unico funtore* $\mathcal{R} : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ *tale che siano soddisfatte le seguenti condizioni:*

1. $\mathcal{R}(B) = A_B$ *per ogni* $\mathcal{B}$*-oggetto* B

2. Per ogni $\mathcal{B}$-morfismo $f : B \to B'$ il diagramma

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "r_B"] \arrow[d, "f"'] & R(B) \arrow[d, "R(f)"] \\ B' \arrow[r, "r_{B'}"'] & R(B') \end{tikzcd}$$

commuta.

Dimostrazione. Esiste un' unica funzione $\mathcal{R}$ sugli oggetti che soddisfa la prima condizione e dalla definizione di $\mathcal{A}$-riflessione un'unica funzione sui morfismi che soddisfa la seconda; rimane da dimostrare che $\mathcal{R}$ è un funtore, ovvero che $\mathcal{R}$ preserva le identità e la composizione. Il primo fatto segue dalla commutatività del diagramma

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "r_B"] \arrow[d, "1_B"'] & R(B) \arrow[d, "1_{R(B)}"] \\ B \arrow[r, "r_B"'] & R(B) \end{tikzcd}$$

e il secondo segue dalla commutatività del diagramma

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "r_B"] \arrow[d, "g \circ f"'] & R(B) \arrow[d, "R(g) \circ R(f)"] \\ B'' \arrow[r, "r_{B''}"'] & R(B'') \end{tikzcd}$$

ottenuto componendo i diagrammi corrispondenti a $f : B \to B'$ e $g : B' \to B''$. □

Definizione 3.4. Un funtore $\mathcal{R} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ costruito come nella precedente proposizione è chiamato *funtore riflettore* per $\mathcal{A}$.

Osservazione 8. Se $\mathcal{A}$ è sottocategoria riflessiva di $\mathcal{B}$, un riflettore per $\mathcal{A}$ dipende dalla scelta dei morfismi di riflessioni. Quindi generalmente ci sono più differenti riflettori per $\mathcal{A}$.

3.3 Nozione duale: sottocategorie coriflessive

La nozione duale del concetto di sottocategoria riflessiva è la sottocategoria coriflessiva. Una sottocategoria $\mathcal{A}$ della categoria $\mathcal{B}$ è *sottocategoria coriflessiva* se e solo se $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ è sottocategoria riflessiva di $\mathcal{B}^{\mathrm{op}}$. Nonostante questa sia una definizione adeguata di sottocategoria coriflessiva forniamo un'ulteriore definizione senza coinvolgere la dualità.

Definizione 3.5. Sia $\mathcal{A}$ una sottocategoria di $\mathcal{B}$ e sia B un oggetto di $\mathcal{B}$. Una $\mathcal{A}$-*coriflessione* per B è un $\mathcal{B}$-morfismo $c : A \to B$ da un $\mathcal{A}$-oggetto A a B con la seguente proprietà universale:
per ogni $\mathcal{B}$-morfismo $f : A' \to B$ con A' oggetto di $\mathcal{A}$ esiste un unico $\mathcal{A}$-morfismo $f' : A' \to A$ tale che il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, "f"] & \\ A \arrow[r, "c"'] & B \end{tikzcd}$$

sia commutativo.

Definizione 3.6. Sia $\mathcal{A}$ una sottocategoria di $\mathcal{B}$. $\mathcal{A}$ è chiamata *sottocategoria coriflessiva* di $\mathcal{B}$ se ogni oggetto $B \in ob(\mathcal{B})$ ha una $\mathcal{A}$-coriflessione.

ESEMPI:

1. Considero $\mathcal{A} = \mathbf{Sym}$ categoria degli insiemi dotati di una relazione simmetrica che è sottocategoria di $\mathcal{B} = \mathbf{Rel}$.
   La mappa $1_X : (X, \rho \cup \rho^{-1}) \to (X, \rho)$ è una $\mathcal{A}$-corifllessione per (X, ρ).
   Questo esempio ci mostra un raro caso di una sottocategoria che sia allo stesso tempo riflessiva e coriflessiva.

2. Considero $\mathcal{A}$ la sottocategoria piena di $\mathcal{B} = \mathbf{Ab}$ formata dai gruppi di torsione. Per ogni gruppo abeliano G l'inclusione $i : T(G) \hookrightarrow G$ dove $T(G)$ è il sottogruppo di torsione di G, è una $\mathcal{A}$-coriflessione per G.

Proposizione 3.3.1. *Sia $\mathcal{A}$ una sottocategoria coriflessiva di $\mathcal{B}$ e per ogni $\mathcal{B}$-oggetto B sia $c_B : A_B \to B$ una $\mathcal{A}$-coriflessione per B. Allora esiste un unico funtore $\mathcal{C} : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, chiamato funtore* ***coriflettore*** *per $\mathcal{A}$, tale che soddisfa le condizioni seguenti:*

1. *$\mathcal{C}(B) = A_B$ per ogni $\mathcal{B}$-oggetto B.*

2. *Per ogni morfismo $f : B \to B_0$ il diagramma seguente*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(B) \arrow[r, "c_B"] \arrow[d, "\mathcal{C}(f)"'] & B \arrow[d, "f"] \\
\mathcal{C}(B') \arrow[r, "c_{B'}"'] & B'
\end{tikzcd}$$

   commuta.

Bibliografia

[1] F. Borceux. *Basic category theory*, volume 1 of *Handbook of Categorical Algebra*, Cambridge University Press (Cambridge) 1994

[2] J. Adámek, H. Herrlich and G.E. Strecker. *Abstract and Concrete Categories - The Joy of Cats* John Wiley and Sons, Inc, 1990

[3] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.

[4] S. Awodey. *Category Theory.* Oxford University Press, 2006.

Ringraziamenti

Raggiungere un traguardo ci obbliga inevitabilmente a guardarci indietro e riflettere, per gioire dei momenti felici e cercare di capire i propri errori, per promettersi di non ripeterli.
Ci si accorge di non aver percorso la strada da soli e per questo sento di dover fare dei ringraziamenti.
Innanzitutto alla mia famiglia per avermi circondato di affetto e per avermi sempre fatto sentire adeguata, importante e apprezzata; poi a Matteo, perchè abbiamo affrontato fianco a fianco tutti i passi importanti degli ultimi cinque anni, per essere cambiati e cresciuti insieme, e per avermi fatta sentire amata e speciale anche quando ero insicura.
Un grazie va agli amici che mi sono stati vicini e un grazie speciale va a Sonia che ha percorso questa avventura con me, insegnandomi a lavorare per ottenere ciò che si vuole e a seguire il cuore, con la speranza che voglia seguirmi anche nel prossimo capitolo.
Ringrazio infine la Prof.essa Cagliari per il supporto, l'aiuto e soprattutto per la disponibilità, e per avermi fatto affrontare quest' ultimo periodo con più serenità.
Grazie.