

Università degli Studi di Bologna

---

SCUOLA di SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Teoria ed applicazioni delle  
equazioni differenziali ordinarie

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:  
Chiar.mo Prof.  
Paolo Negrini

Presentata da:  
Barbara Fiorini

I Sessione  
Anno Accademico 2012-2013



# Indice

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| <b>1</b> | <b>Introduzione storica</b>   | <b>5</b>   |
| <b>2</b> | <b>Esistenza e unicità del problema di Cauchy: ipotesi di Lipschitz</b>           | <b>15</b>  |
| 2.1      | Introduzione . . . . .  | 15         |
| 2.2      | Il problema di Cauchy . . . . .   | 19         |
| 2.3      | Prolungamento delle soluzioni . . . . .   | 33         |
| 2.4      | Sistemi di equazioni differenziali lineari del primo ordine . . .                 | 42         |
| 2.4.1    | Risoluzione di sistemi lineari del I ordine a coefficienti costanti . . . . .     | 45         |
| 2.5      | Dipendenza continua dai dati iniziali e parametri . . . . .                       | 52         |
| 2.6      | Stabilità delle soluzioni dei sistemi lineari su intervalli illimitati            | 54         |
| <b>3</b> | <b>Metodi risolutivi per le equazioni differenziali</b>                           | <b>61</b>  |
| 3.1      | Metodi analitici . . . . .  | 61         |
| 3.1.1    | Equazioni differenziali del primo ordine . . . . .                                | 62         |
| 3.1.2    | Equazioni differenziali di ordine superiore al primo . . .                        | 68         |
| 3.1.3    | Altri metodi per la risoluzione delle equazioni differenziali ordinarie . . . . . | 78         |
| 3.2      | Metodi numerici . . . . .   | 88         |
| <b>4</b> | <b>Modellizzazione con le equazioni differenziali</b>                             | <b>103</b> |
| 4.1      | Modelli di crescita delle popolazioni . . . . .                                   | 103        |
| 4.2      | Sistemi di tipo preda - predatore . . . . .                                       | 108        |

4.2.1 Il modello di Lotka-Volterra . . . . . 109

**Bibliografia** . . . . . **133**

# Capitolo 1

## Introduzione storica

Lo studio di equazioni differenziali risale al XVII secolo e, a differenza dello studio delle equazioni numeriche che ha come oggetto la determinazione di uno o piú numeri, ha l'obiettivo di determinare una o piú funzioni che verifichino l'equazione data.

Il primo problema riguardo l'integrazione di equazioni differenziali fu proposto nel 1638 in una lettera che Florimond De Beaune <sup>(1)</sup> indirizz  a Cartesio chiedendo di trovare una curva la cui sottotangente avesse un valore costante. Utilizzando la notazione attuale, il problema pu  essere riformulato tramite l'equazione

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha}{y - x},$$

caso particolare di

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

---

<sup>1</sup>Florimond De Beaune (Blois, 7/10/1601 - Blois, 18/08/1652) era un giurista e matematico francese, e uno dei primi seguaci di Ren  Descartes (Cartesio). R. Taton lo ha definito "un tipico esempio di dilettante erudito" attivo nell'ambito scientifico del XVII secolo. Il suo *Tractatus de limitibus aequationum*, stampato in Inghilterra nel 1807, contiene il limite superiore e inferiore per le soluzioni delle equazioni di secondo grado e cubiche, come semplici funzioni dei coefficienti di queste equazioni; altre sue opere sono *Doctrine de l'angle solide and Inventaire de sa bibliothque* e *Notae breves*, l'introduzione all'edizione del 1649 de *La Geometrie* di Descartes.

e oggi si può dire che questo primo quesito si presenta sotto la “veste” di *problema inverso delle tangenti*. Ovviamente questa non è la formulazione che propose De Beaune, in quanto il differenziale  $d$  fu introdotto in epoca successiva da Leibniz; questo problema fa parte della tipologia di problemi che hanno come obiettivo la determinazione di una curva (o in generale le sue proprietà) quando sia data una relazione tra la tangente e le coordinate. Fu Descartes infatti, oggi ritenuto il padre della geometria analitica, che introducendo il concetto di *curva-equazione*, trovò un nuovo metodo per la determinazione della tangente ad una curva algebrica; tale metodo tuttavia richiedeva molti calcoli ed era ancora saldamente ancorato all’interpretazione geometrica della tangente, e alla determinazione della sottotangente. De Beaune stesso in seguito modificò il sistema impostato da Cartesio, sostituendo alla circonferenza da intersecare con la curva una retta e così facendo dimezzò il grado dell’equazione risultante.

In generale in un diagramma cartesiano, la sottotangente di una curva relativamente ad un suo punto è rappresentata da un segmento sull’asse delle ascisse determinato dalle due intersezioni con l’asse delle ascisse, della verticale passante nel punto in questione e della tangente alla curva in quel punto.

Cartesio risolse il problema che gli era stato inviato, ovviamente senza l’ausilio del calcolo differenziale, ricercando una curva la cui sottotangente avesse un valore costante e riconobbe che la soluzione non era di natura algebrica, ma evidentemente non si accorse che essa comportava logaritmi [24].

Nel 1644 Torricelli dimostrò che la soluzione è la curva logaritmica, se  $y = a^x$  si ha  $dy/dx = a^x \log(a)$  e la sottotangente è  $1/\log(a)$ . Infatti, ricordando che la sottotangente a una curva  $y = y(x)$  è la quantità  $y/y'$ , tale problema conduce a un’equazione del tipo  $y' = ay$ , che ha come soluzione  $y = ke^{ax}$ .

Il problema inverso delle tangenti si afferma subito come il problema princi-

pale del nuovo calcolo, anche perché alle equazioni differenziali si riconducono la maggior parte dei problemi geometrici e fisici del tempo, in particolare le questioni di meccanica. Uno degli esempi piú noti é il problema della curva *brachistocrona*, cioé della curva che congiunge due punti  $A$  e  $B$  posti su un piano verticale e tale che un grave, cadendo lungo di essa, vada da  $A$  a  $B$  nel minor tempo possibile. Tale curva é parte di una curva detta *cicloide*.

Il problema non era nuovo e già Galileo lo aveva studiato a lungo, congetturando che la curva fosse un arco di cerchio, senza però riuscire a risolverlo. Nel 1696 venne riproposto da Johann Bernoulli sotto forma di sfida ai matematici; la soluzione venne trovata infine da Newton, da Leibniz e dallo stesso Bernoulli, che inauguró cosí il calcolo delle variazioni.

Un secondo problema che conduce ad un'equazione differenziale, anch'esso risalente a Galileo, é quello della *catenaria*, cioé della posizione di equilibrio di una curva piana iperbolica, il cui andamento é quello caratteristico di una fune omogenea, flessibile e non estensibile, i cui due estremi siano vincolati e che sia lasciata pendere, soggetta soltanto al proprio peso. Anche questo problema venne risolto da Leibniz, dai Bernoulli e dal marchese de l'Hopital per mezzo del calcolo differenziale; e Leibniz, abile divulgatore, se ne serví per diffondere il calcolo e renderne note le potenzialitá.

L'affermarsi, nel corso del XVIII secolo, della meccanica newtoniana, ed in particolare della seconda legge della dinamica che lega la forza all'accelerazione, riducendo la determinazione del moto di un corpo alla risoluzione di un sistema di equazioni differenziali, pone queste ultime in una posizione dominante, non solo come problema matematico, ma anche e soprattutto come mezzo di indagine fisica.

Lo stesso Newton, con un geniale uso combinato del calcolo differenziale e degli sviluppi in serie, aveva portato la teoria delle equazioni differenziali ad un grado di compiutezza destinato a rimanere insuperato per molto tempo. Il metodo di Newton é contenuto nel suo *A Treatise of the Method of Fluxions and Infinite Series*, pubblicato postumo nel 1737. In primo luogo, data

un'equazione differenziale

$$y' = f(x, y),$$

egli sviluppa in serie la funzione  $f(x, y)$  ordinando lo sviluppo secondo le potenze crescenti

$$y' = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 + \dots$$

e cerca poi una soluzione  $y(x)$  nella forma di una serie di potenza:

$$y(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots$$

(si noti che nel far ciò si é supposto  $y(0) = 0$ ; se  $y(0) = L$ , si porrá  $w = y - L$  e si risolverá l'equazione corrispondente per  $w$ ).

La determinazione dei coefficienti  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  é ora immediata; basterá sostituire l'espressione della  $y$  nell'equazione differenziale sviluppata ed eguagliare i coefficienti delle potenze omologhe.

In particolare, si ha

$$\alpha_1 = a; \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}(b + ac); \quad \dots$$

Il problema inverso delle tangenti fu cosí completamente risolto, o meglio ricondotto agli sviluppi in serie. La soluzione é data però non in forma esplicita, ma attraverso una serie i cui coefficienti possono essere calcolati uno dopo l'altro.

Non sembra che in Inghilterra nel XVIII secolo si siano avuti risultati di rilievo oltre a quelli di Newton, e ciò in parte é dovuto al fatto che l'influenza dei metodi newtoniani era cosí forte da impedire un'elaborazione alternativa. Diversamente si presentó la situazione sul continente: qui gli sviluppi in serie, benché studiati e conosciuti, non hanno avuto un ruolo preminente. La ricerca della soluzione delle equazioni differenziali ordinarie era strettamente connessa all'esistenza di una relazione inversa tra la differenziazione e l'integrazione, ma la maggior parte delle equazioni differenziali non si pote-



vano ricondurre facilmente a semplici quadrature (cioé al calcolo di alcuni integrali), e richiedevano invece per la loro soluzione ingegnose sostituzioni o complicati algoritmi. Una delle maggiori conquiste della matematica del XVIII secolo fu la scoperta di gruppi di equazioni differenziali che erano risolvibili per mezzo di tecniche abbastanza semplici. La ricerca di questi metodi é uno dei problemi piú interessanti del calcolo differenziale, che nel caso generale é tutt'ora aperto.

Si assisté cosí in primo luogo alla soluzione delle equazioni a variabili separabili, e poi a tutta una serie di studi miranti a ricondurre a queste ultime (mediante opportune trasformazioni) classi sempre piú vaste di equazioni.

Un tipico esempio é costituito dalle equazioni omogenee, quelle in cui il secondo membro  $f(x, y)$  é una funzione omogenea di grado zero, ossia una funzione del solo rapporto  $y/x$ . Gabriele Manfredi <sup>(2)</sup>, riuscí a trovare un metodo per risolvere queste equazioni: ponendo  $y = wx$ , si ricondusse infatti ad un'equazione a variabili separabili nell'incognita  $w$ .

Nello studio di queste trasformazioni, che permettono di risolvere classi via via piú vaste di equazioni differenziali, si distinsero inoltre i Bernoulli, Eulero, Riccati <sup>(3)</sup>, e infine Lagrange e Alexis Clairaut <sup>(4)</sup>. Fu Eulero, senza

---

<sup>2</sup>Gabriele Manfredi (Bologna, 25/03/1681 - Bologna, 13/10/1761) é stato un matematico italiano; dopo aver studiato medicina, si interessó alla matematica, ottenendo la cattedra presso l'Universitá di Bologna. Nell'opera *De constructionae aequationum differentialium primi gradus* (1707) espose i risultati ottenuti fino a quel momento nella soluzione dei problemi relativi alla teoria delle equazioni differenziali e i fondamenti del calcolo integrale, e successivamente, nella memoria *Breve schediasma geometrico per la costruzione di una gran parte delle equazioni differenziali di primo grado* (1714) descrisse i risultati da lui raggiunti.

<sup>3</sup>Jacopo Riccati (Venezia, 28/05/1676 - Treviso, 15/04/1754), é stato un matematico italiano; si occupó in particolare dell' idrodinamica alla base della meccanica newtoniana. Gli venne offerta la presidenza dell'Accademia delle Scienze di San Pietroburgo, ma rifiutó per non rinunciare al suo stile di vita riservato.

<sup>4</sup>Alexis Clairaut (Parigi, 3/05/1713 - Parigi, 17/05/1765) é stato un grande matematico e astronomo francese. Fu considerato un bambino prodigio, in quanto sviluppo un precocissimo talento matematico che gli valse l'ammissione all'Accademia delle scienze francese, prima che ne avesse l'età legale, a 18 anni. Nello stesso anno dimostró un'ipotesi di Newton, cioé che tutte le curve del terz'ordine sono la proiezione di cinque parabole. Nel 1736 prese parte alla spedizione in Lapponia, avente come scopo la misurazione della lunghezza di un grado di meridiano, ed al ritorno pubblicó il trattato *Theorie de la figure*

dubbio, lo scienziato che piú contribuí all'elaborazione di metodi usati oggi per la soluzione di equazioni differenziali; persino numerosi problemi specifici che compaiono nei manuali di uso corrente si possono far risalire ai grandi trattati sul calcolo infinitesimale redatti da questo grande matematico, le *Institutiones calculi differentialis* (Pietroburgo, 1755) e le *Institutiones calculi integralis* (3 vol. Pietroburgo, 1768-1770). L'uso di fattori di integrazione, i metodi sistematici per risolvere equazioni lineari di ordine superiore con coefficienti costanti, e la distinzione tra equazioni lineari omogenee e non omogenee e tra soluzioni particolari e generali sono solo alcuni dei contributi dati da Eulero allo studio dell'analisi infinitesimale, anche se su alcuni punti va riconosciuta una parte di merito ad altri matematici. Daniel Bernoulli, per esempio, aveva risolto l'equazione  $y'' + Ky = f(x)$  indipendentemente da Eulero e piú o meno verso la stessa data (1739-1740), mentre anche d'Alembert, oltre a Eulero, possedeva, verso il 1747, metodi generali per risolvere equazioni lineari complete. In una certa misura il nostro debito verso il matematico svizzero (era originario di Basilea) in ogni aspetto del campo delle equazioni differenziali é simboleggiato dal fatto che un'equazione lineare con coefficienti variabili porta il suo nome. L'equazione di Eulero  $x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_n y^{(0)} = f(x)$  si puó facilmente ridurre, mediante la sostituzione  $x = e^t$ , ad un'equazione lineare avente coefficienti costanti. Ricapitolando, le ricerche sulle equazioni differenziali durante tutto il Settecento sono dirette da una parte alle applicazioni, in particolare alla meccanica e alla geometria, dall'altra alla determinazione esplicita delle soluzioni, o quanto meno alla loro espressione sotto forma di integrali.

Lo studio delle equazioni differenziali potrebbe anche essere introdotto tramite un'interpretazione geometrica.

Data una famiglia di curve di equazione

---

*de la terre* (1743) in cui espose un teorema, oggi noto come teorema di Clairaut. Si occupó principalmente di problemi fisici, e trovó un'ingegnosa soluzione approssimata al problema dei tre corpi.

$$\phi(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0 \quad (1.1)$$

mediante derivazione rispetto alla variabile  $x$ , pensando la  $y$  come funzione di  $x$  e le  $c_1, c_2, \dots, c_n$  come costanti, si ottiene:

$$\phi_x(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) + \phi_y(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n)y' = 0$$

$$\phi_{xx} + 2\phi_{xy}y' + \phi_{yy}y'^2 + \phi_y y'' = 0$$

L'eliminazione delle  $n$  costanti arbitrarie  $c_1, c_2, \dots, c_n$  fra le prime  $n$  relazioni così ottenute e l'equazione della famiglia di curve (1.1) conduce ad un'equazione differenziale ordinaria di ordine  $n$  (in questa sede non stiamo a precisare quali ipotesi formulare sulla funzione  $\phi(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n)$  affinché il procedimento descritto sia lecito).

Ciò deve mostrare che in generale le soluzioni di un'equazione differenziale di ordine  $n$  sono infinite e può far sorgere la domanda se ogni equazione differenziale di ordine  $n$  si possa ottenere a partire da un'opportuna famiglia di curve con il procedimento indicato prima. Questa questione interessò la teoria classica delle equazioni differenziali ordinarie, che si sviluppò, come abbiamo già ribadito, dal 1700, cercando di trovare una relazione del tipo (1.1) dalla quale, mediante eliminazione delle costanti, si potesse ottenere l'equazione data. La relazione  $\phi(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$  prende il nome di *integrale generale* dell'equazione differenziale data. In seguito l'interesse per questo problema è notevolmente diminuito; ad esso si è sostituita la questione di trovare un integrale dell'equazione differenziale che soddisfi ad ulteriori condizioni, come ad esempio il cosiddetto *problema di Cauchy* o *problema di valori iniziali* che, data un'equazione differenziale ordinaria

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

determina una soluzione che soddisfi alle condizioni iniziali:

$$y(x_0) = y_0; \quad y'(x_0) = y_1^{(0)}; \quad \dots; \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}^{(0)}.$$

É soltanto con Cauchy, nel XIX secolo, che si pone il problema di dimostrare a priori l'esistenza di soluzioni per l'equazione differenziale nella sua forma generale, e, lo stesso Cauchy dimostró l'esistenza e l'unicitá in piccolo di una soluzione del problema che prende il suo nome, utilizzando un metodo che sará poi detto delle *approssimanti di Cauchy*. Come approfondiró nel primo capitolo, in tempi successivi é stata realizzata un'altra dimostrazione, che fa uso principalmente di metodi funzional-analitici.

Da quel momento il problema dell'esistenza venne discusso in ipotesi via via piú generali per la funzione  $f(x, y)$ , fino a giungere alle cosiddette *ipotesi di Caratheodory*<sup>(5)</sup>:  $f(x, y)$  é misurabile rispetto a  $x$  e continua rispetto a  $y$ . Corrispondentemente, la soluzione  $y(x)$  verificherá l'equazione data per quasi ogni  $x$ .

Verso la fine del XIX secolo si imposero problemi del tipo della dipendenza continua dai dati e, per sistemi di equazioni, del comportamento delle soluzioni nelle vicinanze di punti stazionari, cioé punti  $y_0$  per i quali  $f(x, y_0) \equiv 0$  (tali punti si chiamano *stazionari* perché, se per qualche valore  $x_0$  si ha  $y(x_0) = y_0$ , allora  $y(x) \equiv y_0$  per ogni  $x$ ).

Queste ricerche, specie nel caso di sistemi di due equazioni con  $f$  indipendente da  $x$  (sistemi autonomi), sono condotte soprattutto da Henri Poincaré (1854-1912), e portarono in seguito agli studi sulla stabilitá da parte di Aleksandr Ljapunov<sup>(6)</sup> e della scuola russa.

Questa tesi ha lo scopo di trattare il tema delle equazioni differenziali ordina-

---

<sup>5</sup>Constantin Caratheodory (Berlino, 13/09/1873 - Monaco di Baviera, 2/2/1950) é stato un matematico greco che ha dato importanti contributi nel calcolo delle variazioni e teoria della misura

<sup>6</sup>Aleksandr Ljapunov (Jaroslavl', 6/06/1857 - Odessa, 3/11/1918) é stato un matematico e fisico russo; inizió gli studi universitari presso la facoltá Fisico-Matematica dell'Universitá di Stato di San Pietroburgo, dove conobbe Markov. É noto soprattutto per i suoi risultati sulla stabilitá dei sistemi dinamici, ma si occupó anche delle equazioni differenziali, della teoria del potenziale, e nel campo delle teorie probabilistiche generalizzó i risultati conseguiti da Cebyv e da Markov.

rie sotto vari aspetti, ma senza la pretesa di essere in ogni caso esaustiva. In primo luogo cercheró di mostrare il lato piú teorico, ossia i teoremi che stanno alla base dell'esistenza e dell'unicitá o meno delle soluzioni di questo tipo di equazioni; in seguito poi mi occuperó maggiormente dell'aspetto risolutivo vero e proprio. In particolare l'attenzione sará rivolta ad analizzare i possibili metodi che si possono utilizzare per risolvere un'ODE, che si possono fondamentalmente suddividere in due grandi tipologie: analitici e numerici. Infine, l'ultimo capitolo é rivolto principalmente a trattare una possibile applicazione delle equazioni differenziali ordinarie: la modellizzazione della dinamica delle popolazioni.



# Capitolo 2

## Esistenza e unicit  per il problema di Cauchy nell'ipotesi di Lipschitz

### 2.1 Introduzione

Il pi  semplice problema in cui compaiono le equazioni differenziali ordinarie, ovvero relazioni tra una variabile indipendente  $t$ , una funzione incognita  $u(t)$  di questa variabile e alcune delle sue derivate,   quello della ricerca delle primitive di una funzione assegnata  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ( $I = [a, b]$  intervallo), cio  della determinazione di una funzione  $u$  tale che

$$u'(t) = f(t) \quad \forall t \in I. \quad (2.1)$$

Se  $f$    continua nell'intervallo  $I$ , per il *Primo teorema fondamentale del calcolo integrale*, la soluzione dell'equazione (2.1) esiste ed   la funzione integrale

$$u(t) = \int_{t_0}^t f(x)dx + c \quad t_0 \in I \quad (2.2)$$

con  $c \in \mathbb{R}$ . Ne consegue che con la sola ipotesi di continuit  di  $f$  si ottengono

infinite soluzioni: la soluzione contiene infatti i parametri  $t_0$  e  $c$ , che in assenza di altre condizioni si possono lasciar variare. Tuttavia i due parametri *non* sono indipendenti, nel senso che a coppie distinte di valori di  $t_0$  e di  $c$  non corrispondono necessariamente soluzioni distinte della (2.1).

Si ha infatti che le funzioni (2.2) con  $(t_0, c) = (t_i, u_i)$ ,  $i = 1, 2$  sono la stessa funzione se e solo se i dati sono legati dalla relazione

$$\int_{t_1}^{t_2} f(x)dx = u_2 - u_1.$$

Fissato invece  $t_0$  una volta per tutte, al variare di  $c$  si ottengono ancora tutte le soluzioni e a diversi valori di  $c$  corrispondono soluzioni diverse. Si dice perciò che le soluzioni dell'equazione data dipendono da una costante additiva arbitraria.

Nelle ipotesi precedenti, fissati  $t_0 \in I$  e  $u_0 \in \mathbb{R}$ , consideriamo ora il seguente sistema e cerchiamone le soluzioni (ovvero le funzioni derivabili in  $I$ ):

$$\begin{cases} u'(t) = f(t) & \forall t \in I \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Il sistema sopra é detto *problema di Cauchy* con condizione  $u(t_0) = u_0$ .

I teoremi fondamentali del calcolo forniscono un risultato non solo di esistenza, ma anche di unicitá per il problema sopra, nell'ipotesi di continuitá di  $f$ . In tali condizioni infatti, la funzione

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(x)dx, \quad t \in I \tag{2.3}$$

risolve la prima equazione del sistema sopra (per il *Primo teorema fondamentale*) e ovviamente anche la condizione sottostante.

Viceversa, se  $u$  risolve il problema di Cauchy (sempre supponendo  $f$  continua), allora  $u$  é di classe  $C^1$  e, per il *Secondo teorema fondamentale*, abbiamo



$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^t u'(x)dx = u_0 + \int_{t_0}^t f(x)dx.$$

Questo ragionamento si può riassumere nel seguente teorema, che appare come la somma dei due teoremi fondamentali:

**Teorema 2.1.1** (Teorema fondamentale). *Siano  $I$  un intervallo,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua,  $t_0 \in I$  e  $u_0 \in \mathbb{R}$ . Allora il problema di Cauchy ha una e una sola soluzione che è data da (2.3).*

Siano  $f_1, f_2, \dots, f_n$  delle funzioni nelle  $n + 1$  variabili reali  $t, u_1, u_2, \dots, u_n$ , definite in un aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Un sistema di equazioni differenziali è un sistema di  $n$  equazioni

$$\begin{cases} u_1' = f_1(t, u_1, \dots, u_n) \\ u_2' = f_2(t, u_1, \dots, u_n) \\ \dots \\ u_n' = f_n(t, u_1, \dots, u_n) \end{cases}$$

nelle  $n$  funzioni incognite  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)$ .

**Definizione 2.1.2.** Una  $n$ -upla di funzioni derivabili  $u_1(t), \dots, u_n(t)$ , definite in un intervallo  $I \subset \mathbb{R}$ , è una soluzione del sistema se:

- per ogni  $t \in I$  il punto di coordinate  $(t, u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))$  appartiene ad  $A$ ;
- per ogni  $t \in I$  si ha

$$\begin{cases} u_1'(t) = f_1(t, u_1(t), \dots, u_n(t)) \\ u_2'(t) = f_2(t, u_1(t), \dots, u_n(t)) \\ \dots \\ u_n'(t) = f_n(t, u_1(t), \dots, u_n(t)) \end{cases} \quad (2.4)$$

La prima condizione é necessaria affinché abbia senso la seconda, dato che le funzioni  $f_1, \dots, f_n$  sono definite in  $A$ . In genere però essa viene sottintesa a vantaggio della seconda, che é ovviamente la condizione che caratterizza la soluzione.

Se indichiamo con  $\mathbf{u}(t)$  la funzione a valori in  $\mathbb{R}^n$  di componenti  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  e con  $\mathbf{f}$  l'applicazione di  $A$  in  $\mathbb{R}^n$  di componenti  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  il sistema (2.4) assume la forma:

$$\mathbf{u}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}).$$

Un tale sistema di equazioni differenziali si dice che é *in forma normale* (perché la derivata prima é isolata al primo membro) e *del primo ordine* (perché vi compaiono solo le funzioni incognite e le loro derivate prime).

Piú in generale, si possono presentare  $n$  relazioni fra una variabile indipendente  $t$ ,  $m$  funzioni incognite della variabile  $t$  e le loro derivate fino ad un certo ordine. Si ottiene allora un sistema di equazioni differenziali ordinarie, della forma

$$F_i(t, u'_1, \dots, u_1^{(\nu_1)}, \dots, u'_m, \dots, u_m^{(\nu_m)}) = 0 \quad i = 1, \dots, n.$$

Il numero  $\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_m$  si chiama *ordine del sistema*, ed ogni  $m$ -upla di funzioni che lo soddisfa si chiama *soluzione* o *integrale* del sistema.

Cosí come un'equazione é detta *normale* se é possibile isolare la derivata piú grande che compare, un sistema é di tipo *normale* se ciò vale per ogni equazione che vi compare.

A questo punto é importante sottolineare che un sistema in cui compaiono derivate di ordine superiore al primo si può sempre ricondurre a un sistema del primo ordine introducendo incognite ausiliarie; in generale un'equazione differenziale di ordine  $k$  é equivalente a un sistema di  $k$  equazioni del primo ordine (cioé a un sistema del primo ordine) in  $k$  funzioni incognite, ponendo:

$$u(t) = u_1(t), \quad u'(t) = u_2(t), \quad \dots, \quad u^{(n-1)}(t) = u_n(t).$$

Ciò equivale a dire che una funzione  $u(t)$  che soddisfa l'equazione

$$u^{(n)} = f(t, u, u', \dots, u^{(n-1)})$$

soddisfa il sistema

$$u'_1 = u_2; \quad u'_2 = u_3; \quad \dots \quad ; u'_{n-1} = u_n; \quad u'_n = f(t, u_1, u_2, \dots, u_n)$$

e viceversa, una soluzione  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)$  di questo sistema fornisce una soluzione dell'equazione  $F(t, u, u', \dots, u^{(n)}) = 0$  e le sue derivate.

## 2.2 Il problema di Cauchy

Presa  $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ , con  $A$  aperto di  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\mathbf{u} : I = I(t_0, r) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , consideriamo il problema dato da

$$\begin{cases} \mathbf{u}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}) \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0 = (u_1^{(0)}, \dots, u_n^{(0)}) \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (2.5)$$

La determinazione della soluzione dell'equazione differenziale (o sistema di equazioni differenziali) mediante le relative condizioni iniziali prende il nome di *problema di Cauchy*.

Supponiamo che  $\mathbf{f}$  sia continua e che  $\mathbf{u}(t)$  sia una funzione di classe  $C^1$  in un intorno  $I = I(t_0, r)$  del punto  $t_0$ , soluzione del problema di Cauchy. Integrando tra  $t_0$  e  $t$  si ottiene:

$$\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_0 = \int_{t_0}^t \mathbf{u}'(s) ds = \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{u}(s)) ds,$$

cosicché  $\mathbf{u}(t)$  soddisfa l'equazione integrale

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{u}(s)) ds. \quad (2.6)$$

Viceversa, se  $\mathbf{u}(t)$  é una soluzione *continua* in  $I(t_0, r)$  della (2.6), allora si ha  $\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0$  e inoltre  $\mathbf{u}(t)$  é una primitiva della funzione continua  $\mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t))$  e dunque é di classe  $C^1$  e verifica l'equazione differenziale  $\mathbf{u}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{u})$ .

La (2.6) costituisce un sistema di equazioni integrali *del tipo di Volterra*; tale sistema risulta, come si é detto, equivalente al problema di Cauchy scritto sopra.

Riassumendo, *la funzione  $\mathbf{u}(t)$  é soluzione del problema di Cauchy se e solo se é una soluzione continua dell'equazione integrale (2.6).*

Consideriamo ora la funzione  $\mathbf{f}(t, \mathbf{u}) = (f_1(t, \mathbf{u}), f_2(t, \mathbf{u}), \dots, f_n(t, \mathbf{u}))$ ; se il punto di coordinate  $(t_0, \mathbf{u}_0)$  é in  $A$  si puó supporre che esista un intorno  $I = I(t_0, r_1)$  di  $t_0$  e un intorno  $\mathbf{J} = I(\mathbf{u}_0, r_2)$  di  $\mathbf{u}_0$  tali che  $\overline{I \times \mathbf{J}}$  sia contenuto in  $A$ .

**Teorema 2.2.1** (Teorema di esistenza e unicita' della soluzione del *Problema di Cauchy*). *Data la funzione  $\mathbf{f}(t, \mathbf{u})$  definita in un aperto  $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , supponiamo che siano verificate le seguenti ipotesi:*

- $\mathbf{f}(t, \mathbf{u})$  continua in  $A$ ;
- $\mathbf{f}$  lipschitziana rispetto alle variabili  $u_1, u_2, \dots, u_n$  <sup>(1)</sup> e uniformemente

---

<sup>1</sup>Diremo che  $\mathbf{f}(t, u_1, \dots, u_n)$  é lipschitziana rispetto alla variabile  $u_s$  se, per ogni  $(t, u_1, \dots, \bar{u}_s, \dots, u_n), (t, u_1, \dots, \bar{\bar{u}}_s, \dots, u_n) \in A$  esiste una costante  $L_s$  tale che

$$|\mathbf{f}(t, u_1, \dots, \bar{u}_s, \dots, u_n) - \mathbf{f}(t, u_1, \dots, \bar{\bar{u}}_s, \dots, u_n)| \leq L_s |\bar{u}_s - \bar{\bar{u}}_s|.$$

Si puó verificare che una funzione  $\mathbf{f}(t, u_1, \dots, u_n)$ , lipschitziana rispetto a ciascuna variabile  $u_s$  é lipschitziana rispetto al complesso delle  $(t, u_1, \dots, u_n)$  se l'insieme  $A$  é un dominio rettangolare, cioé la funzione verifica la disuguaglianza:

$$|\mathbf{f}(t, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n) - \mathbf{f}(t, \bar{\bar{u}}_1, \dots, \bar{\bar{u}}_n)| \leq L \sum_{s=1}^n |\bar{u}_s - \bar{\bar{u}}_s| \quad (2.7)$$

rispetto a  $t$ .

Indichiamo poi con  $M$  il massimo della funzione  $|f_i(t, \mathbf{u})| \in \overline{I \times \mathbf{J}}$ , ( $i = 1, \dots, n$ ), e con  $\delta$  un numero reale verificante la relazione

$$0 < \delta < \min\{r_1, r_2/M\}. \quad (2.8)$$

Allora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{u}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}) \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}^{(0)} \end{cases}$$

ha un'unica soluzione in  $I_0 = I(t_0, \delta)$ , ovvero nell'intorno specificato esistono uniche  $(u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))$  continue e derivabili soddisfacenti il problema di Cauchy.

Questo teorema ha oggi varie dimostrazioni, riconducibili a due metodi fondamentali:

la *prima dimostrazione* si basa su un metodo che utilizza argomenti di analisi reale e ha il pregio di mostrare come costruire operativamente una soluzione attraverso approssimazioni successive, e di dare una stima generalmente piú accurata dell'ampiezza  $\delta$  dell'intervallo di definizione della soluzione;

la *seconda dimostrazione* sfrutta invece concetti di analisi funzionale che sono stati sviluppati in studi successivi.

La prima dimostrazione del teorema, quella "classica", che fa uso della lipschitzianitá e delle successioni di funzioni (iterate di Picard), é un risultato che si é costruito e generalizzato in molti anni, perché dovuto a vari matematici, come Lipschitz, Peano, Picard, Lindelof ed altri in precedenza.

In particolare:

---

dove  $L$  é una costante indipendente dai punti  $(t, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n), (t, \bar{\bar{u}}_1, \dots, \bar{\bar{u}}_n)$  del dominio rettangolare  $A$ .

- nel 1868 Lipschitz fu il primo a mettere in luce che l'ipotesi di lipschitzianità fosse decisiva per l'unicità della soluzione [Li];
- nel 1887 Peano usó una successione di funzioni definita per ricorrenza per dimostrare il teorema per le equazioni differenziali lineari [Pe2];
- nel 1890 Picard generalizzó il metodo di Peano [Pi];
- nel 1894 Lindelof generalizzó il metodo di Picard [Ln].

La dimostrazione definitiva che si utilizza tutt'oggi é però quella formalizzata da E. J. B. Goursat [G].

I metodi di tipo funzional-analitico vennero proposti dopo, perché questo tipo di teoria é stata sviluppata compiutamente da Banach e Caccioppoli attorno agli anni 1922-1931, parecchi anni dopo l'articolo di Lipschitz.

In realtà, i primi metodi ad essere applicati non furono i quelli di punto fisso (alla Banach-Caccioppoli), su cui si basa la dimostrazione che riporto sotto, ma quelli di compattezza basati sul teorema di Ascoli-Arzelá. In particolare:

- il metodo con il quale Cauchy stesso (attorno al 1820-30) diede la prima dimostrazione del teorema é basato sulla costruzione di una famiglia di spezzate (idea che risalí a sua volta a Eulero, nel 1876) dalla quale, per approssimazione, si arriva alla soluzione del problema (una dimostrazione di questo tipo si ritrova in [M]): nella dimostrazione si richiedeva la continuità delle derivate del secondo membro dell'equazione  $u' = f(t, u)$ ;
- nel 1885 Peano intuí e dimostró che la sola ipotesi di continuità del secondo membro fosse sufficiente a garantire l'esistenza locale di una soluzione [Pe1], ma non l'unicità;
- nel 1895 Arzelá diede una dimostrazione “pulita” del teorema di esistenza basata sul teorema di Ascoli-Arzelá ([Ar3], [Ar4]).

Un'altra dimostrazione, in cui si usa sempre il teorema di Ascoli-Arzelá, si puó ottenere particolareggiando un metodo di Tonelli per determinare le soluzioni di equazioni integrali di Volterra che si trova in [T].

Sempre in questa direzione va citato un teorema di esistenza di Caratheodory (vedi [CL, II, 1, Theorem 1.1]) in cui sono richieste sul secondo membro condizioni ancora piú deboli della continuitá per l'esistenza di soluzioni - generalizzate. In quest'ottica, la lipschitzianitá del secondo membro serve unicamente a garantire l'unicitá della soluzione e quindi, la dimostrazione di unicitá sotto le ipotesi di Lipschitz deve essere fatta a parte.

Come detto in precedenza, il teorema di punto fisso di Banach é del 1922 ([B1, II, 2, Thorme 6]) e fu generalizzato da Caccioppoli nel 1931 [Cc], lo stesso anno in cui venne pubblicato il testo di Banach sugli operatori lineari [B2]. Mentre nell'articolo di Banach le applicazioni del teorema di punto fisso sono rivolte alla soluzione di equazioni integrali, nell'articolo di Caccioppoli le applicazioni del teorema riguardano l'esistenza di soluzioni a problemi a valori iniziali per EDO e PDE. Un vantaggio di questo metodo di punto fisso rispetto al metodo di compattezza é che esso consente di recuperare in un sol colpo anche l'unicitá locale della soluzione.

### **Prima dimostrazione:**

*Premessa:* Siano  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)$   $n$  funzioni definite in  $[t_0 - r_1; t_0 + r_1]$  tali che  $|u_i(t) - u_i^{(0)}| < r_2$ , e consideriamo la trasformazione funzionale:

$$\phi_i(t) = u_i^{(0)} + \int_{t_0}^t f_i(s, u(s)) ds. \quad (2.9)$$

Questa fa corrispondere al sistema di funzioni  $u_1(t), \dots, u_n(t)$  un nuovo sistema di funzioni  $\phi_1(t), \dots, \phi_n(t)$  tali che:

$$\phi_i(t_0) = u_i^{(0)}.$$

Il problema di trovare una soluzione del sistema integrale (2.6) equivale allora alla determinazione di un sistema di funzioni continue che venga trasformato in sé stesso dalla trasformazione funzionale (2.9). Per dimostrare l'esistenza di questo sistema di funzioni “unito” per la trasformazione (2.9), stando le ipotesi formulate nell'enunciato del teorema, si utilizzerà perciò il metodo delle *approssimazioni successive*. Per fare ciò, considerato un sistema di funzioni, é necessario trasformarlo mediante la trasformazione (2.9), ottenendo un nuovo sistema di funzioni; ripetendo questa operazione otterremo un nuovo sistema di funzioni e cosí via. La successione di tali sistemi di funzioni converge ad un sistema che risulta essere appunto il sistema di funzioni “unito” cercato.

**(Esistenza):**

Consideriamo un sistema qualunque di funzioni continue a valori in  $\mathbb{R}$ , ad esempio il seguente sistema di funzioni costanti

$$u_1^{(0)}(t) \equiv u_1^{(0)}; \quad u_2^{(0)}(t) \equiv u_2^{(0)}; \quad \dots; \quad u_n^{(0)}(t) \equiv u_n^{(0)}.$$

e poniamo

$$u_i^{(1)}(t) = u_i^{(0)} + \int_{t_0}^t f_i(s, u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \dots, u_n^{(0)}) ds \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.10)$$

Per  $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  si ha:

$$|u_i^{(1)}(t) - u_i^{(0)}| \leq M|t - t_0| \leq M\delta \leq r_2 \quad (2.11)$$

e pertanto per  $t \in [t_0 - \delta; t_0 + \delta]$  sono definite le funzioni composte  $f_i(t, \mathbf{u}^{(1)}(t))$ . Poniamo allora:

$$u_i^{(2)}(t) = u_i^{(0)} + \int_{t_0}^t f_i(s, \mathbf{u}^{(1)}(s)) ds \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.12)$$



e si osserva che si ha ancora per  $t \in [t_0 - \delta; t_0 + \delta]$ :

$$|u_i^{(2)}(t) - u_i^{(0)}| \leq M|t - t_0| \leq M\delta \leq r_2.$$

Si prosegue così, ponendo in generale:

$$u_i^{(m)}(t) = u_i^{(0)} + \int_{t_0}^t f_i(s, \mathbf{u}^{(m-1)}(s)) ds \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.13)$$

Supposto che per  $t \in [t_0 - \delta; t_0 + \delta]$  si abbia  $|u_i^{(m-1)}(t) - u_i^{(0)}| \leq r_2$ , segue che nello stesso intervallo si ha:

$$|u_i^{(m)}(t) - u_i^{(0)}| \leq M|t - t_0| \leq M\delta \leq r_2. \quad (2.14)$$

Rimangono così definite per  $t \in [t_0 - \delta; t_0 + \delta]$  le successioni di funzioni continue:

$$u_i^{(0)}(t), \quad u_i^{(1)}(t), \quad \dots, \quad u_i^{(m)}(t), \quad \dots \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.15)$$

Dimostriamo ora che tali successioni convergono uniformemente (anzi totalmente) nell'intervallo  $[t_0 - \delta; t_0 + \delta]$ . Per questo si considerino le serie di funzioni:

$$u_i^{(0)}(t) + [u_i^{(1)}(t) - u_i^{(0)}(t)] + [u_i^{(2)}(t) - u_i^{(1)}(t)] + \dots + [u_i^{(m)}(t) - u_i^{(m-1)}(t)] + \dots \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.16)$$

le cui somme parziali coincidono con i termini della successione (2.15), e dimostriamo che queste serie convergono uniformemente nell'intervallo  $[t_0 - \delta; t_0 + \delta]$ . Per fare ciò é necessario sottrarre membro a membro la (2.10) e la (2.12) e tenere conto della (2.11) e della (2.7), così da ottenere:

$$|u_i^{(2)}(t) - u_i^{(1)}(t)| \leq \left| \int_{t_0}^t |f_i(s, \mathbf{u}^{(1)}(s)) - f_i(s, \mathbf{u}^{(0)}(s))| ds \right| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq L \left| \int_{t_0}^t \left\{ \sum_{p=1}^n |u_p^{(1)}(s) - u_p^{(0)}| \right\} ds \right| \leq LnM \left| \int_{t_0}^t |s - t_0| ds \right| = \\ &= LnM \frac{|t - t_0|^2}{2}. \end{aligned}$$

Supposto, per induzione, che in  $[t_0 - \delta; t_0 + \delta]$  si abbia

$$|u_i^{(m-1)}(t) - u_i^{(m-2)}(t)| \leq L^{m-2} n^{m-2} M \frac{|t - t_0|^{m-1}}{(m-1)!}$$

si deduce, in modo analogo:

$$\begin{aligned} |u_i^{(m)}(t) - u_i^{(m-1)}(t)| &\leq \left| \int_{t_0}^t |f_i(s, u_1^{(m-1)}(s), \dots, u_n^{(m-1)}(s)) - f_i(s, u_1^{(m-2)}(s), \dots, \right. \\ &\quad \left. u_n^{(m-2)}(s))| ds \right| \leq L \left| \int_{t_0}^t \left\{ \sum_{p=1}^n |u_p^{(m-1)}(s) - u_p^{(m-2)}(s)| \right\} ds \right| \leq \\ &Ln \left| \int_{t_0}^t L^{m-2} n^{m-2} M \frac{|s - t_0|^{m-1}}{(m-1)!} ds \right| = L^{m-1} n^{m-1} M \frac{|t - t_0|^m}{m!}. \end{aligned}$$

Quindi, questa relazione vale qualunque sia  $m$ , cioè il termine generale delle serie (2.16) é per  $t \in [t_0 + \delta; t_0 - \delta]$  maggiorato dal termine

$$\frac{M (n \cdot L \cdot \delta)^m}{nL m!} \quad (2.17)$$

di una serie esponenziale. La serie (2.16), e quindi la successione (2.15), sono pertanto uniformemente convergenti nell'intervallo  $[t_0 + \delta, t_0 - \delta]$ . Indichiamo con  $u_1(t), \dots, u_n(t)$  le somme delle (2.16) e quindi le funzioni limiti delle successioni (2.15). Tali funzioni sono continue nell'intervallo  $[t_0 + \delta, t_0 - \delta]$  e soddisfano alle relazioni  $|u_i(t) - u_i^{(0)}| \leq r_2$  per  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Resta da dimostrare che tale sistema di funzioni é appunto il sistema di funzioni continue che soddisfa il sistema integrale (2.6) cioè il sistema di funzioni “unito” per la trasformazione (2.9). Questo discende dalla (2.13) se si riesce a dimostrare che é lecito il passaggio al limite sotto il segno di

integrale che compare in questa relazione. Si tratta allora di dimostrare che le successioni:

$$f_i(t, \mathbf{u}^{(m)}(t))$$

convergono uniformemente in  $[t_0 - \delta; t_0 + \delta]$  alle funzioni:

$$f_i(t, \mathbf{u}(t)).$$

Si ha infatti, ricordando (2.7):

$$|f_i(t, \mathbf{u}^{(m)}(t)) - f_i(t, \mathbf{u}(t))| \leq L \sum_{p=1}^n |u_p^{(m)}(t) - u_p(t)|.$$

Ma l'espressione  $|u_p^{(m)}(t) - u_p(t)|$  non é altro che resto  $(m + 1)$ -esimo della serie (2.16) il quale, per quanto visto, é minore del resto  $(m + 1)$ -esimo della serie il cui termine generale é dato dalla (2.17), che tende a zero per  $m \rightarrow \infty$  uniformemente rispetto a  $t$ .

Per quanto riguarda la dimostrazione dell'unicitá della soluzione, riporto di seguito due dimostrazioni alternative: la prima é una tipica dimostrazione per assurdo, mentre la seconda mette in mostra la valutazione dell'errore nel processo delle approssimazioni successive.

**(Unicitá-1):**

Supponiamo che esistano due soluzioni del problema di Cauchy considerato: siano  $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}(t)$  e  $\mathbf{U} \equiv \mathbf{U}(t)$ , in modo tale che si abbia:

$$u_i(t) = u_i^{(0)} + \int_{t_0}^t f_i(s, \mathbf{u}(s)) ds$$

$$U_i(t) = u_i^{(0)} + \int_{t_0}^t f_i(s, \mathbf{U}(s)) ds$$

Sottraendo membro a membro queste due relazioni e tenendo conto della (2.7) si ottiene:

$$|u_i(t) - U_i(t)| \leq L \left| \int_{t_0}^t \sum_{p=1}^n |u_p(s) - U_p(s)| ds \right|. \quad (2.18)$$

Consideriamo allora nell'intervallo  $[t_0; t_0 + \delta]$  la funzione  $\phi(t)$  cosí definita:

$$\phi(t) = \sum_{p=1}^n \max_{t_0 \leq s \leq t} |u_p(s) - U_p(s)|$$

la quale evidentemente é non negativa e non decrescente ed il suo annullarsi esprime la coincidenza dei due sistemi di soluzioni. Supposto che essa non sia identicamente nulla, esisterá allora un valore  $t_1$  dell'intervallo  $[t_0; t_0 + \delta]$  tale che si abbia:  $\phi(t) = 0$  per  $t_0 \leq t \leq t_1$  e  $\phi(t) > 0$  per  $t > t_1$ . Ma dalla (2.18) si deduce allora:

$$|u_i(t) - U_i(t)| \leq L \int_{t_1}^t \sum_{p=1}^n |u_p(s) - U_p(s)| ds,$$

da cui:

$$\max_{t_0 \leq s \leq t} |u_i(s) - U_i(s)| \leq L \sum_{p=1}^n \max_{t_0 \leq s \leq t} |u_p(s) - U_p(s)| (t - t_1),$$

e cioé:

$$\phi(t) \leq nL(t - t_1)\phi(t).$$

Questa relazione é chiaramente assurda, per cui si conclude che in tutto l'intervallo  $[t_0, t_0 + \delta]$  deve essere  $\phi(t) \equiv 0$  e quindi le due soluzioni devono coincidere in questo intervallo. In modo analogo si dimostra che le funzioni devono coincidere anche nell'intervallo  $[t_0 - \delta, t_0]$  e cosí si dimostra l'asserto.

*(Unicit -2):*

Tramite la dimostrazione di esistenza abbiamo mostrato che la soluzione del problema di Cauchy   il limite della successione delle approssimazioni successive definite per induzione mediante la (2.13). Dimosteremo ora che ogni altra eventuale soluzione dello stesso problema di valori iniziali   limite della stessa successione, e pertanto deve coincidere con quella trovata nella dimostrazione del teorema di esistenza.

Infatti, detta  $\mathbf{U} \equiv \mathbf{U}(t)$  un'altra soluzione dello stesso problema di valori iniziali, cio  un sistema di funzioni per le quali si abbia in  $[t_0 - \delta; t_0 + \delta]$ :

$$U_i(t) = u_i^{(0)} + \int_{t_0}^t f_i(s, U_1(s), \dots, U_n(s)) ds \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2.19)$$

si ha intanto:

$$|U_i(t) - u_i^{(0)}| \leq M|t - t_0|.$$

Sottraendo membro a membro dalla (2.19) la (2.10), tenendo conto della (2.7) si ha:

$$|U_i(t) - u_i^{(1)}(t)| \leq \left| \int_{t_0}^t |f_i(s, U_1(s), \dots, U_n(s)) - f_i(s, u_1^{(0)}(s), \dots, u_n^{(0)}(s))| ds \right|$$

$$L \left| \int_{t_0}^t \sum_{p=1}^n |U_p(x) - u_p^{(0)}(s)| ds \right| \leq nLM \frac{|t - t_0|^2}{2!}$$

Procedendo per induzione, in modo analogo a quanto fatto per dimostrare il teorema di esistenza, si trova:

$$|U_i(t) - u_i^{(m)}(t)| \leq \frac{M}{nL} \frac{(nL|t - t_0|)^{m+1}}{(m+1)!}. \quad (2.20)$$

Poich  il secondo membro tende a zero per  $m$  tendente all'infinito, si conclude come si voleva.

Da quanto dimostrato finora si deduce che approssimazioni successive ottenute con la (2.13) forniscono dei valori approssimati della soluzione e l'ultima relazione trovata (2.20) fornisce anche l'errore che si commette sostituendo la  $m$ -esima approssimazione data dalla (2.13) con la soluzione.

### Seconda dimostrazione:

Per dimostrare il teorema é necessario mostrare che l'equazione integrale (2.6) ha soluzione unica in  $I_0 = I(t_0, \delta)$ . Indichiamo con  $C(I_0)$  lo spazio metrico delle funzioni continue e limitate in  $I_0$ , e sia

$$X = \{\mathbf{u} \in C(I_0) : \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|_\infty \leq r_2\},$$

dove  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\| = \sup_{t \in I_0} |\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_0|$ .

Poiché  $X$  é un sottoinsieme chiuso di  $C(I_0)$ ,  $X$  é uno spazio metrico completo. Consideriamo l'applicazione  $\mathbf{F}$  che ad ogni funzione  $\mathbf{v} \in X$  associa la funzione  $\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{v})$  definita da

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{u}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{v}(s)) ds.$$

La funzione  $\mathbf{y}(t)$  é continua, e inoltre si ha, per ogni  $t \in I$ ,

$$|\mathbf{y}(t) - \mathbf{u}_0| \leq \left| \int_{t_0}^t |\mathbf{f}(s, \mathbf{v}(s))| ds \right| \leq M|t - t_0| < M\delta < r_2,$$

e quindi

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{v}) - \mathbf{u}_0\|_\infty \leq r_2,$$

cioé  $\mathbf{F}$  manda  $X$  in sé.

É chiaro che un punto unito di  $\mathbf{F}$  sarà soluzione dell'equazione integrale (2.6); infatti se  $\mathbf{u}$  é un punto unito si ha

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{u})(t) = \mathbf{u}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{u}(s)) ds.$$

Ricordando il *teorema delle contrazioni*, avremo dimostrato l'esistenza e l'unicità di un punto unito mostrando che  $\mathbf{F}$  é una contrazione.

Siano  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w} \in \mathbf{X}$  e sia  $\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{v})$ ,  $\mathbf{z} = \mathbf{F}(\mathbf{w})$ . Risulta:

$$\mathbf{y}(t) - \mathbf{z}(t) = \int_{t_0}^t \{\mathbf{f}(s, \mathbf{v}(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{w}(s))\} ds,$$

e quindi

$$|\mathbf{y}(t) - \mathbf{z}(t)| \leq \left| \int_{t_0}^t \{\mathbf{f}(s, \mathbf{v}(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{w}(s))\} ds \right| \leq L \int_{t_0}^t |\mathbf{v}(s) - \mathbf{w}(s)| ds \leq L\delta \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|_\infty.$$

Si ha allora

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{v}) - \mathbf{F}(\mathbf{w})\|_\infty \leq L\delta \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|_\infty,$$

e, poiché  $L\delta < 1$ , l'applicazione  $\mathbf{F}$  é una contrazione, perciò, per il *teorema delle contrazioni* ha un unico punto unito e dunque il problema di Cauchy (2.2.1) ha soluzione unica in  $I_0(t_0, \delta)$ .

Riporto qui di seguito alcune osservazioni relative al teorema appena dimostrato, supponendo, per comodità  $n = 1$ .

*Osservazione 2.2.2.* La seconda ipotesi del teorema (lipschitzianità), che può sembrare piuttosto difficile da verificarsi, é automaticamente soddisfatta se  $f$  ha derivata continua rispetto ad  $u$ .

Per  $t$  fissato, la funzione  $f(t, u)$  si può considerare come solo funzione della variabile  $u$ . Supponiamo che questa funzione sia derivabile (rispetto alla variabile  $u$ ) e che la derivata prima, che indicheró con  $\partial f / \partial u(t, u)$  sia una

funzione continua in  $A$ . Sia  $t \in I$  e siano  $u, v \in J$ . Applicando il teorema del valor medio, si ottiene

$$f(t, v) - f(t, w) = \frac{\partial f}{\partial u}(t, \xi)(v - w),$$

dove  $\xi$  é un punto compreso tra  $v$  e  $w$ . Se si indica con  $L$  il massimo di  $\partial f/\partial u$  in  $\overline{I \times J}$  (tale massimo esiste perché  $\partial f/\partial u$  é continua), si ha

$$|f(t, v) - f(t, w)| \leq L|v - w|$$

e quindi  $f$  soddisfa la seconda ipotesi del teorema.

*Osservazione 2.2.3* (“geometrica”). Il teorema implica che i grafici di due soluzioni distinte  $u$  e  $v$  di una stessa equazione differenziale non si possono intersecare. Infatti, se per qualche valore  $t_1$  di  $t$  risultasse  $u(t_1) = v(t_1)$ , per l’unicità della soluzione dovrebbe essere  $u(t) \equiv v(t)$  in un intorno di  $t_1$ , e quindi su tutto il dominio, per la continuità di  $u$  e  $v$ .

*Osservazione 2.2.4.* Come abbiamo scritto sopra, nel 1885 Peano dimostró che tramite la sola ipotesi che  $f(t, u)$  sia una funzione continua su  $A$  si può dimostrare che esiste una soluzione per il problema di Cauchy; in generale essa non sarà unica.

*Esempio:* Il problema

$$\begin{cases} u' = 3u^{2/3} \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

ammette sia la soluzione  $u(t) = 0$ , sia  $u(t) = t^3$ . Si noti che la funzione  $f(t, u) = 3u^{2/3}$  non verifica la condizione di lipschitzianità in nessun intorno del punto  $(0, 0)$ .

*Osservazione 2.2.5.* Se la funzione  $f(t, u)$  é di classe  $C^k$  nei suoi argomenti, le soluzioni  $u$  dell’equazione  $u' = f(t, u)$  saranno di classe  $C^{k+1}$ .



*Dimostrazione:* (per induzione). Quanto affermato é vero per  $k = 0$ . Supponiamo che sia vero anche per  $k$  e dimostriamolo per  $k + 1$ .

Sia dunque  $f \in C^{k+1}$ , e sia  $u$  una soluzione di  $u' = f(t, u)$ . La funzione sará in particolare di classe  $C^k$ , e dunque, poiché il risultato si é supposto vero per  $k$ , si puó concludere che  $u \in C^{k+1}$ . Ma allora la funzione composta  $F(t) = f(t, u(t))$  é di classe  $C^{k+1}$ . D'altra parte risulta  $u'(t) = F(t)$ , da cui si conclude che  $u \in C^{k+2}$  e con ció il teorema é dimostrato. In particolare, se  $f \in C^\infty$ , anche  $u$  sará infinitamente derivabile.

*Osservazione 2.2.6.* Abbiamo giá visto che un'equazione differenziale di ordine  $k$  é equivalente a un sistema di  $k$  equazioni del primo ordine. In generale, il problema di Cauchy per un'equazione di ordine  $k$ :

$$u^{(k)} = f(t, u, u', u^{(2)}, \dots, u^{(k-1)})$$

consiste nell'assegnare al tempo  $t_0$  i valori della funzione  $u$  e delle sue derivate fino all'ordine  $k - 1$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t_0) = u_0 \\ u'(t_0) = u_1 \\ u''(t_0) = u_2 \\ \dots \\ u^{(k-1)}(t_0) = u_{k-1} \end{array} \right.$$

Un tale problema ha soluzione unica in un intorno di  $t_0$ .

## 2.3 Prolungamento delle soluzioni

Il *teorema di esistenza e unicitá per le soluzioni del problema di Cauchy* ci garantisce l'esistenza di una soluzione *locale* del problema di Cauchy (2.5), cioé una soluzione definita in un intorno  $I(t_0, \delta)$  del punto iniziale  $t_0$  con  $\delta$  individuato dalla relazione (2.16).

Si vuole ora vedere se é possibile *prolungare* tale soluzione in intervalli contenenti  $I(t_0, \delta)$ , fino ad ottenere una soluzione definita sul piú grande intervallo possibile.

**Definizione 2.3.1.** Siano  $u_1$  e  $u_2$  due soluzioni dell'equazione  $u' = f(t, u)$ , negli intervalli  $I_1 = (a_1, b_1)$  e  $I_2 = (a_2, b_2)$  rispettivamente. Si dice che  $u_2$  é un prolungamento di  $u_1$ , se  $I_1 \subset I_2$  e se in  $I_1$  risulta  $u_1 = u_2$ .

Una soluzione dell'equazione  $u' = f(t, u)$  si dice *massimale* se non ammette nessun prolungamento.

Mostriamo che in linea generale l'intervallo in cui é definita la soluzione puó essere piú esteso di  $I(t_0, \delta)$ : la funzione  $u(t)$  determinata dall'intervallo  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  assume per  $t = t_0 + \delta$  il valore  $u(t_0 + \delta)$  e questo puó essere considerato come condizione iniziale di un problema di Cauchy relativo allo stesso sistema. La soluzione di questo sistema sará allora definita, sempre a norma dello stesso teorema, in un intervallo  $[t_0 + \delta - \delta_1, t_0 + \delta + \delta_1]$ , dove  $\delta_1$  dipenderá dal massimo che la funzione  $|f(t, u)|$  assume nel dominio rettangolare di  $\mathbb{R}^2$  del tipo:

$$t_0 + \delta - a_1 \leq t \leq t_0 + \delta + a_1$$

$$u(t_0 + \delta) - b_1 \leq u \leq u(t_0 + \delta) + b_1$$

contenuto nell'insieme dove sono definite le funzioni  $f(t, u)$ . Le due soluzioni, quella primitiva e questa ora ottenuta, per il teorema di unicitá devono coincidere nell'intervallo  $[t_0 + \delta - \delta_1, t_0 + \delta]$  e pertanto la nuova soluzione é il *prolungamento* della precedente soluzione in un intervallo piú ampio. Ripetendo piú volte questo ragionamento si giungerá ad un intervallo piú ampio del primitivo dove é definita la soluzione: in casi particolari si potrà arrivare all'intervallo  $[t_0 - a; t_0 + a]$ .

*Esempio:* Mostriamo ora che effettivamente puó non presentarsi questo caso. Consideriamo l'equazione differenziale

$$u' = u^2$$

L'integrale di questa equazione, per cui  $u(0) = 1 > 0$  è la funzione  $u(t) = \frac{1}{1-t}$ , definita nell'intervallo  $[0, 1)$ , che non può prolungarsi a destra perché nel secondo estremo l'integrale diventa infinito.

Il seguente lemma ci garantisce che se per ogni punto  $(t_0, u_0) \in A$  sono verificate le ipotesi del *teorema di esistenza e unicità in piccolo*, non è necessario verificare che  $u_1$  e  $u_2$  coincidano in tutto l'intervallo  $I_1$ : basta infatti che siano uguali in un punto di tale intervallo, perché risultino automaticamente uguali in tutto l'intervallo:

**Lemma 2.3.2.** *Siano  $u_1$  e  $u_2$  due soluzioni dell'equazione  $u' = f(t, u)$  nell'intervallo  $(a, b)$ . Se esiste un punto  $t_1 \in (a, b)$  tale che  $u_1(t_1) = u_2(t_1)$  allora  $u_1 \equiv u_2$  in  $(a, b)$ .*

*Dimostrazione:* Sia  $E$  l'insieme dei punti di  $(t_1, b)$  in cui  $u_1 \neq u_2$ . Supponiamo per assurdo che  $E$  non sia vuoto, e sia  $t_0 = \inf E$ . Risulta  $t_1 \leq t_0 < b$ , e inoltre  $u_1(t_0) = u_2(t_0)$  (questo è ovvio se  $t_0 = t_1$ , mentre se  $t_0 > t_1$  segue dal fatto che  $u_1(t) = u_2(t)$  per  $t_1 \leq t < t_0$  e dalla continuità di  $u_1$  e  $u_2$ ). Per il teorema di esistenza e unicità in piccolo, il problema di Cauchy ha soluzione unica in un intorno  $I$  di  $t_0$ . Ma allora  $u_1 = u_2$  in  $I$ , in contraddizione con la definizione di  $t_0$ . In maniera analoga si esclude la possibilità che risulti  $u_1 \neq u_2$  per qualche punto di  $(a, t_1)$ .

Da quanto appena detto segue un risultato di unicità:

**Corollario 2.3.3.** *Siano  $u_1$  e  $u_2$  due soluzioni del problema di Cauchy (2.5) negli intervalli  $I_1$  e  $I_2$  rispettivamente. Se  $I_1 \subset I_2$ , allora  $u_2$  è un prolungamento di  $u_1$ .*

Passiamo ora a dimostrare l'esistenza di soluzioni massimali.

**Teorema 2.3.4.** *Per ogni soluzione  $u(t)$  dell'equazione  $u' = f(t, u)$  esiste un prolungamento massimale  $\bar{u}$ .*

*Dimostrazione:* Sia  $\mathcal{U}$  l'insieme di tutti i prolungamenti di  $u$ . Ogni  $v \in \mathcal{U}$  é definita in un intervallo  $I_v = (a_v, b_v)$  che contiene  $I_u$ , e coincide con  $u$  in  $I_u$ . Inoltre, se  $v, w \in \mathcal{U}$  risulta per il *Lemma 2.3.2*  $v \equiv w$  in  $I_v \cap I_w$ .

Si ponga:

$$a = \inf_{v \in \mathcal{U}} a_v, \quad b = \sup_{v \in \mathcal{U}} b_v$$

Se  $t \in (a, b)$ , esiste una  $v \in \mathcal{U}$  tale che  $t \in I_v$ .

Per tale  $t$  si ponga  $\bar{u}(t) = v(t)$ . Tale definizione individua univocamente la funzione  $\bar{u}$ ; infatti se  $t \in I_v \cap I_w$ , per quanto detto sopra deve risultare  $v(t) = w(t)$  e quindi  $\bar{u}(t)$  non dipende dalla funzione  $v$  scelta. Mostriamo che  $\bar{u}$  é un prolungamento massimale di  $u$ :  $\bar{u} = u$  in  $I_u$ , dato che tutte le  $v$  di  $\mathcal{U}$  coincidono con  $u$  in  $I_u$ ; inoltre  $\bar{u}$  é una soluzione dell'equazione, perché se  $t \in I_v$  si avrà  $\bar{u} \equiv v$  in un intorno di  $t$ , e dunque  $\bar{u}'(t) = v'(t)$ , cosicché

$$\bar{u}'(t) = v'(t) = f(t, v(t)) = f(t, \bar{u}(t)).$$

La funzione  $\bar{u}$  é dunque un prolungamento di  $u$ ; che sia massimale segue dal fatto che per ogni  $v \in \mathcal{U}$  risulta ovviamente  $I_v \subset (a, b)$ .

Vediamo ora in quali casi sia possibile costruire un prolungamento di una soluzione dell'equazione  $u' = f(t, u)$ .

**Lemma 2.3.5.** *Sia  $u(t)$  una funzione continua nell'intervallo  $(a, b)$  e derivabile in  $(a, b) - \{t_0\}$ ; se esiste finito il limite*

$$\lim_{t \rightarrow t_0} u'(t) = \lambda,$$

*allora  $u$  é derivabile in  $t_0$  e  $u'(t_0) = \lambda$ .*

*Dimostrazione:* Per il teorema del valor medio si ha:

$$\frac{u(t) - u(t_0)}{t - t_0} = u'(\xi),$$

dove  $\xi$  é un opportuno punto compreso tra  $t$  e  $t_0$ . La tesi segue facendo tendere  $t$  a  $t_0$ .

**Proposizione 2.3.6.** *Sia  $u(t)$  una funzione continua in  $(a, b)$  e sia  $t_0 \in (a, b)$ . Supponiamo che  $u$  sia soluzione dell'equazione  $u' = f(t, u)$  negli intervalli aperti  $(a, t_0)$  e  $(t_0, b)$ , e supponiamo inoltre che il punto  $(t_0, u(t_0)) \in A$ . In tal caso  $u$  é soluzione in tutto l'intervallo  $(a, b)$ .*

*Dimostrazione:* Per ogni  $t \neq t_0$  risulta  $u'(t) = f(t, u(t))$ , e quindi basterá dimostrare che  $u$  é derivabile in  $t_0$  e verifica l'equazione. Poiché  $u$  é continua in  $t_0$  e  $f$  é continua in  $A$ , si ha:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} u'(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t, u(t)) = f(t_0, u(t_0)),$$

e la tesi segue dal lemma precedente.

La proposizione sopra suggerisce un caso in cui é possibile prolungare le soluzioni dell'equazione  $u' = f(t, u(t))$ . Supponiamo infatti che  $v(t)$  sia una soluzione nell'intervallo  $(a, t_0)$ , e supponiamo che esista finito il limite

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} v(t) = v_0 \tag{2.21}$$

e che il punto  $(t_0, v_0)$  appartenga ad  $A$ . Per il teorema di esistenza e unicitá in piccolo, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u) \\ u'(t_0) = v_0 \end{cases}$$

ha soluzione unica in un intorno di  $I(t_0, \delta)$  di  $t_0$ . Sia  $w(t)$  tale soluzione, per la proposizione precedente, la funzione

$$u(t) = \begin{cases} v(t) & \text{in } (a, t_0) \\ w(t) & \text{in } [t_0, t_0 + \delta) \end{cases}$$

é soluzione dell'equazione  $u' = f(t, u)$  in  $(a, t_0 + \delta)$ , e dunque é un prolungamento della  $v$ .

Risulta però difficoltoso verificare l'ipotesi (2.21), perciò si preferisce far uso del seguente teorema:

**Teorema 2.3.7.** *Sia  $u(t)$  una soluzione dell'equazione  $u' = f(t, u)$  nell'intervallo  $(a, b)$ . Supponiamo che esista una successione strettamente crescente  $\{t_h\}$  convergente al secondo estremo  $b$ , tale che*

$$\lim_{h \rightarrow \infty} u(t_h) = u_0 \tag{2.22}$$

e che il punto  $(b, u_0) \in A$ .

In tal caso si ha  $\lim_{t \rightarrow b^-} u(t) = u_0$  e dunque la soluzione  $u$  é prolungabile.

In maniera analoga il teorema vale per il primo estremo  $a$ .

*Dimostrazione:* Poiché  $(b, u_0) \in A$ , esisteranno un intorno  $I$  di  $b$  e uno  $J$  di  $u_0$  tali che  $I \times J \subset A$ . Sia  $M = \sup_{I \times J} |f(t, u)|$ .

Per dimostrare il teorema, é necessario mostrare che per ogni  $\epsilon > 0$  esiste un  $j$  tale che se  $t_j < t < b$  risulta  $|u(t) - u_0| < \epsilon$ . Sia  $\epsilon > 0$  così piccolo che si abbia  $I(u_0, \epsilon) \subset J$ ; per la (2.22) esisterá un  $j \in \mathbb{N}$ , tale che  $t_j \in I$  e inoltre

$$|t_j - b| < \frac{\epsilon}{4M}$$

$$|u(t_j) - u_0| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.23}$$

Si deve dimostrare che se  $t_j < t < b$  si ha  $|u(t) - u_0| < \epsilon$ ; per fare ciò, grazie alla (2.23), basta mostrare che  $|u(t) - u(t_j)| < \frac{\epsilon}{2}$ .

Supponiamo per assurdo che la disequazione appena scritta non sia vera, cioè

che l'insieme

$$E = \{t \in (t_j, b) : |u(t) - u(t_j)| \geq \frac{\epsilon}{2}\}$$

non sia vuoto. Sia  $\tau = \inf E$ ; per la continuità di  $u$  risulterà  $|u(\tau) - u(t_j)| = \epsilon/2$ , e dunque  $\tau > t_j$ . D'altra parte, se  $t_j < \xi < \tau$ , si avrà  $|u(\xi) - u(t_j)| < \epsilon/2$  e dunque  $u(\xi) \in J$ , cosicché  $|u'(\xi)| = |f(\xi, u(\xi))| \leq M$ . Ora:  $\epsilon/2 = |u(\tau) - u(t_j)| = |u'(\xi)(\tau - t_j)|$ , dove  $\xi$  é un opportuno punto di  $(t_j, \tau)$ , e quindi  $\epsilon/2 < M|b - t_j| < \epsilon/4$ , che é ovviamente assurdo.

Come corollario del precedente teorema abbiamo il seguente

**Teorema 2.3.8.** *Sia  $u(t)$  una soluzione massimale dell'equazione  $u' = f(t, u)$  e sia  $(a, b)$  il suo intervallo di definizione. Per ogni compatto  $K \subset A$  esiste un numero  $\eta > 0$  tale che per ogni  $t$  fuori dall'intervallo  $(a - \eta; b + \eta)$  il punto  $(t, u(t))$  cade fuori di  $K$ .*

*Dimostrazione:* Se ciò non fosse vero, esisterebbero punti  $t$  arbitrariamente vicini a uno degli estremi, ad esempio  $b$ , tali che il punto  $(t, u(t))$  cada in  $K$ , cosicché si potrebbe trovare una successione crescente  $\{\tau_j\}$ ,  $\tau_j \rightarrow b$ , con  $(\tau_j, u(\tau_j)) \in K$ . Poiché  $K$  é compatto, si può estrarre dalla successione  $\{\tau_j\}$  una sottosuccessione  $\{t_j\}$  tale che  $u(t_j)$  converga ad un punto  $u_0$ , con  $(b, u_0) \in K \subset A$ . Per il teorema precedente, la soluzione  $u$  sarebbe prolungabile, contro l'ipotesi.

*Osservazione 2.3.9.* Il teorema afferma che se  $u$  é massimale, quando  $t \rightarrow b$  il punto  $(t, u(t))$  deve andare verso la frontiera di  $A$ ; ciò non significa che  $(t, u(t))$  converge a qualche punto di  $\partial A$  quando  $t \rightarrow b$ , ma semplicemente che comunque si fissi il compatto  $K \subset A$  da un certo punto in poi la curva  $(t, u(t))$  sta fuori da  $K$ . Ciò vale in maniera analoga quando  $t \rightarrow a$ .

*Osservazione 2.3.10.* Dal teorema segue anche che se  $u(t)$  é una soluzione in  $(a, b)$ ,  $b < \beta$ , limitata in un intorno di  $b$ , allora é prolungabile.

Infatti in questo caso esisteranno una  $\eta$ ,  $0 < \eta < \beta - b$ , e un  $M > 0$  tali che  $|u(t)| \leq M$  per  $b - \eta < t < b$ , cosicché per questi  $t$  il punto  $(t, u(t))$  sarà contenuto nel compatto  $\overline{I(b, \eta) \times I(0, M)} \subset A = I \times \mathbb{R}$ . Un risultato analogo vale se  $u$  è limitata in un intorno di  $a$  ( $a > \alpha$ ).

Per individuare sotto quali condizioni l'equazione  $u' = f(t, u)$ , o meglio il problema di Cauchy, ha soluzioni definite in tutto  $I$ , è sufficiente determinare sotto quali ipotesi le soluzioni dell'equazione sono localmente limitate.

**Lemma 2.3.11.** *Sia  $w$  una funzione di classe  $C^1$  in  $(a, b)$  e supponiamo esistano due costanti  $\epsilon \geq 0$  e  $Q > 0$  tali che  $|w'(t)| \leq \epsilon + Q|w(t)|$  per ogni  $t \in (a, b)$ . Allora per ogni  $t, t_0 \in (a, b)$  risulta*

$$|w(t)| \leq \left( \frac{\epsilon}{Q} + |w(t_0)| \right) e^{Q|t-t_0|}.$$

*Dimostrazione:* Sia  $\sigma > 0$  e sia  $z(t) = \sqrt{\sigma^2 + w^2(t)}$ . Si ha, per ogni  $s \in (a, b)$ ,

$$|z'(s)| = \left| \frac{w(s)w'(s)}{\sqrt{\sigma^2 + w^2(s)}} \right| \leq |w'(s)| \leq \epsilon + Q|w(s)| \leq \epsilon + Qz(s)$$

e dunque

$$\left| \frac{d}{ds} \ln(\epsilon + Qz(s)) \right| \leq Q.$$

Da quest'ultima, integrando tra  $t_0$  e  $t$ , si ottiene

$$\ln \left( \frac{\epsilon + Qz(t)}{\epsilon + Qz(t_0)} \right) \leq Q|t - t_0|$$

e infine

$$\epsilon + Qz(t) \leq [\epsilon + Qz(t_0)]e^{Q|t-t_0|}.$$

Poiché  $Q|w(t)| \leq \epsilon + Qz(t)$  si ha



$$|w(t)| \leq \left[ \frac{\epsilon}{Q} + z(t_0) \right] e^{Q|t-t_0|}$$

che é valida per ogni  $\sigma > 0$ . Passando al limite per  $\sigma \rightarrow 0$  si ha la tesi.

Una semplice conseguenza del lemma precedente é il

**Corollario 2.3.12.** *Sia  $u(t)$  una soluzione dell'equazione  $u' = f(t, u)$  in  $(a, b)$ . Supponiamo che esistano due costanti  $P \geq 0$  e  $Q > 0$  tali che per ogni  $t \in (a, b)$  ed ogni  $u \in \mathbb{R}$  risulti  $|f(t, u)| \leq P + Q|u|$ .*

*In tal caso, per ogni  $t, t_0 \in (a, b)$ , si ha*

$$|u(t)| \leq \left[ \frac{P}{Q} + |u(t_0)| \right] e^{Q|t-t_0|}$$

Infine, tenendo conto dell'Osservazione 2.3.10, si dimostra facilmente il seguente teorema

**Teorema 2.3.13.** *Sia  $f(t, u)$  definita in  $A = I \times \mathbb{R}$ , dove  $I = (\alpha, \beta)$  é un intervallo di  $\mathbb{R}$ . Supponiamo che per ogni compatto  $K \subset I$  esistano due costanti  $P$  e  $Q$ , dipendenti eventualmente da  $K$ , tali che*

$$|f(t, u)| \leq P + Q|u|, \quad \forall t \in K, \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

*In tal caso ogni soluzione  $u$  dell'equazione  $u' = f(t, u)$  é prolungabile a una soluzione definita per ogni  $t \in I$ .*

*Dimostrazione:* La soluzione  $u$  si puó prolungare a una soluzione massimale  $\bar{u}$ , definita in un intervallo  $(a, b) \subset I$ . Se fosse  $b < \beta$ , per il corollario precedente  $\bar{u}$  sarebbe limitata in un intorno sinistro di  $b$ , e quindi per l'Osservazione 2.3.10,  $\bar{u}$  sarebbe prolungabile, contro l'ipotesi che  $\bar{u}$  sia massimale. Analogamente si dimostra che non puó essere  $a > \alpha$ , e dunque  $\bar{u}$  é definita in tutto  $I$ .

## 2.4 Sistemi di equazioni differenziali lineari del primo ordine

Si considerino  $n$  equazioni differenziali lineari del primo ordine in forma normale, in  $n$  funzioni incognite  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)$ . Tali equazioni formano un sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine che si possono scrivere come:

$$\begin{cases} u'_1 = a_{11}(t)u_1 + a_{12}(t)u_2 + \dots + a_{1n}(t)u_n + b_1(t) \\ u'_2 = a_{21}(t)u_1 + a_{22}(t)u_2 + \dots + a_{2n}(t)u_n + b_2(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u'_n = a_{n1}(t)u_1 + a_{n2}(t)u_2 + \dots + a_{nn}(t)u_n + b_n(t) \end{cases}$$

Se  $b_1(t) = b_2(t) = \dots = b_n(t) = 0$  il sistema é detto omogeneo, altrimenti non omogeneo.

Le funzioni  $a_{ij}(t)$  che costituiscono i coefficienti delle funzioni incognite  $u_1, u_2, \dots, u_n$  sono supposte continue in un intervallo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Se  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  le equazioni lineari sono dette a coefficienti costanti.

Sotto l'ipotesi di continuit  sulle  $a_{ij}(t)$  vale il seguente *Teorema di esistenza ed unicit *:

**Teorema 2.4.1.** *Se  $a_{ij}(t) \in C([a, b])$  e se  $t_0 \in [a, b]$ , esiste una ed una sola soluzione  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)$  del sistema lineare tale che  $(u_1(t_0), u_2(t_0), \dots, u_n(t_0)) = (u_1^0, u_2^0, \dots, u_n^0)$ .*

Posto

$$\mathbb{U}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))^T,$$

da cui

$$\mathbb{U}'(t) = (u'_1(t), u'_2(t), \dots, u'_n(t))^T,$$

sia  $\mathbb{A}(t)$  la matrice

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

e sia

$$\mathbb{B}(t) = (b_1(t), b_2(t), \dots, b_n(t))^T.$$

Il sistema può essere allora rappresentato nella forma:

$$\mathbb{U}'(t) = \mathbb{A}(t) \cdot \mathbb{U}(t) + \mathbb{B}(t),$$

dove la trasposta indica che  $\mathbb{U}(t)$ ,  $\mathbb{U}'(t)$ ,  $\mathbb{B}(t)$  sono vettori colonna. Se consideriamo il sistema omogeneo associato, si può vedere come le sue soluzioni formino uno spazio vettoriale di dimensione  $n$ , e quindi per avere la soluzione generale del sistema omogeneo basta conoscere una base di tale spazio, ovvero  $n$  soluzioni linearmente indipendenti.

Se  $\mathbb{U}_1(t), \mathbb{U}_2(t), \dots, \mathbb{U}_n(t)$ , con  $\mathbb{U}_i(t) = (u_{1i}(t), u_{2i}(t), \dots, u_{ni}(t))$  sono  $n$  soluzioni del sistema omogeneo, essere linearmente indipendenti significa che:

$$c_1\mathbb{U}_1 + c_2\mathbb{U}_2 + \dots + c_n\mathbb{U}_n = 0 \quad \text{se e solo se} \quad c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$$

Formata la matrice  $\mathbb{M}(t)$ ,  $n \times n$  avente  $\mathbb{U}_1(t), \mathbb{U}_2(t), \dots, \mathbb{U}_n(t)$  come colonne, avremo che le  $n$  soluzioni sono linearmente indipendenti se e solo se  $|\mathbb{M}(t)| \neq 0$ .

Passando al caso di un sistema lineare non omogeneo

$$\mathbb{U}'(t) = \mathbb{A}(t) \cdot \mathbb{U}(t) + \mathbb{B}(t),$$

posto

$$\mathbb{U}(t) = \mathbb{M}(t) \cdot \mathbb{Z}(t)$$

con  $\mathbb{Z}(t)$  vettore colonna di dimensione  $n$ , otteniamo:

$$\mathbb{U}'(t) = \mathbb{M}'(t) \cdot \mathbb{Z}(t) + \mathbb{M}(t) \cdot \mathbb{Z}'(t),$$

dalla quale sostituendo

$$\mathbb{M}'(t) \cdot \mathbb{Z}(t) + \mathbb{M}(t) \cdot \mathbb{Z}'(t) = \mathbb{A}(t) \cdot \mathbb{M}(t) \cdot \mathbb{Z}(t) + \mathbb{B}(t).$$

Ma  $\mathbb{A}(t) \cdot \mathbb{M}(t) = \mathbb{M}'(t)$  in quanto  $\mathbb{M}(t)$  é formata da soluzioni del sistema omogeneo, e quindi:

$$\mathbb{M}'(t) \cdot \mathbb{Z}(t) + \mathbb{M}(t) \cdot \mathbb{Z}'(t) = \mathbb{M}'(t) \cdot \mathbb{Z}(t) + \mathbb{B}(t),$$

dalla quale poi

$$\mathbb{M}(t) \cdot \mathbb{Z}'(t) = \mathbb{B}(t),$$

e quindi infine

$$\mathbb{Z}'(t) = \mathbb{M}^{-1}(t) \cdot \mathbb{B}(t).$$

L'esistenza di  $\mathbb{M}^{-1}(t)$  é assicurata dall'essere  $|\mathbb{M}(t)| \neq 0$ .

Una soluzione particolare del sistema omogeneo sará quindi data da

$$\mathbb{Z}(t) = \int \mathbb{M}^{-1}(t) \cdot \mathbb{B}(t) dt$$

da cui avendo posto

$$\mathbb{U}(t) = \mathbb{M}(t) \cdot \mathbb{Z}(t),$$

otteniamo

$$\mathbb{U}(t) = \mathbb{M}(t) \cdot \int \mathbb{M}^{-1}(t) \cdot \mathbb{B}(t) dt.$$

Se si cerca la soluzione generale del sistema lineare non omogeneo, integrando la

$$\mathbb{Z}'(t) = \mathbb{M}^{-1}(t) \cdot \mathbb{B}(t)$$

si ottiene

$$\mathbb{Z}(t) = \int \mathbb{M}^{-1}(t) \cdot \mathbb{B}(t) dt + \mathbb{K}$$

con  $\mathbb{K} \in \mathbb{R}^n$ , vettore di costanti arbitrarie, per avere infine

$$\mathbb{Y}(t) = \mathbb{M}(t)\mathbb{K} + \mathbb{M}(t) \cdot \int \mathbb{M}^{-1}(t) \cdot \mathbb{B}(t) dt.$$

Il termine  $\mathbb{M}(t)\mathbb{K}$  rappresenta ovviamente la soluzione generale del sistema omogeneo.

In conclusione: per i sistemi lineari non possiamo che ripetere, per quanto riguarda la loro esplicita risolvibilità, quanto già detto per le equazioni lineari: solo se i coefficienti  $a_{ij}(t)$  sono costanti siamo in grado di trovare (quasi) sempre le  $n$  soluzioni linearmente indipendenti. Per questo motivo di seguito ci occuperemo soltanto della risoluzione dei sistemi lineari del I ordine a coefficienti costanti.

### **2.4.1 Risoluzione di sistemi lineari del I ordine a coefficienti costanti**

Sono i sistemi esprimibili nella forma  $\mathbb{U}'(t) = \mathbb{A} \cdot \mathbb{U}(t) + \mathbb{B}(t)$ , dove  $\mathbb{A}$  è una matrice  $n \times n$  ad elementi reali costanti. Vari sono i metodi che si possono utilizzare per trovare una base per lo spazio delle soluzioni. Studieremo i sistemi lineari del I ordine a coefficienti costanti ponendo l'attenzione sui

sistemi di due equazioni in due incognite.

Consideriamo il generico sistema di due equazioni differenziali

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \varphi(t, u, v) \\ \frac{dv}{dt} = \psi(t, u, v) \end{cases} \quad (2.24)$$

Esso può essere messo sotto la forma

$$\frac{dt}{A} = \frac{du}{B} = \frac{dv}{C}, \quad (2.25)$$

essendo  $A, B, C$  funzioni note di  $t, u, v$ .

L'integrazione del sistema sopra è in generale semplice se le equazioni sono a variabili separabili; in tal caso, l'integrale generale di (2.25) è costituito dall'insieme degli integrali generali delle due equazioni (2.25).

È possibile dare anche un'interpretazione geometrica all'integrazione del sistema (2.24): essa ha il significato di determinare quelle curve nello spazio le cui tangenti hanno i coefficienti direttori proporzionali ad 1,  $\varphi$ ,  $\psi$ , o analogamente ad  $A, B$  e  $C$ .

### Sistemi lineari del I ordine a coefficienti costanti omogenei

**Primo metodo.** Adeguando la notazione, per brevità siano  $u(t)$  e  $v(t)$  le due funzioni incognite, avendo indicato con  $t$  la variabile indipendente. Consideriamo un sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} u' = a_{11}u + a_{12}v \\ v' = a_{21}u + a_{22}v \end{cases} \quad (2.26)$$

in cui

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Derivando la prima equazione otteniamo:

$$u'' = a_{11}u' + a_{12}v'$$

e sostituendo la seconda equazione del sistema nella derivata della prima otteniamo:

$$u'' = a_{11}u' + a_{12}(a_{21}u + a_{22}v) \implies u'' = a_{11}u' + a_{12}a_{21}u + a_{12}a_{22}v \quad (2.27)$$

Ricavando  $v$  dalla prima equazione del sistema si ottiene:

$$v = \frac{1}{a_{12}}u' - \frac{a_{11}}{a_{12}}u \quad (2.28)$$

e sostituendo nell'equazione (2.27) si ottiene:

$$u'' = a_{11}u' + a_{12}a_{21}u + a_{12}a_{22}\left(\frac{1}{a_{12}}u' - \frac{a_{11}}{a_{12}}u\right)$$

che si può scrivere anche nella forma:

$$u'' - (a_{11} + a_{22})u' + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})u = 0$$

esprimibile anche come:

$$u'' - \text{tr}(A)u' + \det(A)u = 0.$$

Si risolve poi questa equazione differenziale lineare a coefficienti costanti del secondo ordine, trovando così la soluzione generale per  $u(t)$  e dalla (2.28) si ricava infine la soluzione generale per  $v(t)$ .

Scritta poi la matrice avente per colonne le soluzioni del sistema omogeneo

$$\mathbb{M}(t) = \begin{bmatrix} u_{11}(t) & v_{12}(t) \\ u_{21}(t) & v_{22}(t) \end{bmatrix}$$

e verificando poi che il  $\det \mathbb{M}(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$ , si ha che le due soluzioni

$(u_{11}(t), u_{21}(t)), (v_{12}(t), v_{22}(t))$  costituiscono una base per lo spazio delle soluzioni di questo sistema lineare omogeneo.

**Secondo metodo.** Dato il sistema lineare omogeneo (2.26) scriviamolo in forma matriciale come

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Visto che le equazioni sono lineari, ipotizziamo che esso ammetta una soluzione del tipo

$$(u(t), v(t)) = (ae^{\lambda t}, be^{\lambda t})$$

con  $a, b$  e  $\lambda$  opportuni valori da determinare.

Sostituendo nel sistema scritto sopra in forma matriciale avremo

$$\begin{bmatrix} a\lambda e^{\lambda t} \\ b\lambda e^{\lambda t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ae^{\lambda t} \\ be^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

che può risciversi come

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ae^{\lambda t} \\ be^{\lambda t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \cdot e^{\lambda t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quindi il problema può essere ricondotto alla determinazione degli autovalori della matrice

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Una volta trovati gli autovalori, sostituendoli in  $\mathbb{A} - \lambda I$ , si passa alla determinazione delle costanti  $a$  e  $b$ .

Nel caso gli autovalori coincidano, si trova solo una soluzione della base



$(c_1 e^{\lambda t}; c_1 e^{\lambda t})$ ; per trovare la seconda é necessario supporre che sia della forma  $((\alpha_1 + \beta_1 t)e^{\lambda t}; (\alpha_2 + \beta_2 t)e^{\lambda t})$  cioé costituita da un polinomio di primo grado completo moltiplicato per la parte esponenziale.

Da una prima analisi sommaria comparativa la riduzione ad una equazione lineare del secondo ordine sembra un metodo preferibile se le equazioni sono due, mentre la ricerca degli autovalori sembrerebbe preferibile quando il numero delle equazioni é maggiore, almeno che casi particolari non indirizzino verso altre metodologie piú rapide. In entrambi i casi ci si é occupati della ricerca delle radici dello stesso polinomio  $u'' - \text{tr}(\mathbb{A})u' + \det(\mathbb{A})u = 0$ , e questa circostanza non é assolutamente casuale.

Vediamo infine una terza metodologia di risoluzione, magari debole dal punto di vista della giustificazione teorica, ma molto utile dal punto di vista pratico e applicabile, in caso di bisogno, anche a sistemi non del primo ordine, sia omogenei che non omogenei.

**Terzo metodo.** Riprendiamo il sistema lineare omogeneo (2.26) e scriviamolo ora come:

$$\begin{cases} u' - a_{11}u - a_{12}v = 0 \\ -a_{21}u + v' - a_{22}v = 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

e quindi come:

$$\begin{cases} (D - a_{11})u - a_{12}v = 0 \\ -a_{21}u + (D - a_{22})v = 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

Consideriamo in analogia ai sistemi lineari, la matrice:

$$\begin{bmatrix} D - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & D - a_{22} \end{bmatrix}$$

come la matrice dei coefficienti delle incognite.

Essendo il sistema omogeneo, se risolvessimo tramite la regola di Cramer, si otterrebbe:

$$u = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -a_{12} \\ 0 & D - a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & D - a_{22} \end{vmatrix}}, \quad v = \frac{\begin{vmatrix} D - a_{11} & 0 \\ -a_{21} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & D - a_{22} \end{vmatrix}}$$

che equivalgono a porre

$$\begin{vmatrix} D - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & D - a_{22} \end{vmatrix} \cdot u = 0, \quad \begin{vmatrix} D - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & D - a_{22} \end{vmatrix} \cdot v = 0$$

dalle quali si ha:

$$((D - a_{11})(D - a_{22}) - a_{12}a_{21})u = (D^2 - \text{tr}(\mathbb{A}) + \det(\mathbb{A}))u = 0$$

e analogamente per la  $v$

$$((D - a_{11})(D - a_{22}) - a_{12}a_{21})v = (D^2 - \text{tr}(\mathbb{A}) + \det(\mathbb{A}))v = 0$$

Come si vede si riporta il problema alla stessa equazione del secondo ordine che avremmo trovato con le metodologie precedenti, quella della riduzione a equazione di ordine superiore e quella degli autovalori. Si può trovare così la soluzione per  $u(t)$  e da questa calcolarsi quella per  $v(t)$ , oppure seguire anche una strada alternativa: si ricavano le due soluzioni in maniera indipendente che differiranno solo per le costanti in quanto l'equazione di II grado che si ottiene è la medesima; per determinare le costanti occorre stabilire il legame che intercorre tra di esse tramite la sostituzione delle soluzioni determinate (a meno delle costanti) in una delle due equazioni.

### Sistemi di equazioni lineari del I ordine a coefficienti costanti non omogenei

**Primo metodo.** Rimanendo nell'ambito dei sistemi di due equazioni

avremo, scrivendo il sistema in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Se

$$\mathbb{M}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ v_1(t) & v_2(t) \end{bmatrix}$$

é la matrice avente per colonne una base per lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato, sappiamo già dallo studio delle equazioni lineari del I ordine non omogenee come la soluzione del sistema non omogeneo possa essere ricavata mediante la formula:

$$\mathbb{U}(t) = \mathbb{M}(t) \cdot \mathbb{K} + \mathbb{M}(t) \cdot \int \mathbb{M}^{-1}(t) \cdot \mathbb{B}(t) dt$$

che si può riscrivere come:

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ v_1(t) & v_2(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ v_1(t) & v_2(t) \end{bmatrix} \cdot \int \begin{bmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ v_1(t) & v_2(t) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{bmatrix} dt.$$

Questa procedura vale ovviamente anche per i sistemi con piú di due equazioni.

**Secondo metodo.** In maniera analogo al terzo metodo usato per risolvere il sistema di equazioni lineari del I ordine a coefficienti costanti, é possibile scrivere il sistema (2.31) nella forma

$$\begin{cases} (D - a_{11})u - a_{12}v = b_1(t) \\ -a_{21}u + (D - a_{22})v = b_2(t) \end{cases} \quad (2.32)$$

e far uso della regola di Cramer, ricavando

$$u = \frac{\begin{vmatrix} b_1(t) & -a_{12} \\ b_2(t) & D - a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & D - a_{22} \end{vmatrix}}, \quad v = \frac{\begin{vmatrix} D - a_{11} & b_1(t) \\ -a_{21} & b_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & D - a_{22} \end{vmatrix}}$$

che si possono scrivere anche nella forma

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} D - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & D - a_{22} \end{vmatrix} \cdot u = \begin{vmatrix} b_1(t) & -a_{12} \\ b_2(t) & D - a_{22} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} D - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & D - a_{22} \end{vmatrix} \cdot v = \begin{vmatrix} D - a_{11} & b_1(t) \\ -a_{21} & b_2(t) \end{vmatrix} \end{cases}$$

Risolte, queste portano a due equazioni non omogenee del II ordine, dalle quali otteniamo la soluzione generale del sistema lineare non omogeneo.

**Nota.** Per quanto riguarda la risoluzione di sistemi lineari del I ordine a coefficienti costanti di tre o piú equazioni, si possono seguire i metodi sopra illustrati in quanto si possono facilmente adattare nel caso di un sistema omogeneo o non omogeneo con piú di due equazioni.

## 2.5 Dipendenza continua dai dati iniziali e parametri

La valutazione dell'intervallo in cui sono definite le funzioni  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)$  che soddisfano il problema di Cauchy é stata fornita dal *teorema di esistenza* nell'ipotesi che le condizioni iniziali coincidano col centro del dominio rettangolare definito da  $\overline{I \times \mathbf{J}}$ . Consideriamo ora un suo punto  $(\xi_0, \eta_1^{(0)}, \dots, \eta_n^{(0)})$  soddisfacente ulteriormente alle condizioni:

$$|\xi_0 - t_0| < \sigma_1 \quad |\eta_i^{(0)} - u_i^{(0)}| \leq \sigma_2 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.33)$$

e consideriamo la soluzione del problema di Cauchy relativo al sistema (2.2.1)

e alle condizioni iniziali:

$$u_i(\xi_0) = \eta_i^{(0)} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.34)$$

Questa soluzione sarà, a norma del teorema di esistenza, definita di certo nell'intorno  $[\xi_0 - h; \xi_0 + h]$  di  $\xi_0$ , essendo  $h = \min[r_1 - \sigma_1, \frac{r_2 - \sigma_2}{2M}]$ , e pertanto, nell'intorno di ampiezza  $\delta'$  di  $t_0$ , dove  $\delta' = h - \sigma_1$ , purché  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  siano sufficientemente piccoli.

Consideriamo la successione delle approssimazioni successive relative al problema a valori iniziali (2.34). Ciascun termine di questa successione é una funzione continua, oltre che di  $t$ , anche delle variabili  $(\xi_0, \eta_1^{(0)}, \eta_2^{(0)}, \dots, \eta_n^{(0)})$  quando  $t$  varia nell'intervallo  $t_0 - \delta' \leq t \leq t_0 + \delta'$  e quest'ultime variano nel dominio definito dalla (2.33). Ciò, che é evidente per le prime approssimazioni, si acquisisce in generale per induzione. Le funzioni limiti di questa successione, cioè la soluzione del problema, sono pertanto funzioni continue di  $\xi_0, \eta_1^{(0)}, \eta_2^{(0)}, \dots, \eta_n^{(0)}$ , cioè delle condizioni iniziali. Vale cosí il seguente teorema:

**Teorema 2.5.1.** *Gli integrali di un sistema di equazioni differenziali soddisfacenti alle ipotesi del teorema di esistenza dipendono con continuità dalle condizioni iniziali.*

Piú in generale, supponiamo che i secondi membri del sistema (2.2.1) dipendano, oltre che da  $t, u_1, u_2, \dots, u_n$  anche da uno o piú parametri  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  e siano continui rispetto al complesso di queste variabili in un dominio rettangolare dello spazio a  $n + p + 1$  dimensioni e che soddisfino alle condizioni di Lipschitz rispetto alle  $u_i$ . Gli integrali saranno evidentemente funzioni oltre che della  $t$ , anche dei parametri  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ . Con analoghe considerazioni si dimostra infatti il seguente teorema:

**Teorema 2.5.2.** *Gli integrali di un sistema di equazioni differenziali soddisfacenti alle condizioni dette dipendono con continuità anche dai parametri che intervengono, con continuità, nel sistema.*

## 2.6 Stabilità delle soluzioni dei sistemi lineari su intervalli illimitati

Questa sezione é un'ampliamento della precedente in quanto ha come tema principale la *teoria della stabilità* per sistemi di equazioni differenziali lineari, e risulta di particolare interesse qualora si utilizzino le equazioni differenziali per studiare fenomeni fisici, che spesso si sviluppano su intervalli illimitati di tempo.

Entrando maggiormente nello specifico si é deciso di affrontare questo tema in quanto:

- nella descrizione di fenomeni fisici per mezzo di equazioni differenziali, é necessario imporre condizioni addizionali, come i valori iniziali, in modo da individuare univocamente la soluzione; tali condizioni iniziali però sono ottenute con misure sperimentali e sono soggette all'errore sperimentale. Diventa perciò importante studiare l'effetto sulle soluzioni di un cambiamento piccolo sui valori iniziali, e tramite la stabilità si richiede che un cambiamento piccolo sui valori iniziali produca solo un piccolo cambiamento sulla soluzione.
- può accadere che una perturbazione (che non possa essere conosciuta con precisione) intervenga durante il corso di un fenomeno fisico solo per una certa durata. Terminata la perturbazione, il fenomeno continua ad essere descritto dallo stesso sistema di equazioni differenziali, tuttavia il valore corrispondente all'istante  $t_0$  in cui cessa l'azione della perturbazione sarà differente da quello dato dalla soluzione inizialmente considerata. Ma dato che la perturbazione non é nota nella sua forma reale, é necessario che l'equazione del modello matematico abbia la proprietà secondo cui una piccola modifica dei valori iniziali produca una piccola modifica nella soluzione.

### Definizione di stabilità

Consideriamo il sistema di equazioni differenziali

$$\mathbf{z}' = f(t, \mathbf{z}). \quad (2.35)$$

Supponiamo che l'integrale  $\mathbf{z}(t)$  del sistema sopra, soddisfacente la condizione di Cauchy  $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$  risulti definito su tutta la semiretta  $t \geq t_0$ , e che lo stesso accada per gli integrali  $\mathbf{u}(t)$  uscenti dai punti  $\mathbf{u}_0$  di un intorno di  $\mathbf{z}_0$ . Si pone allora la questione di studiare se la dipendenza continua dai valori iniziali sussista uniformemente su tutta la semiretta  $t \geq t_0$ , cioè se risulti

$$\lim_{\mathbf{u}_0 \rightarrow \mathbf{z}_0} [\mathbf{u}(t) - \mathbf{z}(t)] = 0 \quad (2.36)$$

uniformemente al variare di  $t$  in  $[t_0, +\infty)$ .

La risposta é in generale negativa, come si vede dall'esempio:  $u' = u$ . Qualora si abbia la (2.36) si dice che la soluzione  $\mathbf{z}(t)$  considerata é una soluzione stabile dell'equazione (2.35).

Posto  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{z}(t) + \mathbf{w}(t)$ , poiché sia  $\mathbf{u}(t)$  che  $\mathbf{z}(t)$  sono soluzioni della (2.35) risulta

$$\mathbf{z}' + \mathbf{w}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{z} + \mathbf{w}). \quad (2.37)$$

Supponiamo che la funzione  $\mathbf{f}$  a secondo membro della (2.35) sia differenziabile rispetto alle variabili  $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ : allora si può scrivere

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{z} + \mathbf{w}) = \mathbf{f}(t, \mathbf{z}) + \mathbb{A}(t, \mathbf{z})\mathbf{w} + \mathbf{f}_1(t, \mathbf{z}, \mathbf{w}), \quad (2.38)$$

dove

$$\mathbb{A}(t, \mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial f^{(1)}}{\partial z_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f^{(n)}}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial f^{(n)}}{\partial z_n} \end{bmatrix};$$

risulta inoltre

$$\lim_{\|\mathbf{w}\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{f}_1(t, \mathbf{z}, \mathbf{w})\|}{\|\mathbf{w}\|} = 0.$$

Per la (2.38), tenuto conto che  $\mathbf{z}(t)$  é integrale della (2.35), si ricava dalla (2.37)

$$\mathbf{w}' = \mathbb{A}(t, \mathbf{z})\mathbf{w} + \mathbf{f}_1(t, \mathbf{z}, \mathbf{w})$$

e la questione di accertare la stabilitá della soluzione  $\mathbf{z}(t)$  per l'equazione (2.35) viene ricondotta allo studio della stabilitá della soluzione  $\mathbf{w}(t)$  per quest'ultima equazione.

Ci si puó dunque limitare, senza restrizioni, a studiare la stabilitá della soluzione  $\mathbf{z}(t) = 0$  per sistemi del tipo

$$\mathbf{z}' = \mathbb{A}(t)\mathbf{z} + \mathbf{f}(t, \mathbf{z}), \quad (2.39)$$

dove  $\mathbb{A}(t)$  é un'assegnata matrice di ordine  $n$ , e  $\mathbf{f}(t, \mathbf{z})$  soddisfa la condizione

$$\lim_{\|\mathbf{z}\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{f}(t, \mathbf{z})\|}{\|\mathbf{z}\|} = 0.$$

Si tratta dunque di vedere se é possibile far corrispondere ad ogni  $\epsilon > 0$  un numero  $\delta > 0$  tale che, scelto comunque un vettore  $\mathbf{z}_0$  soddisfacente la condizione  $\|\mathbf{z}_0\| < \delta$ , la soluzione  $\mathbf{z}(t)$  dell'equazione (2.39) determinata dalle condizioni iniziali  $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$  soddisfi per ogni  $t \geq t_0$  la limitazione  $\|\mathbf{z}(t)\| < \epsilon$ .

Riportiamo di seguito alcuni criteri mediante i quali studiare la stabilitá di alcuni particolari sistemi.

### *Stabilitá per sistemi lineari autonomi*

Occupiamoci inizialmente dei sistemi lineari autonomi (e quindi a coefficienti costanti) omogenei:



$$\mathbf{u}' = \mathbb{A}\mathbf{u} \quad (2.40)$$

dove  $\mathbb{A}$  é una matrice di ordine  $n$  a coefficienti costanti.

**Teorema 2.6.1.** *Nell'ipotesi che le radici  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  dell'equazione caratteristica  $\det(\lambda I - \mathbb{A}) = 0$  siano a due a due distinte, condizione necessaria e sufficiente affinché tutti gli integrali del sistema (2.40) siano infinitesimi per  $t \rightarrow +\infty$  é che le parti reali delle radici  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  siano tutte negative. Condizione necessaria e sufficiente affinché tutti gli integrali del sistema (2.40) si mantengano limitati per  $t \geq t_0$  é che le parti reali delle radici  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  siano tutte negative o nulle.*

**Teorema 2.6.2.** *Nell'ipotesi che le radici  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  dell'equazione  $\det(\lambda I - \mathbb{A}) = 0$  siano a due a due distinte, condizione necessaria e sufficiente per la stabilit  delle soluzioni dell'equazione (2.40) é che le parti reali delle radici  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  siano tutte negative o nulle.*

Se si rinuncia all'ipotesi che le radici siano tutte distinte valgono allora i seguenti teoremi:

**Teorema 2.6.3.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché tutti gli integrali dell'equazione (2.40) siano infinitesimi per  $t \rightarrow +\infty$  é che le parti reali delle radici  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  siano tutte negative (strettamente).*

**Teorema 2.6.4.** *Condizione sufficiente per la stabilit  delle soluzioni dell'equazione (2.40) é che le parti reali delle radici  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  dell'equazione caratteristica siano tutte negative (strettamente).*

### ***Stabilit  per sistemi lineari non autonomi***

Consideriamo il caso di un'equazione del I ordine della forma

$$u' = a(t)u, \quad a(t) \text{ funzione continua.} \quad (2.41)$$

Poiché la soluzione generale é

$$u(t) = u(t_0)e^{\int_{t_0}^t a(\tau)d\tau}, \quad (2.42)$$

una condizione sufficiente per la stabilitá é data da

$$\limsup_{t \uparrow +\infty} t^\alpha a(t) \leq c, \quad \alpha > 1,$$

mentre una condizione sufficiente affinché le soluzioni siano infinitesime all'infinito é data da

$$\limsup_{t \uparrow +\infty} a(t) < 0.$$

Tali risultati sono chiariti qui di seguito: se risulta

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^t a(\tau)d\tau \leq K < +\infty$$

le soluzioni di (2.41) sono stabili. Se poi risulta

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^t a(\tau)d\tau = -\infty$$

le soluzioni di (2.41) sono infinitesime all'infinito. Nel caso particolare in cui  $a(t)$  é periodica di periodo  $T$ , le soluzioni di (2.41) sono stabili se e solo se

$$\int_0^T a(\tau)d\tau \leq 0$$

e sono infinitesime se e solo se risulta

$$\int_0^T a(\tau)d\tau < 0.$$

Ovviamente queste condizioni derivano dalla forma in cui si presenta la soluzione generale (2.42) della (2.41).

Per i sistemi un primo risultato, valido però in ipotesi molto restrittive, é il seguente:

**Teorema 2.6.5.** *Si consideri il sistema lineare*

$$\mathbf{u}' = \mathbb{A}(t)\mathbf{u},$$

dove  $\mathbb{A}$  é una matrice autoaggiunta (hermitiana se i coefficienti sono complessi) a coefficienti continui (basterebbe coefficienti in  $L^1_{loc}$ ). Detti  $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t)$  gli autovalori di  $\mathbb{A}(t)$ , sia

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \lambda_i(t) < 0 \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Allora le soluzioni del sistema sono infinitesime per  $t \rightarrow +\infty$  e sono stabili.

Un altro caso, anch'esso valido solamente sotto ipotesi molto restrittive, é il seguente:

**Teorema 2.6.6.** *Si consideri il sistema*

$$\mathbf{u}' = f_t(\mathbb{A})\mathbf{u},$$

dove  $f_t(\mathbb{A})$  é per ogni  $t$  una funzione analitica di una fissata matrice  $\mathbb{A}$  e dipende con continuitá da  $t$ . Supponiamo che gli autovalori di  $\mathbb{A}$  siano tutti distinti (<sup>2</sup>).

Se risulta

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \operatorname{Re}[f_t(\lambda_i)] dt \leq K < +\infty \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

allora le soluzioni sono stabili. Se risulta anche

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^t \operatorname{Re}[f_t(\lambda_i)] dt = -\infty \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

allora le soluzioni sono infinitesime per  $t \rightarrow +\infty$ .

---

<sup>2</sup>Tale ipotesi puó essere sostituita dall'ipotesi che  $\mathbb{A}$  sia diagonalizzabile.



# Capitolo 3

## Metodi risolutivi

### 3.1 Metodi analitici

Il *teorema di esistenza e unicità per la soluzione del problema di Cauchy* non fornisce aiuto per calcolare la soluzione, e in generale, il calcolo esplicito delle soluzioni di un'equazione differenziale, così come quello di un integrale, é impossibile. Si può fare quindi un parallelismo con la risoluzione degli integrali: infatti così come per questi ultimi si hanno a disposizione alcuni metodi che riconducono le funzioni da integrare a funzioni razionali fratte (di cui si conosce il procedimento di integrazione) o a formule di integrazione immediata, così nelle equazioni differenziali, come ho già sottolineato nell'introduzione, si osserverá che ad esempio per le equazioni del primo ordine si hanno a disposizione due metodi fondamentali: quello delle equazioni a variabili separabili e quello delle equazioni lineari; tutte le altre tipologie di equazioni si riconduurranno a questi casi tramite semplici sostituzioni di funzioni incognite.

Mostro di seguito alcune tecniche risolutive, valide per alcuni tipi specifici di equazioni differenziali.

### 3.1.1 Equazioni differenziali del primo ordine

#### I tipo: Equazioni a variabili separabili o ad esse riconducibili

Un'equazione differenziale del primo ordine si dice *a variabili separabili* quando é possibile separare nei due membri le varibili  $t$  e  $u$ , ovvero é del tipo:

$$u' = g(t)h(u)$$

Per risolvere questa equazione si divide per  $h(u)$  e si integrano entrambi i membri. Se  $G(t)$  é una primitiva della  $g$  e  $W(u)$  é una primitiva di  $u'/h(u)$  si avrá

$$W(u) = G(t) + c,$$

in cui si potrà esplicitare  $u$  se la funzione  $W$  é invertibile.

Si noti che si puó sempre dividere per  $h(u)$ , anche se la funzione  $h$  si annulla per alcuni valori  $u_1, u_2, \dots, u_m$  di  $u$ . Infatti in questo caso le costanti  $u_1, \dots, u_m$  sono soluzioni dell'equazione, e dunque, per l'*osservazione 2.2.3*, nessun'altra soluzione potrà assumere i valori  $u_1, \dots, u_m$  che fanno annullare la funzione  $h(u)$ .

Anche le equazioni delle forme

$$t = f(u'), \quad u = f(u'), \quad f(u') = 0$$

con  $f(u')$  funzione derivabile in un intervallo  $I$ , sono riconducibili a equazioni a variabili separabili.

Nei primi due casi basta effettuare una sostituzione, ponendo  $u' = v$ , si ottiene un'equazione a variabili separabili in  $u$  e  $v$ . Nel terzo caso la medesima sostituzione conduce all'equazione non differenziale  $f(v) = 0$ : trovata una sua radice, integrandola si perviene poi alla soluzione dell'equazione differenziale.

## II tipo: Equazioni omogenee (G. Manfredi)

Sono equazioni della forma

$$u' = \frac{A(t, u)}{B(t, u)}, \quad B(t, u) \neq 0, \quad (3.1)$$

essendo  $A(t, u)$ ,  $B(t, u)$  funzioni omogenee (<sup>1</sup>)

(o positivamente omogenee) di  $t$  ed  $u$ , dello stesso grado  $n$  di omogeneità, definite nello stesso insieme  $E$ .

Poiché, supposto  $t \neq 0$ ,

$$A(t, u) = t^n \psi\left(\frac{u}{t}\right), \quad B(t, u) = t^n \phi\left(\frac{u}{t}\right)$$

la (3.1) diventa

$$u' = \frac{\psi\left(\frac{u}{t}\right)}{\phi\left(\frac{u}{t}\right)} = f\left(\frac{u}{t}\right),$$
$$du = f\left(\frac{u}{t}\right) dt. \quad (3.2)$$

Effettuando il cambio di variabile  $u/t = z(t)$ , e sostituendo nell'equazione sopra ci si riconduce ad un'equazione a variabili separabili nella funzione incognita  $z$ .

## III tipo: Equazioni della forma

$$u' = f\left(\frac{at + bu + c}{a_1t + b_1u + c_1}\right) \quad (3.3)$$

( $a, b, c, a_1, b_1, c_1$  costanti,  $a_1t + b_1u + c_1 \neq 0$ ).

---

<sup>1</sup>Una funzione  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  delle  $n$  variabili  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , definita in un insieme  $E$ , si dice *omogenea* in  $E$ , quando esiste una costante  $\alpha$ , detta *grado di omogeneità* della funzione, tale che risulti

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^\alpha f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

per ogni punto  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  di  $E$  e per ogni  $t$  reale, non nullo e tale che il punto  $P'(tx_1, tx_2, \dots, tx_n)$  appartenga ad  $E$ . Se la condizione scritta sopra vale per ogni  $t > 0$  la  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  si dice *positivamente omogenea* di grado  $\alpha$  in  $E$ .

Per l'integrazione della (3.3), distinguiamo i due casi:

$$1) \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad 2) \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0.$$

1. Nel primo caso, denotate con  $w$  e  $v$  due nuove variabili, poniamo:

$$at + bu + c = w \quad a_1t + b_1u + c_1 = v$$

e da queste relazioni, per essere  $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$ , si trae

$$t = Aw + Bv + C, \quad u = A_1w + B_1v + C_1,$$

ove  $A, B, C, A_1, B_1, C_1$  sono delle costanti.

Differenziando le due espressioni, l'equazione di partenza diviene

$$\frac{A_1dw + B_1dv}{Adw + Bdv} = f\left(\frac{w}{v}\right)$$

che può essere riscritta come un'equazione omogenea (II tipo) nella funzione incognita  $w/u$ .

2. Nel secondo caso, avendosi  $ab_1 - a_1b = 0$ , supponendo  $bb_1 \neq 0$  <sup>(2)</sup>, si ottiene  $a_1/b_1 = a/b$  ossia  $a_1 = ka$ ,  $b_1 = kb$  e l'equazione (3.3) diviene

$$u' = f\left(\frac{at + bu + c}{k(at + bu) + c_1}\right).$$

Posto  $z(t) = at + bu$ , si ottiene un'equazione a variabili separabili (I tipo).

---

<sup>2</sup>Se  $bb_1 = 0$ , allora l'equazione (3.29) o è a variabili separabili, oppure è trasformabile mediante la sostituzione  $z(t) = at + bu$ , oppure  $z(t) = a_1t + b_1u$ , in un'equazione a variabili separabili nella funzione incognita  $z$ .



#### IV tipo: Equazioni lineari omogenee e non omogenee

Le equazioni lineari omogenee sono equazioni riconducibili alla forma

$$u' + f(t)u = 0, \quad (3.4)$$

essendo  $f(t)$  funzione nota di  $t$  definita e continua in un intervallo  $I$ ; si nota subito che la (3.4) é un'equazione a variabili separabili (I tipo).

Le equazioni lineari non omogenee invece sono equazioni del tipo

$$u' + f(t)u = g(t), \quad (3.5)$$

essendo  $f(t)$ ,  $g(t)$  funzioni note, definite in un comune intervallo  $I$  e ivi continue.

Per l'integrazione della (3.5) si può seguire il *metodo della variazione delle costanti arbitrarie*. Per prima cosa é necessario ricavare l'integrale generale dell'equazione omogenea (associata alla (3.5)), che dipenderá da una costante  $c$ . Si suppone poi che questa costante sia una funzione derivabile di  $t$ , ovvero  $c = k(t)$ , e si determina quest'ultima imponendo che l'integrale generale dell'equazione omogenea, con  $c = k(t)$  soddisfi la (3.5).

La soluzione dell'equazione (3.5) può essere ottenuta con altri procedimenti, come il seguente.

Posto  $u = w(t)v(t)$ , si ha  $u' = w'v + wv'$  e sostituendo nell'equazione (3.5), si ottiene

$$wv' + v(w' + wf(t)) - g(t) = 0. \quad (3.6)$$

Determiniamo  $w(t)$  in modo che sia

$$w' + wf(t) = 0$$

(quest'ultima é una semplice equazione a variabili separabili) e sostituita poi la soluzione nella (3.6) si ottiene un'equazione a variabili nell'incognita  $v(t)$ .

### V tipo: Equazioni di G. Bernoulli

Sono equazioni della forma

$$u' + f(t)u = g(t)u^m, \quad (3.7)$$

dove  $f(t)$ ,  $g(t)$  sono funzioni note definite nello stesso intervallo e ivi continue ed  $m$  é una costante diversa da 0 e da 1 (<sup>3</sup>).

Per risolvere questo tipo di equazioni é sufficiente porre  $u = v^{1/(1-m)}$ ,  $v = v(t)$ , e sostituendo nell'equazione data si perviene ad un'equazione differenziale lineare non omogenea (IV tipo).

### VI tipo: Equazioni di J. Riccati

Sono equazioni della forma

$$u' + a(t)u^2 + b(t)u + c(t) = 0, \quad (3.8)$$

dove  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $c(t)$  sono funzioni note di  $t$ , definite in uno stesso intervallo e ivi continue.

Se le funzioni  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $c(t)$  sono qualunque, non si sa esprimere in termini finiti l'integrale generale della (3.8). Se delle (3.8) é però noto un integrale particolare  $\alpha(t)$ , allora l'integrale generale si trova con sole quadrature: assumendo infatti come nuova funzione incognita la funzione  $z(t)$  legata alla  $u$  dalla relazione  $u = \alpha(t) + z(t)$ , l'equazione (3.8) si riconduce all'equazione di Bernoulli (V tipo) nell'incognita  $z(t)$ .

---

<sup>3</sup>Se  $m = 0$  o  $m = 1$ , la (3.7) si riduce ad una equazione lineare (IV tipo). Si ha invece che se  $m > 0$ , la (3.7) ha l'integrale  $u = 0$  e quest'ultimo é singolare per  $0 < m < 1$ .

### VII tipo: Equazioni di A. C. Clairaut

Sono equazioni della forma

$$u = tu' + g(u'), \quad (3.9)$$

nelle quali supporremo che la funzione  $g(u')$  sia di classe  $C^2$  in un intervallo  $I$ .

Per risolverle é necessario effettuare il cambio di variabile  $u' = z(t)$ , dal quale si ottiene

$$u = tz + g(z). \quad (3.10)$$

Da questa, derivando i due membri rispetto ad  $t$ , si ha un'equazione in  $z(t)$  della forma

$$\frac{dz}{dt}[t + g'(z)] = 0$$

che si risolve facendo ricorso alla *legge di annullamento del prodotto*.

In particolare da  $t = -g'(z)$  tenuto conto della (3.10), si ottiene un integrale (singolare) in forma parametrica della (3.9)

$$t = -g'(z), \quad u = -zg'(z) + g(z) \quad (3.11)$$

con  $z$  variabile in  $I$ .

L'integrale singolare rappresenta l'involuppo delle curve (rette) integrali che si ricavano da  $dz/dt = 0$ . Osserviamo che se in tutto  $I$  risulta  $g''(u') = 0$ , le rette ottenute sopra passano per uno stesso punto e l'involuppo degenera in questo punto.

### VIII tipo: Equazioni di D'Alembert-Lagrange

Sono equazioni della forma

$$u = tf(u') + g(u'), \quad (3.12)$$

nelle quali supporremo che le funzioni  $f(u')$ ,  $g(u')$  siano continue insieme alle derivate prime e alla  $g''(u')$  in un intervallo  $I$ .

Effettuando il cambio di variabile  $u' = p$  si ha

$$u = tf(p) + g(p); \quad (3.13)$$

differenziando quest'ultima, ponendo poi  $du = pdt$  e supponendo  $f(p) - p \neq 0$  si ha un'equazione lineare nella funzione incognita  $t$  (funzione di  $p$ ) cioè un'equazione lineare (IV tipo)

$$\frac{dt}{dp} + t \frac{f'(p)}{f(p) - p} = -\frac{g'(p)}{f(p) - p} \quad (4) \quad (3.14)$$

Detto  $t = t(p, c)$  l'integrale generale della (3.14), sostituendo in (3.13), si ottiene  $u = t(p, c)f(p) + g(p)$ .

L'integrale generale della (3.12) é, in forma parametrica ( $p$  parametro)

$$t = t(p, c), \quad u = t(p, c)f(p) + g(p).$$

### 3.1.2 Equazioni differenziali di ordine superiore al primo

Analizziamo le seguenti equazioni differenziali riconducibili a casi già trattati applicando al massimo semplici sostituzioni.

- Data

$$u^{(n)} = \psi(t), \quad (n > 1), \quad (3.15)$$

é sufficiente integrare l'equazione  $n - 1$  volte.

---

<sup>4</sup>Se  $f(p) = p$  la (3.14) non si può scrivere; d'altra parte, se  $f(p) = p$  cioè  $f(u') = u'$  la (3.12) si riduce all'equazione di Clairaut (VII tipo).

- Data

$$F(u^{(n-1)}, u^{(n)}) = 0 \quad (n > 1),$$

si trasforma tramite la sostituzione della derivata di ordine minore, ossia ponendo  $u^{(n-1)} = z(t)$ , e si ottiene un'equazione differenziale del tipo (3.15).

- L'equazione

$$F(u^{(n)}) = 0, \quad (n > 1),$$

si risolve mediante la sostituzione  $u^{(n)} = z$ , che conduce all'equazione non differenziale  $F(z) = 0$ . In corrispondenza di ogni sua radice  $z_i$ , si ha  $u^{(n)} = z_i$  ovvero un'equazione del tipo (3.15).

- Le equazioni della forma

$$F(t, u', u'', \dots, u^{(n-1)}, u^{(n)}) = 0, \quad (n > 1), \quad (3.16)$$

nelle quali la funzione  $u$  non figura esplicitamente, si abbassano di ordine semplicemente sostituendo alla derivata di ordine minore che compare la funzione  $z(t)$ , in modo da trasformare l'equazione data in una di ordine  $n - 1$  nella funzione incognita  $t$ .

- Le equazioni della forma

$$F(u, u', u'', \dots, u^{(n-1)}, u^{(n)}) = 0, \quad (n > 1), \quad (3.17)$$

nelle quali non entra esplicitamente la variabile indipendente  $t$ , si abbassano di ordine semplicemente sostituendo alla derivata di ordine minore che compare la funzione  $z[u(t)]$ , in modo da trasformare l'equazione data in una di ordine  $n - 1$  nella funzione incognita  $t$  e nella variabile indipendente  $u$ .

- Le equazioni della forma

$$F(u', u'', \dots, u^{(n-1)}, u^{(n)}) = 0, \quad (n > 1),$$

nelle quali non entrano esplicitamente le variabili indipendente e dipendente  $t$  e  $u$ , si abbassano di ordine mediante la sostituzione  $u' = z(t)$ , in modo da ottenere un'equazione del caso precedente.

### Equazioni differenziali omogenee

L'equazione differenziale

$$F(t, u, u', u'', \dots, u^{(n-1)}, u^{(n)}) = 0 \quad (3.18)$$

é detta *omogenea* se il primo membro é una funzione omogenea di un certo grado  $\alpha$  rispetto ad  $u, u', u'', \dots, u^{(n-1)}, u^{(n)}$ .

- *Metodo 1*: Per l'integrazione della (3.18) eseguiamo il cambiamento di funzione incognita  $u = e^{z(t)}$  se  $u > 0$ ,  $u = -e^{z(t)}$  se  $u < 0$ ; dividendo i due membri dell'equazione ottenuta per  $e^{\alpha z} \neq 0$  si perviene a due equazioni della forma (3.16) nella funzione incognita  $z$ .
- *Metodo 2*: Utilizzando il cambiamento di funzione  $u'/u = z(t)$ ,  $u \neq 0$ , e sostituendo nella (3.18) si perviene ad un'equazione di ordine  $n - 1$  nella funzione incognita  $z$ .
- *Metodo 3*: Si chiamano omogenee anche quelle equazioni che sono tali quando si considerino  $u, u', u'', \dots, u^{(n)}$  come funzioni di grado  $m, m - 1, m - 2, \dots, m - n$  rispetto a  $t$ , con  $m \in \mathbb{N}$ , cioè quelle equazioni che si riproducono moltiplicate per una potenza  $\lambda$  quando in esse si sostituiscono a  $t, u, u', u'', \dots, u^{(n)}$  rispettivamente

$\lambda t, \lambda^m u, \lambda^{m-1} u', \lambda^{m-2} u'', \dots, \lambda^{m-n} u^{(n)}$ , essendo  $\lambda$  un fattore indeterminato ed  $m$  un numero scelto in modo opportuno, tramite tentativi.

Per l'integrazione dell'equazione si procede nel modo seguente: detto  $\bar{m}$  il grado di omogeneità nel senso sopra indicato, si pone  $t = e^z$  se  $t > 0$ ,  $t = -e^z$  se  $t < 0$ ,  $u = e^{\bar{m}z} w(z)$ .

Assumendo  $z$  come nuova variabile indipendente e  $w$  come nuova funzione incognita, l'equazione si trasforma in una equazione analoga a (3.17). Sostituendo nell'integrale generale di quest'ultima equazione  $u/|t|^{\bar{m}}$  al posto di  $w$  e  $\log|t|$  al posto di  $z$ , si ottiene l'integrale generale dell'equazione data.

## Equazioni differenziali lineari

La forma piú generale dell'equazione lineare di ordine  $n$  é

$$\alpha_0(t)u^{(n)} + \alpha_1(t)u^{(n-1)} + \dots + \alpha_{n-1}(t)u' + \alpha_n(t)u = \beta(t), \quad (3.19)$$

essendo  $\alpha_0(t), \alpha_1(t), \dots, \alpha_{n-1}(t), \alpha_n(t)$  (*coefficienti* dell'equazione) e  $\beta(t)$  funzioni di  $t$  date in uno stesso intervallo  $I$ , limitato o illimitato, ivi continue. Se in  $I$  la funzione  $\beta(t)$  é identicamente nulla, allora la (3.18) é detta *lineare omogenea*, altrimenti si chiama *equazione lineare non omogenea (o completa)*.

Supposto che in  $I$  sia  $\alpha_0(t) \neq 0$  é possibile dividere i due membri della (3.18) per  $\alpha_0(t)$ ; se i nuovi coefficienti delle  $u^{(i)}$   $i = 1, \dots, n$  sono costanti, allora l'equazione é *lineare a coefficienti costanti*; se, invece, almeno uno dei coefficienti é funzione di  $t_i$ , é detta *equazione lineare a coefficienti variabili*.

La ragione dell'utilizzo del termine *lineare* deriva dal fatto che l'applicazione  $E$ , che ad ogni funzione  $u$  di classe  $C^k$  associa la funzione

$$E(u) = \alpha_0(t)u^{(n)} + \alpha_1(t)u^{(n-1)} + \dots + \alpha_{n-1}(t)u' + \alpha_n(t)u,$$

soddisfa la relazione  $E(\lambda u + \mu v) = \lambda E(u) + \mu E(v)$  per ogni  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  e per

ogni coppia di funzioni  $u, v$  di classe  $C^k$  nell'intervallo  $I$ .

Dalla relazione segue subito che se  $u$  e  $v$  sono due soluzioni dell'equazione (3.19):  $E(u) = \beta(t)$  e  $E(v) = \beta(t)$ , la loro differenza é soluzione dell'equazione omogenea  $E(u - v) = 0$ .

Ciò é come dire che, indicato con  $V_0$  l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea  $E(w) = 0$ , e con  $u_\beta$  una soluzione dell'equazione (3.19), le funzioni  $u = u_\beta + w$  descrivono, al variare di  $w$  in  $V_0$  tutte le soluzioni dell'equazione  $E(u) = \beta$ .

Per caratterizzare le soluzioni dell'equazione differenziale lineare completa sar  allora sufficiente studiare l'*equazione omogenea associata*:

$$u^{(n)} + a_1(t)u^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)u' + a_n(t)u = 0. \quad (3.20)$$

in cui si é diviso per il coefficiente di  $u^{(n)}$ . Se  $u_0(t), u_1(t), \dots, u_{n-1}(t)$  sono  $n$  integrali particolari della (3.20), linearmente indipendenti in  $I$ , e se  $u_\beta$  é una soluzione particolare dell'equazione completa, ogni altra soluzione (o integrale generale) dell'equazione differenziale lineare completa sar  data dalla formula

$$u = u_\beta + c_0u_0 + c_1u_1 + \dots + c_{n-1}u_{n-1},$$

dove  $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$  sono  $n$  costanti arbitrarie.

Gli  $n$  integrali particolari della (3.20), linearmente indipendenti in  $I$ , si dice che costituiscono un *sistema fondamentale* di integrali per la (3.20) e pertanto *l'integrale generale della (3.20) é dato da una combinazione lineare di un sistema fondamentale di integrali particolari*.

*Osservazione 3.1.1.* Si pu  dimostrare che le soluzioni di una equazione differenziale lineare omogenea costituiscono uno spazio vettoriale la cui dimensione é pari all'ordine dell'equazione.



## Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

Sia

$$u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + a_1u' + a_0u = f(t) \quad (3.21)$$

un'equazione differenziale lineare di ordine  $n$  a coefficienti costanti.

In questo caso la risoluzione dell'equazione omogenea associata

$$u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + a_1u' + a_0u = 0 \quad (3.22)$$

si riconduce alla ricerca delle radici del polinomio caratteristico associato

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0. \quad (3.23)$$

Per spiegare il motivo di tale procedimento introduco l'operatore di derivazione  $D$ , che associa ad ogni funzione derivabile la sua derivata:  $Dw = w'$ .

Supponiamo che il polinomio  $P(\lambda)$  associato abbia radici  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . L'equazione (3.22) allora si può scrivere nella forma

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)\dots(D - \lambda_n)u = 0. \quad (3.24)$$

É immediato riconoscere che le funzioni  $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$  sono soluzioni dell'equazione (3.24).

- Se i numeri  $\lambda_i$  sono tutti distinti, le funzioni soluzioni dell'equazione (3.24) sono linearmente indipendenti e la soluzione generale dell'equazione (3.22) é

$$u(t) = c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}.$$

Bisogna osservare che se il polinomio  $P(\lambda)$  ha delle radici complesse,

la soluzione appena scritta conterrà radici complesse. D'altra parte, se il numero complesso  $\lambda = \alpha + i\beta$  é una radice di  $P(\lambda)$ , lo sará anche il numero  $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$  (infatti  $P(\lambda)$  ha coefficienti reali). Allora, dato che le funzioni  $e^{\lambda t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t)$ ,  $e^{\bar{\lambda} t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t - i \sin \beta t)$  sono soluzioni dell'equazione differenziale, saranno soluzioni anche le funzioni

$$(e^{\lambda t} + e^{\bar{\lambda} t})/2 = e^{\alpha t} \cos \beta t \quad (e^{\lambda t} - e^{\bar{\lambda} t})/2i = e^{\alpha t} \sin \beta t. \quad (3.25)$$

Si potrà dunque sostituire alla coppia di funzioni complesse  $e^{\lambda t}$  ed  $e^{\bar{\lambda} t}$  la coppia di funzioni reali della (3.25). Procedendo in questo modo si ottiene una soluzione in termini di sole funzioni reali.

- Supponiamo invece che  $\lambda$  sia una radice del polinomio  $P(\lambda)$ , con molteplicitá maggiore di uno. Preliminarmente osserviamo che vale la formula

$$(D - \lambda)t^h e^{\lambda t} = ht^{h-1}e^{\lambda t} + \lambda t^h e^{\lambda t} - \lambda t^h e^{\lambda t} = ht^{h-1}e^{\lambda t},$$

perció se  $\lambda$  é una radice di molteplicitá  $m$

$$(D - \lambda)^m t^h e^{\lambda t} = h(D - \lambda)^{m-1} t^{h-1} e^{\lambda t} = \dots = h(h-1)\dots(h-m+1)t^{h-m} e^{\lambda t}$$

Se  $h$  é un numero intero minore di  $m$ , il prodotto

$$h(h-1)\dots(h-m+1)$$

é nullo, quindi le  $m$  funzioni

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{m-2}e^{\lambda t}, t^{m-1}e^{\lambda t}$$

saranno soluzioni dell'equazione data. Poiché per ogni radice  $\lambda$  del polinomio si è trovato un numero di soluzioni pari alla molteplicità di  $\lambda$ , il numero totale di radici così determinate è uguale all'ordine dell'equazione. Queste soluzioni sono linearmente indipendenti, così la soluzione generale è una loro combinazione lineare.

Una volta trovata la soluzione generale dell'equazione omogenea è necessario trovare una soluzione dell'equazione completa (3.21).

Per questa non ci sono metodi generali, anche se è possibile individuare alcune casistiche: ad esempio per le equazioni del secondo ordine a volte è utile il *metodo della variazione delle costanti arbitrarie*. In generale si cerca una soluzione (integrale particolare) della stessa forma del polinomio  $f(t)$ .

1. Se  $f(t)$  è un polinomio a coefficienti e termine noto reali di grado  $r$  allora un integrale particolare dalla (3.21) è della forma

$$u = k_0 t^\alpha + k_1 t^{\alpha-1} + \dots + k_{\alpha-1} t + k_\alpha, \quad (3.26)$$

dove  $\alpha = n + r - s$ , con  $n$  ordine dell'equazione,  $r$  grado di  $f(t)$  e  $s$  massimo indice dei coefficienti  $a_1, a_2, \dots, a_n$  non nulli e  $k_0, k_1, \dots, k_\alpha$  sono delle costanti da determinarsi facendo ricorso al principio di identità dei polinomi.

2. Se

$$f(t) = e^{\alpha t}(p \sin kt + q \cos kt)$$

con  $p, q, \alpha, k$  costanti, allora se  $\alpha + ki$  è radice dell'equazione caratteristica (3.23) di molteplicità  $r$ ,  $r \geq 0$  un integrale particolare è della forma

$$u = t^r e^{\alpha t}(A \sin kt + B \cos kt),$$

essendo  $A, B$  due costanti da determinarsi.

3. Se

$$f(t) = (b_0 t^s + b_1 t^{s-1} + \dots + b_{s-1} t + b_s) e^{\alpha t} \quad (s \in \mathbb{N})$$

e se  $\alpha$  é radice dell'equazione caratteristica della (3.23) di molteplicitá  $r$ ,  $r \geq 0$ , un integrale particolare é della forma

$$u = t^r e^{\alpha t} (k_0 t^s + k_1 t^{s-1} + \dots + k_{s-1} t + k_s),$$

dove  $k_0, k_1, \dots, k_{s-1}, k_s$  sono costanti da determinare.

4. Se

$$f(t) = P(t) e^{\alpha t} (\sin kt + \cos kt),$$

dove  $\alpha$  e  $k$  sono costanti e  $P(x)$  é un dato polinomio di grado  $m$ , se  $\alpha + ki$  é radice dell'equazione caratteristica (3.23) di molteplicitá  $r$ ,  $r \geq 0$ , un integrale particolare é della forma

$$u = t^r e^{\alpha t} [P_1(t) \sin kt + P_2(t) \cos kt],$$

dove  $P_1(t), P_2(t)$  sono polinomi di grado  $\leq m$  i cui coefficienti sono da determinare.

### Equazioni differenziali esatte

Consideriamo l'equazione differenziale

$$A(t, u) dt + B(t, u) du = 0, \quad (3.27)$$

dove  $A(t, u), B(t, u)$  sono funzioni definite nello stesso dominio  $C$  aperto connesso di  $\mathbb{R}^2$ .

La (3.27) é un'equazione differenziale esatta se il suo primo membro é un differenziale esatto in  $C$ , cioè se esiste una funzione  $\varphi(t, u)$  tale che risulti in  $C$

$$d\varphi(t, u) = A(t, u)dt + B(t, u)du$$

e quindi, in generale, se é la derivata di un'altra equazione.

Se la (3.27) é un'equazione esatta e  $\varphi(t, u)$  é un integrale del primo membro della (3.27), allora il suo integrale generale é

$$\varphi(t, u) = c, \tag{3.28}$$

dove

$$\varphi(t, u) = \int_{t_0}^t A(s, u_0)ds + \int_{u_0}^u B(t, l)dl,$$

essendo  $(t_0, u_0)$  un punto arbitrario di  $C$ .

Piú precisamente,  $\varphi(t, u)$  é un potenziale di  $Adt + Bdu$ .

Se  $C$  é semplicemente connesso, allora condizione necessaria e sufficiente affinché la (3.27) sia un'equazione esatta é che

$$\frac{\partial A(t, u)}{\partial u} = \frac{\partial B(t, u)}{\partial t}.$$

Considerata un'equazione differenziale esatta, un'equazione dalla quale essa si ottiene per derivazione é detta *integrale primo* dell'equazione stessa.

Per un'equazione differenziale lineare

$$\alpha_0(t)u^{(n)} + \alpha_1(t)u^{(n-1)} + \dots + \alpha_{n-1}(t)u' + \alpha_n(t)u = f(t), \tag{3.29}$$

la condizione necessaria e sufficiente affinché sia esatta é espressa dall'uguaglianza

$$\alpha_0^{(n)}(t) - \alpha_1^{(n-1)}(t) + \dots + (-1)^n \alpha_n(t) = 0. \tag{3.30}$$

In particolare, se la (3.29) é a coefficienti costanti, la condizione (3.30) si riduce ad  $\alpha_n = 0$ .

Se l'equazione (3.29) non é esatta, si puó cercare di determinare un fattore tale che moltiplicando per esso i due membri della (3.29) questa si trasformi in un'equazione differenziale esatta. Un tale fattore é detto *fattore integrante* della (3.29). Supposto che  $\mu = \mu(t)$  sia un tale fattore, l'equazione

$$\alpha_0 \mu u^{(n)} + \alpha_1 \mu u^{(n-1)} + \dots + \alpha_{n-1} \mu u' + \alpha_n \mu u = \mu f(t),$$

con  $\alpha_i = \alpha_i(t)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , deve essere esatta e quindi per la (3.30) ciò avviene se e solo se

$$\frac{d^n}{dt^n}(\alpha_0 \mu) - \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(\alpha_1 \mu) + \dots + (-1)^n \alpha_n \mu = 0,$$

ció se  $\mu$  é un integrale dell'equazione differenziale

$$\frac{d^n}{dx^n}(\alpha_0 \lambda) - \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(\alpha_1 \lambda) + \dots + (-1)^n \alpha_n \lambda = 0, \quad \lambda = \lambda(t). \quad (3.31)$$

Quest'ultima equazione si chiama *equazione aggiunta* dell'equazione omogenea associata alla (3.29).

Tramite l'equazione (3.31) si puó verificare se una certa funzione  $\mu(t)$  sia un fattore integrante della (3.29) e anche, in certi casi, individuare un fattore integrante, perché ogni integrale della (3.31) é un fattore integrante della (3.29).

Trovato un fattore integrante della (3.29), in molti casi si riesce ad ottenere un integrale primo dell'equazione stessa. Integrando l'integrale primo, si perviene all'integrale generale della (3.29). Spesso la forma che puó avere un fattore integrante é suggerita dalla forma stessa dell'equazione.

### 3.1.3 Altri metodi per la risoluzione delle equazioni differenziali ordinarie

L'integrazione delle equazioni differenziali ordinarie in termini finiti, vale a dire la determinazione dell'integrale generale espresso mediante un numero

finito di funzioni elementari, é possibile soltanto in un numero limitato di casi.

### **Determinazione della soluzione di equazioni differenziali tramite serie di potenze**

Il *metodo di integrazione per serie*, é un metodo che permette di ottenere l'integrale generale (oppure l'integrale particolare) sotto forma di serie (di potenze), soddisfacente ad opportune condizioni, e si applica per l'integrazione delle equazioni differenziali che non si possono integrare in termini finiti, o per quelle la cui integrazione in termini finiti presenta notevoli difficoltà di calcolo.

Data un'equazione differenziale ordinaria, supponiamo di voler utilizzare questo metodo per determinare l'integrale particolare  $u(t)$  sotto forma di serie di potenze convergente in un opportuno intervallo; ciò é equivalente a dire che la serie di potenze della forma

$$u(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + \cdots + a_n(t - t_0)^n + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(t - t_0)^i$$

soddisfa l'equazione data.

Mostriamo questo metodo tramite un esempio interessante, nel quale la soluzione che determineremo non si possa esprimere utilizzando le "ordinarie" funzioni trascendenti elementari. Consideriamo l'equazione

$$u'' - tu = 0$$

detta *equazione di Airy*, che é lineare omogenea del secondo ordine, e ogni sua soluzione é definita su tutto  $\mathbb{R}$ . Per esprimere l'integrale generale, dovremmo individuare due soluzioni linearmente indipendenti,  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$ , per poi scrivere  $u = c_1u_1(t) + c_2u_2(t)$ , con  $c_1$  e  $c_2$  costanti reali arbitrarie,

ma purtroppo in questo caso non é possibile determinare analiticamente tali soluzioni.

Supponiamo che la soluzione sia della forma

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k,$$

dove la serie in questione ha un raggio di convergenza  $\rho$  non nullo. Poiché nell'intervallo di convergenza  $J = (-\rho, \rho)$  é lecito derivare ed integrare termine a termine, abbiamo

$$u'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} t^k,$$

$$u''(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) a_{k+1} t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) a_{k+2} t^k.$$

(la serie cosí ottenuta ha ancora raggio di convergenza  $\rho$ ). Sostituendo le serie nell'equazione da risolvere si ottiene:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) a_{k+2} t^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{k+1} = 0;$$

traslado l'indice della seconda serie si ottiene

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) a_{k+2} t^k - \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} t^k = 0$$

che si può anche scrivere come:

$$2a_2 + \sum_{k=1}^{\infty} [(k+1)(k+2) a_{k+2} - a_{k-1}] t^k = 0.$$

Chiaramente deve essere  $a_2 = 0$ , e inoltre  $a_{k+2} = \frac{a_{k-1}}{(k+1)(k+2)}$  per ogni  $k \geq 1$ . In questo caso ciascun termine della successione  $\{a_k\}$  si ottiene come un



opportuno multiplo del termine che si trova tre posti prima. Otteniamo allora facilmente

$$a_2 = a_5 = a_8 = 0$$

$$a_3 = \frac{a_0}{2 \cdot 3}, \quad a_6 = \frac{a_3}{5 \cdot 6} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6}, \quad a_9 = \frac{a_6}{8 \cdot 9} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9}, \quad \dots$$

$$a_4 = \frac{a_1}{3 \cdot 4}, \quad a_7 = \frac{a_4}{6 \cdot 7} = \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}, \quad a_{10} = \frac{a_7}{9 \cdot 10} = \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10}, \quad \dots$$

e in questo modo abbiamo ottenuto tutti i termini della serie. Dopo aver notato che é possibile scrivere in modo piú compatto i termini della serie sopra, possiamo allora scrivere l'integrale generale dell'equazione di Airy come segue:

$$u = c_1 + c_2 t + \frac{1}{3!} c_1 t^3 + \frac{2}{4!} c_2 t^4 + \frac{1 \cdot 4}{6!} c_1 t^6 + \frac{2 \cdot 5}{7!} c_2 t^7 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{9!} c_1 t^9 + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{10!} c_2 t^{10} + \dots,$$

dove abbiamo sostituito  $a_0$  e  $a_1$  rispettivamente con  $c_1$  e  $c_2$ . Separando i termini con  $c_1$  e  $c_2$  nell'equazione sopra si ottiene

$$u = c_1 \left( 1 + \frac{1}{3!} t^3 + \frac{1 \cdot 4}{6!} t^6 + \dots \right) + c_2 \left( t + \frac{2}{4!} t^4 + \frac{2 \cdot 5}{7!} t^7 + \dots \right),$$

il che mostra che questo integrale generale si puó scrivere come combinazione lineare delle due funzioni scritte tra parentesi, le quali si possono anche scrivere rispettivamente nella forma:

$$f(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \dots (3k-2)}{(3k)!} t^{3k} \quad g(t) = t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \dots (3k-1)}{(3k+1)!} t^{3k+1}.$$

Osserviamo che entrambe le funzioni sopra definite hanno dominio  $\mathbb{R}$ . Infatti, per quanto riguarda la funzione  $f$  (ma analogamente ciò vale per  $g$ ), il criterio del rapporto fornisce:

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1 \cdot 4 \cdots (3k-2)}{(3k)!}}{\frac{1 \cdot 4 \cdots (3k-2)(3k+1)}{(3k+3)!}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(3k+3)!}{(3k)!(3k+1)} = \lim_{k \rightarrow \infty} (3k+3)(3k+2) = +\infty.$$

Il procedimento visto sopra si potrebbe generalizzare, considerando coefficienti non necessariamente polinomiali. Ad esempio, consideriamo nel caso  $n = 2$  la generica equazione del secondo ordine omogenea in forma normale  $u'' + a(t)u' + b(t)u = 0$ , e supponiamo che le funzioni  $a(t)$  e  $b(t)$  siano analitiche, cioè che ciascuna delle due ammetta uno sviluppo in serie di potenze valido in un intervallo  $(-\rho, \rho)$ . In queste ipotesi, si può dimostrare che l'integrale generale dell'equazione data è anch'esso costituito da una serie di potenze convergente nello stesso intervallo. C'è però una grave difficoltà pratica nell'applicazione di questo procedimento: infatti in generale occorre aspettarsi che ciascun coefficiente della serie da  $a_2$  in poi si trovi tramite una formula esplicita che però contiene tutti i termini precedentemente calcolati. Perciò, è possibile calcolare uno dopo l'altro un qualsiasi numero di coefficienti, ma in generale non si riesce a scrivere una formula esplicita che fornisca direttamente  $a_k$  per un generico  $k$ . In realtà, la difficoltà di scrivere una formula "chiusa" per  $a_k$  che consenta di calcolare il  $k$ -esimo termine in modo diretto (senza dover calcolare esplicitamente tutti i termini precedenti), si presenta anche quando la relazione di ricorrenza (cioè la regola che definisce un termine della successione con una formula che contiene uno o più dei termini precedenti) contiene sempre lo stesso numero di termini.

## Applicazione della trasformata di Laplace alle equazioni differenziali

Riprendiamo i concetti fondamentali sulla trasformata di Laplace, in quanto quest'importante strumento dell'Analisi risulta di notevole interesse nel risolvere anche le equazioni differenziali e di seguito riporteró un esempio esemplificativo.

Sia  $f : [0, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$  (o  $\mathbb{C}$ ) una funzione misurabile (oppure sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , (o  $\mathbb{C}$ ) tale che  $f(x) = 0 \quad \forall x < 0$ ).  $f$  si dice *Laplace trasformabile* se esiste  $s_0 \in \mathbb{R}$  tale che l'integrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-s_0 x} f(x) dx$$

converge. L'integrale sopra, indicato con  $Lf(s_0)$ , si chiama *trasformata di Laplace* di  $f$  in  $s_0$ . Poiché, per  $x > 0$  e  $s > s_0$ ,  $e^{-sx}|f(x)| \leq e^{-s_0 x}|f(x)|$ , se esiste  $Lf(s_0)$  allora esiste  $Lf(s)$ ,  $\forall s > s_0$ . Poniamo dunque:

$$\lambda(f) = \inf\{s \in \mathbb{R} : \exists Lf(s)\}.$$

$\lambda(f)$  si dice *ascissa di convergenza* di  $f$ . Si osserva poi che per  $s_0 = \lambda(f)$ ,  $Lf(s_0)$  può esistere o meno.

Riporto di seguito alcune delle piú importanti proprietá della trasformata di Laplace che saranno utilizzate nella risoluzione delle equazioni differenziali.

1.  $L$  é un operatore lineare sullo spazio delle funzioni trasformabili, ossia se  $f$  e  $g$  sono  $L$ -trasformabili e  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , allora  $c_1 f + c_2 g$  é  $L$ -trasformabile (nell'intersezione dei semipiani di convergenza di  $f$  e  $g$ ) e, come conseguenza ovvia della definizione di trasformata si ha:

$$L(c_1 f + c_2 g) = c_1 Lf + c_2 Lg.$$

2. Se  $f$  é  $L$ -trasformabile,  $Lf(s)$  é una funzione olomorfa nel semipiano di convergenza. Valgono le seguenti formule di derivate:

$$\frac{d^k}{ds^k}(Lf)(s) = L((-x)^k f(x))(s).$$

3. Se  $f$  é  $L$ -trasformabile,  $Lf(s) \rightarrow 0$  per  $\text{Re } s \rightarrow +\infty$ .
4. Se  $f$  é una funzione assolutamente continua e  $f'$  é trasformabile, allora anche  $f$  é trasformabile e vale

$$L(f')(s) = s(Lf)(s) - f(0).$$

5. Dal punto precedente segue in generale che se  $f \in C^{n-1}$ ,  $f^{(n-1)}$  assolutamente continua (AC),  $f^{(n)}$  trasformabile, allora  $f$  é trasformabile e:

$$L(f^{(n)})(s) = s^n(Lf)(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) + \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

6. Siano  $f$  e  $g$  trasformabili. Poniamo:

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-y)g(y)dy.$$

Allora  $f * g$  é trasformabile (con  $\lambda(f * g) \leq \max(\lambda(f), \lambda(g))$ ) e vale la

$$L(f * g)(s) = (Lf)(s) \cdot (Lg)(s).$$

Si ricorda che la *convoluzione finita* ( $f * g$ ) é definita quasi ovunque e sta in  $L^1_{loc}(0, +\infty)$  ogniqualvolta  $f, g \in L^1_{loc}(0, +\infty)$ .

7. Una funzione  $f$  é determinata dalla sua trasformata, ossia se  $\forall s \quad Lf(s) = Lg(s)$ , allora  $f = g$ .

*Risoluzione di equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti*

Risolviamo ora il seguente sistema di Cauchy:

$$\begin{cases} u''(t) + 2u'(t) + 2u(t) = f(t) & \text{per } t > 0 \\ u(0) = u'(0) = 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

Applichiamo la trasformata di Laplace ad entrambi i membri ricordando il punto 5. sopra e ponendo  $U = Lu$  e  $F = Lf$  si ottiene:

$$\begin{cases} s^2U(s) - su(0) - u'(0) + 2sU(s) - 2u(0) + 2U(s) = F(s) \\ u(0) = u'(0) = 0. \end{cases} \quad (3.33)$$

e ricavando  $U(s)$  dalla prima equazione del sistema si ha:

$$U(s) = F(s) \cdot \frac{1}{s^2 + 2s + 2}.$$

In questo modo si é determinata  $U$ , cioè  $Lu$ ; a questo punto bisogna quindi antitrasformare il secondo membro. Per fare questa operazione é necessario cercare una  $g(t)$  tale che  $Lg(s) = \frac{1}{s^2+2s+2}$ . Trovata la  $g$ , poiché  $Lu(s) = Lf(s) \cdot Lg(s) = L(f * g)(s)$  (dove l'ultima uguaglianza vale per il teorema della convoluzione, punto 6.), si ha:

$$u(t) = (f * g)(t).$$

Per antitrasformare  $\frac{1}{s^2+2s+2}$  osserviamo che

$$\frac{1}{s^2 + 2s + 2} = \frac{1}{(s + 1)^2 + 1}.$$

Confrontando quanto ottenuto con la formula

$$L(e^{at} \sin(bt)) = \frac{b}{(s - a)^2 + b^2},$$

per  $a = -1$ ,  $b = 1$ , si ha:

$$L(e^{-t} \sin(t))(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}, \quad g(t) = e^{-t} \sin t$$

e

$$u(t) = \int_0^t e^{-(t-x)} \sin(t-x) f(x) dx,$$

formula che assegna la soluzione  $u$  per ogni  $f$  data.

*Osservazione 3.1.2.* Nella formula finale il dato  $f$  compare direttamente, non mediante la sua trasformata. Ossia, la trasformata di Laplace é il metodo con cui si trova la formula risolutiva, la quale non richiede piú il calcolo effettivo della trasformata di  $f$  e dell'antitrasformata di  $u$ . Si nota inoltre che un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti si puó sempre risolvere con metodi elementari (integrale generale dell'equazione omogenea + integrale generale dell'equazione non omogenea). Quando  $f$  non é però specificata, la determinazione di un integrale particolare dell'equazione non omogenea ad esempio mediante il metodo della variazione delle costanti arbitrarie porta a calcoli piuttosto laboriosi. Il vantaggio della trasformata di Laplace é soprattutto nel trattare l'equazione non omogenea, inoltre si presta bene a risolvere un problema di Cauchy con dati nell'origine, in quanto questi dati compaiono nella formula delle derivate.

### **Applicazione della trasformata di Fourier alle equazioni differenziali**

In questo paragrafo mostreró tramite un esempio come risolvere le equazioni differenziali facendo uso della trasformata di Fourier, e riprenderó le proprietà fondamentali di quest'ultima che sono rilevanti per la sola risoluzione delle equazioni differenziali.

Sia  $f \in L^1(\mathbb{R})$ ; preliminarmente ricordiamo che la *trasformata di Fourier* di  $f$  é:

$$Ff(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx.$$

Se inoltre  $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$  vale la formula di inversione

$$f(x) = (\widehat{\widehat{f}})(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

Consideriamo ora l'equazione

$$u'(t) - au(t) = H(t)e^{-at} \quad t \in \mathbb{R}, a > 0, H(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (3.34)$$

Ci si può aspettare una soluzione  $C(\mathbb{R})$  o  $C^1(\mathbb{R})$ , data la discontinuitá del termine noto. Supponendo che l'equazione abbia soluzione in  $L^1(\mathbb{R})$ , si può trasformare con Fourier nel seguente modo:

$$it\widehat{u} - a\widehat{u} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a + it}. \quad (3.35)$$

Il secondo membro dell'equazione appena scritta deriva dal fatto che la trasformata di Fourier del secondo membro dell'equazione data, con  $H$  funzione di "Heaviside" e  $a > 0$  é:

$$Ff(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-a\xi} e^{-it\xi} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a + it}.$$

L'equazione (3.35) diventa:

$$\widehat{u} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a - it} \cdot \frac{1}{a + it} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a^2 + t^2}.$$

Poiché  $F(e^{-a|t|}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + t^2}$ , in quanto

$$F(f(at))(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(at)e^{-it\xi} dt = (at = x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{a} f(x)e^{-ix\frac{\xi}{a}} dx = \frac{1}{a} (Ff) \left( \frac{\xi}{a} \right)$$

si ha:

$$u(t) = -\frac{1}{2a} e^{-a|t|}.$$

*Osservazione 3.1.3.* Operando a questo modo si é ottenuta una sola soluzione. Se si integra l'equazione con metodi elementari, o con la trasformata di Laplace (per  $t > 0$ ) si trova:

$$u(t) = \begin{cases} c_1 e^{at} & t < 0 \\ c_2 e^{at} + \frac{sh(at)}{a} & t < 0 \end{cases} \quad (3.36)$$

con  $c_1$  e  $c_2$  costanti arbitrarie. Se si impone che  $u$  sia continua si trova  $c_1 = c_2$ ; se si impone che  $u$  sia  $L^1(\mathbb{R})$  si trova  $c_2 = -\frac{1}{2a}$ . É stato necessario supporre implicitamente che  $u \in L^1$  per calcolare  $\widehat{u}$ , e  $u$  continua (anzi assolutamente continua) per affermare che  $\widehat{u}' = it\widehat{u}$ , infatti la dimostrazione di questa formula usa l'integrale per parti, che vale per funzioni assolutamente continue.

## 3.2 Metodi numerici

Come già ribadito, é impossibile risolvere la maggior parte delle equazioni differenziali, nel senso di ottenere un'espressione esplicita per le soluzioni. In mancanza di tali soluzioni é però possibile ottenere molte informazioni su di esse attraverso un approccio grafico (campo di direzioni) o un approccio numerico.

Per introdurre questo argomento, supponiamo di dover tracciare il grafico della soluzione del problema ai valori iniziali



$$u' = f(t, u) \quad u(t_0) = u_0,$$

dove  $f(t, u)$  é un'espressione in  $t$  e  $u$ .

Una delle interpretazioni dell'equazione differenziale é che la pendenza in un punto generico  $(t_i, u_i)$  del grafico (chiamato *curva soluzione*) é uguale al valore che si ottiene sostituendo le coordinate del punto in esame in  $f(t, u)$ . Quindi la curva soluzione in un intorno del punto  $(t_i, u_i)$  puó essere approssimata da un segmento passante per tale punto e con pendenza calcolata.

É ovviamente necessario calcolare le pendenze (tramite sostituzione) in un grande numero di punti. Il risultato cosí ottenuto si chiama *campo di direzioni* o *campo di pendenze* e permette di visualizzare la generica forma di una curva soluzione indicando la direzione in cui si muove la curva in ogni punto. Avendo a disposizione la condizione iniziale é possibile cosí tracciare la curva in modo che risulti parallela ai segmenti piú vicini.

### ***Metodi numerici***

In questa sezione intendo presentare in che cosa consiste risolvere un'equazione differenziale da un punto di vista numerico, cercando solamente di dare un'introduzione dell'argomento. Questo per non trascurare un aspetto importante in cui si stanno sviluppando oggi le equazioni differenziali, ma in questa sede non si ha la pretesa di trattare questo tema né in maniera esauriente, né tanto meno troppo rigorosa.

L'idea base su cui poggia l'uso dei campi di direzione, di cui ho parlato in precedenza, puó essere sfruttata per trovare approssimazioni numeriche delle soluzioni di equazioni differenziali.

Per prima cosa é necessario sottolineare che *risolvere un'equazione differen-*

*ziale per via numerica* significa utilizzare un metodo mediante il quale individuare un certo numero di “istanti di integrazione” e calcolare solo in questi il valore assunto dalla soluzione.

In particolare, data l'equazione nella forma

$$y' = f(t, y)$$

e definita la variabile  $t$  nell'intervallo  $[T_0; T_f]$ , assegnata la condizione iniziale  $u(T_0) = u_0$ , si determina la soluzione solo in un numero finito di punti  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , tali che  $T_0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n = T_f$ .

Un criterio mediante cui classificare i metodi numerici per risolvere tali equazioni é dato dal numero di passi utilizzato, cioè il metodo si definisce *ad un passo* se per ogni  $n > 0$ ,  $u_{n+1}$  dipende solo da  $u_n$ , in caso contrario si parla di metodi a piú passi o *multistep*. In generale quindi il valore della soluzione nel punto  $t_{i+1}$  é dato da:

$$u(t_{i+1}) = u(t_i) + \Delta(t_i; u; h; f),$$

con  $h_i = t_{i+1} - t_i, i = 1, \dots, n$ .

Si deduce da ciò che la “bontá” della soluzione dipende dal passo  $h$  e dalla funzione  $\Delta$ . É facile comprendere come la riduzione del passo  $h$  favorisca la precisione del risultato, ma allo stesso tempo, dato che tali metodi vengono implementati in calcolatori, é necessario tenere conto anche della conseguente dilatazione dei tempi di calcolo e degli errori di tipo numerico che possono intervenire. Per conciliare entrambe le esigenze sono nati i cosiddetti *metodi a passo variabile*, che utilizzano un passo “piccolo” solo dove esso sia strettamente necessario.

Presentiamo sinteticamente alcuni metodi ad un passo.

### ***Eulero in avanti o esplicito.***

Questo metodo viene cosí chiamato per il fatto che la soluzione all'istante  $t_{i+1}$

viene calcolata solo a partire da quella nota all'istante precedente. Per prima cosa é necessario discretizzare l'intervallo  $[T_0; T_f]$  in  $n - 1$  sottointervalli di ampiezza  $h = (T_f - T_0)/(n - 1)$ , introducendo i nodi  $t_i = t_1 + (i - 1)h$  con  $i = 2, \dots, n$ , e quindi la discretizzazione dell'equazione data viene effettuata approssimando la derivata con il rapporto incrementale nella forma:

$$u' = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \quad i = 1, \dots, n - 1$$

in modo tale che l'equazione data diventa

$$u_{i+1} = u_i + hf(t_i, u_i) \quad i = 1, \dots, n - 1$$

***Eulero all'indietro o implicito.***

É possibile utilizzare le differenze finite all'indietro per esprimere il rapporto incrementale, ovvero

$$\frac{du}{dt} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h},$$

perció l'equazione

$$u'(t) = f(t, u)$$

viene scritta nella forma approssimata

$$u_{i+1} = u_i + hf(t_{i+1}, u_{i+1}) \quad i = 1, \dots, n - 1$$

e quindi il valore  $u_{i+1}$  é la soluzione  $u^*$ , ad ogni passo temporale, definita implicitamente dall'equazione non lineare  $u^* - u_i - hf(t_{i+1}, u^*) = 0$ .

Se  $f$  ha una forma particolarmente semplice (per esempio é lineare) é possibile esplicitare  $u^*$  direttamente, altrimenti é necessario ricorrere ad un metodo numerico per la soluzione di equazioni non lineari; a tal proposito si puó scegliere ad esempio il metodo di Newton. Da ciò risulta che i metodi impliciti sono assai piú costosi di quelli espliciti, in quanto ad ogni livello temporale

$t_{i+1}$  essi richiedono la soluzione di un problema non lineare per calcolare  $u_{i+1}$ .

### ***Metodo di Crank-Nicolson.***

Sommando membro a membro il generico passo dei metodi di Eulero in avanti e di Eulero all'indietro si ottiene il cosiddetto *metodo di Crank-Nicolson*, definito da:

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}[f_i + f_{i+1}], \quad i = 1, \dots, n - 1,$$

ove per brevità si è posto  $f_i$  ad indicare  $f(t_i, u_i)$ .

Si tratta di un metodo implicito ad un passo, e di seguito ne vedremo analizzate alcune sue caratteristiche peculiari.

Vediamo ora brevemente altri metodi che consentono di raggiungere un elevato ordine di accuratezza.

### ***Metodi Runge-Kutta.***

Si tratta di metodi ad un passo che coinvolgono diverse valutazioni della funzione  $f(t, u)$  in ciascun intervallo  $[t_i; t_{i+1}]$ . Uno tra i più noti di questa “famiglia” di metodi assume la seguente forma

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

dove

$$\begin{aligned} K_1 &= f(t_i; u_i) \\ K_2 &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{h}{2}K_1\right), \\ K_3 &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{h}{2}K_2\right) \\ K_4 &= f(t_{i+1}, u_i + hK_3). \end{aligned}$$

Esso è un metodo esplicito, di ordine 4 rispetto ad  $h$ ; ad ogni passo temporale

richiede quattro valutazioni di  $f$ . Si possono costruire altri metodi Runge-Kutta, impliciti od espliciti, di ordine arbitrario; l'importante é che il passo di integrazione vari in modo da garantire che l'errore si mantenga al di sotto di una tolleranza fissata.

### **Metodi multistep.**

Sono metodi nei quali per il calcolo di ogni nuovo valore della soluzione  $u_{i+1}$  vengono utilizzati diversi valori passati della soluzione  $u_i, u_{i-1}, u_{i-2}, \dots$ , ovvero, si presentano nella formulazione generica:

$$u_{i+1} = u_i + \sum_{j=0} m\beta_j f(t_{i-j}, u_{i-j}).$$

Essi possono essere derivati applicando il teorema fondamentale del calcolo integrale al problema di Cauchy, ottenendo

$$u_{i+1} = u_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt, \quad (3.37)$$

ed approssimando quindi l'integrale con una formula di quadratura basata sull'interpolazione di  $f$  in un opportuno insieme di nodi. Un esempio notevole di metodo multistep esplicito a tre passi del terz'ordine é dato dalla formula di Adams-Bashforth

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{12}(23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2})$$

ottenuta dalla (3.37) sostituendo  $f$  con il suo polinomio interpolatore di grado 2 nei nodi  $t_{i-2}, t_{i-1}, t_i$ .

Occupiamoci ora delle caratteristiche che posso avere i metodi, mediante le quali poter valutare quale di essi risulta piú giusto utilizzare nelle varie circostanze, utilizzando in particolare come esempio esplicativo il metodo di Eulero in avanti.

### ***Analisi della convergenza - Consistenza***

Un metodo numerico si dice *convergente* se

$$\forall i = 1, \dots, n \quad |u_i - y_i| \leq C(h)$$

dove  $C(h)$  é un infinitesimo rispetto ad  $h$  per  $h$  che tende a 0. Se  $C(h) = O(h^p)$  per qualche  $p > 0$ , si dice che il metodo é convergente con ordine  $p$ . Mostriamo ora, a mó di esempio, che il metodo di Eulero in avanti risulta convergente; per prima cosa é necessario scrivere l'errore nel modo seguente:

$$e_i = u_i - y_i = (u_i - u_i^*) + (u_i^* - y_i) \quad (3.38)$$

dove  $y_i = y(t_i)$  e

$$u_i^* = y_{i-1} + hf(t_{i-1}, y_{i-1}),$$

ossia  $u_i^*$  denota la soluzione numerica calcolata in  $t_i$  a partire dalla soluzione esatta al tempo  $t_{i-1}$ . Il termine  $u_i^* - y_i$  della (3.38) rappresenta l'errore prodotto da un passo del metodo di Eulero in avanti, mentre il termine  $u_i - u_i^*$  rappresenta la propagazione da  $t_{i-1}$  a  $t_i$  dell'errore accumulato al livello temporale precedente. Il metodo converge se entrambi i termini tendono a 0 quando  $h \rightarrow 0$ . Supponendo che la derivata seconda di  $y$  esista e sia continua, si puó scrivere

$$u_i^* - y_i = \frac{h^2}{2} y''(\xi_i), \quad \text{per un opportuno } \xi_i \in (t_{i-1}, t_i). \quad (3.39)$$

Per un qualunque metodo, la quantità  $\tau_i(h) = (u_i^* - y_i)/h$  rappresenta l'errore che si sarebbe generato forzando la soluzione esatta a soddisfare lo schema numerico e, per questa ragione, é detto *errore di troncamento locale*.

L'*errore di troncamento globale* é definito come

$$\tau(h) = \max_{i=1, \dots, n} |\tau_i(h)|.$$

Alla luce della (3.39) si deduce che per il metodo di Eulero in avanti l'errore di troncamento globale assume la forma seguente

$$\tau(h) = Mh/2, \quad (3.40)$$

dove  $M = \max_{t \in [T_0, T_f]} |f'(t, y(t))|$ .

Dalla (3.39) si deduce inoltre che  $\lim_{h \rightarrow 0} \tau_i(h) = 0$ . In generale, un metodo per il quale l'errore di troncamento locale tende a 0 per  $h$  tendente a 0 verrà detto *consistente*. Si dice inoltre che è consistente con ordine  $p$  se  $\tau(h) = O(h^p)$  per un opportuno intero  $p \geq 1$ .

Consideriamo ora il primo addendo della (3.38). Si ha

$$u_i^* - u_i = e_{i-1} + h[f(t_{i-1}, y_{i-1}) - f(t_{i-1}, u_{i-1})]. \quad (3.41)$$

Di conseguenza, essendo  $f$  lipschitziana rispetto al suo secondo argomento, si trova

$$|u_i^* - u_i| \leq (1 + hL)|e_{i-1}|.$$

Se  $e_0 = 0$ , la relazione precedente diventa

$$\begin{aligned} |e_i| &\leq |u_i - u_i^*| + |u_i^* - y_i| \leq (1 + hL)|e_{i-1}| + h\tau_i(h) \\ &\leq [1 + (1 + hL) + \dots + (1 + hL)^{i-1}]h\tau(h) = \frac{(1 + hL)^i - 1}{L}\tau(h) \leq \frac{e^{L(t_i - T_0)} - 1}{L}\tau(h), \end{aligned}$$

avendo usato l'identità

$$\sum_{k=0}^{i-1} (1 + hL)^k = [(1 + hL)^i - 1]/hL,$$

la disuguaglianza  $1 + hL \leq e^{hL}$  ed avendo osservato che  $nh = t_i - T_0$ .

Si trova quindi

$$|e_i| \leq \frac{e^{L(t_i - T_0)} - 1}{L} \frac{M}{2} h, \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad (3.42)$$

pertanto il metodo di Eulero in avanti converge con ordine 1.

Si nota che l'ordine del metodo é uguale all'ordine dell'errore di troncamento locale: questa é una proprietá comune a molti schemi per la risoluzione delle equazioni differenziali ordinarie.

*Osservazione 3.2.1.* La stima di convergenza (3.42) é piuttosto severa, in quanto contiene un termine che cresce esponenzialmente rispetto a  $t_i$ . Essa si ottiene semplicemente richiedendo che  $f$  sia continua e Lipschitziana. Una stima migliore, precisamente  $|e_i| \leq Mh(t_i - T_0)/2$ , ovvero in cui la crescita sia solo lineare rispetto a  $t_i$ , si puó ottenere se  $f$  soddisfa all'ulteriore requisito  $\partial f(t, y)/\partial y \leq 0$  per ogni  $t \in [T_0, T_f]$  e per ogni  $-\infty < y < +\infty$ . Infatti in tal caso, usando lo sviluppo in serie di Taylor, dalla (3.41) si trova

$$u_i^* - u_i = (1 + h\partial f/\partial y(t_{i-1}, \eta_i))e_{i-1},$$

per cui  $|u_i^* - u_i| \leq |e_{i-1}|$ , purché  $h < 2/\max_t |\partial f/\partial y(t, y(t))|$ . Di conseguenza  $|e_i| \leq |u_i^* - u_i| + |e_{i-1}| \leq |e_0| + nh\tau(h)$  e si conclude grazie alla (3.40). La restrizione sul passo  $h$  si puó interpretare come condizione di stabilitá.

*Osservazione 3.2.2.* (Consistenza) La proprietá di consistenza é necessaria per poter aver la convergenza. Se infatti essa non fosse soddisfatta, il metodo introdurrebbe ad ogni passo un errore non infinitesimo rispetto ad  $h$  che, sommandosi con gli errori pregressi, pregiudicherebbe in modo irrimediabile la possibilitá che l'errore globale tenda a 0 quando  $h \rightarrow 0$ .

Con calcoli analoghi si puó dimostrare anche il metodo di Eulero all'indietro



é convergente di ordine 1 rispetto ad  $h$ .

Facciamo ora alcune considerazioni sul metodo di Crank-Nicolson sopra brevemente presentato.

L'errore di troncamento locale di questo metodo é dato da:

$$\begin{aligned} h\tau_i(h) &= y(t_i) - y(t_{i-1}) - \frac{h}{2}[f(t_i, y(t_i)) + f(t_{i-1}, y(t_{i-1}))] \\ &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t, y(t))dt - \frac{h}{2}[f(t_i, y(t_i)) + f(t_{i-1}, y(t_{i-1}))]. \end{aligned}$$

L'ultima uguaglianza segue dal teorema fondamentale del calcolo integrale; il secondo termine esprime l'errore commesso utilizzando la formula del trapezio semplice. Se supponiamo che  $y \in C^3$  si ricava che

$$\tau_i(h) = -\frac{h^2}{12}y^{(3)}(\xi_i) \quad \text{per un opportuno } \xi_i \in (t_{i-1}, t_i).$$

Il metodo di Crank-Nicolson é dunque consistente di ordine 2, cioè presenta un errore di troncamento locale che tende a 0 come  $h^2$ . Con calcoli analoghi a quelli mostrati per il metodo di Eulero in avanti, si verifica inoltre che é anche convergente con ordine 2 rispetto ad  $h$ .

### ***Stabilità***

Tra i possibili tipi di stabilità che si possono considerare per la risoluzione numerica di un problema di Cauchy, vi é la cosiddetta *zero-stabilità*, che garantisce, che in un intervallo limitato e fissato, piccole perturbazioni sui dati producano perturbazioni limitate sulla soluzione quando  $h \rightarrow 0$ .

Precisamente, un metodo numerico per l'approssimazione del problema di Cauchy, con  $I = [T_0, T_f]$ , é detto *zero-stabile*, se esiste  $C > 0$ , tale che per ogni  $\delta > 0$  e per ogni  $h$

$$|z_i - u_i| \leq C\delta, \quad 0 \leq i \leq n - 1,$$

dove  $C$  é una costante che puó dipendere dalla lunghezza dell'intervallo di integrazione  $I$ ,  $z_i$  é la soluzione che si otterrebbe applicando il metodo numerico al problema *perturbato* e  $\delta$  indica la massima grandezza della perturbazione. Naturalmente  $\delta$  deve essere sufficientemente piccolo da garantire che il problema perturbato ammetta comunque un'unica soluzione sull'intervallo di integrazione.

Per un metodo ad un passo consistente si puó dimostrare che la zero-stabilità é una conseguenza del fatto che  $f$  é continua e Lipschitziana rispetto al suo secondo argomento; in tal caso,  $C$  dipende da  $e^{(T_f - T_0)L}$ , dove  $L$  é la costante di Lipschitz. D'altra parte questa proprietá non vale necessariamente per altre famiglie di metodi.

Concludiamo il paragrafo con la seguente proprietá, nota come il *teorema di equivalenza di Lax-Ritchmyer*, che illustra il ruolo decisivo giocato dalla proprietá di zero-stabilità: *ogni metodo consistente é convergente se e solo se é zero stabile.*

In particolare nello studio di fenomeni fisici che richiedono la risoluzione del problema di Cauchy, si é interessati a determinarne la soluzione per tempi grandi, virtualmente infiniti. Si é aperta quindi un'ulteriore ricerca verso metodi che, pur in corrispondenza di  $h$  sufficientemente grandi, consentano di ottenere un valore comunque accurato della soluzione  $u(t)$  anche per  $t$  che tende all'infinito. Non approfondiremo in questa sede la *stabilità su intervalli illimitati*.

Terminiamo il capitolo confrontando, tramite un esempio, alcuni dei metodi sopra illustrati. Prendiamo in considerazione l'equazione differenziale

$$y' = -y - 5e^{-t} \sin(5t),$$

con condizione iniziale  $y(0) = 1$ .

La soluzione esatta  $y(t) = e^{-t} \cos(5t)$ .

Facendo uso di MatLab determiniamo e poi confrontiamo le soluzioni ricavate tramite differenti metodi numerici utilizzando 100 passi; per fare ciò il modo piú conveniente é l'osservazione dei grafici ottenuti a partire dai valori discreti generati dai singoli metodi.

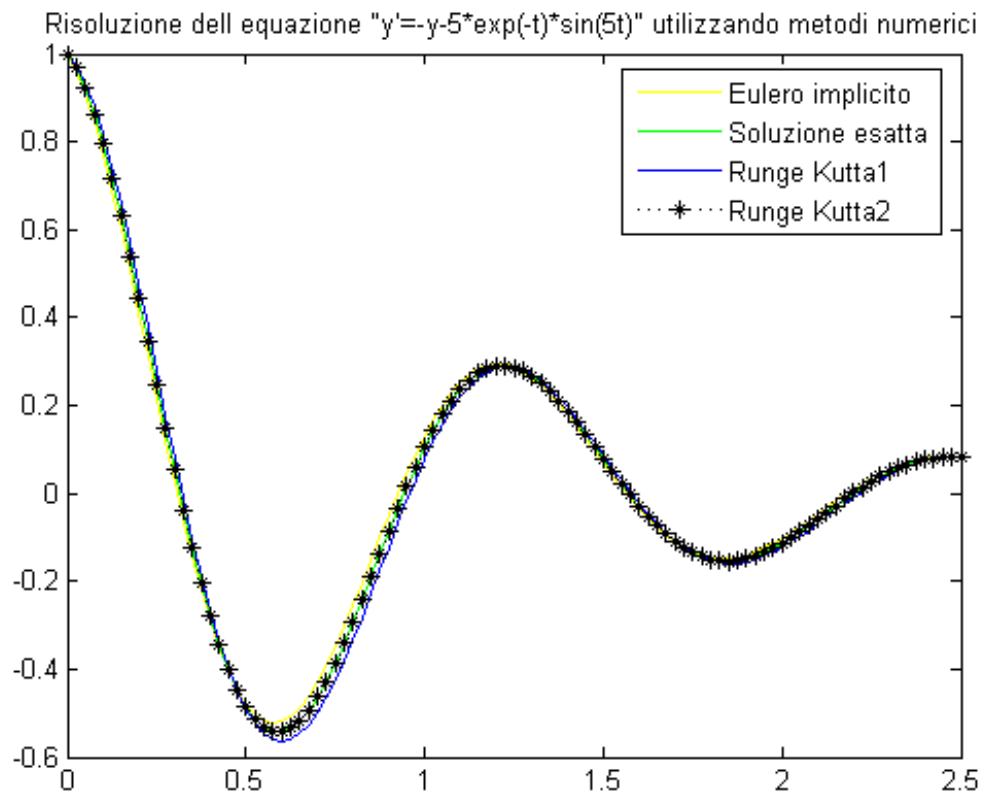
Nell'esempio che riporto si determina la soluzione nell'intervallo  $t \in [0; 5]$ , usando 100 passi tramite i metodi di Eulero in avanti, Eulero all'indietro, Runge-Kutta 1 e Runge-Kutta 2; questi ultimi hanno gli stessi input e gli stessi output ma differiscono per il numero di valutazioni funzionali che é necessario fare ad ogni passo: all'aumentare dell'ordine aumenta il numero di valutazioni funzionali richieste; ciò, come si osserverá dai grafici, permetterà una maggiore accuratezza.

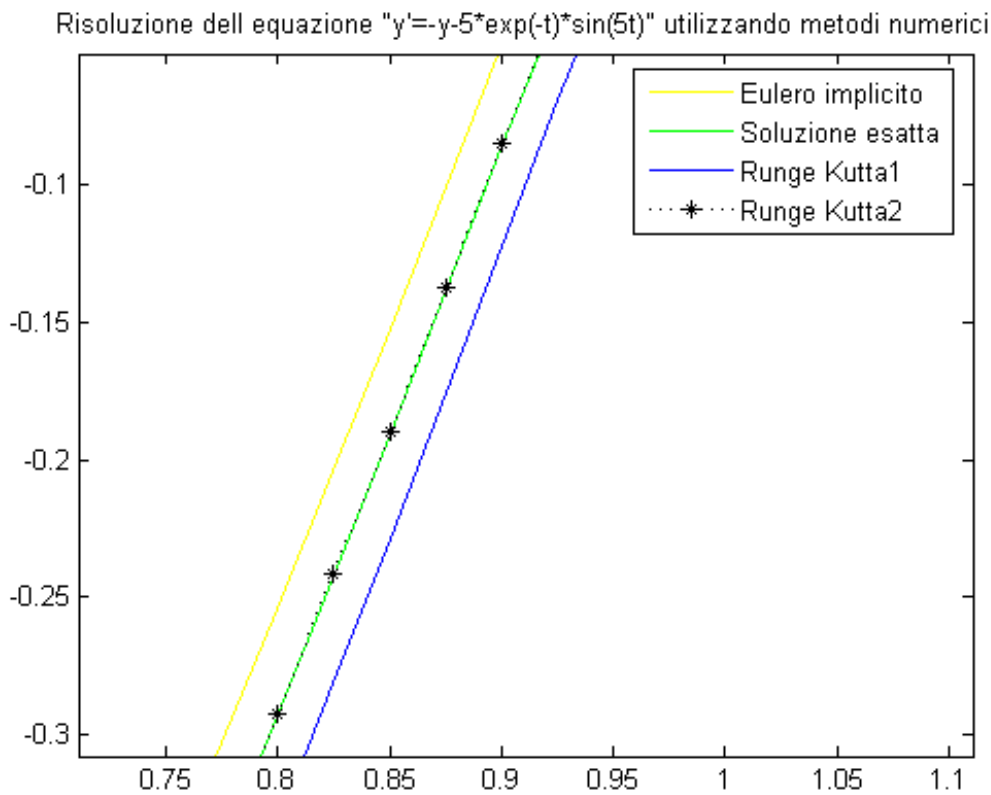
Di seguito lo script contenente le chiamate ai singoli metodi.

```
y0=1;t0=0;tf=2.5;

[t,y]=beulero('funz',[t0;tf],y0,100);
plot(t,y,'y')
exa=inline('exp(-t).*cos(5*t)');
ye=exa(t);
hold on
plot(t,ye,'g')
[t,y2]=rk1('funz',t0,tf,y0,100);
hold on
plot(t,y2,'b')
[t,y3]=rk2('funz',t0,tf,y0,100);
hold on
plot(t,y3,'k:*')
legend('Eulero implicito','Soluzione esatta',
```

```
'Runge Kutta1', 'Runge Kutta2')  
title('Risoluzione dell equazione "y=-y-5*exp(-t)*sin(5t)"  
utilizzando metodi numerici')
```





Da questo secondo grafico (ingrandimento di una porzione del precedente) risulta evidente come la soluzione calcolata con Runge-Kutta 2, un metodo che per calcolare il valore in un istante  $t$  utilizza, oltre al valore calcolato in  $t - 1$  altri due punti intermedi, e la soluzione esatta siano praticamente indistinguibili. Se si utilizza un metodo Runge-Kutta 3 (che fa uso di 3 punti intermedi) tale risultato sarà a maggior ragione confermato. Osservando il grafico risulta poi confermato come il metodo di Eulero implicito essendo ad un passo produca un errore locale di troncamento maggiore di quello degli altri metodi usati in questo esempio.



## Capitolo 4

# Modellizzazione con le equazioni differenziali

Una delle piú importanti applicazioni del calcolo infinitesimale é quella delle equazioni differenziali. Quando gli scienziati delle scienze fisiche, naturali o sociali usano il Calcolo, molto spesso lo scopo é analizzare un'equazione differenziale sorta dalla descrizione, mediante un modello, di qualche fenomeno di cui si vuole predire il comportamento futuro sulla base della variazione dei valori attuali.

### 4.1 Modelli di crescita delle popolazioni

Uno degli esempi piú celebri dell'utilizzo delle equazioni differenziali per spiegare fenomeni naturali riguarda i modelli di crescita delle popolazioni.

Il modello piú semplice in tal caso si basa sull'ipotesi che la popolazione abbia un tasso di crescita (variazione di numero di individui in un certo intervallo di tempo) proporzionale al numero di individui; tale ipotesi é ragionevole per popolazioni di batteri o di animali in condizioni ideali (ambiente illimitato, nutrimento adeguato, assenza di predatori, immunitá dalle malattie). L'equazione, o meglio il problema di Cauchy, che corrisponde a ciò é

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = kP \\ P(t_0) = P_0 \end{cases}$$

in cui  $t$  rappresenta il tempo (variabile indipendente),  $P$  il numero di individui della popolazione (variabile dipendente) nell'istante  $t$ ,  $k$  é una costante di proporzionalitá, che rappresenta il tasso di crescita diviso per la popolazione, ed é chiamata *tasso di crescita relativo*: se positiva indica che la popolazione cresce (*legge di crescita naturale*), mentre se negativa é indice di calo della popolazione (*legge di decadimento naturale*);  $(t_0, P_0)$  rappresentano infine le condizioni iniziali. Chiaramente una popolazione con tasso di crescita relativo costante cresce esponenzialmente e la soluzione del sistema é data da

$$P(t) = P_0 e^{kt}.$$

Tale sistema é appropriato per lo studio della crescita di una popolazione in condizioni ideali, ma affinché il modello sia piú realistico bisognerebbe tenere conto che l'ambiente ha risorse limitate: il livello della popolazione non oltrepassa la *capacitá dell'ambiente*  $K$  (o numero massimo di individui che l'ambiente é in grado di sostenere sul lungo periodo), o decresce verso  $K$  se a un certo istante é superiore a  $K$ . Per tenere conto di ciò é necessario introdurre due ipotesi:

- $\frac{dP}{dt} \approx kP$ , se  $P$  é piccola (inizialmente il tasso di crescita é proporzionale a  $P$ , che é come dire che il tasso di crescita relativo é circa costante quando la popolazione é ridotta).
- $\frac{dP}{dt} < 0$  se  $P > K$  (il tasso di crescita relativo diminuisce al crescere della popolazione e diventa negativo se  $P$  supera la capacitá dell'ambiente  $K$ ).

L'equazione che ingloba entrambe le ipotesi e che rappresenta un modello leggermente piú sofisticato di quello esponenziale, é data da:

$$\frac{dP}{dt} = kP \left( 1 - \frac{P}{K} \right).$$



Tale equazione é detta *equazione differenziale logistica* e fu proposta dal matematico tedesco Verhulst negli anni Quaranta del XIX secolo come modello per studiare la crescita della popolazione mondiale.

Si nota che se  $P$  é piccolo rispetto a  $K$ , allora  $P/K$  é vicino a 0 e dunque  $dP/dt \approx kP$ . Se  $P \rightarrow K$  (la popolazione si avvicina alla capacità dell'ambiente) allora  $P/K \rightarrow 1$  e  $dP/dt \rightarrow 0$ .

Per analizzare questa equazione é interessante partire dall'osservazione del campo di direzioni ad essa associato. Si é scelto come  $k = 0,08$  e come capacità  $K = 30$ , e si é deciso di mostrare solo il primo quadrante perché non ha significato parlare di valori negativi di popolazione, ed é richiesta l'evoluzione dopo il tempo  $t = 0$ . Il campo di direzioni é rappresentato sulla destra, mentre nel grafico di sinistra (nel quale gli assi del piano di base sono rispettivamente  $t$  e  $P$ , e l'asse verticale é lo  $z$ ) é presente la funzione

$$z = 0,08P \left( 1 - \frac{P}{30} \right).$$

Dato che l'equazione logistica é autonoma (ovvero  $dP/dt$  dipende solo da  $P$ , non da  $t$ ), le pendenze sono uguali lungo ogni retta orizzontale: come previsto le pendenze sono positive se  $0 < P < K$  e negative se  $P > K$ , e si riducono in valore assoluto quando  $P$  si avvicina alla capacità  $K$ . Sempre osservando il grafico si nota come le soluzioni si allontanano dalla soluzione di equilibrio  $P = 0$  e tendono alla soluzione di equilibrio  $P = K$ , e inoltre le soluzioni che partono sotto  $P = K$  sono crescenti, mentre quelle che partono sopra sono decrescenti.

Per determinare la soluzione per via analitica é sufficiente osservare che questa equazione é a variabili separabili e tramite l'utilizzo dei fratti semplici si ottiene (sempre considerando la condizione iniziale dell'equazione della crescita esponenziale):

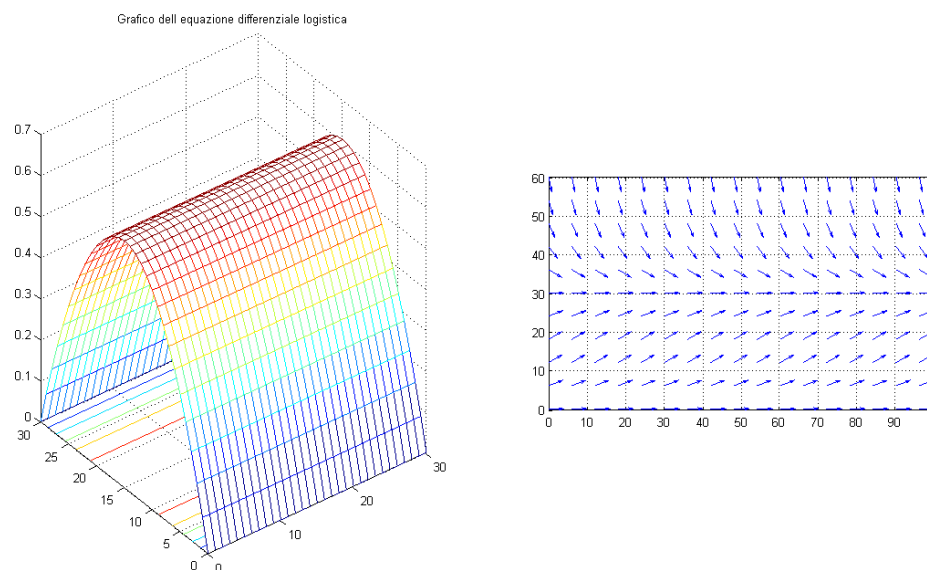


Figura 4.1: Grafico della funzione  $z = 0,08P \left(1 - \frac{P}{30}\right)$  e campo di direzioni dell'equazione differenziale data.

$$P(t) = \frac{KP_0}{P_0 + (K - P_0)e^{-kt}}.$$

Analizzando la derivata della funzione logistica si nota che essa cresce più rapidamente per  $P = K/2$ .

Calcolando il limite per  $t \rightarrow \infty$  si ottiene, come previsto:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = K.$$

La legge di crescita naturale e l'equazione differenziale logistica non sono le uniche equazioni che sono state proposte per modellizzare la crescita di una popolazione.

L'equazione differenziale

$$\frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{K}\right) - c$$

é usata per descrivere il comportamento di una popolazione soggetta a “catastrofi” di vario tipo (ad esempio una popolazione di animali catturati ad un ritmo costante), in cui  $c$  rappresenta il “prelievo” costante nel tempo.

Evidenze sperimentali hanno dimostrato che per alcune specie c’è un livello minimo  $m$  sotto il quale la popolazione tende ad estinguersi (ad esempio quando gli adulti non riescono ad accoppiarsi). Per queste popolazioni é stato predisposto un modello, ottenuto modificando quello logistico con il fattore  $(1 - m/P)$ :

$$\frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{K}\right) \left(1 - \frac{m}{P}\right)$$

dove il fattore  $1 - m/P$  tiene conto delle conseguenze di una popolazione poco numerosa.

Si osserva facilmente che una soluzione di questa equazione cresce se  $m < P < K$  e decresce se  $0 < P < m$ .

Un altro modello di funzione di crescita limitata per popolazioni é la *funzione di Gompertz*, che é una soluzione dell’equazione differenziale

$$\frac{dP}{dt} = c \ln \left(\frac{K}{P}\right) P$$

dove  $c$  é una costante e  $K$  la capacità dell’ambiente.

Calcolando la derivata dell’equazione differenziale sopra si ricava che la crescita maggiore per la funzione di Gompertz si ha per  $P = K/e$ .

Consideriamo ora un *modello di crescita stagionale* in cui si introduce una funzione periodica nel tempo per tenere conto di variazioni stagionali nel tasso di crescita, causati ad esempio da cambiamenti nella disponibilità di cibo, la cui equazione é:

$$\frac{dP}{dt} = kP \cos(rt - \phi)$$

dove  $k$ ,  $r$  e  $\phi$  sono costanti positive.

## 4.2 Sistemi di tipo preda - predatore

Nel periodo successivo alla Prima Guerra Mondiale nel Mediterraneo si osservó un aumento percentuale dei pesci predatori rispetto ai pesci preda. Questa mutazione nella composizione percentuale del pescato fu attribuita dal biologo Umberto D'Ancona alla riduzione della pesca durante il periodo bellico. Per convalidare questa ipotesi D'Ancona ricorse all'aiuto del suocero, il famoso matematico Vito Volterra, chiedendogli di sviluppare un modello in grado di spiegare l'evoluzione di due specie in conflitto. Volterra elaboró quindi una teoria che partendo dall'ipotesi di conflittualitá di due specie descriveva un andamento ciclico nella consistenza delle popolazioni.

Contemporaneamente, nel 1925, il demografo Alfred Lotka nel volume intitolato "Elements of Physical Biology" spiegó la sua visione della natura come un grande sistema di "trasformatori di energia"; tra le altre riflessioni il volume presentava un modello matematico riguardante l'interazione di due specie animali delle quali una fosse parassita dell'altra: studiava infatti l'andamento di volpi e conigli e sviluppó un modello capace di spiegare le interazioni fra le due specie; quest'ultimo si ispirava ad un altro suo modello riguardante una certa reazione chimica.

I due studiosi pervennero indipendentemente allo stesso risultato: un modello che prende il nome di "modello di Lotka-Volterra", oggi considerato precursore della moderna demografia: prevedeva una crescita delle popolazioni secondo la legge di Verhulst (logistica) influenzata dalla "teoria degli incontri", ossia dall'ipotesi che l'effetto della predazione fosse proporzionale al numero di incontri tra esemplari delle due specie. Il modello originale é stato poi raffinato e arricchito dallo stesso Volterra e da altri studiosi permettendo di descrivere l'interazione tra piú di due specie in condizioni non ideali. Si configura in una coppia di equazioni differenziali ordinarie che descrivono un sistema dinamico non lineare avente come spazio delle fasi il primo quadrante

del piano cartesiano. Questo sistema mostra molte delle particolarità tipiche dei modelli non lineari riguardo l'integrabilità e il comportamento in caso di perturbazione dei coefficienti.

I suoi ambiti di applicazione non sono ridotti alla sola demografia; negli anni '60 fu utilizzato dall'economista Richard Goodwin che si dedicò alla ricerca di una spiegazione per i movimenti ciclici delle economie capitalistiche: il modello proposto da Lotka e Volterra, prevedendo un andamento ciclico e incorporando il concetto di competizione, si presentava adatto a descrivere i fenomeni in questione.

L'economista americano propose dunque un suo modello, col quale spiegava l'andamento di disoccupazione e salari sulla base delle equazioni di Lotka-Volterra. Per utilizzare il sistema di Volterra, Goodwin fu comunque costretto a inserire un certo numero di ipotesi di natura economica piuttosto impegnative.

Contemporaneamente a Goodwin, il premio Nobel Paul Samuelson propose un modello alternativo, a sua volta basato sulle equazioni di Lotka-Volterra, in grado di spiegare l'andamento ricorrente dei fenomeni economici. I due modelli, costruiti sulla stessa base e tendenti a spiegare gli stessi fenomeni, sono però strutturati in maniera molto diversa. Mentre Goodwin specifica ogni singola variabile, Samuelson resta molto generale e introduce ipotesi meno "pesanti". Questa differenza fa sì che i due modelli abbiano un comportamento differente con riferimento al concetto di stabilità strutturale.

### **4.2.1 Il modello di Lotka-Volterra**

Il modello di Lotka-Volterra cerca di spiegare l'evoluzione di due specie in conflitto fra loro. Le ipotesi di base sono fondamentalmente due: la prima è che una specie (predatore) utilizzi l'altra (preda) come fonte del proprio sostentamento. Come si vede il modello in questione prevede una sola e unidirezionale forma di conflitto fra le due popolazioni; la seconda ipotesi postula invece che non ci siano interazioni fra l'ambiente e le due

popolazioni in questione. Questa condizione piuttosto generale può essere meglio specificata osservandone le sue conseguenze pratiche. Richiedere che l'ambiente non modifichi i movimenti delle popolazioni equivale, infatti, a sostenere che la preda ha risorse illimitate ed è minacciata solo dal predatore ma anche che il predatore predi solo la preda.

Un'ultima considerazione che può essere derivata dall'ininfluenza dell'ambiente è che la crescita del predatore dipende solo dal numero di prede catturate e non da eventi esterni.

Dal punto di vista matematico le condizioni sopra citate danno luogo ad un sistema di equazioni differenziali non lineari del primo ordine.

Vediamo ora le singole equazioni:

- La popolazione delle prede ( $P_1$ ) cresce con un tasso proporzionale al numero delle prede ( $dP_1 = AP_1 dt$ ), mentre decresce con un tasso proporzionale al numero degli incontri ( $P_1 P_2$ ) fra le due specie ( $dP_1 = -BP_1 P_2 dt$ ). Notiamo che il parametro  $A$  è legato al saldo demografico delle prede, mentre  $B$  è una misura della frequenza con cui le prede sono catturate dai predatori. L'equazione che regola l'andamento delle prede è la seguente:

$$\frac{dP_1}{dt} = AP_1 - BP_1 P_2$$

- Il tasso di sviluppo dei predatori è invece influenzato positivamente dal numero di interazioni ( $P_1 P_2$ ) delle due specie (infatti le prede sono l'unica fonte di sostentamento) e negativamente dal numero dei predatori (il saldo demografico è misurato dal parametro  $-C$  con  $C$  positivo). Il parametro  $D$  è una misura di efficienza del predatore nel catturare la preda. L'equazione differenziale associata è perciò:

$$\frac{dP_2}{dt} = -CP_2 + DP_1 P_2$$

Consideriamo quindi il seguente sistema di equazioni differenziali non lineari del primo ordine:

$$\begin{cases} \frac{dP_1}{dt} = AP_1 - BP_1P_2 \\ \frac{dP_2}{dt} = -CP_2 + DP_1P_2 \end{cases} \quad (4.1)$$

Esse sono note come le *equazioni preda - predatore* o anche *equazioni di Lotka - Volterra*. Chiaramente, poiché il modello tratta della consistenza numerica di due specie non si potranno avere valori negativi delle due popolazioni; varrà dunque:

$$P_1 \geq 0 \quad P_2 \geq 0.$$

Imponiamo infine le condizioni iniziali:

$$P_1(t_0) = P_1^0 \quad P_2(t_0) = P_2^0.$$

Questo modello può essere analizzato da diversi punti di vista. Prima di tutto analizzerò alcuni semplici casi particolari ed in seguito cercherò di trattare il sistema secondo il procedimento sviluppato dallo stesso Volterra.

#### *Casi particolari*

In prima istanza ci si può chiedere come evolveranno le due popolazioni nel caso in cui una delle due o entrambe abbiano consistenza nulla. Questi casi meritano un'analisi specifica sia per il loro significato limite sia perché hanno un significato concreto evidente.

1. É facile capire che quando entrambe le popolazioni sono nulle ossia si ha l'estinzione di entrambe le specie, non vi sarà evoluzione nel sistema e la consistenza numerica di entrambe le specie rimarrà nulla in ogni istante successivo: il punto  $(0, 0)$  é quindi un punto di equilibrio del sistema assegnato.

Formalmente, da:

$$\begin{cases} P_1^0 = 0 \\ P_2^0 = 0 \end{cases}$$

il sistema diventerá:

$$\begin{cases} \frac{dP_1}{dt} = 0 \\ \frac{dP_2}{dt} = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione é:

$$\begin{cases} P_1(t) = 0 \\ P_2(t) = 0 \end{cases}$$

2. Nel caso in cui la popolazione delle prede ( $P_1$ ) sia nulla i predatori non avranno fonti di sostentamento e tenderanno quindi a ridursi di numero fino a scomparire. Dal punto di vista matematico possiamo osservare che per:

$$P_1^0 = 0 \quad P_2^0 > 0$$

il sistema diviene:

$$\begin{cases} \frac{dP_1}{dt} = 0 \\ \frac{dP_2}{dt} = -CP_2 \end{cases}$$

la cui soluzione si puó scrivere nel seguente modo:

$$\begin{cases} P_1(t) = 0 \\ P_2(t) = P_2^0 e^{-Ct} \end{cases}$$

Come dedotto in precedenza la consistenza numerica dei predatori ( $P_2$ ) é decrescente e tenderá a zero.



3. L'ultimo caso particolare che merita di essere analizzato é il caso in cui la popolazione preda sia diversa da zero mentre i predatori non siano presenti nell'ambiente. Similmente agli altri due casi la soluzione del problema é abbastanza intuitiva. Infatti, senza predatori la popolazione preda sar  portata a crescere indefinitamente. Infatti con:

$$P_2^0 = 0 \quad P_1^0 > 0$$

il sistema si trasforma in:

$$\begin{cases} \frac{dP_1}{dt} = AP_1 \\ \frac{dP_2}{dt} = 0 \end{cases}$$

che avr  la seguente soluzione:

$$\begin{cases} P_1(t) = P_1^0 e^{At} \\ P_2(t) = 0 \end{cases}$$

Come supposto il numero delle prede crescer  indefinitamente.

Come conseguenza dei casi sopra analizzati si pu  affermare che sia l'asse  $x = P_1$  che l'asse  $y = P_2$  sono orbite di (4.1). Questo implica che ogni soluzione  $P_1(t), P_2(t)$  che inizia nel primo quadrante  $P_1 > 0, P_2 > 0$  al tempo  $t = t_0$  ci rimarr  per tutti i tempi futuri  $t \geq t_0$ .

### Risoluzione delle equazioni di Lotka - Volterra

Una *soluzione* di questo sistema di equazioni in generale é una coppia di funzioni  $P_1(t), P_2(t)$  che descrivono la popolazione di prede e di predatori come funzioni del tempo. Poich  il sistema é accoppiato ( $P_1$  e  $P_2$  compaiono in entrambe le equazioni), non é possibile risolverle separatamente, anche se di solito é impossibile trovare formule esplicite per  $P_1$  e  $P_2$  in funzione di  $t$ .

Inizialmente per analizzare il modello, Volterra propone un procedimento che riduce il sistema ad un'equazione risolvibile a variabili separabili. Analizziamo ora come si raggiunge questo risultato.

Osservando che vale la seguente regola di derivazione:

$$\frac{dP_2}{dP_1} = \frac{dP_2/dt}{dP_1/dt}$$

dal sistema (4.1) si può dedurre l'equazione

$$\frac{dP_2}{dP_1} = \frac{-CP_2 + DP_1P_2}{AP_1 - BP_1P_2} \quad (4.2)$$

Si nota che per utilizzare tale procedimento devono valere le condizioni  $P_1 \neq 0$  e  $P_2 \neq A/B$ . La prima condizione è già stata analizzata in precedenza, quando sono stati trattati i casi di nullità delle diverse popolazioni. Per quanto riguarda la seconda equazione notiamo che  $P_2 = A/B$  è una funzione costante e quindi varrà  $dP_2/dt = 0$  da cui:

$$-\frac{CA}{B} + \frac{DA}{B}P_1 = 0 \quad \rightarrow \quad P_1 = \frac{C}{D}$$

La soluzione sarà quindi della forma  $P_1 = C/D$ ,  $P_2 = A/B$ . Si nota che quest'ultima e  $(0, 0)$ , forniscono le due soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} \frac{dP_1}{dt} = 0 \\ \frac{dP_2}{dt} = 0 \end{cases}$$

In particolare la soluzione appena trovata corrisponde alla situazione in cui i predatori incontrano e mangiano, in ogni unità di tempo, un numero di prede esattamente uguale al numero di prede che nascono, e questo numero di prede corrisponde proprio alla soglia "critica" di cibo che fa rimanere stazionaria la popolazione dei predatori.

I punti  $S = (C/D; A/B)$  e  $T = (0; 0)$  sono detti punti di equilibrio del

sistema.

### **Analisi dei punti di equilibrio**

La stabilità dei punti di equilibrio può essere determinata linearizzando il sistema utilizzando le derivate parziali.

La matrice Jacobiana del modello preda-predatore é

$$J(P_1, P_2) = \begin{bmatrix} A - BP_2 & -BP_1 \\ DP_2 & DP_1 - C \end{bmatrix}$$

#### *Primo punto di equilibrio*

La matrice Jacobiana  $J$  calcolata nel primo punto di equilibrio  $(0, 0)$  é

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -C \end{bmatrix}$$

Gli autovalori di questa matrice sono  $\lambda_1 = A$  e  $\lambda_2 = -C$ . Dato che  $A$  e  $C$  sono quantità positive, i segni dei due autovalori sono sempre diversi. Dunque il punto di equilibrio nell'origine é un punto di sella. La stabilità di questo punto é importante: se fosse stabile, valori di popolazione diversi da zero potrebbero essere attratti da esso, e perciò la dinamica del sistema porterebbe all'estinzione di entrambe le specie per molti valori iniziali delle popolazioni. Visto però che il punto é di sella, l'equilibrio é instabile, e l'estinzione di entrambe le specie é quindi difficile (in effetti, può accadere solo se le prede vengono estinte completamente in modo artificiale, provocando la morte dei predatori a causa della mancanza di cibo. Se invece sono i predatori ad essere estinti, la popolazione delle prede cresce senza limite in questo semplice modello).

*Secondo punto di equilibrio*

La matrice Jacobiana  $J$  calcolata nel secondo punto di equilibrio é

$$J(A/B, C/D) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{BC}{D} \\ \frac{AD}{B} & 0 \end{bmatrix}$$

Gli autovalori di questa matrice sono:  $\lambda_1 = i\sqrt{AC}$  e  $\lambda_2 = -i\sqrt{AC}$ .

Dato che essi sono entrambi complessi, il punto é di equilibrio stabile. La parte reale é uguale a zero in entrambi i casi, quindi il punto di equilibrio é un *centro*. Ciò significa che il livello dei predatori e delle prede é ciclico, ed oscilla attorno a questo punto fisso.

I risultati fin qui ottenuti ci fanno quindi capire che le due popolazioni in questione tenderanno a fluttuare nel tempo in maniera indefinita. Infatti quando una popolazione diventerá troppo numerosa interverrá un meccanismo (predazione per le prede e mortalitá per i predatori) che ne ridurrá la consistenza. Questo meccanismo funziona per qualunque popolazione di partenza tranne il caso in cui le condizioni iniziali coincidano proprio con i due punti stazionari.

Torniamo ora all'equazione (4.2) precedentemente ricavata, che é a variabili separabili. Dopo aver separato le due variabili  $P_1$  e  $P_2$ ,

$$\frac{dP_2(A - BP_2)}{-P_2} = \frac{dP_1(C - DP_1)}{P_1}$$

integriamo entrambi i membri e ricordando che  $P_1 > 0$  e  $P_2 > 0$  si ottiene:

$$A \ln P_2 - BP_2 = -C \ln P_1 + DP_1 + k;$$

ricaviamo poi esplicitamente le variabili

$$P_2^A e^{-BP_2} = P_1^{-C} e^{DP_1} e^k, \quad (4.3)$$

da cui ponendo  $e^k = \gamma$  e tenendo conto delle condizioni iniziali, si ricava:

$$\gamma = (P_2^0)^A (P_1^0)^C e^{-BP_2^0 - DP_1^0}.$$

Seguendo lo sviluppo di Volterra siamo quindi riusciti ad ottenere un'equazione in due variabili che può essere vista come una curva nel piano  $P_1P_2$ , più facile da analizzare rispetto al sistema di partenza. Possiamo ora iniziare a studiare come si comporterà il sistema.

Per rappresentare graficamente la soluzione del sistema (4.1), consideriamo l'equazione (4.2) da esso derivata; per poterne rappresentare un campo di direzioni è necessario assegnare dei valori alle costanti  $A, B, C, D$ . Posto  $A = 0,1$ ,  $B = 0,002$ ,  $C = 0,05$  e  $D = 0,001$ , l'equazione differenziale diventa

$$\frac{dP_2}{dP_1} = \frac{-0,05P_2 + 0,001P_1P_2}{0,1P_1 - 0,002P_1P_2}$$

e assegnate le condizioni iniziali è possibile disegnare le curve soluzione corrispondenti.

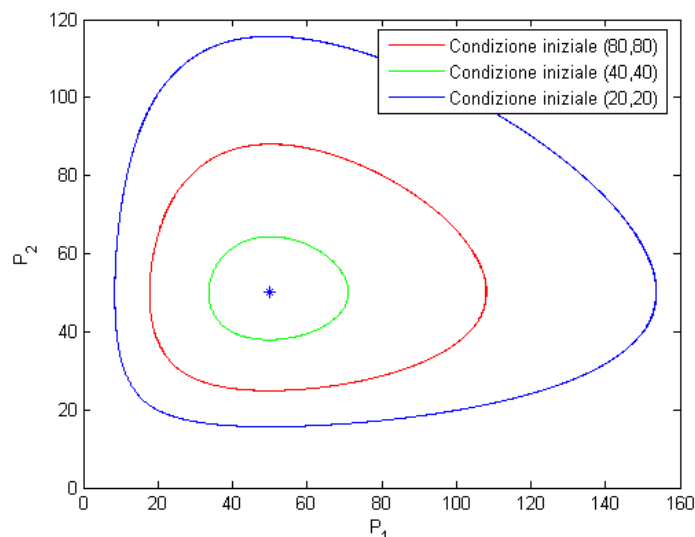


Figura 4.2: Piano delle fasi o ritratto di fase prede - predatori

Percorrendo una curva soluzione, si osserva come varia nel tempo la relazione tra  $P_1$  e  $P_2$ . Si nota che le curve sono chiuse, nel senso che se vengono percorse si torna sempre al punto da cui si é partiti. Si osserva poi che alla soluzione di equilibrio  $P_1 = 50$ ,  $P_2 = 50$  corrisponde il punto di equilibrio di coordinate  $(50, 50)$  (detto centro neutralmente stabile), che come tale é interno a tutte le curve e per esso non passa alcuna curva integrale. Rappresentando le soluzioni di una sistema di equazioni differenziali come sopra, si parla di piano  $P_1P_2$  come del *piano delle fasi*, e tali curve soluzione sono dette *traiettorie di fase*. Dunque una traiettoria di fase é il cammino percorso da una soluzione  $(P_1, P_2)$  al trascorrere del tempo. Un *ritratto di fase* consiste invece nei punti di equilibrio e in alcune tipiche traiettorie di fase, come mostrato nella figura sopra.

Si può analizzare il verso di percorrenza della curva.

Notiamo che:

se  $P_1 > C/D$  allora  $dP_2/dt > 0$  ovvero  $P_2$  crescente, mentre se  $P_1 < C/D$  allora  $dP_2/dt < 0$  ovvero  $P_2$  decrescente. Da queste osservazioni si ricava che il verso di percorrenza della curva é antiorario.

Si noti che, presa una curva, il suo punto con ordinata minima rappresenta la situazione in cui non ci sono abbastanza predatori per mantenere l'equilibrio tra le due popolazioni, dunque le prede aumentano. Questo significa un aumento dei predatori finché si arriva a un numero tale di questa popolazione che le prede faticano a tenersi lontano dai propri predatori. A quel punto le prede iniziano a diminuire, ciò porterá ad un calo dei predatori, che a sua volta permetterà alle prede di cominciare di nuovo a crescere, di conseguenza, anche la popolazione di predatori tornerà ad aumentare. Quando questo accade le popolazioni tornano ai loro valori iniziali, e l'intero ciclo ricomincia. Si può avere anche una rappresentazione del fenomeno in funzione del tempo, come mostrato nel grafico sottostante:

Ripartiamo dall'equazione (4.3) con  $e^k = \gamma$ , scritta nella forma

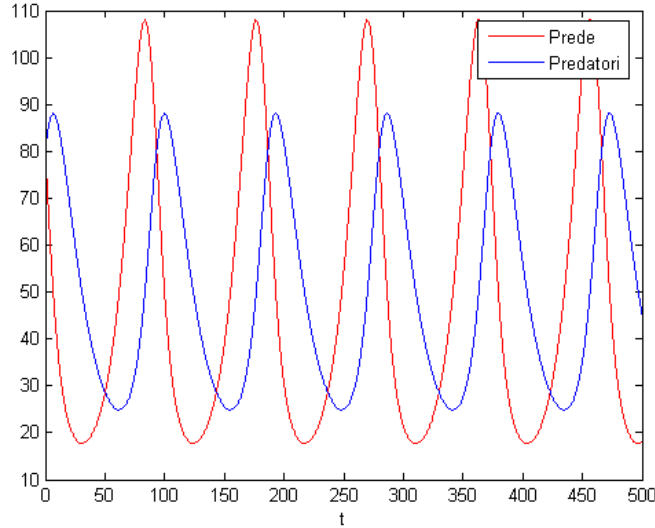


Figura 4.3: Evoluzione temporale delle due popolazioni

$$\frac{P_2^A}{e^{BP_2}} \frac{P_1^C}{e^{DP_1}} = \gamma \quad (4.4)$$

per qualche costante  $\gamma$ . Perciò le orbite del sistema di Lotka-Volterra sono le famiglie di curve definite da (4.4), e queste curve sono *chiuse* come di seguito di dimostra.

**Lemma 4.2.1.** *L'equazione (4.4) definisce una famiglia di curve chiuse per  $P_1 > 0$  e  $P_2 > 0$ .*

**Dimostrazione:**

Il primo passo consiste nel determinare il comportamento delle funzioni  $f(P_2) = \frac{P_2^A}{e^{BP_2}}$  e  $g(P_1) = \frac{P_1^C}{e^{DP_1}}$  per  $P_1$  e  $P_2$  positive. A questo scopo, osserviamo che  $f(0) = 0$ ,  $f(\infty) = 0$  e  $f(P_2) > 0$  per  $P_2 > 0$ . Calcolando

$$f'(P_2) = \frac{AP_2^{A-1} - BP_2^A}{e^{BP_2}} = \frac{P_2^{A-1}(A - BP_2)}{e^{BP_2}}$$

vediamo che  $f(P_2)$  ha un unico punto critico in  $P_2 = A/B$ . Di conseguenza,  $f(P_2)$  raggiunge il suo valore massimo  $M_{P_2} = \frac{(A/B)^A}{e^A}$  in  $P_2 = A/B$ . Analoga-

mente,  $g(P_1)$  raggiunge il suo massimo valore  $M_{P_1} = \frac{(C/D)^C}{e^C}$  in  $P_1 = C/D$ . Dall'analisi precedente, concludiamo che l'equazione (4.4) non ha soluzioni  $P_1, P_2 > 0$  per  $\gamma > M_{P_1}M_{P_2}$ , e l'unica soluzione  $P_1 = C/D, P_2 = A/B$  per  $\gamma = M_{P_1}M_{P_2}$ . Si osserva prima di tutto che l'equazione  $\frac{P_1^C}{e^{DP_1}} = \lambda$  ha una soluzione  $P_1 = P_{1m} < C/D$  e una soluzione  $P_1 = P_{1M} > C/D$ . Quindi, l'equazione

$$f(P_2) = P_2^A e^{-BP_2} = \left( \frac{\lambda}{P_1^C e^{-DP_1}} \right) M_{P_2}$$

non ha soluzioni  $P_2$  quando  $P_1$  é minore di  $P_{1m}$  o maggiore di  $P_{1M}$ . Ha un'unica soluzione  $P_2 = A/B$  quando  $P_1 = P_{1m}$  o  $P_1 = P_{1M}$ , ed ha due soluzioni  $P_{21}(P_1)$  e  $P_{22}(P_1)$  per ogni  $P_1$  fra  $P_{1m}$  e  $P_{1M}$ . La soluzione piú piccola  $P_{21}(P_1)$  é sempre piú piccola di  $A/B$ , mentre la piú grande  $P_{22}(P_1)$  é sempre piú grande di  $A/B$ . Quando  $P_1$  tende a  $P_{1m}$  o a  $P_{1M}$ , sia  $P_{21}(P_1)$  che  $P_{22}(P_1)$  tendono a  $A/B$ . Di conseguenza, le curve definite da (4.4) sono chiuse per  $P_1$  e  $P_2$  positivi. Inoltre, nessuna di queste curve chiuse (con l'eccezione di  $P_1 = C/D, P_2 = A/B$ ) contiene punti di equilibrio di (4.1). Perció, tutte le soluzioni  $P_1(t), P_2(t)$  di (4.1), con  $P_1(0), P_2(0)$  positivi, sono funzioni *periodiche* del tempo. Vale a dire che ogni soluzione  $P_1(t), P_2(t)$  di (4.1), con  $P_1(0), P_2(0)$  positivi, ha la proprietá che  $P_1(t+T) = P_1(t)$  e  $P_2(t+T) = P_2(t)$  per qualche  $T$  positivo e per ogni  $t$ .

### **Analisi delle fluttuazioni su lungo periodo**

Ci si puó domandare come muterá l'andamento delle due popolazioni a seguito di uno shock esterno che modifichi per esempio le consistenze iniziali di preda e predatori. La risposta ci viene data direttamente dall'analisi grafica. Infatti, fissi i quattro parametri iniziali, la forma delle *ovaloidi* generate dalle interazioni fra le due specie rimarrá invariata, ma ne aumenterá il "raggio" quanto piú le condizioni iniziali saranno lontane dal punto di equilibrio centrale. Un intervento esterno si limiterebbe quindi a riposizionare il sistema su una curva diversa, ma non ne muterebbe l'andamento.



Il fatto che la forma delle curve sul piano delle fasi sia uguale anche dopo uno shock esterno ci fa capire che anche i valori medi delle popolazioni in un intervallo abbastanza lungo non saranno influenzati da shock esterni.

Dimostriamo ora analiticamente questa proprietà.

Il sistema (4.1) di partenza può essere riscritto come:

$$\begin{cases} \frac{d \ln P_1}{dt} = A - BP_2 \\ \frac{d \ln P_2}{dt} = -C + DP_1 \end{cases}$$

Integrando le funzioni così riformulate fra due valori  $t'$  e  $t''$  si avrà:

$$\begin{cases} \ln \frac{P_1(t'')}{P_1(t')} = A(t'' - t') - B \int_{t'}^{t''} P_2 dt \\ \ln \frac{P_2(t'')}{P_2(t')} = -C(t'' - t') + D \int_{t'}^{t''} P_1 dt \end{cases}$$

Ora chiamando  $T$  il periodo di oscillazione e rinominando  $t' = 0$  e  $t'' = T$  si ottiene  $P_1(t') = P_1(t'')$  e  $P_2(t') = P_2(t'')$  da cui:

$$\begin{cases} 0 = AT - B \int_0^T P_2 dt \\ 0 = -CT + D \int_0^T P_1 dt \end{cases}$$

ovvero:

$$\bar{P}_2 = \frac{1}{T} \int_0^T P_2 dt = \frac{A}{B}, \quad \bar{P}_1 = \frac{1}{T} \int_0^T P_1 dt = \frac{C}{D}$$

É notevole osservare che é possibile trovare questi valori medi anche se non é possibile calcolare esattamente  $P_1(t)$  e  $P_2(t)$ . Pertanto i valori medi assunti dalle due popolazioni in un periodo di oscillazione sono costanti qualunque siano le condizioni iniziali e sono pari alle coordinate del centro neutralmente stabile.

## Evoluzione del modello di Lotka-Volterra: la pesca

Sebbene il semplice modello di Lotka-Volterra si sia rivelato utile per spiegare e prevedere il comportamento di due popolazioni coesistenti, tuttavia sono stati proposti modelli piú raffinati. Supponiamo che le prede, oltre ad essere soggette ai predatori risentano anche dell'azione dell'uomo (esercitata ad esempio tramite la pesca); ciò é come dire che le prede sono i pesci commestibili e i predatori quelli non commestibili.

Supponiamo che la pesca causi un decremento della popolazione di pesce commestibile del tasso di  $\epsilon P_1(t)$ , e faccia decrescere la popolazione dei predatori ad un tasso di  $\epsilon P_2(t)$ . La costante  $\epsilon$  dipende dall'intensità dell'attività di pesca. Perciò la situazione reale può essere descritta dal sistema differenziale modificato:

$$\begin{cases} \frac{dP_1}{dt} = AP_1 - BP_1P_2 - \epsilon P_1 = (A - \epsilon)P_1 - BP_1P_2 \\ \frac{dP_2}{dt} = -CP_2 + DP_1P_2 - \epsilon P_2 = -(C + \epsilon)P_2 + DP_1P_2 \end{cases} \quad (4.5)$$

Questo sistema é esattamente lo stesso del precedente (per  $A - \epsilon > 0$ ) con  $A - \epsilon$  al posto di  $A$  e con  $C + \epsilon$  al posto di  $C$ . Quindi, i valori medi di  $P_1(t)$  e di  $P_2(t)$  sono ora

$$\overline{P_1} = \frac{C + \epsilon}{D}, \quad \overline{P_2} = \frac{A - \epsilon}{B}.$$

Mostriamo qui di seguito un'integrazione dell'algoritmo delle equazioni di Lotka-Volterra in presenza di pesca (con approssimazione della derivata al secondo ordine).

```
clear; close all
% scelta dei parametri
x0=20; % condizione iniziale prede
y0=20; % condizione iniziale predatori
t0=0; % tempo iniziale
tf=30; % tempo finale
dt=0.001; % delta t
```

```

A=1; % parametro A del modello
B=0.02; % parametro B del modello
C=1; % parametro C del modello
D=0.01; % parametro D del modello
E=0.5; % parametro di intensit\'a della pesca
% inizializzazione
t=t0:dt:tf;
Npunti=size(t,2);
x=zeros(1,Npunti);
y=zeros(1,Npunti);
xp=zeros(1,Npunti -1);
yp=zeros(1,Npunti -1);
xpp=zeros(1,Npunti -1);
ypp=zeros(1,Npunti -1);
x(1)=x0; y(1)=y0;
% calcolo
for n=1:Npunti -1
xp(n)=((A-E)-B*y(n))*x(n);
yp(n)=(D*x(n)-(C+E))*y(n);
xpp(n)=(A-E)*xp(n)-B*(xp(n)*y(n)+x(n)*yp(n));
ypp(n)=-(C+E)*yp(n)+D*(xp(n)*y(n)+x(n)*yp(n));
x(n+1)=x(n)+xp(n)*dt+1/2*xpp(n)*dt^2;
y(n+1)=y(n)+yp(n)*dt+1/2*ypp(n)*dt^2;
end
% grafico dei risultati
figure ,plot(t,x,'b',t,y,'g')
legend('preda','predatore')
title('Evoluzione delle popolazioni')
xlabel('tempo')
ylabel('numero di individui')
figure ,plot(x,y)

```

```
title('Piano delle fasi')
xlabel('preda')
ylabel('predatore')
```

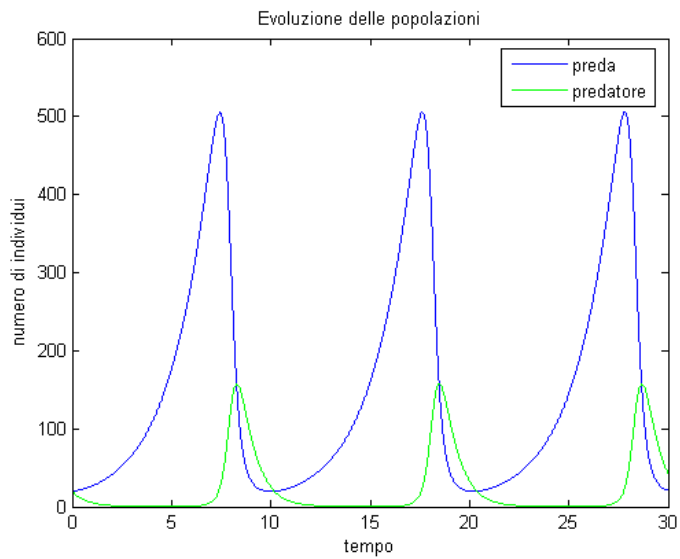


Figura 4.4: Evoluzione delle popolazioni in funzione del tempo

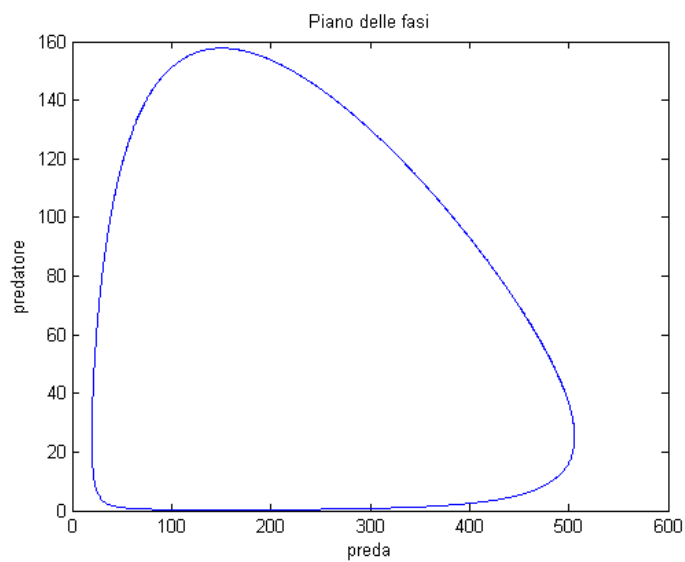


Figura 4.5: Piano delle fasi preda - predatore

Riprendendo quanto detto prima quindi, un moderato aumento della pesca provoca, in media, un aumento della quantità di pesce commestibile e un decremento del numero dei predatori; viceversa, la riduzione dell'attività di pesca provoca un aumento del numero dei pesci predatori e un decremento di quelli commestibili. Questo notevole risultato, noto come *principio di Volterra*, spiega i dati che rilevó D'Ancona durante le sue misurazioni.

Il principio di Volterra ha una spettacolare applicazione al trattamento con gli insetticidi, che distrugge sia gli insetti predatori che i predati. Questo implica che l'uso degli insetticidi determinerá una crescita di quegli insetti la cui popolazione é tenuta sotto controllo da insetti predatori. Una notevole conferma é offerta da un insetto (*Icerya purchasi*) che, quando venne introdotto accidentalmente in America dall'Australia nel 1868 minacció di distruggere l'industria americana degli agrumi. Come rimedio, venne introdotto il suo naturale predatore australiano, una coccinella (*Novius cardinalis*) che causó una riduzione del numero di *Iceryae*. Quando si scoprí che il DDT poteva distruggere le *Iceryae*, gli agricoltori ne fecero immediatamente uso nella speranza di ridurre ulteriormente la popolazione di questi parassiti. Invece, in accordo con il principio di Volterra, l'effetto fu l'aumento numerico delle *Iceryae*! Curiosamente, molti ecologisti e biologi rifiutarono di accettare la validità del principio di Volterra. Essi osservarono che di fatto il comportamento oscillatorio predetto dal modello di Volterra non viene osservato in molti sistemi preda-predatore. Molti sistemi preda-predatore tendono invece col passare del tempo a raggiungere uno stato di equilibrio. La nostra risposta a queste critiche é che il sistema differenziale non intende essere un modello generale di interazione preda-predatore. Questo perché né il pesce commestibile e né i pesci predatori competono intensamente fra loro per l'utilizzo delle risorse disponibili. Un modello piú generale di interazioni preda-predatore é il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \frac{dP_1}{dt} = AP_1 - BP_1P_2 - EP_1^2 \\ \frac{dP_2}{dt} = -CP_2 + DP_1P_2 - FP_2^2. \end{cases} \quad (4.6)$$

In questo caso, il termine  $EP_1^2$  riflette la competizione interna delle prede  $P_1$  a causa della limitazione di risorse esterne, e il termine  $FP_2^2$  riflette la competizione interna dei predatori a causa del numero limitato di prede disponibili. Le soluzioni di questo sistema non sono, in generale, periodiche. In effetti, si può dimostrare che tutte le soluzioni  $P_1(t)$ ,  $P_2(t)$ , con  $P_1(0)$  e  $P_2(0)$  positivi, tendono definitivamente alla soluzione di equilibrio  $P_1 = A/E$ ,  $P_2 = 0$  se  $C/D$  è maggiore di  $A/E$ . In questa situazione, il predatore si estingue, dato che la quantità di cibo disponibile è inadeguata alle sue necessità. Sorprendentemente, alcuni ecologisti e biologi rifiutano di riconoscere come accurato anche questo modello più generale. Come controesempio, citano gli esperimenti del biologo-matematico G.F.Gause. In questi esperimenti, la popolazione era composta di due specie di protozoi, uno dei quali, il *Didinium nasatum*, si nutre dell'altro, il *Paramecium caudatum*. In tutti gli esperimenti di Gause, il *Didinium* distrusse rapidamente il *Paramecio*, per poi morire di fame. Questa situazione non può essere modellata dal sistema (4.6), perché nessuna soluzione di (4.6) con  $P_1(0)P_2(0) \neq 0$  può raggiungere  $P_1 = 0$  o  $P_2 = 0$  in tempo finito.

La risposta a queste critiche è che il *Didinium* è un genere speciale e atipico di predatore. Da un lato, è un aggressore feroce e richiede una enorme quantità di cibo: un *Didinium* ha infatti bisogno di un *Paramecio* fresco ogni tre ore. D'altra parte, il *Didinium* non muore perché la quantità di parameci è insufficiente. Questi continuano a moltiplicarsi, ma generano una prole più piccola. Perciò il sistema di equazioni (4.6) non fornisce un modello adeguato dell'interazione fra il *Paramecio* e il *Didinio*. Un modello migliore, in questo caso, è dato dal sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \frac{dP_1}{dt} = AP_1 - B\sqrt{P_1}P_2 \\ \frac{dP_2}{dt} = \begin{cases} D\sqrt{P_1}P_2, & P_1 \neq 0 \\ -CP_2, & P_1 = 0; \end{cases} \end{cases} \quad (4.7)$$

Si può dimostrare che ogni soluzione  $P_1(t)$ ,  $P_2(t)$  di (4.7) con  $P_1(0)$  e  $P_2(0)$  positivi raggiunge  $P_1 = 0$  in tempo finito. Questo non contraddice il teorema

di esistenza e unicit , dato che la funzione

$$g(P_1, P_2) = \begin{cases} D\sqrt{P_1}P_2 & P_1 \neq 0 \\ -CP_2 & P_1 = 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

non ha derivate parziali rispetto a  $P_1$  o a  $P_2$ , per  $P_1 = 0$ .

Infine, menzioniamo che ci sono in natura parecchie interazioni preda-predatore che non possono essere modellate da alcun sistema di equazioni differenziali ordinarie. Queste situazioni si verificano quando le prede sono provviste di un rifugio inaccessibile ai predatori. In questi casi,   impossibile fare qualunque tipo di previsione sul numero futuro di predatori e prede, dato che non siamo in grado di prevedere quante prede saranno abbastanza “ingenua” da lasciare il loro rifugio. In altre parole, questo processo   casuale, piuttosto che deterministico, e quindi non pu  essere modellato da alcun sistema di equazioni differenziali ordinarie. Questo   stato verificato direttamente in un famoso esperimento di Gause, che prese trenta provette identiche, in ognuna di esse mise cinque *Parameci* (prede) e tre *Didinium* (predatori), e dette a ciascun *Paramecio* un rifugio dal *Didinio*. Due giorni dopo, trov  i predatori morti in quattro provette, ed una popolazione mista contenente da due a trentotto *Parameci* nelle restanti ventisei provette.

### **Evoluzione del modello di Lotka-Volterra con l’equazione logistica**

  possibile modificare ulteriormente il modello di Lotka-Volterra assumendo che, in assenza di predatori, le prede crescano secondo un modello logistico con capacit  dell’ambiente pari a  $K$ . In questo caso, facendo uso di quanto detto prima relativamente al modello logistico, le equazioni del modello (4.1) sono sostituite dal sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \frac{dP_1}{dt} = AP_1 \left(1 - \frac{P_1}{K}\right) - BP_1P_2 \\ \frac{dP_2}{dt} = -CP_2 + DP_1P_2 \end{cases}$$

in cui  $K$  pu  essere interpretato anche come la *capacit  portante della*

*popolazione delle prede.*

Mostriamo ora l'algoritmo di integrazione delle equazioni di Lotka-Volterra con il modello logistico delle prede (approssimazione alla derivata di ordine 2) e di seguito i relativi grafici che si ottengono.

```
clear; close all
% scelta dei parametri
x0=20; % condizione iniziale prede
y0=20; % condizione iniziale predatori
t0=0; % tempo iniziale
tf=60; % tempo finale
dt=0.001; % delta t
A=1; % parametro A del modello
B=0.02; % parametro B del modello
C=1; % parametro C del modello
D=0.01; % parametro D del modello
K=500; % valore limite per le prede
% inizializzazione
t=t0:dt:tf;
Npunti=size(t,2);
x=zeros(1,Npunti);
y=zeros(1,Npunti);
xp=zeros(1,Npunti -1);
yp=zeros(1,Npunti -1);
xpp=zeros(1,Npunti -1);
ypp=zeros(1,Npunti -1);
x(1)=x0; y(1)=y0;
% calcolo
for n=1:Npunti -1
xp(n)=(A*(1-x(n)/K)-B*y(n))*x(n);
yp(n)=(D*x(n)-C)*y(n);
```



```

xpp(n)=A*xp(n)*(1-2*x(n)/K)-B*(xp(n)*y(n)+x(n)*yp(n));
ypp(n)=-C*yp(n)+D*(xp(n)*y(n)+x(n)*yp(n));
x(n+1)=x(n)+xp(n)*dt+1/2*xpp(n)*dt^2;
y(n+1)=y(n)+yp(n)*dt+1/2*ypp(n)*dt^2;
end
% grafico dei risultati
figure ,plot(t,x,'b',t,y,'g')
legend('preda','predatore')
title('Evoluzione delle popolazioni')
xlabel('tempo')
ylabel('numero di individui')
figure ,plot(x,y)
title('Piano delle fasi')
xlabel('preda')
ylabel('predatore')

```

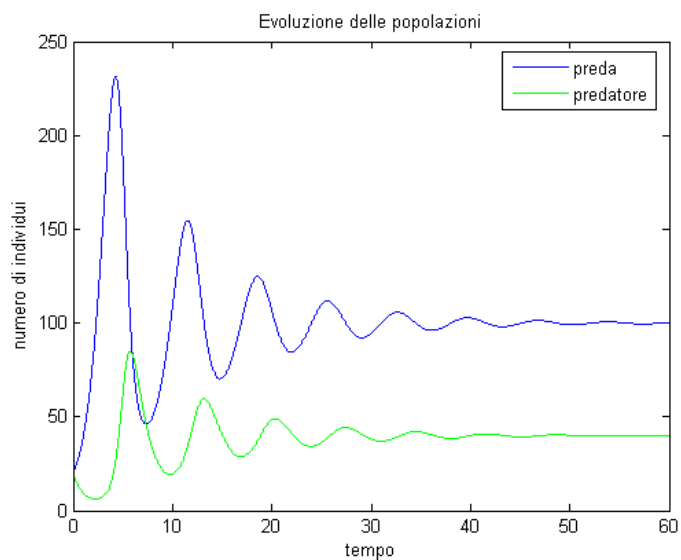


Figura 4.6: Evoluzione delle popolazioni in funzione del tempo

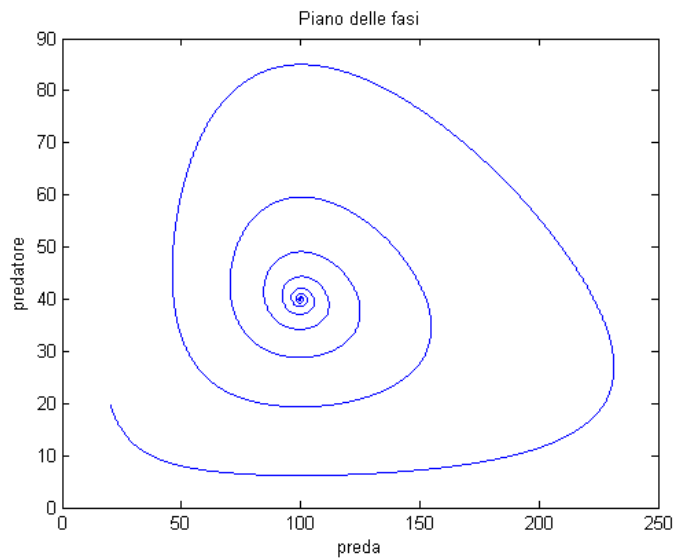


Figura 4.7: Piano delle fasi preda - predatore

Osservando lo spazio delle fasi, di seguito riportato, si nota come in questo caso la competizione intraspecifica nella popolazione delle prede non produce circuiti, bensí una traiettoria a spirale che si avvolge verso il punto di equilibrio. Includendo la dipendenza dalla densità della popolazione delle prede le oscillazioni neutrali diventano oscillazioni stabili e  $P_1$  e  $P_2$  convergono nel tempo verso il punto di equilibrio (stabile)  $(\frac{C}{D}, \frac{A}{B}(1 - \frac{C}{DK}))$ . In conclusione, secondo questo modello preda-predatore di Lotka-Volterra, corretto includendo la competizione intraspecifica nella popolazione della preda, preda e predatore dovrebbero oscillare diminuendo nel tempo l'ampiezza delle oscillazioni e convergendo verso un equilibrio stabile.

I modelli e le varianti che ho illustrato sopra vogliono essere semplici esempi di che cosa vuol dire *modellizzare la realtà*. Tutto ciò per concludere sottolineando come un buon modello debba trovare un giusto compromesso tra la semplicità e la realtà, nel senso che dovrebbe essere abbastanza semplice da essere gestito dal punto di vista matematico, ma allo stesso tempo sufficientemente complesso per rappresentare un sistema in modo realistico.

Queste due caratteristiche si influenzano a vicenda e molto spesso il realismo viene sacrificato a vantaggio della semplicità; la bravura quindi nello studiare questi temi é anche quella di saper conciliare questi due aspetti mediando tra loro.



# Bibliografia

- [1] [Gi] E. Giusti (1983), *Analisi Matematica 2*, seconda edizione, Bollati Boringhieri.
- [2] [Pi] L. C. Piccinini, G. Stampacchia, G. Vidossich (1978), *Equazioni differenziali ordinarie in  $\mathbb{R}^n$  (problemi e metodi)*, Liguori Editore.
- [3] [Gg] G. Gilardi, *Analisi Uno*, Mc Graw - Hill.
- [4] [Jh] J. Heading, *Equazioni differenziali ordinarie*, La serie matematica e fisica “P”, Liguori Editore.
- [5] [Ub] U. Bottazzini (1981), *Il calcolo sublime: storia della matematica da Euler a Weierstrass*, Boringhieri.
- [6] [Vb] V. E. Bononcini, *Esercizi di analisi matematica*, CEDAM.
- [7] [JS] J. Stewart, *Calcolo, Funzioni di piú variabili*, APOGEO
- [8] [Ar1] C. Arzelá (1883), *Un’osservazione intorno alle serie di funzioni*, Rend. R. Acc. Sc. dell’Ist. di Bologna, pp. 142-159.
- [9] [Ar2] C. Arzelá (1895), *Sulle funzioni di linee*, Mem. R. Acc. Sc. dell’Ist. di Bologna Cl. Sci. Fis. Mat. (5), V, pp. 55-74.
- [10] [Ar3] C. Arzelá (1895), *Sull’integrabilitá delle equazioni differenziali ordinarie*, Mem. R. Acc. Sc. dell’Ist. di Bologna Cl. Sci. Fis. Mat. (5), V, pp. 257-270.

- [11] [Ar4] C. Arzelá (1896), *Sull'esistenza degli integrali delle equazioni differenziali ordinarie*, Mem. R. Acc. Sc. dell'Ist. di Bologna (5), VI, pp. 131-140.
- [12] [As] G. Ascoli (1883), *Le curve limiti di una varietà data di curve*, Atti della R. Accad. Dei Lincei Memorie della Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. 18 (3), pp. 521-586.
- [13] [B1] S. Banach (1922), *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, Fund. Math. 3, pp. 133-181. (PDF)
- [14] [B2] S. Banach (1931), *Teoria operacji*. Tom I: operacje liniowe, Warsaw (tradotto in francese nel 1932 col titolo *Theorie des operations lineaires*).
- [15] [CL] E. Coddington, N. Levinson (1955), *Theory of Ordinary Differential Equations*, New York.
- [16] [G] E. Goursat (1905), *Cours d'Analyse Mathematique*, t. II, Paris.
- [17] [Li] R. Lipschitz (1868-1869), *Disamina della possibilità di integrare completamente un dato sistema di equazioni differenziali ordinarie*, Ann. di Mat. pura e appl. (2), 2, pp. 288-302.
- [18] [Ln] E. Lindelof (1894), *Sur l'application de la methode des approximations successives aux equations differentielles ordinaires du premier ordre*, Comptes rendus hebdomadaires des seances de l'Academie des sciences, v. 114, pp. 454-457. (PDF)
- [19] [M] F. N. M. Moigno (1844), *Leçons de calcul différentiel et de calcul integral*, Paris.
- [20] [Pe1] G. Peano (1890), *Sull'integrabilità delle equazioni differenziali del primo ordine*, Atti della R. Acc. Sc. di Torino, 21, pp. 293-302
- [21] [Pe2] G. Peano (1887), *Integrazione per serie delle equazioni differenziali lineari*, Atti della R. Acc. Sc. di Torino, 22, pp. 293-302.

- [22] [Pi] C. Picard (1890), *Memoire sur la theorie des equations aux derivees partielles et la methode de approximations successives*, Journ. de Math. pur. et appl. (4), 6, pp. 145-210.
- [23] [T] L. Tonelli (1928), *Sulle equazioni funzionali del tipo di Volterra*, Bull. of the Calc. Math. Soc. 20, pp. 31-48.
- [24] [CJS] C. J. Scriba, *Zur Losung des 2. Debeauneschen Problems durch Descartes*, Archive for History of Exact Sciences, 1, 1961, pp. 406-419
- [25] [MB] Martin Braun (1993), *Differential Equations and Their Applications*, Springer-Verlag, New York.