Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Comportamento asintotico della volatilità implicita vicino a scadenza

Tesi di Laurea in Equazioni Differenziali Stocastiche

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Andrea Pascucci

Presentata da:
Matteo Giorgetti

III Sessione
2011-2012

Indice

Introduzione

Nel modello di Black-Scholes il prezzo del titolo rischioso è un moto Browniano geometrico che verifica l'equazione

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

dove μ è il tasso medio di ritorno, σ è la volatilità e $(W_t)_{t\in[0,T]}$ è un moto Browniano reale. Il prezzo di Black-Scholes per una opzione Call Europea è una funzione della forma

$$C^{BS} = C^{BS}(\sigma, S_t, K, T), \tag{1}$$

dove K è lo strike e T la maturità. Di tutti i parametri che determinano il prezzo di Black-Scholes, la volatilità σ è l'unica non direttamente osservabile. Ricordiamo che la funzione

$$\sigma \to C^{BS}(\sigma, S, K, T, r)$$

è strettamente crescente e quindi invertibile: fissati tutti gli altri parametri, un prezzo di Black-Scholes dell'opzione corrisponde ad ogni valore di σ; viceversa, un unico valore di σ^* è associato ad ogni valore C^* nell'intervallo $]0, S[$ (intervallo a cui deve appartenere il prezzo per gli argomenti di arbitraggio). Poniamo

$$\sigma^* = \Sigma\,(C^*, S, K, T, r),$$

dove σ^* è l'unico valore della volatilità tale che

$$C^* = C^{BS}(\sigma^*, S, K, T, r).$$

La funzione

$$C^* \to \Sigma(C^*, S, K, T, r),$$

è chiamata volatilità implicita. E' ben noto che i prezzi di mercato di opzioni Call europee sullo stesso sottostante hanno volatilità implicite che variano con strike e maturità. Questo fenomeno, tipicamente chiamato effetto "smile" o "skew", chiaramente viola il modello di Black-Scholes, in cui la volatilità implicita è costante e non dipende dagli strikes e dalle maturità. Per superare questa difficoltà, un approccio diffuso è quello di considerare la volatilità σ non più costante ma funzione del titolo e del tempo. Modelli di questo tipo sono chiamati modelli a volatilità locale e le dinamiche del titolo sottostante sono governate dall'equazione differenziale stocastica

$$dS_t = \mu\, S_t\, dt + \sigma(S_t, t)\, S_t\, dW_t. \tag{2}$$

In generale risulta tuttavia impossibile ricavare un'espressione analitica della volatilità implicita, per tale motivo sono state studiate delle formule asintotiche. Nella prima parte di questa tesi presentiamo una descrizione completa del comportamento asintotico della volatilità implicita vicino a scadenza, sotto le condizioni di non arbitraggio. In particolare, mostreremo come è possibile ricavare il comportamento asintotico della superficie della volatilità implicita vicino a scadenza, analizzando il corrispondente comportamento asintotico della superficie del prezzo dell'opzione Call. Nel risultato principale, ovvero il Teorema (1.3.3), proveremo che

$$\Sigma(K,\tau) \sim \begin{cases} \frac{\sqrt{2\pi}\, C(K,\tau)}{S\sqrt{\tau}} & \text{se } K = S, \\ \frac{|log(S/K)|}{\sqrt{-2\tau log(C(K,\tau)-(S-K)^+)}} & \text{se } K \neq S, \end{cases} \tag{3}$$

quando il tempo a scadenza τ tende a zero. Ciò mostra una differenza sostanziale nel comportamento della volatilità implicita tra il caso $K = S$ ("at the money") e $K \neq S$. Per ottenere l'espressione (3), ricaveremo il comportamento asintotico, vicino a scadenza, del prezzo di Black-Scholes di una opzione Call Europea e sfrutteremo le proprietà della volatilità implicita scalata nel tempo (si veda la Definizione (1.1)). I risultati studiati sono universali, nel

senso che non dipendono dalla scelta del modello per il sottostante.
Se consideriamo un modello a volatilità locale, il comportamento asintotico della volatilità implicita, quando il tempo a scadenza tende a zero, è stato studiato da Varadhan in [2] e da Beresticky in [3], utilizzando però un'approccio diverso. In quest'ultimo lavoro viene infatti provato che

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\varphi(x,\tau)} = \int_0^1 \frac{ds}{\sigma(sx,0)}, \tag{4}$$

dove φ denota la volatilità implicita, partendo da una equazione alle derivate parziali per la φ. Questo risultato è equivalente a quello studiato da Varadhan in [2], in cui si dimostra che

$$\lim_{\tau \to 0} -2\tau \ln v(x,\tau) = d^2(x,y) = \Big(\int_0^x \frac{ds}{\sigma(s)}\Big)^2, \quad \tau \to 0, \tag{5}$$

dove v è la soluzione fondamentale dell'operatore $\partial_t - \frac{\sigma(x)^2}{2}\partial_x^2$ e d denota la distanza indotta da una metrica Riemanniana derivata dal coefficiente σ.
Nella seconda parte della tesi, partendo da (3), vogliamo ricavare i risultati (4) e (5), utilizzando però un approccio completamente differente. Se indichiamo con Γ_{approx} un'approssimazione della densità di transizione $\Gamma(t,x\,;\,T,y)$ di S in (2), è possibile dimostrare che

$$|\Gamma(t,x\,;\,T,y) - \Gamma_{approx}(t,x\,;\,T,y)| \le c_N\,|\tau|^{\frac{N+1}{2}}\,\Gamma^{BS}(t,x\,;\,T,y). \tag{6}$$

Tale stima garantisce la validità di (3) anche se consideriamo un'approssimazione del prezzo della Call, col vantaggio però che quest'ultima è nota nel caso di un modello a volatilità locale.
Nel caso $S = K$, proveremo che

$$\lim_{\tau \to 0^+} \Sigma(K,\tau) = \lim_{\tau \to 0^+} \frac{\sqrt{2\pi}C_{approx}(K,\tau)}{S\sqrt{\tau}} = \sigma(logK), \tag{7}$$

in accordo con i risultati di Varadhan e Beresticky. Il caso $S \neq K$ risulta più difficile da trattare e necessita di ulteriori approfondimenti.

Capitolo 1

Comportamento asintotico della volatilità implicita vicino a scadenza

Per semplicità, d'ora in avanti assumeremo che il tasso di interesse privo di rischio r sia zero e considereremo una superifice del prezzo dell'opzione Call istantanea. Considerare il mercato istantaneo ci permette di trascurare il tempo corrente e quindi di supporre che il prezzo istantaneo del titolo, S, sia una costante positiva. Da ciò segue che, per quanto riguarda il prezzo della Call, è sufficiente considerarlo funzione dello strike K e del tempo a scadenza $\tau = T - t$.

Assunzioni. D'ora in avanti assumiamo che per ogni $K > 0$, la funzione prezzo dell'opzione call $C : (0, \infty) \times (0, \infty) \to [0, \infty)$

- soddisfi i limiti di non arbitraggio

$$(S - K)^+ \leq C(K, \tau) \leq S, \quad \forall \tau > 0; \tag{1.1}$$

- converga al payoff vicino a scadenza, cioè

$$\lim_{\tau \to 0^+} C(K, \tau) = (S - K)^+; \tag{1.2}$$

- è una funzione non decrescente del tempo a scadenza, cioè

$$\tau \to C(K, \tau) \tag{1.3}$$

  è non decrescente.

Denotiamo con $C^{BS} : (0, \infty) \times (0, \infty) \times [0, \infty] \to [0, \infty)$ il prezzo di Black-Scholes per una opzione Call con volatilità σ specificata:

$$C^{BS}(K, \tau, \sigma) = SN(d_1) - KN(d_2),$$

dove

$$d_{1,2} = \frac{log(S/K)}{\sigma\sqrt{\tau}} \pm \frac{\sigma\sqrt{\tau}}{2}$$

ed N è la funzione di ripartizione della distribuzione normale standard.

1.1 La funzione del prezzo di Black-Scholes per una opzione Call

Lemma 1.1.1. *La funzione del prezzo di Black-Scholes per una opzione Call, C^{BS}, ammette la rappresentazione*

$$C^{BS}(K, \tau, \sigma) = (S - K)^+ + S \int_0^\theta N'\Big(\frac{x}{v} + \frac{v}{2}\Big)\, dv \tag{1.4}$$

dove $x = log(S/K)$, $\theta = \sigma\sqrt{\tau}$ e N' è la densità normale standard.

Dimostrazione. Per semplificare i conti introduciamo la mappa

$$f : (x, \theta) \to N\Big(\frac{x}{\theta} + \frac{\theta}{2}\Big) - exp(-x)N\Big(\frac{x}{\theta} - \frac{\theta}{2}\Big),$$

definita per $\theta > 0$ e $x \in \mathbb{R}$. Tale funzione non è altro che C^{BS}/S espressa nelle notazioni del lemma. Chiamando

$$D_1 = \frac{x}{\theta} + \frac{\theta}{2},\ D_2 = \frac{x}{\theta} - \frac{\theta}{2},$$

si ha:

$$\frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta} = N'(D_1)\Big(\frac{1}{2} - \frac{x}{\theta^2}\Big) + exp(-x)N'(D_2)\Big(\frac{1}{2} + \frac{x}{\theta^2}\Big).$$

Poichè $N'(z) = exp(-z^2/2)/\sqrt{2\pi}$ e

$$-\frac{1}{2}(D_1)^2 = -x - \frac{1}{2}(D_2)^2,$$

segue che $N'(D_1) = exp(-x)N'(D_2)$, quindi

$$\frac{\partial f(x,\theta)}{\partial\theta} = N'\Big(\frac{x}{\theta} + \frac{\theta}{2}\Big).$$

Integrando, si ottiene

$$f(x,\theta) = f(x,0^+) + \int_0^\theta N'\Big(\frac{x}{v} + \frac{v}{2}\Big)\,dv.$$

Osservando che $f(x,0^+) = (1 - exp(-x))^+$ e moltiplicando l'espressione precedente per S, si ottiene il risultato. □

Dimostrazione alternativa. La formula (1.4) può essere ricavata attraverso un approccio differente che fa uso delle PDE. Indichiamo con $\Psi(S_0;t,x)$ la soluzione fondamentale dell'operatore di Black-Scholes

$$L_{BS} = \frac{\sigma^2 S_0^2}{2}\partial_{S_0S_0} + \partial_t.$$

Per ogni $t < T$ e $S, S_0 > 0$, abbiamo $L_{BS}\Psi(S_0;T-t,S) = 0$ e

$$L^*_{BS}\Psi(S_0;T-t,S) = \partial_{SS}\Big(\frac{\sigma^2S^2}{2}\Psi(S_0;T-t,S)\Big) - \partial_T\Psi(S_0;T-t,S) = 0, \tag{1.5}$$

dove L^*_{BS} è l'operatore aggiunto di L_{BS}. Inoltre

$$\Psi(S_0;0,.) = \delta_{S_0},$$

dove δ_{S_0} denota la delta di Dirac's centrata in S_0. Quindi abbiamo

$$\begin{aligned}\Psi(S_0;T,S) &= \delta_{S_0}(S) + \int_0^T \partial_t\Psi(S_0;t,S)\,dt = \\ &(da\,(1.5)) \\ &= \delta_{S_0}(S) + \int_0^T \partial_{SS}\Big(\frac{\sigma^2S^2}{2}\Psi(S_0;t,S)\Big)\,dt.\end{aligned}$$

Moltiplicando per il payoff $(S-K)^+$ e integrando su $\mathbb{R}^+$, otteniamo la seguente rappresentazione del prezzo della Call:

$$
\begin{aligned}
&E\Big[(S_T-K)^+\Big]= \\
&=(S_0-K)^+ + \int_K^\infty \int_0^T (S-K)\partial_{SS}\Big(\frac{\sigma^2 S^2}{2}\Psi(S_0;t,S)\Big)\,dtdS =
\end{aligned}
$$

$(per\, parti)$

$$
\begin{aligned}
&=(S_0-K)^+ - \int_K^\infty \int_0^T \partial_S\Big(\frac{\sigma^2 S^2}{2}\Psi(S_0;t,S)\Big)\,dtdS = \\
&=(S_0-K)^+ + \frac{\sigma^2 K^2}{2}\int_0^T \Psi(S_0;t,S)\,dt \\
&=(S_0-K)^+ + \frac{\sigma^2 K^2}{2}\int_0^T \frac{1}{K\sigma\sqrt{t}\sqrt{2\pi}}\exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\frac{\log K/S}{\sigma\sqrt{t}}+\frac{\sigma\sqrt{t}}{2}\Big)^2\Big)\,dt =
\end{aligned}
$$

$(v=\sigma\sqrt{t})$

$$
=(S_0-K)^+ + \int_0^{\sigma\sqrt{T}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\frac{\log K/S}{v}+\frac{v}{2}\Big)^2\Big)\,dv.
$$

$\square$

Osservazione 1. (i) Se $\sigma=0$, dall'Eq.(1.4) segue che

$$
C^{BS}(K,\tau,0)=(S-K)^+,
$$

come richiesto dalle assunzioni. E' possibile dimostrare inoltre che

$$
\int_0^\infty N'\Big(\frac{x}{v}+\frac{v}{2}\Big)\,dv = \begin{cases} 1 & \text{se } x\le 0, \\ K/S & \text{se } x>0. \end{cases} \tag{1.6}
$$

(ii)

$$
\lim_{v\to 0^+} N'\Big(\frac{x}{v}+\frac{v}{2}\Big)= \begin{cases} 0 & \text{se } x\neq 0, \text{ cioè se } S/K\neq 1, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} & \text{se } x=0, \text{ cioè se } S/K=1. \end{cases} \tag{1.7}
$$

Ciò lascia intravedere una differenza sostanziale tra il comportamento della volatilità implicita nel caso "at the money" e non "at the money".

Lemma 1.1.2. *Sia $F : \mathbb{R} \times [0, \infty] \to [0, \infty)$ definita da*

$$F(x, \theta) = \int_0^\theta N'\Big(\frac{x}{v} + \frac{v}{2}\Big)\, dv. \tag{1.8}$$

Per ogni $x \in \mathbb{R}$, $F(x, .)$ è continua e strettamente crescente. Inoltre per ogni x fissato non positivo (non negativo rispettivamente), $F(x, .)$ ($exp(x)F(x, .)$ rispettivamente) è una funzione di ripartizione strettamente crescente.

Dimostrazione. Poichè l'integrando è strettamente positivo sia $F(x, .)$ che $exp(x)F(x, .)$ sono strettamente crescenti e chiaramente continue. Da (1.6) segue inoltre che $F(x, +\infty) = 1$ se $x \leq 0$, mentre $F(x, +\infty) = K/S =$ $= exp(-x)$ se $x > 0$, da cui $exp(x)F(x, +\infty) = 1$ se $x > 0$. $\square$

1.2 Volatilità implicita scalata nel tempo

Definizione 1.1. La mappa $\Theta : (0, \infty) \times (0, \infty) \to [0, \infty]$ definita da

$$\Theta(K, \tau) = \Sigma(K, \tau)\sqrt{\tau} \tag{1.9}$$

dove $\Sigma(K, \tau)$ è la soluzione dell'equazione implicita $C(K, \tau) = C^{BS}(K, \tau, \sigma)$, viene chiamata volatilità implicita scalata nel tempo.

Proposizione 1.2.1. *Supponiamo che $S > 0$ e $0 \leq a < b \leq \infty$. Sotto le assunzioni iniziali, per ogni $K > 0$, risulta:*

1. *$\tau \to \Theta(K, \tau)$ è non decrescente su $(0, \infty)$;*
2. *$\lim_{\tau \to 0^+} \Theta(K, \tau) = 0$;*
3. *$\lim_{\tau \to \infty} \Theta(K, \tau) = \infty$, quando $C(K, \tau) \to S$ per $\tau \to \infty$;*
4. *$\tau \to \Theta(K, \tau)$ è strettamente crescente su (a, b) se e solo se $C(K, .)$ è strettamente crescente su (a, b);*
5. *$\tau \to \Theta(K, \tau)$ è continua (da destra) su (a, b) se e solo se $C(K, .)$ è continua (da destra) su (a, b).*

Dimostrazione. Sia $K > 0$ fissato e $x = log(S/K)$. Dal Lemma 1.0.1, dalla definizione di Θ e dal fatto che $S > 0$, segue che:

$$\frac{C(K,\tau) - (S-K)^+}{S} = F(x, \Theta(K,\tau)), \quad \forall \tau > 0. \tag{1.10}$$

Dal Lemma 1.0.2 sappiamo che $F(x, .)$ è continua e strettamente crescente, quindi ha un'inversa univocamente definita, strettamente crescente e continua che denotiamo con $F^{-1}(x, .)$. Dall'equazione precedente si ha:

$$F^{-1}\Big(x, \frac{C(k,\tau) - (S-K)^+}{S}\Big) = \Theta(K,\tau), \quad \forall \tau > 0. \tag{1.11}$$

Procediamo ora alla dimostrazione:

1. Abbiamo precedentemente osservato che $F^{-1}(x, .)$ è continua e strettamente crescente. Poichè $(C(K,\tau) - (S-K)^+)/S$ è non decrescente per le assunzioni (1.2), (1.3), utilizzando (1.11) si conclude.

2. Da (1.2) e (1.3) segue che

   $$\lim_{\tau \to 0^+} \frac{C(k,\tau) - (S-K)^+}{S} = 0.$$

   Dal Lemma 1.0.2 sappiamo che $F^{-1}(x, 0) = 0$, quindi da (1.11), passando al limite per $\tau \to 0^+$, segue il risultato essendo F^{-1} continua.

3. $$\lim_{\tau \to \infty} F^{-1}\Big(x, \frac{C(k,\tau) - (S-K)^+}{S}\Big) = \begin{cases} F^{-1}(x, 1) & \text{se } x < 0, \\ F^{-1}(x, \frac{K}{S}) & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

   Dal Lemma 1.0.2 sappiamo inoltre che $F(x, \infty) = 1$ se $x < 0$ e $F(x, \infty) = K/S$ se $x \geq 0$, quindi il risultato segue da (1.11) passando al limite per $\tau \to \infty$.

I punti 4 e 5 seguono da (1.11) e dal fatto che $F^{-1}(x, .)$ è continua e strettamente crescente. $\square$

1.3 Relazione tra la superficie del prezzo di una opzione Call e la superficie della volatilità implicita vicino a scadenza

In questa sezione ricaveremo il comportamento asintotico della funzione $F(x, .)$ e lo combineremo con le proprietà della volatilità implicita scalata nel tempo in modo da esprimere il comportamento asintotico della superficie della volatilità implicita in termini della superficie del prezzo della Call.

1.3.1 Risultati ausiliari

Ricaveremo innanzitutto il comportamento asintotico di $F(x, \theta)$, quando $\theta \to 0^+$. Troveremo due diversi comportamenti a seconda se l'opzione è "at the money" ($x = 0$, cioè $S = K$) oppure no.

Lemma 1.3.1. *Sia $erf(.)$ la funzione d'errore definita da*

$$erf : y \to \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y exp(-u^2)\, du, \tag{1.12}$$

con $y \in [0, \infty)$. Allora

$$F(0, \theta) = erf\Big(\frac{\theta}{2\sqrt{2}}\Big) \sim \frac{\theta}{\sqrt{2\pi}}, \quad \theta \to 0^+. \tag{1.13}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} F(0, \theta) &= \int_0^\theta N'(\frac{v}{2})\, dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\theta exp(-\frac{v^2}{8})\, dv \\ (u = v/(2\sqrt{2})) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\theta}{2\sqrt{2}}} exp(-u^2)\, du \\ &= erf\Big(\frac{\theta}{2\sqrt{2}}\Big). \end{aligned}$$

Ricordando che (si veda [10])

$$erf(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{n!(2n+1)}, \tag{1.14}$$

si conclude che

$$erf\Big(\frac{\theta}{2\sqrt{2}}\Big) \sim \frac{\theta}{\sqrt{2\pi}}, \quad \theta \to 0^+.$$

$\square$

Lemma 1.3.2. *Sia* Γ *la funzione gamma incompleta superiormente definita da*

$$\Gamma : (a, y) \to \int_y^{\infty} u^{a-1} exp(-u)\, du, \tag{1.15}$$

con $a \in \mathbb{R}$ *e* $y \in (0, \infty)$*. Se* $x \neq 0$*, si ha*

$$\begin{aligned} F(x,\theta) &\sim \frac{|x| exp(-x/2)}{4\sqrt{\pi}}\, \Gamma\Big(-\frac{1}{2}, \frac{x^2}{2\theta^2}\Big) \\ &\sim \frac{\theta^3}{x^2\sqrt{2\pi}}\, exp(-\frac{\theta^2 x + x^2}{2\theta^2}), \end{aligned} \tag{1.16}$$

quando $\theta \to 0^+$*.*

Dimostrazione. Fissato $x \neq 0$, risulta

$$F(x,\theta) = \frac{exp(-x/2)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\theta} exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\frac{x^2}{v^2} + \frac{v^2}{4}\Big)\Big)\, dv. \tag{1.17}$$

Utilizzando il teorema di *de l'Hôpital*, è chiaro che

$$\lim_{\theta\to 0^+} \frac{\int_0^{\theta} exp(-\frac{1}{2}(\frac{x^2}{v^2} + \frac{v^2}{4}))\, dv}{\int_0^{\theta} exp(-\frac{x^2}{2v^2})\, dv} = \lim_{\theta\to 0^+} \frac{exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\frac{x^2}{v^2} + \frac{v^2}{4}\Big)\Big)}{exp\Big(-\frac{x^2}{2v^2}\Big)} = 1. \tag{1.18}$$

Effettuando il cambio di variabili $u = x^2/2v^2$, si ha

$$\int_0^{\theta} exp\Big(-\frac{x^2}{2v^2}\Big)\, dv = \frac{|x|}{2\sqrt{2}} \int_{\frac{x^2}{2\theta^2}}^{\infty} u^{-3/2} exp(-u)\, du = \frac{|x|}{2\sqrt{2}}\, \Gamma\Big(-\frac{1}{2}, \frac{x^2}{2\theta^2}\Big).$$

E' possibile dimostrare (si veda [6]) che

$$\Gamma(a,z) \sim z^{a-1} exp(-z), \quad z \to \infty, \tag{1.19}$$

da cui segue

$$
\begin{aligned}
F(x,\theta) &\sim \frac{exp(-x/2)}{\sqrt{2\pi}}\frac{|x|}{2\sqrt{2}}\,\Gamma\Big(-\frac{1}{2},\frac{x^2}{2\theta^2}\Big)\\
&= \frac{|x|exp(-x/2)}{4\sqrt{\pi}}\,\Gamma\Big(-\frac{1}{2},\frac{x^2}{2\theta^2}\Big)\\
&\sim \frac{|x|exp(-x/2)}{4\sqrt{\pi}}\,(\frac{x^2}{2\theta^2})^{-\frac{3}{2}}\,exp\Big(\frac{x^2}{2\theta^2}\Big)\\
&= \frac{\theta^3}{x^2\sqrt{2\pi}}\,exp\Big(-\frac{\theta^2 x+x^2}{2\theta^2}\Big).
\end{aligned}
$$

$\square$

1.3.2 Risultato principale

In questa sezione ricaveremo il comportamento asintotico della volatilità implicita, sia nel caso non “at the money” che in quello “at the money”. Ricordiamo che, in quest'ultimo caso, il risultato è ben noto in letteratura, inoltre la risposta è triviale nel caso in cui il prezzo dell'opzione call è costante vicino a scadenza. Nello specifico, se $\exists\,\delta>0$ tale che

$$C(K,\delta)=(S-K)^+,$$

allora $\Sigma(K,\tau)=0,\forall\tau\in(0,\delta)$. Infatti da (1.4) segue che

$$F(x,\Theta(K,\tau))=0,\ \forall\tau\in(0,\delta),$$

quindi $\Sigma(K,\tau)=0,\ \forall\tau\in(0,\delta)$.

Teorema 1.3.3. *Supponiamo che le assunzioni* (1.1)-(1.3) *siano vere. Se esiste una costante $\delta>0$ tale che, per ogni $\tau\in(0,\delta)$ risulti*

$$C(K,\tau)>(S-K)^+,$$

allora

$$\Sigma(K,\tau)\sim\begin{cases}\frac{\sqrt{2\pi}\,C(K,\tau)}{S\sqrt{\tau}} & se\ K=S,\\ \frac{|log(S/K)|}{\sqrt{-2\tau log(C(K,\tau)-(S-K)^+)}} & se\ K\neq S.\end{cases}\tag{1.20}$$

per $\tau\to0^+$, dove $K,S>0$.

Dimostrazione. Siccome la mappa $C(K,.)$ è non decrescente per assunzione, possiamo supporre che $C(K,\tau) - (S-K)^+ > 0$, $\forall \tau > 0$.
Se $K = S$, dal Lemma 1.0.1 segue che

$$C(S,\tau) = C^{BS}(S,\tau,\Sigma(S,\tau)) = SF(0,\Theta(S,\tau)), \quad \forall \tau > 0.$$

Dal Lemma 1.1.1 segue inoltre che

$$\frac{C(S,\tau)}{S} = F(0,\Theta(S,\tau)) \sim \frac{\Sigma(S,\tau)\sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi}}, \quad \Theta \to 0^+.$$

Utilizzando infine la Proposizione 1.0.3, si conclude.
Passiamo ora al caso $K \neq S$: scrivendo x per $log(S/K)$ si ha

$$\frac{C(K,\tau) - (S-K)^+}{S} = F(x,\Theta(K,\tau)), \quad \forall \tau > 0.$$

Dal Lemma 1.1.2 e dalla proposizione 1.0.3, segue quindi che

$$\frac{C(K,\tau) - (S-K)^+}{S} \sim \frac{\Theta^3(K,\tau)}{x^2\sqrt{2\pi}}\, exp\Big(-\frac{\Theta^2(K,\tau)x + x^2}{2\Theta^2(K,\tau)}\Big), \quad \tau \to 0^+. \tag{1.21}$$

Introduciamo, per convenienza, le funzioni

$$A : (K,\tau) \to 4\sqrt{\pi}\,\frac{C(K,\tau) - (S-K)^+}{\sqrt{KS}|x|},$$

$$B : (K,\tau) \to \frac{x^2}{2\Theta^2(K,\tau)},$$

definite per $K, \tau > 0$. Da (1.21) segue che

$$A(K,\tau) \sim (B(K,\tau))^{-\frac{3}{2}}\, exp(-B(K,\tau)), \quad \tau \to 0^+, \tag{1.22}$$

infatti, utilizzando il Lemma 1.1.1 e 1.1.2, si ha

$$\begin{aligned} \frac{A(K,\tau)}{B(K,\tau)^{-\frac{3}{2}}\, exp(-B(K,\tau))} &\sim exp\Big(-\frac{\Theta^2(K,\tau)x + x^2 - x^2}{2\Theta^2(K,\tau)}\Big)\sqrt{\frac{S}{K}} \\ &= exp\Big(-\frac{x}{2}\Big)\sqrt{\frac{S}{K}} \\ &= \Big(\frac{S}{K}\Big)^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{S}{K}} = 1. \end{aligned}$$

Da (1.22) segue che $\exists\, g_K : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, tale che $g_K(\tau) = o(1)$ per $\tau \to 0^+$ e

$$A(K,\tau)(1 + g_K(\tau)) = B(K,\tau)^{-\frac{3}{2}}\, exp(-B(K,\tau)) \tag{1.23}$$

vale per tutti i $\tau > 0$ e minori di qualche costante $\delta' > 0$. Vogliamo risolvere (1.23) per B, almeno asintoticamente. Indichiamo con $\phi_{\frac{3}{2}}(z)$ il valore di y che è l'unica soluzione positiva di

$$y^{\frac{3}{2}}\, exp(y) = z.$$

Prendendo z come $(A(K,\tau)(1+g_K(\tau)))^{-1}$ e $y = B(K,\tau)$, è chiaro che risulta

$$B(K,\tau) = \phi_{\frac{3}{2}}\Big(\frac{1}{A(K,\tau)(1 + g_K(\tau))}\Big),$$

con $0 < \tau < \delta'$. E' possibile dimostrare (si veda [5]) che

$$\phi_{\frac{3}{2}}(z) \sim log(z), \quad z \to \infty. \tag{1.24}$$

Dalle assunzioni (1.1)-(1.3) e dalla positività di A segue che

$$(A(K,\tau)(1 + g_K(\tau)))^{-1} \to +\infty, \quad \tau \to 0^+,$$

quindi, dal comportamento asintotico di $\phi_{\frac{3}{2}}$, si ha

$$\begin{aligned} B(K,\tau) &\sim -log(A(K,\tau)(1 + g_K(\tau))) \\ &\sim -log(A(K,\tau)), \end{aligned}$$

per $\tau \to 0^+$. Sostituendo le espressioni di A e B si ha quindi

$$\frac{(log(S/K))^2}{2\Sigma^2(K,\tau)\tau} \sim -log\Big(4\sqrt{\pi}\,\frac{C(K,\tau) - (S-K)^+}{|x|\sqrt{KS}}\Big), \tag{1.25}$$

da cui

$$\begin{aligned} \Sigma^2(K,\tau)\tau &\sim \frac{(log(S/K))^2}{-2\,log(4\sqrt{\pi}\,\frac{C(K,\tau)-(S-K)^+}{|x|\sqrt{KS}})} \\ &\sim \frac{(log(S/K))^2}{-2\,log(C(K,\tau) - (S-K)^+)}, \quad \tau \to 0^+. \end{aligned}$$

In conclusione

$$\Sigma(K,\tau) \sim \frac{|log(S/K)|}{\sqrt{-2\tau\, log(C(K,\tau) - (S-K)^+)}}, \quad \tau \to 0^+. \tag{1.26}$$

$\square$

Corollario 1.3.4. *Sotto le assunzioni* (1.1)-(1.3), *se esiste una costante* $\delta > 0$ *tale che, per ogni* $\tau \in (0, \delta)$,

$$C(K, \tau) > (S - K)^+, \tag{1.27}$$

allora

$$\lim_{\tau \to 0^+} \Sigma(K, \tau) = \begin{cases} \lim_{\tau \to 0^+} \frac{\sqrt{2\pi} C(K,\tau)}{S\sqrt{\tau}} & se\ K = S, \\ \lim_{\tau \to 0^+} \frac{|log(S/K)|}{\sqrt{-2\tau\, log(C(K,\tau) - (S-K)^+)}} & se\ K \neq S, \end{cases} \tag{1.28}$$

nel senso che il limite della parte sinistra esiste (è infinito, rispettivamente) se esiste il limite della parte destra (è infinito, rispettivamente) ed, in tal caso, coincidono.

Dimostrazione. La dimostrazione è una conseguenza immediata del teorema precedente e del fatto che se $u, v : (0, \infty) \to (0, \infty)$, con $u(\tau) \sim v(\tau)$, allora $u(\tau) = v(\tau)(1 + o(1))$ per $\tau \to 0^+$. □

1.4 Mercati con volatilità implicita non convergente

In questa sezione vedremo che l'assenza di arbitraggi, da sola, non è sufficiente a garantire la convergenza della volatilità implicita, quando il tempo a scadenza tende a zero, anche nel semplice caso del modello di Black-Scholes con volatilità implicita dipendente dal tempo.

Lemma 1.4.1. *Esiste una funzione* $G : (0, \infty) \to [0, \infty)$ *con le seguenti proprietà:*

1. *G è differenziabile ;*

2. *G è strettamente crescente ;*

3. $\exists\, a, b > 0$ *tali che* $a \leq G'(\tau) \leq b$, $\forall \tau \in (0, \infty)$ *;*

4. $G(\tau) \to 0$ *per* $\tau \to 0^+$*;*

5. $\tau \to (G(\tau)/\tau))^{1/2}$ *non converge, ad un limite finito o infinito, per* $\tau \to 0^+$*.*

Dimostrazione. E' sufficiente considerare la funzione

$$G(\tau) = \int_0^\tau (3 + sin(ln(u)))\, du = 3\tau + \frac{\tau}{2} \left[sin(ln(\tau)) - cos(ln(\tau))\right]. \quad (1.29)$$

Chiaramente

$$G(\tau)/\tau = 3 + \frac{1}{2} \left[sin(ln(\tau)) - cos(ln(\tau))\right], \quad (1.30)$$

non converge per $\tau \to 0^+$.
Inoltre G è differenziabile, $G'(\tau) = (3 + sin(ln(\tau)) > 0$ e quindi G è strettamente crescente. $G'(\tau) \in [2, 4]$, inoltre $G(\tau) \to 0$ per $\tau \to 0^+$, in quanto prodotto di una funzione limitata per una infinitesima. □

Proposizione 1.4.2. *Esistono mercati liberi da arbitraggi dove la volatilità implicita non ha limite finito o infinito, per il tempo a scadenza che va a zero.*

Dimostrazione. Consideriamo il modello di Black-Scholes con volatilità dipendente dal tempo ma deterministica. Nel caso in cui σ è limitata inferiormente e superiormente da una costante positiva, si può dimostrare che la corrispondente volatilità implicita è data da

$$\Sigma(\tau) = \Sigma(K, \tau) = \Big(\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \sigma^2(s)\, ds\Big)^{1/2}. \quad (1.31)$$

Se scegliamo $\sigma^2(t) = G'(t)$ per $t > 0$, dove G è la funzione introdotta nella dimostrazione del lemma precedente, si conclude. □

Osservazione 2. Il risultato precedente mette in luce un risultato ottenuto da Berestycki *et al*, riportato in Appendice A. In questo lavoro, viene studiato il comportamento asintotico della volatilità implicita vicino a scadenza in un modello a volatilità locale. La loro analisi è applicabile al caso di volatilità dipendente dal tempo, come considerato precedentemente. Nel caso in cui la volatilità sia limitata e continua su $[0, T], T > 0$, mostrano che il limite della volatilità implicita, quando il tempo a scadenza tende a zero, deve esistere e lo calcolano esplicitamente. Nella dimostrazione della proposizione precedente abbiamo considerato una volatilità che è sia limitata che continua in $(0, 1]$, ma non su $[0, 1]$. Ciò mostra l'importanza delle condizioni di regolarità extra imposte in (2.5).

Capitolo 2

Stime asintotiche e calibrazione di un modello a volatilità locale

Nel modello di Black-Scholes viene assunto che il prezzo del titolo rischioso S_t soddisfa l'equazione differenziale stocastica log-normale

$$dS_t = S_t(\mu\, dt + \sigma\, dW_t), \tag{2.1}$$

dove t è il tempo, μ e σ sono costanti e W_t è un moto browniano standard. Il parametro σ è chiamato volatilità. E' ben noto che il prezzo $C(S_t, t;\ K, T)$ di una opzione Europea, con strike K e maturità T, soddisfa l'equazione alle derivate parziali lineare e parabolica

$$\begin{cases} C_t + \frac{\sigma^2}{2} S^2 C_{SS} + rSC_S - rC = 0 \quad in \quad (0, +\infty) \times (0, T), \\ C(S, T) = (S - K)^+, \end{cases} \tag{2.2}$$

dove r è il tasso di interesse a breve termine. Queste opzioni sono comunemente scambiate nei mercati, anche se il parametro σ non è direttamente osservabile. E' pratica comune partire dal prezzo osservato e invertire la soluzione a (2.2) in modo da trovare una costante σ, chiamata volatilità implicita. E' largamente osservato che Call aventi differenti strikes hanno differenti volatilità implicite. Questo fenomeno, generalmente chiamato smile effect, chiaramente viola il modello di Black-Scholes, in cui la volatilità implicita è costante e non dipende dallo strike e dalla maturità. Per superare questa difficoltà, il modello deve essere esteso. D'ora in avanti considereremo quindi un modello a volatilità locale, in cui la volatilità σ non è piu costante ma funzione del titolo sottostante e del tempo. Per questo tipo di modello, il titolo sottostante è governato dall'equazione differenziale stocastica

$$dS_t = \mu \, S_t \, dt + \sigma(S_t, t) S_t dW_t. \tag{2.3}$$

Chiamiamo $x = log(S/K) + r\tau$, $\tau = T - t$. Da (2.2) segue che il prezzo trasformato

$$v(x,\tau) = e^{r\tau} \, C(S, T-t; \, K, T)/K$$

formalmente soddisfa

$$\begin{cases} v_\tau = \frac{1}{2}\sigma^2(x,\tau)(v_{xx} - v_x), \quad in \quad \Omega_T = \mathbb{R} \times (0,T) \\ v(x,0) = (e^x - 1)^+. \end{cases} \tag{2.4}$$

Assumiamo che

$$\sigma \in BUC(\overline{\Omega}_T), \quad 0 < \sigma_1 \le \sigma(x,\tau) \le \sigma_2 < \infty, \tag{2.5}$$

dove BUC denota lo spazio delle funzioni limitate e uniformemente continue e σ_1, σ_2 sono costanti. Richiediamo inoltre che

$$v \in C(\overline{\Omega}_T) \cap W^{2,1,p}_{loc}(\Omega), \quad \Omega = \mathbb{R} \times (0, \infty), \tag{2.6}$$

soddisfi l'equazione in (2.4) quasi dappertutto su Ω. $W^{2,1,p}_{loc}(\Omega)$ denota lo spazio di Sobolev

$$W^{2,1,p}_{loc}(\Omega) = \left\{ w \, , \int_\Omega |w_{xx}|^p + |w_\tau|^p + |w|^p < \infty \right\} \tag{2.7}$$

Denotiamo con u la soluzione di (2.4) corrispondente a $\sigma = 1$:

$$\begin{cases} u_\tau = \frac{1}{2}(u_{xx} - u_x), \quad in \quad \Omega \\ u(x,0) = (e^x - 1)^+. \end{cases} \tag{2.8}$$

La soluzione esplicita di (2.8) è data da

$$u(x,\tau) = e^x\, N\Big(\frac{x}{\sqrt{\tau}} + \frac{1}{2}\sqrt{\tau}\Big) - N\Big(\frac{x}{\sqrt{\tau}} - \frac{1}{2}\sqrt{\tau}\Big), \tag{2.9}$$

dove

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy. \tag{2.10}$$

Osserviamo che (2.9) non è altro che la formula di Black-Scholes scritta nelle nostre variabili ridotte.

Proposizione 2.0.3. *Sotto l'assunzione* (2.5) *esiste un'unica soluzione* v *nella classe*

$$W^{2,1,p}_{loc}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \cap \Big\{ w \mid \exists\, C, \beta > 0, \forall\, (x,\tau) \in \Omega, |w(x,\tau)| \le C\, e^{\beta\, x^2} \Big\}, \tag{2.11}$$

per ogni $1 < p < \infty$ *a*

$$\begin{cases} v_\tau - \frac{1}{2}\sigma^2(x,\tau)(v_{xx} - v_x) = 0 \quad q.d.\, in\, \Omega \\ v(x,0) = (e^x - 1)^+. \end{cases} \tag{2.12}$$

Inoltre, v soddisfa

1. $0 < v(x,\tau) < e^x$;
2. $v(x,\tau) \ge (e^x - 1)^+$;
3. $v_\tau(x,\tau) > 0 \quad in\ \Omega_T$.

Osservazione 3. $(x,\tau) \to u(x,\lambda\tau)$, con $\lambda > 0$, sodddisfa (2.12) con $\sigma \equiv \sqrt{\lambda}$.

Dimostrazione. Sostituendo $u(x,\lambda\tau)$ in (2.12), otteniamo

$$\lambda\, u_\tau(x,\lambda\tau) - \frac{1}{2}\sigma^2(x,\tau)(u_{xx}(x,\lambda\tau) - u_x(x,\lambda\tau)) = 0. \tag{2.13}$$

Ricordando che u soddisfa (2.8) e $\lambda = \sigma^2$, si conclude. □

Ciò implica che, se definiamo $\varphi \ge 0$ tale che

$$v(x,\tau) = u(x, \tau\varphi^2(x,\tau)) \tag{2.14}$$

per ogni $(x,\tau) \in \Omega$, allora φ è chiaramente la volatilità implicita della corrispondente opzione Call.

Teorema 2.0.4. *Sotto l'assunzione* (2.5)*, supponiamo che la volatilità implicita* φ *sia definita da* (2.14)*, dove* v *ed* u *sono soluzioni ad* (2.12) *e* (2.8) *rispettivamente. Allora:*

(i) La volatilità implicita $\varphi \in W^{2,1,p}_{loc}(\Omega)$ *per ogni* $1 < p < \infty$ *e soddisfa*

$$2\tau\varphi\varphi_\tau + \varphi^2 - \sigma^2(x,\tau)\left(1 - x\frac{\varphi_x}{\varphi}\right)^2 - \sigma^2(x,\tau)\tau\varphi\varphi_{xx} + \frac{1}{4}\sigma^2(x,\tau)\tau^2\varphi^2\varphi_x^2 = 0 \tag{2.15}$$

q.d. in Ω.

(ii) Nel limite $\tau \to 0$*, la volatilità implicita è la media armonica della volatilità locale, cioè*

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\varphi(x,\tau)} = \int_0^1 \frac{ds}{\sigma(sx,0)}, \tag{2.16}$$

uniformemente in $x \in \mathbb{R}$.

(iii) Se $\tilde{\varphi} \in W^{2,1,p}_{loc}(\Omega)$*(per qualche* $p > 1$*), soddisfa* (2.15) *e* (2.16)*, allora* $\tilde{\varphi} = \varphi$.

Dimostrazione. Riportiamo solo la traccia della dimostrazione del punto (ii). Osserviamo innanzitutto che l'esistenza del limite non è ovvia da (2.16), in quanto questa equazione degenera vicino a $\tau = 0$. Per superare questa difficoltà, l'idea essenziale è quella di definire una sub e supersoluzione di (2.15) prendendo la soluzione formale del limite di (2.16), e provare la convergenza utilizzando il principio del confronto. Per semplicità trattiamo il caso in cui σ soddisfa le condizioni di regolatità aggiuntive

$$\sigma \in C^{2,1}(\overline{\Omega}_T) \quad e \quad \sigma_{xx} \in L^\infty(\Omega_T). \tag{2.17}$$

Facendo il limite di (2.16), per τ che va a zero, otteniamo

$$(\varphi)^2 - \sigma^2(x,0)\left(1 - x\frac{\varphi_x}{\varphi}\right)^2 = 0, \tag{2.18}$$

la cui soluzione è data da

$$\varphi(x) = \left(\int_0^1 \frac{ds}{\sigma(sx,0)}\right)^{-1}. \tag{2.19}$$

Per il resto della dimostrazione si veda [3]. □

Osservazione 4. Il punto (ii) del Teorema (2.0.4) ha un'interessante connessione con un risultato classico ottenuto da Varadhan in [2], anche se non segue direttamente da esso. In [2] viene provato che

$$\lim_{\tau \to 0} -2\tau \ln v(x,\tau) = \left(\int_0^x \frac{ds}{\sigma(s)} \right)^2, \quad \tau \to 0, \tag{2.20}$$

quando $\tau \to 0$, dove $v(x,\tau)$ è la soluzione fondamentale dell'operatore $\partial_t - \frac{1}{2}\sigma^2(x)\partial_x^2$. Ciò corrisponde alla metrica Riemanniana associata all'inverso del coefficiente di diffusione. Denotando con U la soluzione fondamentale di $\partial_t - \frac{1}{2}\partial_x^2$, cioè

$$U(x,\tau) = (2\pi\tau)^{-1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\tau} \right),$$

possiamo rappresentare il risultato come segue. Se ϕ è tale che

$$v(x,\tau) = U(x, \tau\phi(x,\tau)^2),$$

osservando che ϕ è limitata per (2.5), deduciamo che

$$\frac{1}{\phi(x,\tau)} \to \int_0^1 \frac{ds}{\sigma(sx)} \tag{2.21}$$

quando $\tau \to 0$. Il punto (ii) del Teorema (2.0.4) non segue direttamente da (2.21), in quanto abbiamo differenti condizioni iniziali e una composizione con una funzione differente.

Capitolo 3

Approssimazione analitica della densità di transizione in un modello a volatilità locale

In questo capitolo studieremo le approssimazioni della densità di transizione in un modello a volatilità locale. Il risultato principale è un'espansione della densittà di transizione $\Gamma(t, S_0; T, S)$ di S in (2.3) della forma

$$\Gamma(t, S_0; T, S) \approx G^0(t, S_0; T, S) + \sum_{n=1}^{N} J_{S_0}^n G^0(t, S_0; T, S), \quad N \geq 1,$$

dove $G^0(t, S_0; T, S)$ è la densità in un modello di Black-Scholes, mentre $J_{S_0}^n$ è un operatore differenziale contenente derivate rispetto alla variabile S_0. Mostreremo come è possibile calcolare l'espressione esplicita di $J_{S_0}^n$, utilizzando un algoritmo iterativo implementabile utilizzando un software di calcolo simbolico.

3.1 Approssimazione delle soluzioni fondamentali paraboliche

In questa sezione presentiamo una tecnica di approssimazione nel caso più semplice di un opereratore differenziale della forma

$$L = \frac{a(x)}{2}\,\partial_{xx} + \partial_t\,, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2, \tag{3.1}$$

dove a è funzione liscia tale che $a_0 \le a(x) \le c$, con a_0 e c costanti positive e $x \in \mathbb{R}$. Per semplicità di esposizione consideriamo il caso in cui i coefficienti sono indipendenti dal tempo, lasciando il caso generale per la sezione successiva. Considerando l'espansione di Taylor di a con punto iniziale $\bar{x} \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$L = L^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (x-\bar{x})^k\,\partial_{xx}, \tag{3.2}$$

dove

$$L^0 = \frac{\alpha_0}{2}\,\partial_{xx} + \partial_t\,, \quad \alpha_0 = a(\bar{x}) \tag{3.3}$$

è l'approssimazione di ordine 0 di L e

$$\alpha_n = \frac{1}{2n!}\,\partial_x^n\, a(\bar{x}), \quad n \ge 1.$$

Denotiamo con $\Gamma(t,x\,;\,T,y)$ la soluzione fondamentale di L valutata in (t,x) con polo (T,y). Il nostro obiettivo è quello di approssimare Γ attraverso un'espansione della forma

$$\Gamma(t,x\,;\,T,y) = \sum_{k\ge 0} G^k(t,x\,;\,T,y), \tag{3.4}$$

dove $(G^k)_{k\ge 0}$ è definita ricorsivamente in termini delle soluzioni di una sequenza di problemi di Cauchy. Precisamente, il primo termine dell'espansione

$$G^0(t,x\,;\,T,y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\alpha_0(T-t)}}\, exp\Big(-\frac{(x-y)^2}{2\alpha_0(T-t)}\Big), \quad x,y \in \mathbb{R},\, t<T, \tag{3.5}$$

è la soluzione fondamentale di L^0. Inoltre, per ogni $(T,y) \in \mathbb{R}^2$, denotiamo con $G^1(.,.\,;T,y)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} L^0\, G^1(t,x\,;T,y) + \alpha_1(x-\bar{x})\partial_{xx}\, G^0(t,x\,;T,y) = 0, \quad t<T,\, x\in\mathbb{R}, \\ G^1(t,x\,;T,y) = 0, \quad x\in\mathbb{R} \end{cases} \tag{3.6}$$

e con $G^2(.,.\,;T,y)$ la soluzione a

$$\begin{cases} L^0\, G^2 + \alpha_1(x-\bar{x})\partial_{xx}\, G^1 + \alpha_2(x-\bar{x})^2\partial_{xx}\, G^0 = 0, \quad t<T,\, x\in\mathbb{R}, \\ G^2(t,x\,;T,y) = 0, \quad x\in\mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.7}$$

In generale, poniamo

$$\Gamma^N(t,x\,;T,y) = \sum_{n=0}^{N} G^n(t,x\,;T,y), \quad N\geq 0 \tag{3.8}$$

e definiamo ricorsivamente la sequenza $(G^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ponendo

$$\begin{cases} L^0\, G^n + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k(x-\bar{x})^k\partial_{xx}\, G^{n-k} = 0, \quad t<T,\, x\in\mathbb{R}, \\ G^n(t,x\,;T,y) = 0, \quad x\in\mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.9}$$

Osservazione 5. La particolare scelta dei problemi di Cauchy (3.9) viene dal fatto che

$$\begin{aligned} L^0\Gamma^N &= \sum_{n=0}^{N} L^0\Gamma^n = (da\,(3.9)) \\ &= -\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(x-\bar{x})^k\partial_{xx}\, G^{n-k} \\ &= -\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(x-\bar{x})^k\partial_{xx}\sum_{n=k}^{N} G^{n-k} \\ &= -\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(x-\bar{x})^k\partial_{xx}\,\Gamma^{N-k}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Passando al limite per $N\to\infty$, da (3.10) e dalla definizione di L segue che

$$L\sum_{n=0}^{\infty} G^n = 0. \tag{3.11}$$

Per ricavare una soluzione esplicita del problema (3.9), richiamiamo alcune proprietà della densità Gaussiana Γ^0. Innanzitutto dobbiamo usare la seguente proprietà di riproduzione di Γ^0: per ogni $t < s < T$ e $x, y \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}} \Gamma^0(t, x\,;\, s, \eta)\, \Gamma^0(s, \eta\,;\, T, y)\, d\eta = \Gamma^0(t, x\,;\, T, y). \tag{3.12}$$

Inoltre ci serve il seguente lemma:

Lemma 3.1.1. *Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ e $t < T$, abbiamo*

$$\partial_y\, \Gamma^0(t, x\,;\, T, y) = -\partial_x\, \Gamma^0(t, x\,;\, T, y), \tag{3.13}$$

$$y\, \Gamma^0(t, x\,;\, T, y) = x\, \Gamma^0(t, x\,;\, T, y) + (T - t)\alpha_0 \partial_x\, \Gamma^0(t, x\,;\, T, y). \tag{3.14}$$

Dimostrazione. La formula (3.13) è ovvia per simmetria, mentre la formula (3.14) segue dall'identità

$$\partial_x\, \Gamma^0(t, x\,;\, T, y) = -\frac{x - y}{(T - t)\alpha_0}\, \Gamma^0(t, x\,;\, T, y). \tag{3.15}$$

□

Dal lemma precedente segue quindi che la derivata parziale ∂_y opera come -∂_x su $\Gamma^0(t, x\,;\, T, y)$. Inoltre, se m_x denota l'operatore prodotto

$$m_x f = x f, \tag{3.16}$$

allora, per ogni $c \in \mathbb{R}$, l'operatore m_{y+c} agisce come

$$m_{x+c} + (T - t)\alpha_0 \partial_x$$

su $\Gamma^0(t, x\,;\, T, y)$. In generale, abbiamo anche

$$\begin{aligned}(y + c)^k \Gamma^0(t, x\,;\, T, y) &= m_{y+c}^k \Gamma^0(t, x\,;\, T, y) \\ &= (m_{x+c} + (T - t)\alpha_0 \partial_x)^k \Gamma^0(t, x\,;\, T, y),\end{aligned}$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Proposizione 3.1.2. *La soluzione G^n del problema* (3.9) *è data da*

$$G^n(t,x\,;\,T,y) = J^n_{t,T,x}\Gamma^0(t,x\,;\,T,y),$$

dove $J^n_{t,T,x}$ è un operatore differenziale della forma

$$J^n_{t,T,x} = \sum_{k=2}^{3n} c_{n,k}(T-t)^{p_{n,k}}(x-\bar{x})^{q_{n,k}}\partial_x^k, \tag{3.17}$$

con $c_{n,k}\in\mathbb{R}$, $p_{n,k},q_{n,k}\in\mathbb{N}$ tali che

$$2p_{n,k} \geq n, \tag{3.18}$$

$$2p_{n,k} + q_{n,k} - k = n. \tag{3.19}$$

L'operatore $J^n_{t,T,x}$ in (3.17) *può essere calcolato iterativamente : ad esempio, per $n=1,2$ abbiamo*

$$J^1_{t,T,x} = \alpha_1(T-t)(x-\bar{x})\partial_x^2 + \frac{\alpha_0\alpha_1}{2}(T-t)^2\partial_x^3, \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}J^2_{t,T,x} &= \frac{\alpha_2}{2}(T-t)(\alpha_0(T-t)+2(x-\bar{x})^2)\partial_x^2\\ &+ (\alpha_1^2+\alpha_0\alpha_2)(T-t)^2(x-\bar{x})\partial_x^3\\ &+ \left(\frac{1}{6}(T-t)^2\alpha_0\left(3\alpha_1^2+2\alpha_0\alpha_2\right)+\frac{1}{2}(T-t)^2\alpha_1^2\left(x-\bar{x}\right)^2\right)\partial_x^4\\ &+ \frac{\alpha_0\alpha_1^2}{2}(T-t)^3(x-\bar{x})\partial_x^5 + \frac{\alpha_0^2\alpha_1^2}{8}(T-t)^4\partial_x^6.\end{aligned} \tag{3.21}$$

Dimostrazione. Dalla formula di rappresentazione per la soluzione del problema di Cauchy parabolico e non omogeneo, abbiamo

$$G^1(t,x\,;\,T,y) = \int_t^T \int_{\mathbb{R}} \Gamma^0(t,x\,;\,s,\eta)\alpha_1(\eta-\bar{x})\partial_{\eta\eta}\Gamma^0(s,\eta\,;T,y)\,d\eta\,ds =$$

(*da* (3.16))

$$= \alpha_1\int_t^T \int_{\mathbb{R}} m_{\eta-\bar{x}}\Gamma^0(t,x\,;\,s,\eta)\partial_{\eta\eta}\Gamma^0(s,\eta\,;T,y)\,d\eta\,ds =$$

(*da* (3.14))

$$= \alpha_1\int_t^T (m_{x-\bar{x}} + (s-t)\alpha_0\partial_x)\int_{\mathbb{R}} \Gamma^0(t,x\,;\,s,\eta)\partial_{\eta\eta}\Gamma^0(s,\eta\,;T,y)\,d\eta\,ds =$$

(per parti)

$$= -\alpha_1 \int_t^T (m_{x-\bar{x}} + (s-t)\alpha_0 \partial_x) \int_{\mathbb{R}} \partial_{\eta\eta} \, \Gamma^0(t,x\,;\, s,\eta)\, \Gamma^0(s,\eta\,;T,y)\, d\eta\, ds =$$

$(da\,(3.13))$

$$= \alpha_1 \int_t^T (m_{x-\bar{x}} + (s-t)\alpha_0 \partial_x) \partial_{xx} \int_{\mathbb{R}} \Gamma^0(t,x\,;\, s,\eta)\, \Gamma^0(s,\eta\,;T,y)\, d\eta\, ds =$$

$(da\,(3.12))$

$$= \alpha_1 \int_t^T (m_{x-\bar{x}} + (s-t)\alpha_0 \partial_x)\, ds\, \partial_{xx} \Gamma^0(t,x\,;T,y).$$

In conclusione abbiamo

$$J^n_{t,T,x} = \alpha_1 \int_t^T (m_{x-\bar{x}} + (s-t)\alpha_0 \partial_x)\, ds\, \partial_{xx} \tag{3.22}$$

ed integrando in s otteniamo (3.20).

Per quanto riguarda G^2, abbiamo

$$G^2(t,x\,;T,y) = I_1 + I_2$$

dove, procedendo come prima,

$$\begin{aligned}
I1 &= \alpha_2 \int_t^T \int_{\mathbb{R}} \Gamma^0(t,x\,;\, s,\eta)(\eta - \bar{x})^2 \partial_{\eta\eta} \, \Gamma^0(s,\eta\,;T,y)\, d\eta\, ds \\
&= \alpha_2 \int_t^T (m_{x-\bar{x}} + (s-t)\alpha_0 \partial_x)^2 \partial_{xx} \int_{\mathbb{R}} \Gamma^0(t,x\,;\, s,\eta)\, \Gamma^0(s,\eta\,;T,y)\, d\eta\, ds \\
&= \alpha_2 \int_t^T (m_{x-\bar{x}} + (s-t)\alpha_0 \partial_x)^2\, ds\, \partial_{xx} \Gamma^0(t,x\,;T,y),
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
I2 = \alpha_1 &\int_t^T \int_{\mathbb{R}} \Gamma^0(t,x\,;\, s,\eta)(\eta - \bar{x})^2 \partial_{\eta\eta} \, G^1(s,\eta\,;T,y)\, d\eta\, ds = \\
= \alpha_1 &\int_t^T (m_{x-\bar{x}} + (s-t)\alpha_0 \partial_x) \partial_{xx} \int_{\mathbb{R}} \Gamma^0(t,x\,;\, s,\eta)\, J^1_{s,T,\eta}\, \Gamma^0(s,\eta\,;T,y)\, d\eta\, ds \\
= \alpha_1 &\int_t^T (m_{x-\bar{x}} + (s-t)\alpha_0 \partial_x) \partial_{xx}\, \tilde{J}^1_{s,T,\eta} \int_{\mathbb{R}} \Gamma^0(t,x\,;\, s,\eta)\, \Gamma^0(s,\eta\,;T,y)\, d\eta\, ds \\
= \alpha_1 &\int_t^T (m_{x-\bar{x}} + (s-t)\alpha_0 \partial_x) \partial_{xx}\, \tilde{J}^1_{s,T,x}\, ds\, \Gamma^0(t,x\,;T,y),
\end{aligned}$$

con

$$\tilde{J}^1_{s,T,\eta} = \alpha_1(T-s)(m_{x-\bar{x}} + (s-t)\alpha_0\partial_x)\partial_x^2 + \frac{\alpha_0\alpha_1(T-s)^2}{2}\,\partial_x^3. \tag{3.23}$$

In conclusione abbiamo

$$\begin{aligned} J^2_{t,T,x} = \alpha_2 &\int_t^T (m_{x-\bar{x}} + (s-t)\alpha_0\partial_x)^2\, ds\, \partial_{xx} \\ &+ \alpha_1 \int_t^T (m_{x-\bar{x}} + (s-t)\alpha_0\partial_x)\partial_{xx}\, \tilde{J}^1_{s,T,x}\, ds, \end{aligned}$$

e integrando in s otteniamo la formula (3.21). L'espressione generale può essere provata per induzione. □

Osservazione 6. La dimostrazione precedente fornisce un'algoritmo costruttivo che può essere usato per calcolare iterativamente le approssimazioni di alto ordine. In particolare, questo può essere fatto utilizzando un software di calcolo simbolico: utilizzando ad esempio Mathematica, si può ricavare l'espressione di $J^1_{t,T,x}$ o $J^2_{t,T,x}$ scrivendo solo una riga di codice. Inoltre, poichè le derivate delle densità gaussiana Γ^0 possono essere espresse attraverso i polinomi di Hermite, il calcolo dei termini dell'espansione è estremamente veloce.

Abbiamo visto che l'approssimazione di ordine N di Γ è data da

$$\Gamma^N(t,x\,;T,y) = \sum_{n=0}^{N} G^n(t,x\,;T,y).$$

Per la Proposizione (3.1.2) abbiamo

$$\Gamma^N(t,x\,;T,y) = \Gamma^0(t,x\,;T,y) + A^N_{t,T,x}\Gamma^0(t,x\,;T,y), \tag{3.24}$$

dove $\Gamma^0 \equiv G^0$ è la densità gaussiana in (3.5) e $A^N_{t,T,x}$ è l'operatore differenziale

$$A^N_{t,T,x} = \sum_{n=0}^{N} J^n_{t,T,x}\,, \quad N \geq 1. \tag{3.25}$$

Osservazione 7. Dalla formula (3.24), deduciamo che

$$\int_{\mathbb{R}} \Gamma^N(t,x\,;T,y)\,dy = (1 + A^N_{t,T,x}) \int_{\mathbb{R}} \Gamma^0(t,x\,;T,y)\,dy = 1. \tag{3.26}$$

Quindi, una proprietà generale della densità approssimata Γ^N è che ha integrale pari a uno.

Più in generale, una bella caratteristica della formula di approssimazione (3.24) è che $A^N_{t,T,x}$ agisce come un operatore differenziale nella variabile x. Di conseguenza, il prezzo di un'opzione con funzione di payoff φ è semplicemente dato da

$$\begin{aligned} C(t,x) &= \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t,x\,;T,y)\,\varphi(y)\,dy \\ &\approx (1 + A^N_{t,T,x}) \int_{\mathbb{R}} \Gamma^0(t,x\,;T,y)\,\varphi(y)\,dy = C^{BS}(t,x) + A^N_{t,T,x} C^{BS}(t,x), \end{aligned} \tag{3.27}$$

dove C^{BS} denota il prezzo di Black-Scholes.

Osservazione 8. Il risultato di approssimazione ottenuto nella Proposizione (3.1.2), dipende dalla scelta del punto di partenza $\bar{x}$ dell'espansione di Taylor. Se $x = \bar{x}$, otteniamo una semplice espressione per l'operatore $J^n_{t,T,x}$:

$$J^1_{t,T,x} = \frac{\alpha_1\alpha_0(T-t)^2}{2}\,\partial_x^3, \tag{3.28}$$

$$J^2_{t,T,x} = \frac{\alpha_2\alpha_0}{2}(T-t)^2\,\partial_x^2 + \frac{\alpha_0}{6}(2\alpha_0\alpha_2 + 3\alpha_1^2)(T-t)^3\,\partial_x^4 + \frac{\alpha_0^2\alpha_1^2}{8}(T-t)^4\,\partial_x^6, \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned} J^3_{t,T,x} &= \frac{\alpha_0}{3}(4\alpha_1\alpha_2 + 3\alpha_0\alpha_3)(T-t)^3\partial_x^3 \\ &+ \frac{\alpha_0}{12}(6\alpha_1^3 + 16\alpha_0\alpha_1\alpha_2 + 3\alpha_0^2\alpha_3)(T-t)^4\partial_x^5 + \end{aligned}$$

$$+ \frac{\alpha_0^2\alpha_1}{12}(3\alpha_1^2 + 2\alpha_0\alpha_2)(T-t)^5\partial_x^7 + \frac{\alpha_0^3\alpha_1^3}{48}(T-t)^6\partial_x^9.$$

Altri valori di $\bar{x}$ possono essere usati per minimizzare l'errore di approssimazione.

Osservazione 9. L'approssimazione può essere notevolmente migliorata usando la proprietà di riproduzione (3.12) ed osservando il fatto che l'approssimazione è migliore per scadenze brevi a causa della presenza della potenza di $T - t$ nei coefficienti dell'espansione. Notiamo innanzitutto che, integrando per parti e da (3.13), per $J^1_{t,T,x}$ come in (3.28), abbiamo

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} \Gamma^0(t,x\,;s,\eta)\,(1 + J^1_{s,T,\eta})\,\Gamma^0(s,\eta\,;T,y)\,d\eta = \\ &= (1 + J^1_{s,T,x}) \int_{\mathbb{R}} \Gamma^0(t,x\,;s,\eta)\,\Gamma^0(s,\eta\,;T,y)\,d\eta = \\ (da\,(3.12)) \\ &= (1 + J^1_{s,T,x})\,\Gamma^0(t,x\,;T,y). \end{aligned} \tag{3.30}$$

Allora, pr ogni $t < s < T$ e $x, y \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$\begin{aligned} \Gamma(t,x\,;T,y) &= \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t,x\,;s,\eta)\Gamma(s,\eta\,;T,y)\,d\eta \\ &\approx \int_{\mathbb{R}} (1 + J^1_{t,s,x})\,\Gamma^0(t,x\,;s,\eta)\,(1 + J^1_{s,T,\eta})\,\Gamma^0(s,\eta\,;T,y)\,d\eta \\ &= (1 + J^1_{t,s,x}) \int_{\mathbb{R}} \Gamma^0(t,x\,;s,\eta)\,(1 + J^1_{s,T,\eta})\,\Gamma^0(s,\eta\,;T,y)\,d\eta = \\ (da\,(3.30)) \\ &= (1 + J^1_{t,s,x})\,(1 + J^1_{s,T,x})\,\Gamma^0(t,x\,;T,y). \end{aligned}$$

In generale, per ogni $t < s_1 < ... < s_N < T$ abbiamo

$$\Gamma(t,x\,;T,y) \approx (1 + J^1_{t,s_1,x})\,(1 + J^1_{s_1,s_2,x})...(1 + J^1_{s_N,T,x})\,\Gamma^0(t,x\,;T,y), \tag{3.31}$$

che può essere facilmente calcolato e può migliorare l'approssimazione per lunghe scadenze.

3.2 Applicazioni a modelli a volatilità locale

Consideriamo ora le dinamiche più generali di un modello di Lévy

$$dS_t = rS_t dt + \sigma(t, S_t)S_t dW_t, \tag{3.32}$$

dove $\sigma(t, S)$ è una funzione regolare tale che

$$\sigma_1 \leq \sigma(t, S) \leq \sigma_2, \quad t > 0,\, S > 0, \tag{3.33}$$

per qualche costante positiva σ_1, σ_2. Il problema di Cauchy per la valutazione è

$$\begin{cases} \Lambda\, C(t, S) = 0, & t < T,\, S > 0, \\ C(T, S) = \varphi(S), & S > 0, \end{cases}$$

dove

$$\Lambda = \frac{\sigma^2(t, S)S^2}{2}\partial_{ss} + rS\partial_s + \partial_t - r. \tag{3.34}$$

La funzione

$$u(t, x) = e^{r(T-t)}\, C(t, e^x) \tag{3.35}$$

risolve il problema di Cauchy parabolico

$$\begin{cases} Lu(t, x) = 0, & t < T,\, x \in \mathbb{R}, \\ u(T, x) = \varphi(e^x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

dove

$$L = \frac{a(t, x)}{2}\,(\partial_{xx} - \partial_x) + r\partial_x + \partial_t, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2, \tag{3.36}$$

e

$$a(t, x) = \sigma^2(t, e^x).$$

Per semplicità, consideriamo il caso di volatilità indipendente dal tempo

$$\sigma(t, S) = \sigma(S), \tag{3.37}$$

quindi $a(t, x) = a(x)$. Questa assunzione non è restrittiva: nel caso di dipendenza dal tempo, il metodo non presenta maggiori difficoltà, anche se richiede calcoli più lunghi. D'ora in avanti fissiamo $\bar{x} \in \mathbb{R}$ e usiamo la notazione

$$\alpha_0 = a(\bar{x}) \equiv \sigma^2(e^{\bar{x}}), \quad \alpha_n = \frac{1}{2n!}\,\partial_x^n\, a(\bar{x}), \quad n \geq\ 1.$$

Utilizzando il metodo presentato nella sezione precedente, otteniamo la seguente formula di approssimazione per la densità di S. Omettiamo la dimostrazione in quanto è basata sulle stesse tecniche utilizzate nella sezione precedente.

Proposizione 3.2.1. *Sia* $\Gamma(0, S\,; T, y)$ *la densità di transizione di* $S_T^{0,S}$ *in* (3.32). *Allora abbiamo*

$$\Gamma(0, S\,; T, y) \approx \frac{1}{y}\,\Gamma^N(0, logS\,; T, logy), \tag{3.38}$$

dove

$$\Gamma^N(0, x\,; T, z) = (1 + A_{0,T,x})\Gamma^0(0, x\,; T, z),$$

e

$$\Gamma^0(0, x\,; T, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha_0(T-t)}}\,exp\Big(-\frac{(x - z + (T-t)(r + \frac{\alpha_0}{2})^2)}{2\alpha_0(T-t)}\Big) \tag{3.39}$$

è la soluzione fondamentale dell'operatore

$$L^0 = \frac{\alpha_0}{2}\,(\partial_{xx} - \partial_x) + r\partial_x + \partial_t, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2. \tag{3.40}$$

Inoltre $A_{0,T,x}$ *è l'operatore differenziale in* (3.25)*, la cui espressione può ossere trovata iterativamente procedendo come nella dimostrazione della Proposizione* (3.1.2)*: in particolare, per* $N = 2$ *abbiamo*

$$J^i_{0,T,x} = \sum_{n=1}^{3i} f^i_n(x)\partial^n_x, \quad i = 1, 2, \tag{3.41}$$

dove

$$\begin{aligned}
f^1_1(x) &= \frac{1}{4}\alpha_1 T(-2rT - 4x + 4\bar{x} + T\alpha_0),\\
f^1_2(x) &= \frac{1}{4}\alpha_1 T(2rT + 4x - 4\bar{x} - 3T\alpha_0),\\
f^1_3(x) &= \frac{1}{2}\alpha_0\alpha_1 T^2,\\
f^2_1(x) &= -\frac{T}{12}\Big(4r^2T^2\alpha_2 + 12(x-\bar{x})^2\alpha_2 + T^2\alpha_0(\alpha_1^2 + \alpha_0\alpha_2) +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ 6T\left(\alpha_0\alpha_2 - (x-\bar{x})\left(\alpha_1^2+\alpha_0\alpha_2\right)\right) - 2rT(6(-x+\bar{x})\alpha_2 \\
&+ T(\alpha_1^2 + 2\alpha_0\alpha_2))\Big),\\
f_2^2(x) &= \frac{1}{96}T\Big(3T^2\alpha_0^2\alpha_1^2 + 96(x-\bar{x})^2\alpha_2 + 4r^2T^2(3T\alpha_1^2+8\alpha_2)\\
&+ 8T^2\alpha_0((7-3x+3\bar{x})\alpha_1^2 + 5\alpha_0\alpha_2)\\
&+ 12rT\left(-T(4-4x+4\bar{x}+T\alpha_0)\alpha_1^2 - 8(-x+\bar{x}+T\alpha_0)\alpha_2\right)\\
&+ 48T\left(\alpha_0\alpha_2 + (x-\bar{x})\left((-3+x-\bar{x})\alpha_1^2 - 3\alpha_0\alpha_2\right)\right)\Big),\\
f_3^2 &= \frac{1}{48}T^2\Big(-(12r^2T^2 + 48(-1+x-\bar{x})(x-\bar{x})\\
&+ 48T\left(1-x+\bar{x}\right)\alpha_0 + 9T^2\alpha_0^2 - 8rT(2-6x+6\bar{x}+3T\alpha_0))\alpha_1^2\\
&+ 16\alpha_0(2rT+3x-3\bar{x}-2T\alpha_0)\alpha_2\Big),\\
f_4^2(x) &= \frac{1}{96}T^2\Big(3(4(rT+2x-2\bar{x})^2 + 4T(4-5rT-10x+10\bar{x})\alpha_0\\
&+ 13T^2\alpha_0^2)\alpha_1^2 + 32T\alpha_0^2\alpha_2\Big),\\
f_5^2(x) &= \frac{1}{8}T^3\alpha_0(2rT+4x-4\bar{x}-3T\alpha_0)\alpha_1^2,\\
f_6^2(x) &= \frac{1}{8}T^4\alpha_0^2\alpha_1^2.
\end{aligned}
$$

Di seguito daremo una formula di approssimazione del secondo ordine per il prezzo di una opzione Call. Precisamente, sia $C(t, S_t)$ il prezzo al tempo t di opzione call di strike K e maturità T, scritto su un titolo con dinamica data da (3.32) e con volatilità indipendente dal tempo (3.37). Dalla Proposizione (3.2.1) segue che

Corollario 3.2.2. *L'approssimazione del secondo ordine di $C(t, S_t)$ è data da $u(t, log\, S_t)$, dove*

$$u(t,x) = (1 + J^1_{t,T,x} + J^2_{t,T,x})\, C^{BS}(t,x). \tag{3.42}$$

In (3.42), $J^i_{t,T,x}, i = 1, 2,$ è[1] *lo stesso di (3.41) e C^{BS} denota la funzione del prezzo di Black-Scholes standard (espressa in termini del logaritmo del prezzo*

[1]Per l'omogeneità rispetto al tempo, abbiamo $J^i_{t,T,x} = J^i_{0,T-t,x}$

del titolo)

$$C^{BS}(t,x) = e^{-r(T-t)} \int_R \frac{1}{y} \Gamma^0(t,x\,;T, logy)(y-K)^+ \, dy$$
$$= e^x \, N(d_1) - e^{-r(T-t)} \, K \, N(d_2),$$

con

$$d_1 = \frac{2x - 2logK + (T-t)(2r+\alpha_0)}{2\sqrt{(T-t)\alpha_0}}, \quad d_2 = d_1 - \sqrt{\alpha_0(T-t)}.$$

Più esplicitamente, ponendo $\bar{x} = x$ *e* $t = 0$*, abbiamo*

$$u(0,x) = C^{BS}(0,x) + \frac{K \, e^{-\frac{(-2(rT+x)+T\alpha_0+2logK)^2}{8T\alpha_0}}}{\sqrt{2\pi \, T\alpha_0}} \, (Q_1(x) + Q_2(x)), \qquad (3.43)$$

dove

$$Q_1(x) = -\frac{T\alpha_1(x - logK)}{2},$$

e

$$\begin{aligned} Q_2(x) = \frac{1}{96\alpha_0^2} \Big(& 12x^4\alpha_1^2 - 8rTx\,(-3x^2 + T\alpha_0)\,\alpha_1^2 + 4r^2T^2(3x^2 + T\alpha_0)\alpha_1^2 \\ & - T^2\alpha_0^2((12 + T\alpha_0)\alpha_1^2 - 16\alpha_0\alpha_2) \\ & - Tx^2\alpha_0\,(-3(8 + T\alpha_0)\alpha_1^2 + 32\alpha_0\alpha_2) \\ & - logK\,(-24r^2T^2x\alpha_1^2 - 48x^3\alpha_1^2 + 8rT\,(-9x^2 + T\alpha_0)\alpha_1^2 \\ & - 2Tx\alpha_0\,(3(8 + T\alpha_0)\alpha_1^2 - 32\alpha_0\alpha_2) \\ & - logK\,(3(4r^2T^2 + 24rTx + 24x^2 - T\alpha_0(8 + T\alpha_0))\alpha_1^2 \\ & - 32T\alpha_0^2\alpha_2 + 12\alpha_1^2 logK\,(-2rT - 4x + logK)))\Big). \end{aligned} \qquad (3.44)$$

Capitolo 4

Comportamento asintotico della volatilità implicita vicino a scadenza in un modello a volatilità locale

Come gia accennato nell'introduzione il nostro obiettivo, in quest'ultima parte della tesi, è quello di utilizzare i risultati ottenuti nel Capitolo 1, i quali non dipendono dalla scelta del modello per il titolo sottostante, nel caso di un modello a volatilità locale come in (3.32), con volatilità indipendente dal tempo (3.37) e $r = 0$.
Se indichiamo con $\Gamma(t, x\,;\,T, y)$ la densità di transizione di $S_T^{t,x}$ in (3.32), in [8] viene dimostrato che, sotto l'ipotesi (3.33), risulta

$$\left|\Gamma(t, x\,;\,T, y) - \Gamma^N(t, x\,;\,T, y)\right| \leq c_N \,|\tau|^{\frac{N+1}{2}}\, \Gamma^0(t, x\,;\,T, y), \qquad (4.1)$$

dove c_N è una costante esplicita e $\Gamma^N(t, x\,;\,T, y)$ è l'approssimazione di ordine N di Γ.
Analogamente, se indico con $C^N(t, x)$ l'approssimazione di ordine N del

prezzo dell'opzione Call $C(t,x)$, da (4.1) segue che

$$\begin{aligned}\left|C(t,x) - C^N(t,x)\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}} \Gamma(t,x\,;\,T,y)\,\varphi(y)\,dy - \int \Gamma^N(t,x\,;\,T,y)\,\varphi(y)\,dy\right| \\ &\le \int_{\mathbb{R}} \left|\Gamma(t,x\,;\,T,y) - \Gamma^N(t,x\,;\,T,y)\right| \varphi(y)\,dy \\ &\le c_N\,|\tau|^{\frac{N+1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \Gamma^0(t,x\,;\,T,y)\,\varphi(y)\,dy.\end{aligned}$$

In definitiva

$$\left|C(t,x) - C^N(t,x)\right| \le c_N\,|\tau|^{\frac{N+1}{2}}\; C^{BS}(t,x). \tag{4.2}$$

Scegliendo quindi $N \ge 1$, risulta

$$\lim_{\tau\to 0^+} C(t,x) = \lim_{\tau\to 0^+} C^N(t,x). \tag{4.3}$$

4.1 Caso S = K

Dal Corollario (1.3.4) e da (4.3) segue che

$$\begin{aligned}\lim_{\tau\to 0^+} \Sigma(K,\tau) &= \lim_{\tau\to 0^+} \frac{\sqrt{2\pi}C(K,\tau)}{S\sqrt{\tau}} \\ &= \lim_{\tau\to 0^+} \frac{\sqrt{2\pi}C^N(K,\tau)}{S\sqrt{\tau}}.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Cerchiamo quindi di calcolare esplicitamente il

$$\lim_{\tau\to 0^+} \frac{\sqrt{2\pi}C^N(K,\tau)}{S\sqrt{\tau}}. \tag{4.5}$$

Scegliamo $N = 2$ e $x = \bar{x}$. Risulta

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2\pi}C^2(K,\tau)}{S\sqrt{\tau}} &= \frac{\sqrt{2\pi}}{S\sqrt{\tau}}\Big(\int_{\mathbb{R}} \Gamma^0(t,x\,;\,T,y)\,(e^y - K)^+\,dy \\ &\quad + J^1_{t,T,x} \int_{\mathbb{R}} \Gamma^0(t,x\,;\,T,y)\,(e^y - K)^+\,dy \\ &\quad + J^2_{t,T,x} \int_{\mathbb{R}} \Gamma^0(t,x\,;\,T,y)\,(e^y - K)^+\,dy\Big),\end{aligned} \tag{4.6}$$

dove $J^1_{t,T,x}$ e $J^2_{t,T,x}$ denotano gli operatori differenziali in (3.28) e (3.29).

Lemma 4.1.1.

$$\lim_{\tau\to 0^+} \frac{\sqrt{2\pi}}{S\sqrt{\tau}}\, J^1_{t,T,x} \int_{\mathbb{R}} \Gamma^0(t,x\,;\,T,y)\,(e^y - K)^+\,dy = 0, \tag{4.7}$$

$$\lim_{\tau\to 0^+} \frac{\sqrt{2\pi}}{S\sqrt{\tau}}\, J^2_{t,T,x} \int_{\mathbb{R}} \Gamma^0(t,x\,;\,T,y)\,(e^y - K)^+\,dy = 0. \tag{4.8}$$

Dimostrazione. (i) Da (3.28) segue che dobbiamo calcolare il

$$\lim_{\tau\to 0^+} \frac{\alpha_0\alpha_1}{2}\frac{\sqrt{2\pi}}{S}\tau^{\frac{3}{2}}\partial_x^3 \int_{\mathbb{R}} \Gamma^0(t,x\,;\,T,y)\,(e^y - K)^+\,dy. \tag{4.9}$$

Risulta che

$$\partial_x^3\,\Gamma^0(t,x;T,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau a(y)}}\Big(3\frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2\tau a(y)}}}{\tau^2 a(y)^2}\,(x-y) - \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2\tau a(y)}}}{\tau^3 a(y)^3}\,(x-y)^3\Big),$$

qundi l'espressione (4.9) si spezza in due parti:

$$\lim_{\tau\to 0^+} \frac{\alpha_0\alpha_1}{2}\frac{\sqrt{2\pi}}{S}\tau^{\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{3}{\sqrt{2\pi\tau a(y)}}\frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2\tau a(y)}}}{\tau^2 a(y)^2}\,(x-y)(e^y-K)^+\,dy \tag{4.10}$$

e

$$\lim_{\tau\to 0^+} -\frac{\alpha_0\alpha_1}{2}\frac{\sqrt{2\pi}}{S}\tau^{\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau a(y)}}\frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2\tau a(y)}}}{\tau^3 a(y)^3}\,(x-y)^3(e^y-K)^+\,dy. \tag{4.11}$$

Calcoliamo (4.11):

$$\begin{aligned}
&-\frac{\sqrt{2\pi}}{S}\tau^{\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau a(y)}}\frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{2\tau a(y)}}}{\tau^3 a(y)^3}\,(x-y)^3(e^y-K)^+\,dy \\
&= -\frac{1}{S\tau^2}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{a(y)^{7/2}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2\tau a(y)}}\,(x-y)^3(e^y-K)^+\,dy = \\
&(\frac{x-y}{\sqrt{\tau}} = z, \quad S = K = e^x) \\
&= -\frac{1}{\tau^{3/2}}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{a(x-z\sqrt{\tau})^{7/2}} e^{-\frac{z^2}{2a(x-z\sqrt{\tau})}}\,(z\sqrt{\tau})^3(e^{-z\sqrt{\tau}}-1)^+\,dy.
\end{aligned}$$

Utilizzando lo sviluppo di Taylor di $e^{-z\sqrt{\tau}}$ con resto di Lagrange, si ha

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{\tau^{3/2}}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{a(x-z\sqrt{\tau})^{7/2}} e^{-\frac{z^2}{2a(x-z\sqrt{\tau})}}\,(z\sqrt{\tau})^3(e^{-z\sqrt{\tau}}-1)^+\,dy \\
&= -\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{a(x-z\sqrt{\tau})^{7/2}} e^{-\frac{z^2}{2a(x-z\sqrt{\tau})}}\,z^3(-z\sqrt{\tau} + e^{\xi}\,\frac{z^2\tau}{2})^+\,dy.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Da (3.33) e scegliendo $\tau \in [0, \overline{T}]$, risulta che

$$\frac{1}{a(x - z\sqrt{\tau})^{7/2}} e^{-\frac{z^2}{2a(x - z\sqrt{\tau})}} \, z^3(-z\sqrt{\tau} + e^{\xi} \, \frac{z^2\tau}{2})^+ \leq$$
$$\leq \frac{1}{\sigma_1} \, e^{\frac{-z^2}{2\sigma_2^2}} \, z^3 \, (-z\sqrt{\overline{T}} + e^{\xi} \, \frac{z^2\overline{T}}{2})^+ \in L^1.$$

Abbiamo quindi maggiorato la funzione integranda con una funzione integrabile indipendente da τ. Dal Teorema della convergenza dominata segue che

$$\lim_{\tau \to 0^+} - \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{a(x - z\sqrt{\tau})^{7/2}} e^{-\frac{z^2}{2a(x - z\sqrt{\tau})}} \, z^3(-z\sqrt{\tau} + e^{\xi} \, \frac{z^2\tau}{2})^+ \, dy = 0.$$

Con lo stesso argomento si prova che l'espressione (4.10) tende a zero, quando $\tau \to 0^+$. Ciò conclude la dimostrazione.

(ii) Osserviamo che tutti i termini di $\frac{1}{\sqrt{\tau}} \, J^2_{t,T,x}\Gamma^0$ sono della forma

$$\tau^{n_1 - \frac{1}{2}} \, \partial_x^{n_2} \Gamma^0, \tag{4.13}$$

con $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Utilizzando la stima (si veda (A.0.5))

$$|\partial_x^n \Gamma^\mu| \leq \frac{c_\epsilon}{(T - t)^{\frac{n}{2}}} \, \Gamma^{M+\epsilon}, \tag{4.14}$$

per tutti i termini del tipo (4.13), vale la maggiorazione

$$\left| \tau^{n_1 - \frac{1}{2}} \, \partial_x^{n_2} \Gamma^0 \right| \leq \tau^{\bar{n}} \, c_\epsilon \, \Gamma^{M+\epsilon} \tag{4.15}$$

dove $\bar{n} > 0$. Da ciò segue che tutti i termini di $\frac{1}{\sqrt{\tau}} \, J^2_{t,T,x}\Gamma^0$ vanno a zero vicino a scadenza.

$\square$

Proposizione 4.1.2. *Sotto le ipotesi precedenti, risulta che*

$$\lim_{\tau \to 0^+} \Sigma(K, \tau) = \lim_{\tau \to 0^+} \frac{\sqrt{2\pi} C^2(K, \tau)}{S\sqrt{\tau}} = \sigma(logK). \tag{4.16}$$

Dimostrazione. Da (4.6) e dal Lemma (4.1.1), segue che

$$\lim_{\tau\to 0^+} \frac{\sqrt{2\pi}C^2(K,\tau)}{S\sqrt{\tau}} = \lim_{\tau\to 0^+} \frac{\sqrt{2\pi}}{S\sqrt{\tau}} \int_{\mathbb{R}} \Gamma^0(t,x\,;\,T,y)\,(e^y - K)^+\,dy. \tag{4.17}$$

Si ha

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{2\pi}}{S\sqrt{\tau}} \int_{\mathbb{R}} \Gamma^0(t,x\,;\,T,y)\,(e^y-K)^+\,dy \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{S\sqrt{\tau}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\,a(y)\,\tau}}\, e^{-\frac{(x-y)^2}{2a(y)\,\tau}}\,(e^y-K)^+\,dy = \\
(K = e^x) \quad & \\
&= \frac{1}{\sqrt{\tau}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{a(y)\,\tau}}\, e^{-\frac{(x-y)^2}{2a(y)\,\tau}}\,(e^{y-x}-1)^+\,dy = \\
(z = \frac{x-y}{\sqrt{\tau}}) \quad & \\
&= \frac{1}{\sqrt{\tau}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{a(x-z\sqrt{\tau})}}\, e^{-\frac{z^2}{2a(x-z\sqrt{\tau})}}\,(e^{x-z\sqrt{\tau}-x}-1)^+\,dz \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{a(x-z\sqrt{\tau})}}\, e^{-\frac{z^2}{2a(x-z\sqrt{\tau})}}\,\frac{(e^{-z\sqrt{\tau}}-1)^+}{\sqrt{\tau}}\,dz.
\end{aligned}$$

Utilizzando lo sviluppo di Taylor di $e^{-z\sqrt{\tau}}$ con resto di Lagrange, si ha

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{a(x-z\sqrt{\tau})}}\, e^{-\frac{z^2}{2a(x-z\sqrt{\tau})}}\,\frac{(e^{-z\sqrt{\tau}}-1)^+}{\sqrt{\tau}}\,dz = \\
&\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{a(x-z\sqrt{\tau})}}\, e^{-\frac{z^2}{2a(x-z\sqrt{\tau})}}\,(-z+e^{\xi}\,\frac{z^2\sqrt{\tau}}{2})^+\,dz.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Da (3.33) e scegliendo $\tau \in [0,\overline{T}]$, risulta che

$$\frac{1}{\sqrt{a(x-z\sqrt{\tau})}}\, e^{-\frac{z^2}{2a(x-z\sqrt{\tau})}}\,(-z+e^{\xi}\,\frac{z^2\sqrt{\tau}}{2})^+ \le \frac{1}{\sigma_1}\, e^{\frac{-z^2}{2\sigma_2^2}}\,(-z+e^{\xi}\,\frac{z^2\sqrt{\overline{T}}}{2})^+ \in L^1. \tag{4.19}$$

Abbiamo quindi maggiorato la funzione integranda con una funzione integrabile indipendente da τ. Dal Teorema della convergenza dominata segue che

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\tau\to 0^+}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{a(x-z\sqrt{\tau})}}\, e^{-\frac{z^2}{2a(x-z\sqrt{\tau})}}(-z+e^{\xi}\,\frac{z^2\sqrt{\tau}}{2})^+\,dz \\
&=\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{a(x)}}\, e^{-\frac{z^2}{2a(x)}}(-z)^+\,dz \\
&=\int_{-\infty}^{0} -\frac{z}{\sqrt{a(x)}}\, e^{-\frac{z^2}{2a(x)}}\,dz \\
&=\frac{1}{\sqrt{a(x)}}\left[e^{-\frac{z^2}{2a(x)}}\,a(x)\right]_{-\infty}^{0}=\sqrt{a(x)}=\sigma(logK).
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

□

Il risultato ottenuto è in accordo con quello ottenuto da Berestycki in [3] e da Varadhan in [2].

Appendice A

Stime della soluzione fondamentale dell'operatore del calore e delle sue derivate

Dato $w \in \mathbb{R}^{N+1}$, denotiamo con $\Gamma_w(z;\zeta)$ la soluzione fondamentale dell'operatore L_w definito da

$$L_w := \sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}(w)\partial_{x_i x_j} - \partial_t. \tag{A.1}$$

Ricordiamo che $\Gamma_w(z;\zeta) = \Gamma_w(z-\zeta)$, dove

$$\Gamma_w(x,t) := \Gamma_w(x,t,0,0) = \frac{(4\pi\, t)^{-\frac{N}{2}}}{\sqrt{detA(w)}}\, exp\Big(-\frac{< A^{-1}(w)x, x >}{4t}\Big), \quad x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0. \tag{A.2}$$

Supponiamo che sia verificata la condizione

$$m|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(w)\xi_i\xi_j \leq M|\xi|^2, \tag{A.3}$$

dove $\xi \in \mathbb{R}^N$ e $m, M \in \mathbb{R}^+$. Data una costante $\mu > 0$, indichiamo con Γ^μ la soluzione fondamentale dell'operatore del calore

$$\mu \sum_{i=1}^{N} \partial_{x_i x_i} - \partial_t. \tag{A.4}$$

Lemma A.0.3. *Per ogni $z, \zeta, w \in \mathbb{R}^{N+1}$ con $z \neq \zeta$, abbiamo*

$$(\frac{m}{M})^{\frac{N}{2}}\Gamma^m(z;\zeta) \leq \Gamma_w(z;\zeta) \leq (\frac{M}{m})^{\frac{N}{2}}\Gamma^M(z;\zeta). \tag{A.5}$$

Dimostrazione. Proviamo solo la seconda disuguaglianza nel caso $\zeta = 0$. Ricordando la formula (A.2), la tesi segue dall'ipotesi (A.3), infatti

$$\Gamma_w(z) \leq \frac{1}{(4\pi\, tm)^{\frac{N}{2}}}\, exp\Big(-\frac{|x|^2}{4tM}\Big) = \Big(\frac{M}{m}\Big)^{\frac{N}{2}}\Gamma^M(z). \tag{A.6}$$

□

Lemma A.0.4. *Per ogni $\epsilon, \mu > 0$ e $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, abbiamo*

$$\Big(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\Big)^n\Gamma^\mu(x,t) \leq (\frac{n}{\epsilon})^{\frac{n}{2}}(\mu+\epsilon)^n\Big(\frac{\mu+\epsilon}{\mu}\Big)^{\frac{N}{2}}\Gamma^{\mu+\epsilon}(x,t), \tag{A.7}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e $t > 0$.

Dimostrazione. Ponendo $a = \frac{|x|}{\sqrt{t}}$, abbiamo

$$\Big(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\Big)^n\Gamma^\mu(z,0) = a^n(4\pi\mu t)^{-\frac{N}{2}}exp\Big(-\frac{a^2}{4\mu}\Big) \leq (4\pi\mu t)^{-\frac{N}{2}}exp\Big(-\frac{a^2}{4(\mu+\epsilon)}\Big)\sup_{\mathbb{R}^+} G, \tag{A.8}$$

dove

$$G(a) = a^n exp\Big(-\Big(\frac{1}{4\mu} - \frac{1}{4(\mu+\epsilon)}\Big)a^2\Big). \tag{A.9}$$

La tesi segue da un semplice calcolo, in quanto G ha massimo in

$$\bar{a} = \sqrt{\frac{2n\mu(\mu+\epsilon)}{\epsilon}},$$

e

$$G(\bar{a}) = \Big(\frac{2n\mu(\mu+\epsilon)}{\epsilon}\Big) \leq (\frac{n}{\epsilon})^{\frac{n}{2}}(\mu+\epsilon)^n. \tag{A.10}$$

□

Lemma A.0.5. *Per ogni $\epsilon > 0$ e $i, j = 1, .., N$ abbiamo*

$$|\partial_{x_i}\Gamma_w(z;\zeta)| \leq \frac{1}{2\sqrt{\epsilon(T-t)}}\Big(\frac{M+\epsilon}{m}\Big)^{\frac{N}{2}+1}\Gamma^{M+\epsilon}(z,\zeta), \tag{A.11}$$

$$|\partial_{x_ix_j}\Gamma_w(z;\zeta)| \leq \frac{1}{2\epsilon(T-t)}\Big(\frac{M+\epsilon}{m}\Big)^{\frac{N}{2}+2}\Gamma^{M+\epsilon}(z,\zeta), \tag{A.12}$$

per ogni $z, \zeta, w \in \mathbb{R}^{N+1}$ con $T > t$.

Dimostrazione. Per semplicità, proviamo la stima nel caso $\zeta = 0$. Abbiamo

$$|\partial_{x_i}\Gamma_w(z)| = \frac{1}{2}\,\frac{|(A^{-1}(w)x)_i|}{t}\,\Gamma_w(z)$$

(dal Lemma (A.0.3))

$$\leq \frac{1}{2m\sqrt{t}}\left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{N}{2}}\frac{|x|}{\sqrt{t}}\Gamma^M(z),$$

e (A.11) segue applicando il Lemma (A.0.4) con $\mu = M$ e $n = 1$. Inoltre,

$$\begin{aligned}|\partial_{x_i x_j}\Gamma_w(z)| &= \frac{1}{2t}\ \Big|\ A^{-1}(w)_{ij} + \frac{1}{2t}\,(A^{-1}(w)x)_i(A^{-1}(w)x)_j\ \Big|\ \Gamma_w(z)\\ &\leq \frac{1}{2t}\left(\frac{1}{m} + \frac{|x|^2}{2m^2t}\right)\Gamma_w(z),\end{aligned} \tag{A.13}$$

e (A.12) segue dai Lemmi (A.0.3) e (A.0.4) con $\mu = M$. □

Bibliografia

[1] A.Pascucci, PDE and Martingale Methods in option pricing (Bocconi and Springer series, 2011).

[2] S.R.S Varadhan, On the behavior of the Fundamental Solution of the Heat Equation with Variable Coefficients (Communications on pure applied mathematics, vol.XX, 431-455 (1967)).

[3] H.Berestycki, J.Busca and I.Florent, Asymptotics and calibration of local volatility models, Quantitative Finance (2002) 61-69.

[4] S.Pagliarini, A.Pascucci, Analytical approximation of the transition denisity in a local volatility model (2011).

[5] D. J. Jeffrey, R. M Corless, D. E. G. Hare and Knuth, Sur l'inversion de $y^{\alpha}\, e^{y}$ au moyen des nombres de Stirling associés, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 320(12) (1995).

[6] F. W. J. Olver, Asymptotics and Special Functions (A K Peters Ltd. Wellesley, MA, 1997).

[7] F.Corielli, A.Pascucci, P.Foschi, Parametrix approximation diffusion transition densities (SIAM J. FINANCIAL MATH. Vol. 1, pp. 833 to 867).

[8] S.Pagliarini, A.Pascucci, C.Riga, Adjoint expansions in local Lévy models (2011).

[9] S.Pagliarini, A.Pascucci, C.Riga, M. Lorig (Princeton), Asymptotics for Kolmogorov equations in finance (2011).

[10] M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Function with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables (New York, 1984).

[11] M.Roper, M.Rutkowski, On the relationship between the call price surface and the implied volatility surface close to expiry (International Journal of Theoretical and Applied Finance Vol.12, No. 4 (2009)).