Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

SOLUZIONE NUMERICA DI EQUAZIONI INTEGRO-DIFFERENZIALI PER PROCESSI DI LÉVY

Tesi di Laurea in Equazioni Differenziali Stocastiche

Relatore:
Chiar.mo Prof.
ANDREA PASCUCCI

Presentata da:
MARCO DORELLI

III Sessione
Anno Accademico 2011/2012

Indice

Introduzione.

Un'opzione europea è un contratto che dà al possessore il diritto di comprare o vendere una quantità fissata di un bene finanziario a una scadenza fissata detta "tempo di esercizio"; tali diritti vengono chiamati rispettivamente "Call europea" e "Put europea".
Nel presente lavoro di tesi ci si prefigge lo scopo di calcolare il prezzo da attribuire a queste opzioni in modelli di mercato detti "di Lévy"; modelli di questo tipo risultano essere interessanti perché consentono di spiegare la presenza di "salti" nelle traiettorie rappresentanti l'andamento di un bene e risultano essere realistici quando usati per calcolare il prezzo di opzioni vicine al tempo di maturazione, d'altra parte però sono piuttosto difficili da gestire numericamente e richiedono la costruzione di un edificio teorico *ad hoc*.
Nella prima parte dell'elaborato ci occuperemo dell'introduzione delle nozioni necessarie alla formulazione del modello; in particolare nel primo capitolo verrà sviluppata brevemente la teoria dei processi di Lévy a tempo continuo in uno spazio di probabilità con filtrazione $(\Omega, \mathscr{S}, P, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0})$ fino alla formulazione del teorema di decomposizione di Lévy-Itō. Si procederà successivamente a una breve trattazione dei risultati fondamentali della teoria delle equazioni differenziali stocastiche col fine di evidenziare il profondo legame tra il problema del calcolo del prezzo di un'opzione in un modello di Lévy e la risoluzione di un problema di Cauchy integro-differenziale alle derivate parziali (PIDE), che andremo a scrivere esplicitamente alla fine del secondo capitolo.
La seconda parte del lavoro sarà incentrata invece sullo studio di due modelli

(a parametri costanti) retti da dei particolari processi di Lévy: il modello di Merton (basato su un processo di tipo "jump-diffusion") e il modello Variance-Gamma. A ciascuno dei due modelli viene dedicato un capitolo in cui vengono illustrati vari metodi volti alla risoluzione numerica del problema alle PIDE associato al calcolo del prezzo di un'opzione Call europea.
La soluzione numerica verterà sulla semi-discretizzazione del dominio del problema e sulla successiva applicazione del "metodo delle linee"; verranno usate le differenze finite per discretizzare l'operatore differenziale, mentre sarà più complessa (e legata alla natura del particolare processo di Lévy) la scelta di una strategia per l'approssimazione del termine integrale.
Mostreremo infine come la soluzione di un sistema semi-discreto di equazioni differenziali sia efficientemente risolto in ambiente *Mathematica* usando la funzione built-in `NDSolve`, ottenendo risultati del tutto analoghi a quelli che si otterrebbero attraverso una programmazione procedurale ma mediante codici compatti e più eleganti che vengono illustrati in appendice.

Capitolo 1

Processi di Lévy.

Assumiamo sia dato uno spazio di probabilità con filtrazione $(\Omega, \mathscr{S}, P, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0})$ soddisfacente le ipotesi (usuali):

i) $\mathcal{N} = \{A \in \mathscr{S}, P(A) = 0\} \subseteq \mathscr{F}_0$;

ii) $\mathscr{F}_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathscr{F}_{t+\varepsilon}$.

Definizione 1.1. Un processo di Lévy $X = (X_t)_{t\geq 0}$ è un processo stocastico su $(\Omega, \mathscr{S}, P, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0})$ a valori in $\mathbb{R}^d$ adattato e tale che:

i) $X_0 = 0$ q.d.;

ii) $X_t - X_s$ è indipendente da $\mathscr{F}_s$ per ogni $t > s \geq 0$;

iii) $X_t - X_s \overset{d}{=} X_{t-s}$; (incrementi stazionari)

iv) $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \lim_{h\to 0} P(|X_{t+h} - X_t| \geq \varepsilon) = 0.$ (continuità stocastica)

Osservazione 1. Aggiungiamo alla definizione di Processo di Lévy anche l'ipotesi che X sia una funzione "càdlàg " (continue à droite, limitée à gauche) cioè che in ogni punto sia continua da destra e avente limite finito a sinistra (mentre con "càglàd " si intende una funzione continua a sinistra e con limite finito a destra). Si può infatti dimostrare che ogni processo di Lévy definito come in 1.1 ammette un'unica modificazione càdlàg , per cui ci limiteremo a considerare questi ultimi.

Osservazione 2. Ogni funzione càdlàg ammette solo discontinuità di tipo "salto", se inoltre è definita su un intervallo compatto $[0, T]$ e consideriamo $|\Delta f(t)| = f(t) - f(t^-)$, cioè l'ampiezza del salto in t, allora $\forall n \in \mathbb{N}$ abbiamo $\#\{t \in [0, T], |\Delta f(t)| \geq \frac{1}{n}\} < +\infty$, per cui il numero di salti di f su un dominio compatto sarà al più numerabile.

Come conseguenza di questa osservazione abbiamo che un processo di Lévy può avere solo un numero finito di salti di ampiezza maggiore di un certo valore fissato positivo, diremo quindi che ha un numero finito di salti "ampi", d'altra parte può averne un numero infinito numerabile di "piccoli". Il moto Browniano è un particolare esempio di processo di Lévy essendo l'unico di tali processi avente traiettorie continue.

Definizione 1.2. Se un processo di Lévy ha un numero finito di salti in ogni intervallo di tempo limitato, allora si dirà che ha un'attività finita, se invece ha un numero infinito (numerabile) di salti in almeno un intervallo di tempo limitato si dirà che ha un'attività infinita.

1.1 Processo di Poisson.

Sia data una successione di variabili aleatorie i.i.d. $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ su $(\Omega, \mathscr{S}, P)$

$$\tau_1 \sim exp(\lambda) \qquad \lambda > 0$$

Cioè τ_n ha densità $f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$ per ogni n.
Cerchiamo di costruire un processo in cui τ_n rappresenti il lasso temporale tra l'n-esimo salto e quello precedente. Ponendo:

$$T_n := \sum_{k=1}^{n} \tau_k \tag{1.1}$$

otteniamo il tempo in cui si manifesta l'n-esimo salto.
Osserviamo che $\mathbb{E}[T_n - T_{n-1}] = \mathbb{E}[\tau_n] = \frac{1}{\lambda}$, abbiamo quindi che λ è l'attesa del numero di salti in un intervallo di tempo unitario (detto anche intensità dei salti).

Definizione 1.3. Il processo di Poisson con intensità $\lambda > 0$ è il processo:

$$N_t := \sum_{n\geq 1} n\mathbb{1}_{[T_n,T_{n+1}[}(t). \tag{1.2}$$

N_t conta il numero di salti che avvengono prima e al tempo t.

Osservazione 3. Facciamo una serie di osservazioni:

i) Le traiettorie del processo di Poisson sono continue a destra e limitate a sinistra, N è quindi un processo càdlàg ;

ii) $\forall t \geq 0$ quasi-ogni traiettoria è continua in t:
$N_t = N_{t^-} = \lim_{s\to t^-} N_s$ quasi dappertutto;

iii) N è stocasticamente continuo:
$\forall \varepsilon\, 0,\ \forall t \geq 0 \quad \lim_{h\to 0} P(|N_{t+h} - N_t| \geq \varepsilon) = 0$;

iv) N_t ha distribuzione:
$P(N_t = n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad \forall t \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$;

v) N ha incrementi indipendenti, cioè per ogni $0 \leq t_1 < \ldots < t_n$ le variabili $N_{t_1}, N_{t_2-t_1}, \ldots, N_{t_n-t_{n-1}}$ sono indipendenti;

vi) N ha incrementi stazionari:
$N_t - N_s \overset{d}{=} N_{t-s} \qquad t \geq s \geq 0$.

Queste proprietà sono facilmente derivabili dalla definizione e della proprietà di assenza di memoria della distribuzione esponenziale.

Dalle proprietà $v), vi), iii), i)$ unite al fatto che $N_0 = 0$ deduciamo che il processo di Poisson N rientra nei processi di Lévy.

Definizione 1.4. Sia N processo di Poisson con intensità $\lambda > 0$.
Siano $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ variabili aleatorie i.i.d. in $\mathbb{R}^d$ con distribuzione η e indipendenti da N.
Il processo:

$$X_t = \sum_{n=1}^{N_t} Z_n \qquad t \geq 0 \tag{1.3}$$

si dice processo di Poisson composto.

Nel processo di Poisson composto i salti avvengono in tempi dati da un processo di Poisson ma, a differenza di quest'ultimo (in cui i salti hanno ampiezza unitaria), hanno ampiezza variabile secondo una distribuzione di probabilità data η.
Come il processo di Poisson, il processo di Poisson composto rientra nella categoria dei processi di Lévy ad attività finita.

1.2 Esponente caratteristico.

Definizione 1.5. Siano X_t un processo di Lévy, $\xi \in \mathbb{R}^d$, $t \geq 0$ la funzione

$$\varphi_{X_t}(\xi) = \mathbb{E}[e^{i\xi \cdot X_t}] \tag{1.4}$$

è detta funziona caratteristica del processo X.

La funzione caratteristica di un processo di Lévy consente di identificare univocamente il processo a meno di modificazioni.

Definizione 1.6. Una variabile aleatoria Y è detta infinitamente divisibile se $\forall n \geq 2$ esistono $Y_1^{(n)}, \dots, Y_n^{(n)}$ variabili aleatorie i.i.d. tali che:

$$Y \overset{d}{=} Y_1^{(n)} + \dots + Y_n^{(n)} \tag{1.5}$$

Teorema 1.2.1. *Se X_t è un processo di Lévy allora esiste una unica funzione $\psi \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ tale che $\psi(0) = 0$ e:*

$$\varphi_{X_t}(\xi) = e^{t\psi(\xi)} \tag{1.6}$$

ψ si dice esponente caratteristico (o di Lévy) per X.

Dimostrazione. Diamo un breve sketch della dimostrazione elencando innanzitutto le seguenti premesse:

i) Se X_t è un processo di Lévy allora è infinitamente divisibile $\forall t \geq 0$ e vale
$$\varphi_{X_t}(\xi) = (\varphi_{X_{\frac{t}{n}}}(\xi))^n \quad n \in \mathbb{N}; \tag{1.7}$$

ii) Se X_t è stocasticamente continuo allora la mappa $t \mapsto \varphi_{X_t}(\xi)$ è continua $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$;

iii) Se X_t è un processo di Lévy allora $\varphi_{X_t}(\xi) \neq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d$, $t \geq 0$;

iv) Se $\varphi \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ è tale che $\varphi(0) = 1$ e $\varphi(\xi) \neq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d$ allora esiste un'unica $g \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ tale che $g(0) = 0$ e $\varphi(\xi) = e^{g(\xi)} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d$.

La dimostrazione del teorema segue da queste premesse.
Se X_t è un processo di Lévy e φ_{X_t} la sua funzione caratteristica allora vale:

$$\varphi_{X_t}(0) = 1 \qquad \text{e } \varphi_{X_t}(\xi) \neq 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

da cui per *iv)* si ha che $\exists\, g_t \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ t.c. $g_t(0) = 0$ e $\varphi_{X_t}(\xi) = e^{g_t(\xi)} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d$, e la funzione g_t è il logaritmo complesso distinto di φ_{X_t}.
Se $t = m \in \mathbb{N}$ abbiamo:

$$e^{g_m(\xi)} = \varphi_{X_m}(\xi) \stackrel{i)}{=} (\varphi_{X_{\frac{m}{n}}}(\xi))^n = e^{n g_{\frac{m}{n}}(\xi)}$$

da cui si ha:
$$g_m(\xi) = n g_{\frac{m}{n}}(\xi) + 2\pi i k(\xi)$$

dove $k(\xi)$ è una funzione continua a valori in $\mathbb{Z}$ (quindi costante):

$$k(\xi) = k(0) = \frac{g_m(0) - n g_{\frac{m}{n}}(0)}{2\pi i} = 0.$$

Quindi

$$g_m(\xi) = n g_{\frac{m}{n}}(\xi) \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^d \ \ \forall n, m \in \mathbb{N}$$

e se $m = n$

$$g_m(\xi) = m g_1(\xi) \Longrightarrow g_{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} g_1.$$

Ora per $ii)$ φ_{X_t} è continua in t, allora anche g_t è continua in t e se $(q_n)_n$ è una successione in $\mathbb{Q}^+$ tale che $\lim_{n\to\infty} q_n = t$ abbiamo:

$$g_t(\xi) = \lim_{n\to\infty} g_{q_n}(\xi) = \lim_{n\to\infty} q_n g_1(\xi) = t g_1(\xi).$$

Quindi $\forall \xi \in \mathbb{R}^d, t \geq 0$ si ha $\varphi_{X_t}(\xi) = e^{t g_1(\xi)}$ dunque $\psi = g_1$. $\square$

Calcoliamo l'esponente caratteristico dei processi di Lévy visti.

Esempio 1.1 (Moto Browniano con drift)**.** Sia $X_t = \mu t + \sigma W_t$ con W moto Browniano standard. Vale:

$$\varphi_{X_t}(\xi) = \mathbb{E}[e^{i\xi X_t}] = \mathbb{E}[e^{i\mu t\xi} e^{i\xi\sigma W_t}] = e^{i\mu t\xi + \frac{1}{2}(i\xi\sigma)^2 t}$$

da cui $\psi(\xi) = i\mu\xi - \frac{1}{2}\xi^2\sigma^2$ è l'esponente caratteristico di X_t.

Esempio 1.2 (Processo di Poisson)**.** Sia N_t processo di Poisson con intensità $\lambda > 0$.

$$\varphi_{N_t}(\xi) = \mathbb{E}[e^{i\xi N_t}] = \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}[e^{i\xi n} \mathbb{1}_{\{N_t = n\}}] = \sum_{n\geq 0} e^{i\xi n} P(N_t = n) = \sum_{n\geq 0} e^{i\xi n} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} =$$

$$= e^{-\lambda t} \sum_{n\geq 0} \frac{(e^{i\xi}\lambda t)^n}{n!} = e^{-\lambda t} e^{\lambda t e^{i\xi}} = e^{\lambda t(e^{i\xi} - 1)} = e^{\lambda t(e^{i\xi} - 1)}.$$

Per cui $\psi(\xi) = \lambda(e^{i\xi} - 1)$ è l'esponente caratteristico di X_t.

Esempio 1.3 (Processo di Poisson composto)**.** Sia $X_t = \sum_{n=1}^{N_t} Z_n$ processo di Poisson composto d-dimensionale con intensità λ e distribuzione dei salti η. Se indichiamo con

$$\hat{\eta}(\xi) := \mathbb{E}[e^{i\xi Z_1}] = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\xi \cdot x} \eta(\mathrm{d}x)$$

la funzione caratteristica di Z_1 allora:

$$\varphi_{X_t}(\xi) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}[e^{i\xi \sum_1^n Z_k} \mathbb{1}_{\{N_t=n\}}] = \sum_{n\geq 0} (\mathbb{E}[e^{i\xi Z_1}])^n P(N_t = n) = e^{-\lambda t} \sum_{n\geq 0} \frac{(\lambda t \hat{\eta}(\xi))^n}{n!} =$$
$$= e^{-\lambda t} e^{\lambda t \hat{\eta}(\xi)} = e^{\lambda t (\hat{\eta}(\xi) - 1)}$$

Per cui $\psi(\xi) = \lambda(\hat{\eta}(\xi) - 1) = \int_{\mathbb{R}} (e^{i\xi \cdot x} - 1) \lambda \eta(\mathrm{d}x)$ è l'esponente caratteristico di X_t.

1.3 Processo Jump-Diffusion e misure di salto.

Definizione 1.7. Siano:

- $\mu \in \mathbb{R}^d$;
- B moto Browniano d-dimensionale con matrice di correlazione C, ($B_t \sim \mathcal{N}_{0,tC}$);
- N processo di Poisson con intensità $\lambda > 0$;
- $(Z_n)_{n\geq 1}$ variabili aleatorie i.i.d. in $\mathbb{R}^d$ con distribuzione η indipendenti da N.

Il processo

$$X_t = \mu t + B_t + \sum_{n=1}^{N_t} Z_n \tag{1.8}$$

è detto processo Jump-Diffusion su $\mathbb{R}^d$.

Osservazione 4. Il processo Jump-Diffusion è un processo di Lévy e il suo esponente caratteristico è :

$$\psi(\xi) = i\mu \cdot \xi - \frac{1}{2}C\xi \cdot \xi + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\xi \cdot x} - 1)\lambda\eta(\mathrm{d}x). \tag{1.9}$$

La dimostrazione di questa osservazione viene immediatamente dalla definizione del processo come somma indipendente di un moto Browniano con drift e di un processo di Poisson composto.

Consideriamo ora X_t processo Jump-Diffusion, dato $(I \times H) \in \mathscr{B}([0, +\infty[\times \mathbb{R}^d)$ definiamo:

$$J(I \times H) := \sum_{n \geq 1} \delta_{T_n}(I)\delta_{Z_n}(H) \tag{1.10}$$

dove T_n è la successione dei tempi di salto definita in 1.1 e δ la funzione delta di Dirac.
Osserviamo che se in particolare $I = [0, t]$ il numero di salti su I è dato da N_t, per cui la funzione $\delta_{T_n}(I)$ vale 1 fino ad N_t e poi sarà nulla, perciò :

$$J([0, t] \times H) = \sum_{n=1}^{N_t} \delta_{Z_n}(H) \tag{1.11}$$

J conta cioè il numero dei salti che avvengono nel tempo $[0, t[$ e di ampiezza in H.

Osservazione 5. J è ben definita perché (quasi-certamente) solo un numero finito di salti avvengono in un intervallo limitato $[0, t]$, per cui la somma è finita.
Sempre per definizione (somma finita di delta di Dirac), J è σ-finita su $\mathscr{B}([0, +\infty[\times \mathbb{R}^d)$ e assume valori in $\mathbb{N}_0$.

Definizione 1.8. La misura (aleatoria) J definita in 1.10 è detta misura di salto di X.

Calcoliamo l'attesa di J.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[J([0,t]\times H)] &= \mathbb{E}[\sum_{k=1}^{N_t}\delta_{Z_k}(H)] = \sum_{n\geq 1}\mathbb{E}[\sum_{k=1}^{n}\delta_{Z_k}(H)\mathbb{1}_{\{N_t=n\}}] = \\ &= \sum_{n\geq 1}P(N_t=n)\sum_{k=1}^{n}P(Z_k\in H) = e^{-\lambda t}\sum_{n\geq 1}\frac{(\lambda t)^n}{n!}n\eta(H) = t\lambda\eta(H).\end{aligned} \tag{1.12}$$

In particolare $\mathbb{E}[J([0,1]\times H)] = \lambda\eta(H)$, da cui:

$$\mathbb{E}[J([0,t]\times H)] = t\mathbb{E}[J([0,1]\times H)]$$

ponendo:

$$\nu(H) := \mathbb{E}[J([0,1]\times H)] = \lambda\eta(H) \qquad \forall H\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \tag{1.13}$$

otteniamo una misura finita su $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ che determina il numero medio per unità di tempo di salti di X la cui ampiezza è in H e tale che $\nu(\mathbb{R}^d) = \lambda$.

Definizione 1.9. La misura ν definita in 1.13 è detta misura di intensità (o di Lévy) di X.

Osservazione 6. Per il processo Jump-Diffusion, da 1.9:

$$\psi(\xi) = i\mu\cdot\xi - \frac{1}{2}C\xi\cdot\xi + \int_{\mathbb{R}^d}(e^{i\xi\cdot x}-1)\lambda\eta(\mathrm{d}x) = i\mu\cdot\xi - \frac{1}{2}C\xi\cdot\xi + \int_{\mathbb{R}^d}(e^{i\xi\cdot x}-1)\nu(\mathrm{d}x) \tag{1.14}$$

L'esponente caratteristico (e quindi la funzione caratteristica di X) è dunque univocamente determinato dalla terna (μ, C, ν) costituita dai termini:

- μ coefficiente del termine di "drift";
- C matrice di covarianza della parte "diffusion";
- ν misura di intensità della parte "jump".

Definizione 1.10. La misura $\tilde{J}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x) := J(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x) - \nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}t$ è detta misura di salto compensata di X.

Enunciamo il seguente Teorema che ci consente di rappresentare X in termini della sua misura di salto J.

Teorema 1.3.1. *Sia X processo Jump-Diffusion con misura di salto J e misura di Lévy ν.*
Per ogni funzione $f = f(t,x)$ abbiamo:

$$\sum_{\substack{0<s<t \\ \Delta X_s \neq 0}} f(s, \Delta X_s) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f(s,x) J(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) \tag{1.15}$$

- *Se $f \in L^1([0,+\infty[\times\mathbb{R}^d, \mathrm{d}s \otimes \nu)$ il processo*

$$M_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f(s,x) \tilde{J}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) \tag{1.16}$$

  è una martingala con $\mathbb{E}[M_t] = 0$, cioè :

$$\mathbb{E}[\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f(s,x) J(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x)] = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f(s,x) \nu(\mathrm{d}x) \mathrm{d}s. \tag{1.17}$$

- *Se $f \in L^2([0,+\infty[\times\mathbb{R}^d, \mathrm{d}s \otimes \nu)$ allora $M_t \in L^2$ e:*

$$Var(M_t) = \mathbb{E}[\left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f(s,x) \tilde{J}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x)\right)^2] = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f^2(s,x) \nu(\mathrm{d}x) \mathrm{d}s. \tag{1.18}$$

Dimostrazione. Dimostriamo solo la prima affermazione. Per semplicità consideriamo il caso $f = f(x)$.
Osserviamo che la somma dei valori di f valutati nell'ampiezza dei salti su $[0,t]$ è finita e la esprimiamo come:

$$\sum_{\substack{0<s<t \\ \Delta X_s \neq 0}} f(\Delta X_s) = \sum_{n=1}^{N_t} f(Z_n) = \sum_{n \geq 1} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \delta_{Z_n} \mathrm{d}x \, \delta_{T_n} \mathrm{d}s = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f(x) J(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x). \tag{1.19}$$

□

Se $f(x) = x$ abbiamo:

$$\sum_{\substack{0<s<t \\ \Delta X_s \neq 0}} \Delta X_s = \sum_{n=1}^{N_t} Z_n = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} x J(\mathrm{d}x, \mathrm{d}s) \tag{1.20}$$

da cui otteniamo la rappresentazione del processo X in termini della misura di salto:

$$X_t = \mu t + B_t + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} x J(\mathrm{d}x, \mathrm{d}s) \tag{1.21}$$

e se f è η-integrabile otteniamo:

$$\mathbb{E}[X_t] = t \left(\mu + \int_{\mathbb{R}^d} x\nu(\mathrm{d}x) \right). \tag{1.22}$$

1.4 Decomposizione di Lévy-Itō.

Lo scopo che ci prefiggiamo in questa sezione è quello di fornire per ogni processo di Lévy una decomposizione simile a quella trovata per il Jump-Diffusion, i risultati più corposi saranno solo enunciati senza dimostrazione (per approfondimenti si rimanda a [1] cap. 13).
Il primo problema è cercare di definire una misura di salto per ogni processo di Lévy, se infatti X è un processo di Lévy con attività infinita, cioè X ha infiniti salti in un intervallo di tempo finito, la sua misura di salto definita come in 1.10 potrebbe diventare infinita.
Per ovviare a questo problema utilizziamo quanto osservato nell'osservazione 2 riguardo all'impossibilità per un processo di Lévy di avere un numero infinito di salti "ampi", se infatti $H \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ e $0 \notin \bar{H}$ allora X ha un numero finito di salti di ampiezza in H; possiamo perciò definire $J(I \times H)$ su ogni $(I \times H) \in \mathscr{B}([0, +\infty[\times \mathbb{R}^d)$ con I limitato $0 \notin \bar{H}$:

$$J(I \times H) := \#\{t \in I \text{ t.c. } \Delta X_t \in H\}. \tag{1.23}$$

Attraverso risultati di teoria della misura questa definizione si può estendere, ponendo $J([0,+\infty[\times\{0\})=0$, fino ad ottenere una misura aleatoria σ-finita (in generale non-finita) su $\mathscr{B}([0,+\infty[\times\mathbb{R}^d)$.
A questo punto possiamo definire la misura di Lévy:

$$\nu(H) := \mathbb{E}[J([0,1]\times H)] \qquad H \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \tag{1.24}$$

che rappresenta il numero medio di salti per unità di tempo aventi ampiezza in H.
Prima di enunciare un risultato analogo a quello per il processo Jump-Diffusion, riportiamo il seguente

Lemma 1.4.1. *Sia X processo di Lévy con misura ν e misura di salto J, allora:*

i) se $H \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ con $0 \notin \bar{H}$ il processo

$$t \longmapsto J_t(H) := J([0,t]\times H) = \#\{s \in]0,t] \text{ t.c. } \Delta X_s \in H\} \tag{1.25}$$

è un processo di Poisson con intensità $\nu(H)$;

ii) se $H \in \mathscr{B}(\mathcal{R}^d)$ con $0 \notin \bar{H}$, $f = f(t,x)$ funzione misurabile, il processo

$$t \longmapsto J_t(H,f) := \int_0^t \int_H f(s,x) J(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) = \sum_{0<s\leq t} f(s,\Delta X_s)\mathbb{1}_H(\Delta X_s) \tag{1.26}$$

è un processo di Poisson composto;

iii) se f,g sono funzioni misurabili e $H,K \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ disgiunti tali che $0 \notin \bar{H}\cup\bar{K}$ allora $J_t(H,f)$ e $J_t(K,g)$ sono indipendenti.

Grazie a questo risultato, analogamente al caso Jump-Diffusion nel teorema 1.3.1 enunciamo il seguente teorema.

Teorema 1.4.2. *Sia X_t processo di Lévy d-dimensionale con misura di Lévy ν e misura di salto J. Per ogni funzione misurabile $f = f(t,x)$ tale che per* *qualche* $\varepsilon > 0$

$$\int_0^t \int_{|x|\le\varepsilon} |f(s,x)|\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}s < +\infty \tag{1.27}$$

si ha:

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f(s,x)J(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) = \sum_{\substack{0<s\le t \\ \Delta X_s \neq 0}} f(s,\Delta X_s) < +\infty \qquad q.d. \tag{1.28}$$

- *Se inoltre* $f \in L^1([0,+\infty[\times\mathbb{R}^d, \mathrm{d}s\otimes\nu)$ *allora il processo*

$$M_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f(s,x)\tilde{J}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) \tag{1.29}$$

  è una martingala con $\mathbb{E}[M_t] = 0$*;*

- *Se* $f \in L^2([0,+\infty[\times\mathbb{R}^d, \mathrm{d}s\otimes\nu)$ *allora* $M_t \in L^2$ *e:*

$$Var(M_t) = \mathbb{E}[\left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f(s,x)\tilde{J}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\right)^2] = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f^2(s,x)\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}s. \tag{1.30}$$

Dimostrazione. L'idea della dimostrazione di 1.28 risiede nella condizione di integrabilità locale 1.27: infatti i termini della serie in 1.28 saranno in numero finito dati da salti "ampi", mentre i salti "piccoli" (di ampiezza $\le \varepsilon$) possono sì essere numerabili ma la condizione su f fa sì che la serie sia assolutamente convergente:

$$\mathbb{E}[\int_0^t \int_{|x|\le\varepsilon} |f(s,x)|J(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)] = \int_0^t \int_{|x|\le\varepsilon} f(s,x)\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}s < +\infty. \tag{1.31}$$

□

Possiamo quindi enunciare il seguente fondamentale risultato.

Teorema 1.4.3 (Decomposizione di Lévy-Itō). *Sia X_t processo di Lévy d-dimensionale con misura di Lévy ν e misura di salto J. Allora ν soddisfa:*

$$\int_{|x|\geq 1} \nu(\mathrm{d}x) < +\infty \tag{1.32}$$

$$\int_{|x|<1} |x|^2 \nu(\mathrm{d}x) < +\infty. \tag{1.33}$$

Inoltre esiste un moto Browniano d-dimensionale correlato B con matrice di covarianza C e $\forall R > 0$ esiste $\mu_R \in \mathbb{R}^d$ tale che:

$$X_t = \mu_R t + B_t + X_t^R + M_t^R \tag{1.34}$$

ove

$$\begin{aligned} X_t^R &= \int_0^t \int_{|x|\geq R} x\, J(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) \\ M_t^R &= \int_0^t \int_{|x|<R} x\, \tilde{J}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) \end{aligned} \tag{1.35}$$

Questo risultato consente di scrivere ("decomporre") X come somma di una parte continua (moto Browniano con drift) e due termini relativi alla parte di salto per grandi e piccole ampiezze. Rispettivamente:

- $$X_t^R = \sum_{0<s\leq t} \Delta X_s \mathbb{1}_{\{|\Delta X_s|\geq R\}}(\Delta X_s); \tag{1.36}$$

il quale per il lemma 1.4.1 è un processo di Poisson composto che tiene conto dei salti "ampi" (con ampiezza in modulo più grande di R), che sono in numero finito;

- $$\begin{aligned} M_t^R &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \tilde{X}_t^{R,\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^t \int_{\varepsilon\leq|x|<R} x\,(J(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) - \nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}s) = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \sum_{\substack{0<s\leq t \\ \varepsilon<|\Delta X_s|<R}} \Delta X_s - t\,\mathbb{E}[\Delta X_1 \mathbb{1}_{\{\varepsilon\leq|\Delta X_1|<R\}}(\Delta X_1)]; \end{aligned} \tag{1.37}$$

questo termine per il lemma 1.4.1 contiene il limite del processo di Poisson composto dei salti aventi ampiezza tra ε e R. Questo numero per $\varepsilon \to 0^+$ può essere infinito, perciò non possiamo considerare direttamente il limite dell'integrale rispetto alla misura J; per avere la convergenza infatti dobbiamo considerare la versione compensata (integrale rispetto a $\tilde{J}$) che in virtù delle condizioni di integrabilità su ν e di 1.34 è una martingala L^2 e applicando 1.30 abbiamo la convergenza.
Questo procedimento è bilanciato dalla variazione del coefficiente μ_R in modo che la convergenza di tutto il processo a X resti garantita.

Alla luce di questo risultato osserviamo come ogni processo di Lévy X sia univocamente determinato dalla terna (μ_R, C, ν) che interviene della decomposizione, detta terna R-caratteristica di X.

Osservazione 7. Se $0 < S \leq R$ abbiamo:

$$\mu_S = \mu_R - \int_{S<|x|\leq R} x\,\nu(\mathrm{d}x) \tag{1.38}$$

Questo fatto viene subito dalla 1.4.3 unitamente al fatto che $\tilde{J}(\mathrm{d}t, \mathrm{d}x) = J(\mathrm{d}t, \mathrm{d}x) - \nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}t$

Esaminiamo le scelte che vengono comunemente effettuate per il parametro R:

- $R = 1$ è la scelta classica in letteratura, la 1-terna (μ_1, C, ν) è comunemente detta terna caratteristica di X;
- se $\displaystyle\int_{|x|\leq 1} |x|\nu(\mathrm{d}x) < +\infty$ allora possiamo far tendere $S \to 0$ in 1.38, e otteniamo

  $$\mu_0 = \mu_1 - \int_{|x|\leq 1} x\nu(\mathrm{d}x) \tag{1.39}$$

  che dà la decomposizione

  $$X_t = \mu_0 t + B_t + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} x\,J(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) = \mu_0 t + B_t + \sum_{0<s\leq t} \Delta X_s. \tag{1.40}$$

In questo modo riusciamo a separare la parte di salto dalla parte continua del processo;

- se $\displaystyle\int_{|x|\geq 1} |x|\nu(\mathrm{d}x) < +\infty$ allora possiamo far tendere $R \to +\infty$ in 1.38, e otteniamo
$$\mu_\infty = \mu_S + \int_{|x|>S} x\nu(\mathrm{d}x) \tag{1.41}$$
che dà la decomposizione
$$X_t = \mu_\infty t + B_t + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} x\,\tilde{J}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) = \mu_\infty t + B_t + \left(\sum_{0<s\leq t} \Delta X_s - t\,\mathbb{E}[\Delta X_1] \right). \tag{1.42}$$
Stavolta osserviamo come si metta in evidenza il termine di martingala dal termine di drift.

Esempio 1.4. Consideriamo il processo Jump-Diffusion su $\mathbb{R}^d$,
$X_t = \mu t + B_t + \displaystyle\sum_{n=1}^{N_t} Z_n$ allora

- 0-terna $\longrightarrow \quad (\mu,\, C,\, \lambda\eta)$
- 1-terna $\longrightarrow \quad \left(\mu + \lambda\displaystyle\int_{|x|\leq 1} x\,\eta(\mathrm{d}x),\, C,\, \lambda\eta\right)$
- ∞-terna $\longrightarrow \quad (\mu + \lambda,\, C,\, \lambda\eta)$

Diamo ora un teorema che consente di ottenere una forma generale dell'esponente caratteristico di un processo di Lévy.

Teorema 1.4.4 (Rappresentazione di Lévy-Khintchine). *Sia X un processo di Lévy su $\mathbb{R}^d$ con terna caratteristica $(\mu_1,\, C,\, \nu)$ allora l'esponente caratteristico di X è :*
$$\psi_X(\xi) = i\mu_1 \cdot \xi - \frac{1}{2}C\xi \cdot \xi + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\xi\cdot x} - 1 - i\xi \cdot x\mathbb{1}_{\{|x|<1\}})\nu(\mathrm{d}x) \tag{1.43}$$

La dimostrazione segue dal teorema di rappresentazione di Lévy-Itō calcolando l'esponente caratteristico di ogni termine della decomposizione.

Per $R > 0$ generico la rappresentazione diventa:

$$\psi_X(\xi) = i\mu_R \cdot \xi - \frac{1}{2}C\xi \cdot \xi + \int_{|x|\geq R}(e^{i\xi\cdot x} - 1)\nu(\mathrm{d}x) + \int_{|x|<R}(e^{i\xi\cdot x} - 1 - i\xi \cdot x)\nu(\mathrm{d}x) \tag{1.44}$$

Osservazione 8. Se vale

$$\int_{|x|\leq 1} |x|\nu(\mathrm{d}x) < +\infty \tag{1.45}$$

otteniamo la rappresentazione di Lévy-Khintchine semplificata

$$\psi_X(\xi) = i\mu_0 \cdot \xi - \frac{1}{2}C\xi \cdot \xi + \int_{\mathbb{R}^d}(e^{i\xi\cdot x} - 1)\nu(\mathrm{d}x) \tag{1.46}$$

Da questa caratterizzazione dell'esponente caratteristico di un processo di Lévy possiamo trarre la seguente conclusione:

Corollario 1.4.5. *Se X è un processo di Lévy con terna caratteristica (μ_1, C, ν) e misura di Lévy ν t.c. $\nu(\mathbb{R}^d) < +\infty$ allora X è un processo Jump-Diffusion con intensità $\lambda = \nu(\mathbb{R}^d)$ e distribuzione dei salti $\eta = \frac{1}{\lambda}\nu$*

Dimostrazione. Poiché $\nu(\mathbb{R}^d) < +\infty$ possiamo mandare $R \to 0$ in 1.43 e otteniamo la rappresentazione semplificata 1.46 che dà l'esponente caratteristico di un Jump-Diffusion con intensità $\lambda = \nu(\mathbb{R}^d)$ e distribuzione dei salti $\eta = \frac{1}{\lambda}\nu$ (vedi 1.9). □

Proposizione 1.4.6. *Sia X un processo di Lévy con terna (μ_1, C, ν) allora X ha (localmente in t) variazione limitata se e solo se*

$$C = 0 \qquad e \qquad \int_{|x|\leq 1} |x|\nu(\mathrm{d}x) < +\infty \tag{1.47}$$

Alla luce di questi ultimi risultati possiamo ottenere una classificazione dei processi di Lévy a seconda che siano o meno a variazione limitata o abbiano attività finita o infinita:

- Processi di Lévy con attività finita e variazione limitata.
  Per il corollario 1.4.5 e per la proposizione 1.4.6 sono i processi di Poisson composti con drift;

- Processi di Lévy con attività finita e variazione illimitata.
  Per il corollario 1.4.5 sono necessariamente processi Jump-Diffusion;

- Processi di Lévy con attività infinita e variazione limitata.

- Processi di Lévy con attività infinita e variazione illimitata.

Di questi ultimi due vedremo degli esempi che rientrano nella categoria del processi detti “stabili”.

Capitolo 2

Il Problema Del Prezzo.

In questo capitolo viene effettuata una sintesi dei risultati teorici utili alla costruzione di un classico modello di mercato finalizzato al calcolo del prezzo di un derivato relativo ad un sottostante (con valore indicato con S_t) il cui logaritmo sia regolato da un generico processo di Lévy.
Una volta fissate le basi della teoria delle equazioni differenziali stocastiche (EDS o analogamente SDE) ci occuperemo di mostrare come il problema del calcolo del prezzo di un'opzione sia equivalente a risolvere un problema di Cauchy integro-differenziale strettamente legato al processo di Lévy del sottostante.

2.1 Modelli di mercato tipo-Lévy.

Dati $r \geq 0$ e $d \geq 1$, definiamo un modello di Lévy esponenziale come una coppia (B_t, S_t) dove:

$$\begin{aligned} &B_t = e^{rt} && \text{titolo non rischioso detto "Bond";} \\ &S_t^{(j)} = S_0^{(j)} e^{X_t^{(j)}} && \text{processo dei titoli rischiosi.} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Nel nostro caso $X_t = (X_t^{(j)})_{(1 \leq j \leq d)}$ è un processo di Lévy d-dimensionale e assumiamo che il flusso di informazioni sia dato attraverso una filtrazione

$(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$.
Considereremo in questa trattazione solo il caso $d = 1$, cioè in cui il prezzo dell'opzione è calcolato sull'andamento di un singolo sottostante $X_t^{(1)} = X_t$ processo di Lévy con terna (μ_1, σ, ν).
Sotto l'ipotesi di assenza di arbitraggi abbiamo che esiste una misura Q (equivalente alla misura dello spazio, in generale non unica nel caso dei processi di Lévy) rispetto alla quale il processo dei prezzi scontati $\tilde{S}_t = \frac{S_t}{B_t} = e^{-rt}S_t$ è una martingala, assumiamo che lo spazio di probabilità con filtrazione sia direttamente $(\Omega, \mathscr{S}, Q, (\mathscr{F}_t))$.
Indichiamo con $w(t, S_t)$ il prezzo di un derivato sul titolo S_t in ogni istante $t \in [0, T]$ (assumiamo sia una martingala) e $H(s) := w(T, s)$ (valore del derivato al tempo finale, detto anche "payoff"); per la proprietà di martingala vale:

$$e^{-rt}w(t, S_t) = \mathbb{E}^Q[e^{-rT}w(T, S_T))|\mathscr{F}_t] \qquad t \in [0, T] \tag{2.2}$$

da cui otteniamo:

$$w(t, s) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^Q[H(se^{X_{T-t}})] \qquad t \in [0, T] \tag{2.3}$$

effettuiamo ora un cambiamento di variabili: $x := \ln(s)$, $\tau := T - t$ e consideriamo il processo $u(\tau, X_\tau) := w(t, e^{X_t})$, il prezzo del derivato al tempo $t = T - \tau$ è dato dalla funzione:

$$u(\tau, x) = e^{-r\tau}\mathbb{E}^Q[H(e^{x+X_\tau})] \tag{2.4}$$

In particolare per determinare il prezzo da dare al derivato al tempo $t = 0$ (supponendo di conoscere S_0) calcoleremo $u(T, \ln(S_0))$.
Osserviamo come la condizione assunta che il processo dei prezzi scontati $\tilde{S}_t$ sia una martingala imponga necessariamente delle condizioni sulla scelta dei parametri del modello, vale infatti:

Proposizione 2.1.1. *Se X è un processo di Lévy con esponente caratteristico ψ_Q rispetto a Q allora il processo dei prezzi scontati $\tilde{S}_t = e^{-rt}S_t$ è una Q-*

martingala se e solo se valgono:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}^Q[S_T] = \mathbb{E}^Q[S_0 e^{X_T}] < +\infty;\\
&\psi_Q(-i) = r.
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

La prova di questo risultato si può condurre applicando ragionamenti relativi alla proprietè di martingala e alle proprietà dell'esponente caratteristico di un processo di Lévy.

Osservazione 9. Se X è un processo di Lévy con terna caratteristica (μ_1^Q, σ^2, ν) rispetto a Q, la condizione $\psi_Q(-i) = r$ per 1.43 si può scrivere più esplicitamente come:

$$
\mu_1^Q = r - \frac{\sigma^2}{2} - \int_{\mathbb{R}} (e^x - 1 - x\mathbb{1}_{\{|x|<1\}})\nu(\mathrm{d}x) \tag{2.6}
$$

se inoltre $\mathbb{E}[|X_t|] < +\infty$ abbiamo:

$$
\mu_\infty^Q = r - \frac{\sigma^2}{2} - \int_{\mathbb{R}} (e^x - 1 - x)\nu(\mathrm{d}x) \tag{2.7}
$$

2.2 Formula di Itō.

In questa sezione introduciamo brevemente le definizioni e i risultati necessari alla formulazione del problema integro-differenziale associato al problema del calcolo del prezzo di un derivato in un modello sotto le ipotesi precedenti, enunceremo in particolare la formula di Itō e il teorema di rappresentazione di Feynman-Kač per soluzioni di equazioni differenziali stocastiche con salti.

Consideriamo uno processo stocastico S_t in spazio di probabilità con filtrazione $(\Omega, \mathscr{S}, Q, (\mathscr{F}_t))$ soddisfacente le ipotesi usuali, assumiamo che S sia un processo di Lévy.

Definizione 2.1. Definiamo degli spazi di funzioni che ci saranno utili nella trattazione.

- $\mathbb{L} := \{u,$ processo càglàd adattato alla filtrazione$\}$;
- $\mathbb{D} := \{u,$ processo càdlàg adattato alla filtrazione$\}$;
- $\mathbb{L}^2_{\text{loc}} := \{u,$ processo adattato alla filtrazione con $\displaystyle\int_0^T u_t^2 \mathrm{d}t < +\infty$ q.d.$\}$;

- $\hat{\mathbb{L}} := \{\varphi : [0,T] \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ funzione stocastica tale che:

  $\forall t \in [0,T] \quad (x,\omega) \mapsto \varphi(t,x,\omega)$ è $\mathscr{B} \times \mathscr{F}_t -$ misurabile;

  $\forall (x,\omega) \in \mathbb{R} \times \Omega \quad t \mapsto \varphi(t,x,\omega)$ è càglàd $\}$;

- $\mathbb{L}^2_\nu := \{\varphi \in \hat{\mathbb{L}}$ t. c. $\mathbb{E}\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \varphi^2(t,x)\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}t\right] < +\infty\}$
- $\mathbb{L}^2_{\nu,\text{loc}} := \{\varphi \in \hat{\mathbb{L}}$ t. c. $\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \varphi^2(t,x)\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}t < +\infty$ q.d. $\}$.

Assumiamo sia nota la costruzione dell'integrale stocastico di una funzione stocastica $u \in \mathbb{L}$ rispetto alla misura di salto J e alla misura di salto compensata $\tilde{J}$ (si veda [1] cap. 14 per approfondimenti)
Avremo una rappresentazione dell'integrale stocastico di u_s rispetto al processo di Lévy S data dal seguente risultato.

Teorema 2.2.1. *Sia S un processo di Lévy 1-dimensionale con decomposizione di Lévy-Itō:*

$$S_t = \mu_R t + \sigma W_t + S_t^R + M_t^R \tag{2.8}$$

con W moto Browniano standard e

$$\begin{aligned} S_t^R &= \int_0^t \int_{|y|\geq R} y\, J(\mathrm{d}s, \mathrm{d}y) \\ M_t^R &= \int_0^t \int_{|y|<R} y\, \tilde{J}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}y). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Allora per ogni $u \in \mathbb{L}$ abbiamo:

$$\int_0^t u_s \mathrm{d}S_s = A_t + M_t \tag{2.10}$$

ove:

$$\begin{aligned} A_t &= \mu_R \int_0^t u_s \mathrm{d}s + \int_0^t \int_{|y| \geq R} u_s y \, J(\mathrm{d}s, \mathrm{d}y) \\ M_t &= \sigma \int_0^t u_s \mathrm{d}W_s + \int_0^t \int_{|y| < R} u_s y \, \tilde{J}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}y). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Il processo A inoltre è a variazione limitata e M è una martingala locale. Di più , se:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T u_t^2 \mathrm{d}t\right] < +\infty \tag{2.12}$$

allora M è una martingala in L^2 con attesa nulla.

Otteniamo le versioni per $R = 0$; $R = \infty$ nei casi:

- $\displaystyle\int_{|y| \leq 1} |y| \nu(\mathrm{d}y) < +\infty$ allora:

$$\int_0^t u_s \mathrm{d}S_s = \mu_0 \int_0^t u_s \mathrm{d}s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} u_s y \, J(\mathrm{d}s, \mathrm{d}y) + \sigma \int_0^t u_s \mathrm{d}W_s \tag{2.13}$$

- $\displaystyle\int_{|y| > 1} |y| \nu(\mathrm{d}y) < +\infty$ allora:

$$\int_0^t u_s \mathrm{d}S_s = \mu_\infty \int_0^t u_s \mathrm{d}s + \sigma \int_0^t u_s \mathrm{d}W_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} u_s y \, \tilde{J}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}y). \tag{2.14}$$

Osservazione 10. L'enunciato del teorema 2.2.1 può essere riformulato equivalentemente nella notazione differenziale:

$$u_t \, \mathrm{d}S_t = \mu_R u_t \, \mathrm{d}t + \sigma u_t \, \mathrm{d}W_t + \int_{|y| \geq R} u_t y \, J(\mathrm{d}t, \mathrm{d}y) + \int_{|y| < R} u_t y \, \tilde{J}(\mathrm{d}t, \mathrm{d}y). \tag{2.15}$$

Enunciamo quindi il seguente risultato fondamentale.

Teorema 2.2.2 (Formula di Itō)**.** *Sia X un processo di Lévy* 1*-dimensionale con R-terna (μ_R, σ^2, ν), $f = f(t, x) \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$. Se f è limitata allora* *vale:*

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(t,X_t) = (\mathcal{A}_R+\partial_t)f(t,X_{t^-})\,\mathrm{d}t + \sigma\partial_x f(t,X_{t^-})\,\mathrm{d}W_t + \\ + \int_{\mathbb{R}} [f(t,y+X_{t^-}) - f(t,X_{t^-})]\tilde{J}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}y) \end{aligned} \tag{2.16}$$

Dove il termine $\mathcal{A}_R$, detto operatore R-caratteristico di X è dato da:

$$\mathcal{A}_R g(x) = \mu_R\partial_x g(x) + \frac{\sigma^2}{2}\partial_{xx}g(x) + \int_{\mathbb{R}} [g(x+y) - g(x) - \partial_x g(x) y \mathbb{1}_{\{|y|<R\}}]\nu(\mathrm{d}y). \tag{2.17}$$

Osservazione 11. L'ipotesi di limitatezza nella formula di Itō può essere indebolita; il teorema vale ancora infatti anche supponendo che la funzione f sia tale che la funzione stocastica

$$\varphi(t,y) = f(t,y+X_{t^-}) - f(t,X_{t^-}) \tag{2.18}$$

sia una funzione in $\mathbb{L}^2_{\nu,\mathrm{loc}}$.

Nel caso del nostro modello ci troviamo a trattare con processi stocastici del tipo $S_t = e^{X_t}$ dove X è un processo di Lévy 1-dimensionale con R-terna (μ_R, σ^2, ν) e esponente caratteristico ψ_X. Supponiamo inoltre che:

$$\int_{|y|\geq 1} e^{2y}\nu(\mathrm{d}y) < +\infty \tag{2.19}$$

(condizione che si può dimostrare essere equivalente all'esistenza del momento di ordine 2 di X cioè $\mathbb{E}[e^{2X_t}] = e^{t\psi_X(-2i)} < +\infty$).
Se $\mathcal{A}_R$ è l'operatore caratteristico per il processo X:

$$(\mathcal{A}_R+\partial_t)f(t,x) = \left[\mu_R + \frac{\sigma^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} (e^y - 1 - y\mathbb{1}_{\{|y|<R\}})\nu(\mathrm{d}y)\right] f(t,x) \tag{2.20}$$

e per 1.43:

$$(\mathcal{A}_R+\partial_t)f(t,x) = \psi_X(-i)f(t,x) \tag{2.21}$$

Considerando quindi la funzione $f(t,x) = e^x$ e applichiamo la formula di Itō, da cui:

$$\mathrm{d}S_t = \psi_X(-i)S_{t^-}\mathrm{d}t + \sigma S_{t^-}\mathrm{d}W_t + S_{t^-}\int_{\mathbb{R}}(e^y - 1)\tilde{J}(\mathrm{d}t, \mathrm{d}y) \tag{2.22}$$

Si verifica facilmente che l'ipotesi 2.19 fa sì che la funzione f soddisfi le ipotesi (indebolite) affinchè la formula di Itō possa essere applicata.

Esempio 2.1. Consideriamo due casi particolari sotto le ipotesi del teorema 2.2.2:

- se la parte di salto ha variazione limitata, cioè :

$$\int_{|y|\leq 1}|y|\nu(\mathrm{d}y) < +\infty \tag{2.23}$$

  possiamo applicare la formula di Itō con $R \to 0$ (si verifica che ciò è possibile per un argomento di convergenza dominata) e otteniamo la versione semplificata dell'operatore caratteristico:

$$\mathcal{A}_0 g(x) = \mu_0 \partial_x g(x) + \frac{\sigma^2}{2}\partial_{xx} g(x) + \int_{\mathbb{R}}[g(x+y) - g(x)]\nu(\mathrm{d}y). \tag{2.24}$$

  Dove:

$$\mu_0 = \mu_1 - \int_{|x|\leq 1} x\nu(\mathrm{d}x). \tag{2.25}$$

- Se X è integrabile, cioè :

$$\int_{|y|\geq 1}|y|\nu(\mathrm{d}y) < +\infty \tag{2.26}$$

  possiamo applicare la formula di Itō con $R \to +\infty$ (sempre per convergenza dominata) e otteniamo:

$$\mathcal{A}_\infty g(x) = \mu_\infty \partial_x g(x) + \frac{\sigma^2}{2}\partial_{xx} g(x) + \int_{\mathbb{R}}[g(x+y) - g(x) - y\partial_x g(x)]\nu(\mathrm{d}y). \tag{2.27}$$

Dove:

$$\mu_\infty = \mathbb{E}[X_1]. \tag{2.28}$$

2.3 EDS con salti.

Consideriamo un processo di Lévy X con misura ν e misura di salto J definito in uno spazio di probabilità con filtrazione $(\Omega, \mathscr{S}, P, (\mathscr{F}_t))$ che soddisfi le ipotesi usuali. Siano $Z \in \mathbb{R}$ e le seguente mappe limitate e misurabili:

$$\begin{aligned}
\bar{b} &= \bar{b}(t,x) : [0,T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\
\sigma &= \sigma(t,x) : [0,T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\
\tilde{a} &= \tilde{a}(t,x,y) : [0,T] \times \mathbb{R} \times \{|y| < 1\} \longrightarrow \mathbb{R} \\
\bar{a} &= \bar{a}(t,x,y) : [0,T] \times \mathbb{R} \times \{|y| \geq 1\} \longrightarrow \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Definizione 2.2. Una soluzione relativa a W e J dell'equazione differenziale stocastica (EDS) con coefficienti $Z, \bar{b}, \sigma, \tilde{a}, \bar{a}$ è un processo $(X_t)_{t\in[0,T]} \in \mathbb{D}$ tale che:

i) $\sigma(t, X_{t^-}) \in \mathbb{L}^2_{\text{loc}}$;

ii) $\tilde{a}(t, X_{t^-}, y)\mathbb{1}_{\{|y|<1\}} \in \mathbb{L}^2_{\nu,\text{loc}}$;

iii) vale per ogni $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned}
X_t = Z &+ \int_0^t \bar{b}(s, X_{s^-})\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s, X_{s^-})\mathrm{d}W_s + \\
&+ \int_0^t \int_{|y|<1} \tilde{a}(s, X_{s^-}, y)\tilde{J}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}y) + \int_0^t \int_{|y|\geq 1} \bar{a}(s, X_{s^-}, y)J(\mathrm{d}s, \mathrm{d}y).
\end{aligned} \tag{2.29}$$

In notazione differenziale, posto $X_0 = Z$:

$$\mathrm{d}X_t = \bar{b}(t, X_{t^-})\mathrm{d}t + \sigma(t, X_{t^-})\mathrm{d}W_t + \int_{|y|<1} \tilde{a}(t, X_{t^-}, y)\tilde{J}(\mathrm{d}t, \mathrm{d}y) + \int_{|y|\geq 1} \bar{a}(t, X_{t^-}, y)J(\mathrm{d}t, \mathrm{d}y). \tag{2.30}$$

In generale per il teorema di decomposizione di Lévy-Itō un processo di Lévy con terna caratteristica (μ_1, σ^2, ν) può essere visto come una soluzione di una EDS con:

$$\bar{b}(t,x) = \mu_1, \quad \sigma(t,x) = \sigma, \quad \tilde{a}(t,x,y) = \bar{a}(t,x,y) = y. \tag{2.31}$$

Il seguente teorema fissa delle condizioni sui coefficienti di una EDS affinchè la soluzione esista e sia unica.

Teorema 2.3.1. *Sotto le ipotesi:*

i) *per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *esiste una costante* K_n *tale che:*

$$|\bar{b}(t,x_1) - \bar{b}(t,x_2)|^2 + |\sigma(t,x_1) - \sigma(t,x_2)|^2 + \int_{|y|<1} |\tilde{a}(t,x_1,y) - \tilde{a}(t,x_2,y)|^2 \nu(\mathrm{d}y) \leq \\ \leq K_n |x_1 - x_2|^2 \tag{2.32}$$

per $|x_1|, |x_2| \leq n,\ t \in [0,T]$*;*

ii) *esiste* $K > 0$ *tale che:*

$$\bar{b}^2(t,x) + \sigma^2(t,x) + \int_{|y|<1} \tilde{a}^2(t,x,y)\nu(\mathrm{d}y) \leq K(1+|x|^2) \qquad x \in \mathbb{R},\ t \in [0,T]; \tag{2.33}$$

iii) *la mappa* $(t,x) \mapsto \bar{a}(t,x,y)$ *è continua per ogni* y, $|y| \geq 1$*;*

esiste una soluzione X *di 2.29 unica per traiettorie (cioè a meno di indistinguibilità).*

Per semplicità separeremo la parte di "drift" dalla parte di martingala ponendo:

$$\begin{aligned} b(t,x) &:= \bar{b}(t,x) + \int_{|y|\geq 1} \bar{a}(t, X_{t^-}, y)\nu(\mathrm{d}y); \\ a(t,x,y) &:= \tilde{a}(t,x,y)\mathbb{1}_{\{|y|<1\}} + \bar{a}(t,x,y)\mathbb{1}_{\{|y|\geq 1\}}. \end{aligned} \tag{2.34}$$

L'EDS 2.30 si riformula come:

$$\mathrm{d}X_t = b(t, X_{t^-})\mathrm{d}t + \sigma(t, X_{t^-})\mathrm{d}W_t + \int_{\mathbb{R}} a(t, X_{t^-}, y)\tilde{J}(\mathrm{d}t, \mathrm{d}y), \qquad X_0 = Z. \tag{2.35}$$

Analogamente il teorema 2.3.1 sussiste ancora con b e a in luogo di $\bar{b}$ e $\tilde{a}$ rispettivamente.

Teorema 2.3.2 (Formula di Itō per EDS con salti.)**.** *Sotto le ipotesi del teorema 2.3.1 (con coefficienti a, b, σ), se X è soluzione di 2.35 e $f \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R})$ limitata, allora:*

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(t, X_t) = (\mathcal{A} + \partial_t) f(t, X_{t^-})\, \mathrm{d}t + \sigma(t, X_{t^-})\partial_x f(t, X_{t^-})\, \mathrm{d}W_t + \\ + \int_{\mathbb{R}} [f(t, X_{t^-} + a(t, X_{t^-}, y)) - f(t, X_{t^-})]\tilde{J}(\mathrm{d}t, \mathrm{d}y) \end{aligned} \tag{2.36}$$

dove $\mathcal{A}$ indica l'operatore integro-differenziale a coefficienti variabili:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}f(t, x) = b(t, x)\partial_x f(t, x) + \frac{\sigma^2(t, x)}{2}\partial_{xx} f(t, x) + \\ + \int_{\mathbb{R}} [f(t, x + a(t, x, y)) - f(t, x) - a(t, x, y)\partial_x f(t, x)]\nu(\mathrm{d}y). \end{aligned} \tag{2.37}$$

Sotto queste ipotesi cerchiamo di raggiungere il risultato che ci consenta di stabilire un legame profondo tra EDS con salti e le equazioni integro-differenziali alle derivate parziali (PIDE).
Consideriamo una EDS della forma:

$$\mathrm{d}X_t = b(t, X_{t^-})\mathrm{d}t + \sigma(t, X_{t^-})\mathrm{d}W_t + \int_{\mathbb{R}} a(t, X_{t^-}, y)\tilde{J}(\mathrm{d}t, \mathrm{d}y) \tag{2.38}$$

siano $t \in [0, T[$ e $x \in \mathbb{R}$, indichiamo con $(X_s^{t,x})_{s \in [t,T]}$ la relativa soluzione con condizione iniziale $X_t^{t,x} = x$, sia inoltre $\mathcal{A}$ l'operatore caratteristico 2.37.

Definizione 2.3. Siano $\varphi = \varphi(x)$ e $r = r(t, x)$ funzioni continue e limitate. Un soluzione classica del problema di Cauchy per $\mathcal{A} + \partial_t$ con dato finale φ è una funzione limitata $f \in C^{1,2}([0,T[\times\mathbb{R}) \cap C([0,T]\times\mathbb{R})$ tale che:

$$\begin{cases} \mathcal{A}f(t,x) + \partial_t f(t,x) = r(t,x)f(t,x) & (t,x) \in [0,T[\times\mathbb{R}, \\ f(T,x) = \varphi(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.39}$$

Siamo ora in grado di enunciare il seguente risultato fondamentale.

Teorema 2.3.3 (Rappresentazione di Feynman-Kač). *Se il problema 3.8 ammette almeno una soluzione classica f tale che $f, \partial_x f \in L^\infty(]0,T[\times\mathbb{R})$ allora essa ha rappresentazione stocastica:*

$$f(t,x) = \mathbb{E}[e^{-\int_t^T r(s,X_s^{t,x})\mathrm{d}s}\varphi(X_T^{t,x})], \qquad t \in [0,T[,\ x \in \mathbb{R}. \tag{2.40}$$

Questo teorema è una conseguenza della Formula di Itō e della proprietà di martingala con attesa nulla di alcuni termini che intervengono nella formula.
La portata di questo risultato è tale da consentirci di avere una rappresentazione esplicita della densità di X, sia per semplicità $r = 0$, se l'operatore $\mathcal{A} + \partial_t$ ha soluzione fondamentale $\Gamma(t,x;T,y)$, cioè per ogni $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$

$$f(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\Gamma(t,x;T,y)\mathrm{d}y \tag{2.41}$$

è soluzione del problema 3.8 allora per Feynman-Kač avremo

$$\mathbb{E}[\varphi(X_T^{t,x})] = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\Gamma(t,x;T,y)\mathrm{d}y \tag{2.42}$$

ed essendo φ arbitraria possiamo concludere che la funzione $y \mapsto \Gamma(t,x;T,y)$ è densità della variabile aleatoria $X_T^{t,x}$, cioè Γ è la densità di transizione di X.

2.4 Modello di Lévy e PIDE

Torniamo ora ad occuparci del nostro modello di mercato con un sottostante della forma

$$S_t = S_0 e^{X_t} \tag{2.43}$$

dove X soddisfa la EDS con salti

$$dX_t = \bar{b}(t, X_{t^-})dt + \bar{\sigma}(t, X_{t^-})dW_t + \int_{\mathbb{R}} \bar{a}(t, X_{t^-}, y)\tilde{J}(dt, dy) \tag{2.44}$$

con condizione iniziale $X_0 = 1$. Le ipotesi di esistenza e unicità della soluzione enunciate in 2.3.1 sono verificate grazie alle condizioni imposte sulla misura ν in 2.19. L'operatore caratteristico relativo a X dato da:

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{A}}f(t,x) = \bar{b}(t,x)\partial_x f(t,x) + \frac{\bar{\sigma}^2(t,x)}{2}\partial_{xx}f(t,x)+ \\ + \int_{\mathbb{R}} [f(t, x + \bar{a}(t,x,y)) - f(t,x) - \bar{a}(t,x,y)\partial_x f(t,x)]\nu(dy).\end{aligned} \tag{2.45}$$

Supponiamo che il titolo non rischioso abbia una dinamica:

$$B_t = e^{\int_0^t \bar{r}(s, X_s)ds}, \qquad t \in [0, T], \tag{2.46}$$

con $\bar{r}$ deterministica e limitata.
Osserviamo che se $f(t,x) = e^x$ l'operatore $\bar{\mathcal{A}}$ applicato ad f dà :

$$\bar{\mathcal{A}}e^x = e^x \left[\bar{b}(t,x) + \frac{\bar{\sigma}^2(t,x)}{2} + \int_{\mathbb{R}} [e^{\bar{a}(t,x,y)} - 1 - \bar{a}(t,x,y)]\nu(dy)\right] =: e^x \Psi(t,x). \tag{2.47}$$

Applicando quindi la Formula di Itō a X_t con $f(t,x) = e^x$, otteniamo:

$$dS_t = \Psi(t, X_{t^-})S_{t^-}dt + \bar{\sigma}(t, X_{t^-})S_{t^-}dW_t + S_{t^-}\int_{\mathbb{R}} \left(e^{a(t,\bar{X}_t,y)} - 1\right)\tilde{J}(dt, dy) \tag{2.48}$$

affinché il processo dei prezzi scontati $\frac{S_t}{B_t}$ sia una martingala deve necessariamente valere:

$$\Psi(t,x) = \bar{r}(t,x) \tag{2.49}$$

per cui per passare dall'equazione in X a quella in S effettuiamo il seguente cambio dei coefficienti:

$$\begin{aligned} r(t,S) &= \bar{r}\left(t, \log\frac{S}{S_0}\right); \\ \sigma(t,S) &= \bar{\sigma}\left(t, \log\frac{S}{S_0}\right); \\ a(t,S,y) &= \bar{a}\left(t, \log\frac{S}{S_0}, y\right). \end{aligned} \tag{2.50}$$

L'EDS del processo del sottostante S sotto una misura martingala equivalente diventa:

$$\mathrm{d}S_t = r(t,S_{t^-})S_{t^-}\mathrm{d}t + \sigma(t,S_{t^-})S_{t^-}\mathrm{d}W_t + S_{t^-}\int_{\mathbb{R}}\left(e^{a(t,X_t,y)} - 1\right)\tilde{J}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}y). \tag{2.51}$$

In modello di Lévy esponenziale assumendo r costante, come osservato in 2.7 abbiamo che la funzione Ψ assume la forma esplicita:

$$\Psi(t,x) = \mu_\infty + \frac{\sigma^2}{2} + \int_{\mathbb{R}}(e^y - 1 - y)\nu(\mathrm{d}y) = \psi_X(-i) = r \tag{2.52}$$

con ψ_X esponente caratteristico di X.
Abbiamo quindi riottenuto la dinamica di S rispetto una misura martingala equivalente:

$$\mathrm{d}S_t = rS_{t^-}\mathrm{d}t + \sigma S_{t^-}\mathrm{d}W_t + S_{t^-}\int_{\mathbb{R}}(e^y - 1)\,\tilde{J}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}y). \tag{2.53}$$

Applichiamo ora il teorema di Feynman-Kač per ottenere il prezzo di un derivato $H = \varphi(S_T)$ con φ funzione di payoff del derivato stesso in funzione di un sottostante avente dinamica come in 2.51; indichiamo con $(S_\tau^{t,s})_{\tau\in[t,T]}$ la soluzione di 2.51 con dato iniziale $S_t^{t,s} = s$ e l'operatore caratteristico per

S sia dato da:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}f(t,s) &= r(t,s)s\partial_s f(t,s) + \frac{\sigma^2(t,s)s^2}{2}\partial_{ss}f(t,s)+ \\ &+ \int_{\mathbb{R}}[f(t,se^{a(t,s,y)}) - f(t,s) - s(e^{a(t,s,y)}-1)\partial_s f(t,s)]\nu(\mathrm{d}y)\end{aligned} \tag{2.54}$$

vale il seguente:

Teorema 2.4.1. *Se il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \mathcal{A}f(t,s) + \partial_t f(t,s) = r(t,s)f(t,s) & (t,s) \in [0,T[\times\mathbb{R}^+, \\ f(T,s) = \varphi(s) & s \in \mathbb{R}^+. \end{cases} \tag{2.55}$$

ha soluzione classica f allora:

$$f(t,s) = \mathbb{E}[e^{-\int_t^T r(\tau,S_\tau^{t,s})\mathrm{d}\tau}\varphi(S_T^{t,s})] \tag{2.56}$$

è il prezzo di H rispetto alla misura martingala equivalente Q.

Abbiamo quindi ottenuto un legame profondo tra il problema del calcolo del prezzo di un derivato su un sottostante che verifichi delle opportune ipotesi e la soluzione di un problema di Cauchy integro-differenziale avente per dato finale la funzione di payoff del derivato.

Capitolo 3

Soluzione Numerica - Modello di Merton.

Alla luce della dissertazione teorica portata avanti nelle precedenti sezioni ci proponiamo ora di scrivere esplicitamente le equazioni (che andremo a risolvere numericamente nei paragrafi successivi) per il calcolo del prezzo di un derivato di tipo Call europeo in un modello esponenziale in cui il logaritmo del sottostante segua una dinamica di tipo Jump-Diffusion.

3.1 Modello di Merton.

Consideriamo innanzitutto un processo Jump-Diffusion 1-dimensionale su $(\Omega, \mathscr{S}, P, (\mathscr{F}_t))$:

$$X_t = \mu t + \sigma W_t + \sum_{n=1}^{N_t} Z_n \tag{3.1}$$

definito come in 1.8. Nel modello di Merton il logaritmo del prezzo del sottostante è dato da un processo Jump-Diffusion X_t dove l'ampiezza dei salti sarà data dalle variabili Z_n indipendenti e aventi distribuzione:

$$Z_n \sim \mathcal{N}_{\mu_j, \sigma_j} \tag{3.2}$$

da cui la terna caratteristica del processo è (μ, σ^2, ν) con:

$$\nu(\mathrm{d}y) = f(y)\mathrm{d}y = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2}} e^{-\frac{(y-\mu_j)^2}{2\sigma_j^2}} \mathrm{d}y. \tag{3.3}$$

Come visto nell'esempio 1.9 l'esponente caratteristico sarà dato da:

$$\psi(\xi) = i\mu\xi - \frac{1}{2}\sigma^2\xi^2 + \lambda(e^{i\mu_j\xi - \frac{1}{2}\sigma_j^2\xi^2} - 1). \tag{3.4}$$

In questo particolare modello la densità del processo ammette un'espansione in serie del tipo:

$$\Phi_{X_t}(x) = e^{\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!\sqrt{2\pi(\sigma^2 t + n\sigma_j^2)}} e^{-\frac{(x-\mu t - n\mu_j)^2}{2(\sigma^2 t + n\sigma_j^2)}}. \tag{3.5}$$

Ci proponiamo ora di scrivere esplicitamente il problema di Cauchy. Calcoliamo innanzitutto i termini delle terne caratteristica (0 e ∞ visto che le condizioni di integrabilità di $|x|\nu$ sono soddisfatte) rispetto ad una misura martingala equivalente Q imponendo la condizione 2.6 per il termine di drift. Posto $k = e^{\mu_j + \frac{\sigma^2}{2}} - 1$, otteniamo:

$$\begin{aligned} &(\mu_0^Q, \sigma^2, \nu) \quad \text{con } \mu_0^Q = r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda k \quad (0 - \text{terna}); \\ &(\mu_\infty^Q, \sigma^2, \nu) \quad \text{con } \mu_\infty^Q = r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda k + \lambda\mu_j \quad (\infty - \text{terna}). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Abbiamo quindi che il processo S è soluzione dell'EDS :

$$\mathrm{d}S_t = \mu_0 S_{t^-}\mathrm{d}t + \sigma S_{t^-}\mathrm{d}W_t + S_{t^-}\int_{\mathbb{R}} (e^y - 1)\tilde{J}(\mathrm{d}t, \mathrm{d}y) \tag{3.7}$$

se consideriamo il payoff di un'opzione Call europea con strike $K > 0$ cioè $H(s) = (s - K)^+$ il prezzo del derivato $u(t, s)$ sarà dato dalla soluzione del problema:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,s) = -\mathcal{A}u(t,s) + ru(t,s) & (t,s) \in [0,T[\times\mathbb{R}^+, \\ u(T,s) = H(s) & s \in \mathbb{R}^+. \end{cases} \tag{3.8}$$

consideriamo l'equazione:

$$\begin{aligned} &\partial_t u(t,s) = -\mathcal{A}u(t,s) + ru(t,s) = -rs\partial_s u(t,s) - \frac{\sigma^2 s^2}{2}\partial_{ss}u(t,s) - \\ &- \int_{\mathbb{R}} [u(t,se^y) - u(t,s) - s(e^y - 1)\partial_s u(t,s)]\nu(\mathrm{d}y) + ru(t,s) = \\ &= -\frac{\sigma^2 s^2}{2}\partial_{ss}u(t,s) - \partial_s u(t,s)\left[rs - s\int_{\mathbb{R}}(e^y - 1)\nu(\mathrm{d}y)\right] - \\ &- \int_{\mathbb{R}} [u(t,se^y) - u(t,s)]\nu(\mathrm{d}y) + ru(t,s) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Eseguiamo ora il cambio di variabili:

$$\tau = T - t, \qquad x = \log(s) \tag{3.10}$$

e rinominiamo la funzione ponendola nelle variabili (τ, x), per cui le derivate nell'equazione vengono sostituite con:

$$\begin{aligned} &\partial_t u(t,s) \to -\partial_\tau u(\tau,x); \\ &\partial_s u(t,s) \to \frac{1}{e^x}\partial_x u(\tau,x); \\ &\partial_{ss} u(t,s) \to \frac{1}{e^{2x}}\partial_{xx}u(\tau,x) - \frac{1}{e^{2x}}\partial_x u(\tau,x). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Ricordiamo inoltre che per $\nu(\mathrm{d}y)$ come in 3.3:

$$\int_{\mathbb{R}} (e^y - 1)\nu(\mathrm{d}y) = \lambda k. \tag{3.12}$$

Il problema in (x,τ) si presenta nella forma:

$$\begin{cases} \partial_\tau u(\tau,x) = \dfrac{\sigma^2}{2}\partial_{xx}u(\tau,x) + \left(r - \dfrac{\sigma^2}{2} - \lambda k\right)\partial_x u(\tau,x) - r\,u(\tau,x) + \\ \qquad + \displaystyle\int_{\mathbb{R}} [u(\tau,x+y) - u(\tau,x)]\nu(\mathrm{d}y) & (\tau,x) \in]0,T] \times \mathbb{R}; \\ u(0,x) = H(e^x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.13}$$

Abbiamo così ottenuto un problema di Cauchy integro-differenziale alle derivate parziali di cui non esiste una soluzione in forma chiusa e che ci accingiamo ad approssimare numericamente utilizzando un metodo di semi-discretizzazione del dominio.

3.2 Differenze finite: il metodo delle linee.

Uno dei metodi senz'altro più efficaci nell'approssimazione numerica di una equazione differenziale alle derivate parziali in una dimensione è incentrato nell'uso delle differenze finite, un metodo semplice e ampiamente usato che consiste nel sostituire alla derivata di una funzione il suo rapporto incrementale come segue:

$$u'(x) \sim \frac{u(x+h) - u(x)}{h}. \tag{3.14}$$

Tralasciando per un momento la parte integrale, scegliamo di discretizzare il dominio dell'equazione 3.13 in tutte le dimensioni tranne una (nel nostro caso lasceremo continua quella temporale), per poi discretizzare le derivate in x usando le differenze finite e ottenere così un problema semi-discreto che andremo a risolvere come un sistema di equazioni differenziali ordinarie nella variabile τ, facilmente risolvibile usando le funzioni built-in del software di calcolo che sceglieremo di utilizzare.
Consideriamo come dominio dell'equazione l'insieme $[0,T]\times[a,b]$ con $a,b \in \mathbb{R}$ e $T > 0$ ed effettuiamo una partizione uniforme dell'intervallo $[a,b]$ prendendo dei punti $(x_i)_{i\in\{0,\dots,n\}}$ $x_i = a + i\,h_n$ con $h_n = \frac{b-a}{n}$ per un certo $n \in \mathbb{N}$.

Discretizziamo le derivate del prim'ordine in x usando lo schema centrale:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\tau, x) \sim \frac{u(\tau, x+h) - u(\tau, x-h)}{2h} \tag{3.15}$$

analogamente per le derivate del second'ordine:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\tau, x) \sim \frac{u(\tau, x+h) - 2u(\tau, x) + u(\tau, x-h)}{h^2} \tag{3.16}$$

scegliamo come x le x_i della discretizzazione spaziale e come incremento h il passo della discretizzazione h_n.

Chiamiamo, per $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ fissato, $u_i(\tau) := u(\tau, x_i)$.

La parte differenziale dell'equazione viene discretizzata come un'equazione differenziale ordinaria nella variabile τ come segue:

$$\frac{\mathrm{d}u_i(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\sigma^2[u_{i+1}(\tau) - 2u_i(\tau) + u_{i-1}(\tau)]}{2h^2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda k\right) \frac{u_{i+1}(\tau) - u_{i-1}(\tau)}{2h} - r\, u_i(\tau) \tag{3.17}$$

Per il dato iniziale valutiamo semplicemente la funzione $H(x) = (e^x - K)^+$ (payoff di un'opzione call europea con strike K) nei punti della discretizzazione di $[a, b]$

$$H(x_i) = (e^{a+i\,h_n} - K)^+ =: H_i. \tag{3.18}$$

Dal momento che effettuiamo una localizzazione del dominio spaziale (vedremo poi secondo quali criteri) fisseremo come dato al bordo una condizione di Dirichlet del tipo:

$$\begin{aligned} u(\tau, a) &= u_0(\tau) = e^{-r\tau}(e^a - K)^+ \qquad \text{valore in } x = a \\ u(\tau, b) &= u_n(\tau) = e^{-r\tau}(e^b - K)^+ \qquad \text{valore in } x = b. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Applicando la semi-discretizzazione del dominio della parte differenziale dell'equazione per $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ si genera un sistema di ODE's del prim'ordine della forma:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u_0(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}e^{-r\tau}(e^a - K)^+ \\ \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}u_i(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = \left(\dfrac{\sigma^2}{2h_n^2} + \dfrac{(r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda k)}{2h_n}\right) u_{i+1}(\tau) - \left(\dfrac{\sigma^2}{h_n^2} + r\right) u_i(\tau) + \\ \qquad + \left(\dfrac{\sigma^2}{2h_n^2} - \dfrac{(r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda k)}{2h_n}\right) u_{i-1}(\tau) \qquad (1 \leq i \leq n-1) \\ \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}u_n(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}e^{-r\tau}(e^b - K)^+ \\ u_i(0) = H_i \qquad (0 \leq i \leq n) \end{cases} \tag{3.20}$$

Risolvendo questo sistema nelle $u_i(\tau)$ otteniamo delle funzioni (graficamente rappresentate come delle linee, da cui il nome del metodo) che interpolate costituiscono una approssimazione della soluzione del problema alle derivate parziali nel dominio $[0, T] \times [a, b]$.

3.3 Approssimazione dell'integrale.

Affrontiamo ora il problema della discretizzazione del termine integrale:

$$\int_{\mathbb{R}} [u(\tau, x + y) - u(\tau, x)]\nu(\mathrm{d}y) \tag{3.21}$$

Rispetto alla misura di Lévy:

$$\nu(\mathrm{d}y) = f(y)\mathrm{d}y = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2}} e^{-\frac{(y-\mu_j)^2}{2\sigma_j^2}} \mathrm{d}y.$$

L'idea consiste nell'usare un metodo di approssimazione numerica (quadratura) nella variabile y della funzione u nei punti $y_i = a + i\, h_n$ della discretizzazione usata per le differenze finite; aggiungendo i termini dati dalla discretizzazione dell'integrale alle equazioni scritte in precedenza otteniamo un sistema di ODE's la cui soluzione approssima la soluzione della PIDE in esame.

Consideriamo innanzitutto l'integrale 3.21 per x_i punto della discretizzazione fissato e lo scomponiamo per additività come segue:

$$\int_{-\infty}^{a}[u(\tau,x_i+y)-u_i(\tau)]\nu(\mathrm{d}y)+\int_{a}^{b}[u(\tau,x_i+y)-u_i(\tau)]\nu(\mathrm{d}y)+\int_{b}^{+\infty}[u(\tau,x_i+y)-u_i(\tau)]\nu(\mathrm{d}y) \tag{3.22}$$

e per il momento ci concentriamo solo sul termine centrale (gli altri due vedremo che possono essere trascurati).
Scegliamo come metodo di quadratura il metodo dei trapezi nei punti della scomposizione dell'intervallo $[a,b]$:

$$\int_a^b f(y)\mathrm{d}y = \sum_{j=0}^{n-1}\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(y)\mathrm{d}y \simeq \frac{h_n}{2}\left(f(y_0)+f(y_n)+2\sum_{j=1}^{n-1}f(y_j)\right) \tag{3.23}$$

Denotiamo con:

$$\begin{aligned} u_{i,j}(\tau) &:= u(\tau,x_i+y_j);\\ u_i(\tau) &:= u(\tau,x_i). \end{aligned} \tag{3.24}$$

e l'approssimazione che otteniamo è :

$$\int_a^b [u(\tau,x_i+y)-u_i(\tau)]f(y)\mathrm{d}y \simeq \frac{h_n}{2}\Bigg\{[u_{i,0}(\tau)-u_i(\tau)]f(y_0)+[u_{i,n}(\tau)-u_i(\tau)]f(y_n)+ \\ +2\sum_{j=1}^{n-1}[u_{i,j}(\tau)-u_i(\tau)]f(y_j)\Bigg\} \tag{3.25}$$

Nell'approssimazione così ottenuta resta solo da chiarire chi siano le funzioni $u_{i,j}(\tau)$. Osserviamo che:

$$a \leq x_i + y_j \leq b \iff a \leq 2a + (i+j)h_n \leq b \iff -\frac{a+ih_n}{h_n} \leq j \leq n - \frac{a+ih_n}{h_n} \tag{3.26}$$

abbiamo quindi, per i fissato, una condizione che l'indice j deve verificare affinché il punto $x_i + y_j$ sia un punto di $[a, b]$.
Si ha inoltre

$$x_i + y_j = a + ih_n + a + jh_n = a + (i + j + \frac{a}{h_n})h_n \tag{3.27}$$

perciò se j soddisfa la condizione 3.26 e $\frac{a}{h_n} \in \mathbb{Z}$ il punto $x_i + y_j$ sarà anch'esso un punto della discretizzazione di $[a, b]$.
Possiamo ovviare a questo problema ad esempio scegliendo n intero positivo pari e $a = -b$, ottenendo così :

$$\frac{a}{h_n} = a\frac{n}{b-a} = -\frac{n}{2} \tag{3.28}$$

per cui il punto $x_{\bar{j}} = a + (i + j - \frac{n}{2})h_n$ é un punto della discretizzazione di $[a, b]$ e $\forall i \in \{0, \ldots, n\}$ fissato vale:

$$u_{i,j}(\tau) = u_{\bar{j}}(\tau) = u_{i+j-\frac{n}{2}}(\tau) \tag{3.29}$$

per tutti i j che verificano la condizione 3.26.
Resta ora da stabilire che valore assegnare alle $u_{i,j}$ per valori di i, j tali che $x_i + y_j \notin [a, b]$. Usiamo una stima secondo cui valgono le approssimazioni:

$$u(\tau, x) \longrightarrow e^{-r\tau}(e^x - K)^+ \qquad \text{per } x \to +\infty$$
$$u(\tau, x) \longrightarrow 0 \qquad \text{per } x \to -\infty \tag{3.30}$$

scegliendo quindi a, b sufficientemente grandi in modulo rispetto ai parametri K, r, T (ad esempio é sufficiente che sia verificata $a < \log(K) - rT$ e

$b = -a$) si approssima:

$$u_{i,j}(\tau) = u(x_i + y_j, \tau) \sim e^{-r\tau}(e^{x_i+y_j} - K)^+ \tag{3.31}$$

Sostituendo nell'equazione 3.25 a $u_{i,j}(\tau)$ le funzioni in 3.29 e in 3.31 a seconda che j rispettivamente verifichi o meno la condizione 3.26 otteniamo un'approssimazione del termine integrale su $[a, b]$ (che al fine di usare queste stime sarà un intervallo sufficientemente ampio), approssimazione che coinvolge le funzioni u nei punti della discretizzazione spaziale e le funzioni in 3.31 che dipendono solo dalla variabile τ.

Dimostriamo la seguente maggiorazione della funzione u, grazie alla quale potremo effettuare importanti semplificazioni nel calcolo della soluzione numerica.

Proposizione 3.3.1. *Se $u(\tau, x)$ è soluzione del problema 3.13 con dato iniziale $u(0, x) = (e^x - K)^+$ allora esiste una costante $C > 0$ (dipendente dai parametri del problema) tale che:*

$$0 \leq u(\tau, x) \leq Ce^x \tag{3.32}$$

Dimostrazione. Per il teorema di rappresentazione di Faynman-Kač applicato al nostro problema col processo Jump-Diffusion otteniamo:

$$u(\tau, x) = \int_{\mathbb{R}} \Gamma(\tau, x - y)\varphi(y)\mathrm{d}y \tag{3.33}$$

dove Γ è la funzione di densità del processo Jump-Diffusion e $\varphi(y)$ è il dato iniziale (a $\tau = 0$) del problema:

$$\Gamma(t, x) = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!\sqrt{2\pi(\sigma^2 t + n\sigma_j^2)}} e^{-\frac{(x-\mu t-n\mu_j)^2}{2(\sigma^2 t+n\sigma_j^2)}} \tag{3.34}$$

$$\varphi(y) = (e^y - K)^+ \tag{3.35}$$

Abbiamo quindi

$$0 \leq u(\tau, x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^n}{n!\sqrt{2\pi(\sigma^2\tau + n\sigma_j^2)}} e^{-\frac{(x-y-\mu\tau-n\mu_j)^2}{2(\sigma^2\tau+n\sigma_j^2)}} (e^y - K)^+ \mathrm{d}y$$

la serie è a termini positivi, perciò per convergenza monotona si ha:

$$u(\tau, x) = e^{-\lambda\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^n}{n!\sqrt{2\pi(\sigma^2\tau + n\sigma_j^2)}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y-\mu\tau-n\mu_j)^2}{2(\sigma^2\tau+n\sigma_j^2)}} (e^y - K)^+ \mathrm{d}y \leq$$

$$\leq e^{-\lambda\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^n}{n!\sqrt{2\pi(\sigma^2\tau + n\sigma_j^2)}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y-\mu\tau-n\mu_j)^2}{2(\sigma^2\tau+n\sigma_j^2)}} e^y \mathrm{d}y \tag{3.36}$$

Consideriamo il termine:

$$-\frac{(x-y-\mu\tau-n\mu_j)^2}{2(\sigma^2\tau+n\sigma_j^2)} + y$$

si ha:

$$-\frac{(x-y-\mu\tau-n\mu_j)^2}{2(\sigma^2\tau+n\sigma_j^2)} + y = -\frac{1}{2(\sigma^2\tau+n\sigma_j^2)}[(x-\mu\tau-n\mu_j)^2 + y^2 -$$

$$-2y(x-\mu\tau-n\mu_j) - 2y(\sigma^2\tau+n\sigma_j^2)] =$$

$$= -\frac{1}{2(\sigma^2\tau+n\sigma_j^2)}[(x-\mu\tau-n\mu_j)^2 + y^2 - 2y(x-\mu\tau-n\mu_j+\sigma^2\tau+n\sigma_j^2)]$$

e completiamo al quadrato:

$$\begin{aligned}
&y^2 - 2y(x-\mu\tau-n\mu_j+\sigma^2\tau+n\sigma_j^2) + (x-\mu\tau-n\mu_j)^2 = \\
&= [y-(x-\mu\tau-n\mu_j+\sigma^2\tau+n\sigma_j^2)]^2 - (x-\mu\tau-n\mu_j+\sigma^2\tau+n\sigma_j^2)^2 + \\
&+ (x-\mu\tau-n\mu_j)^2 = [y-(x-\mu\tau-n\mu_j+\sigma^2\tau+n\sigma_j^2)]^2 - (\sigma^2\tau+n\sigma_j^2)^2 - \\
&- 2(x-\mu\tau-n\mu_j)(\sigma^2\tau+n\sigma_j^2).
\end{aligned}$$

Da cui il termine esponenziale nell'integrale in 3.36 diventa:

$$e^{x-\mu\tau-n\mu_j+\frac{\sigma^2\tau+n\sigma_j^2}{2}} \cdot e^{-\frac{[y-(x-\mu\tau-n\mu_j+\sigma^2\tau+n\sigma_j^2)]^2}{2(\sigma^2\tau+n\sigma_j^2)}}$$

Quindi

$$0 \le u(\tau,x) \le e^{-\lambda\tau}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda\tau)^n}{n!}e^{x-\mu\tau-n\mu_j+\frac{\sigma^2\tau+n\sigma_j^2}{2}}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-\frac{[y-(x-\mu\tau-n\mu_j+\sigma^2\tau+n\sigma_j^2)]^2}{2(\sigma^2\tau+n\sigma_j^2)}}}{\sqrt{2\pi(\sigma^2\tau+n\sigma_j^2)}}\mathrm{d}y \tag{3.37}$$

Osserviamo che il termine nell'integrale 3.37 è la funzione di densità di una gaussiana con attesa $x-\mu\tau-n\mu_j+\sigma^2\tau+n\sigma_j^2$ e scarto $\sqrt{\sigma^2\tau+n\sigma_j^2}$ per cui il suo integrale su $\mathbb{R}$ è uguale a uno.
Si ha quindi:

$$0 \le u(\tau,x) \le e^{-\lambda\tau}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda\tau)^n}{n!}e^{x-\mu\tau-n\mu_j+\frac{\sigma^2\tau+n\sigma_j^2}{2}} = e^{-\lambda\tau}e^{x-\mu\tau+\frac{\sigma^2\tau}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda\tau e^{-\mu_j+\frac{\sigma_j^2}{2}}\right)^n}{n!} =$$

$$= e^{-\lambda\tau}e^{x-\mu\tau+\frac{\sigma^2\tau}{2}}e^{\left(\lambda\tau e^{\frac{\sigma_j^2}{2}-\mu_j}\right)} \le e^x e^{-\lambda\tau-\mu\tau+\frac{\sigma^2\tau}{2}+\lambda\tau e^{\left(\frac{\sigma_j^2}{2}-\mu_j\right)}} \le e^x e^{\frac{\sigma^2 T}{2}+\lambda T e^{\left(\frac{\sigma_j^2}{2}-\mu_j\right)}} =: Ce^x.$$

□

Torniamo ora ad esaminare i termini di integrazione fuori dall'intervallo $[a,b]$ e sfruttando la disuguaglianza 3.32 mostriamo che tendono a 0 molto velocemente al crescere di a e b in modulo.

Proposizione 3.3.2. *Se $u(\tau,x)$ è soluzione del problema 3.13 con dato iniziale $u(0,x)=(e^x-K)^+$ allora:*

$$\int_b^{+\infty}[u(\tau,x_i+y)-u(\tau,x_i)]\nu(\mathrm{d}y) \;\le\; h(b) \tag{3.38}$$

con

$$h(b) \sim C'\frac{e^{-(b-1)^2}}{b} \qquad \textit{per } b \to +\infty \tag{3.39}$$

Dimostrazione. Mostriamo innanzitutto la maggiorazione 3.38, per semplicità scegliamo i valori $\mu_j = 0$ e $\sigma_j = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (per parametri diversi si ottengono gli stessi risultati con la differenza di al più alcune costanti additive o moltiplicative) e otteniamo:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_b^{+\infty}[u(\tau,x_i+y)-u(\tau,x_i)]e^{-y^2}\mathrm{d}y \tag{3.40}$$

effettuiamo le maggiorazioni:

$$\begin{aligned} &u(\tau,x_i+y)\le Ce^{x_i+y}\le Ce^be^y \qquad \text{(per 3.32)}\\ &u_i(\tau)\ge \inf_{[0,T]} u_i(\tau) =: \bar{u}_i \end{aligned} \tag{3.41}$$

da cui l'integrale 3.40 si maggiora con:

$$\begin{aligned} &\frac{Ce^b}{\sqrt{\pi}}\int_b^{+\infty} e^y e^{-y^2}\mathrm{d}y - \frac{\bar{u}_i}{\sqrt{\pi}}\int_b^{+\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y =\\ &= \frac{Ce^b e^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}}\int_b^{+\infty} e^{-\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}\mathrm{d}y - \frac{\bar{u}_i}{\sqrt{\pi}}\int_b^{+\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y =: h(b) \end{aligned} \tag{3.42}$$

Ora usiamo la stima asintotica nota:

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t \sim \frac{e^{-x^2}}{2x} \qquad \text{per } x\to+\infty \tag{3.43}$$

Da cui:

$$\begin{aligned} h(b) &\sim \frac{Ce^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}}\frac{e^b e^{-\left(b-\frac{1}{2}\right)^2}}{2b-1} - \frac{\bar{u}_i}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-b^2}}{2b} = \frac{Ce^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-b^2+2b-\frac{1}{4}}}{2b-1} - \frac{\bar{u}_i}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-b^2}}{2b} \sim\\ &\sim \frac{C}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-b^2+2b}}{2b} - \frac{\bar{u}_i}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-b^2}}{2b} = \frac{e^{-b^2}}{2\sqrt{\pi}b}(Ce^{2b}-\bar{u}_i) \sim \frac{C}{2\sqrt{\pi}}\frac{e^{-b^2+2b}}{b} =\\ &= \frac{eC}{2\sqrt{\pi}}\frac{e^{-(b-1)^2}}{b} = C'\frac{e^{-(b-1)^2}}{b} \qquad \text{per } b\to+\infty. \end{aligned}$$

□

Alla luce di quest'ultima proposizione abbiamo una giustificazione della trascurabilità dell'ultimo termine integrale in 3.22 per valori di b sufficientemente grandi, basta ad esempio prendere come estremo del dominio spaziale $b = 10$ per avere che il termine integrale all'infinito si maggiora con qualcosa del tipo $\frac{1}{10}e^{-81}$ (a meno di una costante) che, nell'ordine delle grandezze del nostro problema, è un valore che può dirsi trascurabile.
Un discorso del tutto analogo si può fare per mostrare la trascurabilità dell'integrale a meno-infinito considerando ad esempio $a = -b$ e osservando che $\displaystyle\int_{-\infty}^{-x} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \int_{x}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ per la simmetria a 0 della funzione integranda ottenendo una stima del tipo:

$$\int_{-\infty}^{a} [u(\tau, x_i + y) - u(\tau, x_i)]\nu(\mathrm{d}y) \;\leq\; g(a) \sim C' \frac{e^{-(a-1)^2}}{-a} \qquad \text{per } a \to -\infty \tag{3.44}$$

il che ci consente, per ragioni del tutto analoghe a quelle precedenti, di trascurare anche il primo termine dell'integrale in 3.22.

3.4 Implementazione per il processo Jump-Diffusion.

Terminata l'operazione di discretizzazione, il problema da risolvere diventa relativamente semplice e può essere scritto nella forma:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}u_0(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} e^{-r\tau}(e^a - K)^+ \\
\vdots \\
\dfrac{\mathrm{d}u_i(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = \left(\dfrac{\sigma^2}{2h_n^2} + \dfrac{(r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda k)}{2h_n}\right) u_{i+1}(\tau) - \left(\dfrac{\sigma^2}{h_n^2} + r\right) u_i(\tau) + \\
\qquad + \left(\dfrac{\sigma^2}{2h_n^2} - \dfrac{(r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda k)}{2h_n}\right) u_{i-1}(\tau) + \dfrac{h_n}{2}\Bigg\{ [u_{i,0}(\tau) - u_i(\tau)] f(y_0) + \\
\qquad + [u_{i,n}(\tau) - u_i(\tau)] f(y_n) + 2\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} [u_{i,j}(\tau) - u_i(\tau)] f(y_j) \Bigg\} \qquad (1 \leq i \leq n-1) \\
\vdots \\
\dfrac{\mathrm{d}u_n(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} e^{-r\tau}(e^b - K)^+ \\
u_i(0) = H_i \qquad (0 \leq i \leq n)
\end{cases}
\tag{3.45}
$$

Dove alla luce di quanto visto in precedenza se

$$A_i := \{j \in \{0, \dots n\},\ j \text{ verifica la condizione } 3.26\}$$

poniamo:

$$u_{i,j}(\tau) = u_{\bar{j}}(\tau)\mathbb{1}_{A_i}(j) + e^{-r\tau}(e^{x_i + y_j} - K)^+(1 - \mathbb{1}_{A_i}(j)) \tag{3.46}$$

Con $\mathbb{1}_{A_i}$ la funzione indicatrice su A_i.

Quello che ci accingiamo a risolvere è quindi un Problema di Cauchy in

$\mathbb{R}^n$ del prim'ordine.

Implementiamo il metodo in ambiente *Mathematica* (si veda il codice in appendice) con i seguenti valori dei parametri:

$$
\begin{aligned}
&\sigma = 0.5; \\
&r = 0.05; \\
&\lambda = 0.7; && \text{(intensità dei salti)} \\
&\mu_j = 0.4; && \text{(ampiezza media dei salti)} \\
&\sigma_j = 0.2; && \text{(volatilià dei salti)} \\
&S_0 = 1; \\
&b = -a = 6. && \text{(parametro di troncamento)}
\end{aligned}
\tag{3.47}
$$

Tabella 3.1: Prezzo approssimato di una Call europea con parametri dati in 3.47.

T	K	n=100	n=200	n=300	n=400	n=500	V. Ex.
	0.25	0.752879	0.753049	0.75308	0.753091	0.753096	0.753106
0.25	0.5	0.506517	0.506538	0.506536	0.506534	0.506536	0.506538
	0.75	0.279514	0.279147	0.279137	0.279177	0.279115	0.279152
	1	0.128015	0.130393	0.130815	0.130962	0.131029	0.131149
	0.5	0.546138	0.546751	0.546838	0.54686	0.546882	0.546918
1	1	0.272153	0.273904	0.274226	0.274339	0.274391	0.274484
	1.5	0.14843	0.149375	0.149554	0.149672	0.149676	0.14975
	2	0.088045	0.0890027	0.0891311	0.0891595	0.0891943	0.0892516
	0.5	0.727595	0.731137	0.73178	0.732001	0.732109	0.732473
5	3	0.348372	0.351963	0.352608	0.352826	0.352924	0.353284
	5	0.24941	0.252404	0.252997	0.253205	0.253285	0.253634
	10	0.143484	0.145934	0.146368	0.146513	0.146577	0.146886
	0.5	0.829252	0.835688	0.836876	0.83729	0.837484	0.848055
10	5	0.511217	0.517269	0.518417	0.518819	0.518995	0.529555
	7	0.455567	0.46153	0.462617	0.462991	0.463169	0.473718
	10	0.397368	0.403066	0.404106	0.404465	0.404628	0.415164

I tempi computazionali del metodo sono dati da:

Tabella 3.2: Tempi computazionali per i valori in Tabella 3.1

T	K	n=100	n=200	n=300	n=400	n=500
0.25	0.25	2.262	9.329	20.514	38.611	67.954
	0.5	2.995	9.126	20.857	37.924	68.703
	0.75	2.964	9.282	20.998	37.955	68.968
	1	3.338	10.608	24.274	44.819	71.527
1	0.5	3.12	9.781	25.381	46.067	72.915
	1	3.385	11.451	29.11	55.598	84.147
	1.5	3.198	9.938	26.067	46.426	72.556
	2	3.432	11.264	29.671	50.825	84.49
5	0.5	3.417	11.591	26.629	48.267	72.993
	3	3.634	13.572	32.854	53.602	85.395
	5	3.807	13.899	30.592	59.249	86.425
	10	3.791	14.321	31.621	56.176	86.736
10	0.5	3.916	12.231	27.378	48.781	72.556
	5	4.244	14.258	31.044	56.597	87.751
	7	4.399	14.071	31.996	57.892	85.411
	10	4.368	14.337	31.528	56.644	87.376

Consideriamo ora come parametri del modello:

$$\begin{aligned}
&\sigma = 0.5; \\
&r = 0.05; \\
&\lambda = 1.2; \qquad \text{(intensità dei salti)} \\
&\mu_j = -0.6; \qquad \text{(ampiezza media dei salti)} \\
&\sigma_j = 0.8; \qquad \text{(volatilià dei salti)} \\
&S_0 = 1; \\
&b = -a = 10. \qquad \text{(parametro di troncamento)}
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Riportiamo nella seguente tabella i valori che si ottengono:

Tabella 3.3: Prezzo approssimato di una Call europea (parametri in 3.48).

T	K	n=100	n=200	n=300	n=400	n=500	V. Ex.
	0.25	0.758285	0.757968	0.757908	0.757886	0.757876	0.757856
0.25	0.5	0.533168	0.532651	0.532621	0.532582	0.532576	0.532553
	0.75	0.327201	0.326333	0.326422	0.326385	0.32636	0.326355
	1	0.16075	0.165916	0.166716	0.166988	0.167113	0.167333
	0.5	0.619352	0.617678	0.61751	0.617391	0.617363	0.617283
1	1	0.376884	0.376684	0.376642	0.376628	0.376621	0.376608
	1.5	0.237215	0.236613	0.236483	0.23643	0.236402	0.236328
	2	0.161684	0.158186	0.158079	0.157811	0.157791	0.157641
	0.5	0.852687	0.845463	0.844189	0.84372	0.843514	0.843152
5	3	0.595389	0.587819	0.586642	0.586123	0.585946	0.585572
	5	0.501303	0.494544	0.493288	0.492844	0.492637	0.492274
	10	0.375518	0.368205	0.367129	0.366623	0.366462	0.366105
	0.5	0.953881	0.940084	0.93757	0.936684	0.936278	0.939391
10	5	0.806609	0.793084	0.790597	0.789726	0.789323	0.792441
	7	0.773794	0.760176	0.757645	0.756766	0.756375	0.759494
	10	0.735734	0.722014	0.719612	0.718717	0.718334	0.721456

In entrambi i casi osserviamo come il metodo restituisca dei risultati molto vicini al valore esatto nei casi di opzioni a scadenza non troppo lunga, risulta evidente infatti dalle ultime quattro righe di entrambe le tabelle (quelle corrispondenti a $T = 10$) come il metodo inizi a perdere accuratezza proprio in presenza di valori grandi per T. Per ovviare a questo problema nel primo caso sarebbe sufficiente aumentare il passo di discretizzazione del metodo, mentre nel secondo caso una scelta più accurata del parametro di troncamento avrebbe potuto portare risultati migliori.

3.5 Un metodo più accurato.

Un'ulteriore strada che sembrerebbe più accurata e in un certo senso più intuitiva per la discretizzazione dell'integrale può essere quella di considerare una traslazione del tipo: $x_i + y = s$ per cui:

$$\int_{\mathbb{R}} u[(\tau, x_i + y) - u(\tau, x_i)]f(y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} u[(\tau, s) - u(\tau, x_i)]f(s - x_i)\mathrm{d}s \quad (3.49)$$

Così facendo la funzione integranda sarà data dal termine nelle u (i cui argomenti su $[a, b]$ sono i punti della discretizzazione) e dalla funzione f, densità di una $\mathcal{N}_{\mu_j,\sigma_j}$, nota su tutto il dominio.
L'approssimazione sarà effettuata col metodo di quadratura (dei trapezi nel nostro caso) per valori di s all'interno dell'intervallo $[a, b]$, mentre stimeremo i valori fuori da tale intervallo utilizzando le approssimazioni in 3.30:

$$\int_{-\infty}^{a} u[(\tau, s) - u(\tau, x_i)]f(s - x_i)\mathrm{d}s \sim -\int_{-\infty}^{a} u(\tau, x_i)f(s - x_i)\mathrm{d}s = -\lambda u_i(\tau)F(a - x_i) \quad (3.50)$$

dove F è la funzione di ripartizione di una normale $\mathcal{N}_{\mu_j,\sigma_j}$ (già implementata nel software di calcolo), mentre:

$$\int_b^{+\infty} u[(\tau,s)-u(\tau,x_i)]f(s-x_i)\mathrm{d}s \sim \int_b^{+\infty}[e^{s-r\tau}-Ke^{-r\tau}-u_i(\tau)]f(s-x_i)\mathrm{d}s =$$

$$= e^{-r\tau}\int_b^{+\infty} e^s f(s-x_i)\mathrm{d}s - Ke^{-r\tau}\int_b^{+\infty} f(s-x_i)\mathrm{d}s - u_i(\tau)\int_b^{+\infty} f(s-x_i)\mathrm{d}s =$$

$$= \frac{\lambda e^{-r\tau}}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2}}\int_b^{+\infty} e^{-\left[\frac{(s-x_i-\mu_j)^2}{2\sigma_j^2}-s\right]}\mathrm{d}s - \lambda Ke^{-r\tau}[1-F(b-x_i)]-$$

$$-\lambda u_i(\tau)[1-F(b-x_i)] = \frac{\lambda e^{x_i+\mu_j+\frac{\sigma_j^2}{2}-r\tau}}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2}}\int_b^{+\infty} e^{-\frac{[s-(x_i+\mu_j+\sigma_j^2)]^2}{2\sigma_j^2}}\mathrm{d}s-$$

$$-\lambda Ke^{-r\tau}[1-F(b-x_i)] - \lambda u_i(\tau)[1-F(b-x_i)] =$$

$$= \lambda(e^{x_i+\mu_j+\frac{\sigma_j^2}{2}-r\tau}[1-\Phi(b-x_i)] - Ke^{-r\tau}[1-F(b-x_i)] - u_i(\tau)[1-F(b-x_i)]) \tag{3.51}$$

Dove Φ è la funzione di ripartizione di una normale $\mathcal{N}_{\mu_j+\sigma_j^2,\sigma_j}$.
Se poniamo

$$\epsilon(\tau,x_i,b) := \lambda(e^{x_i+\mu_j+\frac{\sigma_j^2}{2}-r\tau}[1-\Phi(b-x_i)] - Ke^{-r\tau}[1-F(b-x_i)]);$$

$$E(x_i,a,b) := \lambda([1-F(b-x_i)+F(a-x_i)]).$$

La discretizzazione dell'integrale diventa quindi:

$$\int_{\mathbb{R}} u[(\tau,s)-u(\tau,x_i)]f(s-x_i)\mathrm{d}s \simeq \frac{h_n}{2}\Bigg[[u_0(\tau)-u_i(\tau)]f(x_0-x_i)+$$

$$+[u_n(\tau)-u_i(\tau)]f(x_n-x_i) + 2\sum_{j=1}^{n-1}[u_j(\tau)-u_i(\tau)]f(x_j-x_i)\Bigg]+$$

$$+\,\epsilon(\tau,x_i,b) - u_i(\tau)E(x_i,a,b)$$

Aggiungendo questo termine alla discretizzazione della parte differenziale dell'equazione e risolvendo il sistema con la funzione `NDSolve` di *Mathematica* otteniamo risultati del tutto analoghi a quelli ottenuti col metodo precedente (praticamente identici per valori di T non troppo grandi), a fronte di un costo computazionale molto più elevato a causa della presenza delle funzioni di ripartizione.

Tabella 3.4: Prezzo approssimato di una Call europea con parametri dati in 3.47.

T	K	n=100	n=200	n=300	n=400	n=500	V. Ex.
	0.25	0.752879	0.753049	0.75308	0.753091	0.753096	0.753106
0.25	0.5	0.506517	0.506538	0.506536	0.506534	0.506536	0.506538
	0.75	0.279514	0.279147	0.279137	0.279177	0.279115	0.279152
	1	0.128015	0.130393	0.130815	0.130962	0.131029	0.131149
	0.5	0.546138	0.546751	0.546838	0.54686	0.546882	0.546918
1	1	0.272153	0.273904	0.274226	0.274339	0.274391	0.274484
	1.5	0.14843	0.149375	0.149554	0.149672	0.149676	0.14975
	2	0.088045	0.0890027	0.0891311	0.0891595	0.0891943	0.0892516
	0.5	0.727587	0.731135	0.73178	0.732001	0.732109	0.732473
5	3	0.348364	0.351961	0.352607	0.352826	0.352924	0.353284
	5	0.249402	0.252402	0.252996	0.253205	0.253285	0.253634
	10	0.143476	0.145932	0.146367	0.146513	0.146577	0.146886
	0.5	0.82915	0.835662	0.836864	0.837283	0.83748	0.848055
10	5	0.511115	0.517243	0.518406	0.518813	0.518991	0.529555
	7	0.455465	0.461504	0.462605	0.462984	0.463165	0.473718
	10	0.397266	0.40304	0.404095	0.404458	0.404624	0.415164

I tempi computazionali del metodo sono dati da:

Tabella 3.5: Tempi computazionali per i valori in Tabella 3.1

T	K	n=100	n=200	n=300	n=400	n=500
0.25	0.25	4.618	25.724	66.956	178.668	426.818
	0.5	4.415	21.435	76.284	181.429	451.077
	0.75	4.322	24.086	77.767	179.775	582.913
	1	4.79	25.989	76.753	187.669	406.586
1	0.5	6.661	47.533	211.163	631.368	1206.62
	1	7.255	52.291	207.247	686.03	1186.11
	1.5	6.849	51.698	235.234	691.709	1183.75
	2	7.27	52.01	198.106	652.225	1210.75
5	0.5	15.164	110.402	326.619	773.812	1578.78
	3	16.068	141.961	473.993	934.477	1805.15
	5	16.614	162.663	350.955	937.394	1811.95
	10	17.207	187.373	444.119	972.042	1886.21
10	0.5	31.388	143.723	382.889	997.564	1815.31
	5	34.289	180.197	416.164	1091.51	1964.55
	7	38.252	186.421	451.576	1149.54	2113.22
	10	40.482	195.501	463.323	1136.83	2304.98

L'elevato costo computazionale, a parità di accuratezza dei risultati, ci porta a preferire il metodo precedente; ad ogni modo per l'approssimazione nel caso del processo Variance-Gamma questa strategia non può comunque essere attuata con semplicità a causa della presenza di una singolarità nel nucleo dell'integrale.

Capitolo 4

Soluzione Numerica - Variance-Gamma.

In questo capitolo prendiamo in esame, in un modello di mercato esattamente uguale al caso del Jump-Diffusion, un sottostante il cui logaritmo del prezzo abbia una dinamica retta da un processo stocastico detto Variance-Gamma; questo processo si ottiene dal moto Browniano classico supponendo che il tempo vari come un processo Gamma, ciò che si ottiene è un processo puramente discontinuo che rientra nella categoria dei processi ad attività infinita (avente cioè misura di Lévy non finita). Il caso che prenderemo in esame sarà il caso generale asimmetrico e vedremo come elaborare una strategia che consenta di trattare numericamente il problema nonostante la non integrabilità in 0 della misura di questo processo.

4.1 Il processo Variance-Gamma.

Dati due processi stocastici indipendenti Y_t e S_t è possibile costruire un terzo processo stocastico a partire da questi due mediante un'operazione detta "subordinazione", si considera cioè uno dei due processi (detto "orologio stocastico") come variabile temporale dell'altro processo.

Definizione 4.1. Un processo di Lévy 1-dimensionale $(S_t)_{t\geq 0}$ è detto un subordinatore se è quasi-certamente crescente, cioè :

$$t_1 \leq t_2 \Longrightarrow S_{t_1} \leq S_{t_2} \quad \text{quasi-certamente} \tag{4.1}$$

Si può verificare che un processo S è un subordinatore se e solo se la sua terna caratteristica è del tipo $(b, 0, \rho)$ con:

$$b \geq 0 \qquad \rho(\mathbb{R}^-) = 0 \qquad \int_0^1 x\rho(\mathrm{d}x) < +\infty. \tag{4.2}$$

Se (μ_1, C, ν) e $(b, 0, \rho)$ sono le terne caratteristiche di Y e del subordinatore S rispettivamente e Y ha densità f_{Y_t} allora il processo ottenuto mediante subordinazione $X_t := (Y_{S_t})_{t\geq 0}$ è ancora un processo di Lévy e la sua terna caratteristica è data da

$$\begin{aligned}
&\mu_1^X = b\mu_1 + \int_0^{+\infty} \int_{|x|\leq 1} x f_{Y_t}(\mathrm{d}x)\mathrm{d}t; \\
&C^X = bC; \\
&\nu^X = b\nu(H) + \int_0^{+\infty} f_{Y_t}(H)\rho(\mathrm{d}t), \quad H \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d).
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Esistono molti tipi di processi che si possono costruire attraverso i subordinatori, in questa trattazione utilizzeremo un tipo particolare di subordinatore, definito come segue:

Definizione 4.2. Un processo di Lévy con terna $(0, 0, \rho)$ dove:

$$\rho(\mathrm{d}x) = \frac{m^2 e^{-\frac{mx}{v}}}{vx} \mathbb{1}_{\{x>0\}} \mathrm{d}x, \tag{4.4}$$

con $m \in \mathbb{R}$ e $v > 0$ è detto Gamma-subordinatore.

Definiamo quindi il processo che prendiamo in esame:

Definizione 4.3. Il processo V_t ottenuto subordinando un Gamma-subordinatore

S_t (di parametri $m = 1, v > 0$) a un moto Browniano con parametri μ e σ:

$$V_t = \mu S_t + \sigma W_{S_t} \tag{4.5}$$

è detto processo Variance-Gamma e il suo esponente caratteristico è :

$$\psi_V(\xi) = -\frac{1}{v} \log \left(1 - iv\mu\xi + \frac{v\xi^2\sigma^2}{2} \right). \tag{4.6}$$

Una delle prerogative principali di questo processo sta nella sua appartenenza ad una classe di processi detti "temperati stabili" che definiamo brevemente qui di seguito procedendo per gradi.

Definizione 4.4. Una variabile aleatoria X in $\mathbb{R}^d$ si dice stabile se per ogni $n \geq 2$ esistono $c_n > 0$ e $d_n \in \mathbb{R}^d$ tali che:

$$X_1 + \ldots + X_n \stackrel{d}{=} c_n X + d_n \tag{4.7}$$

con $X_1, \ldots X_n$ copie i.i.d. di X.

Osserviamo come la proprietà di stabilità di una variabile aleatoria equivalga a dire che la sua funzione caratteristica φ_X possa essere scritta come:

$$(\varphi_X(\xi))^n = e^{i\xi \cdot d_n} \varphi_X(c_n \xi) \tag{4.8}$$

Si può mostrare che per ogni variabile aleatoria stabile esiste una costante $\alpha \in]0, 2]$ tale che $c_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$, individueremo perciò un processo di Lévy stabile attraverso l'esponente α e lo si dirà processo α-stabile.

Proposizione 4.1.1. *Sia X un processo di Lévy con terna caratteristica (μ_1, C, ν) e sia $\alpha \in]0, 2]$, allora X è α-stabile se e solo se*

$$C = 0 \quad e \quad \nu(H) = r^{-\alpha} \nu(r^{-1} H) \qquad \forall H \in \mathscr{B},\ r > 0. \tag{4.9}$$

Se il processo è 1-dimensionale è possibile avere una rappresentazione esplicita della misura di Lévy per un processo α-stabile:

$$\nu(\mathrm{d}x) = \frac{C_1}{x^{1+\alpha}}\mathbb{1}_{\{x>0\}}\mathrm{d}x + \frac{C_2}{|x|^{1+\alpha}}\mathbb{1}_{\{x<0\}}\mathrm{d}x \tag{4.10}$$

con C_1, C_2 costanti non-negative.
Definiamo ora una nuova classe di processi a partire da quella dei processi stabili 1-dimensionali "temperando" esponenzialmente l'andamento delle code della misura di Lévy espressa in 4.10.

Definizione 4.5. Un processo stabile temperato è un processo di Lévy X avente terna caratteristica $(\mu_1, 0, \nu)$ con

$$\nu(\mathrm{d}x) = C_1\frac{e^{-\lambda_1 x}}{x^{1+\alpha_1}}\mathbb{1}_{\{x>0\}}\mathrm{d}x + C_2\frac{e^{-\lambda_2|x|}}{|x|^{1+\alpha_2}}\mathbb{1}_{\{x<0\}}\mathrm{d}x \tag{4.11}$$

dove $C_1, C_2 \geq 0$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 2[$.

Considerando il caso particolare con parametri $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ e $C_1 = C_2 = C$ e $\mu_1 = C(\frac{e^{-\lambda_2}}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_2} - \frac{e^{-\lambda_1}}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_1})$ (cioè $\mu_0 = 0$) otteniamo un processo stocastico temperato stabile V che per il teorema di rappresentazione di Lévy-Khintchine avrà esponente caratteristico:

$$\psi_V(\xi) = -C\log\left[\left(1 - \frac{i\xi}{\lambda_1}\right)\left(1 + \frac{i\xi}{\lambda_2}\right)\right] \tag{4.12}$$

considerando:

$$C = \frac{1}{v}; \quad \lambda_1 = \left(\sqrt{\frac{\mu^2 v^2}{4} + \frac{\sigma^2 v}{2}} + \frac{\mu v}{2}\right)^{-1}; \quad \lambda_2 = \left(\sqrt{\frac{\mu^2 v^2}{4} + \frac{\sigma^2 v}{2}} - \frac{\mu v}{2}\right)^{-1}; \tag{4.13}$$

si verifica facilmente che l'esponente caratteristico in 4.12 diventa uguale a quello in 4.6, abbiamo quindi che il processo Variance-Gamma rientra nella categoria dei processi stabili temperati con 0-terna $(0, 0, \nu)$ dove:

$$\nu(\mathrm{d}x) = \frac{1}{v}\frac{e^{-\lambda_1 x}}{x}\mathbb{1}_{\{x>0\}}\mathrm{d}x + \frac{1}{v}\frac{e^{-\lambda_2 |x|}}{|x|}\mathbb{1}_{\{x<0\}}\mathrm{d}x. \tag{4.14}$$

Per il processo Variance-Gamma esiste un'espressione esplicità della funzione di densità :

$$f_{V_t}(x) = \frac{C_0}{\Gamma(\frac{t}{v})}|x|^{\frac{t}{v}-\frac{1}{2}}e^{\frac{(\lambda_1+\lambda_2)x}{2}}\mathbf{K}_{\frac{t}{v}-\frac{1}{2}}\left(\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}|x|\right) \tag{4.15}$$

dove Γ è la funzione Gamma di Eulero, $\mathbf{K}$ la funzione di Bessel modificata del secondo tipo e:

$$C_0 = \sqrt{\frac{\sigma^2 v}{2\pi}}(\mu^2 v + 2\sigma^2)^{\frac{1}{4}-\frac{\mu}{2v}} \tag{4.16}$$

4.2 Modello del prezzo per il VG.

Consideriamo un processo 1-dimensionale su $(\Omega, \mathscr{S}, P, (\mathscr{F}_t))$ costituito da un termine diffusivo con drift e un termine di salto di tipo Variance-Gamma:

$$X_t = \mu t + \sigma W_t + V_t = \mu t + \sigma W_t + \mu_V G_t + \sigma_V W_{G_t}; \tag{4.17}$$

con G_t Gamma-subordinatore di parametri 1 e $v > 0$.
Il processo in 4.17 sarà caratterizzato dalla terna (μ, σ^2, ν) con:

$$\nu(\mathrm{d}x) = \frac{1}{v}\frac{e^{-\lambda_1 x}}{x}\mathbb{1}_{\{x>0\}}\mathrm{d}x + \frac{1}{v}\frac{e^{-\lambda_2 |x|}}{|x|}\mathbb{1}_{\{x<0\}}\mathrm{d}x; \tag{4.18}$$

ove:

$$\lambda_1 = \left(\sqrt{\frac{\mu_V^2 v^2}{4} + \frac{\sigma_V^2 v}{2}} + \frac{\mu_V v}{2}\right)^{-1}; \qquad \lambda_2 = \left(\sqrt{\frac{\mu_V^2 v^2}{4} + \frac{\sigma_V^2 v}{2}} - \frac{\mu_V v}{2}\right)^{-1}. \tag{4.19}$$

Come nel caso del modello di Merton, assumiamo nel modello VG che il logaritmo del prezzo di un sottostante segua la dinamica $(X_t)_{t\in[0,T]}$; ci pre-

figgiamo lo scopo di ricavare il problema di Cauchy integro-differenziale alle derivate parziali per il calcolo del prezzo di un'opzione Call europea su tale sottostante S_t con strike $K > 0$ (payoff $H(S_T) = (S_T - K)^+$).
Dal momento che sono soddisfatte le condizioni di integrabilità

$$\int_{|x|\leq 1} |x|\nu(\mathrm{d}x) < +\infty; \qquad \int_{|x|\geq 1} |x|\nu(\mathrm{d}x) < +\infty \tag{4.20}$$

esplicitiamo i termini delle terne caratteristiche (0 e ∞) del processo X rispetto ad una misura martingala equivalente Q imponendo la condizione 2.6.
Posto $k = \frac{1}{v} \log\left[\left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right)\left(1 + \frac{1}{\lambda_2}\right)\right]$ ricaviamo i termini di drift:

$$\begin{aligned} &(\mu_0^Q, \sigma^2, \nu) \quad \text{con } \mu_0^Q = r - \frac{\sigma^2}{2} + k \quad (0 - \text{terna}); \\ &(\mu_\infty^Q, \sigma^2, \nu) \quad \text{con } \mu_\infty^Q = r - \frac{\sigma^2}{2} + k + \frac{1}{v}\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) \quad (\infty - \text{terna}). \end{aligned} \tag{4.21}$$

Fissate queste premesse il procedimento di derivazione del problema di Cauchy è esattamente analogo a quello del modello di Merton per il Jump-Diffusion (cfr. sezione 3.1), effettuando gli stessi passaggi sul processo con terna (μ_0^Q, σ^2, ν) otteniamo il problema integro-differenziale in (τ, x):

$$\begin{cases} \partial_\tau u(\tau,x) = \dfrac{\sigma^2}{2}\partial_{xx} u(\tau,x) + \left(r - \dfrac{\sigma^2}{2} + k\right)\partial_x u(\tau,x) - r\,u(\tau,x) + \\ \qquad + \displaystyle\int_{\mathbb{R}} [u(\tau,x+y) - u(\tau,x)]\nu(\mathrm{d}y) \qquad (\tau,x) \in]0,T] \times \mathbb{R}; \\ \\ u(0,x) = h(x) = H(e^x) \qquad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4.22}$$

Una volta formulato il problema verrà discretizzato come nel caso del Jump-Diffusion, bisognerà tuttavia prestare una particolare attenzione all'approssimazione dell'integrale vista la singolarità della misura ν presente in $y = 0$, proprio a causa di questa singolarità infatti la strategia applicata nel caso del modello di Merton andrà adeguatamente modificata.

4.3 Discretizzazione dell'equazione.

Come nel caso del modello di Merton, conduciamo il procedimento di discretizzazione del problema in 4.22 separando la parte differenziale da quella integrale.
Per quanto riguarda il termine differenziale il procedimento è del tutto identico a quello attuato nella sezione 3.2:

- lasciamo continua la variabile $\tau \in [0, T]$;
- tronchiamo il dominio spaziale in un intervallo $[a, b]$ simmetrico rispetto a 0;
- discretizziamo il dominio spaziale troncato $[a, b]$ uniformemente nei punti $x_i = a + ih_n$ con $h_n = \frac{b-a}{n}$ e $0 \leq i \leq n$ per un certo $n \in \mathbb{N}$;
- applichiamo le differenze finite discretizzando le derivate spaziali.

Posto $u_i(\tau) = u(\tau, x_i)$ l'equazione discretizzata che si ottiene per $0 < i < n$ fissato è :

$$\frac{\mathrm{d}u_i(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\sigma^2[u_{i+1}(\tau) - 2u_i(\tau) + u_{i-1}(\tau)]}{2h^2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} + k\right) \frac{u_{i+1}(\tau) - u_{i-1}(\tau)}{2h} - r\, u_i(\tau). \tag{4.23}$$

Prendiamo ora in considerazione il termine integrale, che costituisce la sostanziale particolarità del modello:

$$\int_{\mathbb{R}} [u(\tau, x_i + y) - u(\tau, x_i)]\nu(\mathrm{d}y) \tag{4.24}$$

dove ricordiamo la misura di Lévy ν è data da:

$$\nu(\mathrm{d}y) = \frac{1}{v}\frac{e^{-\lambda_1 y}}{y}\mathbb{1}_{\{y>0\}}\mathrm{d}y + \frac{1}{v}\frac{e^{-\lambda_2 |y|}}{|y|}\mathbb{1}_{\{y<0\}}\mathrm{d}y; \tag{4.25}$$

con λ_1, λ_2 dipendenti esplicitamente dai parametri del modello.
La quadratura numerica dell'integrale deve essere condotta facendo in modo

di eliminare la singolarità in 0; consideriamo perciò la parte di integrale in $[a, b]$ e lo suddividiamo come segue:

$$\int_a^b [u(\tau, x_i + y) - u(\tau, x_i)]\nu(\mathrm{d}y) = \int_a^{-y_l} [u(\tau, x_i + y) - u(\tau, x_i)]\nu(\mathrm{d}y) + \\ + \int_{-y_l}^{y_l} [u(\tau, x_i + y) - u(\tau, x_i)]\nu(\mathrm{d}y) + \int_{y_l}^{b} [u(\tau, x_i + y) - u(\tau, x_i)]\nu(\mathrm{d}y) \tag{4.26}$$

dove $y_l = \min_{0 \leq j \leq n,\, y_j \geq 0} \{y_j, \text{ tale che } y_j > \varepsilon\}$ con $\varepsilon > 0$ parametro di tolleranza fissato, cioè scegliamo l in modo che sia il più piccolo tra gli indici dei punti della discretizzazione a destra dello 0 che non sono contenuti nell'intervallo $[-\varepsilon, \varepsilon]$ (per ε sufficientemente piccolo avremo che $[-y_l, y_l]$ contiene tutti i punti della discretizzazione "vicini" a 0).
Osserviamo che:

$$-y_l = -a - lh_n = a + [-2a - lh_n] = a + \left[-\frac{2a}{h_n} - l\right] h_n. \tag{4.27}$$

Se assumiamo che $b = -a$ allora:

$$-y_l = y_{n-l} \tag{4.28}$$

L'idea consiste nell'approssimare con un metodo di quadratura dei trapezi il primo e il terzo termine nell'integrale 4.26 (che non contengono lo 0). Consideriamo la funzione definita su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$f(y) = \frac{1}{v}\frac{e^{-\lambda_1 y}}{y}\mathbb{1}_{\{y>0\}} + \frac{1}{v}\frac{e^{-\lambda_2 |y|}}{|y|}\mathbb{1}_{\{y<0\}}, \tag{4.29}$$

e otteniamo:

$$\int_a^{y_{l-n}} [u(\tau,x_i+y)-u(\tau,x_i)]\nu(\mathrm{d}y)+\int_{y_l}^{b} [u(\tau,x_i+y)-u(\tau,x_i)]\nu(\mathrm{d}y)\simeq$$

$$\simeq \frac{h_n}{2}\Bigg[[u_{i,0}(\tau)-u_i(\tau)]f(y_0)+[u_{i,n-l}(\tau)-u_i(\tau)]f(y_{n-l})+[u_{i,l}(\tau)-u_i(\tau)]f(y_l)+$$

$$+[u_{i,n}(\tau)-u_i(\tau)]f(y_n)+2\left(\sum_{j=1}^{n-l-1}[u_{i,j}(\tau)-u_i(\tau)]f(y_j)+\sum_{j=l+1}^{n-1}[u_{i,j}(\tau)-u_i(\tau)]f(y_j)\right)\Bigg] \tag{4.30}$$

Ove se:

$$A_i := \{j \in \{0,\dots n\},\ j \text{ verifica la condizione 3.26}\}$$

poniamo:

$$u_{i,j}(\tau)=u_{\bar{j}}(\tau)\mathbb{1}_{A_i}(j)+e^{-r\tau}(e^{x_i+y_j}-K)^+(1-\mathbb{1}_{A_i}(j)) \tag{4.31}$$

con $u_{\bar{j}}(\tau)=u_{i+j-\frac{n}{2}}(\tau)$. Abbiamo quindi approssimato l'integrale per valori che "distano" da 0 più di ε.

Per trattare i valori di $y\in[-y_l,y_l]$ useremo lo sviluppo di Taylor del prim'ordine; ovvero per y piccolo in modulo:

$$u(\tau,x_i+y)-u(\tau,x_i)\sim y\partial_x u(\tau,x)|_{x_i} \tag{4.32}$$

e usando le differenze finite:

$$\partial_x u(\tau,x)|_{x_i}\sim \frac{u_{i+1}(\tau)-u_{i-1}(\tau)}{2h_n} \tag{4.33}$$

scriviamo:

$$\int_{-y_l}^{y_l} [u(\tau, x_i + y) - u(\tau, x_i)]\nu(\mathrm{d}y) \simeq$$

$$\simeq \frac{u_{i+1}(\tau) - u_{i-1}(\tau)}{2vh_n} \left(\int_{y_{n-l}}^{0} y \frac{e^{-\lambda_2 |y|}}{|y|} \mathrm{d}y + \int_{0}^{y_l} y \frac{e^{-\lambda_1 y}}{y} \mathrm{d}y \right) = \tag{4.34}$$

$$= \frac{u_{i+1}(\tau) - u_{i-1}(\tau)}{2vh_n} \left(\frac{e^{\lambda_2 y_{n-l}} - 1}{\lambda_2} + \frac{1 - e^{-\lambda_1 y_l}}{\lambda_1} \right)$$

Aggiungendo ai termini in 4.30 quelli appena trovati in 4.34 otteniamo un'approssimazione dell'integrale su $[a, b]$, a sua volta da aggiungere allo schema già trovato applicando le differenze finite al termine differenziale in 4.23.

Per risolvere numericamente il problema di Cauchy integro-differenziale abbiamo innanzitutto troncato il dominio spaziale in un intervallo $[a, b]$ che ci porta quindi a formulare un problema di Cauchy-Dirichlet con delle condizioni al bordo:

$$\begin{aligned} u(\tau, a) &= u_0(\tau) = e^{-r\tau}(e^a - K)^+; \\ u(\tau, b) &= u_n(\tau) = e^{-r\tau}(e^b - K)^+; \end{aligned} \tag{4.35}$$

e a fare un'estensione della funzione per valori di $x + y$ fuori da $[a, b]$ quando tronchiamo l'integrale, nel nostro caso scegliamo:

$$u(\tau, x) \sim e^{-r\tau}(e^x - K)^+ := h(x) \qquad \text{per } x \notin [a, b]. \tag{4.36}$$

Mostriamo con il seguente teorema che, sotto le ipotesi usuali del modello di mercato tipo-Lévy e opportune ipotesi sulla funzione h (payoff dell'opzione nella variabile x), l'errore dovuto al troncamento del problema su un intervallo $[-b, b]$ decade esponenzialmente con b a meno di una costante moltiplicativa che non dipende da b (abbiamo visto qualcosa di più forte nel caso particolare del Jump-Diffusion nella proposizione 3.3.2, per il VG una stima del genere è più difficile da calcolare dal momento che la densità di transizione è molto più complicata).

Teorema 4.3.1. *Assumiamo che la funzione h sia limitata ($\|h\|_\infty < +\infty$) ed esiste $\alpha > 0$:*

$$\int_{|x|>1} e^{\alpha|x|}\nu(\mathrm{d}x) < +\infty. \tag{4.37}$$

Se indichiamo con $u(\tau, x)$ e $u_b(\tau, x)$ le soluzioni del problema di Cauchy integro-differenziale alle derivate parziali rispettivamente sul dominio illimitato e troncato (problema 3.8 trasformato nelle variabili (τ, x)) allora:

$$|u(\tau, x) - u_b(\tau, x)| \leq 2C_{\tau,\alpha}\|h\|_\infty e^{-\alpha(b-|x|)} \tag{4.38}$$

dove la costante $C_{\tau,\alpha}$ non dipende da b.

Dimostrazione. La dimostrazione è di tipo probabilistico e si basa sulla rappresentazione della soluzione del problema come in 2.4.
Definiamo:

$$M^x_\tau = \sup_{t\in[0,\tau]} |X_t + x|, \tag{4.39}$$

avremo perciò che:

$$M^x_\tau < b \Leftrightarrow |X_t + x| < b \quad \forall t \in [0, \tau] \Leftrightarrow -b < X_t + x < b \quad \forall t \in [0, \tau]. \tag{4.40}$$

Da cui:

$$\begin{aligned} &u(\tau, x) = \mathbb{E}[h(X_\tau + x)]; \\ &u_b(\tau, x) = \mathbb{E}[h(X_\tau + x)\mathbb{1}_{\{M^x_\tau<b\}} + h(X_{\theta(x)} + x)\mathbb{1}_{\{M^x_\tau\geq b\}}] \end{aligned} \tag{4.41}$$

dove $\theta(x) = \inf\{t \geq 0,\ |X_t + x| \geq b\}$ è il primo tempo di uscita da $[-b, b]$.
Sottraiamo u_b da u e otteniamo:

$$\begin{aligned} |u(\tau, x) - u_b(\tau, x)| &\leq \mathbb{E}[|h(X_\tau + x)\mathbb{1}_{\{M^x_\tau\geq b\}}|] + \mathbb{E}[|h(X_{\theta(x)} + x)\mathbb{1}_{\{M^x_\tau\geq b\}}|] \leq \\ &\leq 2\|h\|_\infty Q(M^x_\tau \geq b). \end{aligned} \tag{4.42}$$

Se ora $C_{\tau,\alpha} := \mathbb{E}[e^{\alpha M_\tau^0}]$ applicando il teorema di Lévy-Khintchine come nel teorema 3.3 in [10] e con l'ipotesi di integrabilità 4.37 si ha:

$$C_{\tau,\alpha} < +\infty \tag{4.43}$$

Possiamo quindi applicare la disuguaglianza di Chebyshev generalizzata:

$$Q(X \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{g(\varepsilon)}\mathbb{E}[g(X)] \tag{4.44}$$

valida per g funzione reale non-negativa, misurabile e non-decrescente.
Otteniamo quindi:

$$Q(M_\tau^0 \geq b) \leq \frac{1}{e^{\alpha b}}\mathbb{E}[e^{\alpha M_\tau^0}] = C_{\tau,\alpha}e^{-\alpha b}. \tag{4.45}$$

Per completare la prova osserviamo che:

$$\begin{aligned}
&\sup|X_t + x| \leq \sup|X_t| + |x| \qquad \Longrightarrow \\
&(\sup|X_t + x| \geq b \Rightarrow \sup|X_t| + |x| \geq b) \qquad \Longrightarrow \\
&Q(M_\tau^x \geq b) \leq Q(M_\tau^0 \geq b - |x|) \leq C_{\tau,\alpha}e^{-\alpha(b-|x|)}.
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Combinando con 4.42 concludiamo:

$$|u(\tau,x) - u_b(\tau,x)| \leq 2\|h\|_\infty Q(M_\tau^x \geq b) \leq 2C_{\tau,\alpha}\|h\|_\infty e^{-\alpha(b-|x|)}. \tag{4.47}$$

□

Il processo VG in 4.17 soddisfa l'ipotesi di integrabilità 4.37 con α opportunamente scelto (in funzione di λ_1 e λ_2), applicando questo risultato riusciamo quindi a localizzare il dominio in un intervallo $[a,b]$ (con $a = -b$ eventualmente) con un errore che decade esponenzialmente all'aumentare dell'ampiezza dell'intervallo.

Osservazione 12. L'ipotesi del teorema precedente, che vuole che la funzione h (payoff dell'opzione) sia limitata, non vale ad esempio nel caso di un'opzione

Call europea, il cui payoff è $h(x) = (e^x - K)^+$, tuttavia si può ovviare a questo inconveniente riconducendoci al calcolo del prezzo di un'opzione Put europea (la cui funzione di Payoff $h(x) = (K - e^x)^+$ è limitata) attraverso la formula "Put-Call parity" (si veda [1] cap. 1 per approfondimenti).

4.4 Implementazione per il VG.

Procediamo adesso alla preparazione del codice. Il problema semi-discretizzato sarà della forma:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u_0(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} e^{-r\tau}(e^a - K)^+ \\ \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}u_i(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = \left(\dfrac{\sigma^2}{2h_n^2} + \dfrac{r - \frac{\sigma^2}{2} + k + R}{2h_n} \right) u_{i+1}(\tau) - \left(\dfrac{\sigma^2}{h_n^2} + r \right) u_i(\tau) + \\ \qquad + \left(\dfrac{\sigma^2}{2h_n^2} - \dfrac{r - \frac{\sigma^2}{2} + k + R}{2h_n} \right) u_{i-1}(\tau) + \dfrac{h_n}{2} \Bigg[[u_{i,0}(\tau) - u_i(\tau)] f(y_0) + \\ \qquad + [u_{i,n-l}(\tau) - u_i(\tau)] f(y_{n-l}) + [u_{i,l}(\tau) - u_i(\tau)] f(y_l) + [u_{i,n}(\tau) - u_i(\tau)] f(y_n) + \\ \qquad + 2 \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n-l-1} [u_{i,j}(\tau) - u_i(\tau)] f(y_j) + \sum_{j=l+1}^{n-1} [u_{i,j}(\tau) - u_i(\tau)] f(y_j) \right) \Bigg] \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (1 \le i \le n-1) \\ \dfrac{\mathrm{d}u_n(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} e^{-r\tau}(e^b - K)^+ \\ u_i(0) = H_i \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (0 \le i \le n) \end{cases} \tag{4.48}$$

Dove:

$$
\begin{aligned}
&R = \frac{e^{\lambda_2 y_{n-l}} - 1}{v\lambda_2} + \frac{1 - e^{-\lambda_1 y_l}}{v\lambda_1};\\
&f(y) = \frac{1}{v}\frac{e^{-\lambda_1 y}}{y}\mathbb{1}_{\{y>0\}} + \frac{1}{v}\frac{e^{-\lambda_2 |y|}}{|y|}\mathbb{1}_{\{y<0\}}; \qquad \forall y \neq 0;\\
&y_l = \min_{\substack{y_j \geq 0\\ 0\leq j\leq n}} \{y_j,\ \text{tale che } y_j > \varepsilon\} \qquad (\varepsilon > 0 \text{ parametro di tolleranza fissato});\\
&u_{i,j}(\tau) = u_{i+j-\frac{n}{2}}(\tau)\mathbb{1}_{A_i}(j) + e^{-r\tau}(e^{x_i+y_j} - K)^+(1 - \mathbb{1}_{A_i}(j))\\
&(A_i = \{j \in \{0, \dots n\},\ j \text{ verifica la condizione } 3.26\}).
\end{aligned}
\tag{4.49}
$$

.

Implementiamo il metodo in *Mathematica* (si rimanda all'appendice per il codice nel dettaglio) scegliendo come parametri del modello VG i valori:

$$
\begin{aligned}
&\sigma = 0.2;\\
&r = 0.05;\\
&v = 1; \qquad \text{(varianza del subordinatore)}\\
&\mu_V = -0.5; \qquad \text{(drift del BM)}\\
&\sigma_V = 0.2; \qquad \text{(coefficiente di diffusione del BM)}\\
&S_0 = 1;\\
&b = -a = 6. \qquad \text{(parametro di troncamento)}
\end{aligned}
\tag{4.50}
$$

Ottenendo i seguenti risultati:

Tabella 4.1: Prezzo approssimato di una Call europea con parametri dati in 4.50.

T	K	n=100	n=200	n=300	n=400	n=500	V. Ex.
	0.6	0.415804	0.416816	0.416925	0.416923	0.416917	0.416834
0.25	0.8	0.235348	0.236705	0.236889	0.236913	0.236906	0.236853
	1	0.0732219	0.0818244	0.0831906	0.0836227	0.0838129	0.0841219
	1.2	0.0142309	0.010827	0.010906	0.0107178	0.0108179	0.0106879
	0.5	0.54121	0.54517	0.54564	0.54565	0.545554	0.545286
1	1	0.19560	0.19981	0.20049	0.20056	0.20060	0.20056
	1.5	0.03636	0.03777	0.03806	0.03814	0.03819	0.0381986
	2	0.005379	0.004265	0.003989	0.003879	0.003836	0.003786
	0.5	0.666532	0.685151	0.687383	0.687444	0.687186	0.685597
5	3	0.12772	0.137445	0.138983	0.13928	0.139314	0.139013
	5	0.0426171	0.0460972	0.0467669	0.0469226	0.0469351	0.0468601
	7	0.0162088	0.01738	0.0175771	0.0176083	0.0176149	0.0175789
	0.5	0.754982	0.791252	0.795535	0.795566	0.794985	0.791641
10	1	0.625743	0.660768	0.665099	0.665278	0.664812	0.661868
	5	0.234998	0.25695	0.260183	0.260632	0.260534	0.259295
	10	0.105448	0.118139	0.120116	0.120447	0.120447	0.119892

Dai risultati dell'approssimazione della soluzione osserviamo come, prendendo valori di n sufficientemente grandi, si ottenga un'approssimazione decisamente affidabile del valore esatto del caso preso in esame.
I tempi computazionali del metodo sono dati da:

Tabella 4.2: Tempi computazionali per i valori in Tabella 4.1

T	K	n=100	n=200	n=300	n=400	n=500
0.25	0.6	1.732	7.082	15.959	28.439	45.365
	0.8	2.403	7.067	16.099	29.141	46.457
	1	2.761	8.673	19.095	38.049	58.219
	1.2	2.543	7.55	17.956	31.044	45.615
1	0.5	2.434	7.301	16.489	30.872	51.122
	1	2.917	9.157	20.296	36.083	58.906
	1.5	2.73	7.566	16.755	30.202	48.921
	2	2.793	8.736	19.703	36.551	58.75
5	0.5	2.605	8.206	21.84	41.574	61.839
	3	3.073	9.485	23.26	46.94	76.488
	5	3.058	9.656	22.901	48.735	76.55
	7	3.089	9.718	23.229	50.123	74.303
10	0.5	2.824	8.752	22.932	43.306	65.13
	1	3.105	10.67	26.661	47.455	72.4
	5	3.183	10.686	27.659	49.312	75.457
	10	3.261	10.499	28.548	50.326	81.229

4.5 Approssimazione ad attività finita.

Abbiamo visto nella precedente sezione un metodo di discretizzazione incentrato nell'eliminazione della singolarità del nucleo dell'integrale in $y = 0$ attraverso un'approssimazione al prim'ordine della funzione integranda. Tale strategia si era resa necessaria alla luce della non-integrabilità su $\mathbb{R}$ della misura di Lévy del processo in esame che rientra quindi nella categoria dei processi ad attività infinita, l'insieme di quei processi aventi cioè un numero infinito numerabile di salti con ampiezza "piccola"

Un modo già studiato per trattare i problemi integro-differenziali che derivano da processi di Lévy con attività infinita consiste nell'approssimare tali processi con degli opportuni processi ad attività finita (si veda 5.2 in [4]). Sia ad esempio dato il processo X 1-dimensionale con terna caratteristica (μ, σ^2, ν) e tale che $\nu(\mathbb{R}) = +\infty$, dato $\varepsilon > 0$ consideriamo il processo X^ε caratterizzato dalla terna $(\mu(\varepsilon), \sigma^2 + \sigma^2(\varepsilon), \nu \mathbb{1}_{\{|x| \geq \varepsilon\}})$ dove:

$$\begin{aligned} \sigma^2(\varepsilon) &= \int_{|y| \leq \varepsilon} y^2 \nu(\mathrm{d}y); \\ \mu(\varepsilon) &= -\frac{\sigma^2 + \sigma^2(\varepsilon)}{2} - \int_{|y| \geq \varepsilon} (e^y - 1 - y \mathbb{1}_{\{|y| \leq 1\}}) \nu(\mathrm{d}y) \end{aligned} \tag{4.51}$$

Questa operazione porta ad eliminare i salti con ampiezza $\leq \varepsilon$ e a sostituirli con un moto Browniano $\sigma(\varepsilon) W_t$, facendo sì che il processo sia ad attività finita.

Il prezzo di una Call europea su in sottostante il cui logaritmo del prezzo segue una dinamica data da X^ε sarà quindi dato dalla soluzione del problema di Cauchy integro-differenziale:

$$\begin{cases} \partial_\tau u^\varepsilon(\tau, x) = \dfrac{\sigma^2 + \sigma^2(\varepsilon)}{2} \partial_{xx} u^\varepsilon(\tau, x) + \left(r - \dfrac{\sigma^2 + \sigma^2(\varepsilon)}{2} - \alpha(\varepsilon) \right) \partial_x u^\varepsilon(\tau, x) - \\ \qquad - r u^\varepsilon(\tau, x) + \displaystyle\int_{|y| \geq \varepsilon} [u^\varepsilon(\tau, x+y) - u^\varepsilon(\tau, x)] \nu(\mathrm{d}y) \qquad (\tau, x) \in]0, T] \times \mathbb{R}; \\ \\ u^\varepsilon(0, x) = h(x) = H(e^x) \qquad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4.52}$$

dove:

$$\alpha(\varepsilon) = \int_{|y| \geq \varepsilon} (e^y - 1) \nu(\mathrm{d}y) \tag{4.53}$$

Enunciamo un risultato che offre una stima dell'errore che si compie effettuando questa approssimazione:

Teorema 4.5.1. *Se h è Lipschitziana: $|h(x) - h(y)| \leq c|x - y|$ e siano u e*

u^ε soluzioni di 4.22 e 4.52 rispettivamente, allora:

$$|u(\tau,x) - u^\varepsilon(\tau,x)| \leq C\frac{\int_{|y|\leq\varepsilon} |y|^3\nu(\mathrm{d}y)}{\sigma^2(\varepsilon)}. \tag{4.54}$$

Questo teorema, assicura quindi la convergenza della soluzione del problema approssimato a quella del problema originale, inoltre offre una stima dell'errore che si compie effettuando questo "troncamento" dei salti di ampiezza piccola.
Consideriamo ora l'implementazione in Mathematica di questo metodo (si veda il codice in appendice), per valori del modello dati come in 4.50 e scegliendo $\varepsilon = 10^{-5}$ otteniamo:

Tabella 4.3: Prezzo approssimato di una Call europea con parametri dati in 4.50 approssimando il processo con un processo ad attvità finita.

T	K	n=100	n=200	n=300	n=400	n=500	V. Ex.
	0.6	0.42304	0.418577	0.417621	0.417274	0.417121	0.416834
0.25	0.8	0.24238	0.238436	0.237582	0.237266	0.237114	0.236853
	1	0.0805997	0.0836637	0.0839702	0.0840446	0.0840747	0.0841219
	1.2	0.017242	0.0116739	0.0115023	0.0109595	0.0109771	0.106879
	0.5	0.570038	0.552147	0.548398	0.547043	0.546415	0.545286
1	1	0.217165	0.205164	0.202649	0.201744	0.201321	0.20056
	1.5	0.0488681	0.0408523	0.0393168	0.0388999	0.0385957	0.0381986
	2	0.00841174	0.00497914	0.00430501	0.00405694	0.00396166	0.003786
	0.5	0.813681	0.7196	0.700896	0.694236	0.691139	0.685597
5	3	0.197552	0.153793	0.145599	0.142715	0.141375	0.139013
	5	0.0774062	0.0541031	0.0500566	0.0486598	0.0479928	0.0468601
	7	0.0338695	0.021321	0.0192058	0.0184768	0.0181487	0.0175789
	0.5	1.07013	0.862033	0.822999	0.809294	0.802947	0.791641
10	1	0.922881	0.72734	0.690987	0.678254	0.672358	0.661868
	5	0.419528	0.297575	0.276158	0.268756	0.265326	0.259295
	10	0.218148	0.142479	0.129751	0.125394	0.123392	0.119892

Confrontando i risultati ottenuti con questo metodo con quelli ottenuti approssimando il nucleo dell'integrale (a parità di passo della discretizzazione) raccolti nella tabella 4.1 si osserva subito come la convergenza dei valori di

questo metodo alla soluzione esatta non sia accurata come quella ottenuta col metodo precedente, per cui la prima delle due idee sembrerebbe essere vincente per trattare numericamente processi di Lévy con misure singolari.
I tempi computazionali del metodo sono dati da:

Tabella 4.4: Tempi computazionali per i valori in Tabella 4.3

T	K	n=100	n=200	n=300	n=400	n=500
0.25	0.6	3.447	8.611	17.238	30.046	46.145
	0.8	3.916	8.44	17.643	30.655	48.048
	1	4.212	9.734	20.686	35.334	56.395
	1.2	3.962	8.533	17.972	30.623	46.114
1	0.5	3.822	8.767	18.112	31.98	49.936
	1	4.274	10.0	21.918	37.861	58.844
	1.5	4.118	8.986	19.36	32.729	51.777
	2	4.586	10.468	22.027	38.454	60.716
5	0.5	4.29	9.75	21.653	41.714	67.845
	3	4.556	11.232	25.038	48.781	80.824
	5	4.634	11.091	24.024	49.141	77.47
	7	4.914	11.669	26.161	49.078	80.699
10	0.5	4.384	10.78	25.646	43.337	63.415
	1	4.555	12.168	28.127	47.346	78.796
	5	5.07	12.075	28.86	49.874	78.203
	10	4.789	12.028	30.389	52.011	81.541

Osserviamo anche come questo metodo sia in generale ugualmente dispendioso rispetto a quello rappresentato in tabella 4.2.

Conclusioni

Alla luce delle sperimentazioni numeriche condotte in questo elaborato, risulta soddisfacente la validità dei metodi che sono stati prodotti e codificati: ad un primo confronto mediante metodo Monte Carlo e attraverso il calcolo delle soluzioni esatte l'approssimazione del problema nel caso di un modello a parametri costanti ha dato luogo infatti ad approssimazioni convincenti.
In virtù di questi risultati sarebbe sicuramente interessante procedere con la sperimentazione di tali metodi nel caso di modelli a coefficienti variabili (per cui i codici sono già predisposti) o per il calcolo del prezzo per diversi tipi di opzioni di cui non esista un'espressione della soluzione esatta.
L'approssimazione proposta che risolve il problema dell'integrazione di una funzione rispetto ad una misura di Lévy con singolarità in zero può essere facilmente applicata ad una vasta gamma di processi aventi lo stesso tipo di problema e, nonostante sia computazionalmente più dispendiosa di altri metodi (come quello delle FFT), è applicabile in un contesto più generale dal momento che non richiede una rappresentazione in forma chiusa della funzione caratteristica del processo X.
Un'ulteriore applicazione di sicuro interesse può essere impostata a partire da un opportuno adattamento dei risultati in [13] e [14], attraverso i quali è possibile ricavare un'espressione analoga alla formula di Dupire (già ben nota per il modello Black-Scholes) per un generico processo di Lévy; applicando tale formula sarà possibile descrivere il problema del calcolo del prezzo mediante un problema di Cauchy integro-differenziale nelle variabili (τ, K), sostanzialmente analogo a quelli esaminati in questa dissertazione. Inverten-

do numericamente la soluzione approssimata di tale problema, in modo da esplicitare la volatilità $\sigma := \sigma_i(T, K)$ (detta volatilità implicita), sarà possibile tracciare il grafico della superficie di tale parametro il cui andamento è significativamente legato alla "rischiosità " di un'opzione e per questo ampiamente usato nelle applicazioni pratiche.
Nuovi spunti interessanti sono legati allo studio di consistenza, stabilità e convergenza oltre che al consolidamento e alla generalizzazione degli schemi numerici che sono stati analizzati in questa dissertazione.

Appendice A

Codici in Mathematica

Proponiamo qui di seguito i codici numerici (in ambiente *Mathematica*) che sono stati implementati secondo le idee illustrate nei capitoli di questo elaborato e con i quali abbiamo prodotto i risultati numerici descritti.
Mettiamo in evidenza come il codice si presti a risolvere anche il caso in cui i coefficienti delle equazioni studiate siano variabili, quindi anche il caso di una volatilità stocastica (indicata tra i parametri di input con la funzione $\sigma\sigma$ che prenderemo comunque costante).
A seguito di ogni metodo viene proposto un Monte Carlo che simula lo stesso processo e calcola una stima del prezzo approssimato dell'opzione in esame, tale metodo è stato usato nella fase di verifica della validità del codice.
Definiamo innanzitutto le funzioni che verranno usate in tutti i codici in esame:

```
pos[x_]:=(Abs[x]+x)/2;        (*funzione parte positiva*)

payoff[x_,K_]:= pos[e^x - K];        (*payoff opzione call europea*)
```

Equazione Differenziale per il Jump-Diffusion (metodo delle linee).

Il primo codice implementato approssima la soluzione della PIDE in 3.13 attraverso il metodo delle differenze finite la discretizzazione dell'integrale illustrata nella sezione 3.3.

CallJD[r_, $\sigma\sigma$_, λ_, μj_, sj_, T_, K_, a_, b_, n_]:=Module[

$\{h_n, A, B, C1, F, k,$ conditions0, conditions, initc, eqns, lines$\}$,

$h_n = \frac{b-a}{n}$;

$k = e^{\mu\mathrm{j}+\frac{\mathrm{sj}^2}{2}} - 1$;

(*misura di Lévy del Jump-Diffusion*)

ν[y_]:=$\lambda *$ PDF[NormalDistribution[μj, sj], y];

(*Coefficienti Equazione Differenziale*)

A[t_, x_]:=$\frac{(\sigma\sigma[t,x])^2}{2}$;

B[t_, x_]:=$r - \frac{(\sigma\sigma[t,x])^2}{2} - \lambda k$;

Γ[t_, x_]:= $- r$;

Φ[t_, x_]:=0;

(*Genera il vettore delle soluzioni*)

U[t_]:=Table $[u_i[t], \{i, 0, n\}]$;

(*Coefficienti Equazione Differenziale nei punti della discretizzazione*)

Table $[x_i = a + ih_n, \{i, 0, n\}]$;

$A =$ Table $[\alpha_i[t] = A\,[t, a + i * h_n]\,, \{i, 1, n-1\}]$;

$B =$ Table $[\beta_i[t] = B\,[t, a + i * h_n]\,, \{i, 1, n-1\}]$;

C1 $=$ Table $[\gamma_i[t] = \Gamma\,[t, a + i * h_n]\,, \{i, 1, n-1\}]$;

$F =$ Table $[f_i[t] = \Phi\,[t, a + i * h_n]\,, \{i, 1, n-1\}]$;

(*Condizioni iniziali e al contorno*)

ϕ[s_]:=$e^{-rs} *$ payoff$[a, K]$; (*dato al bordo per $x = a$*)

ω[s_]:=$e^{-rs} *$ payoff$[b, K]$; (*dato al bordo per $x = b$*)

ψ[x_]:=payoff$[x, K]$; (*dato iniziale*)

conditions0 $=$ Table $[\psi\,[a + i * h_n]\,, \{i, 1, n-1\}]$; (*condizione iniziale discretizzata*)

conditions $=$ Join[$\{\phi[0]\}$, conditions0, $\{\omega[0]\}$];

initc $=$ Thread[$U[0] ==$ conditions];

(*Condizione su j affinché $x_i + y_j \in [a, b]$*)

δ[i_, j_]:=Boole $\left[-\left(\frac{a+ih_n}{h_n}\right) \leq j \leq n - \left(\frac{a+ih_n}{h_n}\right)\right]$;

θ[i_, j_]:=$1 - \delta[i, j]$;

(*Discretizzazione dell'equazione integro-differenziale per $0 < i < n$*)

$$\text{lista} = \text{Table}\Big[\Big(\left(\tfrac{\alpha_i[t]}{h_n{}^2} - \tfrac{\beta_i[t]}{2h_n}\right) u_{i-1}[t] + \left(-2\tfrac{\alpha_i[t]}{h_n{}^2} + \gamma_i[t]\right) u_i[t] + \left(\tfrac{\alpha_i[t]}{h_n{}^2} + \tfrac{\beta_i[t]}{2h_n}\right) u_{i+1}[t] + \tfrac{h_n}{2}\Big(\Big(u_{i+\frac{a}{h_n}}[t] * \delta[i,0] + e^{-rt} * \text{payoff}[2a + i\ h_n, K] * \theta[i,0] - u_i[t]\Big)\nu[x_0] + \Big(u_{i+n+\frac{a}{h_n}}[t] * \delta[i,n] + e^{-rt} * \text{payoff}[2a + (i+n)h_n, K] * \theta[i,n] - u_i[t]\Big)\nu[x_n] + 2\sum_{l=1}^{n-1}\Big(u_{i+l+\frac{a}{h_n}}[t] * \delta[i,l] + e^{-rt} * \text{payoff}[2a + (i+l)h_n, K] * \theta[i,l] - u_i[t]\Big)\nu[x_l]\Big) + f_i[t], \{i, 1, n-1\}\Big];$$

(*Genera le equazioni incorporando i dati al bordo*)

$\text{eqns} = \text{Thread}[D[U[t], t] == \text{Join}[\{D[\phi[t], t]\}, \text{lista}, \{D[\omega[t], t]\}]];$

(*Risolve il sistema di ODE's nella variabile t con le condizioni date*)

$\text{lines} = \text{NDSolve}[\{\text{eqns}, \text{initc}\}, U[t], \{t, 0, T\}]$

(*Effettua un plot delle linee caratteristiche della soluzione approssimata*)

(*ParametricPlot3D [Evaluate [Table [$\{a + ih_n, t, \text{First}[u_i[t]/.\text{lines}]\}, \{i, 0, n\}$]], $\{t, 0, T\}$,

PlotRange → All, AxesLabel → {x, t, u}] ;*)

]

* *

Riportiamo ora il codice per la soluzione numerica dello stesso problema del caso precedente (enunciato in 3.13) ma attraverso la discretizzazione dell'integrale illustrata nella sezione 3.5.

CallJD2[r_, σσ_, λ_, μj_, sj_, T_, K_, a_, b_, n_]:=Module[
{h_n, A, B, $C1$, F, conditions0, conditions, initc, eqns, lines, res, lista},

$h_n = \frac{b-a}{n}$;

(*misura di Lévy del Jump-Diffusion*)
ν[y_]:=λPDF[NormalDistribution[μj, sj], y];

(*Stime dell'integrale fuori dal dominio troncato*)
ϵ[t_, x_, b1_]:=$\lambda\left(e^{x+\mu\mathrm{j}+\frac{\mathrm{sj}\wedge 2}{2}-rt}\left(1-\mathrm{CDF}\left[\mathrm{NormalDistribution}\left[\mu\mathrm{j}+\mathrm{sj}^2,\mathrm{sj}\right],\mathrm{b1}-x\right]\right)-\right.$
$\left.K\mathrm{Exp}[-rt](1-\mathrm{CDF}[\mathrm{NormalDistribution}[\mu\mathrm{j},\mathrm{sj}],\mathrm{b1}-x])\right)$;
E[x_, a1_, b1_]:=λ(CDF[NormalDistribution[μj, sj], a1 − x] + 1−
CDF[NormalDistribution[μj, sj], b1 − x]);
$k = e^{\mu\mathrm{j}+\frac{\mathrm{sj}^2}{2}} - 1$;

(*Corefficienti dquazione differenziale*)
A[t_, x_]:=$\frac{\sigma\sigma[t,x]^2}{2}$;
B[t_, x_]:=$r - \frac{\sigma\sigma[t,x]^2}{2} - \lambda k$;
Γ[t_, x_]:= − r;
Φ[t_, x_]:=0;

(*Genera il vettore delle soluzioni*)
U[t_]:=Table [$u_i[t]$, {i, 0, n}] ;

(*Coefficienti equazione differenziale nei punti della discretizzazione*)

Table $[x_i = a + i * h_n, \{i, 0, n\}]$;

$A =$ Table $[\alpha_i[t] = A[t, a + i * h_n], \{i, 1, n-1\}]$;

$B =$ Table $[\beta_i[t] = B[t, a + i * h_n], \{i, 1, n-1\}]$;

C1 = Table $[\gamma_i[t] = \Gamma[t, a + i * h_n], \{i, 1, n-1\}]$;

$F =$ Table $[f_i[t] = \Phi[t, a + i * h_n], \{i, 1, n-1\}]$;

(*Condizioni iniziali e al contorno*)

ϕ[s_]:=$e^{-rs} *$ payoff$[a, K]$; (*dato al bordo per $x = a$*)

ω[s_]:=$e^{-rs} *$ payoff$[b, K]$; (*dato al bordo per $x = b$*)

ψ[x_]:=payoff$[x, K]$; (*dato iniziale*)

conditions0 = Table $[\psi[a + i * h_n], \{i, 1, n-1\}]$; (*condizione iniziale discretizzata*)

conditions = Join[$\{\phi[0]\}$, conditions0, $\{\omega[0]\}$];

initc = Thread[$U[0]$ == conditions];

(*Discretizzazione dell'equazione integro-differenziale per $0 < i < n$*)

$$\text{lista} = \text{Table}\Big[\left(\tfrac{\alpha_i[t]}{h_n{}^2} - \tfrac{\beta_i[t]}{2h_n}\right) u_{i-1}[t] + \left(-2\tfrac{\alpha_i[t]}{h_n{}^2} + \gamma_i[t]\right) u_i[t] + \left(\tfrac{\alpha_i[t]}{h_n{}^2} + \tfrac{\beta_i[t]}{2h_n}\right) u_{i+1}[t] + \tfrac{h_n}{2}\left((u_0[t] - u_i[t])\,\nu[x_0 - x_i] + (u_n[t] - u_i[t])\,\nu[x_n - x_i] + 2\textstyle\sum_{l=1}^{n-1}\left((u_l[t] - u_i[t])\,\nu[x_l - x_i]\right)\right) + \epsilon[t, x_i, b] - u_i[t]E[x_i, a, b] + f_i[t], \{i, 1, n-1\}\Big];$$

(*Genera le equazioni incorporando i dati al bordo*)

eqns = Thread[$D[U[t], t]$ == Join[$\{D[\phi[t], t]\}$, lista, $\{D[\omega[t], t]\}$]];

(*Risolve il sistema di ODE's nella variabile t con le condizioni date*)

lines = NDSolve[{eqns, initc}, $U[t]$, {$t, 0, T$}]

(*Effettua un plot delle linee caratteristiche della soluzione approssimata*)

(*ParametricPlot3D [Evaluate [Table [{$a + ih_n, t$, First [$u_i[t]$/.lines]} , {$i, 0, n$}]] , {$t, 0, T$},

PlotRange → All, AxesLabel → {x, t, u}] ; *)

]

****

La seguente funzione estrae il valore della soluzione u (calcolata con una delle due funzioni precedenti) nel punto del dominio desiderato, qualora questo non sia un punto delle linee di discretizzazione verrà calcolata una media delle soluzioni nei valori della discretizzazione ai lati di quello desiderato (dando come pesi le distanze del punto dai valori più vicini della discretizzazione).

(*Estrae la soluzione nel punto (Log[St], t1) $\in [a, b] \times [0, T]$

interpolando linearmente i valori di u nei punti prossimi al valore voluto*)

price[n_, St_, t1_, solution_]:=Module[

{$U, h = \frac{b-a}{n}$},

U[t_]:=Table [$u_i[t]$, {$i, 0, n$}] ;

$U[t]$ = solution[t];

For[$i = 0, i \leq n, i$++, If[$(a + ih) \leq$ Log[St]&&Log[St] $\leq (a + (i + 1)\ h)$,

res = $\frac{1}{h}$ (($a + (i + 1)h$ − Log[St])$u_i[t]$ + (Log[St] − $(a + ih)$)$u_{i+1}[t]$)

/.First@solution/.($t \to$ t1)]] ; res]

****

Metodo Monte Carlo per il Jump-Diffusion.

Riportiamo ora il codice del Monte Carlo per il prezzo di una call europea in un modello di Merton.

```
montecarloJD[SS_, r_, σσ_, λ_, μj_, sj_, T_, K_, M_, NN_]:=Module[
{dt = T/NN, XT},
ricorsione[x_]:=Block[
  {J, W = RandomVariate[NormalDistribution[], M],
  MM = RandomVariate[PoissonDistribution[λdt], M]} ,
J = Table[If[MM[[k]] > 0, Sum[RandomVariate[NormalDistribution[μj, sj]], {l, 1, MM[[k]]}], 0],
    {k, 1, M}] ;
N[x + (r - (σσ[t, x])^2/2 - λ (e^(μj + sj^2/2) - 1)) dt + (σσ[t, x])W Sqrt[dt] + J]] ;
XT = Nest[ricorsione, Log[SS], NN];
res = {e^(-rT) Mean[payoff[XT, K]], StandardDeviation[e^(-rT) payoff[XT, K]]/Sqrt[M] 1.96}
]
```

$$J = \text{Table}\left[\text{If}\left[\text{MM}[[k]] > 0, \sum_{l=1}^{\text{MM}[[k]]} \text{RandomVariate}[\text{NormalDistribution}[\mu\text{j}, \text{sj}]], 0\right], \{k, 1, M\}\right];$$

$$N\left[x + \left(r - \frac{(\sigma\sigma[t,x])^2}{2} - \lambda\left(e^{\mu\text{j}+\frac{\text{sj}^2}{2}} - 1\right)\right)\text{dt} + (\sigma\sigma[t,x])W\sqrt{\text{dt}} + J\right]\right];$$

$$\text{res} = \left\{e^{-rT}\text{Mean}[\text{payoff}[\text{XT}, K]], \frac{\text{StandardDeviation}[e^{-rT}\text{payoff}[\text{XT},K]]}{\sqrt{M}}1.96\right\}$$

****

Equazione differenziale per il VG (metodo delle linee).

Presentiamo in questa sezione il codice per la soluzione del problema di Cauchy integro-differenziale per il processo Variance-Gamma enunciato in 4.22 usando la discretizzazione descritta nella sezione 4.3 in tutti i suoi dettagli.

```
CallVG[r_, σσ_, μ_, σj_, v_, T_, K_, a_, b_, n_]:=Module[
{h_n, A, B, C1, F, λ, conditions0, conditions, initc, eqns, lines, ϵ},

ϵ = 10^-3;   (*Parametro entro il quale approssima la funzione integranda
                con uno sviluppo di Taylor del prim'ordine*)
```

$h_n = \frac{b-a}{n}$;

$\lambda_1 = \left(\sqrt{\frac{\mu^2 v^2}{4} + \frac{\sigma j^2 v}{2}} + \frac{\mu v}{2}\right)^{-1}$;

$\lambda_2 = \left(\sqrt{\frac{\mu^2 v^2}{4} + \frac{\sigma j^2 v}{2}} - \frac{\mu v}{2}\right)^{-1}$;

(*Misura di Lévy*)

$\nu[\mathrm{y\_}] := \frac{1}{v}\left(\frac{e^{-\lambda_1 y}}{y}\mathrm{Boole}[y>0] + \frac{e^{-\lambda_2 \mathrm{Abs}[y]}}{\mathrm{Abs}[y]}\mathrm{Boole}[y<0]\right)$;

$k = \frac{1}{v}\mathrm{Log}\left[\left(1-\frac{1}{\lambda_1}\right) * \left(1+\frac{1}{\lambda_2}\right)\right]$;

(*Coefficienti equazione differenziale*)

$A[\mathrm{t\_}, \mathrm{x\_}] := \frac{(\sigma\sigma[t,x])^2}{2}$;

$B[\mathrm{t\_}, \mathrm{x\_}] := r - \frac{(\sigma\sigma[t,x])^2}{2} + k$;

$\Gamma[\mathrm{t\_}, \mathrm{x\_}] := -r$;

$\Phi[\mathrm{t\_}, \mathrm{x\_}] := 0$;

(*Genera il vettore delle soluzioni*)

$U[\mathrm{t\_}] := \mathrm{Table}[u_i[t], \{i, 0, n\}]$;

Table $[x_i = a + i * h_n, \{i, 0, n\}]$;

(*Coefficienti equazione differenziale nei punti della discretizzazione*)

$A =$ Table $[\alpha_i[t] = A\,[t, a + i * h_n]\,, \{i, 1, n-1\}]$;

$B =$ Table $[\beta_i[t] = B\,[t, a + i * h_n]\,, \{i, 1, n-1\}]$;

C1 $=$ Table $[\gamma_i[t] = \Gamma\,[t, a + i * h_n]\,, \{i, 1, n-1\}]$;

$F =$ Table $[f_i[t] = \Phi\,[t, a + i * h_n]\,, \{i, 1, n-1\}]$;

(*Condizioni iniziali e al contorno*)

ϕ[s_]:=$e^{-rs} *$ payoff$[a, K]$; (*dato al bordo per $x = a$*)

ω[s_]:=$e^{-rs} *$ payoff$[b, K]$; (*dato al bordo per $x = b$*)

ψ[x_]:=payoff$[x, K]$; (*dato iniziale*)

conditions0 $=$ Table $[\psi\,[a + i * h_n]\,, \{i, 1, n-1\}]$; (*condizione iniziale discretizzata*)

conditions $=$ Join[$\{\phi[0]\}$, conditions0, $\{\omega[0]\}$];

initc $=$ Thread[$U[0]$ == conditions];

(*Condizione su j affinché $x_i + y_j \in [a, b]$*)

δ[i_,j_]:=Boole $\left[-\left(\frac{a+ih_n}{h_n}\right) \leq j \leq n - \left(\frac{a+ih_n}{h_n}\right)\right]$;

θ[i_,j_]:=$1 - \delta[i, j]$;

(*Calcola gli indici l1,l2 entro i quali fare lo sviluppo al prim'ordine*)

For $[j = 0, j \leq n, j{+}{+}, \text{If}\,[0 \leq a + jh_n - \epsilon < h_n, \text{l1} = j]]$;

$\text{l2} = -\frac{2a}{h_n} - \text{l1}$;

(*Valore calcolato in 4.34*)

$$\mathrm{R1} = \left(\frac{1}{v\lambda_2}\left(e^{\lambda_2 x_{l2}} - 1\right) + \frac{1}{v\lambda_1}\left(1 - e^{-\lambda_1 x_{l1}}\right)\right);$$

(*Discretizzazione dell'equazione integro-differenziale per $0 < i < n$*)

$$\begin{aligned}
\text{lista} = \text{Table}\Big[&\left(\frac{\alpha_i[t]}{h_n{}^2} - \frac{(\beta_i[t]+R1)}{2h_n}\right) u_{i-1}[t] + \left(-2\frac{\alpha_i[t]}{h_n{}^2} + \gamma_i[t]\right) u_i[t] + \left(\frac{\alpha_i[t]}{h_n{}^2} + \frac{(\beta_i[t]+R1)}{2h_n}\right) u_{i+1}[t] \\
&+\frac{h_n}{2}\Bigg(\left(\left(u_{i+\frac{a}{h_n}}[t] * \delta[i,0] + e^{-rt} * \text{payoff}\left[2a + i\ h_n, K\right] * \theta[i,0] - u_i[t]\right)\nu\left[x_0\right] + \right. \\
&\left(u_{i+n+\frac{a}{h_n}}[t] * \delta[i,n] + e^{-rt} * \text{payoff}\left[2a + (i+n)h_n, K\right] * \theta[i,n] - u_i[t]\right)\nu\left[x_n\right] + \\
&\left(u_{i+l1+\frac{a}{h_n}}[t] * \delta[i,l1] + e^{-rt} * \text{payoff}\left[2a + (i+l1)h_n, K\right] * \theta[i,l1] - u_i[t]\right)\nu\left[x_{l1}\right] + \\
&\left(u_{i+l2+\frac{a}{h_n}}[t] * \delta[i,l2] + e^{-rt} * \text{payoff}\left[2a + (i+l2)h_n, K\right] * \theta[i,l2] - u_i[t]\right)\nu\left[x_{l2}\right] + \\
&2\left(\sum_{l=1}^{l2-1}\left(\left(u_{i+l+\frac{a}{h_n}}[t] * \delta[i,l] + e^{-rt} * \text{payoff}\left[2a + (i+l)h_n, K\right] * \theta[i,l] - u_i[t]\right)\nu\left[x_l\right]\right) + \right. \\
&\left.\left.\sum_{l=l1+1}^{n-1}\left(\left(u_{i+l+\frac{a}{h_n}}[t] * \delta[i,l] + e^{-rt} * \text{payoff}\left[2a + (i+l)h_n, K\right] * \theta[i,l] - u_i[t]\right)\nu\left[x_l\right]\right)\right)\right) \\
&+f_i[t], \{i, 1, n-1\}\Big];
\end{aligned}$$

(*Genera le equazioni incorporando i dati al bordo*)

$$\text{eqns} = \text{Thread}[D[U[t],t] == \text{Join}[\{D[\phi[t],t]\}, \text{lista}, \{D[\omega[t],t]\}]];$$

(*Risolve il sistema di ODE's nella variabile t con le condizioni date*)

$$\text{lines} = \text{NDSolve}[\{\text{eqns}, \text{initc}\}, U[t], \{t, 0, T\}]$$

(*Effettua un plot delle linee caratteristiche della soluzione approssimata*)

(*ParametricPlot3D [Evaluate [Table [$\{a + ih_n, t, \text{First}\,[u_i[t]/.\text{lines}]\}$, $\{i, 0, n\}$]], $\{t, 0, T\}$,

PlotRange $\to$ All, AxesLabel $\to$ {x, t, u}] ; *)]

****

Il codice presentato di seguito approssima la soluzione del problema in 4.52 ottenuto mediante l'approssimazione del processo VG con un processo ad attività finita (sostituzione dei piccoli salti con un moto Browniano), come descritto nella sezione 4.5. Tale soluzione è a sua volta un'approssimazione della soluzione del problema 4.22.

CallTVG[r_, $\sigma\sigma$_, μ_, σj_, v_, T_, K_, a_, b_, n_, ϵ_]:=Module[

{hn, A, B, C1, F, $\sigma\epsilon$, $\alpha\epsilon$, conditions0, conditions, initc, eqns, lines},

$h_n = \frac{b-a}{n}$;

$\lambda_1 = \left(\sqrt{\frac{\mu^2 v^2}{4} + \frac{\sigma j^2 v}{2}} + \frac{\mu v}{2}\right)^{-1}$;
$\lambda_2 = \left(\sqrt{\frac{\mu^2 v^2}{4} + \frac{\sigma j^2 v}{2}} - \frac{\mu v}{2}\right)^{-1}$;

(*misura di Lévy*)
ν[y_]:=If $\left[\text{Abs}[y] \geq \epsilon, \frac{1}{v}\left(\frac{e^{-\lambda_1 y}}{y}\text{Boole}[y>0] + \frac{e^{-\lambda_2 \text{Abs}[y]}}{\text{Abs}[y]}\text{Boole}[y<0]\right), 0\right]$;

(*Coefficienti dovuti al troncamento*)
$\sigma\epsilon = \frac{1}{v}\left(\frac{1}{\lambda_2{}^2} - \frac{\epsilon e^{-\lambda_2 \epsilon}}{\lambda_2} - \frac{e^{-\lambda_2 \epsilon}}{\lambda_2{}^2} + \frac{1}{\lambda_1{}^2} - \frac{\epsilon e^{-\lambda_1 \epsilon}}{\lambda_1} - \frac{e^{-\lambda_1 \epsilon}}{\lambda_1{}^2}\right)$;
$\alpha\epsilon = \frac{1}{v}\left(\int_\epsilon^{+\infty}\left(\frac{e^{(1-\lambda_1)y}}{y} - \frac{e^{-\lambda_1 y}}{y}\right)dy + \int_{-\infty}^{-\epsilon}\left(\frac{e^{\lambda_2 y}}{y} - \frac{e^{(1+\lambda_2)y}}{y}\right)dy\right)$;

(*Coefficienti equazione differenziale*)
A[t_, x_]:=$\frac{(\sigma\sigma[t,x])^2 + \sigma\epsilon}{2}$;

$B[\mathrm{t\_},\mathrm{x\_}]{:=}r-\frac{(\sigma\sigma[t,x])^2+\sigma\epsilon}{2}-\alpha\epsilon;$

$\Gamma[\mathrm{t\_},\mathrm{x\_}]{:=}-r;$

$\Phi[\mathrm{t\_},\mathrm{x\_}]{:=}0;$

(*Genera il vettore delle soluzioni*)

$U[\mathrm{t\_}]{:=}\text{Table}\left[u_i[t],\{i,0,n\}\right];$

(*Coefficienti equazione differenziale nei punti della discretizzazione*)

$\text{Table}\left[x_i=a+i*h_n,\{i,0,n\}\right];$

$A=\text{Table}\left[\alpha_i[t]=A\left[t,a+i*h_n\right],\{i,1,n-1\}\right];$

$B=\text{Table}\left[\beta_i[t]=B\left[t,a+i*h_n\right],\{i,1,n-1\}\right];$

$\text{C1}=\text{Table}\left[\gamma_i[t]=\Gamma\left[t,a+i*h_n\right],\{i,1,n-1\}\right];$

$F=\text{Table}\left[f_i[t]=\Phi\left[t,a+i*h_n\right],\{i,1,n-1\}\right];$

(*Condizioni iniziali e al contorno*)

$\phi[\mathrm{s\_}]{:=}e^{-rs}*\text{payoff}[a,K];$ (*dato al bordo per $x=a$*)

$\omega[\mathrm{s\_}]{:=}e^{-rs}*\text{payoff}[b,K];$ (*dato al bordo per $x=b$*)

$\psi[\mathrm{x\_}]{:=}\text{payoff}[x,K];$ (*dato iniziale*)

$\text{conditions0}=\text{Table}\left[\psi\left[a+i*h_n\right],\{i,1,n-1\}\right];$ (*condizione iniziale discretizzata*)

$\text{conditions}=\text{Join}[\{\phi[0]\},\text{conditions0},\{\omega[0]\}];$

$\text{initc}=\text{Thread}[U[0]==\text{conditions}];$

(*Condizione su j affinché $x_i+y_j\in[a,b]$*)

$\delta[\mathrm{i\_},\mathrm{j\_}]{:=}\text{Boole}\left[-\left(\frac{a+ih_n}{h_n}\right)\leq j\leq n-\left(\frac{a+ih_n}{h_n}\right)\right];$

θ[i_,j_]:=1 $-\ \delta[i,j]$;

(*Discretizzazione dell'equazione integro-differenziale per $0<i<n$*)

$$\text{lista} = \text{Table}\Big[\Big(\tfrac{\alpha_i[t]}{h_n{}^2}-\tfrac{\beta_i[t]}{2h_n}\Big)u_{i-1}[t]+\Big(-2\tfrac{\alpha_i[t]}{h_n{}^2}+\gamma_i[t]\Big)u_i[t]+\Big(\tfrac{\alpha_i[t]}{h_n{}^2}+\tfrac{\beta_i[t]}{2h_n}\Big)u_{i+1}[t]+$$
$$\tfrac{h_n}{2}\Big(\Big(u_{i+\frac{a}{h_n}}[t]*\delta[i,0]+e^{-rt}*\text{payoff}\,[2a+i\ h_n,K]*\theta[i,0]-u_i[t]\Big)\nu\,[x_0]+$$
$$\Big(u_{i+n+\frac{a}{h_n}}[t]*\delta[i,n]+e^{-rt}*\text{payoff}\,[2a+(i+n)h_n,K]*\theta[i,n]-u_i[t]\Big)\nu\,[x_n]+$$
$$2\Big(\textstyle\sum_{l=1}^{n-1}\Big(\Big(u_{i+l+\frac{a}{h_n}}[t]*\delta[i,l]+e^{-rt}*\text{payoff}[2a+(i+l)h_n,K]*\theta[i,l]-u_i[t]\Big)\nu\,[x_l]\Big)\Big)\Big)$$
$$+f_i[t],\{i,1,n-1\}\Big];$$

(*Genera le equazioni discretizzando le derivate spaziali e incorporando i dati al bordo*)

eqns = Thread[$D[U[t],t]$ == Join[$\{D[\phi[t],t]\}$, lista, $\{D[\omega[t],t]\}$]];

(*Risolve il sistema di ODE's nella variabile t con le condizioni date*)

lines = NDSolve[{eqns, initc}, $U[t]$, $\{t,0,T\}$]

(*Effettua un plot delle linee caratteristiche della soluzione approssimata*)

(*ParametricPlot3D [Evaluate [Table [$\{a+ih_n, t$, First $[u_i[t]$/.lines]} , $\{i,0,n\}$]] , $\{t,0,T\}$,

PlotRange → All, AxesLabel → {x, t, u}] ; *)

]

****

Per l'estrazione del valore numerico della soluzione approssimata con una delle due funzioni precedenti usiamo la funzione giàdescritta per il Jump-Diffusion.

(*Estrae la soluzione nel punto (Log[St], t1) $\in [a,b]\times[0,T]$

interpolando linearmente i valori di u nei punti prossimi al valore voluto*)

price[n_, St_, t1_, solution_]:=Module[

$\{U, h = \frac{b-a}{n}\}$,

U[t_]:=Table $[u_i[t], \{i, 0, n\}]$;

$U[t]$ = solution$[t]$;

For[$i = 0, i \leq n, i$++, If[$(a + ih) \leq$ Log[St]&&Log[St] $\leq (a + (i + 1)\ h)$,

res $= \frac{1}{h}\left((a + (i + 1)h - \text{Log[St]})u_i[t] + (\text{Log[St]} - (a + ih))u_{i+1}[t]\right)$

/.First@solution/.($t \to$ t1)]];

res]

****

Metodo Monte Carlo per il VG

Quello che segue è un codice di simulazione di tipo Monte Carlo per il calcolo del prezzo di un'opzione Call europea in un modello VG.

montecarloVG[SS_, r_, $\sigma\sigma$_, μ_, σj_, v_, T_, K_, M_, NN_]:=Module[

$\{\frac{T}{NN}$, XT},

ricorsione[x_]:=

Block[{Z = RandomVariate[NormalDistribution[], M],

W = RandomVariate[NormalDistribution[], M],

S = RandomVariate[GammaDistribution[$\frac{dt}{v}, v$], M]},

$N\left[x + \mu S + \sigma \mathrm{j} W\sqrt{S} + \left(r - \frac{(\sigma\sigma[t,x])^2}{2} + k\right)\mathrm{dt} + (\sigma\sigma[t,x])Z\sqrt{\mathrm{dt}}\right]\right]$;

$$\mathrm{XT} = \mathrm{Nest}[\mathrm{ricorsione}, \mathrm{Log}[\mathrm{SS}], \mathrm{NN}];$$
$$\mathrm{res} = \left\{ e^{-rT}\mathrm{Mean}[\mathrm{payoff}[\mathrm{XT}, K]], \frac{\mathrm{StandardDeviation}[e^{-rT}\mathrm{payoff}[\mathrm{XT}, K]]}{\sqrt{M}} 1.96 \right\}$$
]

Bibliografia

[1] A. Pascucci, PDE and Martingale Methods in Option Pricing, 2011, *B&SS Bocconi & Springer Series*, **719**.

[2] Stefano Pagliarani, A. Pascucci and Candia Riga, Adjoint Expansions in local Lv́y models , 2011, *Working papers series.*

[3] Y. Kwon, Numerical methods of partial integro-differential equations for option price, 2011, *Trends in Mathematics - New Series, Vol. 13, No 1*, **5**.

[4] R. Cont and E. Voltchkova, A finite difference scheme for option pricing in jump diffusion and exponential Lévy models, 2005, *SIAM J, 43*, **1596-1626**.

[5] R. Cont and E. Voltchkova, Integro-differential equations for option prices in exponential Lévy models, 2005, *Finance Stochast. 9*, **299-325**.

[6] Y. D'Haullin and P.A.Forsyth and K.R.Vetzal , Robust numerical methods for contingent claims under jump-diffusion processes, 2005, *IMA Journal of Numerical Analysis 25*, **87-112**.

[7] A.A.F.Saib and M.Bhuruth, Option Pricing for jump diffusion models under exponential Lévy models using Mathematica, 2008, *Research Week 2008, University of Mauritius*, **1-5**.

[8] A.Almendral and C.W.Ooserlee, Numerical valutation of options with jumps in the underlying, 2005, *Applied Numerical Mathematics, 53*, **1-18**.

[9] J.Zhao and R.M.Corless, Compact finite difference method for integro-differential equations, -, **1-24**.

[10] K.Sato, Lévy processes and infinitely divisible distributions, 1999, *Cambridge University Press.*

[11] D.B.Madan, P.P.Carr and E.C.Chang, The Variance Gamma Process and Option Pricing, 1998 *European Finance Review 2.*, **79-105**.

[12] F.Fiorani, Option Pricing under the Variance Gamma Process, 2004 *MPRA Paper No. 15395*, **1-24**.

[13] A.Bentata and R.Cont, Forward equations for option prices in semimartingale models, 2011 *Paper*, **1-33**.

[14] P.K.Fritz, S.Gerhold and M.Yor, How to make Dupire's local volatility work with jumps, 2013 *Preprint*, **1-7**.

Ringraziamenti

Vorrei esprimere la mia gratitudine verso il professore Andrea Pascucci per avermi seguito costantemente nell'attività di tesi, assecondando le mie predisposizioni e condividendo con me le sue idee; ci terrei a ringraziarlo per la sua disponibile pazienza anche di fronte a codici incomprensibili e zeppi di errori che (mio malgrado) mi è capitato di sottoporgli.
Ringrazio tutta la mia famiglia, tra tutti i miei genitori e i miei nonni per avermi protetto sempre con amore, lasciando crescere il mio carattere e guidandomi anche negli errori. Ringrazio mio fratello Stefano, la persona più buona che io conosca.
Un grazie speciale a tutti i miei amici, che ho visto crescere in questi anni (e non solo in numero), per aver contribuito a fare di me quello che sono e per essere sempre con me, nonostante le distanze e i mutamenti di questi ultimi cinque anni, anni che ricorderò senza dubbio come i più intensi della mia vita.