Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Modelli di teoria degli insiemi

Tesi di Laurea in Logica Matematica

Relatore:
Piero Plazzi

Presentata da:
Giacomo Gualandi

Seconda Sessione
Anno Accademico 2011/2012

Vicino conta solo a bocce.

T. Tonelli

Prefazione

Nei primi anni del novecento il matematico David Hilbert era profondamente convinto che si potesse assiomatizzare tutta la matematica e che quindi, partendo da un sistema di assiomi consistente e effettivamente dato, si potesse ricavare una dimostrazione per ogni formula "vera" in un modello qualunque e quindi in particolare riteneva possibile dimostrare ogni "verità" del modello standard dell'aritmetica. In quegli stessi anni il matematico di origine ungherese John von Neumann, sotto la supervisione di Hilbert, iniziò a dedicarsi alla logica matematica e si fece portabandiera dell'approccio assiomatico del maestro. Durante i suoi studi von Neumann introdusse i concetti odierni di numero ordinale e di numero cardinale, definizioni che sono rimaste immutate fino ai giorni nostri, utilizzando per la prima volta l'idea di insieme transitivo, che si rivelerà poi di fondamentale importanza per i lavori seguenti.

Ma una svolta decisiva la diedero nei primi anni trenta i teoremi di Gödel, i quali affermano l'esistenza di enunciati che non possono né essere refutati né essere dimostrati all'interno dell'aritmetica e l'impossibilità di dimostrare all'interno di una teoria sufficientemente potente la consistenza della stessa. In particolare l'impossibilità di dimostrare la consistenza dell'aritmetica implica l'impossibilità di dimostrare la consistenza della teoria standard degli insiemi ZF. Questo determinò una svolta nelle ricerche sui fondamenti della Matematica: oggi in esse in primo luogo si assume la consistenza di ZF. Per dimostrare allora la consistenza di una determinata formula in relazione alla teoria degli insiemi si cerca un sottomodello di ZF che sia modello dell'intera teoria con l'aggiunta della formula in questione; l'assunzione della consistenza di ZF porta come conseguenza l'esistenza di un modello per l'intera teoria, modello che non è troppo restrittivo supporre transitivo, a questo punto ogni sottomodello descritto da una formula che non è a sua volta un elemento del modello sarà chiamato classe propria.

Le prime formule indecidibili di interesse vero per la Matematica sono state l'assioma di scelta e l'ipotesi del continuo, le quali sono state dimostrate da

Gödel essere consistenti con la teoria di Zermelo-Fraenkel; infatti, utilizzando anche la nozione di numero ordinale introdotta da von Neumann, Gödel costruì una classe di insiemi modello per la teoria di Zermelo-Fraenkel con l'aggiunta sia dell'assioma della scelta che dell'ipotesi del continuo (insiemi costruibili).
Vediamo ora come è strutturata la tesi:

- nel primo capitolo richiamiamo i concetti base che saranno utilizzati all'interno della tesi per arrivare ai risultati di consistenza, in particolare introduciamo la teoria di Zermelo-Fraenkel (ZF) e ricordiamo le definizioni e le principali proprietà dei numeri ordinali e cardinali.

- Il secondo capitolo introduce e sviluppa le nozioni di relativizzazione e assolutezza: questi concetti saranno di fondamentale importanza. Infatti, data una formula qualunque, il concetto di relativizzazione ci permetterà di "restringere" tale formula a una classe più piccola di elementi, mentre il concetto di assolutezza ci dirà quando tale restrizione non altera il significato essenziale della formula.
  Per una descrizione di queste e altre tecniche di logica matematica vedi anche [A1], [A2] e [K].

- Nel terzo capitolo introduciamo le classi degli insiemi definibili e degli insiemi definibili in termini di ordinali, le quali, oltre a servirci negli sviluppi futuri, ci offrono il primo esempio di modello della teoria ZFC e quindi una prova della consistenza dell'assioma di scelta AC con ZF.

- Nel quarto e ultimo capitolo introdurremo la classe degli insiemi costruibili e mostreremo i risultati ottenuti da Gödel con tale classe, ossia proveremo che la classe dei costruibili è un modello di $ZFC + GCH$ da cui segue la consistenza di GCH con ZFC, dove GCH è la consueta sigla per indicare l'ipotesi generalizzata del continuo.

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Lo scopo di questo primo capitolo è quello di fornire al lettore una base all'esposizione che seguirà, tralasciando tutta la teoria relativa al calcolo del primo ordine per la quale si rimanda a [M]. Per i simboli di connettivo e di quantificatore ci si può limitare ad alcuni di essi, definendo poi gli altri. In questo contesto è comodo usare $\neg, \wedge, \exists$. ZF è una teoria del primo ordine con uguagliaza in cui è possibile una analoga economia di simboli propri: si può usare soltanto $\in$ definendo poi tutti gli altri.

§1. Un sistema di assiomi

Vediamo in questa sezione i principali assiomi della teoria di Zermelo-Fraenkel, da qui in avanti abbreviata con ZF, e un loro intuitivo significato.

Assioma 1. *Estensionalità*

$$\forall x\, \forall y\, (\forall z\, (z \in x \iff z \in y) \implies x = y).$$

Estensionalità ci dice che ogni insieme è determinato dai suoi elementi.

Assioma 2. *Schema di comprensione*
Per ogni formula ϕ, con y variabile non libera, la chiusura universale della seguente fbf è un assioma:

$$\exists y\, \forall x\, (x \in y \iff x \in z \wedge \phi).$$

L'insieme y, la cui esistenza è garantita dall'assioma appena introdotto, è unico per l'assioma di estensionalità e sarà denotato con

$$\{x : x \in z \wedge \phi\} \qquad \text{oppure} \qquad \{x \in z : \phi\}$$

Per una data formula $\phi(x)$ non necessariamente esiste un insieme del tipo $\{x : \phi(x)\}$, infatti questa collezione potrebbe essere troppo grande per formare un insieme; lo schema di comprensione dice che se questa collezione è una sotto-collezione di un insieme dato, allora è un insieme anch'essa.
Notiamo esplicitamente che la restrizione posta sulla ϕ è fondamentale per eliminare delle patologie relative agli insiemi auto-definenti, inoltre osserviamo che questo assioma è uno schema di assiomi, in quanto per ogni formula ϕ abbiamo un assioma diverso.

Assioma 3. *Assioma potenza*

$$\forall x \, \exists y \, \forall z \, (z \subseteq x \implies z \in y).$$

Dove la scrittura $a \subseteq B$ non sarà altro che l'abbreviazione della formula $\forall x \, (x \in A \implies x \in B)$.
L'assioma potenza mi assicura che, all'interno di ZF, ogniqualvolta maneggiamo una collezione di sottoinsiemi di un insieme stiamo maneggiando un insieme.

Definizione 1.1. *Dato un qualunque insieme x definiamo il suo insieme delle parti $\mathscr{P}(x)$ come*

$$\mathscr{P}(x) = \{z : z \subseteq x\}$$

Lo schema di comprensione e l'assioma potenza giustificano questa definizione.

Assioma 4. *Assioma della coppia*

$$\forall x \, \forall y \, \exists z \, (x \in z \wedge y \in z).$$

Mediante l'assioma della coppia per ogni insiemi x e y sappiamo che esiste un insieme z che contiene x e y come suoi elementi, pertanto lo schema di comprensione e l'assioma di estensionalità ci garantiscono che esiste ed è unico unico l'insieme $\{v \in z : v = x \vee v = y\}$ contenente esattamente x e y; indicheremo questo insieme con $\{x, y\}$.

Assioma 5. *Assioma di unione*

$$\forall \mathfrak{F} \, \exists A \, \forall y \, \forall x \, (x \in y \wedge y \in \mathfrak{F} \implies x \in A)$$

Dobbiamo pensare a $\mathfrak{F}$ come una famiglia di insiemi; allora questo assioma postula l'esistenza di un insieme A contenente tutti gli elementi di tutti gli insiemi contenuti in $\mathfrak{F}$; ripetendo il ragionamento precedente ne segue che tramite comprensione e estensionalità esiste ed è unica l'unione della famiglia $\mathfrak{F}$, che indicheremo con

$$\bigcup \mathfrak{F} = \{x : \exists y \in \mathfrak{F} \, (x \in y)\}$$

Assioma 6. *Schema di rimpiazzamento*
Per ogni formula ϕ, con y variabile non libera, la chiusura universale della seguente fbf è un assioma:

$$\forall x \in A \;\; \exists! \, y \, \phi(x, y) \implies \exists B \, \forall x \in A \;\; \exists y \in B \, \phi(x, y).$$

La giustificazione intuitiva di questo assiome si ottiene supponendo che sia verificato $\forall x \in A \;\; \exists! \, y \, \phi(x, y)$, allora, posto $B = \{y : \exists x \in A \;\; \phi(x, y)\}$, verrebbe naturale pensare che B sia sufficientemente piccolo per essere un insieme, siccome, intuitivamente, dovrebbe avere cardinalità al più uguale a quella di A. Questo assioma, insieme a comprensione, mi permette di dire che

$$\{y : \exists x \in A \;\; \phi(x, y)\}$$

esiste come insieme.

Assioma 7. *Assioma dell'infinito*

$$\exists x \, (0 \in x \wedge \forall y \in x (y \cup \{y\} \in x)).$$

Intuitivamente $y \cup \{y\}$ rappresenta l'operatore successore; detto ciò il seguente assioma garantisce in ZF l'esistenza di un elemento di cardinalità più che finita.

Da qui in avanti dato un insieme y l'operatore $y \to y \cup \{y\}$ verrà indicato con la lettera S e prenderà il nome di successore insiemistico.

Assioma 8. *Assioma di regolarità*

$$\forall x\,[\exists y\,(y \in x) \implies \exists y\,(y \in x \wedge \neg \exists z\,(z \in x \wedge z \in y))].$$

Questo assioma è l'unico assioma di ZF che non è intuitivo altresì è l'unico assioma di ZF che fornisce una limitazione all'universo del discorso.

Verrà introdotto nella prossima sezione l'ultimo assioma che anche se non viene generalmente considerato parte integrante degli assiomi della teoria degli insiemi per noi sarà considerato tale; questi nove assiomi rappresentano l'ossatura della teoria ZFC che rappresenterà la base di tutti gli sviluppi seguenti, notiamo esplicitamente che questo sistema di assiomi non è l'unica assiomatizzazione della matematica moderna, ma solamente il sistema assiomatico da noi scelto.

§1.1. Altre notazioni

In questa breve sezione introdurremo la notazione che utilizzeremo in tutta la tesi e ricorderemo le definizioni principali.

Grazie allo schema di comprensione e all'assioma di estensionalità, si prova che esiste un unico insieme privo di elementi, indicheremo generalmente tale insieme con il simbolo 0.

L'assioma della coppia ci permette di definire in maniera rigorosa il concetto di coppia ordinata come si fa generalmente in matematica, ossia poniamo $< x, y >= \{\{x\}, \{x, y\}\}$; per cui in maniera altrettanto naturale possiamo definire il concetto di prodotto cartesiano di due insiemi, di relazione e di funzione, fermo restando che per dare queste definizioni si fa un uso massiccio degli assiomi introdotti precedentemente.

Introducendo lo schema di comprensione abbiamo osservato esplicitamente che non è detto che a ogni fbf sia associato un insieme, nonostante questo spesso risulta comodo lavorare con fbf considerandole oggetti simili a insiemi, questi oggetti vengono chiamati classi, ad esempio $\mathbf{V}$ è la collezione formata da tutti gli insiemi, e questa è una classe individuata da $x = x$ ed è una classe propria, ossia non è un insieme, per il paradosso di Russell. Se ϕ è una qualunque fbf chiamiamo classe l'oggetto $\{x \in \mathbf{V} : \phi\}$. Estendiamo la terminologia insiemistica alle classi, ma non i relativi assiomi.

Definizione 1.2. *Data una classe di insiemi non vuota $\mathfrak{F}$ definiamo $\bigcap \mathfrak{F}$ come*

$$\bigcap \mathfrak{F} = \{x : \forall y \in \mathfrak{F} (x \in y)\}$$

Per convenzione se la classe $\mathfrak{F}$ è vuota la sua intersezione sarà l'insieme vuoto.

Questa definizione anche nel caso in cui $\mathfrak{F}$ sia una classe è corretta grazie agli assiomi di comprensione e di estensionalità.
Introduciamo ora un ultimo assioma equivalente all'assioma di scelta [M. Ch. 4, §4.5].

Definizione 1.3. *Un buon ordine è una coppia ordinata $< A, R >$ dove A è un insieme e R è una relazione tale che:*

R è irriflessiva su A:

$$\forall x \in A(\neg(xRx)).$$

R è transitiva su A:

$$\forall x, y, z \in A(xRy \wedge yRz \implies xRz),$$

Inoltre ogni sottoinsieme di A non vuoto contiene un elemento z che è minimo per la relazione R, ossia

$$\forall B \subseteq A \; \exists z \in B \; \forall x \in B(\neg xRz).$$

Utilizzando questa definizione introduciamo l'assioma di buon ordinamento.

Assioma 9. *Assioma di buon ordinamento*

$$\forall A \, \exists R \, (R \text{ ben ordina } A).$$

La teoria che ha come assiomi tutti gli assiomi di ZF e l'assioma di scelta, o equivalentemente l'assioma di buon ordinamento appena introdotto, verrà indicata in seguito con ZFC.

§2. Numeri ordinali

Definizione 1.4. *Un insieme x si dice transitivo se ogni suo elemento è anche un suo sottoinsieme, ossia se*

$$\forall z \in x \, (z \subset x).$$

Definizione 1.5. *x si dice ordinale se x è transitivo e ben ordinato dalla classe-relazione $\in$.*

Vediamo ora che, definito

$$\mathbf{ON} = \{x : x \text{ è } \mathit{ordinale}\}$$

questa collezione non è un insieme; per fare questo enunciamo alcuni risultati per la cui dimostrazione vedi [K Ch. I, §7].

Teorema 1.1.

1) *Se x è un ordinale e $y \in x$, allora y è un ordinale e inoltre vale che $y = \{z \in x : z \in y\} = pred(x, y)$.*

2) *Se x e y sono ordinali simili ($x \cong y$), ossia esiste una funzione biunivoca f da x a y tale che $\forall z, w \in x(z \in w \implies f(z) \in f(w))$, allora $x = y$.*

3) *Se x e y sono ordinali allora esattamente una delle seguente affermazioni è esatta, $x = y, x \in y$ oppure $y \in x$.*

4) *Se x, y e z sono ordinali tali che $x \in y$ e $y \in z$ allora $x \in z$.*

5) *Se C è una classe non vuota di ordinali vale il principio del minimo, ossia $\exists x \in C \, \forall y \in C(x \in y \vee x = y)$.*

6) Un insieme A di ordinali che contiene x e contiene tutti gli elementi $y \in x$ è un ordinale, in altre parole un insieme transitivo di ordinali è un ordinale.

Dando per scontato questo teorema si prova facilmente che **ON** è una classe propria, infatti se cosi non fosse avremmo $\mathbf{ON} \in \mathbf{ON}$ e questo va contro a 3).

Teorema 1.2. *Dato un qualunque insieme B dotato di una relazione R che lo ben ordina esiste un unico ordinale y tale che $< B, R > \cong y$.*

Questo teorema ci permette di dare la seguente

Definizione 1.6. *Se $< A, R >$ è ben ordinato chiamiamo tipo(A, R) l'unico ordinale $C \cong < A, R >$.*

Quando parleremo di insiemi ordinali, per i quali useremo generalmente le lettere greche minuscole, utilizzeremo la notazione $\alpha < \beta$ intendendo $\alpha \in \beta$, mentre con la notazione $\alpha \leq \beta$ intenderemo $\alpha < \beta \vee \alpha = \beta$; osserviamo esplicitamente che con la notazione appena introdotta $\alpha < \beta \iff \alpha \subset \beta$ e $\alpha \leq \beta \iff \alpha \subseteq \beta$.
La definizione data in generale di $S(y)$, nel caso particolare in cui l'insieme y è un ordinale, prende il significato intuitivo di successore e vale il seguente

Lemma 1.1. *Dato un numero ordinale β l'insieme $S(\beta)$ è un ordinale chiamato ordinale successore di β.*

Definizione 1.7. *α si dice ordinale successore se $\exists \beta\, (\alpha = S(\beta))$, inoltre $\alpha \neq 0$ si dice ordinale limite se non è un ordinale successore.*

Definizione 1.8. *α si dice numero naturale se $\forall \beta \leq \alpha(\beta = 0 \vee \beta$ è un ordinale successore$)$.*

Con la classificazione dei numeri ordinali da noi fatta si può generalizzare il concetto di induzione sui numeri naturali a tutti gli ordinali; questa generalizzazione prende il nome di induzione transfinita (vedi 2, §2).

Osservazione 1. Notiamo che i numeri naturali rappresentano il segmento iniziale degli ordinali, e possono essere considerati come gli ordinali ottenibili da 0 applicando S un numero finito di volte.
Formalmente definiamo

$$\omega = \bigcap \{x : x \textit{ verifica l'assioma dell'infinito}\}$$

ne segue che ω è ben definito come insieme ed è un ordinale, inoltre ω altro non è che l'insieme formato da tutti i numeri naturali $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, infatti sicuramente $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ verifica l'assioma dell'infinito, inoltre ogni insieme che verifica l'assioma dell'infinito contiene $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$; per questo da ora in avanti considereremo $\omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
Una cosa che potremmo chiederci a questo punto è se gli oggetti appena definiti come numeri naturali siano effettivamente i numeri naturali che ognuno di noi intende, chiaramente questo quesito è più che altro un quesito filosofico in quanto a noi è sufficiente che questo insieme verifichi gli assiomi di Peano dell'aritmetica e si vede abbastanza facilmente che questo è vero [K Ch. I, §7]. Con i consueti simboli che rappresentano i numeri intendiamo $0 = \emptyset$, $1 = S(0)$, $2 = S(1)$ e via cosi.

Concludiamo questo breve ripasso sugli ordinali definendo su tutta la classe **ON** le consuete operazioni di somma e prodotto.

Definizione 1.9. *Definiamo*

$$\alpha + \beta = \textit{tipo}(\alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\}, R)$$

dove R è la seguente relazione

$$R = \{<< \xi, 0 >, < \eta, 0 >>: \xi < \eta < \alpha\} \cup$$

$$\cup \{<< \xi, 1 >, < \eta, 1 >>: \xi < \eta < \beta\} \cup [(\alpha \times \{0\}) \times (\beta \times \{1\})].$$

Osserviamo esplicitamente che con la definizione di somma appena data se α è un ordinale $\alpha + 1$ non è altro che $S(\alpha)$.

Definizione 1.10. *Per ogni* α, β

$$\alpha \cdot \beta = tipo(\beta \times \alpha, R)$$

dove R *è l'ordine lessicografico, ossia*

$$< \xi, \eta > R < \xi', \eta' > \iff (\xi < \xi' \vee (\xi = \xi' \wedge \eta < \eta')).$$

Le operazioni di somma e prodotto appena definite, anche se sui numeri naturali si comportano come le ordinarie operazioni, sono in realtà qualcosa di differente, infatti si vede che le operazioni introdotte non sono commutative su tutto **ON**. Valgono altre proprietà "aritmetiche" che giustificano la terminologia, già adottata da Cantor.
Non introduciamo l'esponenziazione ordinale, per non creare confusione con quella che introdurremo tra poco, molto diversa da essa.

§3. Numeri cardinali

In questa sezione verrà presentata velocemente la teoria dei numeri cardinali. Intuitivamente definiamo per insiemi qualunque una relazione di "grandezza" utilizzando le funzioni iniettive nel seguente modo,

Definizione 1.11.

1) $A \preceq B$ *se esiste una funzione iniettiva di* A *in* B.

2) $A \approx B$ *se esiste una funzione biunivoca di* A *su* B.

3) $A \prec B$ *se* $A \preceq B$ *e* $B \npreceq A$.

La relazione $\approx$ su **V** è una relazione di equivalenza e inoltre il teorema di Schröder-Bernstein ci dice che $A \preceq B, B \preceq A \implies A \approx B$, definiamo a questo punto il concetto di cardinalità di un insieme e di numero cardinale utilizzando $\approx$ e i numeri ordinali.

Definizione 1.12. *Se* A *può essere ben ordinato definiamo* $|A|$*, cardinalità di* A*, come il più piccolo* α *tale che* $\alpha \approx A$.

In generale nel seguito scrivendo $|A|$ verrà sottointeso che esiste una relazione R che ben ordina A. Osserviamo anche che, siccome AC è ammesso, $|A|$ è definito per ogni A, anche se indipendentemente da AC $|\alpha|$ è definito ed è minore o uguale ad α, in quanto sicuramente $\alpha \approx \alpha$.

Definizione 1.13. *α si dice numero cardinale se $\alpha = |\alpha|$.*

Equivalentemente avremmo potuto dire che α è un numero cardinale se $\forall \beta < \alpha \, (\beta \not\approx \alpha)$, useremo generalmente κ e λ per indicare i numeri cardinali.

Lemma 1.2. *I numeri naturali e l'insieme di tutti i numeri naturali ω sono numeri cardinali.*

Vediamo come la nozione di cardinalità ci permette di definire in maniera rigorosa il significato di insieme finito e insieme numerabile.

Definizione 1.14.

- *A si dice finito se $|A| < \omega$.*
- *A si dice numerabile se $|A| = \omega$.*
- *A si dice al più numerabile se $|A| \leq \omega$.*
- *A si dice infinito se non è finito e si dice più che numerabile se non è al più numerabile.*

Osserviamo esplicitamente che ancora non sappiamo se effettivamente nel nostro universo del discorso esistono insiemi più che numerabili.
Vediamo ora come è possibile definire anche sui numeri cardinali delle operazioni di somma e prodotto.

Definizione 1.15.

1) $\kappa \oplus \lambda = |\kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\}|$.

2) $\kappa \otimes \lambda = |\kappa \times \lambda|$.

Proposizione 1.1.

- *Se κ è un numero cardinale infinito e λ è un qualunque numero cardinale, $\kappa \oplus \lambda = max\{\kappa, \lambda\}$.*

- *Se κ è un numero cardinale infinito e λ è un qualunque numero cardinale maggiore di 1, $\kappa \otimes \lambda = max\{\kappa, \lambda\}$.*

Risulta facile verificare che questa definizione non coincide con quella data per gli ordinali, infatti si può osservare che entrambe le operazioni definite sono commutative e quindi si discostano sicuramente dalla definizione data nel caso infinito dei numeri ordinali. Nonostante questa discrepanza tra le due definizioni si prova che la somma e il prodotto definite su ordinali e cardinali coincidono quando si prendono in esame i numeri naturali.
Definiamo ora un'altra operazione sui numeri cardinali.

Definizione 1.16. ${}^{B}A = \{f : f \text{ è una funzione} \wedge dom(f) = B \wedge Im(f) \subseteq A\}$.

Osserviamo esplicitamente che ${}^{B}A \subset \mathscr{P}(A \times B)$ per definizione di funzione, quidi la definizione è ben posta per l'assioma potenza.

Definizione 1.17. *(AC).*$\kappa^{\lambda} = |{}^{\lambda}\kappa|$

In generale si prova che ogni cardinale infinito è un ordinale limite, quindi l'esistenza di questi insiemi è strettamente legata con l'esistenza di numeri ordinali di cardinalità maggiore di $|\omega| = \omega$; il teorema seguente ci mostra come possiamo costruire, con l'operatore $\mathscr{P}$, degli insiemi di cardinalità più che numerabile.

Teorema 1.3. *Teorema di Cantor.*

$$x \prec \mathscr{P}(x)$$

A questo punto, ammettendo AC, è immediato dedurre dal teorema di Cantor l'esistenza di insiemi di cardinalità maggiore a quella di ω, ma di fatto non è necessario ammettere AC, infatti è facile provare che dato un qualunque ordinale α è possibile costruire un cardinale κ maggiore di α.
Vediamo ora come è possibile enumerare i numeri cardinali, sfruttando una definizione modificata di successore.

Definizione 1.18. *Dato un qualunque α numero ordinale definiamo α^+ come il più piccolo cardinale maggiore di α, chiameremo α^+ successore cardinale di α.*

Osservazione 2. Dato un insieme qualunque di numeri ordinali sappiamo essere definito il minimo di tale insieme, ne viene che dato un insieme di cardinali risulta definito il minimo ordinale di tale insieme che sarà necessariamente un cardinale.

Definizione 1.19.
κ si dice cardinale successore se esiste un α per il quale $\kappa = \alpha^+$.
κ si dice cardinale limite se $\kappa > \omega$ e se non è un cardinale successore.

Definizione 1.20. $(\aleph_\alpha)$ *è definita per ricorsione transfinita su α da:*

1) $\aleph_0 = \omega$.

2) $\aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+$.

3) Per ogni γ ordinale limite, $\aleph_\gamma = sup\{\aleph_\alpha : \alpha < \gamma\}$.

Molti dei risultati riguardanti i cardinali necessitano dell'assioma della scelta, per questo motivo indicheremo esplicitamente l'assioma della scelta quando sarà assunto come ipotesi.

La prossima definizione prende nome di ipotesi del continuo ed è una congettura avanzata da Cantor alla luce del fatto che con l'assioma potenza si generano insiemi di cardinalità sempre maggiore, ma non in chiara relazione con la cardinalità di partenza e dal seguente risultato dimostrato dallo stesso Cantor $|\mathscr{P}(\omega)| = |\mathbb{R}|$.

Definizione 1.21. *(AC).L'ipotesi del continuo CH è l'asserzione $2^\omega = \aleph_1$ (esponenziazione cardinale).*
L'ipotesi del continuo generalizzata GCH è l'asserzione $\forall \alpha \, (2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1})$

Definizione 1.22. *Data* $f : \alpha \to \beta$ *diciamo che* $Im(f)$ *è illimitata in* β *se* $\forall x \in \beta\, \exists y \in Im(f)\, (x \leq y)$, *in questo caso diciamo anche che* f *è* α*-cofinita o che* β *è* α*-cofinita.*
La cofinalità di β, *che indicheremo con* $cf(\beta)$, *è il più piccolo* α *per cui esiste una funzione* α*-cofinita con dominio* β.

Enunciamo ora alcuni risultati che utilizzano la definizione appena data e che saranno utili in seguito, per la dimostrazione rimandiamo a [K Ch. I, §10].

Definizione 1.23. β *si dice regolare se è un numero ordinale limite tale che* $cf(\beta) = \beta$.

Lemma 1.3. *Se* β *è regolare allora* β *è un cardinale.*

Lemma 1.4. ω *è regolare.*

Lemma 1.5. *(AC).Se* κ *è infinito* κ^+ *è regolare.*

Questo teorema necessita dell'assioma della scelta, infatti senza tale assioma si prova essere consistente l'asserzione $cf(\aleph_1) = \omega$.

Lemma 1.6. *Se* α *è un ordinale limite vale che* $cf(\aleph_\alpha) = cf(\alpha)$.

Il lemma appena visto ci dice che se $\aleph_\alpha$ è un cardinale limite regolare allora $\aleph_\alpha = \alpha$, osserviamo però che la condizione $\aleph_\alpha = \alpha$ non è sufficiente per dire che $\aleph_\alpha$ è regolare, infatti se poniamo $\sigma_0 = \omega$, $\sigma_{n+1} = \aleph_{\sigma_n}$ e infine $\alpha = sup\{\sigma_n : n \in \omega\}$ segue che $\aleph_\alpha = \alpha$, però $cf(\alpha) = \omega$, infatti basta prendere la funzione $n \mapsto \aleph_{\sigma_n}$. Questa semplice osservazione ci suggerisce che il primo cardinale limite regolare deve essere molto grande.

Definizione 1.24.

1) κ *si dice debolmente inaccessibile se* κ *è un cardinale limite regolare.*

2) *(AC).*κ *si dice fortemente inaccessibile se* $\kappa > \omega$, κ *è regolare e*

$$\forall \lambda < \kappa\, (2^\lambda < \kappa).$$

Vedremo nei capitoli seguenti che in ZFC non è possibile provare l'esistenza di insiemi debolmente inaccessibili in quanto questo è equivalente a provare la consistenza di ZFC.

Teorema 1.4. *(AC). Se $\kappa \geq \omega$ e se (X_α) è una famiglia indicizzata da $\alpha < \kappa$ tale che $\forall \alpha \in \kappa$, $|X_\alpha| \leq \kappa$ allora $|\bigcup_{\alpha<\kappa} X_\alpha| \leq \kappa$.*

Osservazione 3. Vediamo che se κ è regolare, nel teorema precedente, i minori uguali si possono sostituire con dei minori stretti. Supponiamo quindi di avere la famiglia (X_α) e che $\forall \alpha \in \kappa$, $|X_\alpha| < \kappa$ e vediamo che $|\bigcup_{\alpha<\kappa} X_\alpha| < \kappa$, innanzitutto osservo che il risultato generale vale anche in questo caso, quindi $|\bigcup_{\alpha<\kappa} X_\alpha| \leq \kappa$, rimane da provare che non esiste $g : \kappa \to \bigcup_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ iniettiva, ma questo segue dall'ipotesi di regolarità di κ infatti questa ipotesi ci assicura che non può esistere una applicazione tra X_α e κ la cui immagine è illimitata in κ, ne segue che g non può esistere siccome se esistesse l'inversa della funzione $h : \kappa \to Im(g)$ ristretta ad un opportuno α avrebbe immagine illimitata in κ siccome non posso ottenere κ come somma di α ordinali di cardinalità minore di κ.

Per concludere questa sezione dimostriamo alcuni risultati che ci serviranno in seguito.

Definizione 1.25. *Se $n > 0$ si chiama funzione n-aria su A una funzione $f : A^n \to A$, chiamiamo inoltre un qualunque elemento di A una 0-funzione; una funzione n-aria per un qualche $n \in \omega$ la chiameremo funzione finita.*
Se $B \subseteq A$ diciamo che B è chiuso rispetto a f se $Im(f \restriction_{B^n}) \subseteq B$; se $\mathfrak{C}$ è un insieme di funzioni finite e $B \subseteq A$, la chiusura di B rispetto a $\mathfrak{C}$ è il più piccolo insieme $C \subseteq A$ tale che $B \subseteq C$ e C è chiuso rispetto ad ogni funzione di $\mathfrak{C}$.

Teorema 1.5. *(AC).Sia κ un cardinale infinito e sia $B \subseteq A$ tale che $|B| \leq \kappa$, allora, se $\mathfrak{C}$ è un insieme di cardinalità minore o uguale a κ di funzioni finite su A, la chiusura di B rispetto $\mathfrak{C}$ ha cardinalità minore o uguale a κ.*

Dimostrazione. Se $f \in \mathfrak{C}$ e $D \subseteq A$ poniamo $f * D = Im(f \restriction_{D^n})$ se f ha indice n, mentre $f * D = \{f\}$ se f ha indice 0, e notiamo che $|D| \leq \kappa \implies$

$|f * D| \leq \kappa$, infatti $|f * D| \leq |D^n|$; inoltre, siccome κ è un cardinale infinito $|D^n| \leq \kappa$.
Sia ora $C_0 = B$ e ricorsivamente $C_{n+1} = C_n \cup \bigcup\{f * C_n : f \in \mathfrak{C}\}$, ne segue che $|C_n| \leq \kappa$ per ogni $n \in \omega$, per quello detto precedentemente e siccome $|B| \leq \kappa$, da cui $C_\omega = \bigcup_n C_n$ ha cardinalità minore o uguale a κ; rimane da provare che C_ω è effettivamente la chiusura di B, ma questo segue per costruzione. $\square$

Capitolo 2

Relativizzazione e assolutezza

In questo capitolo vogliamo introdurre i concetti di relativizzazione e assolutezza i quali saranno utili per le dimostrazioni di consistenza, ossia per vedere se la teoria ZFC con l'aggiunta di assiomi come CH o la sua negazione è consistente.

§1. Relativizzazione

Definizione 2.1. *Sia $\boldsymbol{M}$ una qualunque classe, cioè un fbf, allora per ogni formula ϕ definiamo $\phi^{\boldsymbol{M}}$, la relativizzazione di ϕ in $\boldsymbol{M}$, per ricorsione come:*

a) $(x = y)^{\boldsymbol{M}}$ *è* $x = y$.

b) $(x \in y)^{\boldsymbol{M}}$ *è* $x \in y$.

c) $(\phi \wedge \psi)^{\boldsymbol{M}}$ *è* $\phi^{\boldsymbol{M}} \wedge \psi^{\boldsymbol{M}}$.

d) $(\neg\phi)^{\boldsymbol{M}}$ *è* $\neg(\phi^{\boldsymbol{M}})$.

e) $(\exists x\, \phi)^{\boldsymbol{M}}$ *è* $\exists x\, (x \in \boldsymbol{M} \wedge \phi^{\boldsymbol{M}})$.

In sostanza possiamo dire che $\phi^{\mathbf{M}}$ non è altro che la formula ϕ nella quale ogni quantificatore del tipo $\exists x$ è stato sostituito con $\exists x \in \mathbf{M}$.
Osserviamo che la definizione da noi data è esplicita solo per gli operatori

elementari anche se si vede immediatamente, facendo le consuete abbreviazioni, che $(\phi \vee \psi)^{\mathbf{M}}$ è $\phi^{\mathbf{M}} \vee \psi^{\mathbf{M}}$, e che $(\forall x\, \phi)^{\mathbf{M}}$ è $\forall x\, (x \in \mathbf{M} \implies \phi^{\mathbf{M}})$. Notiamo esplicitamente che la definizione che abbiamo dato di relativizzazione definisce la relativizzazione di ogni formula ϕ in maniera iterativa, in quanto noi abbiamo dato la definizione esplicita solo per i simboli di $=$ e di $\in$; questo a livello teorico non crea nessun problema, solamente che in concreto è abitudine scrivere le formule non in funzione delle sole $=, \in$.

Definizione 2.2. *Diremo che l'insieme di fbf S è vero in $\boldsymbol{M}$, oppure che $\boldsymbol{M}$ è un modello di S, intendendo che ogni fbf di S è vera in $\boldsymbol{M}$.*

Lemma 2.1. *Siano S e T due insiemi di fbf della teoria degli insiemi e supponiamo che esista almeno una classe $\boldsymbol{M}$ per la quale si possa provare in T che $\boldsymbol{M} \neq 0$ e che $\boldsymbol{M}$ è un modello di S. Allora*

$$Con(T) \implies Con(S)$$

Dimostrazione. Se S fosse inconsistente vorrebbe dire che è possibile provare $\psi \wedge \neg\psi$ per una qualche fbf ψ, quindi, siccome in T è possibile provare la relativizzazione a $\mathbf{M}$ di ogni fbf di S ne segue che in T posso provare $\psi^{\mathbf{M}} \wedge \neg\psi^{\mathbf{M}}$, ossia T non è consistente, e questo è assurdo. $\square$

Vediamo ora quand'è che la relativizzazione a $\mathbf{M}$ dei nostri assiomi è vera in $\mathbf{M}$. Studiamo in primo luogo l'assioma di estensionalità; la relativizzazione dell'assioma di estensionalità a una classe $\mathbf{M}$ è per definizione

$$\forall x, y \in \mathbf{M}\, (\forall z \in \mathbf{M}\, (z \in x \iff z \in y) \implies x = y)$$

Risulta quindi evidente che se prendiamo una classe $\mathbf{M}$ transitiva possiamo sempre considerare valida la relativizzazione dell'assioma di estensionalità in $\mathbf{M}$:

Lemma 2.2. *Se $\boldsymbol{M}$ è una classe transitiva allora l'assioma di estensionalità è vero in $\boldsymbol{M}$.*

Per lo schema di comprensione in generale non possiamo fare una trattazione cosi immediata, quello che possiamo però fare è ridurre l'assioma a una proprietà chiusa che deve soddisfare $\mathbf{M}$ affinchè valga lo schema di comprensione.

Lemma 2.3. *Supponiamo che per ogni formula $\phi(x, z, w_1, \ldots, w_n)$ valga*

$$\forall z, w_1, \ldots, w_n \in \boldsymbol{M}(\{x \in z : \phi^{\mathbf{M}}(x, z, w_1, \ldots, w_n)\} \in \boldsymbol{M})$$

allora lo schema di comprensione è vero in $\boldsymbol{M}$.

Dimostrazione. La relativizzazione dello schema di comprensione ci dice che per ogni ϕ fbf

$$\forall z, w_1, \ldots, w_n \in \mathbf{M} \, \exists y \in \mathbf{M} \, (x \in z \iff x \in z \wedge \phi^{\mathbf{M}}(x, z, w_1, \ldots, w_n))$$

fissiamo quindi $z, w_1, \ldots, w_n$ e poniamo $y = \{x \in z : \phi^{\mathbf{M}}(x, z, w_1, \ldots, w_n)\}$, il quale $\in \mathbf{M}$ per ipotesi, ne segue che per ogni x, e quindi per ogni $x \in \mathbf{M}$,

$$x \in y \implies \phi^{\mathbf{M}}(x, z, w_1, \ldots, w_n)$$

e, siccome per costruzione di y abbiamo che $x \in y \implies x \in z$, risulta provata la relativizzazione dello schema di comprensione. □

La condizione espressa nel lemma appena dimostrato può essere di difficile verifica, specialmente negli esempi più complessi, tuttavia per il lavoro trattato in questa tesi questa verifica risulterà immediata siccome varrà quasi sempre la condizione sufficiente espressa in questo corollario.

Corollario 2.1. *Se $\forall z \in \boldsymbol{M}(\mathscr{P}(z) \subset \boldsymbol{M})$, allora lo schema di comprensione è vero in $\boldsymbol{M}$.*

Teorema 2.1. *In ZF se $\boldsymbol{M} = \{0\}$ allora gli assiomi di estensionalità e di comprensione insieme a $\forall y \, (y = 0)$ sono veri in $\boldsymbol{M}$.*

Dimostrazione. Innanzitutto diciamo che con $\forall y \, (y = 0)$, dal momento che 0 è un simbolo definito, intendiamo che $\forall y \, \forall x \, (x \notin y)$ che quindi è vera in $\mathbf{M}$ siccome $0 \notin 0$. L'assioma di estensionalità vale in $\mathbf{M}$ perchè è una classe transitiva non vuota, infine lo schema di comprensione vale siccome ogni sottoinsieme di un qualunque elemento di $\mathbf{M}$ è contenuto in $\mathbf{M}$. $\square$

Da questo teorema segue quindi il seguente.

Corollario 2.2.

$$Con(ZF) \implies Con(Estensionalità + Comprensione + \forall y\,(y = 0)).$$

Osservazione 4. Studiamo come possiamo scrivere la relativizzazione di $\subseteq$ e di $\mathscr{P}$ rispetto a una classe $\mathbf{M}$ generica; per definizione

$$z \subseteq x \iff \forall v\,(v \in z \implies v \in x)$$

quindi

$$(z \subseteq x)^{\mathbf{M}} \iff \forall v \in \mathbf{M}\,(v \in z \implies v \in x)$$

ossia la relativizzazione di $z \subseteq x$ altro non è che $z \cap \mathbf{M} \subseteq x$. A questo punto possiamo facilmente relativizzare l'assioma potenza, il quale dice che

$$\forall x\,\exists y\,\forall z\,(z \subseteq x \implies z \in y)$$

la cui relativizzazione sarà

$$\forall x \in \mathbf{M}\,\exists y \in \mathbf{M}\,\forall z \in \mathbf{M}\,(z \cap \mathbf{M} \subseteq x \implies z \in y)$$

Osserviamo che nel caso in cui $\mathbf{M}$ sia una classe transitiva, nella quale quindi $z \cap \mathbf{M} = z$ se $z \in \mathbf{M}$, si ottiene che se $x, y \in \mathbf{M}$ allora

$$(x \subseteq y)^{\mathbf{M}} \iff x \subseteq y$$

quindi per $\mathbf{M}$ transitiva l'assioma potenza diventa

$$\forall x \in \mathbf{M}\,\exists y \in \mathbf{M}\,\forall z \in \mathbf{M}\,(z \subseteq x \implies z \in y).$$

Per questo motivo, data l'importanza della transitività, d'ora in avanti tutte le classi $\mathbf{M}$ considerate saranno da ritenersi transitive salvo contrario avviso.

L'osservazione appena fatta mostra come provare la validità dell'assioma potenza all'interno di una classe $\mathbf{M}$, vediamo ora come lavorare con l'assioma della coppia e l'assioma di unione, osserviamo allora che questi due assiomi saranno validi in $\mathbf{M}$ se le operazioni di coppia e di unione sono chiuse all'interno della classe $\mathbf{M}$ ossia se risulta verificata la seguente proprietà.

Proprietà 2.1. *Se $\forall x, y \in \boldsymbol{M} \, \exists z \in \boldsymbol{M} \, (x \in z \wedge y \in z)$, ossia dati due elementi di $\boldsymbol{M}$ esiste in $\boldsymbol{M}$ un insieme che li contiene entrambi, e inoltre $\forall x \in \boldsymbol{M} \, \exists z \in \boldsymbol{M} \, (\bigcup x \subseteq z)$, ossia dato un elemento in $\boldsymbol{M}$ esiste in $\boldsymbol{M}$ un insieme che contiene l'unione dei suoi elementi; allora l'assioma di coppia e l'assioma di unione sono veri in $\boldsymbol{M}$.*

Lo schema di rimpiazzamento, come lo schema di comprensione, è in realtà uno schema di assiomi, quindi generalmente di difficile utilizzo però, come nel caso dello schema di comprensione, possiamo facilmente provare la seguente condizione che deve rispettare la classe $\mathbf{M}$ affinchè valga lo schema di comprensione.

Lemma 2.4. *Supponiamo che per ogni formula $\phi(x, y, z, w_1, \ldots, w_n)$ e ogni $(z, w_1, \ldots, w_n) \in \boldsymbol{M}$ si possa provare che: se vale*

$$\forall x \in z \, \exists! y \in \boldsymbol{M} \, \phi^{\boldsymbol{M}}(x, y, z, w_1, \ldots, w_n)$$

allora vale

$$\exists q \in \boldsymbol{M} \, (\{y : \exists x \in z \, \phi^{\boldsymbol{M}}(x, y, z, w_1, \ldots, w_n)\} \subseteq q).$$

Allora lo schema di rimpiazzamento è vero in $\boldsymbol{M}$.

Perciò se $\mathbf{M}$ è transitiva e chiusa rispetto all'operatore $\mathscr{P}$ allora è chiuso anche rispetto allo schema di rimpiazzamento.

§2. $R(\alpha)$ e WF

In questa sezione lavoreremo esclusivamente in ZF e mostreremo come sia possibile creare dei modelli per $ZF - Inf$.

Definizione 2.3. *Per ricorsione transfinita definiamo l'insieme $R(\alpha)$ per ogni $\alpha \in \boldsymbol{ON}$ come*

a) $R(0) = 0$.

b) $R(\alpha + 1) = \mathscr{P}(R(\alpha))$.

c) $R(\alpha) = \bigcup_{\xi<\alpha} R(\xi)$ *se α è un ordinale limite.*

Poniamo a questo punto

$$\mathbf{WF} = \bigcup \{R(\alpha) : \alpha \in \mathbf{ON}\}.$$

La definizione appena data di **WF** ci dice che l'insieme delle parti di ogni insieme di **WF** è contenuto in **WF** quindi automaticamente ci dice che sia l'assioma potenza che lo schema di comprensione sono validi in **WF**.

Lemma 2.5. *Per ogni α si ha che $R(\alpha)$ è transitivo e inoltre valgono le seguenti inclusioni $\forall \xi \leq \alpha\ (R(\xi) \subseteq R(\alpha))$.*

La dimostrazione di questo teorema è immediata per induzione transfinita, e ci dice che gli $R(\alpha)$ sono insiemi crescenti al crescere di α. Osserviamo esplicitamente che se $x \in \mathbf{WF}$ il più piccolo α tale che $x \in R(\alpha)$ deve necessariamente essere un ordinale successore, quindi risulta ben posta la seguente definizione.

Definizione 2.4. *Se $x \in \boldsymbol{WF}$ indichiamo con $rng(x)$ il più piccolo β tale che $x \in R(\beta + 1)$.*

Da questa definizione seguono in maniera immediata alcuni risultati.

Lemma 2.6.

1) Per ogni α, $R(\alpha) = \{x \in \boldsymbol{WF} : rng(x) < \alpha\}$.

2) Se $y \in \boldsymbol{WF}$ allora

a) $\forall x \in y\ (x \in \boldsymbol{WF} \wedge rng(x) < rng(y))$, *b)* $rng(y) = sup\{rng(x) + 1 : x \in y\}$.

Il lemma enunciato ora ci dice che la classe **WF** è transitiva e ogni suo elemento può essere costruito dagli elementi con rango minore; questo fatto esclude la possibilità di trovare all'interno di **WF** esempi patologici di collezioni auto-definenti. In particolare il risultato enunciato sopra ci dice che in **WF** vale l'assioma di estensionalità; per provare la validità dell'assioma della coppia e dell'assioma di unione all'interno di **WF** è sufficiente enunciare un lemma, la cui dimostrazione ancora una volta è il semplice utilizzo della definizione, che ci dice che le operazioni di unione e di coppia sono chiuse all'interno di **WF**.

Lemma 2.7. *Per ogni $x, y \in$ **WF** si ha che $\{x, y\}$ e $\bigcup x$ sono elementi di **WF**.*

A questo punto risulta che **WF** verifica anche l'assioma di coppia e l'assioma di unione. Prima di vedere come si comporta la classe **WF** con lo schema di rimpiazzamento enunciamo un risultato classico su **WF**.

Lemma 2.8.

$$\forall x \, (x \in \boldsymbol{WF} \iff x \subset \boldsymbol{WF}).$$

Studiamo ora lo schema di rimpiazzamento in **WF**, utilizzeremo, per mostrarne l'uso, il lemma 2.4. Sia

$$q = \{y \in \mathbf{WF} : \exists x \in z \; \phi^{\mathbf{WF}}(x, y, z, w_1, \ldots, w_n)\}$$

allora $q \subset \mathbf{WF}$, da cui $q \in \mathbf{WF}$, per quello appena visto, quindi per il lemma 2.4 **WF** verifica anche lo schema di rimpiazzamento.
Per finire rimane da provare la validità dell'assioma di regolarità, innanzitutto osservo che la relativizzazione del suddetto assioma a una classe **M** è

$$\forall x \in \mathbf{M} \, (\exists y \in \mathbf{M} \, (y \in x) \implies \exists y \in \mathbf{M} \, (y \in x \wedge \neg \exists z \in \mathbf{M} \, (z \in x \wedge z \in y))),$$

ma se $\mathbf{M} = \mathbf{WF}$ la prova di questa proprietà è una semplice verifica sulla base delle proprietà del rango, quindi in definita abbiamo costruito in ZF la classe **WF** che è un modello per gli assiomi di $ZF - Inf$.

§3. Assolutezza

Definizione 2.5. *Sia ϕ una formula con al più le variabili libere $x_1, \dots, x_n$, allora:*

1) Se $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{N}, \phi$ è assoluta per $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ se

$$\forall x_1, \dots, x_n \in \boldsymbol{M}\, (\phi^{\boldsymbol{M}}(x_1, \dots, x_n) \iff \phi^{\boldsymbol{N}}(x_1, \dots, x_n)).$$

2) ϕ è assoluta per $\boldsymbol{M}$ se ϕ è assoluta per $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{V}$ ossia se

$$\forall x_1, \dots, x_n \in \boldsymbol{M}\, (\phi^{\boldsymbol{M}}(x_1, \dots, x_n) \iff \phi(x_1, \dots, x_n)).$$

Dalla definizione appena data segue immediatamente che se $\mathbf{M} \subset \mathbf{N}$ e se ϕ e ψ sono entrambe assolute per $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ allora anche le due fbf $\neg\phi$ e $\phi \wedge \psi$ sono assolute per $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$. Questa osservazione unita al fatto che sicuramente $x = y$ e $x \in y$ sono assolute per qualunque classe $\mathbf{M}$ prova il seguente corollario.

Corollario 2.3. *Se ϕ è libera da quantificatori allora ϕ è assoluta per ogni classe $\boldsymbol{M}$.*

Sfortunatamente anche formule molto semplici e di ordinario utilizzo implicano l'utilizzo di quantificatori, quindi dovremo studiare ora come possiamo assicurarci che le formule che utilizzano quantificatori siano assolute.

Lemma 2.9. *Se $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{N}$ sono entrambe transitive e ϕ è assoluta per $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ anche $\exists x\, (x \in y \wedge \phi)$ lo è.*

Dimostrazione. Esplicitiamo nella scrittura le eventuali variabili libere di ϕ scrivendo $\phi(x, y, z_1, \dots, z_n)$, allora $\forall y, z_1, \dots, z_n \in \mathbf{M}$

$$[\exists x\, (x \in y \wedge \phi(x, y, z_1, \dots, z_n))]^{\mathbf{M}} \iff \exists x\, (x \in y \wedge \phi^{\mathbf{M}}(x, y, z_1, \dots, z_n))$$

in quanto per ipotesi $\mathbf{M}$ è transitivo, quindi la relativizzazione $\exists x \in \mathbf{M}$ è inglobata in $x \in y$, poi, utilizzando l'ipotesi di assolutezza, ho che

$$\exists x\, (x \in y \wedge \phi^{\mathbf{M}}(x, y, z_1, \dots, z_n)) \iff \exists x\, (x \in y \wedge \phi^{\mathbf{N}}(x, y, z_1, \dots, z_n))$$

e infine, siccome anche $\mathbf{N}$ è transitivo, ho che

$$\exists x\,(x \in y \wedge \phi^{\mathbf{N}}(x, y, z_1, \dots, z_n)) \iff [\exists x\,(x \in y \wedge \phi(x, y, z_1, \dots, z_n))]^{\mathbf{N}}.$$

$\square$

Se chiamiamo $\exists x \in y$ quantificazione limitata, il risultato appena dimostrato ci dice che se $\mathbf{M}$ è una classe transitiva allora la collezione delle fbf assolute per $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ è chiusa rispetto alla quantificazione limitata, più formalmente possiamo ragionare nel seguente modo.

Definizione 2.6. *Chiamiamo Δ_0 formula una qualunque formula ricavata ricorsivamente dalle seguenti regole:*

1) $x \in y$ e $x = y$ sono Δ_0 formule.

2) Se ϕ, ψ sono Δ_0 formule, allora anche $\neg\phi$ e $\phi \wedge \psi$ lo sono.

3) Se ϕ è una Δ_0 formula anche $\exists x\,(x \in y \wedge \phi)$ lo è.

Corollario 2.4. *Se $\boldsymbol{M}$ è transitiva e ϕ è una Δ_0 formula allora ϕ è assoluta per $\boldsymbol{M}$.*

Questo risultato nella pratica è di difficile utilizzo in quanto le formule più interessanti non sono Δ_0 formule, nonostante ciò utilizzato insieme al seguente lemma diventa un risultato fondamentale.

Lemma 2.10. *Supponiamo che $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{N}$ siano due classi entrambe modello per un insieme di formule S e supponiamo che*

$$S \vdash \forall x_1, \dots, x_n\,(\phi(x_1, \dots, x_n) \iff \psi(x_1, \dots, x_n))$$

allora ϕ è assoluta per $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ se e solo se ψ lo è.

Questo lemma, la cui dimostrazione segue immediatamente dalla definizione di assolutezza, ci dice in particolare che non solo ogni Δ_0 formula è assoluta per $\mathbf{M}$, ma anche che ogni formula equivalente in $\mathbf{M}$ a una Δ_0 formula è assoluta per $\mathbf{M}$; ad esempio, anche la quantificazione $\forall x \in y\, \phi$ è una quantificazione ammissibile in quanto è equivalente a $\neg\exists x \in y\, \neg\phi$.

Osservazione 5. Per introdurre i seguenti argomenti necessitiamo di alcuni concetti di relativizzazione non detti precedentemente. Relativizziamo un operatore definito all'interno della teoria degli insiemi. Supponiamo che F sia una formula definita in una teoria di assiomi S: questo vuol dire che esiste ϕ per la quale vale

$$S \vdash \forall x_1, \ldots, x_n \, \exists! y \, \phi(x_1, \ldots, x_n, y)$$

e che $F(x_1, \ldots, x_n)$ altro non è che una abbreviazione per indicare l'unico y tale che $\phi(x_1, \ldots, x_n, y)$. Ricordato questo risulta chiaro che se vogliamo parlare di relativizzazione a $\mathbf{M}$ di una formula definita dobbiamo preventivamente aver provato che

$$\forall x_1, \ldots, x_n \, \exists! y \, \phi(x_1, \ldots, x_n, y)$$

è vero in $\mathbf{M}$, quindi definiremo $F^{\mathbf{M}}(x_1, \ldots, x_n)$ come quell'unico $y \in \mathbf{M}$ tale che $\phi^{\mathbf{M}}(x_1, \ldots, x_n, y)$.

Supponiamo che sia possibile relativizzare $F(x_1, \ldots, x_n)$ alle classi $\mathbf{M}$ e $\mathbf{N}$ tali che $\mathbf{M} \subset \mathbf{N}$; quindi per quello detto nell'osservazione precedente supponiamo che sia possibile provare la formula $\forall x_1, \ldots, x_n \, \exists! y \, \phi(x_1, \ldots, x_n, y)$ in entrambe le classi, allora diamo la seguente definizione.

Definizione 2.7. *F è assoluta per $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ se lo è ϕ, ossia se $\forall x_1, \ldots, x_n \in \boldsymbol{M}$ vale che $F^{\boldsymbol{M}}(x_1, \ldots, x_n) = F^{\boldsymbol{N}}(x_1, \ldots, x_n)$.*

Vediamo ora come è possibile dimostrare in $ZFC{-}P{-}Inf$ che molte delle funzioni e definizioni ordinarie sono assolute per ogni classe $\mathbf{M}$ transitiva.

Teorema 2.2. *Le seguenti relazioni e operatori definiti in $ZFC - P - Inf$ sono equivalenti, in $ZFC - P - Inf$, a Δ_0 formule, pertanto sono assolute per ogni classe $\boldsymbol{M}$ modello (transitivo) di $ZFC - P - Inf$.*

a) $x \in y$,	*c)* $x \subseteq y$,	*e)* $\{x\}$,	*g)* 0,
b) $x = y$,	*d)* $\{x, y\}$,	*f)* $< x, y >$,	*h)* $x \cup y$,

i) $x \cap y$,	*k)* $x \cup \{x\}$,	*m)* $\bigcap x$,	*transitivo.*
j) $x \setminus y$,	*l)* $\bigcup x$,	*n)* x	

Dimostrazione. Sicuramente tutte le funzioni e relazioni definite hanno senso in $ZFC - P - Inf$, quello che faremo ora è verificare, utilizzando solo gli assiomi di $ZFC - P - Inf$, che sono equivalenti a delle Δ_0 formule. Il risultato è già stato provato per a), b) e c) quindi inizieremo da d)

$$z = \{x, y\} \iff [x \in z \wedge y \in z \wedge \forall w \in z\,(w = x \vee w = y)],$$

dove sappiamo che la formula di destra è logicamente equivalente a una Δ_0 formula siccome lo è il $\forall$, in maniera analoga si dimostra e). Ricordiamo che per definizione $< x, y >= \{\{x\}, \{x, y\}\}$, quindi

$$z = \{\{x\}, \{x, y\}\} \iff [\exists w \in z\,(w = \{x\}) \wedge \exists w \in z\,(w = \{x, y\}) \wedge$$

$$\wedge \forall w \in z\,(w = \{x\} \vee w = \{x, y\})],$$

e questo, per i punti d) ed e) è equivalente a una Δ_0 formula. Vediamo ora g), h), i) e k)

$$z = 0 \iff [\forall w \in z\,(w \notin w)].$$

$$z = x \cup y \iff [\forall w \in z\,(w \in z \vee w \in y) \wedge x \subseteq z \wedge y \subseteq z].$$

$$z = x \cap y \iff [\forall w \in x\,(w \in y \implies w \in z) \wedge z \subset x \wedge z \subset y].$$

$$z = x \cup \{x\} \iff [x \in z \wedge x \subset z \wedge \forall w \in z\,(w = x \vee w \in x)].$$

j) è analoga a i), infine vediamo i punti da l) a n)

$$x \text{ è } \textit{transitivo} \iff [\forall v \in x\, \forall z \in v\,(z \in x)].$$

$$y = \bigcup x \iff [\forall v \in x\,(v \subset y) \wedge \forall z \in y\, \exists v \in x\,(z \in v)].$$

$$y = \bigcap x \iff [\forall v \in x\,(y \subset v) \wedge \forall v \in x\, \forall z \in v\,(\forall w \in x\,(z \in w) \implies z \in y) \wedge$$

$$\wedge (x = 0 \implies y = 0)]. \qquad \square$$

Come si può intuire da alcune prove precedenti, si ha che

Lemma 2.11. *La nozione di assolutezza è chiusa rispetto alla composizione. Nelle ipotesi precedenti, supponiamo che $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{N}$ siano classi e che $\phi(x_1, \ldots, x_n)$, $F(x_1, \ldots, x_n)$ e $G_i(y_1, \ldots, y_m)$, $i = 1, \ldots, n$ siano assolute per $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ (dove F e G_i sono operatori, mentre ϕ è una formula), allora anche la formula*

$$\phi(G_1(y_1, \ldots, y_m), \ldots, G_n(y_1, \ldots, y_m))$$

e l'operatore

$$F(G_1(y_1, \ldots, y_m), \ldots, G_n(y_1, \ldots, y_m))$$

lo sono.

Dimostrazione. Dimostriamo i casi in cui $n = m = 1$ e osserviamo che questo non è restrittivo. Se $y \in \mathbf{M}$ allora

$$\phi(G(y))^{\mathbf{M}} \iff \phi^{\mathbf{M}}(G^{\mathbf{M}}(y)) \iff \phi^{\mathbf{N}}(G^{\mathbf{N}}(y)) \iff (\phi(G(y)))^{\mathbf{N}}$$

siccome $G^{\mathbf{M}}(y) = G^{\mathbf{N}}(y)$ e ϕ è assoluta per $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$. Similmente

$$F(G(y))^{\mathbf{M}} = F^{\mathbf{M}}(G^{\mathbf{M}}(y)) = F^{\mathbf{N}}(G^{\mathbf{N}}(y)) = (F(G(y)))^{\mathbf{N}}$$

□

Osservazione 6. Vediamo ora un esempio in cui abbiamo applicato il lemma precedente per dimostrare che la nozione di coppia ordinata è assoluta per ogni modello transitivo di $ZF - P - Inf$, sulla base del fatto che l'operatore coppia ordinata lo è.
z è una coppia ordinata $\iff$ $(\exists x \in \bigcup z\ )(\exists y \in \bigcup z\ )(z =< x, y >)$ e questa è una formula ottenuta tramite sostituzione di operatori assoluti in relazioni assolute, per l'esattezza

$$z \text{ è una coppia ordinata} \iff \phi(G_1(z), G_2(z), G_3(z))$$

dove $G_1(z) = G_2(z) = \bigcup z$ che è assoluto per il teorema 2.2, mentre $G_3(z) = z$ che è anch'esso assoluto, infine $\phi(a, b, c)$ è

$$\exists x \in a\, \exists y \in b\, (c =< x, y >)$$

che è assoluto perchè ottenuto tramite quantificazione limitata dalla formula assoluta $c =< x, y >$.
Con una tecnica simile, ossia sostituendo all'interno di relazioni assolute operatori assoluti (tale tecnica in generale viene chiamata di sostituzione) si prova a catena che anche le nozioni di prodotto cartesiano, relazione, operatore e il valore di un operatore come espressione di due argomenti sono assolute.

Lemma 2.12. *Sia $\boldsymbol{M}$ un modello transitivo di $ZF - P - Inf$, allora se $\omega \in \boldsymbol{M}$ l'assioma dell'infinito è vero in $\boldsymbol{M}$.*

Dimostrazione. Il teorema 2.2 ci assicura l'assolutezza della nozione di 0 e della nozione di successore, con queste premesse la relativizzazione a $\mathbf{M}$ dell'assioma dell'infinito è

$$\exists x \in \mathbf{M}\, (0 \in x \wedge \forall y \in x\, (S(y) \in x)),$$

il quale è sicuramente verificato se $x = \omega$. $\square$

Da cui segue immediatamente il seguente teorema.

Corollario 2.5. *In ZF tutti gli assiomi di ZF sono veri in $\boldsymbol{WF}$.*

Osservazione 7. Quello che vogliamo fare in questa osservazione è dare delle argomentazioni informali al perchè ammettiamo l'assioma di regolarità in ZF.
Innanzitutto osserviamo che, per risultati analoghi al lemma 2.7, è ragionevole pensare che all'interno di **WF** ci siano tutti gli insiemi utilizzati dalla matematica ordinaria e quindi risulta normale pensare che la classe degli insiemi ben formati **WF** contenga tutti gli insiemi ottenibili dagli assiomi di ZF^-, ossia ZF meno l'assioma di regolarità, in quanto l'assioma di regolarità non aggiunge alcun insieme all'universo del discorso. L'assioma di regolarità serve a noi per limitare l'universo del discorso a quegli insiemi che pensiamo essere significati per lo sviluppo della matematica a partire dalla teoria degli insiemi, ossia, per quello detto prima, agli insiemi contenuti in **WF**. In effetti è possibile dimostrare in maniera formale un teorema che

asserisce l'equivalenza tra l'assioma di regolarità e l'asserzione $\mathbf{WF} = \mathbf{V}$ e quindi garantire il fatto che in ogni insieme di $\mathbf{V}$ l'assioma di regolarità è valido. Nelle dimostrazioni di consistenza che seguiranno per questi motivi non verrà preso in considerazione l'assioma di regolarità.

Vediamo ora alcuni risultati di assolutezza che coinvolgono gli ordinali.

Teorema 2.3. *Le seguenti relazioni e operatori definite in $ZF - P$ sono equivalenti a Δ_0 formule, quindi sono assolute in ogni modello transitivo di $ZF - P$.*

a) x è un ordinale,

b) x è un ordinale limite,

c) x è un ordinale successore,

d) x è un ordinale finito,

e) ω,

f) 0,

g) $1, 2, 3, \cdots$.

Dimostrazione. Per quello che abbiamo già provato sappiamo che la proprietà di essere transitivi in $ZF - P$ è equivalente a una Δ_0 formula, quindi per provare il punto a) rimane da vedere che anche la proprietà di essere ben ordinato dalla relazione $\in$ lo è, ma infatti A è ben odinato da $\in$ se e solo se vale la congiunzione delle seguenti formule $\forall x \in A\,(\neg(xRx))$ proprietà irriflessiva, $\forall x, y, z \in A\,(xRy \wedge yRz \implies xRz)$ proprietà transitiva e infine $\forall B \subseteq A\, \exists z \in B\, \forall x \in B\,(\neg xRz)$ esistenza dell'elemento $\in$-minimale, che è una Δ_0 formula.
x è un ordinale limite se e solo se x è un ordinale e $\forall y \in x\, \exists z \in x\,(y \in z)$ e $x \neq 0$ e questa è una Δ_0 formula, questo prova b), a questo punto anche la c) segue immediatamente dal fatto che x è un ordinale successore se e solo se non è un ordinale limite e non è 0.
Per provare l'asserzione d) è necessario provare che il predicato $x \in \omega$ è equivalente a una Δ_0 formula, e questo è vero, per verificare e) notiamo che $x = \omega$ se e solo se x è un ordinale limite e non esiste nessun ordinale limite minore di x, ossia $\forall y \in x\,(y \textit{ non è un ordinale limite})$.

Per finire f) è già stata provata nel teorema 2.2 come il fatto che l'operatore successore è assoluto, quindi segue banalmente g). $\square$

Notiamo che questo teorema ci dice che la nozione di ordinale e di insieme finito di ordinali è assoluta, questo implica l'assolutezza di tutte le nozioni associate a questi concetti, come ad esempio quello di insieme finito e di buon ordinamento.

Lemma 2.13. *Se $\boldsymbol{M}$ è un modello transitivo di $ZF-P$ allora ogni sottoinsieme finito di $\boldsymbol{M}$ è in $\boldsymbol{M}$.*

Dimostrazione. Dimostriamo questo lemma per induzione su $n \in \omega$ mostrando

$$\forall x \subset \mathbf{M}\,(|x| = n \implies x \in \mathbf{M}).$$

Per $n = 0$ l'affermazione è vera per l'assolutezza dello 0; supponiamo ora che per n l'ipotesi sia verificata e che $x \subset \mathbf{M}$ abbia cardinalità $n+1$, prendiamo $y \in x$, allora $y, (x \smallsetminus \{y\}) \in \mathbf{M}$ per ipotesi induttiva e siccome vale l'uguaglianza $x = \{y\} \cup (x \smallsetminus \{y\})$, per l'assolutezza della nozione di coppia, unione e differenza, $x \in \mathbf{M}$. $\square$

Teorema 2.4. *Le seguenti proprietà sono assolute per ogni classe transitiva $\boldsymbol{M}$ che verifica $ZF-P$.*

a) x *è finito.*

b) A^n.

c) $A^{<\omega} = \bigcup\{A^n : n \in \omega\}$.

Dimostrazione. a) Sappiamo che in $ZF-P$ x è finito se e solo se $\exists f\ (\phi(x, f))$, dove $\phi(x, f)$ è:

$$f \text{ è un operatore} \wedge dom(f) = x \wedge Im(f) \in \omega \wedge f \text{ è 1-1},$$

che sicuramente è assoluta per $\mathbf{M}$ grazie all'osservazione 6 e il teorema 2.3, rimane quindi da provare che

$$\exists f \in \mathbf{M}\, \phi(x, f) \iff \exists f\, \phi(x, f)$$

l'implicazione $\implies$ è ovvia, vediamo l'altra vedendo che

$$\phi(x, f) \implies f \in \mathbf{M}$$

infatti $\phi(x, f)$ implica che f è un insieme finito di coppie ordinate di elementi di $\mathbf{M}$, ma $\mathbf{M}$ è chiuso per coppie ordinate, quindi $f \in \mathbf{M}$ per il lemma 2.13. Proviamo ora b), consideriamo A^n definito come un operatore in due variabili $F(A, n)$ dove $F(A, x) = 0$ se $x \notin \omega$, a questo punto dobbiamo provare che per $A, x \in \mathbf{M}$, $F(A, x) = F^{\mathbf{M}}(A, x)$; per l'assolutezza di ω segue che se $x \notin \omega$ $F^{\mathbf{M}}(A, x) = 0$, mentre per l'assolutezza della nozione di operatore se $n \in \omega$ segue che

$$F^{\mathbf{M}} = \{f \in \mathbf{M} : f \text{ è } un\ operatore \wedge dom(f) = n \wedge Im(f) \subset A\}$$

che con la stessa argomentazione usata per a) si prova essere uguale a $F(A, n)$. Per provare c) si ragiona in maniera analoga. □

Lemma 2.14. *In ZF supponiamo che* $\boldsymbol{M}$ *sia un modello transitivo per gli assiomi di* $ZF - P - Inf$*, siano poi* $A, R \in \boldsymbol{M}$ *e supponiamo che* R *ben ordini* A*, allora* (R *ben ordina* A)$^{\boldsymbol{M}}$.

Dimostrazione. Osserviamo che la proprietà (R *ordina totalmente* A)$^{\mathbf{M}}$, dove con ordine totale intendiamo il buon ordinamento senza la proprietà di minimo, segue dai metodi sviluppati nell'osservazione 6, infatti l'ordine totale richiede solo proprietà sulle coppie ordinate. Proviamo quindi la proprietà del buon ordinamento provando $(\forall x\, \phi(x, A, R))^{\mathbf{M}}$ dove $\phi(x, A, R)$ è

$$x \subseteq A \wedge x \neq 0 \implies \exists y \in x\, \forall z \in x\, (< z, y > \notin R),$$

ossia l'esistenza di un elemento R-minimo per ogni sottoinsieme di A. Sicuramente ϕ è assoluto per $\mathbf{M}$ grazie ai risultati dell'osservazione 6, quindi l'unica cosa che rimane da verificare è che $\forall x \in \mathbf{M}\, \phi(x, A, R)$, ma questo segue immediatamente dal fatto che R ben ordina A. □

Teorema 2.5. *In ogni modello transitivo di* $ZF - P$ *le seguenti proprietà sono assolute:*

a) R ben ordina A.

b) tipo(A, R)

Dimostrazione. Per provare a) è sufficiente provare l'implicazione

$$(R \text{ ben ordina } A)^{\mathbf{M}} \implies (R \text{ ben ordina } A)$$

siccome l'altra implicazione è stata provata nel lemma precedente. Supponiamo quindi che $(R$ *ben ordina* $A)^{\mathbf{M}}$ allora sappiamo per un risultato generale che in $ZF - P$ ogni buon ordinamento è isomorfo a un ordinale, quindi esistono $f, \alpha \in \mathbf{M}$ tali che

$$(\alpha \text{ è un ordinale e } f \text{ è un isomorfismo da } < A, R > \text{ in } \alpha)^{\mathbf{M}},$$

ma questa è una formula assoluta per $\mathbf{M}$ grazie ai metodi già sviluppati, quindi α è "realmente" un ordinale e f un isomorfismo, ossia R ben ordina A e il suo tipo è proprio α; questo conclude la dimostrazione anche per il punto b). □

Osservazione 8. Vediamo ora come molte delle operazioni aritmetiche che coinvolgono gli ordinali sono assolute per ogni modello transitivo di $ZF - P$, ad esempio $\alpha + 1$ e $\alpha - 1$, infatti $\alpha + 1 = S(\alpha)$, mentre

$$x = \alpha - 1 \iff (\alpha \text{ è un ordinale successore} \wedge \alpha = x + 1) \vee$$
$$\vee (\alpha \text{ non è un ordinale successore} \wedge x = \alpha).$$

Con argomentazioni analoghe si prova che anche $\alpha + \beta$ e $\alpha \cdot \beta$ sono nozioni assolute.

Vediamo ora due definizioni che ci permetteranno di lavorare su classi particolari per poter dimostrare alcuni risultati di assolutezza e relativizzazione in ambienti più generali.

Definizione 2.8. *Una relazione R si dice ben fondata su un insieme A se*

$$\forall x \subseteq A \, [x \neq 0 \implies \exists y \in x \, (\neg \exists z \in x \, (zRy))].$$

Gli elementi y che verificano questa proprietà sono detti elementi R-minimali di x.

Definizione 2.9. *Una relazione $\boldsymbol{R}$ sulla classe $\boldsymbol{A}$ si dice di tipo insieme su A se*

$$\forall x \in \boldsymbol{A}\ \{y \in \boldsymbol{A} : y\boldsymbol{R}x\}$$

è un insieme.

Notiamo esplicitamente che le definizioni appena date sono definizioni in $ZF - P$.

Teorema 2.6. *Sia $\boldsymbol{R}$ una relazione ben fondata di tipo insieme su $\boldsymbol{A}$ e sia $\boldsymbol{F} : \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, se definiamo $\boldsymbol{G} : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{V}$ definita come*

$$\forall x \in \boldsymbol{A}\ [\boldsymbol{G}(x) = \boldsymbol{F}(x, \boldsymbol{G} \restriction_{pred(\boldsymbol{A},x,\boldsymbol{R})})]$$

se $\boldsymbol{M}$ è un modello transitivo di $ZF - P$, e se assumiamo che

1) *$\boldsymbol{F}$ è assoluto per $\boldsymbol{M}$.*

2) *$\boldsymbol{R}$ e $\boldsymbol{A}$ siano assoluti per $\boldsymbol{M}$, $(\boldsymbol{R}$ è di tipo insieme su $\boldsymbol{A})^{\boldsymbol{M}}$, e*

$$\forall x \in \boldsymbol{M}\,(pred(\boldsymbol{A}, x, \boldsymbol{R}) \subset \boldsymbol{M})$$

Allora $\boldsymbol{G}$ è assoluta per $\boldsymbol{M}$.

Dimostrazione. Innanzitutto chiariamo cosa intendiamo con relativizzazione di una classe, allora sarà $\mathbf{R}^{\mathbf{M}} = \mathbf{R} \cap (\mathbf{M} \times \mathbf{M})$ e $\mathbf{A}^{\mathbf{M}} = \mathbf{A} \cap \mathbf{M}$, ne segue che $(\boldsymbol{R}$ *è ben fondata su* $\boldsymbol{A})^{\mathbf{M}}$, quindi ogni insieme non vuoto di $\mathbf{A}^{\mathbf{M}}$ in $\mathbf{M}$ ha un elemento $\mathbf{R}^{\mathbf{M}}$ minimale. Visto ciò definiamo per ricorsione transifinita in $\mathbf{M}$ l'operatore $\mathbf{G}^{\mathbf{M}} : \mathbf{A}^{\mathbf{M}} \to \mathbf{M}$ tale che

$$\forall x \in \mathbf{A}^{\mathbf{M}}\ [\mathbf{G}^{\mathbf{M}}(x) = \mathbf{F}^{\mathbf{M}}(x, \mathbf{G}^{\mathbf{M}} \restriction_{pred^{\mathbf{M}}(\mathbf{A}^{\mathbf{M}},x,\mathbf{R}^{\mathbf{M}})})],$$

dove questo operatore esiste per [K. Ch. III, §5]. A questo punto per induzione transfinita si prova che $\mathbf{G}^{\mathbf{M}} = \mathbf{G} \restriction_{\mathbf{A}^{\mathbf{M}}}$, infatti se cosi non fosse l'elemento $\mathbf{R}$ minimale di $\{x \in \mathbf{A}^{\mathbf{M}} : \mathbf{G}^{\mathbf{M}}(x) \neq \mathbf{G}(x)\}$ genererebbe un assurdo siccome tutte le nozioni utilizzate sono assolute. □

Il teorema appena dimostrato ci dice che ogni operatore definito ricorsivamente utilizzando proprietà assolute è assoluto anch'esso, quindi, per definizione di rango, in particolare afferma che dato un insieme x il concetto di $rng(x)$ è assoluto per ogni modello transitivo di $ZF - P$.

§4. Gli insiemi $H(\kappa)$

Definizione 2.10. *In $ZF - P$ definiamo*

a) *Per ricorsione su n*

- $\bigcup^0 A = A$,
- $\bigcup^{n+1} = \bigcup(\bigcup^n A)$.

b) $trcl(A) = \bigcup\{\bigcup^n A : n \in \omega\}$.

L'insieme $trcl(A)$ viene chiamato chiusura transitiva di A, il motivo risulta chiaro dal seguente lemma [K. Ch. III, §3].

Lemma 2.15. *In $ZF - P$.*

a) $A \subseteq trcl(A)$.

b) *$trcl(A)$ è transitivo.*

c) *Se $A \subset T$ e T è transitivo allora $trcl(A) \subset T$.*

d) *Se A è transitivo allora $trcl(A) = A$.*

e) *Se $x \in A$ allora $trcl(x) \subset trcl(A)$.*

f) $trcl(A) = A \cup \bigcup\{trcl(x) : x \in A\}$.

g) *Se A è finito $trcl(A)$ è finito.*

Notiamo che dal punto g) si evince in maniera immediata l'uguaglianza $H(\omega) = R(\omega)$. Sviluppiamo ora una tecnica per creare, in ZFC, modelli di $ZFC - P$.

Definizione 2.11. *Per ogni cardinale infinito κ definiamo*

$$H(\kappa) = \{x : |trcl(x)| < \kappa\}$$

Gli elementi di $H(\kappa)$ sono detti ereditari di cardinalità $< \kappa$. $H(\omega)$ è l'insieme degli ereditariamente finiti mentre $H(\aleph_1)$ è l'insieme degli ereditariamente numerabili.

Lemma 2.16. *Per ogni cardinale infinito κ, $H(\kappa) \subseteq R(\kappa)$.*

Dimostrazione. Fissiamo $x \in H(\kappa)$ e mostriamo che $rng(x) < \kappa$. Poniamo $t = trcl(x)$ e sia $S = \{rng(y) : y \in t\} \subset \mathbf{ON}$; mostriamo che $S \in \mathbf{ON}$ mostrando che S è transitivo. Supponiamo che α sia un ordinale successore appartenente a S, quindi deve esistere $y \in t$ tale che $rng(y) = \alpha$, da cui dalla formula

$$\alpha = rng(y) = sup\{rng(z) + 1 : z \in y\} = max\{rng(z) + 1 : z \in y\}$$

segue che esiste un elemento $z \in y$, quindi $z \in t$, tale che $rng(z) = \alpha - 1$. Per concludere proviamo che se α è un ordinale limite in S ogni ordinale minore di α sta in S, ma ancora una volta possiamo scrivere

$$\alpha = rng(y) = sup\{rng(z) + 1 : z \in y\}$$

per un opportuno $y \in t$, ne segue che preso un qualunque $\beta < \alpha$ esiste un $\gamma \in S$ con $\gamma > \beta$ e γ ordinale successore, quindi il ragionamento di prima dimostra che $S \in \mathbf{ON}$.
Quindi $S = \alpha$, sappiamo inoltre che $|t| < \kappa$ ne segue che $\alpha < \kappa$, infatti per ogni ordinale $\gamma < \alpha$ esiste un elemento in t di rango uguale a γ, quindi se α non fosse minore di κ allora $|t|$ sarebbe maggiore di κ e questo è assurdo. $\square$

Lemma 2.17. *(AC).Se κ è regolare (quindi infinito), $H(\kappa) = R(\kappa)$ se e solo se $\kappa = \omega$ oppure κ è fortemente inaccessibile.*

Dimostrazione. Ricordiamo prima di tutto che, per la definizione 1.24, un cardinale κ (infinito) si dice fortemente inaccessibile se è regolare, se è maggiore di ω e se

$$\forall \lambda < \kappa \, (2^\lambda < \kappa).$$

Detto questo procediamo con la dimostrazione dell'implicazione da destra a sinistra; tenuto conto della definizione di $R(\alpha)$ è immediato che se κ è uguale a ω oppure κ è fortemente inacccessibile

$$\forall \alpha < \kappa\, (|R(\alpha)| < \kappa).$$

Supponiamo quindi di prendere $x \in R(\alpha)$, con $rng(x) = \alpha < \kappa$, allora $trcl(x) \subseteq R(\alpha)$, quindi $|trcl(x)| < \kappa$, in definitiva abbiamo provato che $R(\kappa) \subseteq H(\kappa)$, che insieme al risultato del lemma precedente dimostra l'uguaglianza.
Dimostriamo il viceversa, supponiamo che $\kappa > \omega$ sia regolare ma non fortemente inaccessibile e fisso $\lambda < \kappa$ tale che $2^\lambda \geq \kappa$, ne segue pertanto che $\mathscr{P}(\lambda) \in R(\kappa) \setminus H(\kappa)$. □

Con questi ultimi lemmi abbiamo chiarito la relazione che intercorre tra gli $H(\kappa)$ e gli $R(\kappa)$, vediamo ora invece alcune proprietà degli insiemi appena introdotti che ci serviranno a breve.

Lemma 2.18. *Per ogni cardinale infinito κ:*

a) $H(\kappa)$ è transitivo.

b) $H(\kappa) \cap \boldsymbol{ON} = \kappa$.

c) Se $x \in H(\kappa)$, allora $\bigcup x \in H(\kappa)$.

d) Se $x, y \in H(\kappa)$, allora $\{x, y\} \in H(\kappa)$.

e) Se $x \in H(\kappa)$ e $y \subset x$, allora $y \in H(\kappa)$.

f) (AC). Se κ è regolare allora

$$\forall x\, (x \in H(\kappa) \iff x \subset H(\kappa) \wedge |x| < \kappa).$$

Dimostrazione. a) segue dal fatto che $y \in x \implies trcl(y) \subset trcl(x)$, quindi preso un elemento $z \in H(\kappa)$ sicuramente ogni suo elemento ha chiusura transitiva di cardinalità minore di quella di z e quindi sta in $H(\kappa)$. b) segue dal fatto che, siccome α è transitivo, $trcl(\alpha) = \alpha$. c)-d) sono immediati, infatti c) segue in maniera naturale dalla definizione di chiusura transitiva, d) segue dal fatto che κ è un cardinale infinito e quindi $|\kappa \oplus \kappa| = \kappa$, infine anche e) segue dalla definizine di chiusura transitiva. Vediamo infine f), se $x \subset H(\kappa) \wedge |x| < \kappa$ allora, siccome

$$trcl(x) = x \cup \bigcup \{trcl(y) : y \in x\}$$

risulta che $trcl(x)$ è un unione di $< \kappa$ insiemi di cardinalità $< \kappa$ quindi, assumendo AC, ha cardinalità $< \kappa$, siccome κ è regolare. □

Teorema 2.7. *(AC).Se κ è regolare e maggiore di ω allora $H(\kappa)$ è un modello di $ZFC - P$.*

Dimostrazione. Estensionalità vale siccome $H(\kappa)$ è transitivo per ogni cardinale infinito, inoltre il lemma 2.18 ci assicura che vale l'assioma di unione per il punto c), l'assioma di coppia per il punto d), lo schema di comprensione per il punto e) e lo schema di rimpiazzamento per il punto f), dove la formalizzazione della dimostrazione è analoga alla prova che **WF** è modello di $ZF - P - Inf$. Risulta pertanto provato fino ad adesso che se κ è un cardinale regolare allora $H(\kappa)$ è modello di $ZF - P - Inf$; l'assioma dell'infinito vale siccome per il lemma 2.18 a) e b) $\omega \in H(\kappa)$, infine proviamo la validità dell'assioma della scelta, per fare questo è sufficiente mostrare che

$$\forall A \in H(\kappa)\, \exists R \in H(\kappa)\, (R \textit{ ben ordina } A),$$

siccome per il teorema 2.5 la nozione di buon ordinamento è assoluta per ogni modello transitivo di $ZF - P$; quindi fissiamo $A \in H(\kappa)$ e sia $R \subset A \times A$ una relazione che ben ordina A in $\mathbf{V}$, allora $R \in H(\kappa)$ per il lemma 2.18 d) inoltre $|R| < \kappa$, quindi per il punto f) del lemma $R \in H(\kappa)$. □

Lemma 2.19. *(AC). Se κ è regolare e maggiore di ω le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

i) $H(\kappa)$ verifica ZFC.

ii) $H(\kappa) = R(\kappa)$.

iii) κ *è fortemente inaccessibile.*

Dimostrazione. Per prima cosa osserviamo che $ii) \iff iii)$ è quello dimostrato nel lemma 2.17. Cerchiamo ora di capire per quali κ l'insieme $H(\kappa)$ verifica ZFC, ossia per quali κ verifica l'assioma potenza. $H(\kappa)$ verifica l'assioma potenza se e solo se

$$\forall x \in H(\kappa)\, \exists y \in H(\kappa)\, \forall z \in H(\kappa)\, (z \subseteq x \implies z \in y),$$

ma siccome $z \subseteq x \in H(\kappa) \implies z \in H(\kappa)$ e $H(\kappa)$ soddisfa lo schema di comprensione, la condizione affinchè $H(\kappa)$ verifichi l'assioma potenza si riduce a

$$\forall x \in H(\kappa)\, (\mathscr{P}(x) \in H(\kappa)).$$

Questo è sicuramente vero se $H(\kappa) = R(\kappa)$, inoltre è sicuramente falso se esiste $\lambda < \kappa$ tale che $2^\lambda \geq \kappa$, infatti in questa situazione abbiamo visto che $\lambda \in H(\kappa)$ ma $\lambda \notin H(\kappa)$. In definitiva abbiamo provato che $a) \implies b)$ e che $\neg a) \implies \neg c)$ quindi abbiamo concluso. □

Osservazione 9. Concludiamo questa sezione sugli insiemi $H(\kappa)$ mostrando le conseguenze di questo lemma appena dimostrato.

- Se prendiamo κ cardinale infinito non fortemente inaccessibile abbiamo che

$$Con(ZFC) \implies Con(ZFC - P + \neg(Assioma\ potenza)).$$

  risulta quindi che l'assioma potenza è un vero assioma della teoria ZFC, ossia non è possibile ricavare l'assioma potenza dagli altri.

- Se invece prendiamo $\kappa = \aleph_1$ abbiamo che

$$Con(ZFC) \implies Con(ZFC - P + \forall x\ (x\ \textit{è numerabile})),$$

  infatti se in ZFC definiamo il modello $H(\aleph_1)$ di $ZFC - P$, allora vale che $\forall x \in \aleph_1$ (x *è numerabile*) è sicuramente vero, inoltre l'operatore suriettivo tra ω e x è assoluto per $H(\aleph_1)$, ossia $(x\ \textit{è numerabile})^{H(\aleph_1)}$.

- Se κ è fortemente inaccessibile la nozione di forte inaccessibilità si vede facilmente essere assoluta per $H(\kappa)$, quindi risulta che

$$Con(ZFC) \implies Con(ZFC + \neg\exists\,\alpha\,(\alpha \textit{ è fortemente inaccessibile})).$$

Non è possibile quindi provare l'esistenza di cardinali fortemente inaccessibili in ZFC.

§5. Teoremi di riflessione

In questa sezione cercheremo di capire se è possibile trovare un insieme M che è un modello per tutto ZFC, nella sezione precedente abbiamo visto che se $\kappa > \omega$ è un cardinale regolare allora $H(\kappa)$ è un modello di $ZFC - P$, soltanto che l'assioma potenza è soddisfatto se e solo se κ è fortemente inaccessibile nozione che abbiamo provato essere indimostrabile in ZFC.
Naturalmente il secondo teorema di incompletezza di Gödel ci dice che sarà impossibile trovare un modello di ZFC lavorando in ZFC, per questo cercheremo di fare qualcosa di diverso, ossia cercheremo di trovare un insieme M tale che presa una qualunque lista finita di formule di ZFC queste siano assolute per M.

Definizione 2.12. *Una lista di formule $\phi_1, \dots, \phi_n$ si dice chiusa per sottoformule, o semplicemente chiusa, se ogni sottoformula di una qualunque formula della lista è nella lista anch'essa.*

Dalla definizione risulta evidente che se una lista è chiusa per sottoformule una qualunque formula della lista o è una formula atomica o è una composizione di altre formule presenti nella lista per mezzo degli operatori logici $\wedge$, $\neg$ ed $\exists x$. Inoltre, siccome ogni formula ha un numero finito di sottoformule ogni successione finita di formule può essere ampliata a una successione finita chiusa per sottoformule.

Lemma 2.20. *Siano $\boldsymbol{M}$ e $\boldsymbol{N}$ due classi tali che $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{N}$, sia inoltre $\phi_1, \dots, \phi_n$ una lista di formule chiusa, allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

a) $\phi_1, \ldots, \phi_n$ *sono assolute per* $\boldsymbol{M}$*,* $\boldsymbol{N}$*.*

b) Ogni volta che ϕ_i *è della forma* $\exists x\, \phi_j(x, y_1, \ldots, y_l)$

$$\forall y_1, \ldots, y_l \in \boldsymbol{M}\, [\exists x \in \boldsymbol{N}\, \phi_j^{\boldsymbol{N}}(x, y_1, \ldots, y_l) \implies \exists x \in \boldsymbol{M}\, \phi_j^{\boldsymbol{N}}(x, y_1, \ldots, y_l)].$$

Dimostrazione. Per provare $a) \implies b)$ fissiamo $y_1, \ldots, y_l \in \mathbf{M}$ e assumiamo che $\phi_i^{\mathbf{N}}(y_1, \ldots, y_l) = \exists x \in \mathbf{N}\ \phi_l^{\mathbf{N}}(x, y_1, \ldots, y_l)$, a questo punto per ipotesi ϕ_i è assoluta quindi $\exists x \in \mathbf{M}\ \phi_l^{\mathbf{M}}(x, y_1, \ldots, y_l)$ e siccome sempre per ipotesi anche ϕ_j è assoluta $\exists x \in \mathbf{M}\ \phi_l^{\mathbf{N}}(x, y_1, \ldots, y_l)$.
Proviamo il viceversa per induzione sulla lunghezza di ϕ_i, assumiamo che la tesi sia dimostrata per ogni formula della lista più corta di ϕ_i e proviamo che ϕ_i è assoluta; noto che il primo passo induttivo è immediato siccome l'assolutezza delle formule atomiche segue per definizione. Già sappiamo che gli unici problemi relativi alla assolutezza sono dati dalle formule che contengono una quantificazione, quindi supponiamo che ϕ_i sia della forma $\exists x\ \phi_j(x, y_1, \ldots, y_l)$ e fissiamo $y_1, \ldots, y_l \in \mathbf{M}$ allora

$$\phi_i^{\mathbf{M}}(y_1, \ldots, y_l) \iff \exists x \in \mathbf{M}\ \phi_j^{\mathbf{M}}(x, y_1, \ldots, y_l) \iff \exists x \in \mathbf{M}\ \phi_j^{\mathbf{N}}(x, y_1, \ldots, y_l)$$

dove il primo se e solo se è una semplice riscrittura, mentre il secondo segue dall'ipotesi induttiva

$$\exists x \in \mathbf{M}\ \phi_j^{\mathbf{N}}(x, y_1, \ldots, y_l) \iff \exists x \in \mathbf{N}\ \phi_j^{\mathbf{N}}(x, y_1, \ldots, y_l) \iff \phi_i^{\mathbf{N}}(y_1, \ldots, y_l)$$

dove il primo se e solo se è dovuto all'ipotesi b), mentre il secondo è la definizione di $\phi_i^{\mathbf{N}}$. □

L'utilità del lemma appena dimostrato sta nel fatto che la condizione b) è una condizione che riguarda solo la verità della formula ϕ all'interno della classe $\mathbf{N}$.

Teorema 2.8. *Supponiamo che* $\boldsymbol{Z} = \bigcup_{\alpha \in \boldsymbol{ON}} Z(\alpha)$ *sia una classe e che per ogni* α*,* $Z(\alpha)$ *sia un insieme tale che:*

1) $\alpha < \beta \implies Z(\alpha) \subset Z(\beta)$*.*

2) Se γ è un ordinale limite $Z(\gamma) = \bigcup_{\alpha<\gamma} Z(\alpha)$.

Allora per ogni formula $\phi_1, \ldots, \phi_n$

$$\forall \alpha \, \exists \beta > \alpha \, (\phi_1, \ldots, \phi_n \text{ sono assolute per } Z(\beta), \, \boldsymbol{Z}).$$

Dimostrazione. Per dimostrare questo teorema vogliamo utilizzare il lemma 2.20 con $\mathbf{N} = \mathbf{Z}$ pertanto cercheremo di trovare β tale che $Z(\beta) = \mathbf{M}$ verifichi la condizione b). Assumiamo che la lista di formule $\phi_1, \ldots, \phi_n$ sia chiusa, notando che questo non comporta nessuna restrizione in quanto se non fosse chiusa abbiamo detto che possiamo ampliare la nostra lista ad un'altra lista finita di formule questa volta chiusa.
Sia $i \in \{1, \ldots, n\}$ tale che ϕ_i sia della forma $\exists x \, \phi_j$, allora definiamo

$$\mathbf{G}_i : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{ON}$$

dove $\mathbf{G}_i(y_1, \ldots, y_l) = 0$ se $\neg\exists x \in \mathbf{Z}\phi_j^{\mathbf{Z}}(x, y_1, \ldots, y_n)$ altrimenti definiamo $\mathbf{G}_i(y_1, \ldots, y_l)$ come il più piccolo η tale che $\exists x \in Z(\eta) \, \phi_j^{\mathbf{Z}}(x, y_1, \ldots, y_l)$. A questo punto definiamo per ogni $i = 1, \ldots, n$ le funzioni $\mathbf{F}_i : \mathbf{ON} \rightarrow \mathbf{ON}$ definite come segue

$$\mathbf{F}_i(\xi) = sup\{\mathbf{G}_i(y_1, \ldots, y_l) : y_1, \ldots, y_l \in Z(\xi)\};$$

se ϕ_i possiede la funzione $\mathbf{G}_i$, mentre se ϕ_i non è esistenzialmente quantificato $\mathbf{F}_i \equiv 0$. Osservo che il sup della definizione esiste per lo schema di rimpiazzamento.
A questo punto se β è un ordinale limite, per il lemma 2.20, si ha che se per ogni i, $\forall \xi < \beta \, (\mathbf{F}_i(\xi) < \beta)$, allora $\phi_1, \ldots, \phi_n$ sono assolute per $Z(\beta)$, $\mathbf{Z}$. Fissiamo α e mostriamo che possiamo trovare sempre un $\beta > \alpha$ che verifica la condizione scritta sopra, sia $\beta_0 = \alpha$ e definiamo β_{p+1} per ricorsione come il massimo tra

$$\beta_p + 1, \mathbf{F}_1(\beta_p), \ldots, \mathbf{F}_n(\beta_p)$$

e definiamo β_p per ogni $p \in \omega$. Infine poniamo $\beta = sup\{\beta_p : p \in \omega\}$. Detto questo risulta che abbiamo costruito la catena $\alpha = \beta_0 < \beta_1 < \ldots$ il cui estremo superiore è per definizione β che quindi sarà un ordinale limite maggiore strettamente di α. Notiamo anche che in generale, per l'ipotesi 1), vale che

$$\xi < \xi' \implies \mathbf{F}_i(\xi) \leq \mathbf{F}_i(\xi').$$

A questo punto se $\xi < \beta$ esiste sicuramente un $p \in \omega$ tale che $\xi < \beta_p$, per cui avremo che $\mathbf{F}_i(\xi) \leq \mathbf{F}_i(\beta_p) \leq \beta_{p+1} < \beta$ e quindi per il lemma 2.20 segue la tesi. $\square$

Una scelta particolare di $\mathbf{Z}$ e $Z(\alpha)$ ci permette di dimostrare il teorema di riflessione che quindi risulta essere in realtà un corollario del teorema appena dimostrato.

Teorema 2.9. *Teorema di riflessione. Data una lista di formule qualunque* $\phi_1, \ldots, \phi_n$,

$$ZF \vdash \forall \alpha\, \exists \beta > \alpha\, (\phi_1, \ldots, \phi_n \textit{ sono assolute per } R(\beta)).$$

Il teorema appena dimostrato risponde alla domanda posta a inizio sezione, infatti ci garantisce che presi *frammenti* di ZF, ossia una lista finita di suoi assiomi, esiste un *insieme* grande a piacere per il quale tali assiomi sono assoluti e veri e, come già ricordato, questo è il massimo che possiamo aspettarci visti i risultati di Gödel.

Capitolo 3

Insiemi definibili

L'idea è quella di chiamare definibili gli insiemi a per i quali esiste una proprietà P tale che

$$\forall x\,(P(x) \iff x = a).$$

Il problema nell'introdurre questo concetto è sostanzialmente quello di definire in maniera rigorosa il concetto di proprietà P, per fare questo costruiremo in primo luogo gli insiemi definibili da proprietà che contengono solo i simboli di $=$ e di $\in$ e in seguito andremo a chiudere questi insiemi per le operazioni di intersezione, complementazione e quantificazione.

Definizione 3.1. *Sia A un insieme e $R \subseteq A^k$, allora se $n \in \omega$ e $i, j < n$ definiamo*

a) $Proj(A, R, n) = \{s \in A^n : \exists t \in R\,(t \restriction_n = s)\}$.

b) $Diag_\in(A, n, i, j) = \{s \in A^n : s(i) \in s(j)\}$.

c) $Diag_=(A, n, i, j) = \{s \in A^n : s(i) = s(j)\}$.

d) Per ogni $k \in \omega$ definiamo $Df'(k, A, n)$ come

1) $Df'(0, A, n) = \{Diag_\in(A, n, i, j) \cup Diag_=(A, n, i, j) : i, j < n\}$

2) $Df'(k+1,A,n) = Df'(k,A,n) \cup \{A^n \smallsetminus R : R \in Df'(k,A,n)\}$

$\cup\{R \cap S : R, S \in Df'(k,A,n)\}$

$\cup\{Proj(A,R,n) : R \in Df'(k,A,n{+}1)\}.$

e) $Df(A,n) = \bigcup\{Df'(k,A,n) : k \in \omega\}$.

Per costruzione risulta provato anche il seguente lemma.

Lemma 3.1. *Se* $R, S \in Df(A,n)$ *allora* $A^n \smallsetminus R, R \cap S \in Df(A,n)$.
Se $R \in Df(A,n+1)$ *allora* $Proj(A,R,n) \in Df(A,n)$.

Vediamo ora che $Df(A,n)$ contiene ogni relazione su A definibile tramite la relativizzazione di una formula ad A.

Lemma 3.2. *Sia* $\phi(x_0,\dots,x_{n-1})$ *una formula le cui variabili libere sono tra* $x_0,\dots,x_{n-1}$*, allora*

$$\forall A\,[\{s \in A^n : \phi^A(s(0),\dots,s(n-1))\} \in Df(A,n)].$$

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema per induzione sulla lunghezza di ϕ. Se ϕ è $x_i \in x_j$ allora la tesi segue immediatamente dalla definizione, siccome $Diag_\in(A,n,i,j) \in Df(A,n)$, in maniera analoga si ragiona se ϕ è $x_i = x_j$. L'ipotesi induttiva sarà che tutte le formule di lunghezza minore o uguale di m verifichino la tesi, sia ϕ una formula di lunghezza $m+1$, allora ϕ può essere considerata di una delle seguenti forme: $\psi \wedge \sigma$, $\neg\psi$ oppure $\exists y\,\psi$ con ψ, σ formule di lunghezza minore o uguale a m. Osserviamo che le prime due forme non ci creano nessun problema siccome già sappiamo che $Df(A,n)$ è chiuso sia per intersezioni finite che per complementazione, quindi ci rimane da provare il caso in cui ϕ è $\exists y\,\psi$. Supponiamo che y non sia una variabile compresa in $x_0,\dots,x_{n-1}$, allora

$\{s \in A^n : \phi^A(s(0),\dots,s(n-1))\} =$

$$= Proj(A, \{t \in A^{n+1} : \psi^A(t(0),\dots,t(n))\}, n) \in Df(A,n)$$

infatti se $y \neq x_0, \ldots, x_{n-1}$ le n-ple che soddisfano $\phi^A = \exists y\, \psi^A$ non sono altro che le $(n+1)$-ple che soddisfano ψ^A ristrette alle prime n componenti. Se $y = x_j$, allora $\phi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ è $\exists x_j\, \psi(x_0, \ldots, x_{n-1})$, quindi x_j non è libera in ϕ. Sia z una variabile che non occorre in ϕ, sia $\psi'(x_0, \ldots, x_{n-1})$ la formula $\phi(x_0, \ldots, x_{j-1}, z, x_{j+1}, \ldots, x_{n-1})$ e sia ϕ' la formula $\exists z\, \psi'$, allora ϕ e ϕ' sono logicamente equivalenti, inoltre ϕ', per il ragionamento precedente, verifica la tesi. □

Vediamo ora come possiamo numerare le formule definibili, questo metodo ci permetterà di provare alcuni interessanti risultati per Df.

Definizione 3.2. *Per ricorsione su $m \in \omega$ definiamo $En(m, A, n)$ come*

a) Se $m = 2^i \cdot 3^j$ e $i, j < n$ allora $En(m, A, n) = Diag_\in(A, n, i, j)$.

b) Se $m = 2^i \cdot 3^j \cdot 5$ e $i, j < n$ allora $En(m, A, n) = Diag_=(A, n, i, j)$.

c) Se $m = 2^i \cdot 3^j \cdot 5^2$ allora $En(m, A, n) = A^n \setminus En(i, A, n)$.

d) Se $m = 2^i \cdot 3^j \cdot 5^3$ allora $En(m, A, n) = En(i, A, n) \cap En(j, A, n)$

e) Se $m = 2^i \cdot 3^j \cdot 5^4$ allora $En(m, A, n) = Proj(A, En(i, A, n+1), n)$.

f) Se m non è di nessuna delle forme precedenti allora $En(m, A, n) = 0$.

Per costruzione segue il seguente lemma.

Lemma 3.3. *Per ogni n e A, $Df(A, n) = \{En(m, A, n) : m \in \omega\}$.*

Corollario 3.1. $|Df(A, n)| \leq \omega$.

Lemma 3.4. *Le funzioni definibili Df e En sono assolute per modelli transitivi di $ZF - P$.*

Dimostrazione. L'assolutezza delle nozioni di Df e En segue dall'assolutezza di $Proj$, $Diag_\in$, $Diag_=$, e Df' e dal fatto che funzioni definite ricorsivamente usando nozioni assolute sono assolute per il teorema 2.6. □

Enunciamo anche un risultato analogo al lemma 3.2 la cui dimostrazione, grazie anche al lemma 3.3, è immediata.

Lemma 3.5. *Sia $\phi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ una formula le cui variabili libere sono tra $x_0, \ldots, x_{n-1}$, allora per un qualche m*

$$\forall A\, [\{s \in A^n : \phi^A(s(0), \ldots, s(n-1))\} = En(m, A, n)].$$

Quindi in maniera non formale possiamo pensare a ϕ^A come una m-esima formula in n variabili sotto la numerazione data da En.
Vediamo ora come il concetto di En ci permette di introdurre un nuovo concetto di inclusione che tiene conto anche delle proprietà di assolutezza dei due insiemi.

Definizione 3.3. *Diciamo che A è elementarmente incluso in B, $A \prec B$, se $A \subseteq B$ e*

$$\forall n, m\, [En(m, A, n) = En(m, B, n) \cap A^n].$$

Il lemma 3.5 ci suggerisce che la definizione appena data intuitivamente dice che le n-ple che soddisfano ϕ^A sono le n-ple che soddisfano ϕ^B e che sono contenute in A^n, ossia dimostra il seguente lemma.

Lemma 3.6. *Per ogni $\phi(x_0, \ldots, x_{n-1})$,*

$$\forall A, B\, [A \prec B \implies \phi \text{ è assoluto per } A,\, B].$$

Teorema 3.1. *(AC).*

$$\forall B\, \forall x \subseteq B\, \exists A\, [x \subseteq A \subseteq B \wedge A \prec B \wedge |A| \leq max(\omega, |x|)].$$

Questo teorema intuitivamente ci dice che preso un qualunque insieme B esiste un suo sottoinsieme A elementarmente incluso in B e di cardinalità qualunque purchè minore della cardinalità di B.

Dimostrazione. Dobbiamo quindi provare l'esistenza di un insieme $A \subseteq B$ tale che $\forall n, m\, [En(m, A, n) = En(m, B, n) \cap A^n]$, allora per prima cosa osserviamo che l'unico problema è dato, per la definizione di relativizzazione,

dalle formule esistenziali, ossia per gli En che coinvolgono $Proj$; osservato questo iniziamo con la dimostrazione.
Fissiamo un buon ordinamento $\lhd$ di B, e per ogni $n, m \in \omega$ definiamo

$$H_{mn} : B^n \to B$$

dove $m = 2^i \cdot 3^j \cdot 5^4$; se $s \in En(m, B, n)$, con $s* < x >$ intendiamo la funzione $s* < x > \in B^{n+1}$ che sulle prime n componenti è uguale a s e nella $(n+1)$-esima componente è x. $H_{mn}(s)$ allora è il primo elemento secondo $\lhd$ tale che $s* < x > \in En(i, B, n+1)$, mentre negli altri casi $H_{mn}(s)$ è il primo elemento secondo $\lhd$ di B;
Sia A la chiusura di x mediante le funzioni H_{mn}, cioè sia A il più piccolo insieme $\subseteq B$ tale che $H_{mn}(A^n) \subset A$ per ogni $n, m \in \omega$, per il teorema 1.5 ne segue che $|A| \leq max(\omega, |X|)$, inoltre sicuramente per ogni m della forma $m = 2^i \cdot 3^j \cdot 5^4$ vale che $En(m, A, n) = En(m, B, n) \cap A^n$; l'osservazione fatta all' inizio conclude la dimostrazione. $\square$

§1. Insiemi definibili in termini di ordinali

Quello che vogliamo costruire in questa sezione sono quegli insiemi che sono definibili mediante una sequenza finita di ordinali, cioè quegli insiemi a per cui esiste una proprietà $P(y_1, \ldots, y_n, x)$ e una sequenza di ordinali $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tali che

$$\forall x \, (P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, x) \iff x = a).$$

Per definire questa tipologia di insiemi siamo costretti però ad utilizzare gli insiemi $R(\beta)$ affinchè non sorgano paradossi.

Definizione 3.4. *Definiamo la classe degli insiemi definibili in termini di ordinali* $\boldsymbol{OD}$ *come la classe degli insiemi a tali che*

$$\exists \beta > rng(a) \, \exists n \, \exists s \in \beta^n \, \exists R \in Df(R(\beta), n+1)$$

$$\forall x \in R(\beta) \, (s* < x > \in R \iff x = a)$$

Teorema 3.2. *Per ogni formula $\phi(y_1, \ldots, y_n, x)$ con al più le variabili libere mostrate*

$$\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \, \forall a \, [\forall x \, (\phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, x) \iff x = a) \implies a \in \boldsymbol{OD}]$$

Dimostrazione. Fissiamo $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, a$ e assumiamo che valga la seguente proprietà $\forall x \, (\phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, x) \iff x = a)$. Utilizzando il teorema di riflessione 2.9 possiamo fissare $\beta > max(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, rng(a))$ tale che ϕ sia assoluto per $R(\beta)$. Sia a questo punto

$$R = \{< y_1, \ldots, y_n, x >\in R(\beta)^{n+1} : \phi(y_1, \ldots, y_n, x)\}.$$

Definito R in questo modo e posto $s =< \alpha_1, \ldots, \alpha_n >\in \beta^n$, la validità per ipotesi della proprietà $\forall x \, (\phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, x) \iff x = a)$ implica la validità di

$$\forall x \in R(\beta) \, (s* < x >\in R \iff x = a)$$

Inoltre, per l'assolutezza di ϕ, vale anche la scrittura

$$R = \{< y_1, \ldots, y_n, x >\in R(\beta)^{n+1} : \phi(y_1, \ldots, y_n, x)^{R(\beta)}\},$$

quindi $R \in Df(R(\beta), n + 1)$ per il lemma 3.2, da cui $a \in \mathbf{OD}$ □

L'uso del teorema di riflessione permette di ambientare la dimostrazione in un insieme anzichè in $\mathbf{V}$ evitando paradossi legati al buon ordinamento tra ordinali.

Definizione 3.5. *Se $s, t \in \boldsymbol{ON}^{<\omega}$, diciamo che $s \lhd t$ se*

a) $max(Im(s)) < max(Im(t))$,

b) $max(Im(s)) = max(Im(t)) \wedge dom(s) < dom(t)$,

c) $max(Im(s)) = max(Im(t)) \wedge dom(s) = dom(t) \wedge \exists k \in dom(z)$ $(s \restriction_k = t \restriction_k \wedge s(k) < t(k))$.

Osserviamo come questa definizione ordini $\mathbf{ON}^{<\omega}$: prima si ordina secondo il massimo ordinale che compare nell'immagine di $t \in \mathbf{ON}^{<\omega}$, se si trovano due elementi con lo stesso massimo si ordina mediante la lunghezza del dominio, infine elementi con uguale massimo e dominio della stessa lunghezza si ordinano mediante l'ordine lessicografico. Detto questo risulta facile vedere che $\lhd$ ben ordina $\mathbf{ON}^{<\omega}$.

Definizione 3.6. *$Enon(\gamma)$ è il γ-esimo elemento di $\mathbf{ON}^{<\omega}$ mediante l'ordinamento $\lhd$.*

Quindi sostanzialmente $Enon$ rappresenta una numerazione degli elementi di $\mathbf{ON}^{<\omega}$ e si prova facilmente essere una applicazione iniettiva da $\mathbf{ON}$ in $\mathbf{ON}^{<\omega}$. Vediamo ora come usando questa numerazione possiamo definire una numerazione su $\mathbf{OD}$.

Definizione 3.7. *Per $\gamma \in \mathbf{ON}$ definiamo $Enod(\gamma)$ come segue.*

a) Se $Enon(\gamma) = s* < \beta, n, m >$, dove $n, m \in \omega$, $s \in \beta^{<\omega}$, $dom(s) = n$ e esiste $a \in R(\beta)$ tale che

$$\forall x \in R(\beta)\, (s* < x > \in En(m, R(\beta), n+1) \iff x = a),$$

allora $Enod(\gamma) = a$.

b) Se l'ipotesi b) non è verificata poniamo $Enod(\gamma) = 0$.

Lemma 3.7. *$\mathbf{OD} = \{Enod(\gamma) : \gamma \in \mathbf{ON}\}$.*

Dimostrazione. Che ogni insieme a che soddisfi l'ipotesi a) sia contenuto in $\mathbf{OD}$ segue immediatamente dal fatto che En numera Df, quindi l'unica cosa rimasta da dimostrare è che 0 è un elemento di $\mathbf{OD}$, per fare questo utilizziamo il teorema 3.2 con $\phi(y, x)$ la formula $y = x$ e come α l'ordinale 0. $\square$

Il lemma appena dimostrato inizia a farci pensare di poter dimostrare l'inverso del teorema 3.2, infatti se $\phi(y, x)$ è $(y \in \mathbf{ON} \wedge x = Enod(y))$, allora

$$\forall a \in \mathbf{OD}\, \exists \alpha\, \forall x\, (\phi(\alpha, a) \iff x = a).$$

Inoltre il lemma appena dimostrato può essere usato anche per dimostrare altri risultati utili, come il seguente.

Lemma 3.8.

a) $\boldsymbol{ON} \subset \boldsymbol{OD}$.

b) Se $w, z \in \boldsymbol{OD}$ *allora* $\{w, z\} \in \boldsymbol{OD}$.

c) Se $w \in \boldsymbol{OD}$ *allora* $\bigcup w \in \boldsymbol{OD}$ *e* $\mathscr{P}(w) \in \boldsymbol{OD}$.

Dimostrazione. Per il punto a) applichiamo il teorema 3.2 con $\phi(y, x)$ uguale alla formula $y = x$ e concludiamo che $\alpha \in \mathbf{OD}$ per ogni α. Per dimostrare b) poniamo $w = Enod(\alpha_1)$ e $z = Enod(\alpha_2)$: se $a = \{w, z\}$, sia $\phi(y_1, y_2, x)$ la formula

$$y_1 \in \mathbf{ON} \wedge y_2 \in \mathbf{ON} \wedge x = \{Enod(y_1), Enod(y_2)\};$$

allora l'applicazione del teorema 3.2 prova che $a \in \mathbf{OD}$. Le due parti del punto c) si dimsotrano anch'esse utilizzando il teorema 3.2 dove $\phi(y, x)$ è rispettivamente $y \in \mathbf{ON} \wedge x = \bigcup Enod(y)$ e $y \in \mathbf{ON} \wedge x = \mathscr{P}(Enod(y))$. □

Il lemma appena dimostrato fa subito congetturare che $\mathbf{OD}$ possa essere un modello di ZF siccome il lemma prova la validitá dell'assioma della coppia, dell' unione e della potenza all'interno di $\mathbf{OD}$. Si prova però che esso non è transitivo, quindi dimostrare la validità dell'assioma di estensionalità comporta dei problemi. In effetti si dimostra che l'assioma di estensionalità *non* vale in $\mathbf{OD}$ a meno che $\mathbf{OD} = \mathbf{V}$.
Quello che vogliamo fare ora è restringere $\mathbf{OD}$ in modo che risulti transitivo, per fare questo costruiremo un'altra classe di insiemi, quelli ereditari definibili in termini di ordinali, ossia gli $x \in \mathbf{OD}$ tali che ogni elemento di x, ogni elemento di ogni elemento di x, e cosi via, sia un elemento di $\mathbf{OD}$.

Definizione 3.8. $\boldsymbol{HOD} = \{x \in \boldsymbol{OD} : trcl(x) \subset \boldsymbol{OD}\}$.

Una semplice riformulazione della definizione dice che per ogni insieme a, se $a \in \mathbf{OD}$ e $a \subset \mathbf{HOD}$ allora $a \in \mathbf{HOD}$. Vediamo ora alcuni lemmi che seguono immediatamente dalla definizione.

Lemma 3.9. *$\boldsymbol{ON} \subset \boldsymbol{HOD} \subset \boldsymbol{OD}$ e inoltre $\boldsymbol{HOD}$ è transitivo.*

Lemma 3.10. *Per ogni α, $(R(\alpha) \cap \boldsymbol{HOD}) \in \boldsymbol{HOD}$.*

Dimostrazione. Chiaramente $(R(\alpha) \cap \mathbf{HOD}) \subset \mathbf{HOD}$, quindi è sufficiente mostrare che $(R(\alpha) \cap \mathbf{HOD}) \in \mathbf{HOD}$, ma questo è vero, infatti basta applicare il teorema 3.2 con $\phi(y, x)$ uguale a $y \in \mathbf{ON} \wedge (x = R(y) \cap \mathbf{HOD})$. □

Teorema 3.3. *(ZF).Tutti gli assiomi di ZFC sono validi in $\boldsymbol{HOD}$.*

Dimostrazione. Innanzitutto l'assioma di estensionalità è valido in **HOD** siccome questa è una classe transitiva.
Per verificare lo schema di comprensione, grazie al lemma 2.3, è sufficiente verificare che per ogni formula $\psi(v, z, w_1, \ldots, w_n)$,

$$\forall z, w_1, \ldots, w_n \in \mathbf{HOD}(\{v \in z : \psi^{\mathbf{HOD}}(v, z, w_1, \ldots, w_n)\} \in \mathbf{HOD}).$$

Allora fissiamo $z, w_1, \ldots, w_n \in \mathbf{HOD}$ e supponiamo che $z = Enod(\alpha_0)$ e che per ogni i valga $w_i = Enod(\alpha_i)$, sia infine

$$a = \{v \in z : \psi^{\mathbf{HOD}}(v, z, w_1, \ldots, w_n)\};$$

ne segue che l'insieme a è l'unico insieme che soddisfa $\phi(\alpha_0, \ldots, \alpha_n, x)$, dove $\phi(y_0, y_1, \ldots, y_n, x)$ è

$$y_0, \ldots, y_n \in \mathbf{ON} \wedge x = \{v \in Enod(y_0) : \psi^{\mathbf{HOD}}(v, Enod(y_0), \ldots, Enod(y_n))\}.$$

quindi per il teorema 3.2 $a \in \mathbf{OD}$, inoltre $a \subset z \in \mathbf{HOD}$ e **HOD** è transitivo, quindi $a \subset \mathbf{HOD}$ da cui, grazie alla definizione, $a \in \mathbf{HOD}$.
La verifica degli assiomi di coppia, unione, rimpiazzamento e potenza come sempre consiste nel verificare l'esistenza di determinati insiemi all'interno di **HOD** e tutte queste verifiche sono simili, quindi faremo a titolo di esempio solo la dimostrazione della validità dell'assioma di coppia. Per verificare l'assioma di coppia è sufficiente mostrare che per ogni $x, y \in \mathbf{HOD}$ esiste un insieme $w \in \mathbf{HOD}$ tale che $x \in w \wedge y \in w$, e questo è sicuramente vero, infatti basta prendere $w = R(\alpha) \cap \mathbf{HOD}$ dove $\alpha > max(rng(x), rng(y))$.

L'assioma dell'infinito è valido in $\mathbf{HOD}$ siccome $\omega \in \mathbf{HOD}$ per il lemma 3.9. Vediamo infine che $\mathbf{HOD}$ verifica anche l'assioma di scelta, per fare questo, grazie all'assolutezza della nozione di buon ordinamento, è sufficiente mostrare che per ogni $A \in \mathbf{HOD}$ esiste $R \in \mathbf{HOD}$ tale che R ben ordina A. Fissiamo quindi $A = Enod(\alpha) \in \mathbf{HOD}$, siccome $A \subset \mathbf{OD}$ possiamo ben ordinare gli elementi di A tramite l'ordinamento $Enod$, precisamente poniamo

$$R = \{< x, y > \in A \times A : \exists \xi \, (x = Enod(\xi) \wedge \forall \eta \leq \xi \, (y \neq Enod(\eta)))\}.$$

Utilizzando ancora una volta il teorema 3.2, siccome R è definibile esclusivamente con α, si prova che $R \in \mathbf{OD}$, da cui, siccome $R \subset A \times A \subset \mathbf{HOD}$, per la definizione, segue che $R \in \mathbf{HOD}$. $\square$

Da questo teorema segue immediatamente il risultato seguente:

$$Con(ZF) \implies Con(ZFC).$$

Questo risultato, provato per la prima volta da Gödel, stabilisce che non è possibile dimostrare la negazione (refutare) dell'assioma di scelta nella teoria ZF e rappresenta il primo risultato importante di consistenza incontrato nella tesi. Le controversie sull'utilizzo o meno dell'assioma di scelta all'interno della matematica sono legate a un secondo risultato di consistenza, dovuto a Cohen: esso stabilisce che non solo la negazione dell'assioma di scelta è indimostrabile in ZF, ma anche l'assioma di scelta stesso.

Capitolo 4

Insiemi costruibili

In questo capitolo lavoreremo in ZF definendo la classe **L** degli insiemi costruibili, vedremo inoltre che **L** è un classe propria transitiva modello di $ZFC + GCH$. Vediamo inizialmente come possiamo introdurre un nuovo operatore chiamato $\mathscr{D}$, dove intuitivamente $\mathscr{D}(A)$ rappresenterà l'insieme dei sottoinsiemi di A definibili con un numero finito di elementi di A tramite una formula relativizzata ad A.

Definizione 4.1. *Dato A definiamo l'insieme potenza definibile di A*

$$\mathscr{D}(A) = \{x \subseteq A : \exists n \in \omega\, \exists s \in A^n\, \exists R \in Df(A, n{+}1)\; (x = \{y \in : s* < y > \in R\})\}$$

Analogamente al lemma 3.2 si prova il seguente lemma che ci dimostra che effettivamente con questa definizione abbiamo ottenuto l'insieme che desideravamo.

Lemma 4.1. *Sia $\phi(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, x)$ una formula le cui variabili libere sono tutte fra quelle mostrate, allora*

$$\forall A\, \forall v_0, \ldots, v_{n-1} \in A\, [\{x \in A : \phi^A(v_0, \ldots, v_{n-1}, x)\} \in \mathscr{D}(A)]$$

Lemma 4.2. *Per ogni A,*

a) $\mathscr{D}(A) \subseteq \mathscr{P}(A)$.

b) Se A è transitivo allora $A \subset \mathscr{D}(A)$.

c) $\forall x \subseteq A\,(|x| < \omega \implies x \in \mathscr{D}(A))$.

d) *(AC)*$|A| \geq \omega \implies |\mathscr{D}(A)| = |A|$.

Dimostrazione. a) è immediata per definizione di $\mathscr{D}$. Per b) utilizziamo il lemma enunciato precedentemente con la formula $x \in v$ e otteniamo che

$$\forall v \in A\,[\{x \in A : x \in v\} \in \mathscr{D}(A)],$$

che, se A è transitivo, si riduce a $\forall v \in A\,[v \in \mathscr{D}(A)]$.
Prima di provare c) ricordiamo che se $R, S \in Df(A, n+1)$, allora $R \cup S$ e 0 sono elementi di $Df(A, n+1)$, a questo punto per induzione su $m \leq n$ mostriamo che

$$E_n^m = \{t \in A^{n+1} : \exists i < m\,(t(n) = t(i))\} \in Df(A, n+1)$$

i passi dell'induzione consistono nell'osservare che $E_n^0 = 0$ e se $m + 1 \leq n$ E_n^{m+1} è l'unione di E_n^m e $B = \{t \in A^{n+1} : t(n) = t(m)\}$, quindi supponendo che E_n^m sia un elemento di $Df(A, n+1)$ anche E_n^{m+1} lo è siccome B per definizione sta in $Df(A, n+1)$. Detto questo sia x un insieme finito di $n < \omega$ elementi di A, quindi tale che, identificando x con una n-pla $s \in A^n$, si ha

$$Im(s) = \{x \in A : s* < x > \in E_n^n\},$$

che quindi appartiene a $\mathscr{D}$ siccome $E_n^n \in Df(A, n+1)$, in definitiva abbiamo provato che

$$\forall n < \omega\,\forall x \subseteq A\,(|x| = n \implies x \in \mathscr{D}(A)).$$

Infine dimostriamo d): se assumiamo AC e che $|A| \geq \omega$ allora ne segue che $|A^n| = |A|$, $\forall n \in \omega$, per tanto, siccome già sappiamo dal corollario 3.1 che $|Df(A, n+1)| \leq \omega$, abbiamo che $|\mathscr{D}(A)| \leq |A|$; concludiamo la dimostrazione osservando che dal punto c) in particolare segue che $\forall x \in A\,(\{x\} \in \mathscr{D}(A))$, quindi $|\mathscr{D}(A)| \geq |A|$. Noto esplicitamente che questo ultimo punto mi dice che l'inclusione in a) potrebbe essere un'inclusione stretta. □

Definizione 4.2. *Per ricursione transfinita definiamo per ogni* $\alpha \in \boldsymbol{ON}$ $L(\alpha)$ *come:*

a) $L(0) = 0$.

b) $L(\alpha + 1) = \mathscr{D}(L(\alpha))$.

c) $L(\alpha) = \bigcup_{\xi<\alpha} L(\xi)$ *se* α *è un ordinale limite.*

Definiamo infine

$$\boldsymbol{L} = \bigcup \{L(\alpha) : \alpha \in \boldsymbol{ON}\}.$$

Vediamo che la definizione degli $L(\alpha)$ è molto simile alla definizione data per gli $R(\alpha)$ e in effetti molte proprietà sono in comune tra le due strutture, procediamo ora come abbiamo fatto con gli $R(\alpha)$ dimostrando le proprietà fondamentali della struttura appena introdotta.

Lemma 4.3. *Per ogni* α

a) $L(\alpha)$ *è transitivo.*

b) $\forall \xi \leq \alpha \, (L(\xi) \subseteq L(\alpha))$.

Dimostrazione. Dimostriamo i risultati per induzione su α, assumiamo che il lemma sia vero per ogni $\beta < \alpha$ e proviamolo per α. Sicuramente quando α è 0 oppure è un ordinale limite il risultato è vero, rimane da provare il lemma quando $\alpha = \beta + 1$, procediamo dimostrando prima il punto a); per ipotesi induttiva vale che se $\gamma < \beta + 1$ allora $L(\gamma)$ è transitivo, sia ora $x \in \mathscr{D}(L(\beta))$ e sia $y \in x$, per il punto a) del lemma 4.2 $x \in \mathscr{D}(L(\beta))$ implica $x \subseteq L(\beta)$, quindi $y \in L(\beta)$, da cui per il punto b) del lemma 4.2 siccome $L(\beta)$ è transitivo ho che $y \in L(\beta) \subseteq \mathscr{D}(L(\beta))$ ossia $y \in L(\beta + 1)$. Sapendo che $L(\beta)$ è transitivo per ogni β il punto b) segue immediatamente dal punto b) del lemma 4.2. $\square$

Ne segue da questo lemma che se $x \in \mathbf{L}$ necessariamente il più piccolo α per cui $x \in L(\alpha)$ deve essere un ordinale successore, da cui ha senso la seguente definizione.

Definizione 4.3. *Se* $x \in \boldsymbol{L}$, *definiamo* $\boldsymbol{L}$*-rng di* x, $\rho(x)$, *il più piccolo* β *tale che* $x \in L(\beta + 1)$.

Lemma 4.4. *Per ogni α,*

$$L(\alpha) = \{x \in \boldsymbol{L} : \rho(x) < \alpha\}.$$

Dimostrazione. Per $x \in \mathbf{L}$ $\rho(x) < \alpha$ se e solo se $\exists \beta < \alpha \, (x \in L(\beta + 1))$ se e solo se $x \in L(\alpha)$. $\square$

Vediamo come anche in questa costruzione sia possibile ricavare gli ordinali.

Lemma 4.5.

a) $\forall \alpha \in \boldsymbol{ON} \, (\alpha \in \boldsymbol{L} \wedge \rho(\alpha) = \alpha)$.

b) $\forall \alpha \in \boldsymbol{ON} \, (L(\alpha) \cap \boldsymbol{ON} = \alpha)$.

Dimostrazione. Osserviamo che a) è una diretta conseguenza di b), quindi procediamo dimostrando per induzione su α il punto b). Ancora una volta se α è un ordinale limite o 0 la dimostrazione è banale, quindi sia $\alpha = \beta + 1$ e supponiamo che per ogni ordinale minore di α la tesi sia valida. Abbiamo già detto che vale la catena $L(\beta) \subset L(\alpha) \subset \mathscr{P}(L(\beta))$, da cui $\beta \subset L(\alpha) \cap \mathbf{ON} \subset \alpha$; a questo punto la dimostrazione sarà conclusa se proviamo che $\beta \in L(\alpha)$. Ricordiamo che il teorema 2.3 garantiva l'esistenza di una Δ_0 formula $\phi(x)$ tale che

$$\forall x \, (x \text{ è un ordinale} \iff \phi(x)),$$

quindi, siccome le Δ_0 formule sono assolute per tutti gli insiemi transitivi

$$\beta = L(\beta) \cap \mathbf{ON} = \{x \in L(\beta) : \phi^{L(\beta)}(x)\},$$

così $\beta \in \mathscr{D}(L(\beta)) = L(\alpha)$ per il lemma 4.1. $\square$

Lemma 4.6. $L(\alpha) \in L(\alpha + 1)$

Dimostrazione. $L(\alpha) = \{x \in L(\alpha) : (x = x)^{L(\alpha)}\}$, quindi per il lemma 4.1 è un elemento di $\mathscr{D}(L(\alpha)) = L(\alpha + 1)$. $\square$

Lemma 4.7. *(AC). Per ogni $\alpha \geq \omega$, $|L(\alpha)| = |\alpha|$.*

Dimostrazione. Siccome $\alpha \subseteq L(\alpha)$ ne segue che $|\alpha| \leq |L(\alpha)|$, proviamo il teorema per induzione transfinita su α, quindi supponiamo che $\alpha \geq \omega$ e che valga $\forall \beta < \alpha\, (\beta \geq \omega \implies |L(\beta)| = |\beta|)$, da cui per ogni β minore di α varrà $(\beta \geq \omega \implies |L(\beta)| \leq |\alpha|)$. Sia α un ordinale limite, allora $L(\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} L(\beta)$, quindi unione di $|\alpha|$ insiemi di cardinalità $\leq |\alpha|$, quindi, siccome supponiamo AC, ha cardinalità $\leq |\alpha|$. Infine se $\alpha = \beta + 1$ allora $|L(\beta)| = |\beta| = |\alpha|$, inoltre $\mathscr{D}(L(\beta)) = L(\alpha)$, quindi per il lemma 4.2 d) risulta che $|L(\alpha)| = |\alpha|$. □

Teorema 4.1. ***L*** *è un modello di* ***ZF****.*

Dimostrazione. Estensionalità vale in $\mathbf{L}$ siccome $\mathbf{L}$ è transitivo.
Per verificare lo schema di comprensione, alla luce del lemma 2.3, è sufficiente verificare che per ogni formula $\psi(x, z, v_1, \ldots, v_n)$ con le uniche variabili libere quelle mostrate, vale che

$$\forall z, v_1, \ldots, v_n \in \mathbf{L}\ (\{x \in z : \psi^{\mathbf{L}}(x, z, v_1, \ldots, v_n)\} \in \mathbf{L}).$$

Osserviamo che la definizione data di $\mathscr{D}$ sembra essere perfetta per provare questa formula, solamente che la prova sarebbe relativizzata a $L(\alpha)$ e non a tutto $\mathbf{L}$; il rimedio a questo punto consiste nell'applicare il teorema di riflessione. Fissiamo $z, v_1, \ldots, v_n \in \mathbf{L}$ e $\alpha \in \mathbf{ON}$ tale che $z, v_1, \ldots, v_n \in L(\alpha)$, a questo punto, per il teorema 2.9 esiste $\beta > \alpha$ tale che ψ è assoluta per $L(\beta)$, $\mathbf{L}$, quindi

$$\{x \in z : \psi^{\mathbf{L}}(x, z, v_1, \ldots, v_n)\} = \{x \in L(\beta) : x \in z \wedge \psi^{L(\beta)}(x, z, v_1, \ldots, v_n)\},$$

ma gli insiemi alla destra dell'uguale sono in $\mathscr{D}(L(\beta)) = L(\beta + 1)$ per il lemma 4.2, e quindi in $\mathbf{L}$.
Gli assiomi di coppia, unione, rimpiazzamento e potenza si provano tutti mostrando l'esistenza di determinati insiemi all'interno di $\mathbf{L}$, dimostriamo solo lo schema di rimpiazzamento come esempio. Lo schema di rimpiazzamento in $\mathbf{L}$ vale, per il lemma 2.4, se per ogni formula $\phi(x, y, A, w_1, \ldots, w_n)$ e per ogni $A, w_1, \ldots, w_n \in \mathbf{L}$, se supponiamo che

$$\forall x \in A\, \exists! y \in \mathbf{L}\ \phi^{\mathbf{L}}(x, y, A, w_1, \ldots, w_n),$$

allora possiamo concludere che

$$\exists B \in \mathbf{L}\ (\{y : \exists x \in A\ \phi^{\mathbf{L}}(x, y, A, w_1, \dots, w_n)\} \subseteq B).$$

Infatti ponendo

$$\alpha = sup\{\rho(y) + 1 : \exists x \in A\ \phi^{\mathbf{L}}(x, y, A, w_1, \dots, w_n)\}$$

e prendendo $B = L(\alpha)$, il quale sta in $\mathbf{L}$ per il lemma 4.6, risulta verificata la tesi.
Infine l'assioma dell'infinito vale in $\mathbf{L}$ siccome $\omega \in \mathbf{L}$. $\square$

§1. L'assioma di costruibilità

Definizione 4.4. *L'assioma di costruibilità è l'asserzione $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{L}$, ossia $\forall x\, \exists \alpha\ (x \in L(\alpha))$.*

Quello che vogliamo fare è provare che l'assioma di costruibilità è consistente con ZF e per fare questo alla luce dei risultati già dimostrati è sufficiente verificare che $\mathbf{L}$ è un modello di $ZF + (\mathbf{V} = \mathbf{L})$. Osserviamo esplicitamente che provare la validità dell'assioma di costruibilità per la classe $\mathbf{L}$ corrisponde a provare la seguente relativizzazione

$$\forall x \in \mathbf{L}\ \exists \alpha \in \mathbf{L}\ ((x \in L(\alpha))^{\mathbf{L}}),$$

e quindi basta provare il seguente

Lemma 4.8. *L'operatore $\alpha \to L(\alpha)$ è assoluto per ogni modello transitivo di $ZF - P$.*

Dimostrazione. Per il lemma 3.4 sappiamo che Df è assoluta, quindi dai risultati basilari sull'assolutezza segue che anche l'operatore $\mathscr{D}$ è assoluto, infine per il teorema 2.6 vale la tesi. $\square$

Dimostriamo ora un importante risultato dovuto a Gödel.

Teorema 4.2. *(ZF).$\boldsymbol{L}$ è un modello di $ZF + (\boldsymbol{V} = \boldsymbol{L})$.*

Dimostrazione. Sappiamo già che $\mathbf{L}$ è un modello di ZF quindi rimane solo da verificare che in $\mathbf{L}$ è vero l'assioma di costruibilità, ossia dobbiamo provare che

$$\forall x \in \mathbf{L}\, \exists \alpha \in \mathbf{L}\, ((x \in L(\alpha))^{\mathbf{L}}).$$

Fissiamo $x \in \mathbf{L}$ e sia α tale che $x \in L(\alpha)$, allora $\alpha \in \mathbf{L}$ siccome $\mathbf{ON} \subseteq \mathbf{L}$ inoltre per il lemma 4.8 segue immediatamente $(x \in L(\alpha))^{\mathbf{L}}$. □

Corollario 4.1. $Con(ZF) \implies Con(ZF + (\boldsymbol{V} = \boldsymbol{L}))$.

Osservazione 10. Abbiamo già detto precedentemente che è possibile provare l'equivalenza tra l'assioma di regolarità e l'asserzione $\mathbf{V} = \mathbf{WF}$ e che consideriamo l'assioma di regolarità un'assioma fondamentale della teoria ZF alla luce di questo fatto. Risulta perciò normale chiedersi perchè non si fa la stessa cosa con l'assioma di costruibilità siccome abbiamo appena provato l'equivalenza tra tale assioma e l'asserzione $\mathbf{V} = \mathbf{L}$, il motivo per cui questo non accade risiede nel fatto che, con argomentazioni spesso informali, abbiamo dato una spiegazione alla ragionevole convinzione che ogni insieme di interesse matematico sia un elemento della classe $\mathbf{WF}$, la stessa cosa non possiamo dirla per $\mathbf{L}$ per questo non possiamo considerare l'assioma di costruibilità un assioma plausibile per ZF; piuttosto considereremo $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ come un utile espediente per ottenere risultati di consistenza in ZF, infatti possiamo relativizzare i nostri discorsi a $ZF + (\mathbf{V} = \mathbf{L})$, facilitandone spesso la dimostrazione, e concludere che tali discorsi sono consistenti con ZF.

Concludiamo questa sezione con alcune conseguenze dell'assolutezza di $L(\alpha)$.

Teorema 4.3. *Se $\boldsymbol{M}$ è una qualunque classe propria modello transitivo di $ZF - P$ allora $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}^{\boldsymbol{M}} \subseteq \boldsymbol{M}$.*

Dimostrazione. Prima di tutto dimostriamo che $\mathbf{ON} \subset \mathbf{M}$ per induzione transfinita. Sappiamo che $\mathbf{M}$ è un modello di $ZF - P$, in particolare quindi l'insieme vuoto appartiene a $\mathbf{M}$, sia α un ordinale appartenente a $\mathbf{M}$ ne segue che anche $\alpha \cup \{\alpha\} \in \mathbf{M}$ siccome $\alpha \subset \mathbf{M}$ perchè è transitivo e inoltre vale

l'assioma di unione. Infine, sempre per la validità dell'assioma di unione, dalla presenza in $\mathbf{M}$ di ogni ordinale minore di un ordinale limite β segue $\beta \in \mathbf{M}$.
A questo punto, per l'assolutezza di $L(\alpha)$ e di $\mathbf{ON}$,

$$\mathbf{L}^{\mathbf{M}} = \{x \in \mathbf{M} : (\exists \alpha\, (x \in L(\alpha)))^{\mathbf{M}}\} = \bigcup \{L(\alpha) : \alpha \in \mathbf{ON}\} = \mathbf{L}$$

quindi $\mathbf{L} = \mathbf{L}^{\mathbf{M}} \subset \mathbf{M}$. □

Osservo esplicitamente che questo teorema coinvolge ancora una volta classi proprie, quindi dobbiamo fare particolarmente attenzione alle affermazioni che vogliamo provare affinchè queste abbiano senso, proviamo ora dunque a trasportare questo risultato agli insiemi.

Definizione 4.5. *Se M è un insieme poniamo $o(M) = M \cap \boldsymbol{ON}$.*

Lemma 4.9. *Se M è un insieme transitivo allora $o(M) \in \boldsymbol{ON}$ è il primo ordinale che non è contenuto in M.*

Infatti, nelle ipotesi del teorema, $o(M)$ è un insieme transitivo di ordinali.

Teorema 4.4. *Per ogni M transitivo esiste una congiunzione finita ψ di assiomi di $ZF - P$ tale che*

$$\psi^M \implies (L(o(M)) = \boldsymbol{L}^M \subset M).$$

Dimostrazione. Supponiamo che ψ contenga sufficienti assiomi da provare che non esiste in M un ordinale maggiore di tutti gli altri ordinali di M e supponiamo che ψ contenga gli assiomi (un numero finito) necessari per la prova del lemma 4.8. Sicuramente, siccome per ipotesi M è transitivo e ψ^M, ne segue che $o(M)$ è un ordinale limite, da cui $L(o(M)) = \bigcup_{\alpha \in M} L(\alpha)$, ma

$$\mathbf{L}^M = \{x \in M : (\exists \alpha\, (x \in L(\alpha)))^M\} = \bigcup_{\alpha \in M} L(\alpha)$$

questo per l'assolutezza degli $L(\alpha)$, da cui vale che $L(o(M)) = \mathbf{L}^M \subset M$. □

Teorema 4.5. *Esiste una congiunzione finita σ di assiomi della teoria $ZF - P + (\boldsymbol{V} = \boldsymbol{L})$ tale che:*

a) Se $\boldsymbol{M}$ è una classe propria transitiva e $\sigma^{\mathbf{M}}$, allora $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{L}$.

b) $\forall M\ (M$ transitivo $\wedge\, \sigma^M \implies M = L(o(M)))$.

Dimostrazione. Prendiamo come σ la congiunzione ψ del teorema 4.4 con l'aggiunta dell'assioma $\mathbf{V} = \mathbf{L}$. A questo punto se $\mathbf{M}$ è transitiva e $\sigma^{\mathbf{M}}$, vale banalmente $(\forall x\ (x \in \mathbf{L}))^{\mathbf{M}}$, quindi $\mathbf{M} = \mathbf{L}^{\mathbf{M}}$. Provato questo a) e b) seguono immediatamente dal teorema 4.3 e dal teorema 4.4. $\square$

Teorema 4.6. *(ZF).$(\boldsymbol{V} = \boldsymbol{L}) \implies \boldsymbol{V} = \boldsymbol{HOD}$.*

Dimostrazione. Applicando il teorema 4.3 alla classe **HOD** segue la validità dell'inclusione $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{HOD}$, l'inclusione inversa invece risulta vera alla luce di $\mathbf{V} = \mathbf{L}$, da cui la tesi. $\square$

Corollario 4.2. *(ZF).$Con(ZF) \implies Con(ZF + \boldsymbol{V} = \boldsymbol{HOD})$.*

Corollario 4.3. *(ZF).In ZF l'assioma di costruibilità implica l'assioma di scelta che quindi non può essere refutato in ZF, ossia*

$$(\boldsymbol{V} = \boldsymbol{L}) \implies AC$$

Dimostrazione. Questo segue dal teorema 4.6 e dal fatto che **HOD** verifica AC. $\square$

§2. AC e GCH in L

Quello che vogliamo fare in questa sezione è dimostrare che ZF più l'assioma di costruibilità implicano la consistenza di AC e GCH, in verità per quanto riguarda AC nella sezione precedente già lo abbiamo mostrato, solamente che in questa sezione vogliamo dare esplicitamente un buon ordinamento di $\mathbf{L}$.

Definizione 4.6. *Vogliamo definire per ricorsione un buon ordinamento* $\lhd_\alpha = \lhd(\alpha)$ *per ogni* $L(\alpha)$*, quindi per prima cosa definiamo* $\lhd_0 = 0$*, a questo punto rimane da definire l'ordinamento nel caso in cui* α *sia un ordinale limite e un ordinale successore.*
Definiamo inizialmente l'ordinamento per gli α *ordinali limiti, poniamo quindi*

$$\lhd_\alpha = \{< x, y > \in L(\alpha) \times L(\alpha) : \rho(x) < \rho(y) \vee (\rho(x) = \rho(y) \wedge < x, y > \in \lhd_{\rho(x)+1})\}.$$

Rimane da definire l'ordinamento su $L(\alpha+1)$*, per fare questo osserviamo che dato un ordinamento* $\lhd_\alpha$ *su* $L(\alpha)$ *possiamo ordinare* $L(\alpha)^n$ *con l'ordinamento lessicografico indotto* $\lhd_\alpha^n$ *nel seguente modo*

$$s \lhd_\alpha^n t \iff \exists k < n \, (s \restriction_k = t \restriction_k \wedge s(k) \lhd_\alpha t(k)).$$

Detto questo definiamo l'ordinamento su $L(\alpha + 1)$*, sia* A *un elemento di* $L(\alpha + 1) = \mathscr{D}(L(\alpha))$ *e sia* n_A *il più piccolo* n *per il quale*

$$\exists s \in L(\alpha)^n \, \exists R \in Df(L(\alpha), n + 1) \, (A = \{x \in L(\alpha) : s* < x > \in R\}).$$

Sia s_A *il più piccolo* $s \in L(\alpha)^{n_A}$*, secondo l'ordinamento* $\lhd_\alpha^{n_A}$*, tale che*

$$\exists R \in Df(L(\alpha), n_A + 1) \, (A = \{x \in L(\alpha) : s* < x > \in R\}),$$

e sia m_A *il più piccolo* $m \in \omega$ *tale che*

$$A = \{x \in L(\alpha) : s_A* < x > \in En(m, L(\alpha), n_A)\}.$$

Definito tutto ciò se $A, B \in L(\alpha + 1)$ *diciamo che* $A \lhd_{\alpha+1} B$ *se*

a) $A, B \in L(\alpha) \wedge A \lhd_\alpha B$*, oppure*

b) $A \in L(\alpha) \wedge B \notin L(\alpha)$*, oppure*

c) $A, B \notin L(\alpha) \wedge [(n_A < n_B) \vee (n_A = n_B \wedge s_A \lhd_\alpha^{n_A} s_B) \vee (n_A = n_B \wedge s_A = s_B \wedge m_A < m_B)]$.

Per essere più precisi bisogna osservare che la definizione appena data implicitamente assume che dato il buon ordinamento su $L(\alpha)$ e definito ricorsivamente l'ordinamento su $L(\alpha+1)$ questo nuovo ordinamento è anch'esso un buon ordinamento.
Definiamo ora mediante il buon ordinamento $\lhd_\alpha$ un ordinamento su tutto $\mathbf{L}$.

Definizione 4.7. *$x <_{\boldsymbol{L}} y$ se $x, y \in \boldsymbol{L}$ e*

$$\rho(x) < \rho(y) \vee (\rho(x) = \rho(y) \wedge < x, y > \in \lhd (\rho + 1)).$$

Quindi in pratica abbiamo ordinato $\mathbf{L}$ prima secondo il rango dei suoi elementi, mentre elementi di rango uguale li abbiamo ordinati secondo l'ordinamento costruito in $\lhd_\alpha$; ne segue che la classe $<_{\mathbf{L}}$ ben ordina $\mathbf{L}$ e qualunque $L(\alpha)$ è, secondo l'ordinamento $<_{\mathbf{L}}$, un segmento iniziale di $\mathbf{L}$.

Lemma 4.10. $(\boldsymbol{V} = \boldsymbol{L}) \implies AC$.

Dimostrazione. Se $x \in \mathbf{L}$ allora $x \subset L(\alpha)$ per un qualche α, quindi il buon ordinamento $\lhd_\alpha$ ben ordina x. $\square$

Studiamo ora alcune proprietà dell'ordinamento appena definito.

Lemma 4.11.

a) La funzione $\lhd (\alpha)$ è assoluta per ogni modello transitivo di $ZF - P$.

b) Se $\boldsymbol{M}$ è una classe propria modello transitivo di $ZF - P$, allora $<_{\boldsymbol{L}}$ è assoluto per $\boldsymbol{M}$.

c) Se M è un modello transitivo di $ZF - P$, se $x, y \in M$ e $x, y \in \boldsymbol{L}^M$ allora $x <_{\boldsymbol{L}} y$ se e solo se $(x <_{\boldsymbol{L}} y)^M$.

Dimostrazione. a) segue dal fatto che ogni funzione ricorsiva che utilizza nozioni assolute è assoluta, mentre b) e c) seguono da a), infatti per il teorema 4.3 $\mathbf{L} \subset \mathbf{M}$ da cui segue b), mentre se $x, y \in \mathbf{L}^M$ allora $x, y \in L(\alpha)$ per un qualche $\alpha < o(M)$ e quindi a) implica c). $\square$

Per concludere questa sezione dimostriamo la consistenza in ZFC di GCH.

Teorema 4.7. *Se vale* $(\boldsymbol{V} = \boldsymbol{L})$ *allora per ogni ordinale infinito* α *vale l'inclusione* $\mathscr{P}(L(\alpha)) \subset L(\alpha^+)$*, dove* α^+ *è il più piccolo cardinale maggiore di* α*.*

Dimostrazione. Sia σ una congiunzione di assiomi di $ZF + (\mathbf{V} = \mathbf{L})$ tale che

$$\forall M\ (M \text{ transitivo} \wedge \sigma^M \implies M = L(o(M))),$$

ciò è possibile grazie al teorema 4.5.
Assumiamo che valga $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ e fissiamo $A \in \mathscr{P}(L(\alpha))$; sia $x = L(\alpha) \cup \{A\}$, allora, per il lemma 4.7, $|x| = |\alpha|$. Utilizzando [K. Ch. IV, §7] sappiamo che esiste un M transitivo tale che $|M| = |\alpha|$, $x \subset M$ e $\sigma^M \iff \sigma^{\mathbf{V}}$, ma $\sigma^{\mathbf{V}}$ è vero in quanto per ipotesi $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ quindi σ^M vale per cui $M = L(o(M))$. A questo punto $|M| = |\alpha|$ implica che $|o(M)| < \alpha^+$, da cui

$$A \in L(o(M)) \subset L(\alpha^+).$$

□

Corollario 4.4. *(ZF).*$(\boldsymbol{V} = \boldsymbol{L}) \implies AC + GCH.$

Dimostrazione. Già sappiamo che vale AC, proviamo quindi GCH, il teorema 4.7 appena dimostrato vale per ogni cardinale $\kappa \geq \omega$, quindi per ogni cardinale κ vale $\mathscr{P}(\kappa) \subset \mathscr{P}(L(\kappa)) \subset L(\kappa^+)$, da cui $2^\kappa \leq |L(\kappa^+)| = \kappa^+$. □

Corollario 4.5.

- *Con(ZF)* $\implies$ *Con*$(ZFC + GCH)$.

- *Con*(ZFC) $\implies$ *Con*(GCH).

Questo risultato di (parziale) indipendenza conclude la nostra presentazione e ci mostra che l'ipotesi del continuo generalizzata è consistente con la teoria ZFC; questo, insieme ai risultati di Cohen dei primi anni sessanta, dimostra che tale enunciato è indecidibile in questa stessa teoria.

Bibliografia

[A1] , [A2] A. Andretta : *I teoremi di assolutezza in teoria degli insiemi* , Boll. Unione Mat. Ital. Sez A, 6 (2003) parte 1 57-84, parte 2 489-507

[K] K. Kunen: *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs* , North-Holland, 1980

[M] E. Mendelson: *Introduzione alla logica matematica* , Torino, Bollati Boringhieri, 1972