ALMA MATER STUDIORUM - UNIVERSITÀ DI BOLOGNA
SEDE DI CESENA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
CORSO DI LAUREA IN SCIENZE E TECNOLOGIE INFORMATICHE

Alcune statistiche sulle permutazioni

Relazione finale in:
MATEMATICA DISCRETA

Relatore:
Prof. *MARILENA BARNABEI*

Presentata da:
LORENZO FOSCHI
0000456278

Sessione III
ANNO ACCADEMICO 2011/2012

INDICE

CAPITOLO I

L'ARTE DEL PERMUTARE

1.1 Che cos'è una permutazione?

Il termine *permutare* deriva dall'omonima parola latina, a sua volta composta da *PER* (per) e *MUTARE* (cambiare): questo verbo designa infatti l'azione dello scambiare un oggetto con un altro. Nell'italiano corrente una **permutazione** può essere intesa dunque come un modo di ordinare in successione un certo numero di oggetti distinti. In termini più matematici una permutazione di un insieme X non è nient'altro che una funzione biiettiva $p: X \to X$.

È facile intuire che il numero di possibili permutazioni di lunghezza 3 è 6, infatti esse sono banalmente:

123	**132**	**213**	**231**	**312**	**321**	(i primi 3 numeri naturali)
ABC	**ACB**	**BAC**	**BCA**	**CAB**	**CBA**	(le prime 3 lettere alfabetiche)
529	**592**	**259**	**295**	**952**	**925**	(3 numeri naturali distinti e casuali)
BAR	**BRA**	**ABR**	**ARB**	**RBA**	**RAB**	(3 lettere alfabetiche distinte e casuali)

È altrettanto chiaro che la prima rappresentazione è la più immediata ed agevole, ma soprattutto è importante sottolineare che tutte le altre sono riconducibili ad essa.

1.2 Quante sono le permutazioni di lunghezza n?

Data la cardinalità n di un insieme di oggetti diversi, per stabilire a priori quante sono le sue possibili permutazioni di lunghezza n si ricorre al seguente metodo: esistono n modi di scegliere l'oggetto che occupa la prima posizione e per ciascuno di essi rimangono altri $n-1$ candidati per il secondo posto; poi, per ognuna delle $n \cdot (n-1)$ coppie di oggetti fissati nelle prime due posizioni, vi sono $n-2$ possibilità per riempire il terzo posto; e così via, si potranno occupare tutte le n posizioni in $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1$ diverse maniere. Questo particolare prodotto dei primi n numeri interi positivi si definisce $n!$ (leggasi $\boldsymbol{n}$ **fattoriale**) e fornisce il numero di permutazioni di n oggetti distinti.

I valori dei primi 12 fattoriali sono riassunti nella tabella seguente (per convenzione si è stabilito che 0! valga 1):

0!	*1*	*6!*	*720*
1!	*1*	*7!*	*5040*
2!	*2*	*8!*	*40320*
3!	*6*	*9!*	*362880*
4!	*24*	*10!*	*3628800*
5!	*120*	*11!*	*39916800*

Si può notare inoltre la rapida crescita con n del valore del rispettivo fattoriale.

1.3 Come rappresentare una permutazione?

Per rappresentare una permutazione è possibile utilizzare una notazione **su due righe**, inserendo sotto ad ogni numero la posizione in cui questo viene spostato:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ p(1) & p(2) & p(3) & p(4) & p(5) \end{pmatrix}$$

Ad esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

È possibile omettere la prima riga se i suoi valori sono stabiliti a priori, in modo particolare quando questi risultano essere ordinati, ottenendo una rappresentazione **su una riga**:

$$3\ 2\ 5\ 1\ 4$$

Naturalmente queste due notazioni non sono le uniche possibili: le altre saranno introdotte all'occorrenza in seguito.

1.4 Composizione di permutazioni

Sia S_n l'insieme delle permutazioni di lunghezza n. Dal momento che una permutazione è una funzione biiettiva, date p e $q \in S_n$, il risultato della loro **composizione** appartiene ancora a S_n. Intuitivamente infatti una ridistribuzione di una disposizione degli elementi di un insieme è semplicemente un'altra disposizione degli stessi elementi. Quest'operazione gode della proprietà associativa, ma non di quella commutativa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\right)$$

L'insieme S_n con l'operazione di composizione forma il cosiddetto **gruppo simmetrico**, il cui elemento neutro è la permutazione identica $\varepsilon_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$, ossia quella che mantiene fissi tutti gli elementi.

1.5 Ribaltamento, complemento e inversa

Sia $p = x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n$ una permutazione in S_n.

- Il suo **ribaltamento** p^r è definito come:

$$x_n x_{n-1} \dots x_2 x_1$$

- Il suo **complemento** p^c corrisponde a:

$$(n + 1 - x_1)(n + 1 - x_2) \dots (n + 1 - x_{n-1})(n + 1 - x_n)$$

- La sua **inversa** p^{-1} equivale a:

$$y_1 y_2 \dots y_{n-1} y_n \text{ (dove, per ogni } i,\ y_i = j \text{ tale che } x_j = i)$$

Ad esempio:

$$p = 4\ 1\ 5\ 2\ 3$$

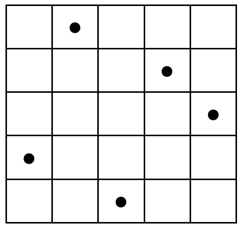
$$p^r = 3\ 2\ 5\ 1\ 4$$

$$p^c = 2\ 5\ 1\ 4\ 3$$

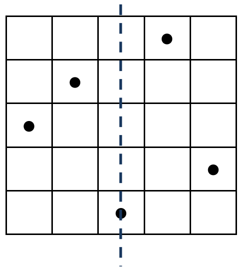
$$p^{-1} = 2\ 4\ 5\ 1\ 3$$

Se tutti gli elementi di p vengono inseriti nelle n caselle $(p(i);\ i)$ di una griglia quadrata di dimensione NxN, si ottiene la rappresentazione **grafica** della permutazione. Essa mette bene in risalto le tre proprietà sopracitate, corrispondenti alle simmetrie del quadrato.

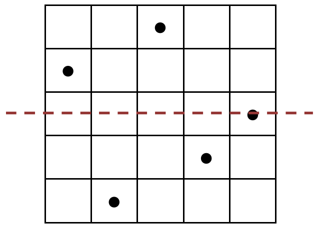
p



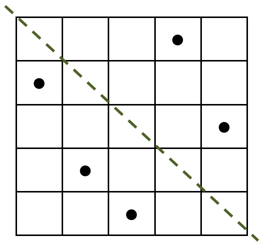
p^r



p^c



p^{-1}



1.6 Minimi e massimi locali da sinistra

Tra i vari parametri di una permutazione p vi sono i minimi e massimi locali da sinistra:

- il valore $p(i)$ è un **minimo locale da sinistra** se, per ogni $j < i$, $p(j) > p(i)$;
- il valore $p(i)$ è un **massimo locale da sinistra** se, per ogni $j < i$, $p(j) < p(i)$.

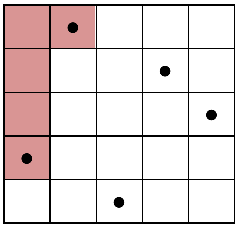
Ad esempio:

$$p = 4\ 1\ 5\ 2\ 3$$

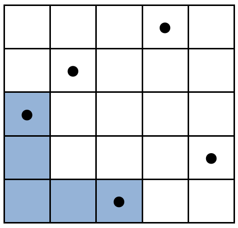
I minimi locali da sinistra di p sono 4 e 1.

I massimi locali da sinistra di p sono 4 e 5.

Nella rappresentazione grafica di una permutazione i minimi locali da sinistra sono quei punti le cui celle a nord-ovest risultano vuote (per i massimi locali si considerino le caselle a sud-ovest):



minimi

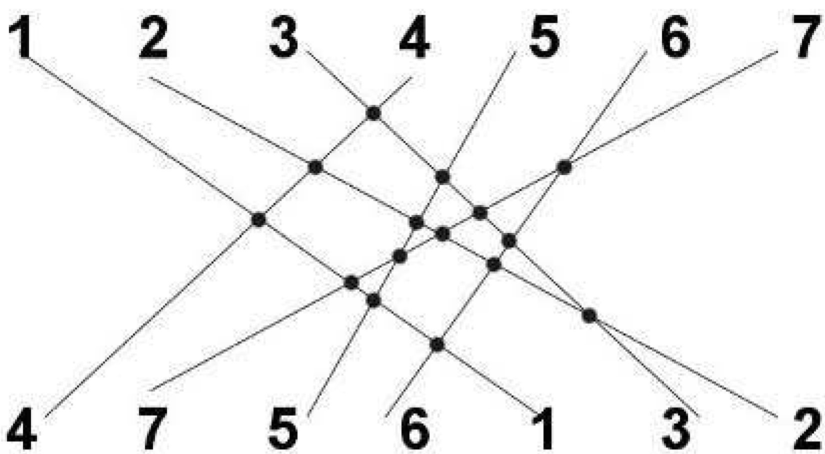


massimi

Naturalmente in modo analogo è possibile definire i concetti di minimo e massimo locali da destra.

1.7 Inversioni e discese di una permutazione

Consideriamo di nuovo la rappresentazione su due righe di una permutazione p. Se si unisce con un segmento ogni simbolo della prima riga con lo stesso simbolo sulla seconda, è possibile visualizzare graficamente le **inversioni** della permutazione, ossia le coppie di interi (i, j) tali che $i < j$ e $p(i) > p(j)$: esse corrispondono agli incroci tra i vari segmenti. Una permutazione è detta **pari** o **dispari** a seconda che abbia un numero pari o dispari di inversioni.



La figura mostra che la permutazione p è dispari ed ha 15 inversioni. Da un punto di vista più pratico, le inversioni contano il numero di scambi da compiere per ricondursi alla permutazione identica ε_n.

Per ogni lunghezza n il numero di inversioni possibili varia da 0 a $\binom{n}{2}$. La permutazione col valore minimo è ε_n, infatti non ne presenta alcuna, mentre la quantità massima viene raggiunta soltanto dal suo ribaltamento, ovvero $(\varepsilon_n)^r$.

In ogni cella della seguente tabella è rappresentato il numero di permutazioni di lunghezza n con k inversioni:

n\k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/
2	1	1	/	/	/	/	/	/	/	/	/
3	1	2	2	1	/	/	/	/	/	/	/
4	1	3	5	6	5	3	1	/	/	/	/
5	1	4	9	15	20	22	20	15	9	4	1

Considerando sempre la permutazione $p = 4756132$, è possibile notare che essa è l'unione di 4 sottosequenze crescenti costituite da elementi consecutivi, ossia $4\ 7$ | $5\ 6$ | $1\ 3$ | 2. Si definisce **discesa** di una permutazione la posizione i dell'elemento $p(i)$ tale che $p(i) > p(i+1)$. Nel caso preso in considerazione le discese di p sono 3 e corrispondono alle posizioni 2, 4 e 6. Ogni discesa segna quindi la fine di una parte crescente (ovviamente l'ultima parte a destra non è caratterizzata da alcuna discesa).

Il numero di discese possibili di una permutazione è compreso tra lo 0 della permutazione identica ε_n e $(n-1)$ del suo ribaltamento.

Nelle celle della seguente tabella sono rappresentati i cosiddetti **numeri Euleriani** $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$, che contano il numero di permutazioni di lunghezza n con k discese:

n\k	0	1	2	3	4	5	6
1	1	/	/	/	/	/	/
2	1	1	/	/	/	/	/
3	1	4	1	/	/	/	/
4	1	11	11	1	/	/	/
5	1	26	66	26	1	/	/
6	1	57	302	302	57	1	/
7	1	120	1191	2416	1191	120	1

Il **major index** di una permutazione è definito come la somma delle sue discese:

$$maj(p) = \sum_{i \in Des(p)} i$$

Il major index della permutazione $p = 4756132$ vale ad esempio $2 + 4 + 6 = 12$.

Le due statistiche "numero di inversioni" e "major index" sono equidistribuite su S_n:

$$\sum_{p \in S_n} x^{inv(p)} = \sum_{p \in S_n} x^{maj(p)}$$

Questo implica che ci sono tante permutazioni di lunghezza n con k inversioni quante sono le permutazioni (sempre lunghe n) con major index uguale a k (esse ovviamente non sono le stesse). Ecco un esempio con $n = 4$:

p	*inv(p)*	*maj(p)*	*p*	*inv(p)*	*maj(p)*
1234	**0**	**0**	*3124*	**2**	**1**
1243	**1**	**3**	*3142*	**3**	**4**
1324	**1**	**2**	*3214*	**3**	**3**
1342	**2**	**3**	*3241*	**4**	**4**
1423	**2**	**2**	*3412*	**4**	**2**
1432	**3**	**5**	*3421*	**5**	**5**
2134	**1**	**1**	*4123*	**3**	**1**
2143	**2**	**4**	*4132*	**4**	**4**
2314	**2**	**2**	*4213*	**4**	**3**
2341	**3**	**3**	*4231*	**5**	**4**
2413	**3**	**2**	*4312*	**5**	**3**
2431	**4**	**5**	*4321*	**6**	**6**

Come deducibile dalla tabella:

$$\#(p: inv(p) = 0) = 1 = \#(p: maj(p) = 0)$$

$$\#(p: inv(p) = 1) = 3 = \#(p: maj(p) = 1)$$

$$\#(p: inv(p) = 2) = 5 = \#(p: maj(p) = 2)$$

$$\#(p: inv(p) = 3) = 6 = \#(p: maj(p) = 3)$$

$$\#(p: inv(p) = 4) = 5 = \#(p: maj(p) = 4)$$

$$\#(p{:}\, inv(p) = 5) = 3 = \#(p{:}\, maj(p) = 5)$$

$$\#(p{:}\, inv(p) = 6) = 1 = \#(p{:}\, maj(p) = 6)$$

1.8 La scomposizione in cicli di una permutazione

Un'altra rappresentazione importante e molto compatta di una permutazione è quella ciclica. Un **ciclo** è una lista di interi tra parentesi e definisce la permutazione che associa ad ogni intero quello successivo:

$$\big(1\ \ p(1)\ \ p^2(1) \ldots p^k(1)\big)(\ldots)(\ldots)$$

Due cicli si dicono **disgiunti** quando non hanno elementi in comune e, se questo accade, essi godono della proprietà commutativa: infatti $(1\ 4\ 2)(3\ 5)$ e $(3\ 5)(1\ 4\ 2)$ definiscono la stessa permutazione.

L'**ordine** k di un ciclo corrisponde alla sua lunghezza, ovvero al numero dei k elementi di cui è costituito. Un ciclo di ordine 2 è detto **trasposizione**.

Ogni permutazione si può scrivere come composizione di cicli disgiunti in modo unico, a meno dell'ordine secondo cui gli stessi cicli sono stati scritti. Ogni ciclo a sua volta è prodotto di trasposizioni: ad esempio il ciclo $(1\ 4\ 2)$ può essere riscritto come $(1\ 4)(1\ 2)$. Ne segue quindi che anche ogni permutazione è prodotto di trasposizioni: $(1\ 4\ 2)(3\ 5)$ equivale a $(1\ 4)(1\ 2)(3\ 5)$.

Ad esempio:

$$p = 4\ 1\ 5\ 2\ 3 = (1\ 4\ 2)(3\ 5)$$

La notazione ciclica di p implica che:

$$p(1) = 4, p(4) = 2, p(2) = 1 \text{ [primo ciclo]}$$

$$p(3) = 5, p(5) = 3 \text{ [secondo ciclo]}$$

Vi sono però molti modi di scrivere una singola permutazione come prodotto di trasposizioni e queste ultime non sono necessariamente disgiunte. Il numero di fattori di questo prodotto non è infatti univocamente determinato dalla permutazione, al contrario però della sua parità. Se una permutazione infatti è pari, essa potrà essere scritta solo e soltanto come prodotto di un numero pari di trasposizioni (e viceversa per quelle dispari):

$$4\ 1\ 5\ 2\ 3 = (1\ 4)(1\ 2)(3\ 5) = (1\ 4)(1\ 2)(1\ 3)(1\ 5)(1\ 3) \text{ [dispari]}$$

$$4\ 1\ 5\ 3\ 2 = (1\ 4)(1\ 3)(1\ 5)(1\ 2) \text{ [pari]}$$

Le permutazioni pari di lunghezza n sono la metà di quelle totali, il che equivale a dire che ne esistono tante quante quelle dispari.

1.9 La mappa di Foata

La **mappa di Foata** è una biiezione di S_n in se stesso definita come segue:

• scomporre la permutazione p in un prodotto di cicli disgiunti;

• scrivere ogni ciclo a partire dal suo elemento più piccolo;

• ordinare i cicli in ordine decrescente dei loro minimi;

• cancellare le parentesi della rappresentazione in cicli di p.

Quello che si ottiene è la rappresentazione in una riga di una nuova permutazione $F(p)$, definita come l'immagine di p attraverso la mappa di Foata.

È evidente che F è una funzione biiettiva, infatti per ricondursi alla permutazione p originaria è necessario:

• considerare i minimi locali da sinistra di $F(p)$;

• inserire una parentesi aperta prima di ogni minimo per segnalare l'inizio di un ciclo e posizionare le rispettive parentesi chiuse;

• comporre i cicli così trovati per riottenere p.

Ad esempio:

$$p = 85612437 = (25)(187364) \to F(p) = 25187364$$

$$F(p) = \mathbf{2}5\mathbf{1}87364 \to (25)(187364) = 85612437 = p$$

I parametri "numero di minimi locali da sinistra" e "numero di cicli" sono equidistribuiti su S_n . Per dimostrarlo basta osservare che, per ogni permutazione p, risulta $c(p) = m(F(p))$.

Questo implica che ci sono tante permutazioni di lunghezza n scomponibili in k cicli disgiunti quante sono le permutazioni (sempre lunghe n) con k minimi locali da sinistra (esse ovviamente non sono le stesse).

Nella pagina seguente è riportato un esempio per le permutazioni di lunghezza $n = 4$.

p	c(p)	m(p)	p	c(p)	m(p)
1234	**4**	**1**	*4231*	**2**	**3**
1243	**3**	**1**	*2431*	**1**	**2**
1423	**2**	**1**	*2341*	**2**	**2**
4123	**1**	**2**	*2314*	**3**	**2**
4132	**2**	**2**	*3124*	**2**	**2**
1432	**3**	**1**	*3142*	**1**	**2**
1342	**2**	**1**	*3412*	**2**	**2**
1324	**3**	**1**	*4312*	**3**	**3**
2134	**2**	**2**	*4321*	**2**	**4**
2143	**1**	**2**	*3421*	**1**	**3**
2413	**2**	**2**	*3241*	**2**	**3**
4213	**1**	**3**	*3214*	**3**	**3**

Come deducibile dalla tabella:

$$\#(p{:}\, c(p) = 1) = 6 = \#(p{:}\, m(p) = 1)$$

$$\#(p{:}\, c(p) = 2) = 11 = \#(p{:}\, m(p) = 2)$$

$$\#(p{:}\, c(p) = 3) = 6 = \#(p{:}\, m(p) = 3)$$

$$\#(p{:}\, c(p) = 4) = 1 = \#(p{:}\, m(p) = 4)$$

Tra i vari esempi di applicazione della mappa di Foata il seguente risultato è sicuramente degno di nota: sia p una permutazione scelta arbitrariamente in S_n e sia i un intero $\leq n$; la probabilità che i si trovi in un ciclo di lunghezza k di p è indipendente da k e vale $\frac{1}{n}$.

Per dimostrare quanto detto è possibile supporre, senza perdita di generalità, che $i = 1$. Per qualsiasi altro $i \neq 1$ è sufficiente moltiplicare la permutazione p per la trasposizione $(1\ i)$. Si consideri poi l'immagine $F(p)$ di p attraverso la mappa di Foata: è evidente che 1 si trova in un ciclo di lunghezza k di p se e solo se in $F(p)$ il simbolo 1 occupa la posizione $n + 1 - k$, cioè se e solo se $F\big(p(n + 1 - k)\big) = 1$, e questo accade ovviamente con probabilità $\frac{1}{n}$.

Per esempio nelle permutazioni con lunghezza $n = 4$ la probabilità che il simbolo 2 si trovi in un ciclo di lunghezza 3 vale $\frac{1}{4}$, quindi vi saranno 6 permutazioni che soddisfano tale richiesta:

$$1423 = (1)(\mathbf{2}\ 4\ 3) \quad 4132 = (1\ 4\ \mathbf{2})(3) \quad 1342 = (1)(\mathbf{2}\ 3\ 4)$$

$$2431 = (1\ \mathbf{2}\ 4)(3) \quad 2314 = (1\ \mathbf{2}\ 3)(4) \quad 3124 = (1\ 3\ \mathbf{2})(4)$$

CAPITOLO II

ALGORITMI PER LA GENERAZIONE DI PERMUTAZIONI

2.1 Algoritmo lessicografico

L'ordine **lessicografico** è un criterio di ordinamento di stringhe costituite da una sequenza di simboli, per i quali è già presente un ordine interno. La regola di ordinamento corrisponde a quella utilizzata nei dizionari, anche se estesa ad un qualunque insieme di simboli:

• si pone $i = 1$;

• si confrontano i simboli nella posizione i-esima della stringa;

• se una sola delle due stringhe non possiede l'elemento i-esimo, allora è minore dell'altra e l'algoritmo termina;

• se entrambe le stringhe non possiedono l'elemento i-esimo, allora sono uguali e l'algoritmo termina;

• se i simboli sono uguali, si passa alla posizione $(i + 1)$-esima della stringa;

• se i simboli sono diversi, l'ordine delle stringhe è il loro ordine.

Uno dei più semplici algoritmi iterativi per listare le permutazioni di un insieme di elementi è probabilmente quello basato sull'ordine lessicografico.

A partire dalla permutazione identica ε_n, esso ricava la successiva basandosi sul fatto che essa deve essere la minima permutazione maggiore di quella corrente secondo l'ordine lessicografico, e così via per $n!$ iterazioni. Le permutazioni ottenute in questo modo saranno quindi ordinate in maniera crescente e l'ultima risulterà essere il ribaltamento di ε_n.

Considerando una permutazione come un vettore di n elementi numerici, per determinare la successiva l'algoritmo opera nel modo seguente:

1. a partire dall'ultimo elemento scorre l'array cercando il primo elemento preceduto da un elemento minore;
2. se non esiste si è giunti all'ultima permutazione possibile e l'algoritmo deve terminare;
3. se esiste ricomincia a scorrere il vettore dalla fine cercando il primo elemento maggiore dell'elemento trovato al punto 1;

4. si invertono gli elementi trovati al punto 1 e al punto 3;

5. se lo scambio non è avvenuto tra elementi di livello minimo (l'ultimo e il penultimo), si ripristina l'ordinamento interno invertendo le posizioni degli elementi che si trovano tra l'elemento ricavato al punto 1 e quello ricavato al punto 3.

```
public boolean prossima()
{
	int i=n-1;
	while (i>0 && (p[i-1]>=p[i]))
		i--; // punto 1
	if(i==0)
		return false; // punto 2
	int j=n;
	while (p[j-1]<=p[i-1])
		j--; // punto 3
	swap(p[i-1], p[j-1]); // punto 4
	i++;
	j=n;
	while (i<j)
	{
		swap(p[i-1], p[j-1]);
		i++;
		j--;
	} // punto 5
	return true;
}
```

1234
1243
1324
1342
1423
1432
2134
2143
2314
2341
2413
2431
3124
3142
3214
3241
3412
3421
4123
4132
4213
4231
4312
4321

Il codice qui riportato mostra un esempio di implementazione dell'algoritmo per mezzo di una funzione booleana che, data la permutazione corrente p, la trasforma in quella successiva. A destra sono invece listate le permutazioni di lunghezza 4 ricavate mediante l'algoritmo lessicografico.

L'algoritmo iterativo per generare le permutazioni in ordine lessicografico è molto semplice e generico, ma non è abbastanza efficiente: infatti l'analisi della struttura attuale del vettore ad ogni iterazione ne incrementa di molto la complessità.

2.2 Algoritmo degli scambi semplici

Un altro algoritmo decisamente più efficace è quello degli **scambi semplici** (o *plain changes*), ideato nel XVII secolo in Inghilterra da parte dei suonatori di campane che avevano sviluppato il buffo passatempo di suonare le campane secondo tutte le permutazioni possibili. Esso è noto anche come l'algoritmo di *Johnson-Trotter* dai nomi di chi ne ha realizzato la prima implementazione informatica.

L'algoritmo opera facendo in modo che solo una coppia venga scambiata ad ogni permutazione e che la coppia sia sempre formata da elementi adiacenti. L'idea da cui nasce l'algoritmo è che si possano generare le permutazioni di un vettore di n elementi considerando tutte quelle di $n-1$ elementi e facendo scorrere l' n-esimo valore all'interno di esse.

```
public void scambi() {
      do {
            flag=true;
            j=n-1;
            s=0;
            do {
                  q=c[j]+d[j];
                  if (q==1 && j==0)
                        return;
                  if (q>=0 && q!=(j+1))
                  {
                        swap(p[j-c[j]+s], p[j-q+s]);
                        c[j]=q;
                        flag=false;
                  }
                  else
                  {
                        if (q==j+1)
                              s++;
                        if (q<0 || q==j+1)
                        {
                              d[j]=-d[j];
                              j--;
                        }
                  }
            } while (flag);
      } while (true);
}
```

1234
1243
1423
4123
4132
1432
1342
1324
2134
2143
2413
4213
4231
2431
2341
2314
3124
3142
3412
4312
4321
3421
3241
3214

L'implementazione fa uso di un vettore c (degli scambi) inizializzato con tutti gli elementi a 0 e di un vettore d (delle direzioni) inizializzato con tutti gli elementi a 1.

2.3 I factoradic e il codice di Lehmer

Solitamente un intero x può essere rappresentato come un polinomio di potenze di una certa base b. Ad esempio, con $b = 10$ e $x = 1990$:

$$1990 = \mathbf{1} \cdot 10^3 + \mathbf{9} \cdot 10^2 + \mathbf{9} \cdot 10^1 + \mathbf{0} \cdot 10^0$$

Tutto ciò è possibile in quanto le potenze dei primi n numeri costituiscono una base che permette di rappresentare univocamente un numero con un polinomio. Ma pure i fattoriali dei primi n numeri costituiscono una base: è quindi possibile ugualmente scrivere in modo univoco un numero come polinomio nei fattoriali della base e questa particolare rappresentazione è detta **factoradic**:

$$x = a_n \cdot n! + \cdots + a_3 \cdot 3! + a_2 \cdot 2! + a_1 \cdot 1!$$

A condizione però che $\forall i \; a_i \leq i$ e $(0 \leq x < n!)$. Ad esempio:

$$1990 = \mathbf{2} \cdot 6! + \mathbf{4} \cdot 5! + \mathbf{2} \cdot 4! + \mathbf{3} \cdot 3! + \mathbf{2} \cdot 2! + \mathbf{0} \cdot 1!$$

L'univocità di questa rappresentazione è garantita dal fatto che la somma dei primi n fattoriali moltiplicati per il loro indice è sempre il fattoriale successivo meno 1:

$$\sum_{i=0}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$$

Una caratteristica fondamentale dei factoradic è che i suoi coefficienti costituiscono un codice che permette di associare al numero x rappresentato la $(x+1)$-esima permutazione dell'insieme degli elementi della base. Questo particolare codice di traduzione viene chiamato **codice di Lehmer**.

Aggiungendo uno 0 in fondo a destra al codice di Lehmer trovato, i singoli termini si possono interpretare come il numero di elementi che si trovano "al posto sbagliato", ossia che si trovano a destra e sono minori dell'elemento preso in esame e violano quindi l'ordinamento crescente degli elementi (sempre in riferimento alla permutazione identica ε_n). In altre parole l' i-esimo valore del codice di Lehmer conta le inversioni dell'elemento $p(i)$ della permutazione associata.

Ad esempio, con $n = 4$ scegliendo un numero x tale che $0 \leq x < n!$:

$$x = 5 \rightarrow f = \mathbf{0} \cdot 3! + \mathbf{2} \cdot 2! + \mathbf{1} \cdot 1! \rightarrow l = 0210 \rightarrow p = 1432$$

• il primo elemento del codice di Lehmer l è 0: vale a dire che, nella permutazione associata p, il primo elemento non avrà elementi minori alla sua destra (in pratica sarà l'elemento minore di tutti, ovvero 1);

• $l(2)$ è 2, quindi $p(2)$ avrà alla sua destra 2 elementi minori e sarà anche contemporaneamente maggiore di 1, ossia sarà uguale a 4;

• $l(3)$ è 1, quindi $p(3)$ avrà alla sua destra 1 elemento minore e sarà anche contemporaneamente maggiore di 1 e minore di 4, ossia sarà uguale a 3;

• $l(4)$ è sicuramente 0, in quanto l'ultimo elemento di p non ha alcun elemento alla sua destra; inoltre per le considerazioni precedenti sarà uguale a 2.

Il numero x da cui è stata ricavata la permutazione p rivela anche che essa è la $(x + 1)$-esima permutazione di lunghezza n secondo l'ordine lessicografico (infatti 1432 risulta essere la sesta).

È pertanto possibile elencare tutte le permutazioni di lunghezza n semplicemente generando i primi $n!$ numeri, convertendoli in factoradic e traducendoli in permutazioni mediante il codice di Lehmer.

Questo algoritmo è poco efficiente se applicato a tutto l'insieme delle permutazioni, soprattutto in relazione con quello lessicografico e quello degli scambi semplici, ma risulta conveniente quando si vuole determinare una singola permutazione in tempo costante senza doverle generare tutte quante.

Il codice di Lehmer fornisce inoltre un modo alternativo per calcolare il valore massimo di inversioni per una permutazione di lunghezza n, che sappiamo essere $\binom{n}{2}$:

• si consideri il codice di Lehmer associato a $(\varepsilon_n)^r$, il quale risulta essere $(n-1)(n-2) \dots 210$, dal momento che il massimo numero di elementi minori e a destra del primo è sempre $n - 1$, del secondo è $n - 2$, e così via;

• sommandone gli elementi si ottiene la somma dei primi $n - 1$ numeri naturali, ossia $\frac{n(n-1)}{2}$, che equivale appunto a $\binom{n}{2}$.

CAPITOLO III

SOTTOINSIEMI NOTEVOLI DI PERMUTAZIONI

3.1 Le dismutazioni

In quanti modi diversi n persone sedute ad un tavolo possono scambiarsi di posto senza che nessuno ritorni mai sulla sedia di partenza? Queste particolari permutazioni di un insieme che non fissano alcun elemento sono dette **dismutazioni** (o *dérangements*). Esse sono quelle in cui nessuno dei valori dell'insieme iniziale compare nella sua posizione originaria.

Più formalmente le dismutazioni di un insieme X sono le funzioni biiettive $d: X \to X$ tali che, $\forall x \in X$, $d(x) \neq x$.

Ecco come esempio le 9 permutazioni senza punti fissi di lunghezza 4:

$$2143, 2341, 2413$$

$$3142, 3412, 3421$$

$$4123, 4312, 4321$$

Il numero d_n di dismutazioni di un insieme di n elementi è:

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot \frac{n!}{i!}$$

La dimostrazione di questo fatto è un esempio di applicazione del principio di inclusione ed esclusione. Dato un insieme X di n elementi, siano P e $D \subset P$ rispettivamente l'insieme delle sue permutazioni e quello delle sue dismutazioni. Sia A_i l'insieme delle permutazioni che fissano l' i-esimo elemento: la sua cardinalità sarà ovviamente $(n-1)!$ in quanto gli altri $n-1$ elementi possono muoversi liberamente. Per calcolare $|D|$ è necessario quindi sottrarre da $|P|$ il numero di dismutazioni che fissano almeno un elemento:

$$D = P \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

Poniamo:

$$T_1 = \left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right|$$

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

Si può osservare che $T_1 \leq S_1$, perché in S_1 le intersezioni del tipo $A_i \cap A_j$ saranno contate 2 volte. Più precisamente $S_1 = T_1 + T_2$, dove:

$$T_2 = \left| \bigcup_{0 \leq k_1 < k_2 \leq n} A_{k_1} \cap A_{k_2} \right|$$

In generale, definiti:

$$T_i = \left| \bigcup_{1 \leq k_1 < \ldots < k_i \leq n} A_{k_1} \cap \ldots \cap A_{k_i} \right|$$

$$S_i = \sum_{1 \leq k_1 < \ldots < k_i \leq n} |A_{k_1} \cap \ldots \cap A_{k_i}|$$

Si avrà che $S_i = T_i + T_{i+1} \rightarrow T_i = S_i - T_{i+1}$ e in particolare:

$$T_1 = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 \ldots = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot S_i$$

Calcolare $|S_i|$ non è difficile: i modi di scegliere i elementi da fissare sono $\binom{n}{i}$ e per ognuno di questi gli altri possono permutare liberamente in $(n-i)!$ modi. Ne segue che:

$$S_i = \binom{n}{i} (n-i)! = \frac{n!}{(n-i)! \cdot i!} \cdot (n-i)! = \frac{n!}{i!}$$

Il numero di permutazioni che fissano almeno un elemento sono allora:

$$T_1 = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot \frac{n!}{i!}$$

Come volevasi dimostrare quelle che non ne fissano nessuno sono:

$$|D| = |P| - T_1 =$$

$$n! - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot \frac{n!}{i!} = n! \cdot \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot \frac{1}{i!} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot \frac{n!}{i!}$$

Il comportamento asintotico del numero di dismutazioni di un insieme di n elementi (ovvero quello che succede per $n \to +\infty$) risulta davvero singolare. È possibile notare infatti che $\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!}$ è proprio la serie di Taylor di $\frac{1}{e}$ e quindi:

$$n! \cdot \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \sim \frac{n!}{e}$$

È altrettanto curioso notare che, dato n sufficientemente grande, scegliendo a caso una permutazione di un insieme n elementi la probabilità che sia una dismutazione è circa:

$$\frac{\frac{n!}{e}}{(n!)} = \frac{1}{e} \approx 36{,}8\%$$

La seguente tabella mostra i primi 9 valori del numero di dismutazioni di n elementi confrontato col rispettivo valore di $\frac{n!}{e}$ (si assume che $d_0 = 1$):

n	d_n	$n!/e$
0	1	0,37
1	0	0,37
2	1	0,73
3	2	2,21
4	9	8,83
5	44	44,14
6	265	264,87
7	1854	1854,11
8	14833	14832,90

Di seguito è riportata la formula ricorsiva per calcolare tutti i valori di d_n:

$$\begin{cases} d_0 = 1 \\ d_n = (-1)^n + n \cdot d_{n-1} \end{cases}$$

3.2 Le permutazioni centrosimmetriche

Una permutazione p si dice **centrosimmetrica** se e solo se risulta uguale al suo complemento ribaltato, ovvero:

$$p = p^{rc}$$

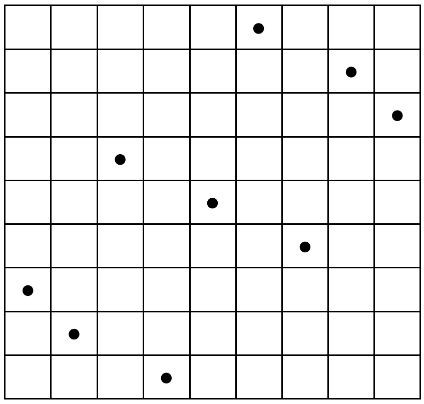
Ad esempio:

$$p = 326159487$$

$$p^c = 784951623$$

$$p^{rc} = 326159487 = p$$

Se una permutazione è centrosimmetrica la sua rappresentazione grafica è simmetrica rispetto al centro, ossia all'intersezione delle due diagonali. Eccone un esempio con la sopracitata permutazione p:



Dal momento che le rappresentazioni grafiche di p^r, p^c e p^{-1} a loro volta sono ottenibili da quella di p mediante simmetrie, è possibile affermare che, se una permutazione è centrosimmetrica, allora lo sono anche il suo ribaltamento, il suo complemento e la sua inversa.

Ecco di seguito tutte le 8 permutazioni centrosimmetriche di lunghezza 4:

$$1234, 1324, 3142, 3412$$

$$4321, 4231, 2413, 2143$$

Come si può facilmente notare, per ogni permutazione p del precedente esempio si verifica che:

$$p(1) + p(4) = 5$$

$$p(2) + p(3) = 5$$

Più in generale, per ogni $i = 1, \dots, n$ vale la seguente uguaglianza:

$$p(i) + p(n + 1 - i) = n + 1$$

$$p(n + 1 - i) = n + 1 - p(i)$$

Naturalmente se n è dispari, n può essere scritto come $2k + 1$ e nell'elemento centrale in posizione $k + 1$ si ha che:

$$p(2k + 2 - k - 1) = 2k + 2 - p(k + 1)$$

$$p(k + 1) = 2k + 2 - p(k + 1)$$

$$p(k + 1) + p(k + 1) = 2k + 2$$

$$2 \cdot p(k + 1) = 2 \cdot (k + 1)$$

$$p(k + 1) = k + 1$$

Il $(k + 1)$-esimo elemento vale quindi obbligatoriamente $k + 1$ e per questo risulta un punto fisso per ogni permutazione centrosimmetrica di lunghezza dispari.

Eliminando l'elemento centrale da una permutazione centrosimmetrica di lunghezza dispari e decrementando di 1 i restanti simboli maggiori di quello cancellato, si ottiene una permutazione sempre centrosimmetrica e ovviamente di lunghezza pari:

3 2 6 1 **5** 9 4 8 7

[elimino il valore centrale]

3 2 5 1 8 4 7 6

[riscalo opportunamente gli altri valori]

Questa trasformazione è certamente una biiezione e di conseguenza è possibile affermare che le permutazioni centrosimmetriche di lunghezza $2k + 1$ sono in egual numero rispetto a quelle di lunghezza $2k$.

Sia k un intero definito nel modo seguente:

$$k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

Il numero c_n di permutazioni centrosimmetriche di un insieme di n elementi equivale a:

$$k! \cdot 2^k$$

È possibile ricavare questo valore anche in maniera ricorsiva mediante la seguente formula:

$$\begin{cases} c_0 = c_1 = 1 \\ c_n = 2k \cdot c_{n-2} \end{cases}$$

La seguente tabella mostra i primi 14 valori di c_n:

n	*k*	c_n
0	0	1
1		
2	1	2
3		
4	2	8
5		
6	3	48
7		
8	4	384
9		
10	5	3840
11		
12	6	46080
13		

Ecco invece un algoritmo per generare tutte le permutazioni centrosimmetriche di lunghezza n:

- calcolare il rispettivo valore di k in base alla parità di n;
- generare tutte le permutazioni di k elementi;
- considerare i k valori di ogni permutazione come i primi k elementi di $k!$ permutazioni di lunghezza n;
- per ognuno di quei k valori in posizione i, determinare il corrispondente valore di posizione $n+1-i$ tramite l'uguaglianza $p(n+1-i)=n+1-p(i)$;
- duplicare le $k!$ permutazioni in modo tale da ottenere $k!$ gruppi contenenti ognuno 2^k permutazioni uguali tra loro;
- considerare i primi k valori di ogni permutazione come colonne in base alla loro posizione i all'interno della permutazione;
- suddividere orizzontalmente ognuna delle k colonne in $2^i \cdot k!$ sottogruppi in base alla posizione i della colonna stessa;
- per ogni colonna numerare in modo verticale i sottogruppi da 1 a $2^i \cdot k!$;

• in ognuno dei sottogruppi con indice pari scambiare gli elementi che ne fanno parte coi rispettivi valori in posizione $n + 1 - i$;

• se n è pari, l'algoritmo termina;

• se n è dispari, inserire in ognuna delle $2^k \cdot k!$ permutazioni il valore $k + 1$ in posizione $k + 1$ e l'algoritmo termina.

Ad esempio, se $n = 5$, allora $k = 2$ e le permutazioni di 2 elementi sono:

1	2
2	1

Calcolo i corrispondenti valori in posizione $6 - i$:

1	2		4	5
2	1		5	4

Duplico le 2 permutazioni in modo tale da ottenere 2 gruppi contenenti ognuno 4 permutazioni uguali tra loro:

1	2		4	5
1	2		4	5
1	2		4	5
1	2		4	5
2	1		5	4
2	1		5	4
2	1		5	4
2	1		5	4

Suddivido orizzontalmente ognuna delle prime 2 colonne in $2^i \cdot 2$ sottogruppi in base alla posizione i della colonna stessa ed evidenzio i sottogruppi con indice pari:

1	2		4	5
1	2		4	5
1	2		4	5
1	2		4	5
2	1		5	4
2	1		5	4
2	1		5	4
2	1		5	4

In ognuno dei sottogruppi evidenziati scambio gli elementi che ne fanno parte coi rispettivi valori in posizione $6 - i$:

1	2		4	5
1	4		2	5
5	2		4	1
5	4		2	1
2	1		5	4
2	5		1	4
4	1		5	2
4	5		1	2

Aggiungo infine in ognuna delle 8 permutazioni il valore 3 in posizione 3:

1	2	3	4	5
1	4	3	2	5
5	2	3	4	1
5	4	3	2	1
2	1	3	5	4
2	5	3	1	4
4	1	3	5	2
4	5	3	1	2

3.3 Le involuzioni

Una permutazione p è un'**involuzione** se e solo se risulta uguale all'inversa di se stessa:

$$p = p^{-1}$$

Più formalmente le involuzioni di un insieme X sono le funzioni biiettive $i: X \to X$ tali che, $\forall x \in X$, $i(i(x)) = x$.

Le permutazioni che soddisfano questa proprietà sono soltanto quelle scomponibili in cicli di lunghezza massima uguale a 2. Infatti applicando 2 volte una stessa trasposizione il risultato è l'identità:

$$213 = (1\ 2)(3)$$

$$(1\ 2)^2(3)^2 = 123 = \varepsilon_3$$

In altre parole le involuzioni sono sempre riscrivibili come prodotto di trasposizioni disgiunte ed eventuali punti fissi.

Ecco come esempio tutte le 10 involuzioni di lunghezza 4 e la loro rispettiva scomposizione in cicli:

$$1234 = (1)(2)(3)(4)$$

$$4231 = (1\ 4)(2)(3)$$

$$3214 = (1\ 3)(2)(4)$$

$$2134 = (1\ 2)(3)(4)$$

$$1324 = (1)(2\ 3)(4)$$

$$1432 = (1)(2\ 4)(3)$$

$$1243 = (1)(2)(3\ 4)$$

$$2143 = (1\ 2)(3\ 4)$$

$$3412 = (1\ 3)(2\ 4)$$

$$4321 = (1\ 4)(2\ 3)$$

Il numero i_n di involuzioni di un insieme di n elementi può essere calcolato mediante la seguente formula ricorsiva:

$$\begin{cases} i_0 = i_1 = 1 \\ i_n = i_{n-1} + i_{n-2} \cdot (n-1) \end{cases}$$

Si consideri infatti una qualsiasi involuzione p di S_n:

• $p(n) = n \rightarrow$ cancellando da p il punto fisso n, si ottiene un'involuzione di S_{n-1};

• $p(n) = h \neq n \rightarrow$ cancellando da p il ciclo $(h\ n)$ e rinormalizzando i simboli restanti, si ottiene un'involuzione di S_{n-2}; quest'ultima proviene a sua volta da $n-1$ involuzioni di S_n, una per ogni valore di h.

Ad esempio:

• $p_1 = 2136745\mathbf{8} \rightarrow 2136745$

• $p_2 = 64\mathbf{8}25173 \rightarrow 532416$

Questo procedimento, se effettuato al contrario, permette di generare tutte le i_n involuzioni di lunghezza n:

• i_{n-1} di queste vengono create soltanto aggiungendo a tutte le involuzioni di $n-1$ elementi il punto fisso n;

- per le restanti $i_{n-2} \cdot (n-1)$ è necessario inserire in tutte le involuzioni di $n-2$ elementi ognuno degli $n-1$ possibili simboli h in posizione n e il simbolo n in posizione h (naturalmente rinormalizzando tutti gli altri valori).

Nella tabella sottostante sono state generate le involuzioni di lunghezza 4:

1	2	3	**4**
2	1	3	**4**
1	3	2	**4**
3	2	1	**4**
1	2	**4**	**3**
2	1	**4**	**3**
1	**4**	3	**2**
3	**4**	1	**2**
4	2	3	**1**
4	3	2	**1**

Ecco invece due formule esplicite per calcolare i_n equivalenti tra loro:

$$i_n = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \frac{n!}{(n-2k)! \cdot 2^k \cdot k!}$$

$$i_n = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1} \frac{\prod_{i=0}^{k} \binom{n-2i}{2}}{(k+1)!} + 1$$

La tabella sottostante mostra i primi 10 valori di questo numero:

n	***i***
0	1
1	1
2	2
3	4
4	10
5	26
6	76
7	232
8	764
9	2620

Sono dette **anti-involuzioni** tutte quelle permutazioni p il cui ribaltamento è un'involuzione:

$$p^r = (p^r)^{-1}$$

Dal momento che per generare tutte le anti-involuzioni di lunghezza n è sufficiente ribaltare le involuzioni di n elementi, esse sono presenti in egual numero.

Ecco tutte le 10 anti-involuzioni di lunghezza 4:

$$4321,\ 1324,\ 4123,\ 4312,\ 4231$$

$$2341,\ 3421,\ 3412,\ 2143,\ 1234$$

Chiaramente esistono permutazioni che sono sia involuzioni sia anti-involuzioni:

$$4321,\ 1324,\ 4231$$

$$3412,\ 2143,\ 1234$$

CAPITOLO IV

CAMMINI DI DYCK E PERMUTAZIONI

4.1 I cammini di Dyck

Si consideri il reticolato NxN, cioè l'insieme dei punti del primo quadrante del piano cartesiano a coordinate intere. Un **cammino di Dyck** di semilunghezza n è un insieme di $2n$ segmenti del reticolato dei due tipi seguenti:

• segmenti di estremi (a, b), $(a + 1, b + 1)$, ovvero passi in su, indicati con U;

• segmenti di estremi (a, b), $(a + 1, b - 1)$, ovvero passi in giù, indicati con D;

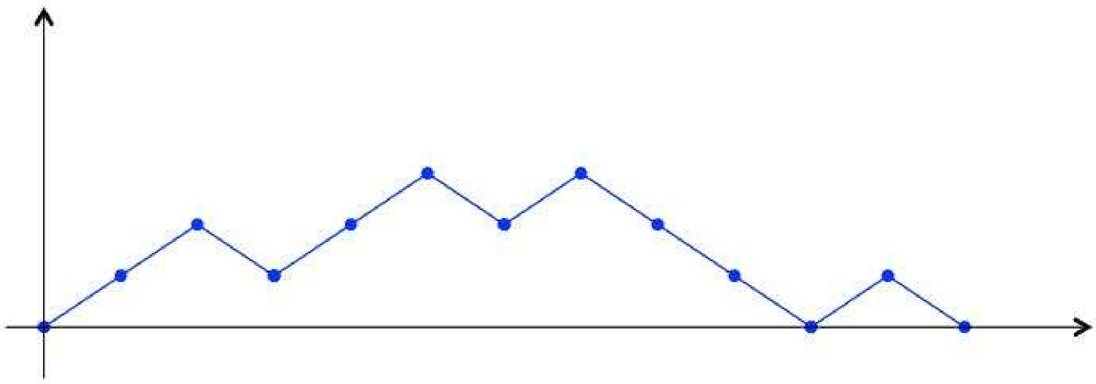
tali che:

• il punto iniziale del cammino è l'origine;

• il punto finale ha coordinate $(2n, 0)$;

• il cammino si mantiene sempre nel primo quadrante.

Ecco nella figura sottostante un esempio di cammino di Dyck di semilunghezza 6:



In modo equivalente si può affermare che un cammino di Dyck di semilunghezza n è una successione di $2n$ simboli U e D, tali che:

• il numero di simboli D è uguale al numero di simboli U;

• in ogni segmento iniziale della successione il numero di simboli D non supera mai il numero di U.

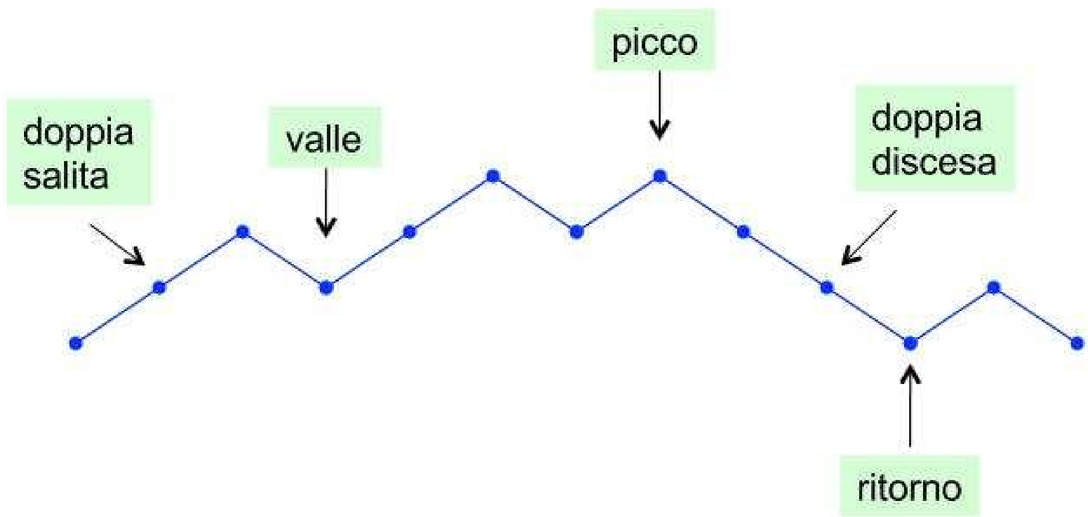
Il cammino di Dyck della figura precedente corrisponde alla successione $U^2DU^2DUD^3UD$.

Un **picco** di un cammino di Dyck è un suo punto situato tra un passo di salita e uno di discesa, o, equivalentemente, una sottosequenza costituita dai simboli consecutivi UD.

Una **valle** è un punto situato tra un passo di discesa ed uno di salita, o, equivalentemente, una sottosequenza costituita dai simboli consecutivi DU.

Un **ritorno** è un passo D del cammino il cui secondo estremo è situato sull'asse x ed è diverso dall'origine.

Le **doppie salite** e le **doppie discese** sono sottosequenze del cammino costituite rispettivamente dai simboli consecutivi UU e DD.



Ovviamente risultano vere le seguenti uguaglianze:

$$\#picchi = \#valli + 1$$

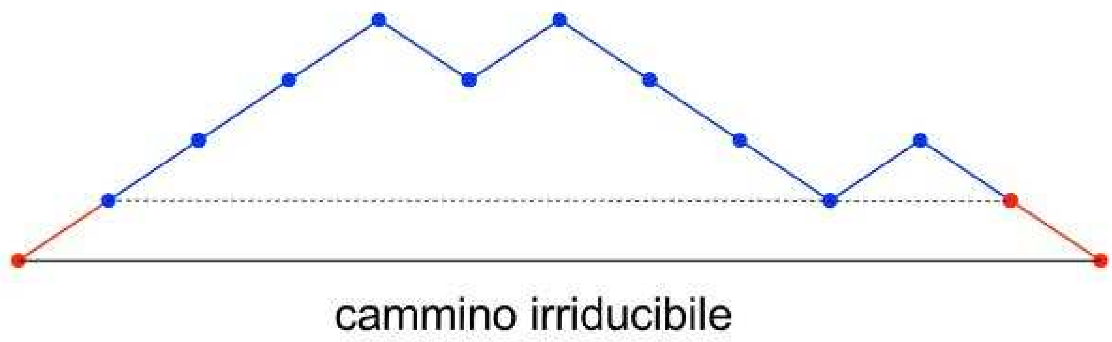
$$\#picchi + \#doppie\ salite = semilunghezza$$

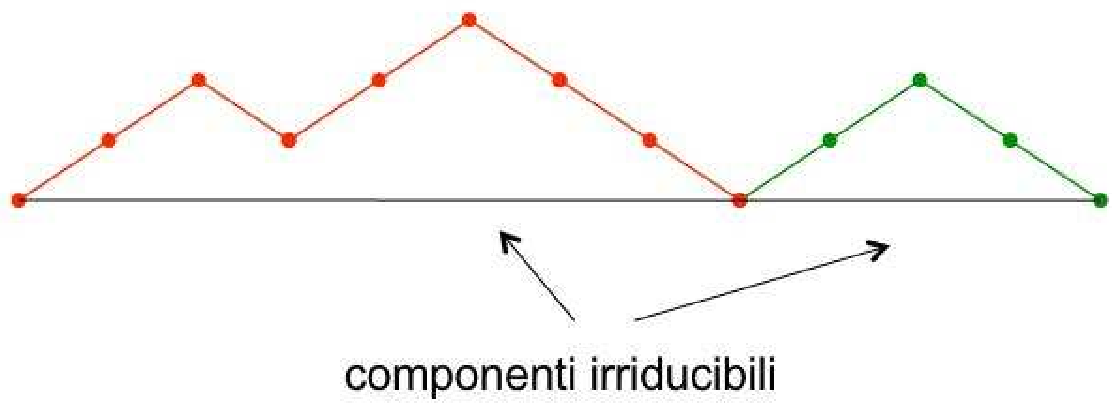
[ogni passo U dà luogo a un picco oppure a una doppia salita]

$$\#valli + \#doppie\ discese = semilunghezza - 1$$

[ogni passo D, tranne l'ultimo, dà luogo a un picco o a una doppia discesa]

Un cammino di Dyck C si dice **irriducibile** se il suo unico ritorno è il punto finale. Un tale cammino può essere scritto come $UC'D$, dove C' è un cammino di Dyck di semilunghezza inferiore di 1 rispetto a C. Un cammino non irriducibile si può naturalmente scomporre in componenti irriducibili.





4.2 I numeri di Catalan

La successione C_n dei **numeri di Catalan** è definita come segue:

$$\forall n \in N, C_n = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n} = \frac{2n!}{(n+1)! \cdot n!}$$

I primi 12 valori della successione sono:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
C_n	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796	58786

Un'espressione alternativa per C_n è la seguente:

$$\forall n \geq 1, C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$

Da quest'ultima si deduce immediatamente che C_n è intero per ogni n.

Confrontando le espressioni di C_{n+1} e di C_n e ponendo $C_0 = 1$ si ottiene la ricorrenza dei numeri di Catalan:

$$C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} \cdot C_n$$

Questa ricorrenza implica anche che:

$$\frac{C_{n+1}}{C_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 4$$

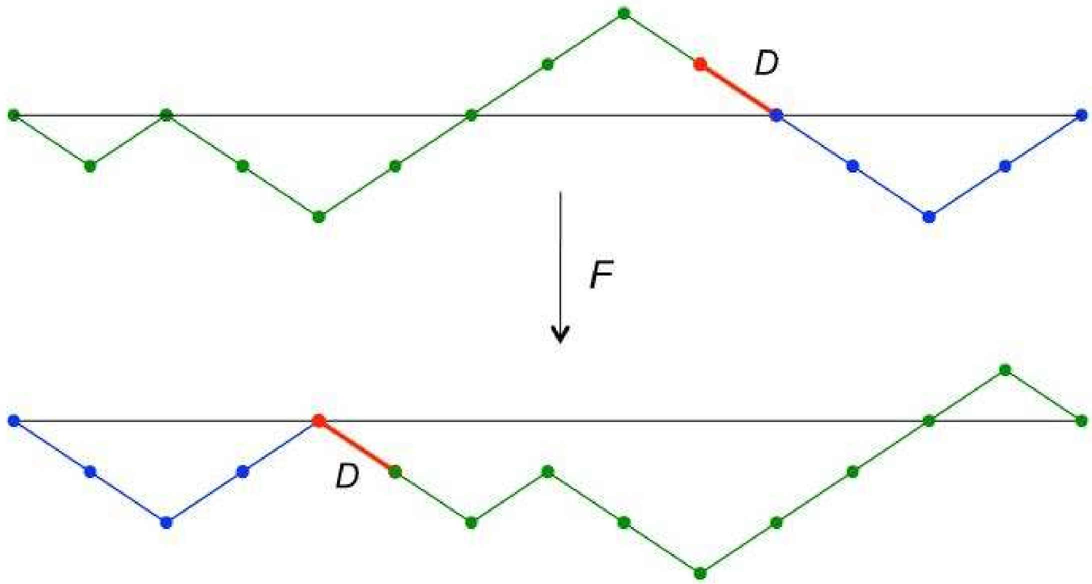
I numeri di Catalan intervengono nel conteggio di una quantità sorprendente di oggetti combinatori. In particolare C_n è il numero di cammini di Dyck di semilunghezza n.

Si consideri infatti l'insieme di tutti i cammini dall'origine al punto $(2n, 0)$ costituiti dai passi U e D. Per ognuno di questi cammini, il numero di passi U al di sopra dell'asse x è detto **eccedenza**. Ovviamente i cammini di Dyck sono tutti e soli i cammini con eccedenza n.

Si definisca ora una funzione f che associa ad un cammino C con eccedenza $j > 0$ un cammino con eccedenza $j - 1$ nel modo seguente:

- seguire il cammino C finché esso per la prima volta passa sopra l'asse x;
- continuare a seguirlo finché esso tocca nuovamente l'asse x;
- sia D l'ultimo passo di quest'ultima porzione di cammino;
- scomporre C in $\mathcal{A}D\mathcal{B}$, dove $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono sequenze di passi, eventualmente vuote;
- il corrispondente C' di C attraverso la funzione f è il cammino $\mathcal{B}D\mathcal{A}$.

È chiaro che i passi di salita della porzione $\mathcal{B}$ di C che si trovano sopra l'asse x mantengono la stessa proprietà anche in C', mentre quelli di $\mathcal{A}$ vengono spostati di un'unità verso il basso. L'eccedenza di C' è quindi diminuita di 1 rispetto a quella di C.



Si controlla facilmente che la funzione f così definita è invertibile, quindi è una biiezione. Questo implica che i cammini con eccedenza n sono tanti quanti quelli con eccedenza $n-1$, che a loro volta sono tanti quanti quelli con eccedenza $n-2$, e così via fino a 0. In definitiva, classificare i cammini in base all'eccedenza fornisce una partizione dell'insieme in $n+1$ blocchi, tutti equicardinali.

Dato che i cammini dall'origine al punto $(2n, 0)$ sono $\binom{2n}{n}$, ovvero il modo di scegliere le posizioni delle n salite, si ottiene che i cammini con eccedenza n (i cammini di Dyck) sono esattamente C_n, come volevasi dimostrare.

4.3 I cammini di Dyck etichettati

Un cammino di Dyck è **etichettato** se ogni suo passo di discesa è etichettato con un intero positivo, minore o uguale rispetto all'ordinata del suo estremo sinistro, con l'esclusione dei passi di discesa che fanno parte di un picco, i quali non vengono etichettati.

È possibile dimostrare che i cammini di Dyck etichettati di semilunghezza n sono in biiezione con le permutazioni di S_n.

Si definisca infatti una biiezione che associa ad ogni permutazione di S_n un cammino di Dyck etichettato di semilunghezza n nel modo seguente:

• scomporre $p \in S_n$ in un prodotto di cicli disgiunti;

• scrivere ogni ciclo a partire dal suo elemento più piccolo;

• ordinare i cicli in ordine crescente dei loro minimi;

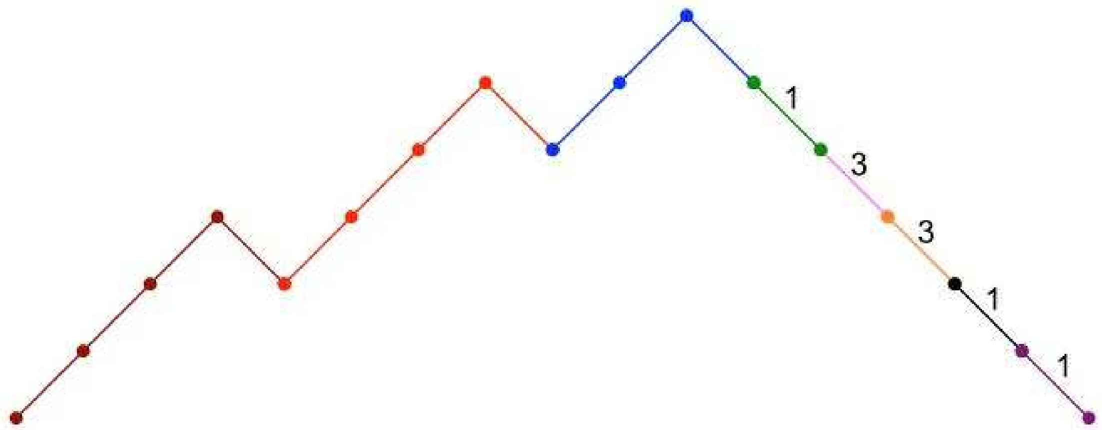
• scorrere nell'ordine gli interi i da 1 a n;

• disegnare il cammino di Dyck tracciando:

- k passi di salita ed uno di discesa se l'intero corrente i è il minimo di un ciclo di lunghezza k;
- un passo di discesa con etichetta h se i occupa, nella scrittura in cicli, la h-esima posizione tra quelle occupate da elementi maggiori di i.

Si verifica facilmente che la funzione così definita è una biiezione.

Si consideri la permutazione $p = 48672315$, la cui scomposizione in cicli è $(1\ 4\ 7)(2\ 8\ 5)(3\ 6)$. Il cammino di Dyck etichettato che le corrisponde è:



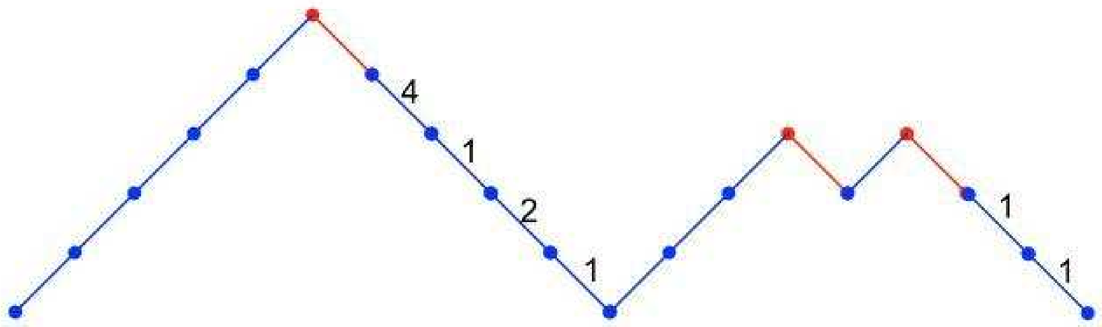
Una permutazione p di S_n si dice **sconnessa** se possiede un prefisso p' di lunghezza $k < n$ che è una permutazione di 1,2, … , k. In caso contrario, p risulta connessa. Ad esempio:

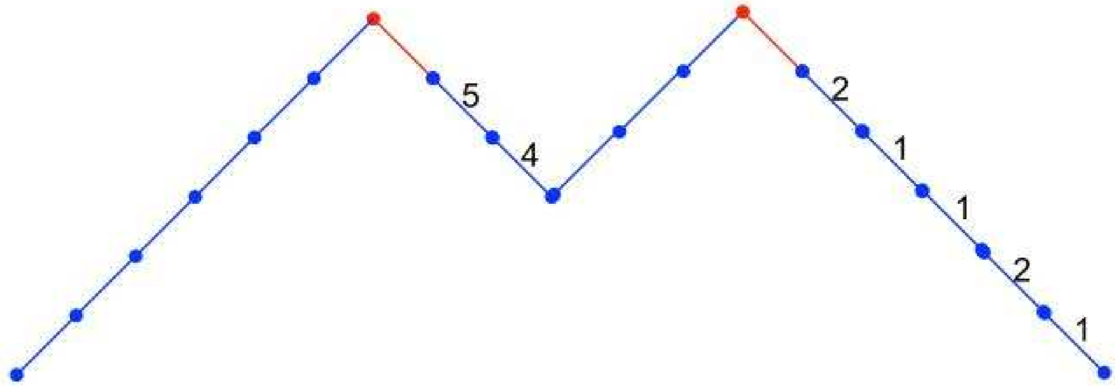
$p_1 = \mathbf{31524}8796$ è sconnessa

$p_2 = 612975348$ è connessa

Si può verificare facilmente che una permutazione è connessa se e solo se il corrispondente cammino di Dyck etichettato è irriducibile.

Nella pagina seguente sono riportati i cammini di Dyck etichettati associati rispettivamente a p_1 e a p_2.





4.4 Permutazioni a motivo escluso

Sia $w = a_1a_2 \dots a_n$ una sequenza di n numeri interi positivi, priva di elementi ripetuti. La **normalizzazione** di w è la permutazione di S_n ottenuta da w sostituendo con 1 il suo elemento minore, con 2 il secondo più piccolo, e così via per n volte. Ad esempio, la normalizzazione di $w = 935742$ è la permutazione 624531.

Date due permutazioni $p \in S_n$ e $k \in S_k$, si dice che p contiene il **motivo** k ($p \geq k$) se esiste una sottosequenza di p la cui normalizzazione è k:

$$p = 35471862, k = 1234$$

$\mathbf{35}4\mathbf{7}1\mathbf{8}62$ → normalizzando 3578 si ottiene 1234 → $p \geq k$

Sia k una permutazione di S_k. Per ogni intero non negativo n, si consideri l'insieme $S_n(k)$ delle permutazioni di S_n che evitano il motivo k. Si può osservare che:

$$|S_n(k)| = |S_n(k^r)|$$

$$|S_n(k)| = |S_n(k^c)|$$

$$|S_n(k)| = |S_n(k^{-1})|$$

$$|S_n(k)| = |S_n(k^{rc})|$$

Infatti se una permutazione p di S_n evita k, è evidente che p^{ϕ} evita a sua volta k^{ϕ}, con $\phi = r, c, -1$ e rc. Dal momento che S_n è chiuso rispetto alle operazioni di ribaltamento, complementazione e inversione, esiste una corrispondenza biunivoca tra i 5 insiemi precedentemente citati: questi ultimi hanno quindi tutti la stessa cardinalità.

Quando due motivi k e k' sono tali che $|S_n(k)| = |S_n(k')|$ per ogni n, essi si dicono **equidistribuiti**.

È evidente che entrambi i motivi di lunghezza 2 sono equidistribuiti:

$$|S_n(21)| = 1 = |S_n(12)|$$

L'unica permutazione che evita 21 è infatti la permutazione identica ε_n, mentre l'unica che evita 12 è il suo ribaltamento $(\varepsilon_n)^r$.

4.5 Motivi di lunghezza 3

I possibili motivi di lunghezza 3 sono 6, ma risulta che:

$$321 = \mathbf{123}^r$$

$$231 = \mathbf{132}^r, 312 = \mathbf{132}^c, 213 = \mathbf{132}^{rc}$$

E quindi:

$$|S_n(321)| = |S_n(\mathbf{123})|$$

$$|S_n(231)| = |S_n(312)| = |S_n(213)| = |S_n(\mathbf{132})|$$

È dunque sufficiente studiare i due casi $k = 123$ e $k' = 132$.

Si può dimostrare che due permutazioni di $S_n(123)$ con gli stessi minimi locali da sinistra nelle stesse posizioni coincidono.

Sia infatti p una permutazione di S_n e siano $m_1, m_2, \dots, m_k$ i suoi minimi locali da sinistra:

$$p = m_1 w_1 m_2 w_2 \dots m_k w_k$$

Si ha che $w_1, w_2, \dots, w_k$ sono sottosequenze di simboli eventualmente vuote. Se la permutazione p evita il motivo 123, allora la sequenza $s = w_1 w_2 \dots w_k$ deve essere obbligatoriamente decrescente (e viceversa).

Si supponga infatti per assurdo che s contenga due simboli a e b tali che $a < b$ e a preceda b nella sequenza. Sia m_i è un qualsiasi minimo locale da sinistra che precede a: in questo caso la normalizzazione della sottosequenza $m_i ab$ risulterebbe 123 e ciò sarebbe assurdo.

Ad esempio:

$$p = \mathbf{6}\ x_2\ \mathbf{3}\ x_4\ x_5\ \mathbf{2}\ \mathbf{1}\ x_8$$

[6, 3, 2 e 1 sono minimi locali da sinistra]

$$p \in S_n(123) \Leftrightarrow x_2 = 8, x_4 = 7, x_5 = 5, x_8 = 4$$

$$p = \mathbf{6}\ 8\ \mathbf{3}\ 7\ 5\ \mathbf{2}\ \mathbf{1}\ 4$$

Per di più, il teorema appena dimostrato è applicabile anche alle permutazioni di $S_n(132)$. Si riconsideri per l'appunto la permutazione p della dimostrazione precedente:

$$p = m_1 w_1 m_2 w_2 \dots m_k w_k$$

Se la permutazione p evita il motivo 132, allora la sequenza $s = w_1 w_2 \dots w_k$ è tale che, per i e $j = 1, 2, \dots$, il j-esimo elemento di w_i sia il più piccolo numero non ancora utilizzato che sia anche maggiore di m_i (e viceversa).

Si scorra infatti la permutazione da sinistra e si consideri una sottosequenza w_i non vuota. Il suo primo simbolo a non può essere minore di m_i, altrimenti sarebbe anch'esso un minimo locale. Sia b un elemento per assurdo ancora disponibile tale che $m_i < b < a$ e lo si collochi alla destra di a. In questo caso la normalizzazione della sottosequenza $m_i ab$ risulterebbe 132 e ciò sarebbe assurdo.

Ad esempio:

$$p = \mathbf{6}\ x_2\ \mathbf{3}\ x_4\ x_5\ \mathbf{2}\ \mathbf{1}\ x_8$$

[6, 3, 2 e 1 sono minimi locali da sinistra]

$$p \in S_n(132) \Leftrightarrow x_2 = 7, x_4 = 4, x_5 = 5, x_8 = 8$$

$$p = \mathbf{6}\ 7\ \mathbf{3}\ 4\ 5\ \mathbf{2}\ \mathbf{1}\ 8$$

Inoltre, il teorema di *Simion-Schmidt* afferma che:

$$|S_n(132)| = |S_n(123)| = C_n$$

[dove C_n è l'n-esimo numero di Catalan]

Per dimostrare la prima uguaglianza è sufficiente costruire la funzione $f: S_n(123) \to S_n(132)$ che associa ad una permutazione che evita 123 la permutazione che evita 132 con gli stessi minimi locali da sinistra nelle stesse posizioni. Questa funzione è evidentemente una biiezione, grazie ai due teoremi precedenti.

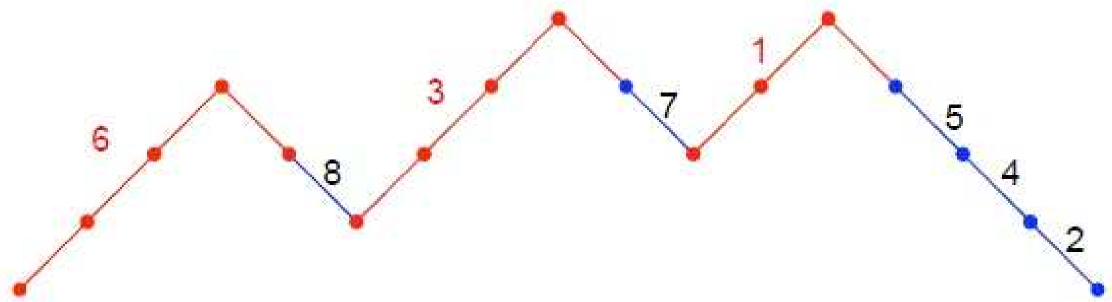
Per provare la seconda uguaglianza è necessario descrivere una biiezione tra $S_n(123)$ e l'insieme dei cammini di Dyck di semilunghezza n. Sia p una permutazione di $S_n(123)$ e siano $m_1, m_2, \ldots, m_k$ i suoi minimi locali da sinistra:

$$p = m_1 w_1 m_2 w_2 \ldots m_k w_k$$

Si costruisca il cammino di Dyck associato a p disegnando $(n+1) - m_1$ passi di salita e $|w_1| + 1$ passi di discesa, $m_1 - m_2$ passi di salita e $|w_2| + 1$ passi di discesa, e così via fino ad arrivare a m_k e w_k. È chiaro che il cammino ha semilunghezza n e che la corrispondenza descritta è una biiezione.

Componendo quest'ultima biiezione con quella precedente tra $S_n(132)$ e $S_n(123)$, se ne ottiene un'altra tra $S_n(132)$ e l'insieme dei cammini di Dyck di semilunghezza n.

Si consideri ad esempio la permutazione $p = \mathbf{6}8\mathbf{3}7\mathbf{1}542$. Essa appartiene a $S_n(123)$ e i suoi minimi locali da sinistra sono 6, 3 e 1. Il cammino di Dyck associato è:



Lo stesso cammino è ovviamente associato anche alla permutazione in $S_n(132)$ con gli stessi minimi locali da sinistra, ovvero: $p' = \mathbf{6}7\mathbf{3}4\mathbf{1}258$.

In definitiva, è possibile affermare che tutti i motivi di lunghezza 3 sono equidistribuiti su S_n. Più precisamente, per ogni motivo k di lunghezza 3 si ha:

$$|S_n(k)| = C_n$$

4.6 Motivi di lunghezza 4

I possibili motivi di lunghezza 4 sono 24, ma il loro numero si può ridurre a 3 utilizzando i risultati di equidistribuzione citati in precedenza e il teorema di *Backelin-West-Xin*. Quest'ultimo afferma che, dato un intero positivo k e una permutazione p dell'insieme $\{k+1, k+2, \dots, k+r\}$, per ogni intero positivo n si ha:

$$|S_n(123 \dots k\ p)| = |S_n(k(k-1) \dots 1\ p)|$$

Da qui è possibile dedurre, ad esempio, che $|S_n(1234)| = |S_n(2134)|$.

In definitiva, i motivi da studiare sono 1234, 1342 e 1324. A differenza di quelli di lunghezza 2 e 3, essi non sono equidistribuiti. Ecco di seguito i primi 8 valori di $|S_n(k)|$ per ognuno dei 3 motivi:

k\n	1	2	3	4	5	6	7	8
1234	1	2	6	23	103	513	2761	15767
1342	1	2	6	23	103	512	2740	15485
1324	1	2	6	23	103	513	2762	15793

Nei primi due casi è stata trovata una formula esplicita per l'intero $|S_n(k)|$, mentre nel terzo caso il problema è ancora aperto:

$$|S_n(1234)| =$$

$$\frac{1}{(n+1)^2 \cdot (n+2)} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \binom{n+1}{k+1} \binom{n+2}{k+1}$$

$$|S_n(1342)| =$$

$$(-1)^{n-1} \cdot \frac{7n^2 - 3n - 2}{2} + 3 \cdot \sum_{i=2}^{n} (-1)^{n-i} \cdot 2^{i+1} \cdot \frac{(2i-4)!}{i! \cdot (i-2)!} \cdot \binom{n-i+2}{2}$$

CAPITOLO V

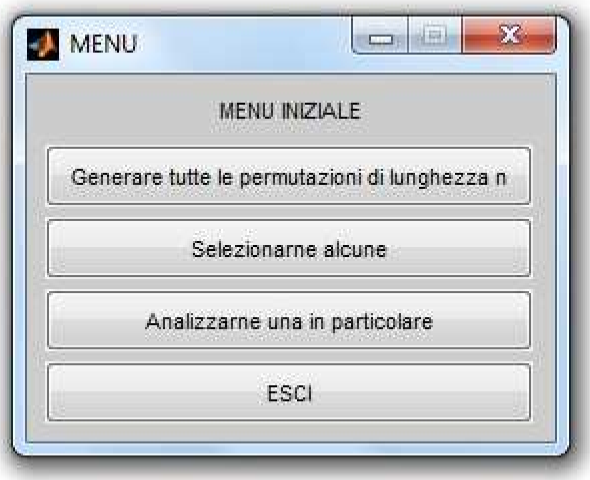
CREAZIONE DI UN'APPLICAZIONE PER LO STUDIO DELLE PERMUTAZIONI

5.1 Matlab

Matlab (abbreviazione di *Matrix Laboratory*) è un ambiente per il calcolo numerico e l'analisi statistica che comprende anche l'omonimo linguaggio di programmazione creato dalla *MathWorks*. Esso consente di manipolare matrici, visualizzare funzioni e dati, implementare algoritmi, creare interfacce utente e interfacciarsi con altri programmi.

Grazie a questa piattaforma, ho creato un'applicazione interattiva che consente uno studio approfondito sulle permutazioni. Più in particolare, essa presenta tre principali funzionalità:

- è in grado di generare tutte le permutazioni di lunghezza n e studiarne in un'ottica generale i vari comportamenti rispetto a inversioni, discese, punti fissi, motivi esclusi, ecc...;
- può selezionare alcuni sottoinsiemi notevoli di permutazioni di lunghezza n secondo uno o più vincoli stabiliti dall'utente;
- permette un'analisi approfondita di una particolare permutazione generata casualmente o inserita dall'utente mediante tastiera.

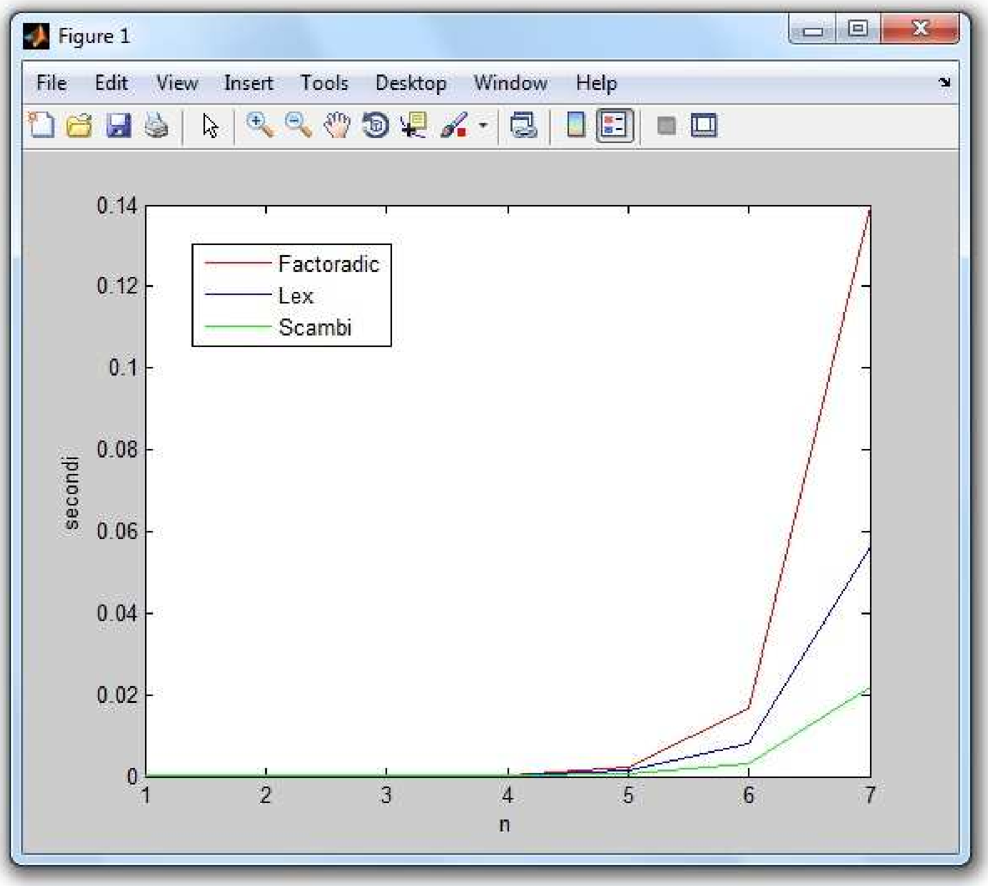


I prossimi tre paragrafi tratteranno rispettivamente ognuna delle tre possibili utilizzazioni dell'applicativo.

5.2 Generare tutte le permutazioni di lunghezza n

Dopo aver inserito da tastiera la lunghezza n delle permutazioni che si desidera generare, è richiesta una scelta fra tre algoritmi di generazione (vedi capitolo 2): *Factoradic*, *Lex* e *Scambi*.

```
(1) Factoradic =  Genera tutte le permutazioni col metodo dei factoradic

(2) Lex =  Genera tutte le permutazioni seguendo l'ordine lessicografico

(3) Scambi =  Genera tutte le permutazioni con l'algoritmo dei plain changes
```



Come mostrato nella figura qui sopra, è inoltre possibile visualizzare il grafico dei tempi di esecuzione dei tre algoritmi al variare della lunghezza n delle permutazioni. Dal grafico si trova conferma che l'algoritmo degli scambi è di gran lunga il più efficiente, mentre quello che fa uso dei *factoradic* risulta decisamente più lento, soprattutto all'aumentare di n.

Procedendo con la scelta dell'algoritmo, l'applicazione consente poi di analizzare le proprietà di tutte le permutazioni così generate, come esemplificato nella pagina successiva.

				Inv	Par	Dis	M.I.	Fis	Cen	Inv	Numero cicli	Connessione
1	2	3	4	0	1	0	0	4	1	3	4	1 2 3
1	2	4	3	1	0	1	3	2	0	1	3	1 2
1	4	2	3	2	1	1	2	1	0	0	2	1
4	1	2	3	3	0	1	1	0	0	2	1	0
4	1	3	2	4	1	2	4	1	0	0	2	0
1	4	3	2	3	0	2	5	2	0	1	3	1
1	3	4	2	2	1	1	3	1	0	0	2	1
1	3	2	4	1	0	1	2	2	1	3	3	1 3
3	1	2	4	2	1	1	1	1	0	0	2	3
3	1	4	2	3	0	2	4	0	1	0	1	0
3	4	1	2	4	1	1	2	0	1	3	2	0
4	3	1	2	5	0	2	3	0	0	2	1	0
4	3	2	1	6	1	3	6	0	1	3	2	0
3	4	2	1	5	0	2	5	0	0	2	1	0
3	2	4	1	4	1	2	4	1	0	0	2	0
3	2	1	4	3	0	2	3	2	0	1	3	3
2	3	1	4	2	1	1	2	1	0	0	2	3
2	3	4	1	3	0	1	3	0	0	2	1	0
2	4	3	1	4	1	2	5	1	0	0	2	0
4	2	3	1	5	0	2	4	2	1	3	3	0
4	2	1	3	4	1	2	3	1	0	0	2	0
2	4	1	3	3	0	1	2	0	1	0	1	0
2	1	4	3	2	1	2	4	0	1	3	2	2
2	1	3	4	1	0	1	1	2	0	1	3	2 3

La tabella mostra l'analisi di alcuni comportamenti delle permutazioni di lunghezza 4. Essi sono rispettivamente: il numero di inversioni, la parità, il numero di discese, il major index, il numero di punti fissi, la centrosimmetria, involuzioni e anti-involuzioni (1 per le prime, 2 per le seconde, 3 per entrambe e 0 per nessuna delle due possibilità), il numero di cicli in cui è scomponibile la permutazione e le minime parti connesse in caso di sconnessione.

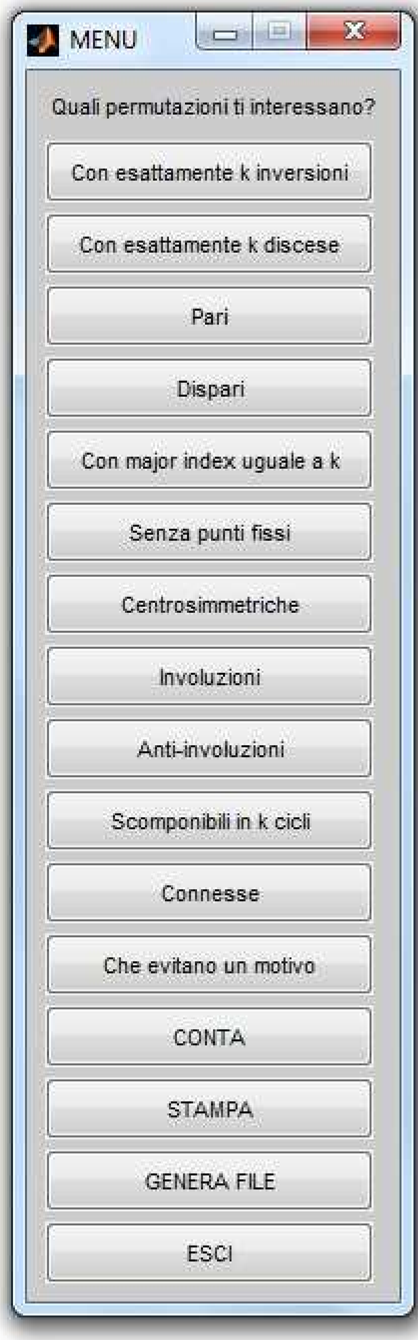
È possibile inoltre visualizzare quali permutazioni escludono un dato motivo k inserito da tastiera. L'eventuale presenza di k (in questo caso 123) è segnalata da un 1 accanto alla rispettiva permutazione, e viceversa da uno 0.

```
Inserisci la lunghezza del motivo:

==>3

Inserisci uno ad uno i valori confermandoli col tasto invio e digita 0 per cancellare:

1
2
3
```

```
Hai inserito:

     1      2      3

Mot
1              1    2    3    4
1              1    2    4    3
1              1    4    2    3
1              4    1    2    3
0              4    1    3    2
0              1    4    3    2
1              1    3    4    2
1              1    3    2    4
1              3    1    2    4
0              3    1    4    2
0              3    4    1    2
0              4    3    1    2
0              4    3    2    1
0              3    4    2    1
0              3    2    4    1
0              3    2    1    4
1              2    3    1    4
1              2    3    4    1
0              2    4    3    1
0              4    2    3    1
0              4    2    1    3
0              2    4    1    3
0              2    1    4    3
1              2    1    3    4
```

5.3 Selezionare alcune permutazioni di lunghezza n

Per quanto riguarda la selezione di alcuni sottoinsiemi notevoli di permutazioni, sono possibili tre punti di partenza: ovviamente l'insieme di tutte le permutazioni, quello delle involuzioni e quello delle permutazioni centro-simmetriche. Questi ultimi due evitano la generazione di tutte le $n!$ permutazioni e quindi il loro risultato è più celere, specialmente per lunghezze più grandi.



Il menù qui a lato elenca tutti i vincoli applicabili ai vari sottoinsiemi che l'utente può scegliere. Chiaramente è possibile utilizzarne più di uno per volta.

Il bottone *CONTA* stampa a video la cardinalità del sottoinsieme attuale, *STAMPA* visualizza le permutazioni che ne fanno parte e *GENERA FILE* le scrive tutte quante su un file.

Nelle pagine seguenti sono presenti alcuni esempi di scelta dei sottoinsiemi.

Esempio #1: permutazioni centrosimmetriche di lunghezza 8, pari, anti-involuzioni e scomponibili in 4 cicli disgiunti.

```
Centrosimmetriche

Pari

Anti-involuzioni

Le permutazioni che soddisfano le caratteristiche richieste sono 44.

Inserisci il valore di k:

==>4

Scomponibili in 4 cicli

Le permutazioni che soddisfano le caratteristiche richieste sono 25.

     8     7     6     5     4     3     2     1
     8     7     4     3     6     5     2     1
     8     7     5     6     3     4     2     1
     8     4     6     2     7     3     5     1
     8     5     6     7     2     3     4     1
     8     3     2     5     4     7     6     1
     8     6     7     5     4     2     3     1
     3     4     1     2     7     8     5     6
     3     5     1     7     2     8     4     6
     6     4     8     2     7     1     5     3
     6     5     8     7     2     1     4     3
     4     3     2     1     8     7     6     5
     4     6     7     1     8     2     3     5
     5     3     2     8     1     7     6     4
     5     6     7     8     1     2     3     4
     3     7     1     5     4     8     2     6
     6     7     8     5     4     1     2     3
     4     7     6     1     8     3     2     5
     5     7     6     8     1     3     2     4
     2     1     4     3     6     5     8     7
     2     1     5     6     3     4     8     7
     7     8     4     3     6     5     1     2
     7     8     5     6     3     4     1     2
     2     1     6     5     4     3     8     7
     7     8     6     5     4     3     1     2
```

Esempio #2: involuzioni di lunghezza 6 che evitano il motivo 123.

```
Involuzioni

Inserisci la lunghezza del motivo:

==>3

Inserisci uno ad uno i valori confermandoli col tasto invio e digita 0 per cancellare

1
2
3

Hai inserito:

     1     2     3


Che evitano il motivo     1     2     3

Le permutazioni che soddisfano le caratteristiche richieste sono 20.

     5     4     3     2     1     6
     4     3     2     1     6     5
     3     2     1     6     5     4
     5     3     2     6     1     4
     4     2     6     1     5     3
     2     1     6     5     4     3
     5     2     6     4     1     3
     5     4     6     2     1     3
     4     6     3     1     5     2
     3     6     1     5     4     2
     1     6     5     4     3     2
     4     6     5     1     3     2
     5     6     3     4     1     2
     5     6     4     3     1     2
     6     4     3     2     5     1
     6     3     2     5     4     1
     6     2     5     4     3     1
     6     4     5     2     3     1
     6     5     3     4     2     1
     6     5     4     3     2     1
```

Esempio #3: permutazioni di lunghezza 5 con 5 inversioni, dispari, scomponibili in 2 cicli disgiunti e con major index uguale a 3.

```
Inserisci il valore di n:

==>5

Inserisci il valore di k:

==>5

Con 5 inversioni

Le permutazioni che soddisfano le caratteristiche richieste sono 22.

Dispari

Inserisci il valore di k:

==>2

Scomponibili in 2 cicli

Le permutazioni che soddisfano le caratteristiche richieste sono 20.

Inserisci il valore di k:

==>3

Con Major Index = 3

Le permutazioni che soddisfano le caratteristiche richieste sono 3.

     4     3     1     2     5
     2     4     5     1     3
     5     2     1     3     4
```

5.4 Analizzare una permutazione di lunghezza n

```
Inserisci il valore di n:

==>10
```

Per analizzare una singola permutazione è necessario inserirla da tastiera o generarla in maniera casuale.

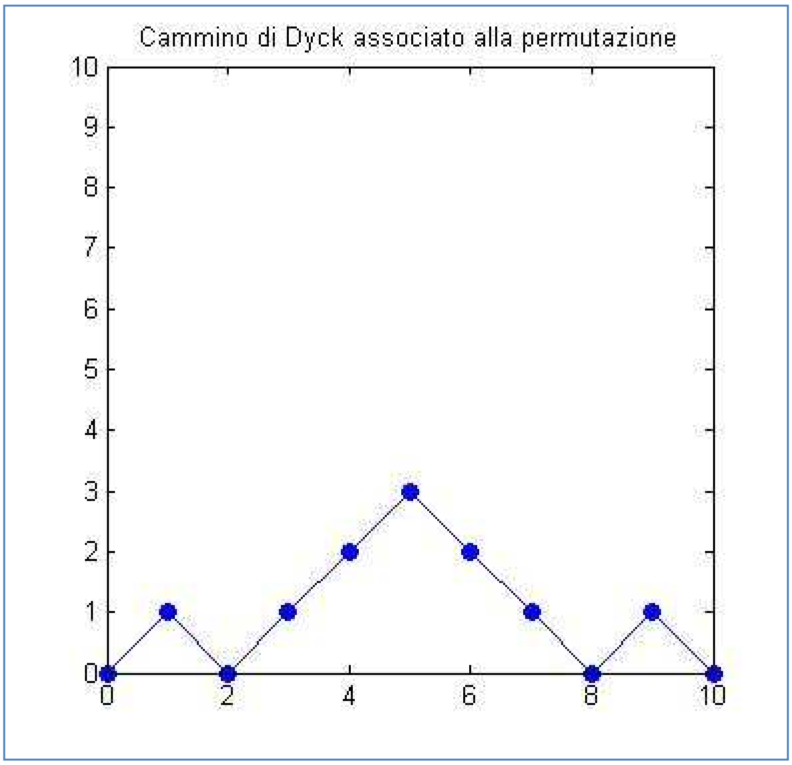
In seguito è riportato un esempio per ognuno dei due casi.

```
La permutazione generata è:

     6     3     7     8     5     1     2     4     9    10


Si tratta di una permutazione con 18 inversioni e 3 discese.
Essa è pari e il suo major index vale 10.
Il suo ribaltamento è:

    10     9     4     2     1     5     8     7     3     6

Il suo complemento è:

     5     8     4     3     6    10     9     7     2     1

La sua inversa è:

     6     7     2     8     5     1     3     4     9    10

I suoi minimi locali da sinistra sono 3:

6 3 1

I suoi massimi locali da sinistra sono 5:

6 7 8 9 10

La permutazione presenta 3 punti fissi.
Non si tratta di una permutazione centrosimmetrica.
La permutazione non è una involuzione.

Si può scomporre in 6 cicli disgiunti: ( 10 )( 9 )( 5 )( 4  8 )( 2  3  7 )( 1  6 )
Essi hanno ordine rispettivamente 1 1 1 2 3 2.

La permutazione è sconnessa.
Le sue parti connesse hanno rispettivamente 8 9 elementi.
```

```
La permutazione inserita è:

     5     2     4     3     1


Si tratta di una permutazione con 8 inversioni e 3 discese.
Essa è pari e il suo major index vale 8.
Il suo ribaltamento è:

     1     3     4     2     5
```

```
Il suo complemento è:

     1     4     2     3     5

La sua inversa è:

     5     2     4     3     1

I suoi minimi locali da sinistra sono 3:

5 2 1

I suoi massimi locali da sinistra sono 1:

5

La permutazione presenta 1 punti fissi.
Non si tratta di una permutazione centrosimmetrica.
La permutazione è una involuzione.

Si può scomporre in 3 cicli disgiunti: ( 3  4 )( 2 )( 1  5 )
Essi hanno ordine rispettivamente 2 1 2.

La permutazione è connessa.

Inserisci la lunghezza del motivo:

==>3

Inserisci uno ad uno i valori confermandoli col tasto invio e digita 0 per cancellare

1
2
3

Hai inserito:

     1     2     3

La permutazione evita il motivo     1     2     3
```

Dato che quest'ultima permutazione evita il motivo 123, l'applicazione visualizza anche il cammino di Dyck corrispondente:



BIBLIOGRAFIA

- M. Barnabei - F. Bonetti, *Matematica Discreta Elementare*, Pitagora Editrice Bologna (1995).
- M. Bóna, *Combinatorics of Permutations*, Chapman & Hall/CRC (2004).
- D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming: sorting and searching*, Vol. 3, Addison-Wesley (1998).
- C. Krattenthaler, *Permutations with restricted patterns and Dyck paths*, Adv. In Appl. Math., 27 (2001).
- V. La Spesa, http://www.thedarshan.com/informatica/algoritmi-sulle-permutazioni-articolo-in-pdf/ (2010).
- P. A. MacMahon, *Combinatory Analysis*, Cambridge University Press (1916).
- R. Simion - F. W. Schmidt, *Restricted permutations*, Europ. J. Combin, 6 (1985).
- http://it.wikipedia.org/wiki/Permutazione (2013).
- http://it.wikipedia.org/wiki/Dismutazione_(matematica) (2013).
- http://it.wikipedia.org/wiki/Gruppo_simmetrico (2013).