Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

IL PROBLEMA DI DIRICHLET PER EQUAZIONI ELLITTICHE IN FORMA DI DIVERGENZA

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
BRUNO FRANCHI

Presentata da:
GIUDITTA GORI

III Sessione
Anno Accademico 2011/2012

Introduzione

Lo scopo di questa tesi è provare l'esistenza e unicità della soluzione del problema di Dirichlet e le relative proprietà per equazioni lineari ellittiche in un dominio limitato di $\mathbb{R}^n$ della forma

$$Lu \equiv a^{ij}(x)D_{ij}u + b^i(x)D_iu + c(x)u = f(x), \qquad i,j = 1,2,\dots n, \tag{1}$$

dove la matrice dei coefficienti è appunto una matrice ellittica, dove cioè esiste $\lambda > 0$ tale che:

$$a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2 \quad \forall x \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Per notazione $Du = (D_1u, \dots D_nu)$ dove $D_iu = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $D_{ij}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, etc. con segni di sommatoria soppressi.

In particolare l'approccio utilizzato è tramite i metodi degli spazi di Hilbert basati su soluzioni *generalizzate* o *deboli*.

Per essere più specifici prenderemo in considerazione L operatore differenziale del secondo ordine in *forma di divergenza* su un dominio Ω limitato di $\mathbb{R}^n$ così definito:

$$Lu \equiv D_i\left[a^{ij}(x)D_ju + b^i(x)u\right] + c^i(x)D_iu + d(x)u.$$

Se i coefficienti sono sufficientemente regolari, allora questo operatore ricade nella formulazione classica (1).

Tuttavia se i coefficienti si trovano in una classe più ampia e u è solo debolmente differenziabile, allora possono essere definite le soluzioni deboli o generalizzate di $Lu = g$, in appropriate classi di funzioni.

In particolare, se i coefficienti a^{ij}, b^i, c^i sono limitati e misurabili in Ω e g è una funzione integrabile in Ω, diciamo che u è una soluzione debole o generalizzata di $Lu = g$ in Ω se $u \in W^{1,2}(\Omega)$ e

$$\int_\Omega \left[\left(a^{ij} D_j u + b^i u\right) D_i v - \left(c^i D_i u + du\right) v\right] \, dx = - \int_\Omega gv \, dx$$

$\forall v \in C_0^1(\Omega)$. Le funzioni v sono chiamate *funzioni test*.

Se i coefficienti e g sono abbastanza regolari e $u \in C^2(\Omega)$ allora u è anche una soluzione classica.

Quindi, $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$, possiamo parlare di soluzioni deboli u del *problema generalizzato di Dirichlet*:

$$\begin{cases} Lu = g, & \text{in } \Omega \\ u = \varphi, & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

se u è una soluzione debole che soddisfa $u - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Il nostro scopo è quello di dimostrare che esiste un'unica soluzione debole $u \in W^{1,2}(\Omega)$, quando i coefficienti di L sono limitati, $g \in L^2(\Omega)$ e $D_i b^i + d \leq 0$. Questa ultima ipotesi assicura il principio del massimo debole per soluzioni deboli di $Lu \geq 0$ e di conseguenza l'unicità della soluzione del problema di Dirichlet. L'esistenza della soluzione si ottiene tramite il teorema dell'alternativa di Fredholm.

Indice

Capitolo 1

Premesse

In questa prima parte si vogliono dare i concetti fondamentali su cui si basa la teoria relativa al problema di Dirichlet.

1.1 Spazi di Banach e di Hilbert

Definizione 1.1 (Spazio normato)**.**
Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$).

Se esiste una funzione:

$$\|\cdot\| : X \longrightarrow [0, +\infty]$$

tale che:

(i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \qquad \forall x \in X,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$

(iii) vale la disuguaglianza triangolare: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

allora X è detto uno spazio normato e $\|\cdot\|$ è detta norma.

Uno spazio normato è ha una struttura naturale di spazio metrico rispetto alla distanza d così definita:

$$d(x, y) := \|x - y\| \geq 0$$

Definizione 1.2. Spazio di Banach

Uno spazio normato X è detto spazio di Banach se (X, d) è completo.

Definizione 1.3 (Prodotto interno o scalare)**.**
Sia X uno spazio vettoriale, si definisce prodotto interno o scalare una funzione:

$$< , >: X \times X \longrightarrow \mathbb{R} \quad (\mathbb{C})$$

tale che:

(i) $x \to < x, y >$ è lineare $\forall y \in X$

(ii) $< x, y >= \overline{< y, x >}$

(iii) $< x, x > \geq 0 \quad \forall x \in X \qquad$ e $\quad < x, x >= 0 \Leftrightarrow x = 0$

Osservazione 1. Se X è uno spazio con prodotto interno allora:

$$\sqrt{< x, x >} = \|x\|$$

è una norma di X.

Osservazione 2. Vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$$| < x, x > | \leq \|x\|\|y\|. \tag{1.1}$$

Definizione 1.4.

$$L(X, Y) = \{T | T : X \longrightarrow Y \text{ lineari e continue con } X, Y \text{ spazi normati}\}$$

Una funzione lineare su spazi normati X, Y è continua $\Leftrightarrow$ è limitata.

Definizione 1.5.

$$\|T\| = \inf\{M > 0, t.c. \quad \|Tx\| \leq M\|x\| \quad \forall x \in X\}$$

Si dimostra che:

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|$$

Se Y è completo $\implies$ $L(X, Y)$ è completo.
In particolare se $Y = \mathbb{R}$ $\implies$ $X^* := L(X, \mathbb{R})$ è completo.
X^* è detto spazio *duale*.

Definizione 1.6. (Spazio di Hilbert)

Uno spazio di Banach dotato di prodotto interno si dice spazio di Hilbert.

Per gli spazi di Hilbert vale il seguente teorema.

Teorema 1.1.

Se X è uno spazio di Hilbert, M è un sottospazio chiuso di X e sia $M^{\perp} = \{y \in X \mid < y, x >= 0 \quad \forall x \in M\}$,

allora

(i) $M^{\perp}$ *è un sottospazio chiuso*

(ii) $X = M \oplus M^{\perp}$

(iii) $P : X \longrightarrow M \qquad Q : X \longrightarrow M^{\perp}$, *sono lineari continue con* $\|P\| = \|Q\| = 1$

(iv) $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$.

Teorema 1.2 (Teorema di rappresentazione di Riesz)**.**

Sia X Hilbert, $f \in X^*$,

Allora $\exists ! x_f \in X$ *tale che* $f(x) =< x, x_f > \quad \forall x \in X$ *e* $\|x_f\| = \|f\|$.

Questo teorema mostra che lo spazio duale di uno spazio di Hilbert può essere identificato con lo spazio stesso.

Teorema 1.3 (Lax-Milgram)**.**

Sia X Hilbert, $B : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che:

(i) B *è una forma bilineare*

(ii) B *è limitata:* $\exists C > 0$ *t.c.* $|B(x, y)| \leq C\|x\|\|y\| \quad \forall x, y \in X$

(iii) B *è coerciva:* $\exists \lambda > 0$ *t.c.* $B(x, x) \geq \lambda \|x\|^2 \quad \forall x \in X$

Allora $\forall f \in X^*, \quad \exists !\ x_f \in X$ *tale che:*

$$f(x) = B(x, x_f) \qquad \forall x \in X.$$

Dimostrazione. Per il teorema di rappresentazione di Riesz esiste una funzione lineare $T : X \longrightarrow X$ tale che:

$$B(x, v) =< x, Tv > \quad \forall x \in X.$$

con Tv unico.

Inoltre, poichè B è limitata, vale:

$$\begin{aligned} B(x, v) &=< x, Tv >\leq \|x\|\|Tv\|, \\ |B(x, v)| &\leq C\|x\|\|v\|, \\ &\Longrightarrow \|Tv\| \leq C\|v\| \end{aligned}$$

quindi anche T è limitata e quindi continua.

Poichè B è coerciva vale: $\lambda\|v\|^2 \leq B(v, v) =< v, Tv >\leq \|v\|\|Tv\|$ e quindi:

$$\lambda\|v\| \leq \|Tv\| \leq C\|v\| \qquad \forall v \in X \tag{1.2}$$

Da questa disuguaglianza si vede che T è iniettiva e $T(X)$ è chiuso.

L'iniettività è provata perchè se si sceglie $v \in \ker T$, $\quad x \neq 0$, allora vale:

$$0 < \lambda\|v\| \leq 0 \leq C\|v\|,$$

e allora $\ker T = \{0\}$ e quindi T è una funzione lineare iniettiva.

Vediamo adesso che $T(X)$ è chiuso.

Prendiamo una successione $(y_n)_{n\mathbb{N}} \in T(X)$ e tale che $y_n = T(x_n)$ convergente a y_0. Si vuole mostrare che $y_0 \in T(X)$.

Si ha

$$\begin{aligned} &\lambda\|x_n - x_m\| \leq \|T(x_n - x_m)\|, \\ &\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{\lambda}\|y_n - y_m\| \\ &\qquad\downarrow \qquad \Longleftarrow \qquad \downarrow \qquad\qquad n, m \longrightarrow +\infty. \\ &\qquad 0 \qquad\qquad\quad\;\; 0 \end{aligned}$$

per il teorema del confronto.

Quindi x_n è una successione di Cauchy e pertanto tenderà a qualche $x_0 \in X$. Per la continuità di T risulta $T(x_0) = y_0$ e dunque $y_0 \in T(X)$.

Poichè $T(X) \subseteq X$ e $T(X)$ è chiuso, allora vale la relazione

$$X = T(X) \oplus T(X)^{\perp}$$

Sia ora $z \in X$ ortogonale a T(X), cioè tale che:

$$< z, Tv >= 0 \qquad \forall v \in X,$$

Scegliendo $v = z$ si ottiene

$$< z, Tz >= B(z, z) = 0,$$

e quindi per la coercività $z = 0$ cioè $X = T(X)$ ovvero T è suriettiva.

Allora esiste l'inversa di T, T^{-1}, che è lineare su X e limitata perchè dalla (1.2) si ottiene

$$\|T^{-1}(v)\| \leq \frac{1}{\lambda}\|v\| \qquad \forall v \in X.$$

Per il teorema di rappresentazione di Riesz $\exists!\ g \in X$:

$$f(x) =< x, g >= B(x, T^{-1}g) \qquad \forall x \in X.$$

Ponendo $T^{-1}g = x_f$

$$f(x) = B(x, x_f)$$

la dimostrazione è provata. $\square$

Definizione 1.7. Siano X_1 e X_2 due spazi lineari normati.
Una funzione $T : X_1 \longrightarrow X_2$ è detta compatta (o completamente continua) se T manda insiemi limitati di X_1 in relativi insiemi compatti di X_2 o equivalentemente se T manda successioni limitate di X_1 in successioni di X_2 che contengono sottosuccesioni convergenti.

Teorema 1.4 (Alternativa di Fredholm).

Sia T una mappa lineare compatta

$$T : X \longrightarrow X,$$

dove X è uno spazio normato.

Allora o l'equazione omogenea

$$x - Tx = 0$$

ha soluzioni non banali $x \in X$;

oppure $\forall y \in X$, l'equazione

$$x - Tx = y$$

ha un'unica soluzione $x \in X$.

Per una dimostrazione si veda D. Gilbarg, N. S.Trudinger [3].

Definizione 1.8 (Aggiunta)**.**
Sia T una mappa lineare continua tra due spazi di Banach X_1 e X_2. Si indica con T^* l'aggiunta di T, che è una mappa lineare continua da X_2^* a X_1^* definita da:

$$T^* : X_2^* \longrightarrow X_1^*$$
$$(T^*g)(x) = g(Tx) \qquad \text{per } g \in X_2^*, \quad x \in X_1.$$

Teorema 1.5.

Sia X uno spazio di Hilbert e T una mappa compatta che manda X in se stesso.

Allora esiste un insieme numerabile $\Lambda \in \mathbb{R}$ che non ha punti di accumulazione, eccetto eventualmente $\lambda = 0$, tale che se $\lambda \neq 0$, $\lambda \notin \Lambda$, le equazioni:

$$\lambda x - Tx = y, \tag{1.3}$$
$$\lambda x - T^*x = y \tag{1.4}$$

hanno soluzione $x \in X$ univocamente determinate $\forall y \in X$ e le mappe inverse $(\lambda I - T)^{-1}$, $(\lambda I - T^*)^{-1}$ sono limitate.

Se $\lambda \in \Lambda$, allora i nuclei delle mappe $\lambda I - T$, $\lambda I - T^*$ hanno dimensione positiva finita e le equazioni (1.3) e (1.4) hanno soluzione se e solo se y è ortogonale al nucleo di $\lambda I - T^*$ nel primo caso e $\lambda I - T$ nell'altro.

1.2 Spazi $L^p(\Omega)$

Sia Ω un dominio limitato di $\mathbb{R}^n$, per $p \geq 1$ chiamiamo con $L^p(\Omega)$ lo spazio di Banach contenenti le funzioni misurabili su Ω che sono p-integrabili.

La norma di $L^p(\Omega)$ è definita così:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Per comodità useremo l'espressione $\|u\|_p$ per indicare $\|u\|_{L^p(\Omega)}$.

Useremo l'espressione $\|u\|_{p;\Gamma}$ per indicare la norma $L^p(\Gamma)$, per $\Gamma \subseteq \Omega$.

Per il teorema di Riesz-Fisher, si dimostra che $L^p(\Omega)$ è Banach, per una dimostrazione si veda W. Rudin [1].

Osservazione 3. Se $p = 2$ lo spazio $L^2(\Omega)$ è dotato di prodotto interno così definito:

$$< u, v >:= \int_\Omega uv \; dx \tag{1.5}$$

Così $L^2(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert.

Proposizione 1.6 (Disuguaglianza di Hölder)**.**

Sia Ω un dominio limitato; siano date le funzioni $u \in L^p(\Omega), v \in L^q(\Omega)$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Allora vale la seguente diseguaglianza:

$$\int_\Omega uv \; dx \leq \|u\|_p \|v\|_q \tag{1.6}$$

Osservazione 4. Se $p = q = 2$ allora la disuguaglianza di Hölder si riduce alla disuguaglianza di Schwarz.

1.3 Spazi di Sobolev

Definizione 1.9. Una funzione f è localmente p-integrabile e si scrive $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ se $f \in L^p(K), \quad \forall K \subset \Omega$ compatto.

Definizione 1.10. Sia u una funzione localmente integrabile in Ω dominio di $\mathbb{R}^n$ e α un multi-indice. Allora una funzione localmente integrabile v è chiamata α-esima derivata debole di u se soddisfa:

$$\int_\Omega \varphi v \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi \, dx \qquad \forall \varphi \in C_0^{|\alpha|}(\Omega). \tag{1.7}$$

Scriviamo $v = D^\alpha u$ e osserviamo che è univocamente determinata a meno di un insieme di misura nulla.

Diciamo che una funzione è *debolmente differenziabile* se esistono tutte le sue derivate deboli del primo ordine, invece è k volte debolmente differenziabile se esistono tutte le derivate deboli di ordine j con $0 < j \leq k$.

Denotiamo lo spazio delle funzioni k volte differenziabile con $W^k(\Omega)$.

Osservazione 5. $C^k(\Omega) \subset W^k(\Omega)$.

Definizione 1.11. Sia $1 \leq p < \infty$, allora definiamo spazio di Sobolev l'insieme:

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in W^k(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega) \quad \forall |\alpha| \leq k\}.$$

Una norma possibile è definita come segue:

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.8}$$

Un'altra norma potrebbe essere:

$$\|u\|'_{W^{k,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_p. \tag{1.9}$$

Si dimostra che $W^{k,p}$ è uno spazio di Banach con norma (1.8).

La chiusura di C_0^k in $W^{k,p}(\Omega)$ genera un altro spazio di Banach, $W_0^{k,p}(\Omega)$.

Gli spazi $W^{k,p}(\Omega)$ e $W_0^{k,p}(\Omega)$ non coincidono per Ω limitati.

Se si considera il caso $p = 2$, $W^{k,2}(\Omega)$ e $W_0^{k,2}(\Omega)$ sono spazi di Hilbert con prodotto scalare:

$$(u, v)_k = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha u D^\alpha v dx. \tag{1.10}$$

Teorema 1.7 (Disuguaglianza di Sobolev).

1. *Per* $p < n$ *si ha:* $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *con* $1 \leq q \leq \frac{pn}{n-p}$ *e per ogni* $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, *esiste una costante* $C = C(n,p)$, *tale che:*

$$\|v\|_{\frac{np}{n-p}} \leq C\|Dv\|_p.$$

2. *Per* $p = n$ *si ha:* $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *con* $1 \leq q < \infty$

3. *Per* $p > n$ *si ha:* $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ *e per ogni* $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *,esiste una costante* $C = C(n,p)$, *tale che:*

$$\sup_{\Omega} |v| \leq C|\Omega|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}\|Dv\|_p$$

Inoltre ricordiamo il seguente teorema inerente a risultati di compattezza.

Teorema 1.8.
Le immersioni

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

per $kp < n, q < \frac{np}{n-kp}$ *e*

$$W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega})$$

per $0 \leq m < k - \frac{n}{p}$ *sono compatte.*

Per le dimostrazioni si veda D. Gilbarg, N. S.Trudinger [3].

Capitolo 2

Il problema di Dirichlet

Prima di procedere vogliamo ricordare il teorema della divergenza in $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.1 (Teorema della divergenza)**.**

Sia Ω_0 *un dominio limitato con bordo* $\partial\Omega_0$ *di classe* C^1*; sia* ν *la normale esterna a* $\partial\Omega_0$*.*

Allora per ogni campo vettoriale $\mathbf{w} \in C^0(\overline{\Omega}_0) \cap C^1(\Omega_0)$ *vale:*

$$\int_{\Omega_0} div\ \mathbf{w}\ dx = \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{w} \cdot \nu\ d\sigma \tag{2.1}$$

dove $d\sigma$ *indica l'elemento area di dimensione* $(n-1)$ *in* $\partial\Omega_0$*.*

2.1 Soluzioni generalizzate o deboli

Definizione 2.1. Un'equazione lineare del secondo ordine in forma di divergenza è una equazione differenziale della forma:

$$Lu = D_i\left[a^{ij}(x)D_ju + b^i(x)u\right] + c^i(x)D_iu + d(x)u. \tag{2.2}$$

i cui coefficienti $a^{ij}, b^i, c^i, d \quad$ con $i, j = 1 \dots n$ sono funzioni misurabili su un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Si osserva che data l'equazione lineare generale:

$$Lu = a^{ij}(x)D_{ij}u + b^i(x)D_iu + c(x)u \tag{2.3}$$

se i suoi coefficienti a^{ij} sono differenziabili allora può essere scritta nella forma (2.2).

Tuttavia la forma di divergenza ha il vantaggio che l'operatore L può essere definito per classi di funzioni molto più ampie che solamente $C^2(\Omega)$.

Infatti possiamo assumere che la funzione u sia solamente debolmente differenziabile e che le funzioni $a^{ij}D_ju + b^iu$, $c^iD_iu + du$, per $i = 1 \dots n$ siano localmente integrabili, allora, in senso *debole* o *generalizzato*, u si dice che soddisfa $Lu = 0$ $(\leq 0, \geq 0)$ in Ω se:

$$\mathcal{L}(u,v) = \int_\Omega \left[\left(a^{ij}D_ju + b^iu\right) D^iv - \left(c^iD_iu + du\right) v\right]\ dx = 0 \tag{2.4}$$

$(\geq 0, \leq 0) \quad \forall v \geq 0, \quad v \in C_0^1(\Omega)$.

Ammesso che i coefficienti di L siano localmente integrabili, segue dal teorema della divergenza (2.1) che una funzione $u \in C^2(\Omega)$ soddisfa $Lu = 0$ $(\leq 0, \geq 0)$ nel senso classico, allora la soddisfa nel senso generalizzato.

Infatti basta moltiplicare la (2.2) per una funzione test v e integrare per parti.

Di più se a^{ij}, b^i hanno derivate localmente integrabili, allora una soluzione debole o generalizzata $u \in C^2(\Omega)$ è anche una soluzione classica.

Siano $f^i, g, \quad i = 1, \dots n$ funzioni localmente integrabili in Ω. Allora una funzione u debolmente differenziabile sarà una soluzione debole o generalizzata dell'equazione non omogenea

$$Lu = g + D_if^i \tag{2.5}$$

in Ω se

$$\mathcal{L}(u,v) = F(v) = \int_\Omega \left(f^iD_iv - gv\right) dx \quad \forall v \in C_0^1(\Omega) \tag{2.6}$$

Come prima osserviamo che le soluzioni classiche di (2.5) sono anche soluzioni deboli o generalizzate e che una soluzione debole o generalizzata in $C^2(\Omega)$ è anche una soluzione classica quando i coefficienti di L sono sufficientemente regolari.

Definizione 2.2. L'operatore L è detto ellittico in Ω se $\exists\lambda > 0$ tale che:

$$a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2 \quad \forall x \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2.7}$$

Supponiamo che l'operatore L sia ellittico e supponiamo che i coefficienti di L siano limitati, cioè esistano delle costanti $\Lambda, \nu \geq 0$ tali che $\forall x \in \Omega$

$$\sum |a^{ij}|^2 \leq \Lambda^2, \tag{2.8}$$

$$\frac{1}{\lambda^2}\sum(|b^i(x)|^2 + |c^i(x)^2|) + \frac{1}{\lambda}|d(x)| \leq \nu^2. \tag{2.9}$$

Il problema di Dirichlet consiste nel trovare una soluzione u della equazione (2.5) in un dominio limitato Ω tale che sul bordo $\partial\Omega$ assuma determinati valori fissati. Più precisamente:

Sia Ω un dominio limitato di $\mathbb{R}^n$, $g, f^i \in L^2(\Omega)$ e $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$. Diciamo che una funzione $u \in W^{1,2}(\Omega)$ è soluzione del problema generalizzato di Dirichlet:

$$\begin{cases} Lu = g + D_i f^i, & \text{in } \Omega \\ u = \varphi, & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.10}$$

se u è soluzione di

$$\mathcal{L}(u,v) = \int_\Omega \big(f^i D_i v - gv\big)\, dx \quad \forall v \in C_0^1(\Omega) \tag{2.11}$$

e inoltre

$$u - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{2.12}$$

Osserviamo che che la (2.11) è la forma debole della (2.5); mentre la (2.12), è la formulazione debole per la condizione sul bordo $\partial\Omega$.

Quindi si può ricondurre il problema di Dirichlet classico al problema di Dirichlet in forma generalizzata o debole, ricercando la soluzione u in uno spazio più ampio ($W^{1,2}(\Omega)$) rispetto a $C^2(\Omega)$.

Osservazione 6. Si osservi che grazie alle condizioni (2.8) e (2.9), si può dare una stima di (2.11), infatti per la disuguaglianza di Schwarz si ha:

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(u,v) &\leq \int_\Omega \big(|a^{ij}D_j u D^i v| + |b^i u D^i v| + |c^i v D_i u| + |duv|\big)\ dx \\ &\leq C\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}\|v\|_{W^{1,2}(\Omega)} \end{aligned} \tag{2.13}$$

Quindi per una $u \in W^{1,2}(\Omega)$ la mappa:

$$v \longmapsto \mathcal{L}(u, v)$$

è una funzione lineare limitata su $W_0^{1,2}(\Omega)$ e di conseguenza la validità della (2.11) si estende per ogni $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

2.2 Il principio del massimo debole

Per formulare questo teorema è necessaria la nozione di disuguaglianza al bordo, per funzioni in $W^{1,2}(\Omega)$.

Diciamo che $u \in W^{1,2}(\Omega)$ soddisfa $u \leq 0$ su $\partial\Omega$ se la sua parte positiva, $u^+ = max\{u, 0\} \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Se u è continua in un intorno di $\partial\Omega$, allora u soddisfa $u \leq 0$ su $\partial\Omega$ se e solo se la disuguaglianza si mantiene nel senso puntuale classico.

$$\sup_{\partial\Omega} u = \inf\{k | u \leq k \text{ su } \partial\Omega, k \in \mathbb{R}\}.$$

Vogliamo ora ricordare il principio classico del massimo debole per l'operatore L non in forma di divergenza

Teorema 2.2 (Principio classico del massimo debole)**.**

Sia L un operatore non in forma di divergenza

$$Lu = a^{ij}(x)D_{ij}u + b^i(x)D_iu + c(x)u.$$

Supponiamo che L sia ellittico nel dominio limitato Ω

$$0 < \lambda|\xi|^2 \leq a^{ij}(x)\xi_i\xi_j, \qquad \forall\xi = (\xi_1 \dots \xi_n) \in \mathbb{R}^n - \{0\}.$$

e tale che

$$\frac{|b^i(x)|}{\lambda} \leq costante < \infty.$$

Supponiamo che

$$Lu \geq 0 \quad (\leq 0) \quad in\ \Omega \qquad c = 0 \quad in\ \Omega,$$

con $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.

Allora il massimo (minimo) di u *in* $\overline{\Omega}$ *è raggiunto su* $\partial\Omega$*, ovvero*

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \quad (\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u)$$

Dimostrazione. Si vede subito che se $Lu > 0$ in Ω, allora vale che u non può raggiungere un massimo interno in $\overline{\Omega}$. Se così non fosse, allora esisterebbe un punto x_0 tale che $Du(x_0) = 0$ e la matrice $D^2u(x_0) = [D_{ij}u(x_0)] \leq 0$. Tuttavia $[a^{ij}(x_0)] > 0$ perchè L è ellittica.

Di conseguenza

$$Lu(x_0) = a^{ij}(x_0)D_{ij}u(x_0) \leq 0$$

contraddicendo $Lu > 0$.

Poichè $\frac{|b^i(x)|}{\lambda} \leq b_0 =$ *costante* e poichè $a^{11} > \lambda$, allora esisterà una costante sufficientemente grande γ per cui

$$Le^{\gamma x_1} = (\gamma^2 a^{11} + \gamma b^1)e^{\gamma x_1} \geq \lambda(\gamma^2 - \gamma b_0)e^{\gamma x_1} > 0.$$

Quindi $\forall \varepsilon > 0$, $L(u + \varepsilon e^{\gamma x_1}) > 0$ in Ω, e allora

$$\sup_{\Omega}(u + \varepsilon e^{\gamma x_1}) = \sup_{\partial\Omega}(u + \varepsilon e^{\gamma x_1})$$

Facendo tendere $\varepsilon \to 0$ si ha che

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u$$

e il teorema è provato. □

Corollario 2.3.

Sia L *un operatore ellittico nel dominio limitato* Ω.

Supponiamo che in Ω

$$Lu \geq 0 \quad (Lu \leq 0), \qquad c \leq 0,$$

con $u \in C^0(\overline{\Omega})$.

Allora

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ \quad (\inf_{\Omega} u \geq \inf_{\partial\Omega} u^-).$$

Se $Lu = 0$ in Ω, allora

$$\sup_{\Omega} |u| = \sup_{\partial\Omega} |u|.$$

In questo corollario si pone la condizione che il coefficiente di u sia non positivo ($c \leq 0$).

La quantità corrispondente nella equazione lineare nella forma di divergenza, (2.2), è $D_i b^i + d$, ma dal momento che i coefficienti b^i sono solamente limitati, allora la condizione $c \leq 0$ deve essere interpretata in senso generalizzato, ovvero:

$$\int_{\Omega} (dv - b^i D_i v) dx \leq 0 \quad \forall v \geq 0, v \in C_0^1(\Omega). \tag{2.14}$$

Notiamo che la disuguaglianza continua a valere $\forall v \geq 0, \quad v \in W_0^{1,1}(\Omega)$.

Ora possiamo enunciare il principio del massimo debole per operatori L in forma di divergenza.

Teorema 2.4 (Principio del massimo debole).

Sia $u \in W^{1,2}(\Omega)$ che soddisfi $Lu \geq 0$ in Ω, con L operatore in forma di divergenza e $D_i b^i + d \leq 0$.

Allora

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+$$

Dimostrazione. Sia $u \in W^{1,2}(\Omega), v \in W_0^{1,2}(\Omega)$; allora si ha che $uv \in W_0^{1,1}(\Omega)$ e $Duv = vDu + uDv$.

Potremmo quindi scrivere la disuguaglianza $\mathcal{L}(u, v) \leq 0$ nella forma:

$$\int_{\Omega} \left[a^{ij} D_j u D_i v - (b^i + c^i) v D_i u\right] dx \leq \int_{\Omega} \left[duv - b^i D_i(uv)\right] dx \leq 0;$$

$\forall v \geq 0$ tali che $uv \geq 0$

Quindi poichè i coefficienti sono limitati si ha:

$$\int_{\Omega} a^{ij} D_j u D_i v \ dx \leq \lambda\nu \int_{\Omega} v|Du| \ dx \tag{2.15}$$

$\forall v \geq 0$ tale che $uv \geq 0$.

Nel caso particolare in cui $b^i + c^i = 0$ la dimostrazione è immediata prendendo

$$v = max\{u - l, 0\} \quad \text{dove} \quad l = \sup_{\partial\Omega} u^+.$$

Infatti si ha:

$$\int_{\Omega} \left(a^{ij} D_j u D_i v\right) dx = \int_{\Omega} a^{ij} D_j u D_i u \chi^2_{\{u \geq l\}} dx =$$
$$= \int_{\Omega} a^{ij} (D_j v)(D_i v) dx \leq 0$$

e poichè l'operatore L è ellittico, vale:

$$0 \leq \lambda \int_{\Omega} |Dv|^2 dx \leq \int_{\Omega} a^{ij} (D_j v)(D_i v) dx \leq 0$$

e quindi $\int_{\Omega} |Dv|^2 = 0$. Presa ora una palla aperta $B \subset \Omega$, per la disuguaglianza di Poincarè si ha:

$$\int_{B} |v - v_B|^2 dx \leq C \int_{B} |Dv|^2 dx = 0 \tag{2.16}$$

con v_B media integrale di u e C costante positiva.

Dunque v su B è costante.

Poichè $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è connesso allora lo è anche per archi, dunque per ogni coppia di punti x e y di Ω esiste una curva contenuta in Ω che li collega. La curva è compatta e Ω è un chiuso, dunque la distanza tra la curva e $\partial\Omega$ è positiva, quindi la curva può essere ricoperta da un numero finito di palle contenute in Ω. Osserviamo che v è costante su ciascuna palla, l'intersezione di due palle non è vuota, quindi v è costante su tutto Ω e il teorema è provato per $b^i + c^i = 0$.

Per il caso generale scegliamo k tale che $l \leq k < \sup_{\Omega} u$, e poniamo $v = (u - k)^+$ (Se non esiste un tale k il teorema sarebbe già provato).

Per la regola della catena (si veda D. Gilbarg, N. S.Trudinger [3]), si ha $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ e

$$Dv = \begin{cases} Du & \text{for } u > k \text{ cioè per } v \neq 0, \\ 0 & \text{for } u \leq k \text{ cioè per } v = 0. \end{cases}$$

Si ha che

$$\int_\Omega v|Du| = \int_\Omega v\chi_{\{u>k\}}|Du| = \int_\Gamma v|Dv|$$

con $\Gamma = \mathrm{supp}(Dv) \subset \mathrm{supp}(v)$.

Di conseguenza si ottiene dalla (2.15):

$$\int_\Omega a^{ij} D_j v D_i v \; dx \leq \lambda\nu \int_\Gamma v|Dv| \; dx$$

e quindi per l'ellitticità di L e per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$$\|Dv\|_2^2 = \int_\Omega |Dv|^2 dx \leq \nu \int_\Gamma v|Dv|dx \leq \nu\|v\|_{2;\Gamma}\|Dv\|_2,$$

e quindi

$$\|Dv\|_2 \leq \nu\|v\|_{2;\Gamma} \qquad \text{(a)}$$

Applichiamo ora la disuguaglianza di Sobolev (Teorema 1.7) per $n \geq 3$ ($p =$ 2, ovviamente):

$$\|v\|_{\frac{2n}{n-2}} \leq C\|Dv\|_2 \qquad \text{(b).}$$

Inoltre si ha che:

$$\|v\|_{2;\Gamma}^2 = \int_\Gamma |v|^2 dx = \int_\Omega \chi_\Gamma |v|^2 \leq |\Gamma|^{\frac{2}{n}} \|v\|_{\frac{2n}{n-2}}^2$$
$$\|v\|_{2;\Gamma} \leq |\Gamma|^{\frac{1}{n}} \|v\|_{\frac{2n}{n-2}} \qquad \text{(c)}$$

per la disuguaglianza di Hölder con $\frac{1}{p} = \frac{n-2}{n}, \frac{1}{q} = \frac{2}{n}$.

Quindi mettendo insieme le disuguaglianze (b), (a), (c), si ottiene:

$$\|v\|_{\frac{2n}{n-2}} \leq \mathbf{C}|\Gamma|^{\frac{1}{n}} \|v\|_{\frac{2n}{n-2}}$$

con $\mathbf{C} = C\nu$, allora

$$|\Gamma| \geq \mathbf{C}^{-n} > 0. \tag{2.17}$$

Nel caso $n = 2$ una disuguaglianza della stessa forma con $\mathbf{C} = \mathbf{C}(n, \nu, |\Omega|)$ segue dalla disuguaglianza di Sobolev sostituendo $\frac{2n}{n-2}$ con un numero più grande di 2.

Dal momento che le disuguaglianze (2.17) sono indipendenti da k, devono continuare a valere per k che tende a $\sup_\Omega u$:

$$k < k' < \sup_\Omega u$$

$$\{u(x) > k'\} \subseteq \{u(x) > k\}$$

$$0 < \mathbf{C} < \lim_{k \to \sup_\Omega u} |\{u(x) > k\}| = |\{u(x) \geq k\}| = |\{u(x) = \sup_\Omega u\}|$$

Quindi u raggiunge $\sup_\Omega u$ su un insieme di misura positiva.

Ponendo ora $k = l$ si ha che $v = (u - l)^+$.

Sia

$$V = \sup_\Omega v = \sup_\Omega u - l.$$

Si osservi che $V = \sup_\Omega v > 0$ altrimenti il teorema sarebbe provato.

Sia ora

$$\overline{v} = \frac{v}{V + \varepsilon - v} = -1 + (V + \varepsilon)\frac{1}{V + \epsilon - v}.$$

Osserviamo che $V + \varepsilon - v \geq \varepsilon$ e quindi

$$0 \leq \frac{1}{V + \varepsilon - v} \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Dunque $\frac{1}{V+\varepsilon-v}$ è L^∞ quindi $\overline{v}$ è L^∞ e allora è $W_0^{1,2}$ e si può sostituire a v nella (2.15).

Si ha che

$$D\left(\frac{1}{V + \varepsilon - v}\right) = \frac{-Dv}{(V + \varepsilon - v)^2}$$

e quindi la (2.15) diventa

$$(V + \varepsilon)\int_\Omega a^{ij} D_j u \frac{D_i v}{(V + \varepsilon - v)^2} dx \leq \lambda\nu \int_\Omega \frac{v}{(V + \varepsilon - v)} |Du| \, dx.$$

Si osserva che è equivalente alla seguente disuguaglianza per come è stato definito Dv

$$(V + \varepsilon)\int_\Omega a^{ij} D_j v \frac{D_i v}{(V + \varepsilon - v)^2} dx \leq \lambda\nu \int_\Omega \frac{v}{(V + \varepsilon - v)} |Dv| \, dx. \qquad (2.18)$$

Chiamo

$$w_\varepsilon = \ln \frac{V+\varepsilon}{V+\varepsilon-v}$$

e dunque

$$Dw_\varepsilon = \frac{Dv}{V+\varepsilon-v}.$$

Sostituendo in (2.18) si ottiene

$$(V+\varepsilon)\int_\Omega a^{ij}D_jw_\varepsilon D_iw_\varepsilon \ dx \leq \lambda\nu\int_\Omega v|Dw_\varepsilon| \ dx,$$

e per la proprietà di elllitticità si ha

$$\lambda\int_\Omega |Dw_\varepsilon|^2 dx \leq \int_\Omega a^{ij}D_jw_\varepsilon D_iw_\varepsilon \ dx \leq \lambda\nu\int_\Omega \frac{v}{V+\varepsilon}|Dw_\varepsilon| \ dx.$$

Ora poichè $\frac{v}{V+\varepsilon} \leq 1$, applicando la disuguaglianza di Hölder si ha che

$$\int_\Omega |Dw_\varepsilon|^2 dx \leq \nu|\Omega|^{\frac{1}{2}}(\int_\Omega |Dw_\varepsilon|^2 \ dx)^{\frac{1}{2}}$$

e per la disuguaglianza di Poincarè vale:

$$\mathbf{C_0}\|w_\varepsilon\|_2 \leq \|Dw_\varepsilon\|_2 \leq \nu|\Omega|^{\frac{1}{2}}$$

$$\int_\Omega |\ln\frac{V+\varepsilon}{V+\varepsilon-v}|^2 \ dx \leq \frac{\nu^2|\Omega|}{\mathbf{C_0}^2}.$$

Facendo il limite per ε che tende a 0

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\frac{V+\varepsilon}{V+\varepsilon-v(x)} = \sigma(x)$$

dove

$$\sigma(x) = \begin{cases} \ln\frac{V}{V-v(x)} & \text{se } v(x) < V \\ +\infty & \text{se } v(x) = V \end{cases}$$

Per il lemma di Fatou si ha quindi che

$$\int_\Omega |\sigma(x)|^2 dx < \infty$$

e quindi

$$\sigma(x) < \infty \text{ quasi dappertutto}$$

allora $v(x) < V$ quasi dappertutto e quindi $u - l < V = \sup_\Omega u - l$ quasi dappertutto e $v(x) = V$ su un insieme di misura nulla.

Se $u = \sup_\Omega u$, allora $v = \sup_\Omega u - l = V$, e quindi u raggiunge $\sup_\Omega u$ su un insieme di misura nulla, ma avevamo già provato che u raggiunge $\sup_\Omega u$ su un insieme di misura positiva; si ha quindi un assurdo.

□

L'unicità delle soluzioni del problema generalizzato di Dirichlet per $Lu = g + D_i f^i$ è una conseguenza del principio del massimo debole:

Corollario 2.5.
Sia $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ che soddisfi $Lu = 0$ in Ω.
Allora $u = 0$ in Ω

Dimostrazione. $Lu = 0$, e in particolare $Lu \geq 0$.

Per il teorema appena dimostrato e poichè $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ vale:

$$\sup_\Omega u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ = 0.$$

cioè $u \leq 0$ in Ω.

Anche $L(-u) = 0$, allora come prima $-u \leq 0$ in Ω.

Allora $u = 0$ in Ω. □

2.3 La risoluzione del problema di Dirichlet

L'obiettivo principale di questa sezione è la dimostrazione dell'esistenza e dell'unicità della soluzione del problema di Dirichlet (2.10).

Teorema 2.6.
Sia L un operatore lineare in forma di divergenza.
Supponiamo che L sia:

(i) ellittico:

$$a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2 \quad \forall x \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

(ii) a coefficienti limitati:

$$|a^{ij}|^2 \leq \Lambda^2, \tag{2.19}$$

$$\frac{1}{\lambda^2}\sum(|b^i(x)|^2 + |c^i(x)^2|) + \frac{1}{\lambda}|d(x)| \leq \nu^2. \tag{2.20}$$

(iii) e tale che:

$$\int_\Omega (dv - b^i D_i v)dx \leq 0 \quad \forall v \geq 0, v \in C_0^1(\Omega).$$

Allora per $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$ e per $g, f^i \in L^2(\Omega)$, $\quad i =, 1\ldots, n$ il problema generalizzato di Dirichlet:

$$\begin{cases} Lu = g + D_i f^i & \text{in } \Omega, \\ u = \varphi & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

ammette una e una sola soluzione debole in $W^{1,2}(\Omega)$.

Dimostrazione. Al fine della dimostrazione non è restrittivo supporre il problema di Dirichlet nel caso in cui $\varphi = 0$.

Infatti:

$$\begin{aligned} Lw &= Lu - L\varphi \\ &= g + D_i f^i - \left[D_i\left(a^{ij}D_j\varphi + b^i\varphi\right) + c^i D_i\varphi + d\varphi\right] \\ &= g - c^i D_i\varphi - d\varphi + D_i\left(f^i - a^{ij}D_j\varphi - b^i\varphi\right) \\ &= \hat{g} + D_i\hat{f}^i \end{aligned}$$

e risulta che $\hat{g}, \hat{f}^i \in L^2(\Omega), \quad i = 1, \ldots n$, e $w \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Poniamo ora $\mathcal{H} = W_0^{1,2}(\Omega)$, $\mathbf{g} = (g, f^1, \ldots, f^n)$ e $F(v) = -\int_\Omega (gv - f^i D_i v)dx$, per $v \in \mathcal{H}$

Per la disuguaglianza di Schwarz si ha:

$$|F(v)| \leq \|\mathbf{g}\|_2 \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)} \qquad \Longrightarrow \qquad F \in \mathcal{H}^*$$

Se la forma bilineare

$$\mathcal{L}(u, v) = \int_\Omega \left[\left(a^{ij}D_j u + b^i u\right) D^i v - \left(c^i D_i u + du\right) v\right] dx$$

fosse coerciva, poichè è anche limitata (2.13), allora varrebbe il teorema di Lax-Milgram (1.3), ovvero

$\exists! u \in \mathcal{H}$ tale che:

$$\mathcal{L}(u, v) = F(v)$$

e il teorema sarebbe dimostrato.

Prima di continuare nella dimostrazione proviamo il seguente lemma, connesso con la nozione di coercività:

Lemma 2.7.

Sia L un operatore che soddisfi le condizioni (i), (ii) del teorema.

Allora

$$\mathcal{L}(u, u) \geq \frac{\lambda}{2} \int_\Omega |Du|^2 dx - \lambda\nu^2 \int_\Omega u^2 dx. \tag{2.21}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(u, u) &= \int_\Omega \left[\left(a^{ij} D_j u + b^i u \right) D^i u - \left(c^i D_i u + du \right) u \right] dx \\
&= \int_\Omega \left(a^{ij} D_i u D_j u + (b^i - c^i) u D_i u - du^2 \right) \\
&\geq \int_\Omega (\lambda |Du|^2 - \frac{\lambda}{2} |Du|^2 - \lambda\nu^2 u^2) dx \\
&= \frac{\lambda}{2} \int_\Omega |Du|^2 dx - \lambda\nu^2 \int_\Omega u^2 dx.
\end{aligned}$$

□

Se fosse $b = c = d = 0$, l'operatore L sarebbe coercivo e allora per il teorema di Lax-Milgram (1.3) avremmo finito.

Il lemma mostra che la coercività in generale non è vera.

Si prenda ora un $\sigma \in \mathbb{R}$ e definiamo la funzione L_σ in questo modo:

$$L_\sigma = Lu - \sigma u.$$

Per il lemma appena dimostrato si osserva che la forma bilineare associata, $\mathcal{L}_\sigma$, è coerciva se σ è sufficientemente grande oppure il volume di Ω, ($|\Omega|$), è sufficientemente piccolo. Infatti:

$$\mathcal{L}_\sigma(u,v) = \int_\Omega \left[\left(a^{ij} D_j u + b^i u \right) D_i v - \left(c^i D_i u + du - \sigma u \right) v \right] dx$$

e per il lemma precedente

$$\mathcal{L}_\sigma(u,u) \geq \frac{\lambda}{2} \int_\Omega |Du|^2 dx - \lambda\nu^2 \int_\Omega u^2 dx + \sigma \int_\Omega u^2 dx.$$

Mostriamo che la forma bilineare associata $\mathcal{L}_\sigma$ è coerciva se il volume di Ω è sufficientemente piccolo.

Per la disuguaglianza di Sobolev (1.7) si ha che:

$$\begin{aligned} \textstyle\int_\Omega |u|^2 dx \leq \left(\int_\Omega |u|^{\frac{2n}{n-2}} dx \right)^{\frac{n-2}{n}} \left(\int 1 dx \right)^{\frac{2}{n}} = \\ = |\Omega|^{\frac{2}{n}} \|u\|^2_{\frac{2n}{n-2}} \leq C(n,2) |\Omega|^{\frac{2}{n}} \|Du\|_2^2. \end{aligned}$$

Allora risulta che se $|\Omega|$ è sufficientemente piccolo

$$-\lambda\nu \int_\Omega u^2 dx \geq -C/(n,2)\lambda\nu|\Omega|^{\frac{2}{n}} \int_\Omega |Du|^2 dx \geq -\frac{\lambda}{4} \int_\Omega |Du|^2 dx \qquad (2.22)$$

e quindi $\mathcal{L}_\sigma$ è coerciva.

Definiamo ora l'immersione

$$I : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}^*$$

tale che:

$$Iu(v) = \int_\Omega uv \, dx, \quad v \in \mathcal{H}. \qquad (2.23)$$

Si dimostra che I è compatta.

Infatti se si scrive $I = I_1 I_2$, dove:

$I_2 : \mathcal{H} \to L^2(\Omega)$ è l'immersione naturale,
$I_1 : L^2 \to \mathcal{H}^*$ è data dalla (2.23).

I_2 è compatta (anche per $p = n = 2$), perchè per il teorema (1.8) vale che: $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ è compatta con $1 < q < \frac{2n}{n-2}$, quando $2 < n$ e per $q = 2 < \frac{2n}{n-2}$.

Poichè I_1 è continua, segue che I è compatta.

Consideriamo ora l'equazione

$$Lu = F.$$

Questa è equivalente a

$$L_{\sigma_0}u + \sigma_0 Iu = F \tag{2.24}$$

Sia $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ tale che L_{σ_0} sia coerciva oltre che essere limitata e lineare.

Osserviamo che per il teorema di Lax-Milgram (1.3),

$\forall G \in \mathcal{H}^*$ esiste ed è unico $u \in \mathcal{H}$ tale che

$$L_{\sigma_0}u(v) = \mathcal{L}_{\sigma_0}(u, v) = G(v) \qquad \forall v \in \mathcal{H}$$

Quindi L_{σ_0} è iniettiva, suriettiva e limitata, quindi esiste $L_{\sigma_0}^{-1}$, operatore lineare e continuo:

$$L_{\sigma_0}^{-1} : \mathcal{H}^* \longrightarrow \mathcal{H}$$

Applicandola all'equazione (2.24) si ottiene

$$u + \sigma_0 L_{\sigma_0}^{-1} Iu = L_{\sigma_0}^{-1} F.$$

Ponendo $T = -\sigma_0 L_{\sigma_0}^{-1} I$,

$$T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H},$$

è compatta perchè I è compatta (dimostrato prima) e $L\sigma_0{}^{-1}$ è continua.

Sotto queste ipotesi si può applicare il teorema dell'alternativa di Fredholm (1.4), per cui si hanno due casi:

(I) l'equazione omogenenea

$$u - Tu = 0$$

ha soluzione $u \in \mathcal{H}$ non banale.

In questo caso, significherebbe che $L_{\sigma_0}^{-1}F = 0$ e quindi $Lu = 0$, ma per il corollario (2.5) del principio del massimo debole sarebbe una contraddizione perchè questo significherebbe che esiste solo la soluzione banale $u = 0$.

(II) $\forall y \in \mathcal{H}$ l'equazione

$$u - Tu = y$$

ha una soluzione unica $u \in \mathcal{H}$ e quindi per $y = L_{\sigma_0}^{-1}F$ il teorema è dimostrato.

$\square$

Definiamo ora l'aggiunta formale L^* così:

$$L^*u = D_i(a^{ji}D_ju - c^iu) - b^iD_iu + du. \tag{2.25}$$

Allora si avrà che

$$\mathcal{L}^*(u,v) = \int_\Omega [(a^{ji}D_ju - c^iu)D_iu - (-b^iD_iu + du)v]dx.$$

Poichè $\mathcal{L}^*(u,v) = \mathcal{L}(v,u)$, per $u, v \in W_0^{1,2}(\Omega) = \mathcal{H}$, segue che L^* è anche l'aggiunta di L nello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$.

Sostituendo L con L_σ nella (2.25), si vede che l'equazione:

$$L_\sigma u = F$$

sarà equivalente all'equazione

$$u + (\sigma_0 - \sigma)L_{\sigma_0}^{-1}Iu = L_{\sigma_0}^{-1}F$$

e che l'aggiunta T_σ^* della mappa compatta $T_\sigma = (\sigma_0 - \sigma)L_{\sigma_0}^{-1}I$ è data da:

$$T_\sigma^* = (\sigma_0 - \sigma)(L_{\sigma_0}^*)^{-1}I.$$

Applicando ora il teorema 1.5 si ottiene il seguente risultato.

Teorema 2.8.

Sia L l'operatore lineare tale che sia

(i) ellittico:

$$a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2 \quad \forall x \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

(ii) a coefficienti limitati:

$$|a^{ij}|^2 \leq \Lambda^2,$$
$$\frac{1}{\lambda^2}\sum(|b^i(x)|^2 + |c^i(x)^2|) + \frac{1}{\lambda}|d(x)| \leq \nu^2.$$

Allora esiste un insieme discreto e numerabile $\Sigma \subset \mathbb{R}$ tale che

se $\sigma \notin \Sigma$, i problemi di Dirichlet

$$\begin{cases} L_\sigma u = g + D_i f^i \\ u = \varphi \ su \ \partial\Omega, \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_\sigma^* u = g + D_i f^i \\ u = \varphi \ su \ \partial\Omega, \end{cases}$$

ammettono soluzione unica, per $g, f^i \in L^2(\Omega)$ e $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$ fissati.

Se $\sigma \in \Sigma$, allora i sottospazi delle soluzioni dei problemi omogenei

$$\begin{cases} L_\sigma u = 0 \\ u = 0 \ su \ \partial\Omega, \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_\sigma^* u = 0 \\ u = 0 \ su \ \partial\Omega, \end{cases}$$

sono, di dimensione finita positiva e il problema

$$\begin{cases} L_\sigma u = g + D_i f^i \\ u = \varphi \ su \ \partial\Omega, \end{cases}$$

ha soluzione se e solo se

$$\int_\Omega [(g - c^i D_i\varphi - d\varphi + \sigma\varphi)v) - (f^i - a^{i,j} D_j\varphi - b^i\varphi) D_i v] dx = 0$$

per ogni v che soddisfi $L_\sigma^* v = 0$, $v = 0$ su $\partial\Omega$

Inoltre se vale la condizione

$$\int_\Omega (dv - b^i D_i v) dx \leq 0 \quad \forall v \geq 0, v \in W_0^{1,1}(\Omega) \tag{2.26}$$

allora $\Sigma \subset (-\infty, 0)$.

L'operatore $G_\sigma : \mathcal{H}^* \longrightarrow \mathcal{H}$, data da $G_\sigma = L_\sigma^{-1}$, per $\sigma \notin \Sigma$ è chiamato *operatore di Green* per il problema di Dirichlet, per L_σ.

Per il teorema (1.4), G_σ è un operatore lineare limitato su $\mathcal{H}^*$ e di conseguenza si ha la seguente stima.

Corollario 2.9.

Sia $u \in W^{1,2}(\Omega)$ che soddisfi

$$\begin{cases} L_\sigma u = g + D_i f^i \\ u = \varphi \text{ su } \partial\Omega, \end{cases}$$

con $\sigma \notin \Sigma$.

Allora esiste una costante C, dipendente solo da L, σ e Ω, tale che

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C(\|\mathbf{g}\|_2 + \|\varphi\|_{W^{1,2}(\Omega)}).$$

Segue dal teorema 2.8 che il teorema 2.6 rimane valido se si sostituisce b^i con $-c^i$ nelle condizioni (2.26).

Bibliografia

[1] Walter Rudin. *Analisi reale e complessa*. Boringhieri editore, 1974.

[2] Haïm Brezis.*Analisi funzionale*. Liguori editore, 1986.

[3] David Gilbarg, Neil S.Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer 1977.