

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÁ DI BOLOGNA

FACOLTÁ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

**VARIETÁ E SUPERFICI:
CLASSIFICAZIONE E CENNI STORICI**

Tesi di Laurea in Geometria 3

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Rita Fioresi

Presentata da:
Chiara Diazzi

Sessione III
Anno Accademico 2011/2012

*Ai miei genitori,
ad Andrea e Anna ...*

Introduzione

Lo scopo di questo elaborato è quello di presentare il teorema di classificazione delle superfici. Al fine di descrivere in maniera esaustiva gli oggetti fondamentali di studio, il loro ambito e le proprietà che li caratterizzano, i matematici cercano di catalogarli mediante teoremi di classificazione. Generalmente, però i teoremi di classificazione sono difficili da elaborare se non, in alcuni casi, impossibili e, anche per questo motivo, il teorema di classificazione delle superfici è uno dei risultati più importanti della topologia.

Oltre che da un punto di vista matematico, analizzerò il teorema da un punto di vista storico. Per poter descrivere in modo completo il risultato è fondamentale esaminare la formula di Eulero che tuttavia, nella sua enunciazione originale, riguarda esclusivamente i poliedri convessi. Nel corso dei secoli, vari matematici hanno studiato la possibilità di generalizzare la nota formula di Eulero ad altri oggetti matematici nonché ad altre dimensioni. Questa ricerca ha portato gradualmente allo sviluppo di quella fondamentale branca della matematica oggi comunemente chiamata topologia algebrica, all'interno della quale prende forma e si motiva il teorema di classificazione delle superfici.

Nel primo capitolo di questo elaborato viene descritto tale processo storico. Nel secondo capitolo vengono presentate le nozioni di varietà topologica e superficie, ambedue corredate da numerosi esempi. Inoltre, viene trattata l'orientabilità delle superfici. Infine, il terzo capitolo presenta il teo-

rema di classificazione delle superfici e le definizioni di somma connessa e triangolazione delle superfici, ad esso necessarie.

Indice

Introduzione	i
1 La formula di Eulero e la nascita della topologia	1
1.1 Eulero	2
1.2 I poliedri	6
1.3 Nuove dimostrazioni e prime generalizzazioni	11
1.4 Superfici	16
1.5 La classificazione delle superfici	24
2 Varietà e superfici	27
2.1 Orientabilità	36
3 Il teorema di classificazione delle superfici	37
3.1 Somma connessa	37
3.2 Triangolazione di superfici	43
3.3 Il teorema di classificazione delle superfici	44
3.4 La caratteristica di Eulero di una superficie	54
Bibliografia	57

Elenco delle figure

1.1	Leonhard Euler	2
1.2	I tre differenti abiti della pirite	7
1.3	Esempi di radiolari	7
1.4	I cinque solidi regolari	8
1.5	Alcuni solidi archimedei	9
1.6	Visione di Keplero del sistema solare (dalla sua opera <i>Mysterium Cosmographicum</i>)	10
1.7	Adrien-Marie Legendre	11
1.8	Proiezione di un poliedro su una sfera	13
1.9	Applicazione del teorema di Harriots-Girard per i poligoni	13
1.10	Esempi di poliedri stellati	14
1.11	Augustin-Louis Cauchy	15
1.12	I sette ponti di Königsberg	17
1.13	Esempi di superfici: la sfera, il cilindro, il toro e il doppiotoro	18
1.14	Costruzione del toro	19
1.15	Striscia di Möbius	20
1.16	“Striscia di Möbius II” di Escher e simbolo del riciclaggio	20
1.17	Costruzione della bottiglia di Klein	21
1.18	Costruzione del piano proiettivo	21
1.19	Costruzione del doppio toro per somma connessa	22

1.20	Costruzione del cappuccio incrociato a partire dal nastro di Möbius	23
1.21	Partizione della sfera, del toro e della bottiglia di Klein	25
2.1	Proiezione stereografica	30
2.2	Superficie sferica	33
2.3	Costruzione del doppio toro a partire da un ottagono	34
2.4	Bottiglia di Klein	35
2.5	Striscia di Möbius	35
3.1	Costruzione della sfera e del piano proiettivo	39
3.2	Somma connessa di due tori, rappresentata mediante poligoni con i lati identificati a coppie	41
3.3	Somma connessa di due piani proiettivi, rappresentata mediante poligoni con i lati identificati a coppie	42
3.4	Eliminazione di una coppia di lati adiacenti del primo tipo	46
3.5	Riduzione ad una sola classe di equivalenza di vertici	47
3.6	Passo 4 della dimostrazione	48
3.7	Coppia di lati del primo tipo	49
3.8	Passo 5 della dimostrazione	50
3.9	Rappresentazione del toro e della bottiglia di Klein con un foro	51
3.10	Somma connessa di un nastro di Möbius e di un toro	52
3.11	Somma connessa di un nastro di Möbius con una bottiglia di Klein	53

Capitolo 1

La formula di Eulero e la nascita della topologia

Nella maggior parte delle scienze una generazione distrugge ciò che era stato costruito dall'altra e ciò che una aveva stabilito l'altra lo disfa. Soltanto in matematica ogni generazione aggiunge una nuova storia alla vecchia struttura.

Hermann Hankel (1839-1873) ¹

In questo capitolo viene presentata la figura del grande matematico Eulero e la formula, che prende il suo nome. Si prende poi in esame la nozione di poliedro, insieme ad alcuni esempi particolarmente rilevanti, quali i cinque solidi platonici. Inoltre viene descritta l'evoluzione storica che, a partire dal tentativo di generalizzazione della formula di Eulero, ha portato alla nascita della topologia e all'elaborazione dei suoi concetti e risultati principali, tra cui il teorema di classificazione delle superfici.

¹D. S. Richeson, *Euler's gem. The polyhedron formula and the birth of topology*, Princeton, Princeton University Press, 2008.

1.1 Eulero



Figura 1.1: Leonhard Euler.

Leonhard Euler, italianizzato in Eulero (1707-1783), è una delle figure matematiche più eminenti di tutti i tempi. I risultati dei suoi studi hanno apportato contributi sostanziali in varie branche della matematica: si occupò infatti di diverse discipline, quali ad esempio analisi, teoria dei numeri, analisi complessa, equazioni differenziali, probabilità e topologia, contribuendo in modo determinante a ciascuna di esse. La topologia, in particolare, deve la sua nascita proprio ad Eulero, che ha enunciato e dimostrato quello che è comunemente considerato il primo teorema di teoria dei grafi. Di questo argomento tratteremo più diffusamente in seguito. Eulero si interessò inoltre di ottica, elettromagnetismo, meccanica, idrodinamica e astronomia. Fu anche uno dei matematici più prolifici in assoluto. Nel corso della sua vita Eulero pubblicò più di 500 lavori, tra libri e articoli, e i suoi scritti continuarono ad apparire per quasi mezzo secolo anche dopo la sua morte. La bibliografia degli scritti di Eulero, compresi quelli postumi, consta di 886 titoli e l'edizione integrale di tutte le sue opere si avvicina a settantacinque volumi. La sua produzione matematica raggiungeva una media di 800 pagine all'anno.

Nessun altro matematico superò la produzione di quello che Argo, un accademico francese, definiva come “l’Incarnazione dell’analisi”.² In più, Eulero possedeva una caratteristica piuttosto rara tra gli studiosi: era un espositore straordinario. A differenza dei matematici che lo precedettero, Eulero scriveva utilizzando un linguaggio chiaro e semplice, che rendeva il suo lavoro accessibile tanto agli specialisti quanto ai principianti.

Leonhard Euler nacque a Basilea, in Svizzera, il 15 aprile del 1707 da Paul Euler, un ministro della chiesa calvinista, e Marguerite Brucker Euler. I primi rudimenti di matematica gli vennero impartiti dal padre, il quale, pur non essendo un matematico, era appassionato della materia e aveva studiato sotto il famoso Jacob Bernoulli (1654-1705). A quattordici anni Eulero cominciò l’università a Basilea. Quest’età non era insolita per gli studenti dell’epoca. Paul Euler desiderava che il figlio intraprendesse la carriera ecclesiastica, così il giovane Eulero si dedicò allo studio della teologia e dell’ebraico. Ben presto, però, le sue grandi doti matematiche si palesarono a tutti e in particolare suscitavano l’interesse dell’amico del padre Johann Bernoulli. Eulero scriveva nella sua autobiografia: “Quando incappavo in qualche ostacolo o difficoltà, mi era permesso di fargli visita liberamente ogni sabato pomeriggio ed egli con gentilezza mi spiegava tutto ciò che non avevo compreso”.³

Queste lezioni giocarono un ruolo significativo nella maturazione delle capacità matematiche di Eulero. Dopo tre anni di studi Eulero conseguì la laurea in filosofia. Johann Bernoulli, temendo che la matematica potesse perdere uno dei suoi più grandi geni, intervenne affinché Paul Euler concedesse al figlio il permesso di abbandonare la carriera ecclesiastica: senza dubbio il ragazzo aveva le potenzialità per diventare uno dei più grandi matematici.

²C. B. Boyer, *Storia della matematica*, Milano, Mondadori, 1980.

³A. P. Youshkevitch, *Euler, Leonhard* in *Dictionary of scientific biography*, a cura di C. C. Gillispie, New York, Charles Scribner’s Sons, 1971.

Vista la sua passione per la materia, Paul acconsentì. Nonostante ciò, Eulero rimase per tutta la sua vita un devoto calvinista.

Nel 1724 Pietro il Grande (1672-1725) fondò l'Accademia delle Scienze, con sede a S. Pietroburgo. In questa città di recente costruzione si trasferirono i due giovani Bernoulli, amici di Eulero: Nicolaus (1695-1726) e Daniel (1700-1782), figli di Johann Bernoulli, che trovarono occupazione come professori di matematica nell'Accademia delle Scienze, divenendo ben presto figure di spicco della nuova istituzione. Nella primavera del 1727, su raccomandazione dei Bernoulli, Eulero venne chiamato all'Accademia di S. Pietroburgo come membro della sezione di medicina e fisiologia. Proprio nel giorno del suo arrivo in Russia, l'imperatrice Caterina, seconda moglie di Pietro, morì. Con la sua morte, l'Accademia, da poco fondata, rischiò di chiudere, poiché i nuovi governanti non vedevano di buon occhio gli scienziati stranieri. Comunque l'Accademia riuscì a sopravvivere e nel 1730 Eulero si trovò a occupare la cattedra di filosofia naturale, invece di quella di medicina. L'arrivo di Eulero a S. Pietroburgo fu preceduto da un grave lutto: l'amico Nicolaus Bernoulli era morto per annegamento l'anno prima. Nel 1733 Daniel Bernoulli lasciò la Russia per assumere la cattedra di matematica a Basilea e la sua carica venne ricoperta da Eulero, che divenne così, all'età di soli 26 anni, il matematico più importante dell'Accademia. Si sposò con Katharina Gsell, figlia del noto pittore. Dal loro matrimonio nacquero 13 figli, dei quali solo 5 superarono l'infanzia e di questi 3 sopravvissero ai genitori. Nonostante l'impegno della famiglia, Eulero continuò le sue pubblicazioni. Si dice che fosse in grado di scrivere articoli di matematica mentre cullava un bambino sulle ginocchia e che potesse comporre un trattato tra la prima e la seconda chiamata per la cena. Il ritmo di produzione delle sue ricerche non diminuì nemmeno quando nel 1735 perse la vista dell'occhio destro, probabilmente a causa dell'eccessivo lavoro. Nel 1741 Eulero accettò l'invito di Federico il Grande, che lo voleva come membro dell'Accademia delle Scienze di Berlino.

All'inizio Eulero si trovò bene, ma in seguito la sua permanenza a Berlino si rivelò difficile, poiché si crearono tensioni con l'imperatore, che gli preferiva un filosofo brillante come Voltaire. Il monarca, che poneva i filosofi al di sopra dei matematici, attribuì a Eulero, considerato poco sofisticato, il nomignolo di "ciclope matematico"; di conseguenza la vita di corte diventò intollerabile per Eulero. Egli lavorò a Berlino per 24 anni, ma continuò sempre a mantenere ottimi rapporti con l'Accademia di S. Pietroburgo, che lo incoraggiò a tornare facendogli cospicue offerte di lavoro. Nel 1765 Eulero accettò l'ennesima offerta dell'Accademia russa e ritornò a S. Pietroburgo, dove nel frattempo era divenuta imperatrice Caterina la Grande, moglie di Pietro III. Nel corso di quell'anno Eulero si rese conto che, a causa della cataratta, stava perdendo la vista anche dall'altro occhio e, prevedendo una cecità futura, si abituò a lavorare scrivendo con il gesso su una lavagna e dettando ai suoi figli. Nel 1771 si sottopose ad un'operazione e riuscì ancora a vedere, ma solo per poco tempo e dovette passare gli ultimi diciassette anni della sua vita nella cecità quasi completa. Ma neanche questa disgrazia riuscì a interrompere la sua produzione scientifica, che continuò ininterrotta e con la stessa intensità fino alla sua morte, avvenuta il 7 settembre del 1783.

Il suo corpo è sepolto a S. Pietroburgo.

È difficile fare una lista dei più grandi risultati ottenuti da Eulero in campo matematico. Possiamo citare il celebre libro di testo "Introduzione all'analisi infinitesimale"⁴, che lo storico Carl Boyer ha definito il libro più influente della storia della matematica moderna. Eulero inoltre introdusse numerose notazioni, in uso ancora ora, come ad esempio la "e" del logaritmo naturale e rese popolare l'uso del simbolo π . Quasi alla fine della sua vita era solito utilizzare "i" per indicare $\sqrt{-1}$ e questa notazione in seguito fu diffusa da Gauss. Inoltre usò a , b e c per denotare i lati di un triangolo tipico con A , B

⁴C. B. Boyer e U. Merzbach, *A history of mathematics*, New York, John Wiley & Sons, 1991.

e C per gli angoli opposti; utilizzò il simbolo \sum per le sommatorie e cominciò a usare il simbolo $f(x)$ per le funzioni. Un altro risultato fondamentale di Eulero è la formula

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

che, secondo un recente sondaggio, è considerata dai matematici la relazione più armoniosa e significativa di tutta la matematica. Un'altra formula di importanza considerevole, che dobbiamo a Eulero, è quella che lega il numero di vertici, spigoli e facce di un poliedro:

per un poliedro con V vertici, E spigoli ed F facce vale

$$V - E + F = 2$$

ed è nota con il nome *formula di Eulero*. Al fine di una comprensione più profonda della formula di Eulero e degli sviluppi matematici che ne conseguirono, esaminiamo la definizione di poliedro e la sua importanza storica.

1.2 I poliedri

Apprezzati e ammirati per la bellezza delle loro forme e simmetrie, i poliedri sono stati oggetto di studio a cominciare dal periodo classico greco e hanno ispirato artisti di ogni epoca, occupando un ruolo preminente nei campi dell'arte, dell'architettura, dell'oreficeria e dei giochi. Le loro proprietà di ordine e regolarità ne hanno fatto spesso una chiave interpretativa dell'universo, tanto che i poliedri sono stati utilizzati in varie teorie filosofiche e cosmologiche. In natura molti minerali cristallizzano con una forma, detta *abito*, che corrisponde ad un poliedro e numerosi organismi microscopici presentano forme o simmetrie poliedrali come, ad esempio, i radiolari.

Il termine “poliedro” deriva dal greco *polys*, “molti” e *èdron*, che vuol dire “sedia”. Un poliedro, infatti, ha molte “sedie”, cioè facce su cui poggiare.



Figura 1.2: I tre differenti abiti con cui si può presentare la pirite: con cristalli cubici, ottaedrici o aventi la forma di un dodecaedro non regolare.

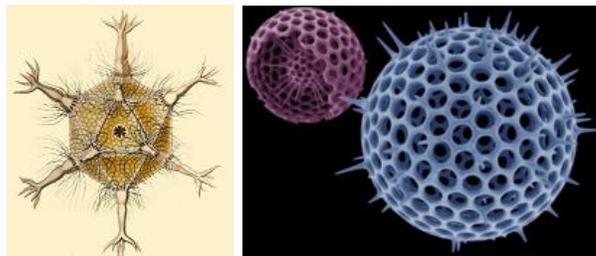


Figura 1.3: Esempi di radiolari.

Benchè il termine *èdron* avesse il significato originario di “sedia”, esso è stato utilizzato sin dai tempi di Archimede per indicare le facce di un poliedro e all’epoca di Eulero tale accezione era ormai universalmente riconosciuta. Quindi una traduzione ragionevole di poliedro è “molte facce”.

Le proprietà dei poliedri hanno affascinato i matematici per millenni, tuttavia, poiché erano considerati oggetti facilmente riconoscibili, i matematici operavano con i poliedri senza averne una definizione rigorosa. Fu solo tardi nello sviluppo della teoria dei poliedri, che si cercò di fornire una definizione, ma senza successo fino a tempi relativamente recenti. Per tale motivo, non vi è una sola definizione di poliedro. Intuitivamente, un poliedro è una figura costituita da facce poligonali in cui ogni spigolo è comune ad esattamente due facce e da ogni vertice si dipartono almeno tre spigoli. Ricordiamo che

le *facce* di un poliedro sono i poligoni che lo costituiscono, mentre i loro lati e vertici ne sono gli *spigoli* e i *vertici*.

Sia Eulero che i Greci assumevano implicitamente che i poliedri fossero solidi e convessi.⁵ Tra i poliedri vi è una classe molto importante: i poliedri regolari. Un *poliedro regolare* o *solido regolare* è un poliedro che soddisfa le condizioni seguenti:

1. il poliedro è convesso;
2. ogni faccia è un poligono regolare;
3. tutte le facce sono congruenti;
4. ogni vertice è circondato dallo stesso numero di facce.

Secondo un noto teorema, esistono solo 5 solidi regolari.

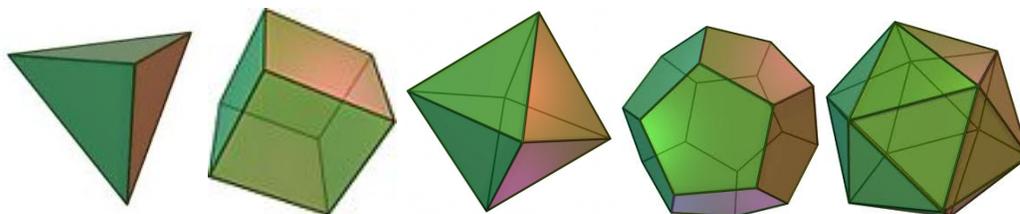


Figura 1.4: I cinque solidi regolari: tetraedro, cubo, ottaedro, dodecaedro e icosaedro.

Quasi certamente la dimostrazione di questo teorema fu fornita dal matematico greco Teeteto, vissuto nel IV secolo a.C., e fu riportata più tardi da Euclide nel libro XIII dei suoi *Elementi*. Teeteto fu amico di Platone ed insegnò nell'Accademia di quest'ultimo per quindici anni. Da lui Platone venne a conoscenza dell'esistenza dei cinque poliedri regolari e, credendo che vi fosse

⁵Un poliedro si dice *convesso* quando è possibile congiungere due suoi qualsiasi punti mediante un segmento, completamente contenuto nel poliedro.

un significato cosmico, elaborò un modello fisico. Platone nel suo dialogo, *Timeo*, associò il tetraedro, l'ottaedro, il cubo e l'icosaedro rispettivamente a quelli che erano ritenuti i quattro elementi fondamentali: fuoco, aria, terra e acqua. Il dodecaedro veniva invece associato all'immagine del cosmo intero, realizzando la cosiddetta quinta essenza. Per tale motivo essi sono anche chiamati *solidi platonici*. Il modello greco fu così influente da essere accettato universalmente fino alla nascita della chimica moderna, duemila anni dopo. Anche Archimede (287-212 a.C) si occupò di poliedri, interessandosi a quelli con facce regolari, ma non necessariamente tutte uguali tra loro. Studiò quelli che oggi chiamiamo *poliedri semiregolari* o *archimedei* e anche per questi c'è un numero limitato di possibilità di costruzione: ne esistono 13 tipi.

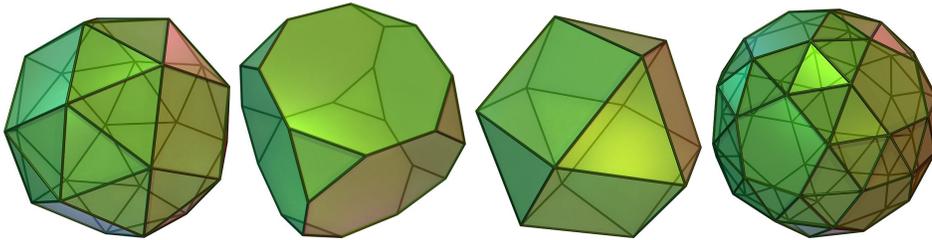


Figura 1.5: Alcuni solidi archimedei: cubo camuso, cubo troncato, cubottaedro e dodecaedro camuso.

Durante il Rinascimento i solidi platonici continuarono a destare l'interesse soprattutto degli artisti, che in questo periodo erano anche grandi matematici e scienziati: Piero della Francesca (1415/1420-1492), Fra Luca Pacioli (1445-1517) e Leonardo da Vinci (1452-1519). Anche il noto astronomo Keplero (1571-1630) si occupò di poliedri regolari. Egli cercò di sposare i dati astronomici con la sua convinzione che Dio avesse creato un mondo con la bellezza matematica e che quindi i cinque poliedri regolari fossero significativi della composizione dell'universo. Nel *Mysterium Cosmographicum* (1596) Keplero

argomentò che l'esistenza dei cinque solidi platonici dovesse essere collegata all'esistenza dei sei pianeti allora conosciuti: Saturno, Giove, Marte, Terra, Venere e Mercurio. Egli affermò che le orbite dei pianeti fossero legate all'iscrizione dei solidi platonici in sfere. Infatti, considerava una sfera contenente l'orbita del pianeta più distante, Saturno, e all'interno di tale sfera vi inscriveva un cubo e poi, all'interno del cubo, inscriveva un'altra sfera, che secondo Keplero era l'orbita di Giove. Continuando in questo modo (tetraedro, sfera, dodecaedro, sfera, icosaedro, sfera, ottaedro, sfera) si ottenevano le orbite di tutti e sei i pianeti.

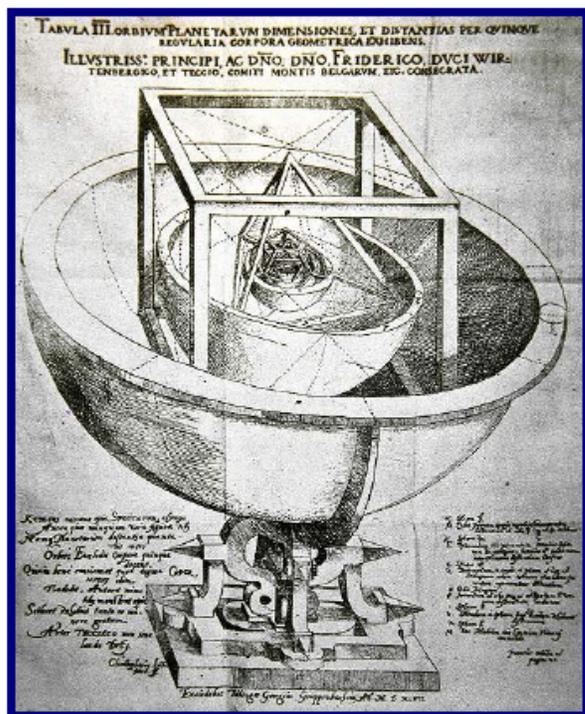


Figura 1.6: Visione di Keplero del sistema solare (tratto dalla sua opera *Mysterium Cosmographicum*).

Benchè la teoria dei poliedri avesse alle spalle più di duemila anni di storia,

nessuno dei matematici, che precedettero Eulero, riuscì a scoprire la nota relazione che lega il numero di vertici, spigoli e facce di un poliedro. Con ogni probabilità ciò è dovuto al fatto che Eulero seppe guardare ai poliedri in modo diverso rispetto al passato. Infatti, anziché concentrarsi sulle proprietà metriche, egli osservò che ogni poliedro si compone di tre parti fondamentali: vertici, spigoli e facce rispettivamente di dimensione 0, 1 e 2. Fu, poi, abbastanza semplice per il grande matematico approdare alla nota formula.

1.3 Nuove dimostrazioni e prime generalizzazioni



Figura 1.7: Adrien-Marie Legendre.

La dimostrazione originale di Eulero della sua formula per i poliedri non era del tutto precisa. Adrien-Marie Legendre (1752-1833) diede una seconda dimostrazione di quest'affascinante relazione, che fu la prima a rispettare i criteri di rigore odierni. Oltre che per i suoi contributi fondamentali alla teoria dei numeri e delle funzioni ellittiche, il grande matematico francese è noto per aver scritto un libro *Elementi di Geometria* nel 1794, che divenne il

principale testo di geometria del secolo successivo. Tale testo includeva anche la formula di Eulero e contribuì in maniera sostanziale alla sua diffusione.

La chiave della dimostrazione di Legendre è un'elegante formula relativa alla geometria sferica, che permette di esprimere l'area di un poligono sulla superficie di una sfera in rapporto alla somma dei suoi angoli interni.

In matematica, e più precisamente in geometria differenziale, una *geodetica* è una particolare curva che descrive localmente la traiettoria più breve fra punti di un particolare spazio. Nel modello sferico le geodetiche sono gli archi di cerchio massimo, cioè gli archi di una qualsiasi circonferenza, che si ottiene sezionando la sfera con un piano passante per il suo centro.

Si dice *poligono geodetico* di n ($n \geq 2$) lati la figura costituita da n punti sulla sfera e dalle geodetiche che li uniscono. Il risultato utilizzato nella dimostrazione di Legendre è oggi noto come *teorema di Harriots-Girard per i poligoni* e asserisce che l'area di un poligono geodetico sulla sfera unitaria è la differenza tra la somma dei suoi angoli interni e la somma degli angoli interni di un poligono piano avente lo stesso numero di lati.

Teorema (di Harriots-Girard per i poligoni). *Sia P un poligono geodetico di n ($n > 3$) lati su una sfera di raggio unitario e siano a_1, a_2, \dots, a_n i suoi angoli interni. Allora*

$$area(P) = a_1 + a_2 + \dots + a_n - (n + 2)\pi.$$

Nella sua dimostrazione della formula di Eulero per i poliedri, Legendre considera un qualunque poliedro convesso avente V vertici, E spigoli ed F facce. Sceglie poi un punto x interno al poliedro e costruisce una sfera avente centro in x e raggio tale che contenga il poliedro (figura 1.8). Poiché l'unità di misura utilizzata non è rilevante, si può assumere il raggio della sfera come unità di misura. In tal modo si ha una sfera di raggio unitario. Si procede tracciando dal punto x le proiezioni dei vertici e degli spigoli del poliedro sulla superficie della sfera. Si ottengono così dei poligoni geodetici.

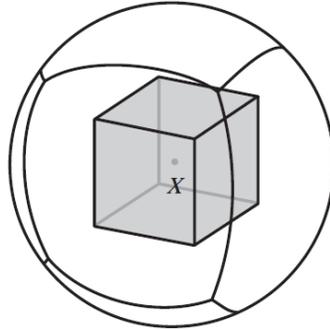


Figura 1.8: Proiezione di un poliedro su una sfera.

Si applica, ora, il teorema di Harriots-Girard per i poligoni. Un metodo semplice per ricordare questo teorema consiste nello scrivere sul poligono geodetico la misura di ogni angolo interno, $-\pi$ in corrispondenza di ogni lato e 2π al centro del poligono. Allora l'area del poligono geodetico è data dalla somma di queste quantità. Si applichi questa tecnica ad ogni poligono geodetico della sfera (figura 1.9).

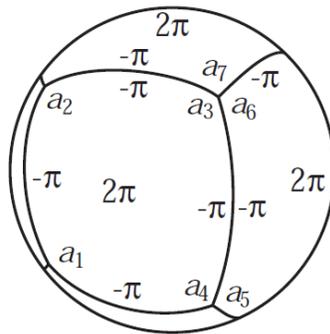


Figura 1.9: Applicazione del teorema di Harriots-Girard per i poligoni.

Eseguendo tutte le somme si ha:

$$4\pi = 2\pi V - 2\pi E + 2\pi F$$

e dividendo ambo i membri per 2π si ottiene la formula di Eulero per i poliedri.

Come Eulero, anche Legendre, considerava poliedri esclusivamente convessi. In un articolo del 1809, Louis Poinot (1777-1859) osservò che la dimostrazione di Legendre si poteva applicare ad alcuni elementi di una classe più generale di quella dei poliedri convessi: la classe dei poliedri stellati. È sufficiente, infatti, che vi sia un punto interno da cui sia possibile proiettare il poliedro.

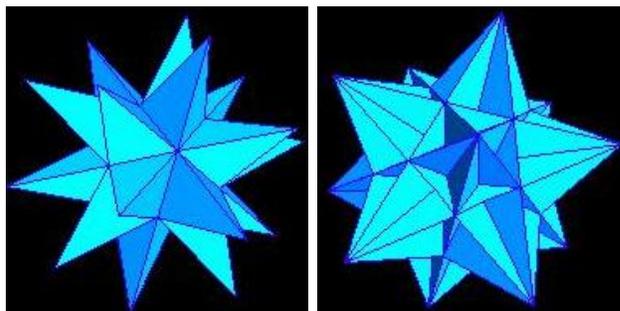


Figura 1.10: Esempi di poliedri stellati: il grande dodecaedro stellato e il grande icosaedro. Anche per essi vale la formula di Eulero.

Alla dimostrazione di Legendre e alla conseguente generalizzazione di Poinot, ne seguirono molte altre. La prima significativa generalizzazione fu fatta da Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), che fornì anche una nuova dimostrazione della formula di Eulero, piuttosto ingegnosa. Cauchy nacque a Parigi nel 1789 ed è, senza dubbio, uno dei matematici più influenti di tutti i tempi. Cauchy apportò contributi profondi e sostanziali in molti campi: analisi complessa e reale, algebra, equazioni differenziali, probabilità e fisica matematica. Tuttavia, se da un lato Cauchy era universalmente stimato come matematico, lo stesso non si poteva dire relativamente alla sua perso-



Figura 1.11: Augustin-Louis Cauchy.

nalità. La sua figura è perfettamente descritta e sintetizzata dalle parole di Niels Abel: *Cauchy è pazzo e non vi è nulla che si possa fare a riguardo, tuttavia oggi è l'unico che sappia come la matematica dovrebbe essere fatta.*⁶ Un'altra particolarità di Cauchy è che spesso pubblicava risultati fondamentali senza rendersi conto appieno della loro profondità ed importanza, come accadde anche per la sua dimostrazione della formula di Eulero per i poliedri, che verrà ora presentata. Una delle differenze sostanziali rispetto ai suoi predecessori è che, ai fini della dimostrazione, Cauchy considera poliedri vuoti, non solidi. In altre parole Cauchy considera superfici. Il primo passo nella dimostrazione di Cauchy è di trasformare il poliedro vuoto in un grafo nel piano. Per fare ciò, egli rimuove una faccia del poliedro, poi, come egli stesso spiegava “trasportando su questa faccia tutti gli altri vertici, senza cambiarne il numero, si otterrà una figura piana costituita da vari poligoni contenuti in un determinato bordo.”⁷ Cauchy dimostrò che ogni grafo così

⁶D. S. Richeson, *Euler's gem. The polyhedron formula and the birth of topology*, Princeton, Princeton University Press, 2008.

⁷A. L. Cauchy, *Recherches sur les polyèdres* nel *Journal de l'École Polytechnique* 9, Parigi, 1813.

ottenuto soddisfa la relazione seguente:

$$V - E + F = 1.$$

Una volta stabilito ciò, è immediato completare la dimostrazione della formula di Eulero per i poliedri, infatti il grafo ottenuto riportando il poliedro sul piano ha lo stesso numero di lati e vertici del poliedro, ma presenta una faccia in meno. Poichè per il grafo si ha $V - E + F = 1$, per il poliedro varrà $V - E + F = 2$.

Si notò ben presto che la dimostrazione di Cauchy poteva essere applicata anche ad alcuni poliedri non convessi. Arthur Cayley (1821-1895) nel 1861 osservò che la dimostrazione di Cauchy poteva essere applicata anche ai grafi con lati curvi, osservazione che fu notata indipendentemente da Johann Benedict Listing (1808-1882) nel 1861 e da Camille Jordan (1838-1922) nel 1866. In seguito i matematici cominciarono a domandarsi quali proprietà i poliedri dovessero avere per soddisfare la formula di Eulero. Tali discussioni furono molto fruttuose e nella prima metà del 1900 prepararono il terreno per la nascita della topologia.

1.4 Superfici

A partire dalla metà del XIX secolo i matematici avevano una comprensione molto maggiore di come applicare la formula di Eulero e a quali poliedri. Così iniziarono a domandarsi se la formula potesse valere anche per altri oggetti, come superfici sferiche o simili. Questi discorsi segnarono la nascita della topologia. Il termine *topologia*, impiegato in botanica, fu introdotto da Listing nel 1847. Grazie a Solomon Lefschetz (1884-1972), il suo uso si diffuse fino a sostituire il termine francese *Analisis situs*. Nella letteratura, che si rivolge ad un pubblico non specialista, la topologia è spesso indicata come la “geometria del foglio di gomma”. Infatti, mentre in geometria le

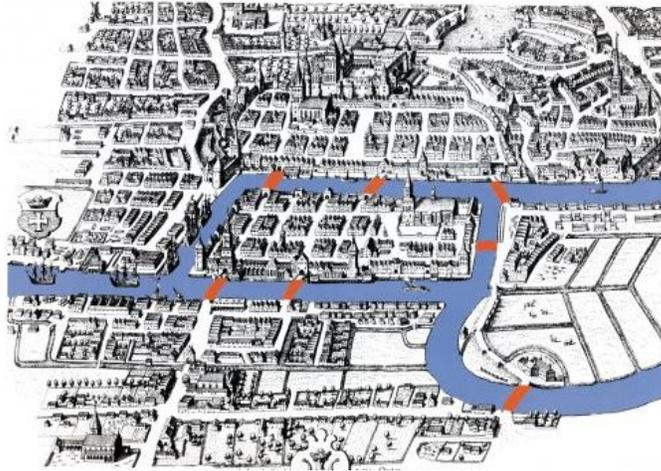


Figura 1.12: I sette ponti di Königsberg.

figure devono essere rigide, gli oggetti di studio della topologia si possono deformare e sono rilevanti le posizioni reciproche tra gli oggetti e non le loro reali dimensioni fisiche. Questo fatto appare evidente nella dimostrazione di Eulero della soluzione al problema dei ponti di Königsberg, che, non a caso, è in genere citata come l'origine della topologia. Si tratta di uno degli aneddoti più famosi della matematica e della vita di Eulero. La città di Königsberg, l'attuale Kaliningrad in Russia è attraversata dal fiume Pregel, noto oggi con il nome di Pregolya. Dividendosi in due bracci, il fiume crea un'isola nel centro della città. Per ovviare a questo problema, gli abitanti avevano costruito sette ponti. Per i cittadini di Königsberg era diventata una sfida scoprire se fosse possibile passeggiare per la città attraversando ciascun ponte una e una sola volta e tornare al punto di partenza. Alla fine del 1735, Eulero dimostrò che quell'impresa era impossibile, presentando un risultato, che è considerato il primo teorema di teoria dei grafi. Nasceva così la topologia.

Prima di vedere più in dettaglio la formula di Eulero in topologia e al fi-

ne di esaminare il teorema di classificazione delle superfici, cominciamo con l'introdurre da un punto di vista intuitivo la nozione fondamentale di *superficie*. Una superficie è un oggetto, che localmente appare come il piano euclideo ed è compatta, cioè è priva di bordo e limitata, oppure ha un bordo. Esempi di superfici prive di bordo sono la sfera, il toro e il doppio toro, mentre il cilindro e il disco unitario sono superfici con bordo. Invece, il piano e il disco aperto unitario ($x^2 + y^2 < 1$), pur comportandosi a livello locale come il piano euclideo, non sono superfici, poiché nel primo caso il piano è non limitato, mentre nel secondo caso il bordo non appartiene al disco.

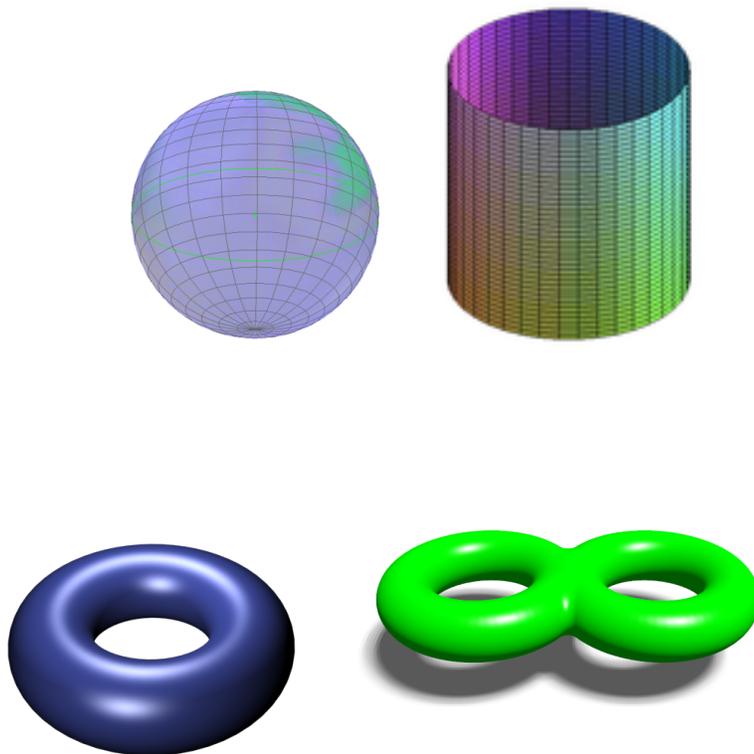


Figura 1.13: Esempi di superfici: la sfera, il cilindro, il toro e il doppiotoro.

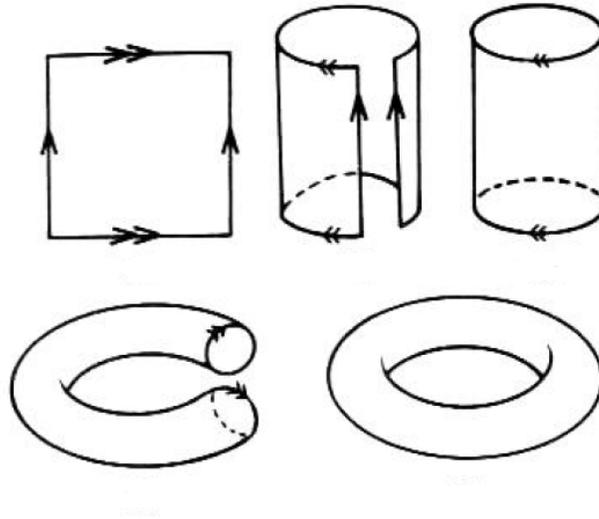


Figura 1.14: Costruzione del toro.

Nel 1882 Felix Klein (1849-1925) ideò un modo ingegnoso di costruire superfici: egli considerò un poligono nel piano, incollando i lati a coppie in maniera opportuna. Dimostrò, inoltre, che ogni superficie può essere ottenuta mediante questa tecnica. Ad esempio, è possibile costruire un toro a partire da un quadrato, operando le identificazioni indicate nella figura 1.14, mentre se si incollano due lati opposti di un quadrato, applicando prima un mezzo giro, si ottiene il famoso nastro (o striscia) di Möbius (si veda figura 1.15). Affinché risultino chiari quali sono i lati del poligono da incollare insieme e con quale orientazione, si è soliti contrassegnarli con frecce. I lati del poligono, che presentano lo stesso numero di frecce, vanno incollati con un mezzo giro se le frecce hanno verso opposto, senza rotazione in caso contrario.

A dispetto della sua apparente semplicità, il nastro di Möbius possiede alcune proprietà interessanti. Tale superficie, infatti, ha un solo bordo e un solo lato. Ciò significa che, se si inizia a pitturare da un lato una striscia di

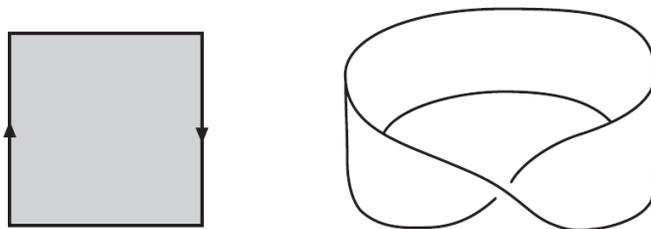


Figura 1.15: Striscia di Möbius.

Möbius, essa risulterà tutta di un unico colore. Oggi, superfici di questo tipo si dicono non orientabili.

La striscia di Möbius ha affascinato, non solo i matematici, ma anche molti artisti e scultori. M. C. Escher (1898-1972) nella sua opera “Striscia di Möbius II” (1963) ha raffigurato delle formiche, che camminano su una striscia di Möbius ed anche il noto simbolo del riciclaggio, ideato da Gary Anderson nel 1970, ha come base tale superficie.

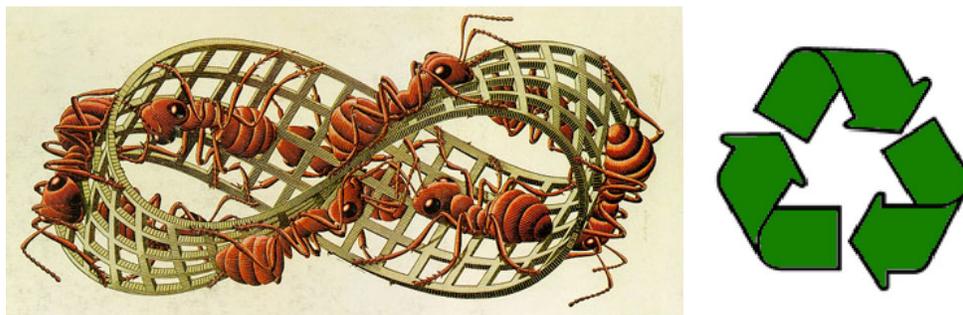


Figura 1.16: “Striscia di Möbius II” di Escher e simbolo del riciclaggio.

Mediante la tecnica di costruzione di Klein, sempre a partire da un quadrato, si ottengono altre due superfici di importanza fondamentale: la bottiglia di Klein e il piano proiettivo. Come suggerisce il nome, quest’ultimo è oggetto di studio della geometria proiettiva e si indica \mathbb{RP}^2 . Anche la bottiglia di

Klein e il piano proiettivo sono superfici non orientabili. Per una definizione rigorosa delle superfici considerate si rimanda al capitolo successivo.

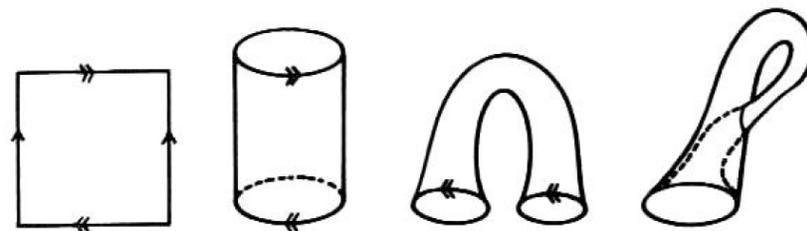


Figura 1.17: Costruzione della bottiglia di Klein.

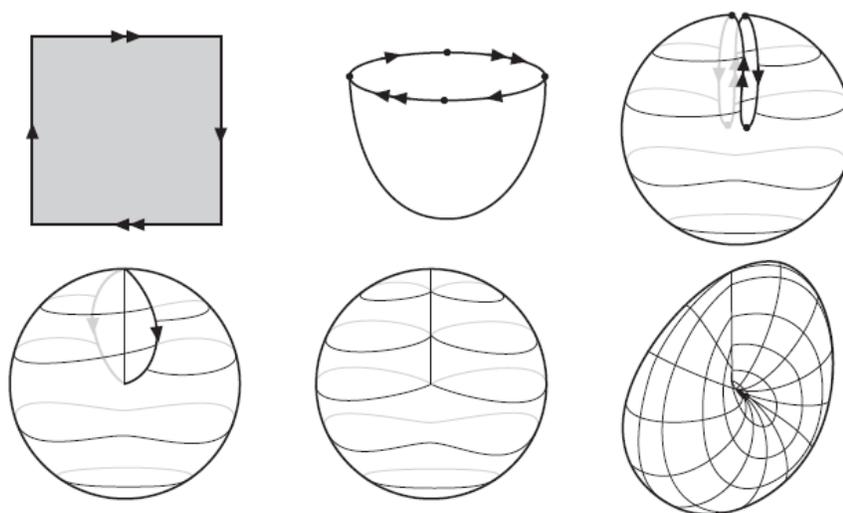


Figura 1.18: Costruzione del piano proiettivo.

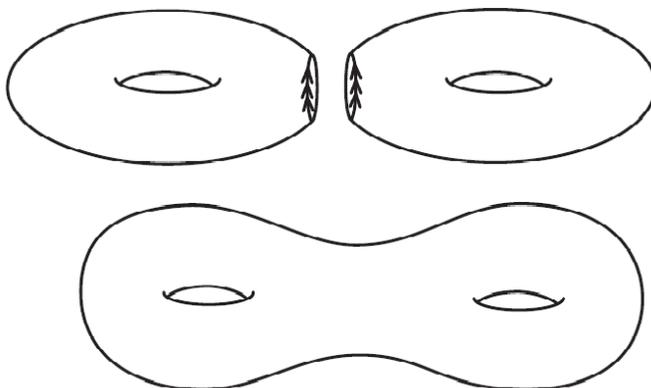


Figura 1.19: Costruzione del doppio toro per somma connessa.

Un altro modo per costruire superfici è costituito dalla cosiddetta *somma connessa*. Se S_1 e S_2 sono due superfici disgiunte, la loro somma connessa $S_1 \# S_2$ si ottiene tagliando via da entrambe un piccolo disco aperto, cioè privo di bordo ed incollando assieme le superfici lungo il bordo dei fori risultanti. Per esempio, il doppio toro è il risultato della somma connessa di due tori, come si può vedere dalla figura 1.19.

È facile osservare che se da un toro si taglia via un disco, si ricava un manico. Pertanto, si dice spesso che la somma connessa di una superficie con un toro è ottenuta attaccando un manico alla superficie. Lo stesso vale se, invece di un manico, si attacca un cilindro; per fare ciò si tagliano via due dischi aperti dalla superficie e si cuce il bordo dei fori così ottenuti con i bordi del cilindro. Se i bordi del cilindro vengono incollati seguendo la direzione delle frecce sui bordi dei fori, questa operazione equivale all'attaccatura di un manico.

Se invece si inverte una delle frecce, questa operazione equivale a fare la somma connessa della superficie con una bottiglia di Klein. Incollando un manico ad una sfera, si ottiene un toro. Una sfera con due manici è un doppio toro e, analogamente, una sfera con g manici è un toro con g buchi.

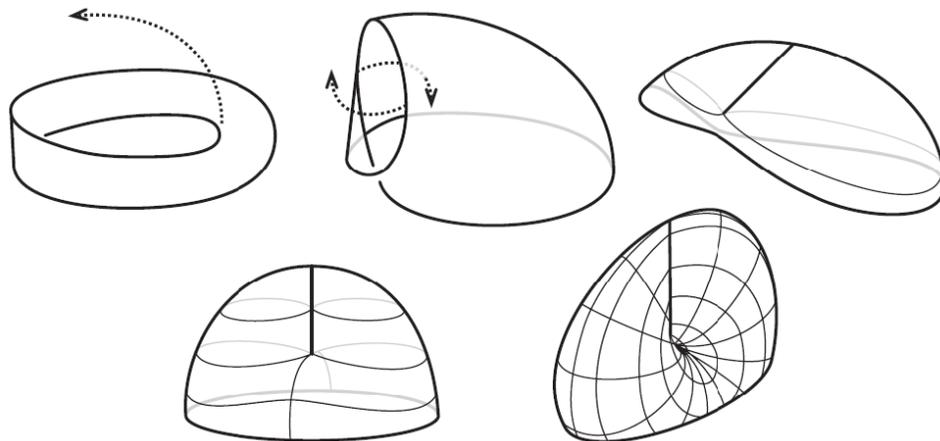


Figura 1.20: Costruzione del cappuccio incrociato a partire dal nastro di Möbius.

Cioè, indicando con S^2 una sfera e con T un toro, vale che la somma connessa

$$S^2 \# \underbrace{T \# T \# \cdots \# T}_g \quad (g \geq 0)$$

equivale ad un toro con g buchi.

Le superfici ottenute con questa tecnica sono orientabili. Se, invece, si vuole costruire una superficie non orientabile, bisogna attaccare ad una superficie una striscia di Möbius. La striscia di Möbius ha una sola curva di contorno, che si avvolge due volte intorno al cilindro girato. Manipolando una striscia di Möbius in modo che il suo bordo appaia come un cerchio regolare, si ottiene il cosiddetto *cappuccio incrociato* (figura 1.20). È facile osservare che un cappuccio incrociato è un piano proiettivo reale da cui è stato tagliato via un disco aperto. Quindi la somma connessa di una superficie con il piano proiettivo reale può essere pensata come la superficie stessa a cui è stata attaccata tramite la somma connessa una striscia di Möbius o, equivalentemente, un cappuccio incrociato.

A questo punto, abbiamo fornito un metodo efficace per costruire famiglie di superfici:

1. $S^2 \# \underbrace{T \# T \# \cdots \# T}_g$ ($g \geq 0$);
2. $S^2 \# \underbrace{\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \cdots \# \mathbb{R}P^2}_c$ ($c \geq 1$).

Possiamo così vedere la formula di Eulero applicata a tali oggetti e il suo impiego nel teorema di classificazione delle superfici. Il teorema di classificazione ci dice che ogni superficie è identificabile ad una ed una sola delle superfici sopra elencate.

1.5 La classificazione delle superfici

Un passo fondamentale in qualsiasi campo matematico è stabilire quali sono le caratteristiche per cui due oggetti possono essere in qualche modo identificati. In topologia, due oggetti sono identificabili se esiste una corrispondenza biunivoca tra i loro punti e se possiamo deformare l'uno nell'altro in maniera continua, cioè se è possibile “comprimere”, “allungare”, “torcere”, “piegare” uno dei due fino a farlo coincidere con l'altro, senza unire punti distinti e senza operare dei tagli. In tal caso, gli oggetti considerati si dicono *omeomorfi* e la funzione che li lega è detta *omeomorfismo*. La relazione di omeomorfismo fu introdotta da Möbius.

Come la geometria si occupa di studiare proprietà, che restano inalterate per movimenti rigidi, così la topologia si interessa agli *invarianti topologici*, ossia a quelle proprietà o entità matematiche che dipendono solo dalla topologia e sono uguali per oggetti tra loro omeomorfi. Esempi di invarianti topologici sono il numero delle componenti, che costituiscono il bordo di una superficie e l'orientabilità. Un altro invariante topologico, forse uno dei più importanti, è la quantità $V - E + F$. Data una superficie S ripartita in V vertici, E

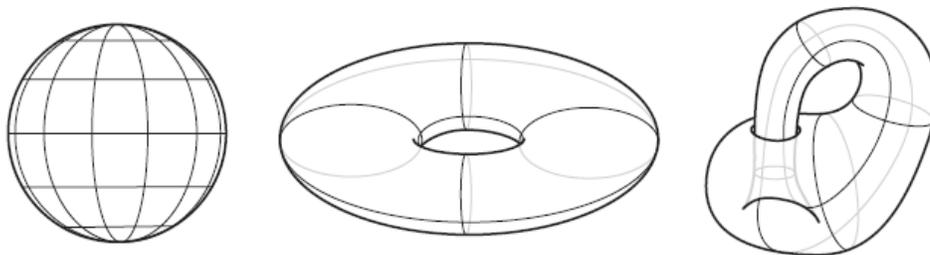


Figura 1.21: Partizione della sfera, del toro e della bottiglia di Klein.

lati ed F facce, si definisce *numero di Eulero* o *caratteristica di Eulero* la quantità $V - E + F$ e si indica $\chi(S)$.

Il numero di Eulero $\chi(S) = V - E + F$ è un invariante topologico per le superfici. Ciò significa che ogni superficie ha la propria caratteristica di Eulero. Per esempio la sfera S^2 in figura 1.21 ha 62 vertici, 132 lati e 72 facce, quindi il numero di Eulero è

$$\chi(S^2) = 62 - 132 + 72 = 2.$$

Tale risultato è vero per qualsiasi partizione della sfera e per ogni oggetto omeomorfo alla sfera.

Il toro T in figura 1.21 ha 8 vertici, 16 lati e 8 facce, così il numero di Eulero risulta essere

$$\chi(T) = 8 - 16 + 8 = 0.$$

Analogamente, la bottiglia di Klein K nella figura 1.21 presenta 8 vertici, 16 lati e 8 facce e dunque

$$\chi(K) = 8 - 16 + 8 = 0.$$

Per quanto concerne il piano proiettivo reale, si ha che $\chi(\mathbb{P}\mathbb{R}^2) = 1$.

È fondamentale nello studio delle superfici analizzare la caratteristica di Eulero della somma connessa con tori o piani proiettivi, cioè nel caso in cui

ad una superficie data vengano incollati un determinato numero di manici o di cappucci incrociati. Si può osservare che ogni volta che si aggiunge un manico ad una sfera, il numero di Eulero diminuisce di 2. Così

$$\chi(Tg) = 2 - 2g,$$

ove Tg è la somma connessa di una sfera con g tori.

Applicando lo stesso ragionamento, si verifica che il numero di Eulero di una sfera con c cappucci incrociati attaccati è

$$\chi(Pc) = 2 - c,$$

dove Pc è la somma connessa di una sfera con c piani proiettivi.

Così ritorna che $\chi(T) = 0$ e $\chi(\mathbb{R}P^2) = 1$. Questo risultato consente di classificare le superfici. Infatti, vale il seguente teorema:

Teorema (Teorema di classificazione delle superfici). *Una superficie orientabile è omeomorfa ad una sfera con g manici, per qualche $g \geq 0$.*

Una superficie non orientabile è omeomorfa ad una sfera con c cappucci incrociati, per qualche $c \geq 0$.

Ciò implica che ogni superficie orientabile è topologicamente equivalente ad un toro con un certo numero di buchi, mentre ogni superficie non orientabile è topologicamente equivalente ad una sfera con uno o più nastri di Möbius attaccati.

Il processo di classificazione iniziò con Riemann (1826-1866) nel 1850 e la dimostrazione completa e rigorosa del teorema venne fornita da Max Dehn (1878-1952) e Poul Heegaard (1871-1948) nel 1907.

Capitolo 2

Varietà e superfici

In questo capitolo vengono presentate le nozioni di varietà e superfici, corredate da numerosi esempi. Inoltre, si prende in esame il concetto di orientabilità di una superficie. Prima di affrontare questi argomenti fondamentali, occorre fornire alcune definizioni preliminari di topologia. Per una trattazione più completa, si rimanda il lettore al testo di C. Kosniowski, “Introduzione alla topologia algebrica”.

Definizione 2.1. Siano X e Y due spazi topologici. Si dice che X e Y sono *omeomorfi* se esistono due funzioni continue $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ che siano l’una inversa dell’altra. In tal caso scriveremo $X \simeq Y$ e diremo che f e g sono *omeomorfismi* fra X e Y .

Definizione 2.2. Uno spazio topologico X è detto di *Hausdorff* (o T_2) se per ogni coppia di punti distinti x, y di X esistono due aperti U_x e U_y contenenti rispettivamente x e y , tali che $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Definizione 2.3. Sia $n \in \mathbb{N}$. Una *varietà topologica* di dimensione n è uno spazio topologico di Hausdorff nel quale ogni punto ha un intorno aperto omeomorfo al disco aperto di dimensione n , vale a dire $\overset{\circ}{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$, ove $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ con $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Poichè $\overset{\circ}{D}^n \simeq \mathbb{R}^n$, ciò equivale a richiedere che ogni punto abbia un intorno omeomorfo a \mathbb{R}^n . Una varietà di dimensione n verrà a volte brevemente chiamata una n -varietà.

Osservazione 1. La richiesta che una varietà topologica sia uno spazio di Hausdorff è importante. Infatti uno spazio topologico ogni cui punto abbia un intorno omeomorfo a \mathbb{R}^n non è necessariamente T_2 . Per esempio si consideri l'insieme

$$X = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 2\}$$

con la topologia \mathcal{U} in cui $U \in \mathcal{U}$ se e solo se $U = \emptyset$, $U = X$ oppure U è un'unione arbitraria di insiemi della forma

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) & \quad -1 \leq \alpha < \beta \leq 2 \\ (\alpha, 0) \cup (\beta, 2] & \quad -1 \leq \alpha < 0, -1 \leq \beta < 2. \end{aligned}$$

Si noti che \mathcal{U} non è la topologia indotta da \mathbb{R} , poiché per $0 \leq \beta < 2$ gli insiemi $(\beta, 2]$ non sono aperti in X . Localmente, lo spazio considerato è omeomorfo a \mathbb{R} , infatti ogni suo punto ha un intorno omeomorfo a $\overset{\circ}{D}^1$. Ciò è ovvio se $x \in X$ e $x \neq 2$, mentre se $x = 2$ basta considerare l'insieme

$$N = (-1/2, 0) \cup (3/2, 2]$$

e l'applicazione $f : N \rightarrow (-1, 1)$ definita da

$$f(y) = \begin{cases} 2y & \text{se } -1/2 < y < 0, \\ 4 - 2y & \text{se } 3/2 < y \leq 2. \end{cases}$$

Si verifica che f è un omeomorfismo tra l'intorno N di x e $\overset{\circ}{D}^1$. Ne consegue che lo spazio X , a livello locale è omeomorfo a \mathbb{R} , ma non è di Hausdorff, in quanto ogni intorno aperto di 2 interseca ogni intorno aperto di 0. Dunque la condizione che una varietà sia di Hausdorff permette di escludere spazi particolari, che non sembrano comportarsi localmente come lo spazio euclideo. In più si vuole rappresentare una n -varietà come sottospazio, che si

comporta localmente come lo spazio euclideo, di un qualche spazio euclideo \mathbb{R}^n . In questo modo la varietà eredita la condizione di Hausdorff di \mathbb{R}^n . Questa intenzione non è sbagliata, poiché esiste un teorema per cui alcune varietà con particolari proprietà, per esempio compatte, sono omeomorfe ad un sottospazio di \mathbb{R}^n .

Esempi:

1. Prima di procedere con l'esempio, è opportuno richiamare la definizione di spazio discreto. Sia X un insieme, l'insieme $\mathcal{S}(X)$ di tutti i sottoinsiemi di X costituisce una topologia, detta *topologia discreta*. Lo spazio X con questa topologia è detto uno *spazio discreto*. \mathbb{R}^0 è costituito da un singolo punto, pertanto ogni spazio discreto è una 0-varietà. Infatti uno spazio discreto è di Hausdorff e per ogni suo punto x si può scegliere $\{x\}$ come intorno di x omeomorfo a \mathbb{R}^0 ;
2. Altri esempi elementari di varietà sono \mathbb{R}^n e $\overset{\circ}{D}^n$. La dimostrazione che tali spazi sono varietà n -dimensionali è banale. Inoltre, ogni aperto di \mathbb{R}^n è una n -varietà: infatti se U è un aperto di \mathbb{R}^n e $x \in U$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x) \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$ e chiaramente $B_\varepsilon(x) \simeq \overset{\circ}{D}^n$. Più in generale, vale il seguente risultato: sia $n \in \mathbb{N}$. Se M^n è una varietà di dimensione n , anche ogni suo aperto è una n -varietà. La dimostrazione è immediata;
3. La circonferenza S^1 è una varietà di dimensione 1. S^1 è uno spazio di Hausdorff, dobbiamo solo verificare che ogni suo punto sia contenuto in un intorno aperto omeomorfo a $\overset{\circ}{D}^1 = (-1, 1)$; a tale scopo rappresentiamo S^1 come l'insieme

$$\{\exp(2\pi it) \mid t \in I\};$$

se $x = \exp(2\pi i\theta) \in S^1$, si ha:

$$\begin{aligned} x \in S^1 \setminus \{-x\} &= S^1 \setminus \{\exp(2\pi i(\theta - 1/2))\} \\ &= \{\exp(2\pi it) \mid \theta - 1/2 < t < \theta + 1/2\} \\ &\simeq (\theta - 1/2, \theta + 1/2) \\ &\simeq (0, 1) \simeq \overset{\circ}{D}^1; \end{aligned}$$

4. Anche le sfere n -dimensionali di raggio unitario

$$S^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$$

sono esempi di varietà n -dimensionali. Tale fatto può essere dimostrato facendo ricorso alle proiezioni stereografiche.

Si consideri l'insieme $S^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0, 1)\}$. Si definisce proiezione stereografica la funzione φ , che ad ogni $x \in S^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\}$ associa il punto determinato in maniera univoca dall'intersezione tra la semiretta uscente da $(0, \dots, 0, 1)$ e passante per x con l'iperpiano $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0\}$.

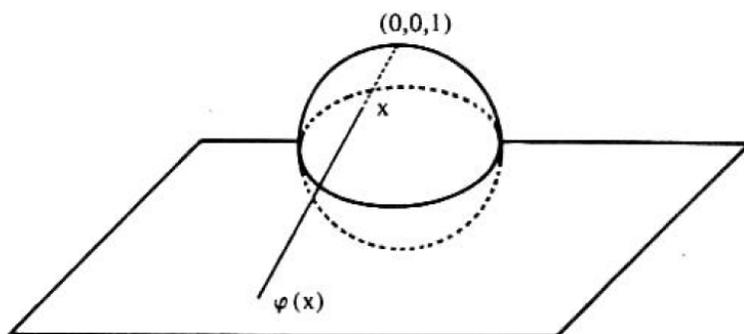


Figura 2.1: Proiezione stereografica.

$$\varphi : S^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0, 1)\} \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$\varphi(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \frac{x_2}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right).$$

È facile verificare che la funzione φ è continua e biiettiva. Possiamo dunque definire $\psi = \varphi^{-1}$.

$\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow S^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0, 1)\}$ è data da

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{1 + \|x\|^2} (2x_1, 2x_2, \dots, 2x_n, \|x\|^2 - 1),$$

con $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Non è difficile vedere che la funzione ψ è continua. Abbiamo quindi dimostrato che ogni punto $x \in S^n$, diverso da $(0, \dots, 0, 1)$ è contenuto nell'intorno aperto $S^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\}$, omeomorfo a \mathbb{R}^n . Inoltre il punto $(0, \dots, 0, 1)$ appartiene all'aperto $S^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0, -1)\}$ che, a sua volta, è omeomorfo a \mathbb{R}^n tramite l'applicazione φ' definita da

$$\varphi'(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, \frac{x_2}{1 + x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 + x_{n+1}} \right).$$

Ne segue che S^n è una n -varietà.

Un'altra maniera di verificare che S^n è una n -varietà consiste nel considerare il punto $(0, 0, \dots, 0, 1)$ di S^n e l'intorno U di $(0, 0, \dots, 0, 1)$ definito da:

$$\{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} > 0\}.$$

Questo intorno U è omeomorfo a $\overset{\circ}{D}^n$ per proiezione ortogonale, cioè tramite la funzione continua $U \longrightarrow \overset{\circ}{D}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ data da $(x_1, \dots, x_{n+1}) \longrightarrow (x_1, \dots, x_n)$. In generale, se $x \in S^n$, possiamo considerare l'intorno aperto U_x di x definito da

$$U_x = \{y \in S^n \mid \|x - y\| < \sqrt{2}\};$$

e proiettarlo ortogonalmente sull'iperpiano di \mathbb{R}^{n+1} passante per l'origine e perpendicolare alla retta per l'origine e per x . In questo modo otteniamo un omeomorfismo fra U_x e $\overset{\circ}{D}^n$ e dunque S^n è una n -varietà;

5. Si consideri l'insieme $\mathbb{RP}^n = \{\{x, -x\} \mid x \in S^n\}$ costituito dalle coppie non ordinate di punti di S^n e dall'applicazione suriettiva $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ definita da $\pi(x) = \{x, -x\}$. L'insieme \mathbb{RP}^n con la topologia quoziente relativa a π è chiamato spazio proiettivo reale di dimensione n . Si dimostra che lo spazio \mathbb{RP}^n è una n -varietà: se U_x è un intorno aperto di $x \in S^n$ di diametro minore di $\sqrt{2}$ ed omeomorfo a $\overset{\circ}{D}^n$, $\pi(U_x)$ è un intorno aperto di $\pi(x) \in \mathbb{RP}^n$ omeomorfo a $\overset{\circ}{D}^n$. Infatti π è un'applicazione continua ed aperta e dunque $\pi|_{U_x}: U_x \rightarrow \pi(U_x)$ è un omeomorfismo. Ne consegue che esiste un omeomorfismo tra $\pi(U_x)$ e $\overset{\circ}{D}^n$.
6. Se M è una m -varietà ed N è una n -varietà, il prodotto topologico $M \times N$ è una varietà di dimensione $m+n$, infatti $\overset{\circ}{D}^m \times \overset{\circ}{D}^n \simeq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{m+n}$ e un prodotto di spazi di Hausdorff è di Hausdorff.

Ci interessano in particolare le varietà compatte e connesse.

Una varietà è compatta, connessa quando è tale come spazio topologico. Richiamiamo brevemente le definizioni di spazio topologico compatto e connesso.

Definizione 2.4. Sia X uno spazio topologico. X si dice *compatto* se ogni ricoprimento aperto di X ammette un sottoricoprimento finito.

Uno spazio topologico X si dice *connesso* se i soli sottoinsiemi di X simultaneamente aperti e chiusi sono \emptyset e X .

Definizione 2.5. Le varietà compatte e connesse di dimensione 2 sono chiamate *superfici*.

Esempi: Alcune delle figure, presentate di seguito, sono già state trattate a livello intuitivo nel capitolo precedente. Ora, invece, si intende definirle in maniera più formale e rigorosa.

1. La sfera S^2 è una superficie;



Figura 2.2: Superficie sferica.

2. Anche il toro è una superficie. Intuitivamente, si può affermare che un toro è una qualunque superficie omeomorfa alla superficie di una ciambella o di un anello. Con maggiore precisione, un toro può essere definito nei modi seguenti:

- (a) ogni spazio omeomorfo al prodotto topologico di due circonferenze, $S^1 \times S^1$;
- (b) ogni spazio topologico omeomorfo al sottoinsieme di \mathbb{R}^3

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1\};$$

- (c) sia X il quadrato unitario

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

nel piano \mathbb{R}^2 con la topologia indotta. In tale spazio topologico si consideri la relazione d'equivalenza \sim così definita

$$\begin{aligned} (x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow & (x, y) = (x', y') \text{ oppure} \\ & \{x, x'\} = \{0, 1\} \text{ e } y = y' \text{ oppure} \\ & \{y, y'\} = \{0, 1\} \text{ e } x = x'. \end{aligned}$$

Lo spazio quoziente X/\sim che ne risulta è omeomorfo al toro.

3. Il doppio toro può essere ottenuto identificando i lati di un ottagono in maniera opportuna (figura 2.3);

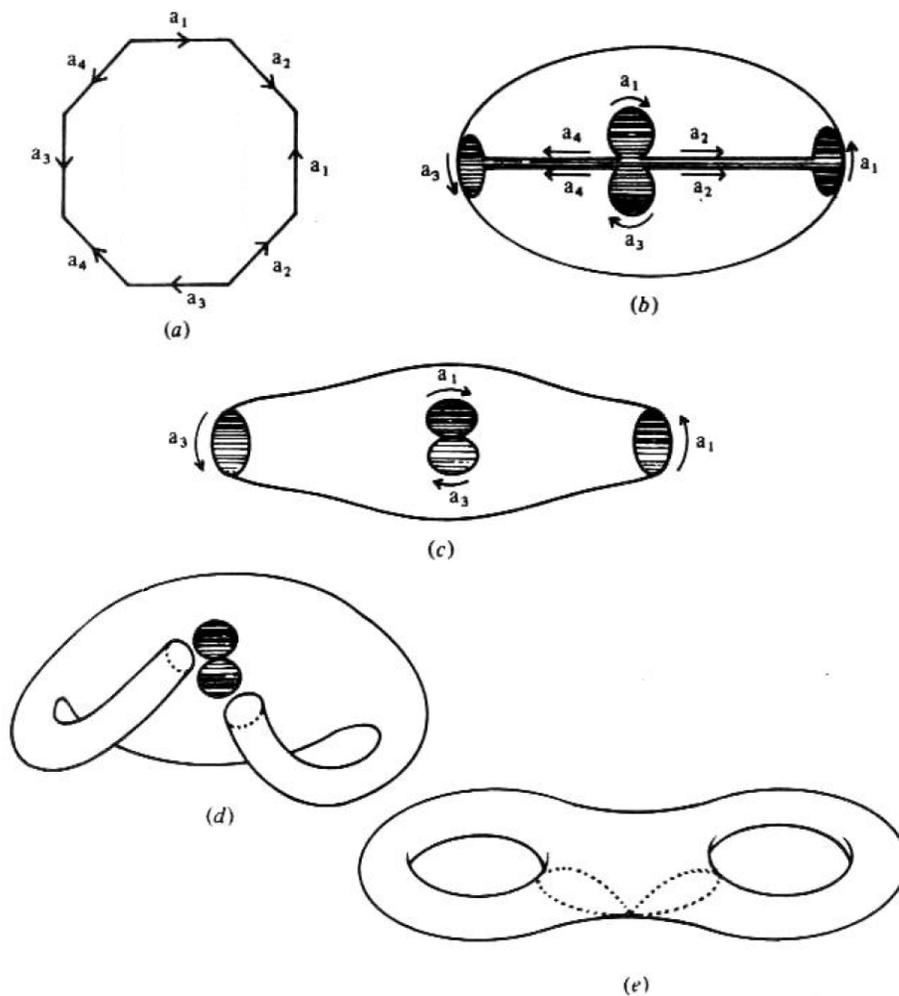


Figura 2.3: Costruzione del doppio toro a partire da un ottagono.

4. Il piano proiettivo e la bottiglia di Klein sono superfici, la cui costruzione richiede l'immersione nello spazio \mathbb{R}^4 (figura 2.4);

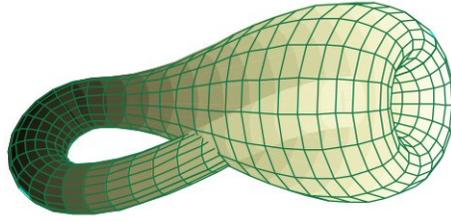


Figura 2.4: Bottiglia di Klein.

5. La striscia o nastro di Möbius è una superficie molto importante. Come già osservato nel primo capitolo, si può costruire una striscia di Möbius, procedendo in maniera analoga a quanto visto per il toro: si considera il quadrato unitario X con l'equivalenza \sim definita da

$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow (x, y) = (x', y') \text{ oppure} \\ \{x, x'\} = \{0, 1\} \text{ e } y = 1 - y'.$$

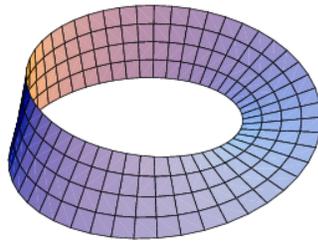


Figura 2.5: Striscia di Möbius.

2.1 Orientabilità

Le varietà connesse di dimensione maggiore di 1 si dividono in due categorie: orientabili e non orientabili. L'orientabilità è una nozione fondamentale della topologia, nonché un invariante topologico. Vediamo ora questo concetto in modo intuitivo nel caso delle superfici. Vi sono vari modi per stabilire un'orientazione nel piano euclideo \mathbb{R}^2 o, più in generale, in una regione del piano. Per esempio, si può ricorrere ad un sistema di assi cartesiani oppure un altro modo è quello di indicare un verso di rotazione nel piano per un punto, determinando quello positivo e negativo. Nel caso di una superficie generica, si può immaginare un bruco che si muove sulla superficie, secondo un verso stabilito lungo un percorso chiuso. Quando il bruco ritorna al punto di partenza, si possono verificare due casi: il primo è che si ritrovi nella stessa posizione sulla superficie, nel secondo caso che si trovi invece dalla parte opposta della superficie. Se per ogni possibile percorso chiuso ci troviamo nel primo caso, la superficie si dice orientabile, altrimenti si dice non orientabile. L'esempio più semplice di superficie non orientabile è la striscia di Möbius. In generale, si può dire che una superficie è orientabile se non contiene alcuna striscia di Möbius e non orientabile se contiene una striscia di Möbius (vedi figura 2.5).

Capitolo 3

Il teorema di classificazione delle superfici

In questo capitolo vengono esaminati il teorema di classificazione delle superfici e la dimostrazione relativa, viene approfondita la nozione di somma connessa, già introdotta in precedenza, e viene presentato il concetto di triangolazione delle superfici, necessario alla dimostrazione del teorema in questione.

3.1 Somma connessa

Nel primo capitolo è stato descritto il procedimento, detto “somma connessa”, che permette di costruire una superficie a partire da due superfici date: si considerano due superfici disgiunte S_1 e S_2 , da entrambe si taglia via un piccolo disco aperto, cioè senza bordo e, infine, si incollano assieme le superfici lungo il bordo dei fori risultanti.

Per una definizione più rigorosa, si osservi che, date due superfici S_1 e S_2 , è sempre possibile scegliere due sottoinsiemi $D_1 \subseteq S_1$ e $D_2 \subseteq S_2$ omeomorfi al disco chiuso unitario D^2 mediante due omeomorfismi $h_1 : D_1 \rightarrow D^2$ e

$h_2 : D_2 \rightarrow D^2$. Infatti, se x è un punto di una superficie, U è un intorno aperto di x omeomorfo a $\overset{\circ}{D}^2$ e $h : U \rightarrow \overset{\circ}{D}^2$ è un omeomorfismo, indicando con $D_{1/2}^2$ il disco chiuso con centro nell'origine e con raggio $1/2$, si ha che $h^{-1}(D_{1/2}^2)$ è un intorno di x omeomorfo a D^2 tramite l'omeomorfismo

$$\begin{aligned} h^{-1}(D_{1/2}^2) &\longrightarrow D^2 \\ y &\longmapsto 2h(y). \end{aligned}$$

Allora ha senso definire la somma connessa $S_1 \# S_2$ nel modo seguente:

$$S_1 \# S_2 = \frac{(S_1 \setminus \overset{\circ}{D}_1) \cup (S_2 \setminus \overset{\circ}{D}_2)}{\sim}$$

dove \sim è una relazione di equivalenza che risulta non banale solo su

$$\partial(S_1 \setminus \overset{\circ}{D}_1) \cup \partial(S_2 \setminus \overset{\circ}{D}_2) = \partial D_1 \cup \partial D_2,$$

dove è definita da $x \sim h_2^{-1}h_1(x)$ per $x \in D_1$. Si può dimostrare che la definizione di somma connessa è indipendente dalla scelta dei dischi D_1 e D_2 e degli omeomorfismi h_1 e h_2 . Inoltre, si può verificare facilmente che $S_1 \# S_2$ è una superficie: in tale verifica i soli punti per i quali è necessario un controllo sono quelli di ∂D_1 e ∂D_2 .

Esempi:

1. Se S_2 è una sfera, allora $S_1 \# S_2$ è omeomorfa a S_1 ;
2. Il doppio toro è ottenuto dalla somma connessa di due tori (figura 1.19);
3. La bottiglia di Klein (vedi figura 2.4) è la somma connessa di due piani proiettivi o, equivalentemente, si può affermare che la bottiglia di Klein si ottiene incollando due strisce di Möbius lungo il loro bordo. Infatti un nastro di Möbius non è altro che un piano proiettivo reale, da cui è stato tagliato via un disco aperto.

È facile verificare che l'insieme delle classi di superfici omeomorfe è chiuso rispetto all'operazione di somma connessa. Inoltre tale operazione gode delle proprietà commutativa e associativa e il primo esempio mostra che la sfera è l'elemento neutro rispetto a tale operazione. L'insieme considerato con l'operazione di somma connessa è un semigrupp; non è un gruppo in quanto non è detto che un elemento ammetta un inverso.

Osservazione 2. Due superfici sono orientabili se e solo se lo è la loro somma connessa.

Prima di procedere con la dimostrazione del teorema di classificazione delle superfici è necessario illustrare la cosiddetta *forma canonica* di una somma connessa di tori o di piani proiettivi. È stato osservato in precedenza che un toro può essere costruito a partire da un quadrato, incollando assieme i lati opposti. Anche la sfera S^2 ed il piano proiettivo reale $\mathbb{R}P^2$ possono essere rappresentati come spazi quoziente di un poligono di due lati con le identificazioni mostrate nella figura 3.1.

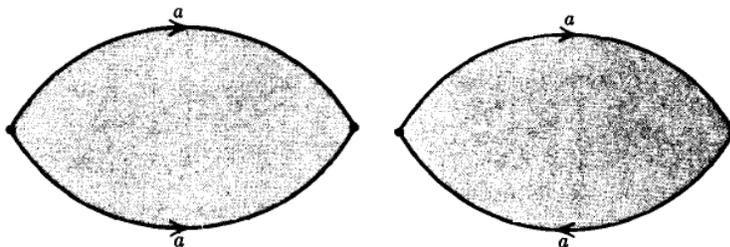


Figura 3.1: Costruzione della sfera e del piano proiettivo.

Ora si intende fornire una descrizione analoga per la somma connessa di due tori. Innanzitutto si considerano due tori T_1 e T_2 , rappresentati come quadrati con i lati opposti identificati (figura 3.2(a)). È importante osservare che tutti i vertici di ambedue i quadrati corrispondono ad un singolo punto sui tori. Si procede poi tagliando via da ciascun toro un disco aperto. Siccome la

somma connessa non dipende dal punto scelto, questa operazione può essere eseguita in un punto qualunque delle superfici considerate, ma è conveniente eliminare le regioni ombreggiate nella figura 3.2(a). Si formano così due fori, i cui bordi sono indicati con le lettere c_1 e c_2 . I complementari dei dischi tolti dai tori possono essere rappresentati con i pentagoni illustrati nella figura 3.2(b). Ora, si incollano i lati c_1 e c_2 , ottenendo l'ottagono con i lati identificati a coppie come in figura 3.2(c). Tale ottagono è detto la *forma canonica* della somma connessa di due tori. Si noti che, anche in questo caso, tutti i vertici dell'ottagono corrispondono ad un solo punto sulla superficie $T_1 \# T_2$. Per induzione si può dimostrare che la somma connessa di n tori è omeomorfa allo spazio quoziente di un poligono con $4n$ lati, identificati a coppie secondo lo schema seguente:

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1},$$

in modo che tutti i vertici corrispondono ad un punto sulla superficie. Quando ciò accade, il poligono con $4n$ lati si dice la “forma canonica della somma connessa”.

La notazione utilizzata è semplice e molto utile: si comincia da un lato qualsiasi del poligono e lo si indica con una lettera, ad esempio a_1 . Si procede poi in verso orario o antiorario lungo il bordo del poligono, continuando a nominare i lati con delle lettere. Le coppie di lati da identificarsi vengono indicate con la medesima lettera, elevata all'esponente $+1$ se le frecce sono orientate nella stessa direzione in cui si sta percorrendo il bordo del poligono, -1 altrimenti. Analogamente a quanto visto per la somma connessa di due tori, si ha che la somma connessa di due piani proiettivi è un quadrilatero (figura 3.3). Mediante induzione è possibile dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, la somma connessa di n piani proiettivi è lo spazio quoziente di un poligono con $2n$ lati, identificati a coppie secondo lo schema seguente:

$$a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_n a_n.$$

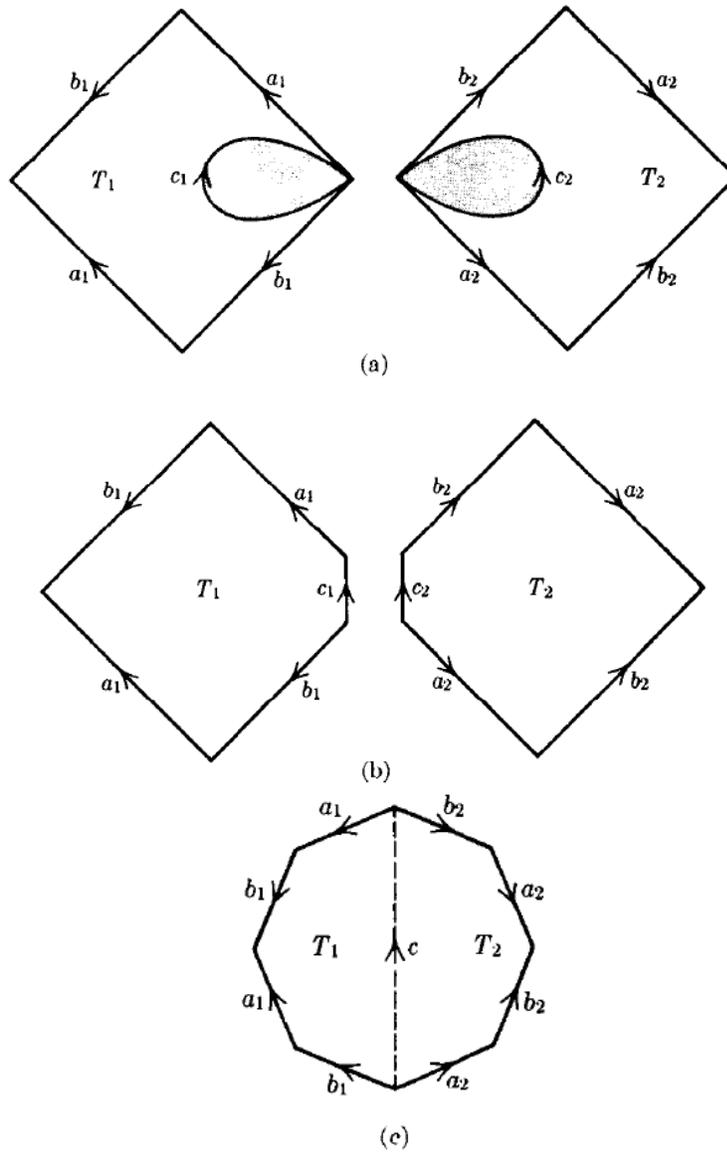


Figura 3.2: Somma connessa di due tori, rappresentata mediante poligoni con i lati identificati a coppie.

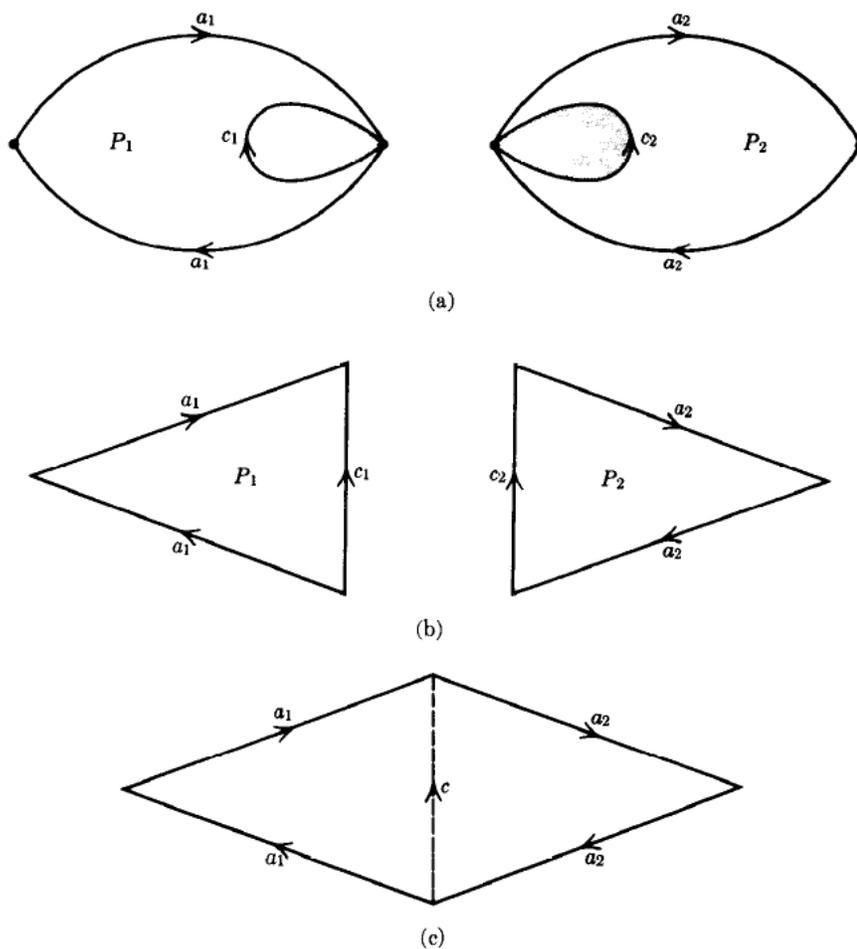


Figura 3.3: Somma connessa di due piani proiettivi, rappresentata mediante poligoni con i lati identificati a coppie.

Gli esempi considerati esauriscono le superfici menzionate nel teorema di classificazione delle superfici e possono essere così riassunti nella notazione che abbiamo introdotto:

1. la sfera: aa^{-1} ;

2. la somma connessa di n tori: $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$;
3. la somma connessa di n piani proiettivi: $a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_n a_n$.

3.2 Triangolazione di superfici

Definizione 3.1. Una *triangolazione* di una superficie S è una famiglia $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ di sottoinsiemi chiusi tali che:

- $S = \bigcup_{i=1}^n T_i$;
- esiste una famiglia di omeomorfismi $\phi_i : T'_i \rightarrow T_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, dove T'_i è un triangolo nel piano \mathbb{R}^2 ;
- i triangoli T_i o sono a due a due disgiunti o hanno un solo vertice in comune o hanno un lato in comune.

Osservazione 3. Ogni superficie ammette una triangolazione.

La dimostrazione rigorosa di tale risultato fu fornita per la prima volta da T. Radò nel 1925 e richiede l'utilizzo del teorema della curva di Jordan e pertanto la ometteremo.

Osservazione 4. Si può dimostrare che ogni triangolazione di una superficie soddisfa le proprietà seguenti:

1. ogni lato è comune ad esattamente due triangoli;
2. sia v un vertice della triangolazione. Allora possiamo ordinare l'insieme dei triangoli, che hanno v come vertice in ordine ciclico, cioè $T_0, T_1, T_2, \dots, T_{n-1}, T_n = T_0$ e in modo tale che T_i e T_{i+1} abbiano un lato in comune per $0 \leq i \leq n-1$.

3.3 Il teorema di classificazione delle superfici

È ora possibile enunciare e dimostrare il teorema di classificazione delle superfici.

Teorema 3.3.1 (Teorema di classificazione delle superfici). *Ogni superficie S è omeomorfa ad una ed una sola delle superfici seguenti:*

$$S^2 \# \underbrace{T \# T \# \cdots \# T}_m \quad (m \geq 0),$$

$$S^2 \# \underbrace{\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \cdots \# \mathbb{R}P^2}_n \quad (n \geq 1).$$

Ciò significa che ogni superficie è omeomorfa o ad una sfera o ad una somma connessa di tori o ad una somma connessa di piani proiettivi.

La dimostrazione del teorema è costituita da due parti: nella prima parte si prova che ogni superficie è omeomorfa ad almeno una delle superfici sopra elencate, mentre nella seconda parte si dimostra che tali superfici sono a due a due non omeomorfe.

Dimostrazione. Si consideri una superficie S . Per la prima parte della dimostrazione occorre provare che S è omeomorfa ad un poligono del piano \mathbb{R}^2 con i lati identificati a coppie.

Passo 1:

Per l'osservazione 3, S ammette una triangolazione, che si può supporre costituita di n elementi. È possibile ordinare i triangoli T_1, T_2, \dots, T_n della triangolazione in modo che ogni T_i abbia un lato in comune con almeno uno dei triangoli T_1, \dots, T_{i-1} , per $2 \leq i \leq n$. Per provare tale asserzione si indica

uno qualsiasi dei triangoli con T_1 e si sceglie poi T_2 tra i triangoli, che hanno un lato in comune con T_1 . Si prosegue scegliendo come T_3 un triangolo, che abbia un lato in comune con T_1 o con T_2 e, continuando così, si ottiene l'ordine desiderato. Questo procedimento è possibile per la proprietà 1 delle triangolazioni, secondo cui ogni lato è comune ad esattamente due triangoli. Inoltre, si ottiene necessariamente un unico insieme di elementi ordinati $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$. Se così non fosse si avrebbero due insiemi $\{T_1, T_2, \dots, T_k\}$, $\{T_{k+1}, T_{k+2}, \dots, T_n\}$ tali che nessun triangolo del primo insieme ha un vertice o un lato in comune con un triangolo del secondo insieme. Ma ciò è assurdo: S non può essere unione di chiusi disgiunti, in quanto connesso.

Ora, si ricordi che per definizione di triangolazione, $\forall T_i$ esiste un triangolo T'_i nel piano euclideo \mathbb{R}^2 e un omeomorfismo $\varphi_i : T'_i \rightarrow T_i$. Si può assumere che $T'_i \cap T'_j = \emptyset$, $\forall i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$. Infatti, se così non fosse, è possibile traslarli. Sia

$$T' = \bigcup_{i=1}^n T'_i,$$

allora T' è un sottoinsieme compatto di \mathbb{R}^3 .

Si definisce una funzione $\varphi : T' \rightarrow S$, $\varphi|_{T'_i} = \varphi_i$. Ne consegue che φ è suriettiva e continua. Si vuole costruire il poligono come spazio quoziente di T' . Siano e_i , $2 \leq i \leq n$ i lati comuni dei triangoli. Si ha che e_i è il lato di un triangolo T_i e di un altro triangolo T_j , per $1 \leq j < i$. Così, $\varphi^{-1}(e_i)$ è dato dall'unione di un lato del triangolo T'_i con un lato di T'_j . Si identificano tali lati e si procede in modo analogo per ogni lato e_2, e_3, \dots, e_n . Sia D lo spazio quoziente, ottenuto da T' con la relazione d'equivalenza indicata. È chiaro che S è ottenuta da D , identificando i lati del bordo di D a coppie.

Passo 2: Eliminazione delle coppie adiacenti del primo tipo.

Una coppia si dice del *primo tipo* se i lati che la compongono compaiono

con l'orientazione opposta, del *secondo tipo* altrimenti. Se si considera un poligono con almeno quattro lati, è possibile eliminare le coppie adiacenti del primo tipo, eseguendo le operazioni mostrate in figura 3.4. Si applica ripetutamente tale procedimento al poligono D fino ad eliminare tutte le coppie del primo tipo o finché non restano due soli lati. In quest'ultimo caso il poligono si può presentare in due modi: o è del tipo aa^{-1} e quindi è una sfera o è del tipo aa e quindi è un piano proiettivo reale e la dimostrazione è conclusa. In caso contrario si procede con il passo successivo.

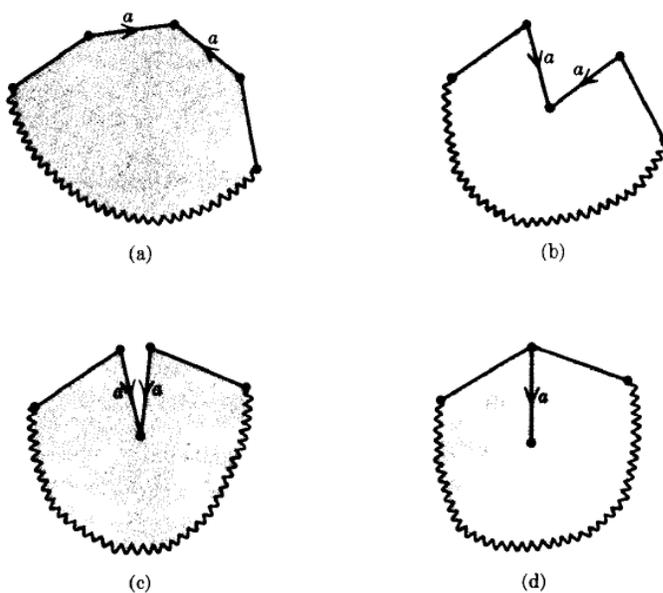


Figura 3.4: Eliminazione di una coppia di lati adiacenti del primo tipo.

Passo 3: Trasformazione del poligono, ottenuto in seguito ai passi 1 e 2, in un poligono in cui tutti i vertici sono identificati con un singolo vertice.

Si consideri il poligono risultante dai passi precedenti. Due vertici di tale poligono si dicono *equivalenti* se e solo se si identificano tramite la relazione

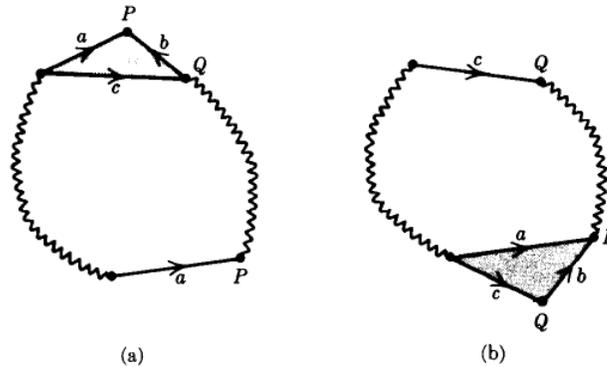


Figura 3.5: Riduzione ad una sola classe di equivalenza di vertici.

di equivalenza descritta al Passo 1. In un poligono vi possono essere più classi d'equivalenza di vertici, cioè si può verificare che i vertici si identifichino tra loro in gruppi di uno, due, tre, ecc. . . . In questa fase della dimostrazione, si vuole ridurre il numero delle classi di equivalenza ad una sola. Si supponga che vi siano almeno due classi di equivalenza di vertici. Allora, il poligono deve avere una coppia di vertici consecutivi, che non sono equivalenti. Ciò si verifica in conseguenza al passo 2. Siano P e Q tali vertici. La figura 3.5 mostra come procedere. Si taglia il poligono lungo la linea c , che va da Q all'altro vertice del lato a , distinto da P . Poi si incollano insieme i due lati indicati con a . Ne risulta un poligono con un vertice in meno nella classe di equivalenza di P e un vertice in più nella classe di equivalenza di Q . Se possibile, si continua alternando i passi 2 e 3 fino a quando la classe di P non sia stata completamente eliminata. Qualora rimanessero più di una classe di equivalenza di vertici, si ripete il procedimento fino a ridurre tali classi ad una sola.

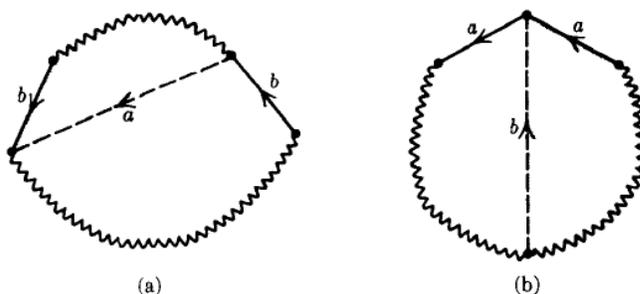


Figura 3.6: Passo 4 della dimostrazione.

Passo 4: Rendere adiacenti le coppie del secondo tipo.

Si supponga che il poligono abbia una coppia di lati del secondo tipo non adiacenti (figura 3.6(a)). Allora è sufficiente tagliare lungo la linea a e incolare assieme i lati indicati con b . A questo punto, i lati del secondo tipo sono adiacenti (figura 3.6(b)). Si continua in questo modo fino a quando tutte le coppie del secondo tipo non risultano adiacenti. Se non vi sono coppie del primo tipo, la dimostrazione è conclusa, in quanto lo schema dei lati del poligono risulta essere $a_1 a_1 a_2 a_2 \cdots a_n a_n$. Dunque S è la somma connessa di n piani proiettivi. Al contrario, si supponga che vi sia almeno una coppia di lati del primo tipo, che vengono indicati con la lettera c . Allora si può affermare che esiste almeno un'altra coppia del primo tipo e le due coppie sono separate l'una dall'altra, cioè i lati delle coppie si alternano lungo il bordo del poligono nel modo seguente: $c \cdots d \cdots c^{-1} \cdots d^{-1} \cdots$. Per provare tale affermazione, supponiamo per assurdo che i lati c non siano separati da nessuna altra coppia del primo tipo. Allora il poligono appare come nella figura 3.7. Le lettere A e B , che compaiono, designano una sequenza di lati. Ogni lato di A va identificato con un lato di A e lo stesso avviene per B . Nessun lato in A può essere identificato con un qualche lato di B . Ma ciò è

in contraddizione con quanto visto al passo 3, poiché i vertici iniziali e finali di ogni lato c non si identificherebbero.

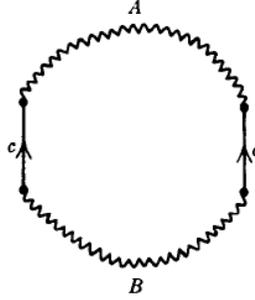


Figura 3.7: Coppia di lati del primo tipo.

Passo 5: Trasformare il poligono in modo che le coppie di lati del primo tipo del passo 4 siano consecutive.

Dal passo 4, le coppie in questione si presentano come in figura 3.8. Per renderle consecutive si taglia lungo c e si incollano i lati b , ottenendo il risultato mostrato in figura 3.8(b). Si prosegue tagliando lungo d e si incollano i lati a per ottenere la figura 3.8(c), come si desiderava. Si itera il procedimento, fino a quando le coppie del primo tipo non siano in gruppi adiacenti di quattro ($cdc^{-1}d^{-1}$).

Se non ci sono coppie del secondo tipo, la dimostrazione è conclusa, poiché si ha lo schema

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$$

che equivale alla somma connessa di n tori. □

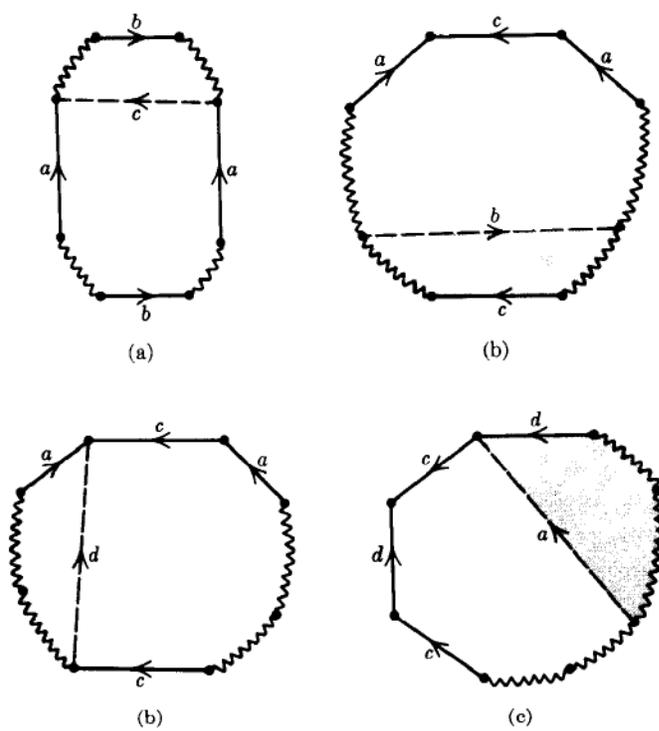


Figura 3.8: Passo 5 della dimostrazione.

Resta il caso in cui nel poligono compaiono sia coppie del primo che del secondo tipo. Tale caso viene risolto dal seguente lemma.

Lemma 3.3.2. *La somma connessa di un toro e di un piano proiettivo è omeomorfa alla somma connessa di tre piani proiettivi.*

Dimostrazione. Come è stato osservato in precedenza, la somma connessa di due piani proiettivi è omeomorfa ad una bottiglia di Klein. Pertanto, bisogna dimostrare che la somma connessa di un toro e di un piano proiettivo è omeomorfa alla somma connessa di un piano proiettivo e di una bottiglia di Klein. Consideriamo le superfici ottenute dalle somme connesse di una striscia di Möbius rispettivamente con un toro e con una bottiglia di Klein e verifichiamo che tali superfici sono omeomorfe. (Ricordiamo che un piano proiettivo non è altro che un nastro di Möbius con un disco incollato) Infatti se mostriamo che la somma connessa di una striscia di Möbius con un toro (vedi figura 3.10) e la somma connessa di una striscia di Möbius con una bottiglia di Klein (vedi figura 3.11) sono omeomorfe, allora abbiamo che sono omeomorfe anche le superfici, che si ottengono incollando un disco a ciascuna delle superfici precedenti, cioè otteniamo ciò che vogliamo dimostrare.

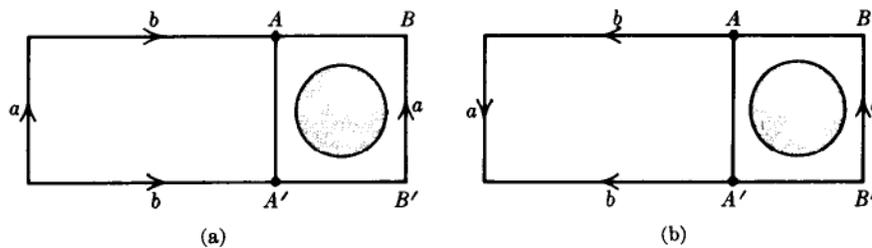


Figura 3.9: Rappresentazione del toro e della bottiglia di Klein con un foro.

Per maggiore semplicità, è utile presentare una costruzione alternativa della

somma connessa di una superficie con un toro o con una bottiglia di Klein. Consideriamo un toro e una bottiglia di Klein come rettangoli con le identificazioni illustrate nella figura 3.9. Per eseguire la somma connessa si taglia via un disco dai rettangoli del toro, della bottiglia di Klein e dalla superficie S e si incollano i bordi dei fori del toro o della bottiglia di Klein con i bordi del foro della superficie. Questa operazione viene compiuta in due fasi: prima vengono incollati alla superficie la parte del toro o della bottiglia di Klein, che corrisponde all'immagine del rettangolo $ABB'A'$ (vedi figura 3.9) rispetto all'identificazione e poi si incolla il resto del toro o della bottiglia di Klein. Nella prima fase si ottiene la somma connessa della superficie S con un tubo aperto o cilindro. Dal momento che un tubo aperto o cilindro è omeomorfo ad una sfera con due fori, lo spazio che si ottiene dalla prima fase è omeomorfo alla superficie originale S con due fori. Nella seconda fase si uniscono questi fori con un cilindro. Se il cilindro viene attaccato seguendo la direzione delle frecce sui cerchi, questa operazione equivale ad attaccare un toro; se invece si inverte una delle frecce, questa operazione equivale a fare la somma connessa della superficie con una bottiglia di Klein.

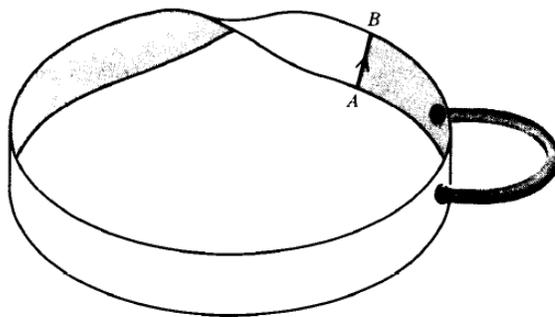


Figura 3.10: Somma connessa di un nastro di Möbius e di un toro.

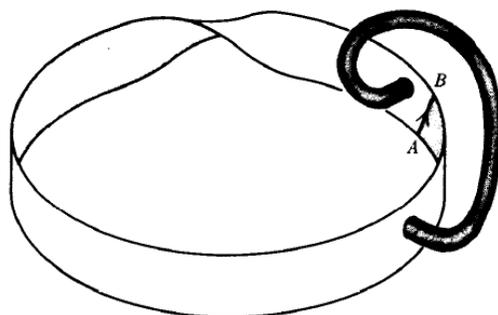


Figura 3.11: Somma connessa di un nastro di Möbius con una bottiglia di Klein.

Si procede ora, verificando che le somme connesse di un nastro di Möbius rispettivamente con un toro e con una bottiglia di Klein sono omeomorfe. Si immagini di tagliare tali superfici lungo la linea AB (vedi figure 3.10 e 3.11). In entrambi i casi si ottiene un rettangolo con un manico attaccato, cioè si ha la somma connessa di un rettangolo con un toro. Ne consegue che le superfici considerate sono omeomorfe. \square

Questo risultato conclude la prima parte della dimostrazione. Infatti, supponiamo che, al termine del passo 5, il poligono abbia m coppie ($m > 0$) del secondo tipo con i lati adiacenti e consecutive tra loro e n quadruple ($n > 0$) di lati, costituite da due coppie del primo tipo alternate. La superficie considerata è dunque la somma connessa di m piani proiettivi e di n tori. Applicando il lemma precedente si ottiene che la superficie è omeomorfa alla somma connessa di $m + 2n$ piani proiettivi.

3.4 La caratteristica di Eulero di una superficie

Si è così conclusa la prima parte della dimostrazione del teorema di classificazione delle superfici. Resta da provare che le superfici menzionate nel teorema non sono tra loro omeomorfe. Infatti, potrebbe accadere che esistano due interi m e n , $m \neq n$, tali che la somma connessa di m tori sia omeomorfa alla somma connessa di n piani proiettivi. Grazie alla *caratteristica di Eulero* si dimostra che questo caso non si può verificare.

Definizione 3.2. Siano M una superficie e $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ una sua triangolazione. Se si indica con

v = numero dei vertici di M ,

e = numero di lati di M ,

f = numero di triangoli.

Allora

$$\chi(M) = v - e + f$$

è detta *caratteristica di Eulero* di M .

Proposizione 3.4.1. Siano S_1 e S_2 due superfici. La caratteristica di Eulero di S_1 e S_2 e la loro somma connessa, $S_1 \# S_2$ sono legate dalla formula

$$\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2.$$

A partire dalla caratteristica di Eulero della sfera, del toro e del piano proiettivo, si può applicare induttivamente la proposizione precedente per calcolare i valori delle caratteristiche di Eulero delle varie superfici.

I risultati ottenuti vengono mostrati nella tabella seguente:

<i>Superfici</i>	<i>Caratteristica di Eulero</i>
Sfera	2
Somma connessa di n tori	$2 - 2n$
Somma connessa di n piani proiettivi	$2 - n$
Somma connessa di un piano proiettivo ed n tori	$1 - 2n$
Somma connessa di una bottiglia di Klein e di n tori	$-2n$

Si noti che la caratteristica di Eulero di una superficie orientabile è sempre pari, mentre può essere sia pari che dispari nel caso di una superficie non orientabile.

Ricordando che la caratteristica di Eulero è un invariante topologico e il teorema di classificazione delle superfici, si ha il risultato seguente:

Teorema 3.4.2. *Siano S_1 e S_2 due superfici. Allora S_1 e S_2 sono omeomorfe se e solo se sono entrambe orientabili o entrambe non orientabili e hanno la stessa caratteristica di Eulero.*

Questo teorema è molto importante e consente di completare la dimostrazione del teorema di classificazione delle superfici, fornendo la certezza che le superfici menzionate nel teorema di classificazione delle superfici non sono tra loro omeomorfe. In tale modo una superficie resta determinata dall'orientabilità e dalla caratteristica di Eulero.

Bibliografia

- [1] David S. Richeson, *Euler's gem. The polyhedron formula and the birth of topology*. Princeton University Press, 2008.
- [2] Marcus du Sautoy, *L'enigma dei numeri primi*. Mondolibri S.p.a, 2004.
- [3] Carl B. Boyer, *Storia della matematica*. Mondadori, 1980.
- [4] Paolo Rossi, *La nascita della scienza moderna in Europa*. Laterza, 2009.
- [5] A. P. Youschkevitch, *Euler, Leonhard* in *Dictionary of scientific biography*, a cura di C. C. Gillispie. Charles Scribner's Sons, 1971.
- [6] C. B. Boyer e U. Merzbach, *A history of mathematics*. John Wiley & Sons, 1991.
- [7] W. S. Massey, *Algebraic Topology: An introduction*. Springer-Vrelag, 1967.
- [8] Czes Kosniowski, *Introduzione alla topologia algebrica*. Zanichelli, 2010.
- [9] E.Sernesi, *Geometria 1*. Bollati Boringhieri, 1968.
- [10] E.Sernesi, *Geometria 2*. Bollati Boringhieri, 1994.
- [11] Klaus Jänich, *Topologia*. Zanichelli, 1999.
- [12] <http://it.wikipedia.org/wiki/Portale:Matematica>.

Ringraziamenti

In primo luogo desidero ringraziare la professoressa Rita Fioresi, che mi ha permesso di eseguire questo elaborato e mi ha seguito durante tutto il corso di redazione della tesi con estrema attenzione e disponibilità.

Un ringraziamento doveroso va poi a Davide Gaddoni, che mi ha aiutato a reperire le immagini e a Manu per la consulenza tecnica di latex: entrambi mi hanno dedicato parte del loro prezioso tempo libero.

I ringraziamenti più sentiti sono, ovviamente, per coloro ai quali questa tesi è dedicata: i miei genitori e i miei fratelli. Senza di loro non sarei mai arrivata a questo importante traguardo. Mio padre e mia madre mi hanno sostenuto in tutti questi anni di studio, non solo economicamente, ma anche e soprattutto con il loro affetto: sono stati capaci di starmi accanto, rincuorandomi negli inevitabili momenti di fatica e di stanchezza, mi hanno incoraggiato nei momenti di delusione e hanno condiviso con me le piccole e grandi soddisfazioni di ogni giorno. Lo stesso vale per Andrea ed Anna, che hanno saputo sostenermi e consigliarmi non meno dei nostri genitori. Inoltre, voglio ringraziare tutta la mia famiglia (anche Barbara e Giovanni) per lo splendido esempio di impegno, generosità e di vita donata, che danno. Voglio anche ringraziare tutti i miei nipoti, perché con la gioia e la simpatia, che li contraddistinguono, con il loro affetto, la loro voglia di giocare e anche di fare arrabbiare sono sempre riusciti a farmi divertire e a rallegrarmi, anche quando ero più stanca o demoralizzata. Desidero ringraziare anche

Irene, che, da “sorella acquisita”, in questi anni ha imparato a conoscermi e a sopportarmi. Insieme, oltre alla vita di tutti i giorni, abbiamo condiviso notti in bianco per lo studio, l’ansia (in genere la mia!) prima degli esami e abbiamo festeggiato per i traguardi raggiunti.

Tra le persone conosciute in facoltà, vorrei ringraziare Lucia, con la quale ho preparato gli esami dell’ultimo anno. È stato un aiuto prezioso: vivere le fatiche e le preoccupazioni degli ultimi esami con un’amica simpatica e sincera, mi ha permesso di concludere il mio percorso di studi con maggiore serenità.

Inoltre vorrei ringraziare tutti gli amici di Bologna, che mi stanno accanto e mi sopportano, da molto tempo prima dell’università. Con loro abbiamo passato momenti felici, abbiamo condiviso le fatiche dello studio e non solo, a volte abbiamo anche litigato. Grazie mille ragazzi per tutto! Non ci sono parole per descrivere quanto significiate per me.

Vorrei ringraziare anche gli amici dell’altra mia famiglia: Nomadelfia, che mi hanno sempre fatto sentire a casa.