

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI  
BOLOGNA

---

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
Corso di Laurea Magistrale in Matematica (Curriculum applicativo)

## Domini Isospettrali

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:  
Chiar.mo Prof.  
ALBERTO  
PARMEGGIANI

Presentata da:  
ANTONIA  
PIETROMARTIRE

Sessione II  
Anno Accademico 2011/2012



*Figlio mio, vivi in modo da non doverti vergognare di te stesso, dà la tua parola in modo che ciascuno debba dire di te che ci si può fidare; e non dimenticare che dare gioia ci dà anche gioia. Impara a tempo che la fame dà sapore ai cibi, e rifuggi la comodità perché rende insipida la vita. Un giorno dovrai fare qualcosa di grande: a tale scopo devi diventare tu stesso qualcosa di grande.*

F. Nietzsche, Frammenti postumi.

A mio nipote Filippo . . .



# Introduzione

Siano  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  due superfici di Riemann compatte, con o senza bordo e sia  $\Delta_{\Omega_i} = \Delta$ ,  $i = 1, 2$  l'operatore di Laplace sulle due superfici, con condizioni di Dirichlet nel caso di bordo non vuoto. Indichiamo con  $\text{Spec}(-\Delta_{\Omega_i})$  lo spettro degli autovalori, ripetuti secondo molteplicità, del laplaciano su  $\Omega_i$ . Allora le due superfici si diranno *isospettrali* se  $\text{Spec}(-\Delta_{\Omega_1}) = \text{Spec}(-\Delta_{\Omega_2})$ .

È interessante studiare gli invarianti legati a queste superfici, in particolare ci si chiede se due superfici isospettrali siano anche isometriche. Si tratta di un problema non banale proposto per la prima volta dal matematico polacco Mark Kac, nell'articolo *Can one hear the shape of a drum?* ([12]): si può ascoltare la forma di un tamburo? Come sappiamo il suono prodotto da un tamburo è governato dall'equazione delle onde con condizioni al bordo nulle di cui è nota la soluzione, una volta noto lo spettro del laplaciano con condizioni al bordo omogenee. Pertanto data la forma di un tamburo riusciamo a stabilire quali sono tutte le possibili frequenze di vibrazioni, cioè siamo in grado di determinare quale suono produce. Il problema che analizzò Kac fu esattamente l'inverso: se conosciamo tutti i modi di vibrazione di una membrana, siamo in grado di ricostruirla e stabilire se due membrane che producono lo stesso spettro di frequenze sono congruenti in senso Euclideo? In maniera più formale sia  $\Omega$  un aperto limitato di  $\mathbb{R}^2$  e si considera

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} F(\cdot; t) = \Delta F & \text{in } \Omega \\ F(\cdot; t)|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

---

Separando le variabili, cerchiamo soluzioni del tipo  $F(x, y; t) = u(x, y)e^{i\omega t}$ , che sostituita in (1) dà il seguente problema agli autovalori per il laplaciano

$$-\Delta u - \omega^2 u = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2)$$

per il quale si dimostra che lo spettro consiste di una successione di autovalori

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \longrightarrow \infty,$$

ciascuno ripetuto secondo molteplicità, e le corrispondenti autofunzioni  $\psi_k$  tali che

$$-\Delta\psi_k = \lambda_k\psi_k, \quad (3)$$

e tali che costituiscono una base ortonormale in  $L^2(\Omega)$ .

Quindi il punto cruciale trattato da Kac è: date due superfici  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  con bordo sufficientemente regolare considerati i rispettivi problemi agli autovalori

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = 0 & \text{in } \Omega_1 \\ u|_{\partial\Omega_1} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -\Delta u - \mu u = 0 & \text{in } \Omega_2 \\ u|_{\partial\Omega_2} = 0 \end{cases}$$

e supposto che essi abbiano la stessa successione di autovalori ripetuti secondo molteplicità, è possibile che  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  siano congruenti?

Poiché gli autovalori sono riconducibili ai modi di vibrare della membrana, e quindi al suono che percepiamo, per risolvere tale problema è necessario conoscere che genere di informazioni trasportano gli autovalori. D'altra parte, poiché un'espressione esplicita degli autovalori è nota solo per poche superfici, ad esempio per i triangoli rettangoli, i rettangoli e per circonferenze, è naturale studiare, come prima informazione, la distribuzione asintotica per  $k \rightarrow \infty$  degli autovalori, nel caso di domini più generali.

In particolare, prima di Kac, il matematico tedesco Weyl mostrò che data la funzione contante degli autovalori  $N(\lambda) = \sum_{\lambda_k < \lambda} 1$  allora vale

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda} = \frac{|\Omega|}{4\pi}, \quad (4)$$

Grazie ai teoremi tauberiani si ottengono poi le stime asintotiche

$$\frac{N(\lambda)}{\lambda} \sim \frac{|\Omega|}{4\pi}, \quad \lambda \longrightarrow \infty \iff \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} \sim \frac{|\Omega|}{4\pi t}, \quad t \longrightarrow 0^+. \quad (5)$$

Quindi la quantità  $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t}$ , legata all'equazione del calore e che descrive l'andamento asintotico degli autovalori, esprime il fatto che è possibile ascoltare l'area di un tamburo di forma qualunque. Nel 1954, Ake Pleijel perfezionò la stima data da Weyl ottenendo nel caso di aperti convessi ([17])

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k \tau} \sim \frac{|\Omega|}{4\pi t} - \frac{L}{4} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}, \quad t \rightarrow 0^+$$

dove  $L$  è la lunghezza del bordo dell'aperto. È evidente come nella stima precedente sia presente il termine principale di Weyl e un termine aggiuntivo, caratteristico proprio degli aperti convessi, che traduce il fatto che è possibile ascoltare la lunghezza del bordo di un tamburo. Inoltre dalla disuguaglianza isoperimetrica risulta che  $L^2 \geq 4\pi A$ , dove l'uguaglianza vale se e solo se  $\Omega$  è un cerchio. Quindi si può riconoscere la forma di un tamburo circolare dalle sue frequenze.

Kac, nel suo articolo, con un approccio euristico, legato alla propagazione del calore, affronta il caso di una superficie con bordo poligonale, concludendo che, dato il numero di buchi  $h$  della superficie

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k \tau} \sim \frac{|\Omega|}{4\pi t} - \frac{L}{4} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} + \frac{1-h}{6} + O(\sqrt{t}), \quad t \rightarrow 0^+.$$

Dunque possiamo allora ascoltare la connessione del tamburo ( $h = 0$  dice che il tamburo è connesso)!

Nell'ambito di questi problemi è interessante studiare il caso del toro piatto  $\mathbb{T}^n$ . Grazie alle buone proprietà di  $\mathbb{T}^n$ , è un problema particolarmente semplice. Infatti, per esso si conoscono espressioni esplicite per gli autovalori. Inoltre si può applicare la legge di Weyl, e quindi i teoremi tauberiani, ottenendo una specifica formula asintotica per gli autovalori. In questa formula compare, come vedremo in dettaglio nel primo capitolo, il *termine principale*

di Weyl, ed un termine aggiuntivo che dipende dalla lunghezza delle geodetiche primitive del toro. Poiché il toro è univocamente determinato dalla lunghezza delle orbite e dall'area, allora si può ascoltare la forma di toro piatto (si veda il Capitolo 1).

D'altra parte, la risposta alla domanda di Kac per il toro piatto è no! Infatti, nel 1964, Milnor aveva già dato un esempio di tori piatti di dimensione sedici che sono isospettrali ma non isometrici.

Dagli anni sessanta in poi ci furono diversi matematici che costruirono superfici isospettrali non isometriche, ma tutti si occuparono di studiare casi in  $\mathbb{R}^n$  con  $n \geq 4$ . Infatti nel 1982, Urukawa provò che esistono due domini  $\Omega$  e  $\Omega'$  nella sfera unitaria  $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ , con  $n \geq 4$ , che sono isospettrali ma non isometrici in  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Nonostante tra questi ci siano esempi di superfici bidimensionali, si tratta comunque di casi complessi perché fanno riferimento ad una metrica in  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Ciò non risponde in maniera definitiva alla questione posta da Kac, in quanto non si hanno ancora risultati per domini in  $\mathbb{R}^2$  con la metrica euclidea.

Solo agli inizi degli anni novanta, grazie a Gordon, Webb e Wolpert, si ottenne il primo esempio di domini bidimensionali isospettrali non isometrici in  $\mathbb{R}^2$ . Quindi rispetto agli esempi di Urukawa, che fanno riferimento ad una metrica in  $\mathbb{S}^{n-1}$ , Gordon, Webb e Wolpert considerano i domini rispetto alla metrica euclidea. È chiaro che gli esempi bidimensionali sono più semplici dei precedenti e che ormai si può dare una risposta definitiva alla questione di Kac.

La teoria di Gordon, Webb e Wolpert venne successivamente ampliata e semplificata da Buser, Conway, Doyle e Semmler, che descrivono un criterio per la costruzione di tali domini nel piano  $\mathbb{R}^2$  e danno diciassette nuove famiglie di domini planari isospettrali (per dominio planare si intende un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ). Questi ultimi esempi, come anche quelli di Gordon, Webb e Wolpert, si basano sul Teorema di Sunada ([18]) che fornisce un criterio generale per la costruzione di varietà isospettrali.

Noi siamo interessati ai casi più elementari, in particolare ai domini pla-

nari. Infatti vedremo, studiando le opportune proprietà del laplaciano per domini planari, che non è possibile ascoltare la forma di un tamburo, dove per tamburo si intende un aperto limitato  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , mostrando che ci sono superfici isospettrali con bordo, cioè che hanno gli stessi modi di vibrare, non isometriche. Infine esplicherò due metodi per la costruzione di superfici isospettrali planari, descrivendo l'esempio di Buser, Conway, Doyle, Semmler [5], e l'esempio di Chapman [6].



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>i</b>
<b>1 Il laplaciano sul toro piatto <math>\mathbb{T}^2</math></b>	<b>1</b>
1.1 Problema degli autovalori per il toro piatto . . . . .	1
1.2 Stime asintotiche per il toro piatto . . . . .	3
1.2.1 Formula della traccia per $\mathbb{T}^2$ . . . . .	5
1.2.2 Traccia del calore per $\mathbb{T}^2$ . . . . .	9
1.3 Si può ascoltare la forma di $\mathbb{T}^2$ . . . . .	10
<b>2 Il laplaciano su frontiere poligonali</b>	<b>13</b>
2.1 Problema agli autovalori . . . . .	14
2.2 Regolarità delle autofunzioni . . . . .	20
2.3 Legge di Weyl . . . . .	24
<b>3 Costruzione di domini isospettrali piani</b>	<b>25</b>
3.1 Condizioni di compatibilità . . . . .	26
3.2 Trapianto: esempio di Buser, Conway, Doyle, Semmler . . . . .	28
3.3 Origami: esempio di Chapman . . . . .	35
3.4 Dal trapianto all'origami . . . . .	43
3.5 Isospettralità . . . . .	45
3.6 Forte Trapiantabilità . . . . .	46
<b>Bibliografia</b>	<b>49</b>



# Capitolo 1

## Il laplaciano sul toro piatto $\mathbb{T}^2$

In questo capitolo vogliamo vedere che è possibile ascoltare la forma di un toro piatto. Poiché, come visto nell'introduzione, questo problema coinvolge gli autovalori del laplaciano, come prima cosa bisogna studiarne le proprietà. In seguito, una volta stabilito che per questo operatore ha senso considerare il problema agli autovalori, dobbiamo interpretare che tipo di informazioni essi trasportano per poter verificare se effettivamente è possibile ascoltare la forma di toro piatto. D'altra parte, la buona regolarità delle funzioni definite sul toro, permette di risolvere queste problematiche. Per di più, si riescono ad esplicitare gli autovalori, e dunque a derivare la legge di Weyl direttamente, ed ottenere quindi una stima asintotica degli autovalori più precisa.

### 1.1 Problema degli autovalori per il toro piatto

Sia  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{T}_L^2 = \mathbb{R}^2 / (L\mathbb{Z} \times L\mathbb{Z})$  il toro piatto di lunghezza  $L > 0$ . A  $\mathbb{T}^2$  si può associare il *dominio fondamentale*  $\Omega = [0, L] \times [0, L] \subset \mathbb{R}^2$ . Ovviamente  $\mathbb{R}^2$  può essere ricoperto da traslati di  $\Omega$ , dando luogo ad una "pavimentazione" di  $\mathbb{R}^2$ . Quindi una funzione  $f \in L^2(\mathbb{T}^2)$  è una funzione periodica  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f|_{\Omega} \in L^2(\Omega)$ . Indichiamo poi con  $C^\infty(\mathbb{T}^2)$ , l'insieme delle funzioni periodiche  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  che sono  $C^\infty$ .

Il problema agli autovalori per il laplaciano  $-\Delta_{\mathbb{T}^2}$  sul toro piatto, è equivalente al problema agli autovalori per  $-\Delta$  su  $\mathbb{R}^2$  con condizioni di periodicità. Dunque ha senso scrivere

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u \\ u(x_1 + \mu_1 L, x_2 + \mu_2 L) = u(x_1, x_2), \end{cases} \quad (1.1)$$

con  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{Z}^2$ .

Si noti che (1.1) equivale al problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & \text{su } (0, L) \times (0, L), \\ \text{con condizioni periodiche sul bordo di } \Omega. \end{cases} \quad (1.2)$$

Inoltre, notiamo anche che  $\mathbb{T}^2$  è una superficie compatta senza bordo con area  $|\Omega| = L^2$ .

È facile verificare che

$$\{u_m\}_{m \in \mathbb{Z}^2} = \left\{ \frac{1}{L} e^{-2\pi i \langle m, x \rangle / L} \right\}_{m \in \mathbb{Z}^2},$$

è una base ortonormale di funzioni  $C^\infty(\mathbb{T}^2)$  di  $L^2(\mathbb{T}^2)$ , costituita da autofunzioni di  $-\Delta_{\mathbb{T}^2}$ , i cui autovalori relativi sono descritti dalla successione

$$\{\lambda_m\}_{m \in \mathbb{Z}^2} = \left\{ \frac{4\pi^2}{|\Omega|} (m_1^2 + m_2^2) \right\}_{(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2}.$$

Poniamo ora, per  $k \geq 0$

$$r(k) = \#\{(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2; k = m_1^2 + m_2^2\},$$

con  $r(0) = 1$ . Allora  $r(k)$  è il numero di rappresentazioni di  $k \in \mathbb{N}$  come somma di quadrati di numeri interi. Dunque gli autovalori *distinti* di  $-\Delta_{\mathbb{T}^2}$ , possono essere scritti

$$\mu_k = \left( \frac{4\pi^2}{|\Omega|} k \right)_{k \in \mathbb{N}},$$

con *molteplicità*  $r(k)$ . Quindi la funzione che conta il numero degli autovalori è

$$N(\lambda) = \sum_{\mu_k < \lambda} r(k) = \sum_{0 \leq k < (\frac{|\Omega|}{4\pi^2})\lambda} r(k). \quad (1.3)$$

Quindi siano  $\lambda_m$  gli autovalori ripetuti secondo molteplicità e  $\mu_k$  gli autovalori *distinti* con molteplicità  $r(k)$ , allora vale

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^2} \lambda_m = \sum_{k=0}^{\infty} r(k) \mu_k.$$

## 1.2 Stime asintotiche per il toro piatto

In questa sezione vedremo perché è possibile ascoltare la forma di un toro piatto, per questo è utile ricordare il seguente Teorema.

**Teorema 1.2.1** (Teorema Tauberiano). *Sia  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$  una successione di numeri reali e positivi non decrescente tali che la serie  $\sum_{k \in \mathbb{N}} e^{-\lambda_k t}$  converge per ogni  $t > 0$  allora*

$$\frac{N(\lambda)}{\lambda} \sim \frac{|\Omega|}{4\pi}, \quad \lambda \rightarrow \infty \iff \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} \sim \frac{|\Omega|}{4\pi t}, \quad t \rightarrow 0^+ \quad (1.4)$$

(la  $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t}$  è detta *formula della traccia per il nucleo del calore*, o semplicemente *traccia del calore*).

*Dimostrazione.* Mostriamo( $\implies$ ). Supponiamo quindi che valga la legge di Weyl, siano

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \rightarrow \infty \quad \text{autovalori ripetuti secondo molteplicità,}$$

riordinati nella successione

$$0 < \mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \dots \rightarrow \infty$$

con molteplicità rispettivamente

$$m_1, m_2, m_3, \dots, .$$

Allora

$$N(\lambda) = \sum_{\lambda_k < \lambda} 1 = \sum_{\mu_j < \lambda} m_j$$

e quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k \tau} = \sum_{j=1}^{\infty} m_j e^{-\mu_j \tau} \stackrel{\text{Stieltjes}}{=} \int_0^{\infty} e^{-\lambda \tau} dN(\lambda).$$

Per ogni  $\nu \in \mathbb{N}$  esiste  $\delta_\nu < \frac{1}{2}$  tale che

$$\sum_j^{\nu} m_j e^{-\mu_j \tau} = \int_0^{\mu_\nu + \delta_\nu} e^{-\lambda \tau} dN(\lambda)$$

(integrando per parti)

$$= N(\mu_\nu + \delta_\nu) e^{-\tau(\mu_\nu + \delta_\nu)} + \int_0^{\mu_\nu + \delta_\nu} \tau N(\lambda) e^{-\lambda \tau} d\lambda.$$

D'altra parte per la legge di Weyl esistono  $c_1, c_2$  costanti tali che

$$N(\lambda) \leq c_1 \lambda + c_2, \quad \forall \lambda \geq 0,$$

per cui essendo  $\tau > 0$

$$N(\mu_\nu + \delta_\nu) e^{-\tau(\mu_\nu + \delta_\nu)} \longrightarrow 0, \quad \text{quando } \nu \rightarrow \infty.$$

Dunque

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k \tau} = \tau \int_0^{\infty} N(\lambda) e^{\lambda \tau} d\lambda.$$

Ora, posto  $c_0 = \frac{|\Omega|}{4\pi}$ , si che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $R_\varepsilon > 0$  t.c.

$$\text{per } \lambda > R_\varepsilon \quad \text{risulta } \left| \frac{N(\lambda)}{\lambda} - c_0 \right| < \varepsilon.$$

Allora scriviamo

$$\tau \int_0^{\infty} N(\lambda) e^{-\lambda \tau} d\lambda = \tau \int_0^{R_\varepsilon} N(\lambda) e^{-\lambda \tau} d\lambda + \tau \int_{R_\varepsilon}^{+\infty} N(\lambda) e^{-\lambda \tau} d\lambda.$$

Stimando il secondo membro a destra si ha

$$(c_0 - \varepsilon) \tau \int_{R_\varepsilon}^{\infty} \lambda e^{-\lambda \tau} d\lambda \leq \tau \int_{R_\varepsilon}^{+\infty} N(\lambda) e^{-\lambda \tau} d\lambda \leq (c_0 + \varepsilon) \tau \int_{R_\varepsilon}^{\infty} \lambda e^{-\lambda \tau} d\lambda,$$

dove

$$\tau \int_{R_\varepsilon}^{\infty} \lambda e^{-\lambda\tau} d\lambda = R_\varepsilon e^{-\tau R_\varepsilon} + \frac{1}{\tau} e^{-\tau R_\varepsilon}.$$

Risulta allora,

$$\begin{aligned} \tau^2 \int_0^{R_\varepsilon} N(\lambda) e^{-\lambda\tau} d\lambda + \tau R_\varepsilon (c_0 - \varepsilon) e^{-\tau R_\varepsilon} + e^{-\tau R_\varepsilon} (c_0 - \varepsilon) &\leq \tau \sum_{k \geq 1} e^{-\lambda_k \tau} \leq \\ &\leq \tau^2 \int_0^{R_\varepsilon} N(\lambda) e^{-\lambda\tau} d\lambda + \tau R_\varepsilon (c_0 + \varepsilon) e^{-\tau R_\varepsilon} + e^{-\tau R_\varepsilon} (c_0 + \varepsilon), \end{aligned}$$

da cui

$$(c_0 - \varepsilon) \leq \liminf_{\tau \rightarrow 0^+} \left( \tau \sum_{k \geq 1} e^{-\lambda_k \tau} \right) \leq \limsup_{\tau \rightarrow 0^+} \left( \tau \sum_{k \geq 1} e^{-\lambda_k \tau} \right) \leq (c_0 + \varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Quindi

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \left( \tau \sum_{k \geq 1} e^{-\lambda_k \tau} \right) = c_0.$$

( $\Leftarrow$ ) Per quanto riguarda il viceversa, si tratta dell'importante Teorema di Karamata. (Si veda [13], [16] per una prova).  $\square$

Il Teorema Tauberiano ci dice che la legge di Weyl su certo dominio, è equivalente ad una stima della traccia del calore. Pertanto usando la forma esplicita degli autovalori, vogliamo studiare su  $\mathbb{T}^2$  la traccia del calore e dedurne le varie conseguenze.

### 1.2.1 Formula della traccia per $\mathbb{T}^2$

Consideriamo gli autovalori distinti  $\mu_k = \left(\frac{4\pi^2}{L^2}\right)k$  di  $-\Delta_{\mathbb{T}^2}$  con molteplicità  $r(k)$  e poniamo

$$p_k = \left(\frac{2\pi}{L}\right)\sqrt{k} = \sqrt{\mu_k}.$$

Vogliamo calcolare la formula della traccia per il toro. Pertanto abbiamo bisogno della nozione di funzione spettrale.

**Definizione 1.1.** Si dice che  $h(p)$  è una funzione spettrale se

- $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  è continua;

- $h$  è tale che  $h(p) = h(-p)$ ;
- $h(p) = O\left(\frac{1}{|p|^{2+\varepsilon}}\right)$ ,  $|p| \rightarrow \infty$  e per qualche  $\varepsilon > 0$ ;
- $h\left(\frac{2\pi}{L}\rho\right) := \phi(\rho^2)$ ;

dove  $\phi(\rho^2) = \phi(x_1^2 + x_2^2) = \varphi(x_1, x_2)$  per ogni  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , è una funzione radiale.

**Definizione 1.2.** Sia  $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione a valori complessi. Allora denotiamo con

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x) e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} dx,$$

la trasformata di Fourier di  $\varphi$ , dove  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  indica il prodotto scalare in  $\mathbb{R}^2$ .

*Osservazione 1.* Sia dato il seguente operatore

$$h((-\Delta_{\mathbb{T}^2})^{\frac{1}{2}}): L^2(\mathbb{T}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{T}^2),$$

definito da

$$h((-\Delta_{\mathbb{T}^2})^{\frac{1}{2}})f = \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} h(\sqrt{\lambda_m})(f, u_m)u_m, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{T}^2),$$

dove  $h$  è la funzione spettrale secondo la Definizione 1.1, e ricordiamo che  $h(p_k) = h(\sqrt{\mu_k})$ , con  $\mu_k$  autovalore distinto del toro piatto e  $u_m$  relativa autofunzione. D'altra parte bisogna osservare che con  $h((-\Delta_{\mathbb{T}^2})^{\frac{1}{2}})$  si indica un operatore che dipende dagli autovalori del laplaciano e dalla funzione spettrale  $h$  definita sugli autovalori del laplaciano sul toro piatto.

Chiameremo

$$\sum_{k=0}^{\infty} r(k)h(p_k) = \text{Tr}(h((-\Delta_{\mathbb{T}^2})^{\frac{1}{2}})) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} (h((-\Delta_{\mathbb{T}^2})^{\frac{1}{2}})u_m, u_m),$$

*formula della traccia del toro piatto.*

La serie ha sempre senso, ed è finita a  $+\infty$ . Inoltre, grazie alle proprietà della funzione spettrale  $h(p)$  si vede che l'operatore  $h((-\Delta_{\mathbb{T}^2})^{\frac{1}{2}})$  è un operatore di

Hilbert-Schmidt, per cui la traccia è finita. Ma allora, anche il termine  $r(k)$  cresce come una funzione polinomiale.

Poichè per i teoremi di rappresentazione degli operatori di Hilbert-Schmidt vale

$$h((-\Delta_{\mathbb{T}^2})^{\frac{1}{2}})f = \int_{\Omega} K_h(x, y)f(y) dy, \quad \forall f \in L^2(\Omega), \quad (1.5)$$

dove  $K_h(x, y)$  è il nucleo dell'operatore, dalla (1.5) si vede che il nucleo dell'operatore definito all'inizio dipende dalla scelta della funzione spettrale  $h$ . Quindi variando  $h$ , in modo che rispetti sempre le proprietà di funzione spettrale, otteniamo formule di traccia diverse e quindi nuclei di operatori diversi.

**Definizione 1.3.** Indichiamo con

$$\Theta_{\mathbb{T}^2} = \sum_{k=0}^{\infty} r(k)h(p_k)$$

la traccia del toro piatto

Ora, poiché  $h(p_k) = \phi(\rho^2) = \varphi(x_1, x_2)$ , con  $\phi$  funzione radiale, la *formula della traccia per il toro piatto* può essere riscritta

$$\begin{aligned} \Theta_{\mathbb{T}^2} &= \sum_{k=0}^{\infty} r(k)h(p_k) \\ &= \sum_{(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2} h\left(\frac{2\pi}{L} \sqrt{m_1^2 + m_2^2}\right) \\ &= \sum_{(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2} \phi(m_1^2 + m_2^2) \\ &= \sum_{(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2} \varphi(m_1, m_2) \quad \text{usando la formula di Poisson} \\ &= \sum_{(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2} \hat{\varphi}(m_1, m_2) \\ &= \sum_{(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(l_1, l_2) e^{-2\pi i \langle l, m \rangle} dl_1 dl_2 \end{aligned}$$

per definizione di funzione spettrale vale che

$$= \sum_{(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2} \int_{\mathbb{R}^2} h\left(\frac{2\pi}{L} \sqrt{l_1^2 + l_2^2}\right) e^{-2\pi i \langle l, m \rangle} dl_1 dl_2,$$

effettuando il seguente cambiamento di variabili

$$\begin{cases} l_1 = \frac{L}{2\pi}\rho \cos \vartheta, & 0 < \rho < \infty \\ l_2 = \frac{L}{2\pi}\rho \sin \vartheta, & 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \end{cases}$$

con  $dl_1 dl_2 = \rho \frac{L^2}{4\pi^2} d\rho d\vartheta$ , si ottiene

$$\begin{aligned} &= \sum_{(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2} \frac{L^2}{4\pi^2} \int_0^\infty \rho h(\rho) \int_0^{2\pi} e^{-i(L(\rho \cos \vartheta m_1 + \rho \sin \vartheta m_2))} d\vartheta d\rho \\ &= \sum_{(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2} \frac{L^2}{4\pi^2} \int_0^\infty \rho h(\rho) \int_0^{2\pi} e^{-iL\|m\|\rho \cos \vartheta} d\rho d\vartheta \\ &= \sum_{(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2} \frac{L^2}{2\pi} \int_0^\infty \rho h(\rho) J_0(L\|m\|\rho) d\rho \\ &= \sum_{k=0}^\infty r(k) \frac{L^2}{2\pi} \int_0^\infty \rho h(\rho) J_0(L\|m\|\rho) d\rho \\ &= \frac{L^2}{2\pi} \int_0^\infty \rho h(\rho) d\rho + \frac{L^2}{2\pi} \sum_{k=1}^\infty \int_0^\infty \rho h(\rho) J_0(L\rho\sqrt{k}) d\rho, \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza si ottiene isolando il termine  $k = 0$  e dove  $J_0(z)$  è la funzione Bessel definita da

$$J_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iz \cos \phi} d\phi,$$

ed è tale che  $J_0(0) = 1$ .

Si conclude che la formula della *traccia per il toro piatto*  $\mathbb{T}^2$  è

$$\Theta_{\mathbb{T}^2} = \sum_{k=0}^\infty r(k) h(p_k) = \frac{|\Omega|}{2\pi} \int_0^\infty p h(p) dp + |\Omega| \sum_{k=1}^\infty r(k) \hat{h}(L\sqrt{k}) \quad (1.6)$$

dove

$$\hat{h}(\xi) := \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty p h(p) J_0(p\xi) dp.$$

La (1.6) è detta *traccia*, proprio perché come visto nell'Osservazione 1, essa deriva dalla traccia di un operatore.

### 1.2.2 Traccia del calore per $\mathbb{T}^2$

La formula (1.6) appena calcolata è molto generale. D'altra parte dalla (1.5) si osserva che al variare della funzione spettrale, varia anche il nucleo. Quindi funzioni spettrali diverse definiscono diverse formule di traccia. Poiché dal Teorema Tauberiano, la stima asintotica viene fatta sulla traccia del calore, per il toro piatto occorre scegliere come funzione spettrale

$$h(p) = e^{-p^2 t}, \quad t > 0,$$

che sostituita, in (1.6), e ricordando che

$$p_k = \frac{2\pi}{L} \sqrt{k} = \sqrt{\mu_k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

risulta

$$\Theta_{\mathbb{T}^2}(t) = \text{Tr}(e^{-t\Delta_{\mathbb{T}^2}}) = \sum_{k=0}^{\infty} r(k) e^{\frac{4\pi^2}{|\Omega|^2} nt} = \frac{|\Omega|}{2\pi} \int_0^{\infty} p e^{-p^2 t} dp + |\Omega| \sum_{k=1}^{\infty} r(k) \hat{h}(L\sqrt{k}),$$

dove

$$\hat{h}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} p e^{-p^2 t} J_0(p\xi) dp = \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{\xi^2}{4t}}.$$

Dunque la traccia del calore per il toro piatto è la funzione di  $t > 0$

$$\Theta_{\mathbb{T}^2}(t) = \text{Tr}(e^{t\Delta_{\mathbb{T}^2}}) = \frac{|\Omega|}{4\pi t} + \frac{|\Omega|}{4\pi t} \sum_{k=1}^{\infty} r(k) e^{-\left(\frac{|\Omega|}{4}\right)tk}. \quad (1.7)$$

*Osservazione 2.* La formule di traccia per il toro piatto mettono in relazione informazioni *spettrali* con informazioni *geometriche*. Infatti la (1.7) può essere riscritta

$$\sum_{k=0}^{\infty} r(k) h(p_k) = |\Omega| \hat{h}(0) + |\Omega| \sum_{k=1}^{\infty} r(k) \hat{h}(L\sqrt{k}). \quad (1.8)$$

L'informazione spettrale, ricordando che  $p_k = \sqrt{\mu_k}$ , si identifica con il primo membro a sinistra dell'equazione, mentre l'informazione geometrica è presente nel membro a destra, nel quale il termine  $L\sqrt{k} = L\sqrt{m_1 + m_2}$ , se  $m_1$  e  $m_2$  sono primi tra loro, rappresenta la lunghezza delle geodetiche chiuse su

toro piatto  $\mathbb{T}^2$ . Infatti le geodetiche chiuse sul toro piatto sono il quoziente delle rette  $y = \frac{m_1}{m_2}x + q$ , con coefficiente angolare razionale.

Dunque denotiamo con  $\{l_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  l'insieme delle lunghezze delle geodetiche chiuse, e verrà chiamato *lunghezza primitiva dello spettro* su  $\mathbb{T}^2$  con

$$l_k = L\sqrt{k} = L\sqrt{m_1^2 + m_2^2},$$

con  $m_1$  e  $m_2$  primi tra loro. Allora  $l_k$  è la lunghezza di una geodetica primitiva (con  $m_1$  e  $m_2$  primi tra loro), mentre  $jl_k$  per  $j \geq 2$  è la lunghezza di una geodetica non primitiva di periodicità  $j$  (quindi per  $n_1$  e  $n_2$  primi tra loro risulta  $m_1 = jn_1$  e  $m_2 = jn_2$ ).

$$\Theta_{\mathbb{T}^2}(t) = \frac{|\Omega|}{4\pi t} + \frac{|\Omega|}{4\pi t} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} r(j^2 l_k^2) e^{-\frac{j^2 l_k^2}{4t}}. \quad (1.9)$$

Quindi per  $t \rightarrow 0^+$ , la (1.8) diventa, dopo aver notato che la lunghezza primitiva minima  $l_1 = L = |\Omega|^{\frac{1}{2}}$

$$\Theta_{\mathbb{T}^2}(t) \sim \frac{|\Omega|}{4\pi t} + O(t^{-1} e^{-\frac{|\Omega|}{8t}}).$$

Allora confrontando la precedente con (1.9), si ha che il primo termine del secondo membro, che per il *Teorema di Karamata* è il termine principale della legge di Weyl, corrisponde alla geodetica  $l_0$  di lunghezza zero, mentre il secondo termine, cioè il resto, identifica la più piccola geodetica primitiva su  $\mathbb{T}^2$  di lunghezza  $l_1 = L$ . Dunque possiamo ascoltare la lunghezza di una sola geodetica. In seguito vedremo come è possibile ascoltare l'insieme di tutte le lunghezze delle geodetiche chiuse del toro piatto.

### 1.3 Si può ascoltare la forma di $\mathbb{T}^2$

Consideriamo un'altra funzione spettrale  $h(p)$ , che come vedremo ci porterà comunque alla formula della traccia del calore per il toro piatto. Poniamo

$$h_s(p) = J_0(ps) e^{-p^2 t},$$

dove  $J_0$  è la funzione di Bessel, ed inoltre per tale  $h$  vale

$$\hat{h}_s(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty p J_0(ps) e^{-p^2 t} J_0(p\xi) dp = \frac{1}{4\pi t} e^{\frac{s^2 + \xi^2}{4t}} I_0\left(\frac{s\xi}{2t}\right),$$

dove  $I_0(z)$  è la funzione di Bessel modificata tale che  $I_0(0) = 1$ . Allora la formula della traccia del toro piatto per la nuova funzione spettrale è

$$\Theta_{\mathbb{T}^2}(s, t) = \sum_{k=0}^{\infty} r(k) J_0(s\sqrt{\mu_k}) e^{-\mu_k t}$$

Isolando il termine zero della sommatoria, applicando la formula di Poisson, e ragionando come nell'Osservazione 2 del paragrafo precedente, cioè introducendo le lunghezze primitive dello spettro, otteniamo

$$\Theta_{\mathbb{T}^2}(s, t) = \frac{|\Omega|}{(4\pi t)} e^{-\frac{s^2}{4t}} + \frac{|\Omega|}{(4\pi t)} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} r(j^2 l_k^2) e^{\frac{s^2 + t^2 l_k^2}{4t}} I_0\left(\frac{s j l_k}{2t}\right). \quad (1.10)$$

Per  $s \rightarrow 0^+$  risulta che  $\Theta_{\mathbb{T}^2}(s, t) \rightarrow \Theta_{\mathbb{T}^2}(t)$ , ovvero la formula della traccia appena calcolata coincide con la traccia del calore per il toro piatto, quando  $s \rightarrow 0^+$ .

D'altra parte se fissiamo  $s > 0$  e facciamo il limite di (1.10) per  $t \rightarrow 0^+$  nel senso delle distribuzioni, si ha in  $\mathcal{D}'$

$$\Theta_{\mathbb{T}^2}(s, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} r(k) J_0(s\sqrt{\mu_k}) = \frac{|\Omega|}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{r(j^2 l_k^2)}{j l_k} \delta(s - j l_k).$$

Ciò segue dal fatto che

$$I_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right), \quad x \rightarrow +\infty,$$

e

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \rightarrow \delta(x), \quad t \rightarrow 0^+,$$

dove  $\delta(x)$  è la delta di Dirac.

La traccia  $\Theta_{\mathbb{T}^2}(s, 0)$  è quindi una distribuzione ben definita con supporto  $\{j l_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , per  $k \in \mathbb{N}$ , cioè supportata dall'insieme delle lunghezze primitive dello spettro  $\{l_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  delle geodetiche del toro e delle lunghezze delle geodetiche non primitive del toro  $\{j l_k\}_{k \in \mathbb{N}, j \geq 2}$ .

Dunque gli autovalori del laplaciano su  $\mathbb{T}^2$ , con la loro molteplicità  $r(k)$ , determinano la *lunghezza dello spettro delle geodetiche* chiuse del toro. Poiché il toro è univocamente determinato dalla sua area  $|\Omega|$  e dalla lunghezza dello spettro  $\{l_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , allora si conclude che si può ascoltare la forma di un toro piatto  $\mathbb{T}^2$ !

## Capitolo 2

# Il laplaciano su frontiere poligonali

Nel capitolo precedente abbiamo visto, analizzando le diverse proprietà del laplaciano sul toro piatto, come è possibile ascoltare la forma di un toro piatto. D'altra parte lo scopo della mia tesi è quello di dare esempi di superfici piane isospettrali ma non isometriche. Poiché i metodi di costruzioni di tali domini richiedono una alta regolarità delle soluzioni del problema di Laplace con condizioni al bordo nulle, e poiché queste superfici hanno bordo poligonale e quindi lipschitziano, occorre analizzare la regolarità delle autofunzioni del laplaciano su tali domini. È quindi necessario lavorare negli spazi di Sobolev, per avere l'esistenza e l'unicità delle soluzioni, e poi negli spazi delle distribuzioni per incrementare la regolarità. Inoltre una condizione necessaria per l'isospettralità, come ci dicono la legge di Weyl e i Teoremi Tauberiani, è che i domini abbiano stessa area. Fortunatamente, per domini con frontiera regolare a tratti, essa vale. D'altra parte, poiché la frontiera di tali domini non è di classe  $C^\infty$ , occorre, attraverso l'introduzione di una forma bilineare, estendere l'operatore di Laplace in modo unico ad un operatore autoggiunto, positivo e con inverso compatto (estensione di Friedrichs, definito dapprima su  $C_0^\infty(\Omega)$ ).

## 2.1 Problema agli autovalori

Consideriamo unicamente funzioni a valori reali. Pertanto in  $L^2$  considereremo solo il prodotto scalare

$$(f, g) = \int_{\Omega} fg \, dx \in \mathbb{R}.$$

Sia  $\Omega$  un aperto limitato di  $\mathbb{R}^n$  e  $f \in L^2(\Omega)$ , sia dato il seguente problema di Dirichlet per il laplaciano:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{in } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

**Definizione 2.1.** Sia  $u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$  e sia  $\alpha$  un multi-indice,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ,  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ . Si dirà che  $u$  ha derivata  $\alpha$ -esima forte in  $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$  se esiste una successione  $\{u_j\}_{j \geq 0} \in C^{|\alpha|}(\Omega)$  tale che per ogni aperto  $\Omega' \subset \Omega$ .

1.  $u_j \rightarrow u$  in  $L^p(\Omega')$
2.  $\{D^\alpha u_j\}_{j \geq 0}$  è di Cauchy in  $L^p(\Omega)$

dove

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

**Definizione 2.2.** Indichiamo con  $C_0^\infty(\Omega)$  l'insieme delle  $f \in C^\infty(\Omega)$  con supporto compatto contenuto in  $\Omega$ .

**Definizione 2.3.** Indichiamo con  $H_{\text{loc}}^{k,p}(\Omega)$  lo spazio delle funzioni  $u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$  aventi derivate forti  $D^\alpha u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$  per ogni multi-indice  $\alpha \leq k$ .

**Definizione 2.4.** Indichiamo con  $H^{k,p}(\Omega)$  lo spazio delle funzioni  $u \in L^p(\Omega)$  aventi derivate forti  $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$  per ogni multi-indice  $\alpha \leq k$ .

**Definizione 2.5.** Indichiamo con  $H_0^{1,2}(\Omega)$  la chiusura di  $C_0^\infty(\Omega)$ , nella topologia di  $H^1(\Omega)$ .

*Osservazione 3.* Quando  $p = 2$  poniamo  $H^k(\Omega) = H^{k,2}(\Omega)$ . Inoltre, nel caso di  $H_0^1(\Omega)$ , in virtù della disuguaglianza di Poincaré, possiamo prendere  $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ .

**Definizione 2.6.** La forma bilineare associata al laplaciano di Dirichlet è un'applicazione bilineare simmetrica reale  $B: H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$B(u, \phi) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 u_{x_i} \phi_{x_i} dx \quad (2.2)$$

per  $u$  e  $\phi \in H_0^1(\Omega)$ .

**Definizione 2.7.** Diremo che  $u \in H^1(\Omega)$  è una soluzione nel senso delle distribuzioni di  $-\Delta u = f$  in  $\Omega$ , con  $f \in L^2(\Omega)$ , se

$$\langle u | -\Delta \phi \rangle = \langle f | \phi \rangle, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (2.3)$$

Per  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$  e per ogni  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ ,  $\langle u | \phi \rangle$  indica l'azione di  $u$  su  $\phi$ . Quando  $u \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$

$$\langle u | \phi \rangle = \int_{\Omega} u \phi dx.$$

**Definizione 2.8.** Si dice che  $u \in H_0^1(\Omega)$  è una soluzione debole del problema (2.1) se, assegnata  $f \in L^2(\Omega)$ ,

$$B(u, \phi) = (\nabla u, \nabla \phi) = (f, \phi) \quad (2.4)$$

per ogni  $\phi \in H_0^1(\Omega)$ .

*Osservazione 4.* La Definizione 2.8 tiene conto del problema di Dirichlet, quindi dell'equazione  $-\Delta u = f$  in  $\Omega$  con condizioni al contorno nulle su  $\partial\Omega$ , mentre la Definizione 2.7 solo dell'equazione. D'altra parte saranno necessarie entrambe le definizioni, l'una per il Teorema di esistenza e di unicità di Lax-Milgram e l'altra per lo studio della regolarità delle soluzioni. È chiaro che se  $u \in H_0^1(\Omega)$  è soluzione debole di (2.1), allora è soluzione nel senso delle distribuzioni di  $-\Delta u = f$  in  $\Omega$ .

Per il Teorema di Lax-Milgram, la (2.4) ammette una ed una sola soluzione

$$u = Tf \in H_0^1(\Omega). \quad (2.5)$$

Quindi

$$B(Tf, \phi) = (f, \phi), \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

La (2.5) è dunque soluzione debole del problema di Dirichlet per il laplaciano. Sia  $\mathcal{C}(T)$  il codominio dell'operatore lineare  $T$  che associa ad  $f$  la soluzione  $u$ . Si ha  $\mathcal{C}(T) \subset H_0^1(\Omega)$  e quindi  $T: L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ . Ma  $T$  è anche continuo. Infatti, sia  $u = Tf \in H_0^1(\Omega)$ . Usando la forma bilineare (2.2) e per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, con  $\phi = Tf$ , si ha

$$\|Tf\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = B(Tf, Tf) = (f, Tf) \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|Tf\|_{L^2(\Omega)}.$$

Dunque per la disuguaglianza di Poincaré otteniamo

$$\|Tf\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)} \|Tf\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Ciò mostra che  $T: L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$  è un operatore lineare, continuo e limitato. Inoltre, poiché

$$i: H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$$

è un'immersione compatta, ne segue che l'operatore  $T: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  è compatto. Ora  $T$  è autoaggiunto e positivo e per di più invertibile. Infatti per definizione risulta

$$B(\phi, u) = B(u, \phi).$$

Quindi

$$(f, Tg) = B(Tf, Tg) = B(Tg, Tf) = (g, Tf) = (Tf, g), \quad \forall f, g \in L^2(\Omega),$$

che mostra l'autoaggiunzione, e

$$(Tf, f) = B(Tf, Tf) = c_1 \|Tf\|_{H_0^1}^2 \geq 0, \quad \forall f \in L^2(\Omega),$$

che mostra la positività. Infine se

$$Tf = 0,$$

allora

$$0 = B(Tf, \phi) = (f, \phi) \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega),$$

da cui risulta

$$f = 0.$$

Per il Teorema spettrale per gli operatori limitati, autoaggiunti e compatti,  $T$  possiede dunque uno spettro discreto reale, costituito da una successione di autovalori di molteplicità finita, tale che, con ripetizioni secondo molteplicità vale

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3 \geq \dots \rightarrow 0,$$

ed una relativa base ortonormale di  $L^2(\Omega)$  di autofunzioni  $\{u_k; k \in \mathbb{N}\}$ , per cui

$$Tu_k = \mu_k u_k, \quad \text{con } \mu_k \in \mathbb{R}.$$

**Definizione 2.9.** Chiamiamo *autovalore generalizzato* e corrispondente *autofunzione generalizzata* del laplaciano di Dirichlet su  $\Omega$ , rispettivamente,  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $u \in H_0^1(\Omega)$ ,  $u \neq 0$ , tali che

$$B(u, \phi) = \lambda(u, \phi), \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \quad (2.6)$$

*Osservazione 5.* Poiché

$$B(Tf, \phi) = (f, \phi), \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega), \quad \forall f \in L^2(\Omega),$$

allora  $\lambda$  e  $u$  sono un autovalore generalizzato e una corrispondente autofunzione se e solo se

$$u = T(\lambda u) = \lambda Tu.$$

D'altra parte  $Tu_k = \mu_k u_k$ , quindi, posto  $\mu_k = \frac{1}{\lambda_k}$ , risulta  $u_k = \lambda_k Tu_k$ . Per l'Osservazione 5,  $\lambda$  è un autovalore generalizzato di (2.6) e si conclude che gli autovalori generalizzati del laplaciano costituiscono una successione di numeri reali, con ripetizione secondo molteplicità, tale che

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \rightarrow \infty.$$

Dunque, per quanto mostrato finora, ha senso considerare il problema agli autovalori per il laplaciano

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

il quale ammette una e una sola soluzione debole  $u \in H_0^1(\Omega)$  tale che

$$(\nabla u, \nabla \phi) = \lambda(u, \phi), \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

**Definizione 2.10.** Chiameremo semplicemente un'autofunzione e autovalore, le autofunzioni e gli autovalori generalizzati che risolvono il problema (2.7).

Gli autovalori nel senso generalizzato, costruiti sopra, sono in realtà gli autovalori di un'estensione autoaggiunta positiva dell'operatore  $-\Delta|_{C_0^\infty(\Omega)}$  che è chiamata *estensione di Friedrichs* e che vogliamo ora ricordare.

**Teorema 2.1.1** ([7] pag. 86). *Sia  $B(\cdot, \cdot)$  la forma bilineare (2.2). Allora  $B$  è chiudibile e alla sua chiusura è associata l'estensione autoaggiunta  $L_F$  di  $-\Delta$ .*

**Definizione 2.11.**  $L_F$  è detta *estensione di Friedrichs* di  $-\Delta|_{C_0^\infty(\Omega)}$ .

**Teorema 2.1.2** ([7] pag. 123). *La forma bilineare  $B$  è chiusa sul dominio  $H_0^1(\Omega)$  ed esiste un unico operatore autoaggiunto positivo  $L_F$  su  $L^2(\Omega)$  associato alla forma tale che*

$$(L_F^{\frac{1}{2}}u, L_F^{\frac{1}{2}}v) = B(u, v), \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

**Teorema 2.1.3** ([7] pag. 81). *Vale che  $u \in \mathcal{D}(L_F)$  se e solo se  $u \in H_0^1(\Omega) = \mathcal{D}(L_F^{\frac{1}{2}})$  e esiste  $g \in L^2(\Omega)$  tale che*

$$B(u, \phi) = (g, \phi), \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega),$$

e allora in questo caso si ha

$$L_F u = g.$$

Si verifica che per il  $\mathcal{D}(L_F)$  descritto da

$$\mathcal{D}(L_F) = \{u \in H_0^1(\Omega); \exists g \in L^2(\Omega), B(u, \phi) = (g, \phi), \forall \phi \in H_0^1(\Omega)\}.$$

vale

$$\mathcal{D}(L_F) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

È importante notare che i risultati ottenuti non tengono conto della regolarità di  $\Omega$ , ma si basano solo ed esclusivamente sulle proprietà dell'operatore di Laplace. D'altra parte, poiché lavoreremo principalmente su domini regolari a tratti, in particolare su domini poligonali, abbiamo bisogno che le proprietà variazionali degli autovalori valgano anche su tali domini. Ma questo è fortunatamente vero nel nostro caso.

**Teorema 2.1.4** ([7] pag. 91). *Sia  $\mathcal{D}(L_F^{\frac{1}{2}}) = H_0^1(\Omega)$  e sia  $W \subset \mathcal{D}(L_F^{\frac{1}{2}})$  un sottospazio di dimensione finita. Poniamo*

$$\Lambda(W) = \sup\{B(u, u); u \in W, \|u\| = 1\}$$

e

$$\text{Spec}(L_F) = \{\lambda_1 \leq \lambda_2 \dots\}.$$

Allora

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \inf\{\Lambda(W); W \subseteq H_0^1(\Omega), \dim W = k\} \\ &= \inf\{\Lambda(W); W \subseteq C_0^\infty(\Omega), \dim W = k\}, \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

Questo vuol dire che per domini regolari a tratti, e quindi anche per i poligoni, gli autovalori (generalizzati) soddisfano le proprietà variazionali. Inoltre per il Teorema 2.1.4, siano dati  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  aperti limitati con frontiera regolare a tratti tali che  $\Omega_1 \subset \Omega_2$ , allora per i rispettivi autovalori ripetuti secondo molteplicità vale

$$\lambda_k(\Omega_2) \leq \lambda_k(\Omega_1), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Questi risultati sono di fondamentale importanza. Sono infatti alla base della prova della *la legge di Weyl*, che ricorderemo nella Sezione 2.3.

## 2.2 Regolarità delle autofunzioni

In seguito affronteremo la questione della regolarità delle autofunzioni utilizzando alcuni teoremi, tratti dal Giusti [11] e dal Gilbarg- Trudinger[8], riadattati al caso bidimensionale e all'operatore di Laplace, ma che valgono più in generale in  $\mathbb{R}^n$  e per operatori ellittici. Inizialmente tratteremo la regolarità interna delle soluzioni e in seguito la regolarità fino alla frontiera.

**Teorema 2.2.1** ([8] pag.173). *Sia  $u \in H_{\text{loc}}^1(\Omega)$  soluzione nel senso delle distribuzioni di  $-\Delta u = f$  in  $\Omega$  e sia  $f \in L_{\text{loc}}^2(\Omega)$ . Dunque  $u \in H_{\text{loc}}^2(\Omega)$ .*

**Teorema 2.2.2.** *Sia  $u \in H_{\text{loc}}^1(\Omega)$  una soluzione nel senso delle distribuzioni di  $-\Delta u = f$  in  $\Omega$  e sia  $f \in H_{\text{loc}}^k(\Omega)$ . Allora  $u \in H_{\text{loc}}^{k+2}(\Omega)$ , per ogni  $k \geq 0$ .*

*Dimostrazione. (Teorema 2.2.2)*

Per induzione su  $k$ .

Il caso  $k = 0$  segue dal Teorema 2.2.1. Supponiamo sia vero fino a  $k$  con  $k \geq 1$ . Mostriamo che vale per  $k + 1$ . L'ipotesi induttiva dice che per  $f \in H_{\text{loc}}^k$ , se  $u$  è soluzione nel senso delle distribuzioni di  $-\Delta u = f$  in  $\Omega$ , allora  $u \in H_{\text{loc}}^{k+2}(\Omega)$ .

Supponiamo quindi che  $f \in H_{\text{loc}}^{k+1}(\Omega)$ . Dunque in particolare  $f \in H_{\text{loc}}^k(\Omega)$  quindi, per ipotesi induttiva,  $u \in H_{\text{loc}}^{k+2}(\Omega)$ .

Ma

$$u_j = \frac{\partial u}{\partial x_j} \in H_{\text{loc}}^{k+1}(\Omega), \quad 1 \leq j \leq n,$$

risolve nel senso delle distribuzioni

$$-\Delta u_j = \frac{\partial f}{\partial x_j} \in H_{\text{loc}}^k(\Omega).$$

Allora per l'ipotesi induttiva

$$u_j \in H_{\text{loc}}^{k+2}(\Omega),$$

e quindi

$$u \in H_{\text{loc}}^{k+3}(\Omega).$$

Questo conclude la prova. □

Allora se  $u \in H_0^1(\Omega)$  soluzione debole di (2.7) (cioè del problema agli autovalori), quindi per l'Osservazione 4,  $u$  è soluzione anche nel senso delle distribuzioni di  $-\Delta u = \lambda u$  in  $\Omega$ , ne consegue  $u \in H_{\text{loc}}^{k+2}(\Omega)$  per ogni  $k$ . Poiché vale

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 0} H_{\text{loc}}^k(\Omega),$$

risulta  $u \in C^\infty(\Omega)$ .

Questi risultati mostrano la regolarità interna delle autofunzioni. Esaminiamo ora la regolarità delle autofunzioni alla frontiera.

**Definizione 2.12** ([8] pag. 193). Il dominio  $\Omega$  soddisfa la *condizione del cono esterno in  $x_0$*  se esiste un cono circolare retto  $V = V_{x_0}$  con vertice in  $x_0$  tale che  $\Omega \cap V_{x_0} = \{x_0\}$ .

**Definizione 2.13.** Un aperto limitato  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , è detto *poligono* se esso è un poligono connesso, semplicemente connesso, con frontiera lineare a tratti, con un numero finito di vertici e che giace da una sola parte della frontiera.

*Osservazione 6.* Dunque un poligono  $\Omega$  soddisfa sempre la condizione del cono esterno e ha frontiera regolare a tratti.

**Teorema 2.2.3** ([8] pag. 196). *Supponiamo che  $\Omega$  soddisfi la condizione del cono esterno in ogni punto di  $\partial\Omega$ . Allora per ogni autofunzione  $u$  del laplaciano vale*

$$u \in C^\infty(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}).$$

La condizione del cono esterno è una garanzia della continuità delle soluzioni sulla frontiera. Ma la sola continuità dei punti interni non basta. Occorre aumentare la regolarità sui punti di frontiera. D'altra parte i vertici del dominio poligonale potrebbero essere un problema per lo studio della regolarità. Infatti il laplaciano delle soluzioni in questi punti critici potrebbe giocare brutti scherzi! Come vedremo, nei soli vertici la continuità basta. Possiamo isolarli e studiare la regolarità delle soluzioni solo nei punti di frontiera diversi dai vertici.

Sia  $\Omega$  un poligono e siano  $\alpha_i, i = 1, \dots, N$  i suoi vertici. Siano  $\alpha_i, \alpha_{i+1}$  due vertici consecutivi e sia  $\gamma$  il segmento congiungente  $\alpha_i$  con  $\alpha_{i+1}$ . Consideriamo  $B_R(x_0) \subset \mathbb{R}^2$ , palla aperta di centro  $x_0 \in \gamma$  e raggio

$$R < \min(\text{dist}(x_0, \alpha_i), \text{dist}(x_0, \alpha_{i+1})),$$

e poniamo

$$\begin{aligned} B_R^+ &= B_R(x_0) \cap \Omega, \\ \gamma_R &= \partial\Omega \cap B_R(x_0). \end{aligned}$$

Siano inoltre

$$C_\gamma^1(B_R^+) = \{f \in C^1(B_R^+); \text{ tali che } f = 0 \text{ vicino a } \gamma_R\},$$

e

$$H_\gamma^1(B_R^+) = \overline{C_\gamma^1(B_R^+)} \quad \text{nella norma } \|\cdot\|_{H^1(B_R^+)}.$$

**Teorema 2.2.4** ([11] pag. 53). *Sia  $u \in H_\gamma^1(B_R^+)$  una soluzione nel senso delle distribuzioni di  $-\Delta u = f$  in  $B_R^+$  e sia  $f \in L^2(B_R^+)$ . Allora per ogni  $r < R$  si ha  $u \in H^2(B_r^+)$ .*

**Teorema 2.2.5** ([11] pag.57). *Sia  $u \in H_\gamma^1(B_R^+)$  soluzione nel senso delle distribuzioni di  $-\Delta u = f$  in  $B_R^+$  e sia  $f \in H^k(B_R^+)$ . Allora per ogni  $r < R$ , si ha  $u \in H^{k+2}(B_r^+)$ .*

Sia  $u \in H_0^1(\Omega)$  un'autofunzione. Allora, per i risultati sulla regolarità interna  $u \in C^\infty(\Omega)$  e quindi  $u|_{B_R^+} \in H_\gamma^1(B_R^+)$ . Infatti  $C_0^\infty(\Omega)$  è denso in  $H_0^1(\Omega)$ , quindi esiste una successione  $\{\phi_k\}_{k>0} \subset C_0^\infty(\Omega)$  tale che

$$\phi_k \xrightarrow{H_0^1(\Omega)} u, \quad k \rightarrow \infty.$$

D'altra parte se  $\phi_k \in C_0^\infty(\Omega)$ , allora  $\phi_k|_{B_R^+} \in C_\gamma^1(B_R^+)$ , e vale

$$\|\phi_k - u\|_{H_\gamma^1(B_R^+)} \leq \|\phi_k - u\|_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow 0, \quad \text{quando } k \rightarrow \infty.$$

Costruiamo ora la successione decrescente di raggi  $\{r_k\}_{k \geq 0} \subset \mathbb{R}_+$ , definita da

$$r_{k+1} = \frac{R}{4} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \quad (2.8)$$

tale che  $r_{k+1} < r_k < R$ , per la quale vale

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = \frac{R}{4}.$$

Poiché un'autofunzione  $u \in H_0^1(\Omega)$  di (2.7) appartiene anche a  $H_\gamma^1(B_R^+)$  e per l'Osservazione 4 è soluzione nel senso delle distribuzioni di  $-\Delta u = \lambda u$  in  $B_R^+$ , allora per il Teorema 2.2.4 si ha  $\lambda u \in H^2(B_{r_1}^+)$ . Per il Teorema 2.2.5, poiché  $r_2 < r_1$  risulta

$$u \in H^4(B_{r_2}^+)$$

ma ancora, essendo  $r_3 < r_2$  si ha  $\lambda u \in H^4(B_{r_2}^+)$  e quindi  $u \in H^6(B_{r_3}^+)$ . Iterando il ragionamento  $k + 1$  volte risulta che

$$u \in H^{2(k+1)}(B_{r_{k+1}}^+), \quad \forall k \geq 0.$$

Abbiamo perciò costruito una successione decrescente di palle aperte di centro  $x_0 \in \gamma$  che esclude i vertici del poligono e per cui la regolarità aumenta mano a mano che la palla si restringe. Per la scelta della successione  $r_k$ , abbiamo che la palla non si restringe mai fino ad un punto. Facendo variare  $x_0$  su  $\partial\Omega$ , con l'esclusione dei vertici, otteniamo la regolarità voluta su  $\partial\Omega - \{\text{vertici}\}$ . Ciò segue infatti dal Teorema di immersione di Sobolev.

**Teorema 2.2.6** ([11] pag. 31). *Sia  $X$  aperto limitato di  $\mathbb{R}^2$  con frontiera  $\partial X$  Lipschitziana, e sia  $u \in H^k(X)$ . Allora  $u \in C^{k-1,\alpha}(\bar{X}) \forall \alpha < 1$  e  $\forall k > 1$ .*

Concludiamo quindi che se  $u \in H_0^1(\Omega)$  è soluzione debole di (2.7), allora posto  $V = \bigcup_{i=1}^N \{\alpha_i\}$ ,

$$u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^\infty(\bar{\Omega} - V).$$

*Osservazione 7.* Per la regolarità fino al bordo delle autofunzioni abbiamo escluso i vertici del poligono. D'altra parte, nei vertici, ci basterà la sola condizione al bordo nulla, perché per ottenere domini isospettrali, *vertici si incollano sempre con vertici*. Tuttavia il bordo, privato dei vertici, non sempre si *incolla* con il bordo, ma sicuramente non si incolla con i *vertici*. D'altra parte, per il bordo, abbiamo a disposizione la regolarità piena.

## 2.3 Legge di Weyl

Diamo di seguito l'enunciato della legge di Weyl.

**Teorema 2.3.1** (Legge di Weyl). *Sia  $\Omega$  un aperto limitato di  $\mathbb{R}^2$  con frontiera regolare a tratti. Sia  $L$  l'estensione di Friedrichs del laplaciano di Dirichlet su  $\Omega$ . Allora vale*

$$N(\lambda) \sim \frac{|\Omega|}{4\pi} \lambda, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Weyl mostra che date due approssimazioni, costituite da quadrati, del dominio dato e applicando il principio variazionale, sfruttando quindi le proprietà dell'estensione di Friedrichs, si ottiene una stima asintotica per la funzione contante degli autovalori  $N(\lambda)$ .

La legge di Weyl, insieme ai teoremi tauberiani, costituisce il fondamento per i criteri di costruzione di domini isospettrali.

## Capitolo 3

# Costruzione di domini isospettrali piani

Siamo pronti per affrontare la questione della costruzione di domini isospettrali piani. In questo capitolo darò i due esempi principali di Buser, Conway, Doyle, Semmler [5] e di Chapman [6]; infine tratterò brevemente il caso della *trapiantabilità* [10].

Il criterio di Buser, Conway, Doyle, Semmler, è meglio conosciuto come *trapianto*, mentre quello di Chapman come *origami*. Entrambi portano allo stesso risultato ma in maniere diverse. Infatti mentre il trapianto, dati due domini di stessa area, trapianta, nel vero senso della parola, le autofunzioni di una in un'altra e viceversa in modo che si conservi lo spettro, nell'origami, dato un dominio e le sue autofunzioni, si giunge al nuovo dominio, isospettrale a quello di partenza, attraverso ripiegamenti e incollamenti.

### 3.1 Condizioni di compatibilità

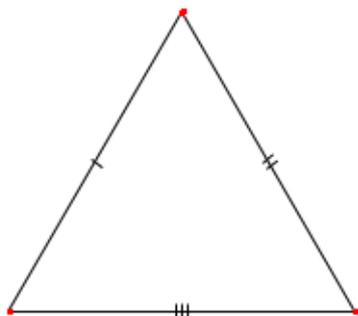


Figura 3.1: Triangolo

Sia dato il triangolo equilatero  $T_0$ , topologicamente aperto, come in figura (3.1). Chiameremo lato 1, lato 2 e lato 3, i rispettivi lati del triangolo, indicati in senso orario partendo da quello contrassegnato con una stanghetta. Attraverso una serie di riflessioni rispetto ai tre lati si ottiene il dominio planare  $\Omega$  come illustrato in figura (3.2). Con questo metodo di costruzioni abbiamo ottenuto una superficie  $\Omega$  naturalmente triangolata e tale che

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=0}^6 \bar{T}_i,$$

dove i  $T_i$  sono i triangoli che in figura sono indicati con  $0, 1, \dots, 6$ . Consideriamo il problema agli autovalori

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{in } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

Per quanto mostrato nel secondo capitolo, ogni autofunzione  $u$  è tale che  $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^\infty(\bar{\Omega} - V)$ , con  $V$  insieme dei vertici di  $\Omega$ . Poniamo

$$u \cong (u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)^T, \quad \text{dove} \quad u_i = u|_{\bar{T}_i} \quad i = 0, \dots, 6$$

dove  $w^T$ , indica  $w$  trasposto. Allora

$$u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^\infty(\bar{\Omega} - V) \quad (3.2)$$

allora

$$u|_{T_i} \in C^0(\bar{T}_i) \cap C^\infty(\bar{T}_i - (V \cap \bar{T}_i)), \quad i = 0, \dots, 6. \quad (3.3)$$

Pertanto, posto  $\bar{T}_i^{\text{reg}} = \bar{T}_i - (\bar{T}_i \cap V)$ , per  $i = 0, \dots, 6$

$$(-\Delta u)|_{\bar{T}_i^{\text{reg}}} = -\Delta(u|_{\bar{T}_i^{\text{reg}}}) = \lambda u|_{\bar{T}_i^{\text{reg}}} \quad \forall i = 0, \dots, 6.$$

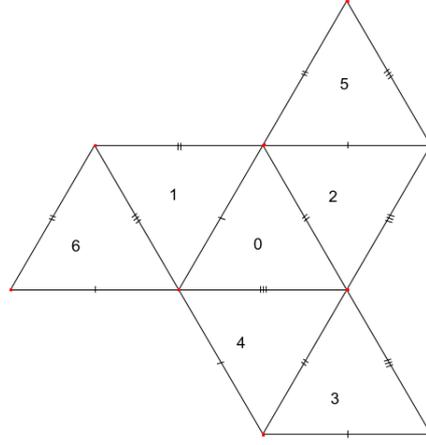


Figura 3.2: Dominio  $\Omega$ .

*Osservazione 8.* Se  $u$  non avesse avuto la proprietà (3.3) allora avremmo avuto soltanto che  $(-\Delta u)|_{T_i} = \lambda u|_{T_i}$ , cioè l'equazione sarebbe stata valida solo nei punti interni e non fino alla frontiera con l'esclusione dei vertici di bordo. In particolare i triangoli interni avrebbero avuto una certa regolarità, mentre quelli esterni un'altra.

In maniera più compatta, possiamo dunque affermare che su ogni triangolo vale ( $\partial_\nu$  indica la derivata nella direzione esterna)

$$\begin{cases} -\Delta u_i = \lambda u_i & \text{in } \bar{T}_i^{\text{reg}} \\ \partial_\nu u_i = \partial_\nu u_j & \text{in } \partial \bar{T}_i^{\text{reg}}, \quad \text{per certi } j. \end{cases} \quad (3.4)$$

Come si può osservare in figura (3.2), la seconda equazione di (3.4) è lecita. Infatti se pensiamo, per fissare le idee, all'autofunzione ristretta  $u_0$ , essa confina lungo il lato 1 di  $T_0$  con  $u_1$ , lungo il lato 2 di  $T_0$  con  $u_2$  e lungo il lato 3 di  $T_0$  con  $u_4$ . Quindi in questo caso si avrà

$$\begin{cases} -\Delta u_0 = \lambda u_0 & \text{in } T_0 \\ \partial_\nu u_0|_{\text{lato } 1} = \partial_\nu u_2|_{\text{lato } 1}, \\ \partial_\nu u_0|_{\text{lato } 2} = \partial_\nu u_4|_{\text{lato } 2}, \\ \partial_\nu u_0|_{\text{lato } 3} = \partial_\nu u_1|_{\text{lato } 3}, \end{cases} \quad (3.5)$$

Le relazioni di (3.5) sono dette *relazioni di compatibilità* e si possono estendere anche alle rimanenti autofunzioni ristrette.

### 3.2 Trapianto: esempio di Buser, Conway, Doyle, Semmler

Consideriamo  $O$  e  $O'$  isometrici, ottenuti entrambi dalla riflessione di uno stesso triangolo principale equilatero  $T_0$ . Diamo una numerazione ai triangoli in modo che ci sia un'unica traslazione da  $T_0$  a  $T'_0$ , e che le altre relazioni tra i triangoli siano solo roto-traslazioni, ma non traslazioni.

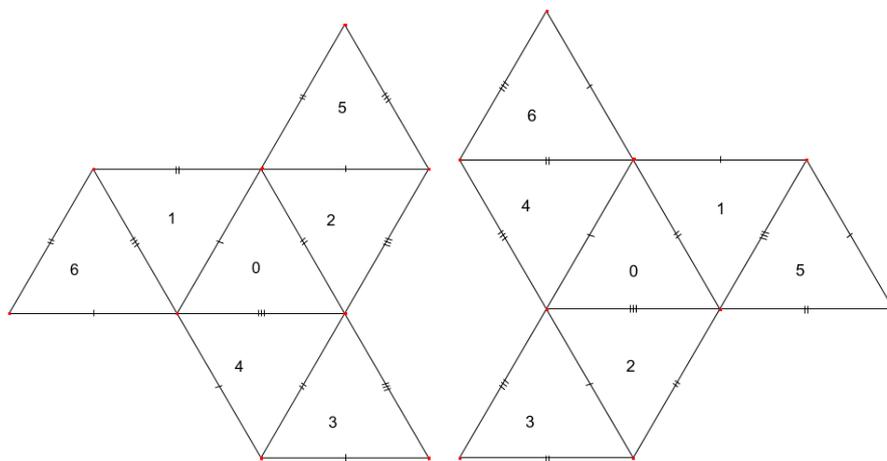


Figura 3.3:  $O$  e  $O'$

**Definizione 3.1.** Siano  $\Omega$  e  $\Omega'$  due domini ottenuti dalla riflessione di uno stesso triangolo  $T_0$ . Si dice che  $T_0 \in \Omega$  è un *triangolo principale* se esiste un triangolo  $T'_0 \in \Omega'$  per cui  $\tau: T_0 \rightarrow T'_0$  è l'unica traslazione tra i triangoli contenuti in  $\Omega$  e i triangoli contenuti in  $\Omega'$ .

**Definizione 3.2.** Siano  $\Omega$  e  $\Omega'$  due domini di  $\mathbb{R}^2$  di tipo poligonale e siano  $\Delta_\Omega, \Delta_{\Omega'}$  i rispettivi operatori di Laplace per i due domini. Indichiamo con  $\text{Spec}(-\Delta_\Omega)$  lo spettro degli autovalori del laplaciano di Dirichlet su  $\Omega$ , e allo stesso modo per  $\Omega'$ . Allora le due superfici si diranno *isospettrali* se  $\text{Spec}(-\Delta_\Omega) = \text{Spec}(-\Delta_{\Omega'})$  e se

$$0 < \lambda_1(\Omega) \leq \lambda_2(\Omega) \leq \dots$$

$$0 < \lambda_1(\Omega') \leq \lambda_2(\Omega') \leq \dots$$

sono i rispettivi autovalori ripetuti secondo molteplicità di  $-\Delta_\Omega, -\Delta_{\Omega'}$  allora  $\lambda_k(\Omega') = \lambda_k(\Omega)$ , per ogni  $k$ .

Premettiamo che ogni isometria che considereremo d'ora innanzi sarà *la restrizione di una isometria di  $\mathbb{R}^2$* . Parleremo quindi solo di *roto-traslazioni*. Poiché i domini  $O$  e  $O'$  sono isometrici, allora sono anche isospettrali. Infatti sia  $f: \bar{O} \rightarrow \bar{O}'$  un'isometria e sia data  $u$  come in (3.1). Allora risulta

$$\begin{cases} -\Delta(u \circ f) = -(\Delta u) \circ f = \lambda(u \circ f) \\ (u \circ f)|_{\partial O} = (u|_{\partial O'} \circ f) = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

I precedenti domini forniscono uno schema di costruzione per ulteriori coppie di domini. Infatti, ad entrambi, si può associare un grafo che è realizzato secondo le relazioni di riflessione del triangolo rispetto ai lati (fig. (3.4)). Ora, una volta definito il grafo associato ai due domini, sostituendo il

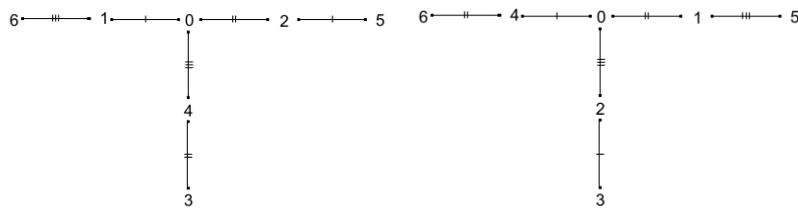


Figura 3.4: Grafo associato a  $O$ , grafo associato  $O'$

triangolo equilatero con uno scaleno, e rispettando le adiacenze stabilite dai grafi, si ottengono due nuovi domini  $\Omega$  e  $\Omega'$  come in figura (3.5), che d'altra parte non sono isometrici, come risulta dal seguente Teorema.

**Teorema 3.2.1.** *Siano  $O$  e  $O'$  i due domini isometrici ottenuti dalla riflessione di uno stesso triangolo equilatero  $T_0$  con angoli come in figura (3.3). Allora i domini  $\Omega$  e  $\Omega'$  (fig. (3.5)) non sono isometrici.*

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che  $f: \Omega \rightarrow \Omega'$  sia una isometria. Sia  $T_1 \subset \Omega$  il triangolo scaleno il cui angolo interno massimo sia adiacente a due lati di bordo. Esso è unico in  $\Omega$ . Sia inoltre  $T'_1 \subset \Omega'$  il corrispondente triangolo scaleno con le stesse proprietà, unico in  $\Omega'$ . Allora esiste un'unica congruenza  $g: T_1 \rightarrow T'_1$  congruenza tale che  $g(T_1) = T'_1$ . L'unicità segue del fatto che i triangoli sono scaleni. Sia

$$g(\Omega) =: \Omega_1.$$

D'altra parte  $\Omega = f^{-1}(\Omega')$ , quindi

$$(g \circ f^{-1})(\Omega') = \Omega_1. \quad (3.7)$$

Ma

$$(g \circ f^{-1})(T'_1) = T_1 \implies (g \circ f^{-1}) = id.$$

Allora per la (3.7) si ha  $\Omega_1 = \Omega'$ , che è un assurdo.  $\square$

*Osservazione 9.* Il Teorema 3.2.1 è valido anche per triangoli isosceli. Infatti, se la deformazione di  $T_0$  fosse stata un triangolo isoscele allora avremmo avuto che  $(g \circ f^{-1})$  sarebbe stata l'identità oppure una riflessione del dominio di partenza. Allora allo stesso modo si giunge all'assurdo.

In questo caso non abbiamo isometrie tra  $\Omega$  e  $\Omega'$ . Ma questi domini sono isospettrali? Affinché lo siano, è necessario (ma non sufficiente) che siano rispettati i seguenti vincoli:

1. che abbiamo stessa area;
2. che vengano rispettate le condizioni al bordo di Dirichlet.

Il primo vincolo è una conseguenza del Teorema Tauberiano. Infatti, siano  $\lambda_k$  autovalori secondo molteplicità di  $-\Delta_\Omega$  (laplaciano di Dirichlet su  $\Omega$ ) e

$\lambda'_k$  autovalori secondo molteplicità di  $-\Delta_{\Omega'}$ , se  $\text{Spec}(-\Delta_{\Omega'}) = \text{Spec}(-\Delta_{\Omega})$ ,

$$\frac{|\Omega|}{4\pi t} \sim \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda'_k t} \sim \frac{|\Omega'|}{4\pi t}, \quad t \rightarrow 0^+,$$

quindi  $|\Omega| = |\Omega'|$ . Nel nostro caso, poiché  $\Omega$  è composta da sette triangoli, la nuova superficie dovrà avere esattamente sette triangoli di stessa area.

Per quanto riguarda il secondo vincolo, questo deriva dalle condizioni al bordo di Dirichlet per il laplaciano per il problema (3.1). Osservando meglio la morfologia di  $\Omega$  si vede che il bordo è composto da tre lati 1, tre lati 2 e tre 3. Questo vuol dire che il nuovo dominio, ottenuto per riflessioni di un triangolo, dovrà essere composto da sette triangoli e avere un bordo di tre lati 1, tre lati 2, tre lati 3.

D'altra parte questi vincoli non sono sufficienti. L'ultimo vincolo indispensabile, quello della uguale dimensionalità degli autospazi, è realizzato tramite il metodo del **TRAPIANTO**. Esso si sviluppa nei seguenti passi.

**STEP 0.** Costruiamo due domini  $O$  e  $O'$  come in figura (3.3), in cui l'unica traslazione sia quella tra i triangoli principali. Dai grafi associati ne costruiamo altri due  $\Omega$  e  $\Omega'$  con triangolo principale scaleno. Siano  $u \cong (u_0, \dots, u_6)^T$  e  $v \cong (v_0, \dots, v_6)^T$  le rispettive autofunzioni di  $\Omega$  e  $\Omega'$  tali che soddisfano le relazioni (3.4), (3.3).

**STEP 1.** Si considerano i triangoli principali di entrambi i domini  $\Omega$  e  $\Omega'$ . Da (3.5) si vede che  $u_0$  confina con continuità con  $u_1, u_2, u_4$ . Quindi fissata l'isometria

$$\tau_{0,k}: T'_0 \rightarrow T_k \quad \text{per, } k = 1, 2, 4,$$

poniamo

$$v_0 = u_1 \circ \tau_{0,1} + u_2 \circ \tau_{0,2} + u_4 \circ \tau_{0,4}.$$

Più in generale si fissano le roto-traslazioni

$$\tau_{h,k}: T'_h \rightarrow T_k.$$

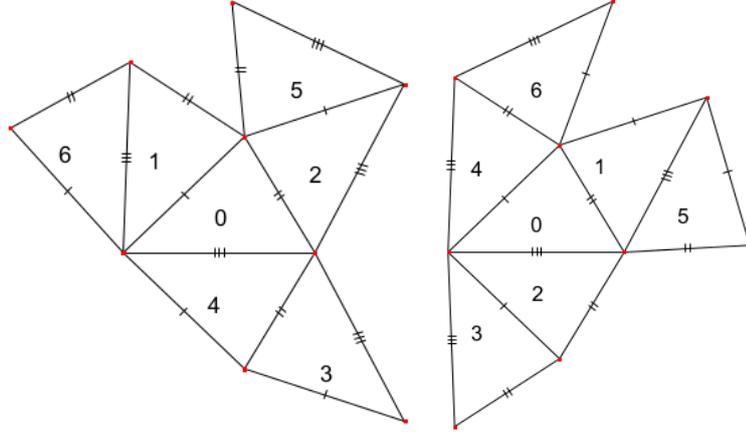


Figura 3.5: Dominio  $\Omega$  isospettrale al dominio *trapiantato*  $\Omega'$

*Osservazione 10.* Questa è una vera e propria operazione di trapianto. Infatti abbiamo preso  $u_1, u_2, u_4$ , le abbiamo staccate da  $\Omega$  e tramite  $\tau_{0,k}$  le abbiamo incollate su  $T'_0$  in modo che i lati del triangolo coincidano. Inoltre c'è da sottolineare che grazie alla (3.3), le operazioni di incollaggio sono lecite perché tutte le restrizioni delle autofunzioni godono della stessa regolarità.

**STEP 2.** In analogia con la (3.4)

$$\begin{cases} -\Delta v_0 = \lambda v_0 & \text{in } T'_0 \\ \partial_\nu v_0|_{\text{lato 1}} = \partial_\nu v_4|_{\text{lato 1}}, \\ \partial_\nu v_0|_{\text{lato 2}} = \partial_\nu v_1|_{\text{lato 2}}, \\ \partial_\nu v_0|_{\text{lato 3}} = \partial_\nu v_2|_{\text{lato 3}}, \end{cases} \quad (3.8)$$

(Ovviamente i lati 1, 2, 3 sono relativi al triangolo  $T'_0$  di  $\Omega'$ ). D'altra parte

$$\partial_\nu v_0|_{\text{lato 1}} = \partial_\nu(u_1 \circ \tau_{0,1} + u_2 \circ \tau_{0,2} + u_4 \circ \tau_{0,4})|_{\text{lato 1}}$$

dove  $v_0$  è l'autofunzione ristretta a  $T'_0 \subset \Omega'$  e le  $u_i$  sono le autofunzioni ristrette a  $T_i \subset \Omega$ . Dunque dalla Figura 3.5 si osservano le seguenti relazioni di compatibilità

$$\begin{aligned} \partial_\nu(u_1 \circ \tau_{0,1})|_{\text{lato 1}} &= \partial_\nu(u_0 \circ \tau_{0,0})|_{\text{lato 1}} \\ \partial_\nu(u_2 \circ \tau_{0,2})|_{\text{lato 1}} &= \partial_\nu(u_5 \circ \tau_{0,5})|_{\text{lato 1}} \\ \partial_\nu(u_4 \circ \tau_{0,4})|_{\text{lato 1}} &= -\partial_\nu(u_4 \circ \tau_{0,4})|_{\text{lato 1}} \end{aligned}$$

dove l'ultima relazione di compatibilità è conseguenza del fatto che  $T_4 \subset \Omega$  ha il lato 1 di bordo. Una volta note queste relazioni ragionando allo stesso modo sugli altri lati e tenendo conto anche delle relazioni di compatibilità di  $v_0$  date da (3.8), risulta

$$\begin{aligned} \partial_\nu v_0|_{\text{lato1}} &= \partial_\nu(u_0 \circ \tau_{0,0})|_{\text{lato1}} + \partial_\nu(u_5 \circ \tau_{0,5})|_{\text{lato1}} - \partial_\nu(u_4 \circ \tau_{0,4})|_{\text{lato1}} \\ &= \partial_\nu v_4|_{\text{lato1}} \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \partial_\nu v_0|_{\text{lato2}} &= \partial_\nu(u_1 \circ \tau_{0,1} + u_2 \circ \tau_{0,2} + u_4 \circ \tau_{0,4})|_{\text{lato2}} \\ &= \partial_\nu(u_0 \circ \tau_{0,0})|_{\text{lato2}} - \partial_\nu(u_1 \circ \tau_{0,1})|_{\text{lato2}} - \partial_\nu(u_3 \circ \tau_{0,3})|_{\text{lato2}} \\ &= \partial_\nu v_1|_{\text{lato2}} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \partial_\nu v_0|_{\text{lato3}} &= \partial_\nu(u_1 \circ \tau_{0,1} + u_2 \circ \tau_{0,2} + u_4 \circ \tau_{0,4})|_{\text{lato3}} \\ &= \partial_\nu(u_0 \circ \tau_{0,0})|_{\text{lato3}} - \partial_\nu(u_2 \circ \tau_{0,2})|_{\text{lato3}} - \partial_\nu(u_6 \circ \tau_{0,6})|_{\text{lato3}} \\ &= \partial_\nu v_2|_{\text{lato2}}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Quindi

$$\begin{aligned} (3.9) &\iff v_4 = u_0 \circ \tau_{2,0} - u_4 \circ \tau_{2,4} + u_5 \circ \tau_{2,5} \\ (3.10) &\iff v_1 = u_0 \circ \tau_{4,0} - u_1 \circ \tau_{4,1} + u_3 \circ \tau_{4,3} \\ (3.9) &\iff v_2 = u_0 \circ \tau_{1,0} + u_2 \circ \tau_{1,2} + u_6 \circ \tau_{1,6}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

In questo modo abbiamo definito le restrizioni dell'autofunzione trapiantata. Ora ragionando su  $v_2, v_1, v_4$  come in  $v_0$ , si ottengono le restanti  $v_3, v_5, v_6$ . Quindi troviamo che:

$$\begin{aligned} v_0 &= u_1 \circ \tau_{0,1} + u_2 \circ \tau_{0,2} + u_4 \circ \tau_{0,4} \\ v_1 &= u_0 \circ \tau_{1,0} - u_1 \circ \tau_{1,1} + u_3 \circ \tau_{1,3} \\ v_2 &= u_0 \circ \tau_{2,0} - u_2 \circ \tau_{2,2} + u_6 \circ \tau_{2,6} \\ v_3 &= u_1 \circ \tau_{3,1} - u_5 \circ \tau_{3,5} - u_6 \circ \tau_{3,6} \\ v_4 &= u_0 \circ \tau_{4,0} - u_4 \circ \tau_{4,4} + u_5 \circ \tau_{4,5} \\ v_5 &= -u_3 \circ \tau_{5,3} + u_4 \circ \tau_{5,4} - u_6 \circ \tau_{5,6} \\ v_6 &= u_2 \circ \tau_{6,2} - u_3 \circ \tau_{6,3} - u_5 \circ \tau_{6,5}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

La funzione  $v$  su  $\Omega'$ , così ottenuta, le cui restrizioni ai triangoli  $\overline{T'_k}$  sono le  $v_k$ , è un'autofunzione di  $-\Delta_{\Omega'}$  relativa all'autovalore  $\lambda$ . Infatti si ha subito che su ogni triangolo  $T'_k$  di  $\Omega'$  vale

$$(-\Delta v)|_{T'_k} = -\Delta v_k = \lambda v_k = \lambda v|_{T'_k}$$

con validità di tale equazione sui lati interni ad  $\Omega'$  comuni a triangoli adiacenti, e le condizioni di Dirichlet sui lati di bordo. Il fatto che essa sia non nulla segue dalla prova del Teorema di isospettralità che daremo in seguito (Teorema 3.5.1).

Rileggiamo ora le precedenti relazioni su un unico triangolo ad esempio  $T'_0$ . Per cui consideriamo l'isometria

$$\sigma_{0,h}: T'_0 \rightarrow T'_h \quad \text{con } h = 0, \dots, 6.$$

tale che

$$\tau_{h,k} \circ \sigma_{0,h} = \tau_{0,k}.$$

Allora componendo ciascuna delle equazioni precedenti, sia a destra che a sinistra, con  $\sigma_{0,h}$  si ottengono

$$\begin{aligned} v_0 \circ \sigma_{0,0} &= u_1 \circ \tau_{0,1} + u_2 \circ \tau_{0,2} + u_4 \circ \tau_{0,4} \\ v_1 \circ \sigma_{0,1} &= u_0 \circ \tau_{0,0} - u_1 \circ \tau_{0,1} + u_3 \circ \tau_{0,3} \\ v_2 \circ \sigma_{0,2} &= u_0 \circ \tau_{0,0} - u_2 \circ \tau_{0,2} + u_6 \circ \tau_{0,6} \\ v_3 \circ \sigma_{0,3} &= u_1 \circ \tau_{0,1} - u_5 \circ \tau_{0,5} - u_6 \circ \tau_{0,6} \\ v_4 \circ \sigma_{0,4} &= u_0 \circ \tau_{0,0} - u_4 \circ \tau_{0,4} + u_5 \circ \tau_{0,5} \\ v_5 \circ \sigma_{0,5} &= -u_3 \circ \tau_{0,3} + u_4 \circ \tau_{0,4} - u_6 \circ \tau_{0,6} \\ v_6 \circ \sigma_{0,6} &= u_2 \circ \tau_{0,2} - u_3 \circ \tau_{0,3} - u_5 \circ \tau_{0,5}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Ora possiamo definire la matrice  $T \in M_{7 \times 7}(\mathbb{R})$  dei coefficienti

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

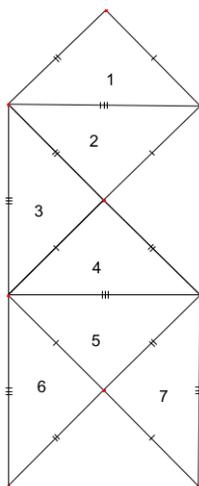
$T$  è detta matrice di *trapianto* ed è facile verificare che essa è invertibile.

In generale, i domini  $O$  e  $O'$  non definiscono una sola ed unica coppia di domini  $\Omega$  e  $\Omega'$  isospettrali, ma generano una famiglia di domini planari isospettrali. Infatti al variare del triangolo principale si hanno coppie distinte di domini isospettrali ma non isometrici. Inoltre si possono creare più coppie variando il numero di triangoli ed i grafi di riferimento associati.

Ora che tutte le autofunzioni sono state trapiantate con continuità e che è stata definita la matrice di trapianto, rispettando tutte le relazioni di compatibilità si può mostrare l'isospettralità che vedremo nella Sezione 3.5.

### 3.3 Origami: esempio di Chapman

Vediamo ora l'altro metodo di costruzione di superfici isospettrali introdotto per la prima volta da Chapman: l'origami. Sia dato il dominio  $D$ , ottenuto come prima da riflessioni di triangoli lungo i suoi lati, per cui valgono i risultati della sezione (3.1).

Figura 3.6: Dominio  $D$ 

Vogliamo costruire un nuovo dominio  $D'$  che sia isospettrale a  $D$  seguendo l'esempio di Chapman. A differenza del trapianto qui non abbiamo ancora il dominio di arrivo  $D'$ , infatti questo si otterrà direttamente alla conclusione dell'operazione di origami. Dato il dominio  $D$ , l'origami consiste nel definire prima nuove copie del dominio originale,  $D_1, D_2, D_3$ , che sono roto-traslazioni del dominio di partenza, e poi prendere ciascuna di queste e attraverso dei piegamenti lungo i lati del triangolo si ottengono i rispettivi origami  $D'_1, D'_2, D'_3$ . In seguito, con opportune operazioni di incollamento, si ottiene  $D'$ . Anche in questo caso le operazioni di piegamento e incollamento sono consentite grazie alla continuità delle autofunzioni. I vincoli dati per il trapianto devono essere rispettati anche per l'origami, in più il nuovo metodo ne impone altri tre:

- ogni piega si deve trovare lungo il bordo esterno;
- le tre copie vanno incollate in modo che si conservino le relazioni di compatibilità tra le restrizioni dell'autofunzione;
- ogni origami deve avere condizioni al bordo nulle.

Per una migliore comprensione del metodo ho introdotto le matrici di adiacenza  $M_k$ , per  $k = 1, 2, 3$ , dove l'indice indica il lato a cui ci si riferisce. Ad esempio  $M_1$  sarà la matrice di adiacenza di  $D$  lungo il lato 1. La matrice  $M_k$  ha le entrate  $M_k(i, j)$  così costruite:

$M_k(i, j) = 1$  se il triangolo  $j$ -esimo confina con lo  $i$ -esimo triangolo lungo il lato  $k$ , oppure se il  $k$ -esimo lato è di bordo, altrimenti  $M_k(i, j) = 0$ .

Pertanto, come vedremo meglio in seguito, le matrici di adiacenza non solo definiscono le relazioni di confine tra i triangoli lungo i lati, ma ci aiutano a capire quali sono le relazioni di compatibilità che devono essere rispettate.

**STEP 0.** Consideriamo la prima copia  $D_1$  come in figura

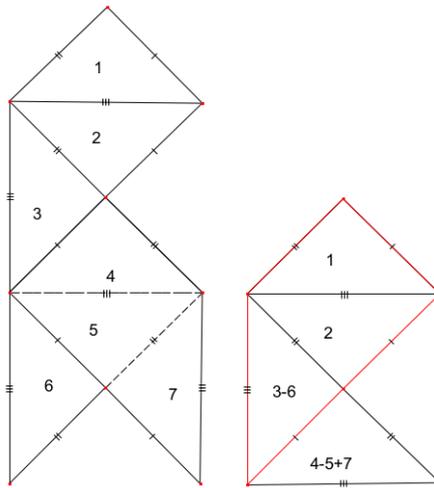


Figura 3.7: Copia  $D_1$  e origami  $D'_1$

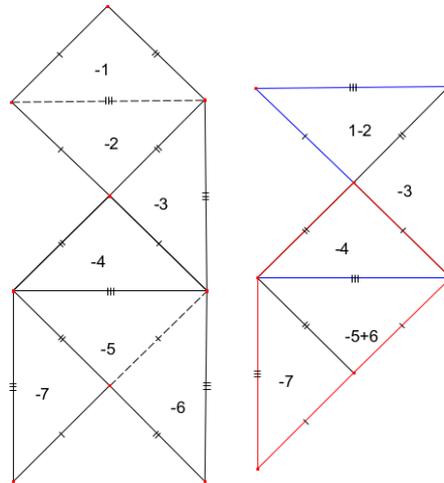
Indichiamo con  $i = 1, \dots, 7$  i triangoli e con  $u \cong (u_1, u_2, \dots, u_7)^T$  le autofunzioni ristrette ai rispettivi triangolo. Nel seguito, quando parleremo di piegamenti di triangoli, intendiamo un piegamento che coinvolge anche l'autofunzione ristretta che vive dentro tale triangolo. Quindi parlando ad esempio del triangolo 1 intenderemo  $u|_{T_1}$ . Il segno meno indica che il dominio è stato riflesso e quindi che l'autofunzione avrà davanti il segno meno. Il dominio  $D'_1$  di Figura 3.7 è il risultato dei piegamenti lungo i lati tratteggiati.

Consideriamo la matrice di adiacenza di  $D$  rispetto al lato 1 data da

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si nota che le relazioni di confine, lungo il lato 1, sono tutte rispettate tranne quella sul triangolo 7. Infatti, dalla matrice di adiacenza si legge che il triangolo 7 lungo il lato 1 deve andare in se stesso, cioè deve avere un lato di bordo. Dall'origami  $D'_1$  risulta che il triangolo 7 lungo il lato 1 confina con 3-6. D'altra parte da  $M_1$  il triangolo 3 confina con il 4, e in  $D'_1$  questo è ancora vero; il triangolo 6, da  $M_1$ , confina con 5, e in  $D'_1$  è ancora vero. Questo vuol dire che triangoli 3-6 e 4-5+7 non si incollano con continuità, quindi si forma una discontinuità lungo il lato 1. Quindi un futuro incollamento dovrà sicuramente compensare tale discontinuità inserendo un 7 in 3-6. Inoltre si osserva che i piegamenti sono stati fatti coinvolgendo solo i lati 2 e 3 e le discontinuità coinvolgono solo il lato 1.

**STEP 1.** Passiamo alla seconda copia  $D_2$  e al rispettivo origami  $D'_2$ :

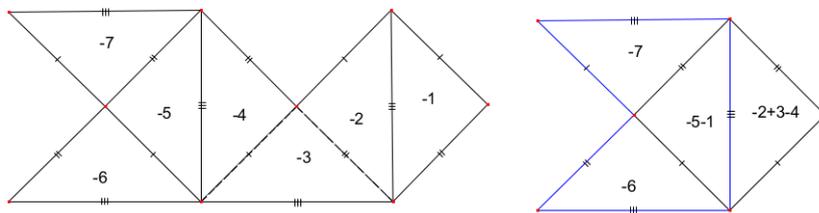
Figura 3.8: Copia  $D_2$  e origami  $D'_2$ 

Consideriamo anche qui la matrice di adiacenza  $M_2$  rispetto al lato 2 data da

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Anche in questo caso le linee tratteggiate in (3.8) indicano i lati secondo i quali sono stati fatti i piegamenti. Inoltre i piegamenti sono stati fatti lungo il lato 1 e 3. Analizzando  $M_2$  e  $D'_2$ , si nota che in questo caso ci sono due discontinuità lungo il lato 2: una riguarda il triangolo 1, che da  $M_2$  dovrebbe avere un bordo su lato 2 e invece in  $D'_2$  confina con il triangolo 3, e l'altra il triangolo 6, che da  $M_2$  dovrebbe avere un bordo, mentre in  $D'_2$  confina con il 7. Quindi con l'incollamento dovremo compensare entrambe le discontinuità.

**STEP 2.** Infine consideriamo  $D_3$  e  $D'_3$

Figura 3.9: Copia  $D_3$  e origami  $D'_3$ 

e la relativa matrice di adiacenza

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

I piegamenti sono avvenuti lungo i lati 1 e 2, e si ha una sola discontinuità che coinvolge il triangolo 3.

**STEP 3.** Ora, per completare l'opera, è necessario incollare i tre origami in modo che il numero dei triangoli sia esattamente 7, che il nuovo dominio non sia isometrico a  $D$  e che vengano rispettate le relazioni di compatibilità, cioè devono essere rispettate le relazioni di adiacenza.

Nella figura (3.10) ho riassunto le operazioni fatte, evidenziato, colorando in maniera opportuna, le sovrapposizioni necessarie a compensare le discontinuità e in modo da avere esattamente sette triangoli. Infine ho mostrato il risultato di tutte le operazioni.

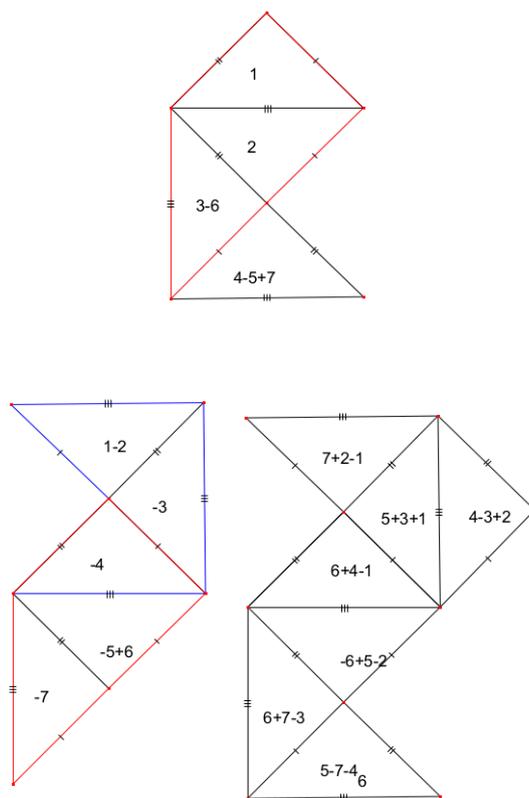
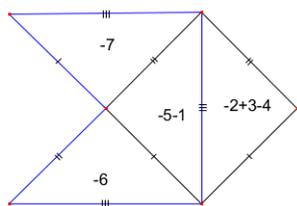


Figura 3.10: Origami  $D_2'$  e nuovo dominio  $D'$



Dando ora una coerente numerazione ai triangoli di  $D'$ , dalla Figura 3.3, osserviamo che i triangoli ottenuti sono esattamente sette e che  $D$  e  $D'$  per il l'Osservazione 9 non sono isometrici.

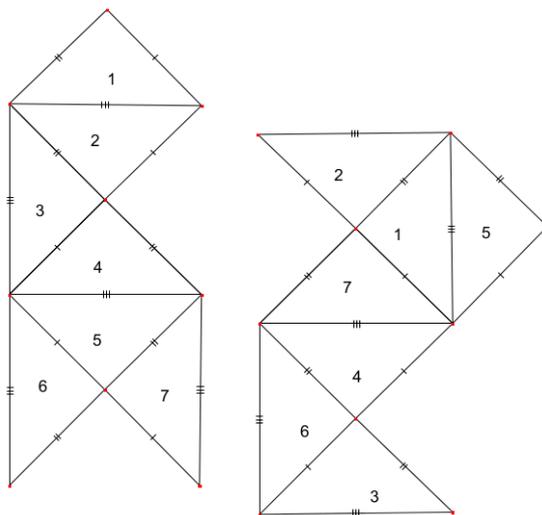


Figura 3.11: Dominio  $D$  e primo origami  $D'$

Quindi con l'origami abbiamo definito un' isometria

$$\tau_{h,k}: T'_h \rightarrow T_k.$$

tale che:

$$\begin{aligned}
 v_1 &= u_1 \circ \tau_{1,1} + u_3 \circ \tau_{1,3} + u_5 \circ \tau_{1,5} \\
 v_2 &= -u_1 \circ \tau_{2,1} + u_2 \circ \tau_{2,2} + u_7 \circ \tau_{2,7} \\
 v_3 &= u_5 \circ \tau_{3,5} - u_7 \circ \tau_{3,7} - u_4 \circ \tau_{3,4} \\
 v_4 &= -u_2 \circ \tau_{4,2} + u_5 \circ \tau_{4,5} - u_6 \circ \tau_{4,6} \\
 v_5 &= +u_2 \circ \tau_{5,2} - u_3 \circ \tau_{5,3} + u_4 \circ \tau_{5,4} \\
 v_6 &= -u_3 \circ \tau_{6,3} u_6 \circ \tau_{6,6} + u_7 \circ \tau_{6,7} \\
 v_7 &= -u_1 \circ \tau_{7,1} + u_4 \circ \tau_{7,4} + u_6 \circ \tau_{7,6}.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

### 3.4 Dal trapianto all'origami

In questa sezione voglio mostrare che i metodi dell'origami e del trapianto sono equivalenti. Siano dati i domini  $D_1$  e  $D'_1$ , ottenuti riflettendo un certo numero di volte un triangolo equilatero rispetto ai suoi lati. Anche in questo caso abbiamo una coppia di domini isometrici composta da sette triangoli. D'altra parte questa coppia è distinta dalla coppia  $O$  e  $O'$  vista in Sezione (3.2), e genererà una nuova famiglia di domini distinti rispetto alla precedente.

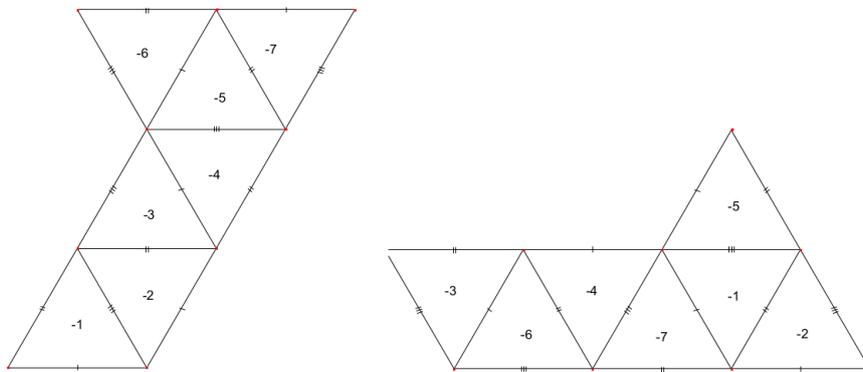


Figura 3.12: Dominio  $D_1$  e  $D'_1$

Fissiamo una numerazione dei triangoli in modo che l'unica traslazione sia quella da  $T_5$  a  $T'_5$ . Secondo il metodo del trapianto, ai due domini sono associati i due grafi di Figura 3.4 che applicati ad un triangolo, in questo caso isoscele, definiscono due nuovi domini che chiameremo  $D$  e  $D'$ .

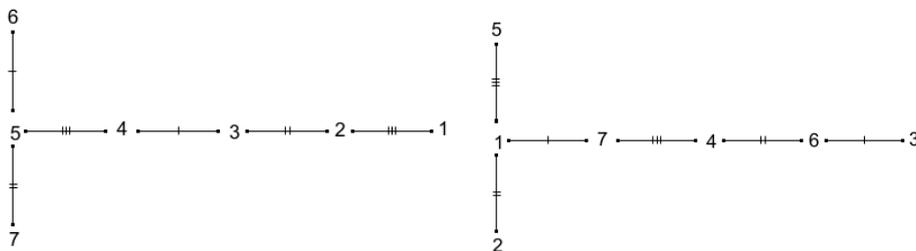
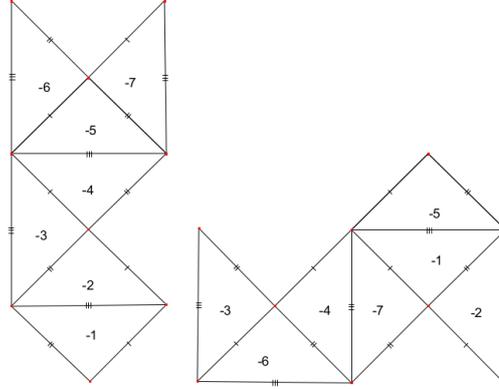


Figura 3.13: Grafo di  $D_1$  e grafo di  $D'_1$

Figura 3.14: Dominio  $D$  e  $D'$ 

Iniziamo ad inserire le autofunzioni nel triangolo  $T'_5$ , l'unico per cui esiste una traslazione. È importante osservare che i due triangoli coinvolti nella prima operazione non sono entrambi interni. Occorre pertanto prestare più attenzione. Infatti se fossero stati entrambi interni potevamo considerare molto semplicemente

$$v_5 = -u_4 \circ \tau_{5,4} - u_6 \circ \tau_{5,6} - u_7 \circ \tau_{5,7}$$

dove  $\tau_{h,k}: T'_h \rightarrow T_k$  è un'isometria (roto-traslazione) tra i triangoli. Ora è facile verificare che questa autofunzione non soddisfa le relazioni di compatibilità. Pertanto poiché  $T_5$  è interno e confina con continuità lungo il lato 3 con  $T_4$ , e poiché  $T'_5$  ha i lati 1 e due di bordo, allora

$$-v_5 = -u_4 \circ \tau_{5,4} \quad \text{in } T'_5.$$

D'altra parte, sfruttando le relazioni di compatibilità di  $D$ , risulta

$$-\partial_\nu v_5|_{\text{lato 1}} = 0 = -\partial_\nu u_4 \circ \tau_{5,4}|_{\text{lato 1}} = -\partial_\nu u_3 \circ \tau_{5,3}|_{\text{lato 1}} \iff v_5 = -u_4 \circ \tau_{5,4} + u_3 \circ \tau_{5,3}$$

( $-\partial_\nu v_5|_{\text{lato 1}} = 0$  perché il lato 1 in  $T'_5$  è un bordo). Inoltre

$$\begin{aligned} -\partial_\nu v_5|_{\text{lato 2}} = 0 &= -\partial_\nu u_4 \circ \tau_{5,4}|_{\text{lato 2}} + \partial_\nu u_3 \circ \tau_{5,3}|_{\text{lato 2}} \\ &= 0 + \partial_\nu u_2 \circ \tau_{5,2}|_{\text{lato 2}} \\ &\iff \\ -v_5 &= -u_2 \circ \tau_{5,2} + u_3 \circ \tau_{5,3} - u_4 \circ \tau_{5,4}. \end{aligned}$$

Quindi abbiamo fissato la prima autofunzione ristretta  $v_5$ , ora iterando il ragionamento come in sezione (3.2) otteniamo

$$\begin{aligned}
-v_1 &= -(u_1 \circ \tau_{1,1} + u_3 \circ \tau_{1,3} + u_5 \circ \tau_{1,5}) \\
-v_2 &= -(u_1 \circ \tau_{2,1} + u_2 \circ \tau_{2,2} - u_7 \circ \tau_{2,7}) \\
-v_3 &= -(-u_4 \circ \tau_{3,4} + u_5 \circ \tau_{3,5} - u_7 \circ \tau_{3,7}) \\
-v_4 &= -(-u_2 \circ \tau_{4,2} + u_5 \circ \tau_{4,5} - u_6 \circ \tau_{4,6}) \\
-v_5 &= -(+u_2 \circ \tau_{5,2} - u_3 \circ \tau_{5,3} + u_4 \circ \tau_{5,4}) \\
-v_6 &= -(-u_3 \circ \tau_{6,3} + u_6 \circ \tau_{6,6} + u_7 \circ \tau_{6,7}) \\
-v_7 &= -(-u_1 \circ \tau_{7,1} + +u_4 \circ \tau_{7,4} u_6 \circ \tau_{7,6}).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Ora applicando una riflessione ai domini  $D$  e  $D'$  otteniamo proprio gli stessi domini e le stesse autofunzioni dell'esempio di Chapman realizzati con l'origami.

## 3.5 Isospettralità

**Teorema 3.5.1.** *Siano  $\Omega$  e  $\Omega'$  una coppia di superfici di  $\mathbb{R}^2$  ottenute con il metodo del trapianto, dunque non isometriche. Si ha che  $\Omega$  e  $\Omega'$  sono isospettrali.*

*Dimostrazione.* Siano

$$E_\lambda = \{u \in L^2(\Omega); -\Delta u = \lambda u, u|_{\partial\Omega} = 0\},$$

$$\tilde{E}_\lambda = \{v \in L^2(\Omega'); -\Delta v = \lambda v, v|_{\partial\Omega'} = 0\},$$

con  $\Omega$  e  $\Omega'$  superfici ottenute con il metodo del trapianto. Poniamo

$$u \cong (u_0, \dots, u_6)^T, \quad \text{dove } u_i = u|_{\overline{T}_i}, \quad T_i \subset \Omega, \quad i = 0, \dots, 6,$$

$$v \cong (v_0, \dots, v_6)^T, \quad \text{dove } v_i = v|_{\overline{T}'_i}, \quad T'_i \subset \Omega', \quad i = 0, \dots, 6.$$

Prendiamo  $u \in E_\lambda$ . Allora, tramite la procedura di trapianto, abbiamo definito una mappa lineare

$$I_\lambda: E_\lambda \rightarrow \tilde{E}_\lambda, \quad u \mapsto v = \text{trapianto di } u.$$

Mostriamo che  $I_\lambda$  è iniettiva. Supponiamo che  $I_\lambda u = v = 0$ . Allora

$$v_i = 0, \quad i = 0, \dots, 6.$$

Rileggendo i  $v_i$  su un unico triangolo come in (3.14), e posto

$$\hat{v} \cong (v_0 \circ \sigma_{0,0}, \dots, v_6 \circ \sigma_{0,6})^T, \quad \hat{u} \cong (u_0 \circ \tau_{0,0}, \dots, u_6 \circ \tau_{0,6})^T,$$

allora

$$0 = \hat{v} = \mathbb{T}\hat{u},$$

dove  $\mathbb{T} \in M_{7 \times 7}(\mathbb{R})$  è la matrice di trapianto. Pertanto, dall'invertibilità di  $\mathbb{T}$  si ha  $\hat{u} = 0$  e dunque  $u = 0$ . Quindi  $\ker(I_\lambda) = \{0\}$ , cioè  $I_\lambda$  è iniettiva. Ma allora  $\dim(E_\lambda) \leq \dim(\tilde{E}_\lambda)$ , e poiché il trapianto è una procedura reversibile, si ha anche  $\dim(E_\lambda) \geq \dim(\tilde{E}_\lambda)$  e dunque l'uguaglianza delle dimensioni.

Questo prova che ogni autovalore di  $-\Delta_\Omega$ , ripetuto secondo molteplicità, è anche autovalore di  $-\Delta_{\Omega'}$ , con la *stessa* molteplicità. D'altra parte ciò esaurisce lo spettro di  $-\Delta_{\Omega'}$ . Infatti se ci fosse un autovalore  $\lambda'$  di  $-\Delta_{\Omega'}$  che non è anche autovalore di  $-\Delta_\Omega$ , con il metodo del trapianto da  $\Omega'$  ad  $\Omega$  possiamo costruire un'autofunzione di  $-\Delta_\Omega$  con quello stesso autovalore, che implica  $u = 0$  e quindi  $v = 0$  che è assurdo. Questo conclude la prova.  $\square$

Poiché i metodi del trapianto e dell'origami, come mostrato nella sezione precedente sono del tutto equivalenti, allora anche nel caso dell'origami si producono domini non isometrici ma isospettrali.

### 3.6 Forte Trapiantabilità

Ancora oggi lo studio dei domini isospettrali è piuttosto attivo. Nel 2010, Giraud [9] ha sviluppato un nuovo concetto legato alle superfici isospettrali

planari, la *forte trapiantabilità*, secondo la quale due superfici sono trapiantabili, se date le rispettive matrici di adiacenza  $M_k$  e  $N_k$ , allora esiste una matrice invertibile  $T$  tale che  $TM_k = N_kT$ , per ogni  $k$ . Dimostrano quindi che l'isospettralità è una diretta conseguenza della trapiantabilità. D'altra parte questa nuova classe di domini è più ristretta. Infatti applicando tale definizione alle superfici considerate nei precedenti capitoli, queste non sono fortemente trapiantabili secondo la definizione. Inoltre mettono in luce i diversi legami che questo tipo di problema ha con la geometria finita. In realtà, nonostante Giraud sia partito dalle stesse coppie di superfici descritte da Buser, Conway, Doyle, Semmler, attraverso particolari operazioni, giunge ad una nuova coppia che presenta relazioni di adiacenza e matrice di trapianto differenti dalla coppia di partenza. Pertanto definiscono una nuova classe di domini planari.

Inoltre ci sono questioni ancora aperte relative a tale argomento. Infatti sono diverse le domande che ci possiamo porre. È possibile costruire superfici isospettrali non isometriche con frontiere di classe  $C^\infty$ ? Perché le coppie di superfici più semplici sono quelle con sette triangoli?



# Bibliografia

- [1] Beals R., Greiner P. C. *Strings, Waves, Drums: Spectra and Inverse Problems*, Analysis and Application, vol. 7 (2009).
- [2] Bérard P., *Domaines Plans Isospectraux à la Gordon-Webb-Wolpert: une preuve terre à terre*, Séminaire de Théorie spectrale et géométrie, vol.10 (1991-1992), 131-147.
- [3] Bérard P., *Transplantation et isospectralité. I*, Mathematische Annalen, vol. 292 (1992), 547-559.
- [4] Bérard P., *On the Costruction of Isospectral Riemannian Manifolds*, vol. 95 (1988), 823-839.
- [5] Buser P., Conway J., Doyle P., Semmler K. D., *Some Planar Isospectral Domains*, IMRN, vol. 110 (1994), 1-22.
- [6] Chapman S. J., *Drums That The sound the Same*, The American Mathematical Monthly, vol. 102 (1995), 124-138.
- [7] Davies E. B., *Spectral Theory and Differential Operators*, Cambridge University (1995).
- [8] Gilbarg D, Neil S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer (1977).
- [9] Giraud O. *Finite Geometries and Diffractive Orbits in Isospectral Billiards*, Journal of Physics A: Mathematical and General, vol. 38 (2005), L477-L483.

- 
- [10] Giraud O., Thas K., *Hearing the shape of drums: Mathematical and physical aspects of isospectrality*, Reviews of modern physics, vol.82 (2010), 2213-2255.
- [11] Giusti, E., *Equazioni Ellittiche del Secondo Ordine*, Quaderni dell'Unione Matematica Italiana, (1978).
- [12] Kac, M., *Can One Hear the Shape of a Drum?* The American Mathematical Monthly, 73(4) (1966), 1-23.
- [13] Karamata J., *Neuer Beweis und Verallgemeinerung der Tauberschen Sätze, welche die Laplace'sche und Stieljes Transformation betreffen*, J. Reine Angew., vol. 164 (1931), 27-39.
- [14] Leininger C. J., McReynolds D. B., Neumann W. D., Reid A. W., *Length and eigenvalue equivalence*, vol.24 (2007), 24.
- [15] Okada Y., Shudo A., *Equivalence between isospectrality and isolength spectrality for certain class of planar billiard domains* J. Phys. A: Math., vol. 34 (2001), 5911.
- [16] Parmeggiani A., *Spectral Theory of Non-Commutative Harmonic Oscillator: An Introduction*, Springer (1992).
- [17] Pleijel A., *A Study of Certain Green Functions with Application in the Theory of Vibrating Membranes*, Arkiv för Matematik, vol. 2 (1954), 553-56.
- [18] Sunada T., *Riemannian Coverings and Isospectral Manifolds*, The Annals of Mathematics, vol. 121 (1985), 169-186.

# Ringraziamenti

Ovviamente ringrazio me stessa per la tenacia e la forza di volontà!

Ringrazio Luca, il mio ragazzo, perché sono sette anni che si porta dietro una “croce non indifferente”!

Ringrazio Serena, amica e fondamentale compagna di studi, senza la quale sarebbe stato tutto più difficile.

Ringrazio Federica, mia sorella, per avermi fatto ridere e incazzare nei momenti più cruciali.

Ringrazio Francesca, mia sorella, per avermi detto che sono una disadatta!

Ringrazio doppiamente le mie sorelle perché senza di loro non avrei avuto idoli!

Ringrazio Tommaso, perché è il mio coinquilino (che implica una serie di qualità), ma soprattutto per le infinite perle calcistiche!

Ringrazio Fabio perché è mio cognato!

Ringrazio il Prof. Parmeggiani per la pazienza, il tempo e per avermi aperto un mondo.

Ringrazio il Dottor Pallucchini per i consigli e per le correzioni della mia tesi.

Ringrazio infine tutti, presenti e non, chi ha sempre creduto in me, ma soprattutto chi ha avuto la geniale idea di mettermi al mondo!

