

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Triennale in Matematica

**BILIARDI CIRCOLARI
CON
TRAPPOLE**

Tesi di Laurea triennale in Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Marco Lenci

Presentata da:
Michele Agostini

Sessione 2
Anno Accademico 2011/2012

*L'importante non è quello che desideri,
ma quello che fai per ottenerlo...*

Introduzione

Scopo di questa tesi è quello di illustrare la dinamica e la meccanica all'interno dei biliardi circolari visti da un punto di vista matematico come sistemi dinamici. Essi possiedono una naturale applicazione $b : S^1 \times (0, \pi) \rightarrow S^1 \times (0, \pi)$ che a una coppia (P, ϕ) (dove P è un punto del bordo del dominio e ϕ è l'angolo formato con la tangente al bordo da una retta passante per P), associa la coppia (P', ϕ') dove $(P'$ è il secondo punto di incontro tra la retta e il bordo e ϕ' è l'angolo formato dalla retta con la tangente al bordo nel punto P'). Le traiettorie che un punto materiale compie nel biliardo sono completamente determinate dalle orbite della applicazione b , in particolare vi è una corrispondenza biunivoca tra orbite e traiettorie periodiche. Come vedremo, nel biliardo circolare il *numero di rotazione* intuitivamente, nel caso in cui prendiamo l'angolo di rotazione di tipo razionale, indica il numero di urti contro il bordo e il numero dei giri fatti prima di ripassare dalla stessa posizione (con la stessa velocità). Introducendo la scomposizione di un numero irrazionale tramite le frazioni continue ed analizzando l'esempio particolare del valore aureo, vedremo come possiamo stimare attraverso particolari dati iniziali anche il comportamento dell'orbita irrazionale. Di seguito affronteremo il problema di porre *trappole* sul bordo del nostro biliardo, e conoscere il primo istante di caduta della traiettoria del punto materiale all'interno di esse. I risultati trovati mostrano come indipendentemente dalla loro posizione e in relazione al tipo di angolo di rotazione considerato, le *trappole* possono avere al massimo tre determinate lunghezze a cui corrispondono determinati tempi di entrata.

Indice

Introduzione	i
1 Meccanica e dinamica del sistema	1
2 Biliardi nel cerchio	5
3 Biliardi circolari con trappole	11
3.1 Caso θ razionale	12
3.2 Caso θ irrazionale	13
3.3 Risultati completi mediante le Frazioni Continue	16
4 La Sezione Aurea	21
4.1 Proprietà matematiche del numero	22
4.2 Stima del tempo di caduta nella trappola	26
Conclusioni	29
Bibliografia	31

Capitolo 1

Meccanica e dinamica del sistema

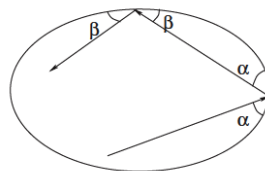


Figura 1.1: riflessione nel biliardo

Un biliardo (piano) è un sistema meccanico costituito da un punto materiale che si muove internamente ad una determinata regione Q del piano (tavola). Per noi la regione Q è aperta e semplicemente connessa, e il suo bordo, ∂Q , è una curva chiusa regolare tranne al più un numero finito di punti. I punti regolari di Q sono quelli per cui esiste tangente. Supponiamo che il moto interno del tavolo sia rettilineo ed uniforme e che il punto, quando colpisce un punto del bordo del tavolo, rimbalzi in maniera elastica verso l'interno, seguendo la regola che *l'angolo di incidenza è uguale all'angolo di riflessione*, ove l'angolo di incidenza è quello formato dal segmento di traiettoria incidente con la tangente al bordo del biliardo nel punto di contatto. Analogamente per l'angolo di riflessione, come in figura(1.1); il processo d'urto con il bordo (o rimbalzo) è elastico se non vi è perdita o acquisizione di energia.

Ricordiamo che un punto si muove di moto rettilineo uniforme quando la sua velocità è costante nel tempo. In tal caso la sua traiettoria è una retta nello spazio (in particolare

nel piano). Se il moto avviene nel piano, la velocità è un vettore v di R^2 . Dette (v_1, v_2) le sue componenti cartesiane (equivalentemente componenti lungo la base canonica), il modulo della velocità è $v := \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2}$.

Nel caso del moto di un punto materiale sul tavolo da biliardo, il punto cambia direzione secondo la prescrizione geometrica dell'uguaglianza fra angolo di incidenza e angolo di riflessione ma il modulo della sua velocità rimane invariato. Gli angoli di riflessione e di incidenza vengono definiti come gli angoli formati dalla retta tangente a ∂Q nel punto di collisione con, rispettivamente, la parte di traiettoria pre- e post-collisione.

Il punto si muove in maniera rettilinea all'interno del tavolo e modifica il proprio moto solo a causa degli urti alle pareti. Fisicamente: fra una collisione con il bordo e l'altra non avviene niente di significativo; i soli istanti che contano sono solo quelli in cui avvengono gli urti. Per questo motivo è semplice ridurre questo sistema continuo ad un sistema dinamico discreto in cui consideriamo solamente le collisioni sul bordo.

Definizione 1.1. Si definisce *biliardo* un sistema formato da un aperto convesso Q , limitato con bordo di classe C^1 in \mathbb{R}^2 ; in cui consideriamo il moto di un punto materiale che si muove in moto rettilineo uniforme con velocità costante e che, quando urta contro ∂Q , viene riflesso secondo la regola: *l'angolo di riflessione è uguale all'angolo di incidenza*

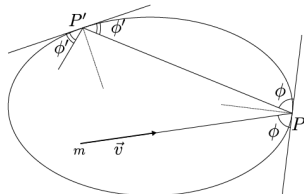


Figura 1.2: Biliardo convesso in un aperto di \mathbb{R}^2

Prendiamo ora in considerazione i punti in cui la traiettoria del moto incontra ∂Q e l'angolo che la velocità forma con la tangente al bordo nel punto di incidenza, vedi figura(1.2). Se P è il punto $\in \partial Q$ e $\phi \in (0, \pi)$, prendiamo il segmento all'interno di Q che parte da P e forma un angolo ϕ con la tangente a ∂Q in P (ϕ è inteso in senso antiorario), esso termina in P' (secondo punto di incontro tra il segmento e ∂Q), e forma un angolo ϕ' (inteso in senso orario) con la tangente a ∂Q nel punto P' .

Risulta così naturale definire un'applicazione

$$b: \partial Q \times (0, \pi) \longrightarrow \partial Q \times (0, \pi)$$

ponendo

$$b: (P, \phi) \mapsto (P', \phi')$$

.

Osserviamo che tale applicazione può essere estesa a tutto $\partial Q \times [0, \pi]$ prendendo le restrizioni $b|_{\partial Q \times (0)} = Id$ e $b|_{\partial Q \times (\pi)} = Id$.

La dinamica del biliardo è completamente determinata dalla funzione b , e possiamo così ricondurre lo studio del biliardo all'analisi del corrispondente sistema dinamico discreto generato dalla questa mappa . Analizziamo il caso forse più semplice di tutti, e cioè quello nel cerchio unitario.

Capitolo 2

Biliardi nel cerchio

Un primo esempio molto semplice di biliardo è quello all'interno del cerchio unitario $\subset \mathbb{R}^2$; dal momento che il cerchio ha simmetria rotazionale, l'angolo di incidenza che la traiettoria forma con la tangente alla circonferenza si conserva dopo ogni urto, chiamiamo ϕ quest'angolo. Sia x la coordinata lungo la circonferenza ($x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$), allora l'applicazione b è data semplicemente da:

$$b : (x, \phi) \rightarrow (x + 2\phi, \phi)$$

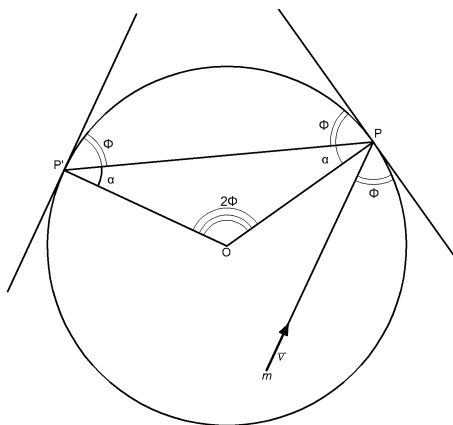


Figura 2.1: Il triangolo OPP' è isoscele e perciò $\alpha = \alpha$ e dunque $\phi = \phi$

Come la figura (2.1) mostra, ad ogni collisione la coordinata x aumenta sempre di 2ϕ ($\text{mod } 2\pi$) e siccome la seconda componente della mappa b non cambia, consideriamo solo l'evoluzione della prima componente e cioè :

$$x \mapsto x + 2\phi \pmod{2\pi}$$

che mi individua la successiva collisione sul bordo dalla precedente attraverso la rotazione sul cerchio dell'angolo 2ϕ . Otteniamo così una sequenza di punti d'impatto $\{x_n\}$ così definita :

$$x_n = x_0 + n(2\phi)$$

Ci semplifichiamo la vita prendendo la coordinata $s = \frac{x}{2\pi}$ ($s \in \mathbb{S}^1 := \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$) e il parametro $\theta = \frac{2\phi}{2\pi}$.

In queste nuove coordinate l'evoluzione del punto d'impatto è data dalla mappa

$$T : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \quad \text{definita da } T(s) = s + \theta \pmod{1}.$$

Un primo risultato mostra che se $\theta = \frac{p}{q}$ con p e $q \in \mathbb{N}$ e coprimi tra loro $(p, q) = 1$, allora l'orbita di T_θ è periodica di periodo q e il punto compie p giri all'interno del cerchio; in tal caso diciamo che il *numero di rotazione* dell'orbita è $\frac{p}{q}$, ed il periodo è q . Si vede infatti facilmente che, per ogni $s \in \mathbb{S}^1$, $q = \min\{k \in \mathbb{Z}^+ \text{ t.c. } \mathbf{T}_\theta^k(s) = s\}$.

Dimostrazione. Sia $p = p_1 p_2 p_3 \dots p_n$ la scomposizione in fattori primi irriducibili di p , analogamente $q = q_1 q_2 q_3 \dots q_m$ la scomposizione in fattori primi irriducibili di q . Se per assurdo esiste $l = 1, \dots, q-1$ t.c. $\mathbf{T}_\theta^l(s) = s \quad \forall s \in \mathbb{S}^1$ vale $l \frac{p}{q} = 0 \pmod{1}$ cioè $\exists k$ per cui $l \frac{p}{q} = k$. Quindi, visto che p non contiene nessuno dei fattori $q_j \quad \forall j = 1, \dots, m$; ogni q_j deve essere contenuto nella scomposizione in irriducibili di $l \Rightarrow l = a q_1 \dots q_m$ cioè $l \geq q$. *Assurdo.* \square

Se invece θ è irrazionale l'orbita della mappa è densa dentro il cerchio come mostra il prossimo teorema.

Definizione 2.1. Definiamo l'orbita $T_\theta(s) = \{T_\theta^k(s)\} = \{s + k\theta \pmod{1}\}$ con $k = 0, \dots, \infty$.

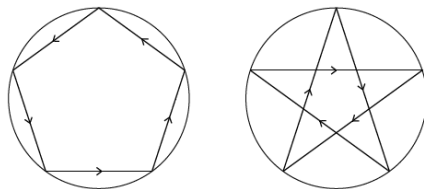


Figura 2.2: Esempio di orbite periodiche in un biliardo circolare con $\frac{p}{q} = \frac{1}{5}, \frac{3}{5}$

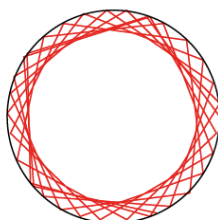


Figura 2.3: Esempio di orbita non periodica in un biliardo circolare

Teorema 1. *Se θ è irrazionale, allora l'orbita $T_\theta(s)$, $\forall s \in \mathbb{S}^1$ è densa. In altre parole, ogni arco $\mathbf{I} \subset \mathbb{S}^1$ contiene punti di quest'orbita.*

Dimostrazione. Prendiamo s come punto iniziale. Partendo da s , noi percorriamo il cerchio facendo passi di lunghezza θ . Definiamo n come il minimo elemento dell'insieme: $\{k \mid s + (k+1)\theta > s\}$. Dopo $n+1$ passi, noi ritorniamo in s e lo superiamo. Si noti che non ritorniamo esattamente in s , altrimenti $\theta = \frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$. Preso $t = s + n\theta \bmod 1$ come punto immediatamente prima di s e $l = t + \theta \bmod 1$ il punto dopo. Uno tra i segmenti \overline{ts} o \overline{sl} ha lunghezza al massimo $\theta/2$. Per fissare le idee, assumiamo che questo sia il segmento \overline{ts} , e chiamo θ_1 la sua lunghezza. Si nota che anche θ_1 è ancora irrazionale. Consideriamo n -esima iterazione T_θ^n . Questa è la mappa nel cerchio, in senso negativo, attraverso l'angolo $\theta_1 \leq \theta/2$. Noi possiamo prendere questa T_{θ_1} come nuova rotazione

nel cerchio e applicare lo stesso argomento ad essa.

Si ottiene così una sequenza di rotazioni attraverso l'angolo irrazionale $\theta_k \rightarrow 0$; ognuna di queste rotazioni è un'iterazione di T_θ . Per ogni arco \mathbf{I} nel cerchio, posso scegliere k grande tale che $\theta_k < |\mathbf{I}|$. Allora la T_{θ_k} -orbita di s non può evitare \mathbf{I} , e concludiamo la dimostrazione. \square

Continuando lo studio della sequenza $s_n = s + n\theta \bmod 1$ notiamo che se $\theta = \frac{p}{q}$, la sequenza consiste in q elementi che sono distribuiti nel cerchio in modo molto regolare. Allora ci domandiamo se dobbiamo aspettarci un simile distribuzione regolare anche per θ irrazionali.

La nozione adeguata in questo caso è quella di *equidistribuzione*, o *distribuzione uniforme* della traiettoria nel cerchio. Preso un arco \mathbf{I} , chiamo $k(n)$ il numero di termini nella sequenza $s_0 \dots s_n$ che cadono in \mathbf{I} . La sequenza è chiamata *equidistribuita nel cerchio* $\mathbb{S}^1 (= \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}})$ se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n} = |\mathbf{I}| \quad (2.1)$$

per ogni \mathbf{I} . Il prossimo Teorema è dato da *Kronecker e Weyl* ed è un risultato più forte del *Teorema (1)*.

Teorema 2. *Se θ è irrazionale, allora la sequenza $s_n = s + n\theta \bmod 1$ è equidistribuita nel cerchio.*

Dimostrazione. Stabiliremo un'affermazione più generale: se $f(x)$ è una funzione integrabile sul cerchio, allora:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(s_j) = \int_0^1 f(s) ds; \quad (2.2)$$

Per dedurre l'equidistribuzione si prende f come funzione caratteristica dell'arco \mathbf{I} , che vale 1 dentro l'intervallo e 0 altrove. Di conseguenza l'uguaglianza (2.2) diventa la (2.1). Si può approssimare la funzione $f(s)$ con un polinomio trigonometrico ovvero attraverso una combinazione lineare di $\cos(ks)$ e $\sin(ks)$ con $k = 0, 1, \dots, N$. Scriviamo l'uguaglianza (2.2) come serie armonica o, meglio, prendendo $f(s) = \exp(iks)$ (che è una funzione complessa con valori le cui parti, reali e immaginarie, sono k -th serie armoniche). Se

$k = 0$, cioè, $f = \exp(0) = 1$ allora entrambi i lati della formula (2.2) equivalgono a 1. Se $k \geq 1$, la parte sinistra della formula (2.2) diventa una progressione geometrica:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \exp^{ikj\theta} = \frac{1}{n} \frac{\exp^{ijn\theta} - 1}{\exp^{ik\theta} - 1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Dall'altra parte anche $\int_0^1 \exp(iks) ds = 0$; e così otteniamo l'uguaglianza (2.2). \square

Teorema 3. *I Teoremi (1) e (2) hanno anche una versione in più dimensioni. Preso il toro $\mathbf{T}^n = \frac{\mathbb{R}^n}{\mathbb{Z}^n}$. Considerato $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ definiamo la rispettiva rotazione sul toro come:*

$$\mathbb{T}_a : (x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_1 + a_1, \dots, x_n + a_n)$$

I numeri a_1, \dots, a_n sono chiamati indipendenti negli interi se l'equazione

$$k_0 + k_1 a_1 + \dots + k_n a_n = 0, \quad \text{con } k_i \in \mathbb{Z}$$

implica $k_0 = k_1 = \dots = k_n = 0$.

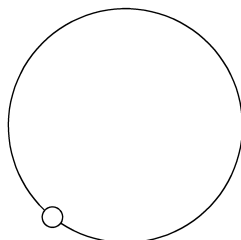
Il teorema multidimensionale sulla rotazione nel toro afferma che se a_1, \dots, a_n sono indipendenti negli interi, allora ogni orbita di \mathbb{T}_a è *densa e equidistribuita* nel toro \mathbf{T}^n .

Capitolo 3

Biliardi circolari con trappole

Presi i risultati ottenuti nel capitolo precedente; decidiamo liberamente di fissare lungo il bordo del biliardo delle *trappole*.

L'intervallo $\mathbb{L} \in \mathbb{S}^1$ si dice *trappola* se il sistema dinamico è tale che ogni volta che il punto materiale cade in \mathbb{L} la dinamica si ferma, ovvero l'orbita termina nella trappola.



Ridimensioniamo il problema prendendo θ ($0 < \theta < 1$) e $r = 0, 1, 2, \dots \in \mathbb{Z}$ ed analizziamo il comportamento della sequenza generata da $\{r\theta\}$ sul bordo del biliardo. Questo corrisponde a mettere l'origine nel punto iniziale della traiettoria, che non è una perdita di generalità.

Con la notazione $\{r\theta\}$ si intende considerare la parte frazionaria del numero, ovvero la differenza $r\theta - [r\theta]$, dove il secondo termine della sottrazione indica la parte intera dello stesso numero.

Definiamo la *Trappola o buca* come un opportuno intervallo $\mathbb{L} = [c, d] \in [0, 1[$, fissato ad arbitrio, e scelta come stato iniziale l'origine affrontiamo il problema di dare una stima del primo istante r -esimo per cui la sequenza sopra considerata finisce all'interno della *Trappola* e termina la sua *corsa*. Notiamo che preso θ otteniamo risultati diversi dipendenti dal tipo di parametro, dalla posizione e dalla lunghezza dell'intervallo scelto.

3.1 Caso θ razionale

Nel caso di $\theta = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, la sequenza è periodica all'interno del cerchio e la sua traiettoria è univocamente determinata dall'insieme $\{\frac{kp}{q}\}$ con $k=0,1,\dots,q-1$. Visto che per $k = q$ torno nella mia posizione iniziale è facile capire che i punti della sequenza cadono nell'intervallo \mathbb{L} solo se esso è preso in modo opportuno. Siano k_1, \dots, k_l , i k tali che

$$\{k_i \frac{p}{q}\} \in [c, d] \pmod{1} \iff k_i p \in [qc, qd] \pmod{q}.$$

Quindi preso θ razionale trovo $\mathbb{I} := \{k_1, \dots, k_l\}$ insieme dei numeri tale che

$$\{k_i \frac{p}{q}\} \in \mathbb{L} = [c, d]$$

allora vediamo che il primo istante r per cui la sequenza considerata cade nella *Trappola* è il minimo k tale che $\{pk = k_i \pmod{1}\}$, per qualche $i = 1, \dots, l$.

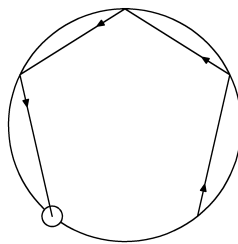


Figura 3.1: Esempio di orbita periodica in un biliardo circolare con $\theta = \frac{p}{q} = \frac{1}{5}$, allora $r = 4$

Può accadere anche che l'insieme $\mathbb{I} := \{k_1, \dots, k_l\}$ sia uguale all'insieme $\{\emptyset\}$, allora in questo caso non trovo nessun r , minimo tra i k_i , per cui la mia sequenza vada nell'in-

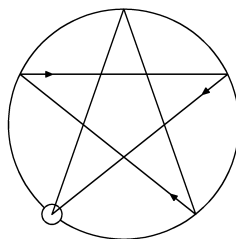


Figura 3.2: Esempio di orbite periodiche in un biliardo circolare con $\theta = \frac{p}{q} = \frac{3}{5}$, allora $r = 3$

tervallo e ciò equivale a dire che \mathbb{L} non include uno dei q punti di incontro della sequenza sul bordo del cerchio.

3.2 Caso θ irrazionale

Nel caso θ sia irrazionale, $\theta \neq \frac{p}{q} < 1$, la sequenza $\{r\theta\}$ è densa sul bordo del biliardo e dunque andrà sicuramente nell'intervallo \mathbb{L} ovunque esso sia stato fissato e qualunque sia la sua lunghezza, vedi *Teoremi (1), (2)* del capitolo precedente. Ora cercheremo di stimare il primo istante per cui questo avviene.

Riferendoci all'articolo [?] otteniamo i risultati seguenti.

Per un dato θ ($0 < \theta < 1$) e $r = 0, 1, 2, \dots, N$ c'è un problema connesso sulla parte frazionaria $\{r\theta\}$, chiamato:

il *problema del passo*: dato il set

$$\{1\theta\}, \{2\theta\}, \dots, \{N\theta\} \quad (3.1)$$

ordinato in modo crescente in $\mathbb{S}^1 \simeq [0, 1]$, ci poniamo il problema di calcolare i passi della sequenza, cioè le lunghezze degli intervalli in cui la sequenza data partiziona $[0, 1]$.

I risultati che otteniamo mostrano che per N o \mathbb{L} generali, i buchi ed i passi hanno nel caso prendo θ irrazionale solo tre possibili lunghezze denotate: α, β, γ , di cui una è la somma delle altre due: $\gamma = \alpha + \beta$.

Risultato semplice per il problema del passo

Definizione 3.1. Definiamo $\{a\theta\}$ e $\{b\theta\}$ come il più piccolo e il più grande membro della sequenza $\{r\theta\}$ opportunamente ordinata a partire dalla posizione iniziale zero, e scrivo:

$$\alpha = \{a\theta\}, \quad \beta = 1 - \{b\theta\}, \quad (3.2)$$

$$A = [a\theta], \quad B = 1 + [b\theta], \quad (3.3)$$

Osserviamo che $\{(a+b)\theta\}$ può essere: $\{a\theta\} + \{b\theta\}$ oppure $\{a\theta\} + \{b\theta\} - 1$. Nel primo caso essa supera $\{b\theta\}$, nel secondo caso è minore di $\{a\theta\}$, e risulta quindi che $a+b$

non è uno dei $1, 2, \dots, N$. Allora vale che

$$N \geq \max(a, b) \quad (3.4)$$

$$N \leq a + b - 1 \quad (3.5)$$

e i punti $\{r\theta\}$ sono distinti per $0 \leq r < a + b$.

Definito $P_r = \{r\theta\} \in [0, 1]$ (che qui identifichiamo con \mathbb{S}^1), trovo che il cerchio risulta diviso in $N + 1$ intervalli consecutivi dai punti:

$$P_r \quad (r = 1, \dots, N);$$

se $P_r P_s$ è un generico passo si dice che P_r è il punto immediatamente precedente a P_s , e si scrive P_r *i.p.* a P_s . Alcuni di questi passi (incluso il passo iniziale $\overline{OP_a}$), sono di lunghezza α ed altri (incluso il passo finale $\overline{OP_b}$) sono di lunghezza β .

Lemma 4. *I punti P_r sono di tre tipi che indicheremo con $P_r = \{P_s, P_t, P_u\}$ ed i corrispondenti passi assumono le rispettive lunghezze :*

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq P_s \leq N - a; \quad P_s \text{ i.p. a } P_{s+a} \Rightarrow N + 1 - a \text{ passi di lunghezza } \alpha \\ N - a \leq P_t \leq b; \quad P_t \text{ i.p. a } P_{t+a-b}; \Rightarrow a + b - N - 1 \text{ passi di lunghezza } \alpha + \beta \\ b \leq P_u \leq N; \quad P_u \text{ i.p. a } P_{u-b} \Rightarrow N + 1 - b \text{ passi di lunghezza } \beta \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Dal sistema è facile notare che una lunghezza è la somma delle altre due. La dimostrazione del *Lemma (4)* viene dettagliatamente illustrata nel articolo [?].

3.3 Risultati completi mediante le Frazioni Continue

Un risultati completo per il *problema del passo* si ottiene dato θ per N generale che verifica (3.4), (3.5). Gli $N + 1$ passi del *Lemma (4)* riempiono l'intervallo $[0, 1]$ e la somma delle loro lunghezze restituisce la formula di base:

Proposizione 5.

$$b\{a\theta\} + a(1 - \{b\theta\}) = b\alpha + a\beta = 1. \quad (3.7)$$

Questa può essere scritta come:

$$aB - bA = 1 \Rightarrow \frac{A}{a} < \theta < \frac{B}{b}, \quad (3.8)$$

e da questa forma consideriamo la scomposizione di θ in frazione continua o meglio la sua approssimazione tramite due numeri razionali.

Per un θ dato siano a e b una coppia di interi che soddisfano (3.7), o equivalentemente (3.8) con A, B definiti come in (3.3). Se $\{a\theta\}$ e $\{b\theta\}$ sono il più piccolo e il più grande elemento della sequenza $\{1\theta\}, \{2\theta\}, \dots, \{N\theta\}$, per qualche N , allora le soluzioni del sistema (3.6) sono i risultati semplici per il *problema del passo* dato tale N .

Come la (3.8) suggerisce, queste soluzioni sono fornite dalle migliori approssimazioni razionali di θ : chiamati intermedi o principali convergenti della sua espressione in frazione continua.

Definizione 3.2. La frazione continua semplice per l'irrazionale $\theta \in]0, 1[$ è una scomposizione del tipo:

$$\theta = [0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots] = \left[\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_n + \dots}}}} \right] \quad (3.9)$$

ove $a_i \in \mathbb{N}$, $\forall i \in \mathbb{Z}^+$.

Chiamiamo $a_m = \frac{p_m}{q_m} = [0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_m]$ i suoi principali convergenti.

Sia $q_m = (0, a_1, \dots, a_m) \Rightarrow p_m = (a_1, a_2, \dots, a_m)$.

Infatti il numeratore del m-esimo approssimante $\frac{p_m}{q_m}$ di $[0, a_1, a_2, \dots, a_m]$ è il denominatore del (m-1)-esimo approssimante di $[a_1, a_2, \dots, a_m]$.

Definizione 3.3. Definiamo inoltre la *successione di Halton* η_m per θ come:

$$\eta_m = (-1)^m (q_m \theta - p_m) \quad (> 0) \quad (3.10)$$

Con $q_{m+1} = a_{m+1}q_m + q_{m-1}$, e analogamente $p_{m+1} = a_{m+1}p_m + p_{m-1}$, allora

$$\eta_{m+1} = a_{m+1}\eta_m + \eta_{m-1}; \quad (3.11)$$

infatti per definizione :

$$\eta_{m+1} = (-1)^{m+1} (q_{m+1}\theta - p_{m+1}),$$

e sostituendo le uguaglianze sopra al posto di q_{m+1} e p_{m+1} otteniamo la (3.11). Inoltre valgono:

$$q_m p_{m-1} - p_m q_{m-1} = (-1)^m, \quad q_m \eta_{m-1} + \eta_m q_{m-1} = 1$$

Esse possono essere dimostrate per induzione considerato che il minor valore richiesto per completezza formale é dato da $m = -1$, per il quale le identità sopra elencate assumono i seguenti valori:

$$q_{-1} = 0, \quad q_0 = 1, \quad p_{-1} = 1, \quad p_0 = 0, \quad \eta_{-1} = 1.$$

Risultati completi problema del passo

Per l'irrazionale θ scomposto nel suo sviluppo in frazione continua è un risultato importante dell'articolo [?] che la *successione di Halton* definisce il set completo di soluzioni della *formula di base* (3.7). Innanzitutto, ogni $N > 0$ può essere scomposto come:

$$N = (n + 1)q_m + q_{m-1} + k \quad (3.12)$$

dove $m \geq 0$, $0 \leq n \leq a_{m+1} - 1$ e $(k = 0, 1, \dots, q_{m-1})$.

È un risultato di [?] che tale decomposizione sia unica. In questo caso le soluzioni di (3.6), ovvero i parametri che determinano univocamente i passi di $\{1\theta\}, \dots, \{N\theta\}$ sono i seguenti:

$$\begin{aligned} a &= q_m \\ b &= (n + 1)q_m + q_{m-1} \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \eta_m \\ \beta &= \eta_{m-1} - (n - 1)\eta_m \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} A &= p_m \\ B &= (n + 1)p_m + p_{m-1} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Le equazioni sopra date sono per un m pari; per un m dispari, si deve scambiare (a, α, A) con (b, β, B) . $\{\frac{A}{a}\}$ e $\{\frac{B}{b}\}$ sono i principali e intermedi convergenti di θ .

Le nuove soluzioni del sistema per il *problema del passo* per un N dato sono:

lunghezza passo:

$$\begin{aligned} \alpha &= \eta_m, \\ \alpha + \beta &= \eta_{m-1} - n\eta_m, \\ \beta &= \eta_{m-1} - (n + 1)\eta_m. \end{aligned} \quad (3.16)$$

rispettivo numero di intervalli:

$$\begin{aligned} & nq_m + q_{m-1} + k + 1, \\ & q_m - (k + 1), \\ & (k + 1). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Queste mi danno i risultati completi cercati.

Capitolo 4

La Sezione Aurea

Ora cerchiamo di avere una disequaglianza che lega il massimo passo di lunghezza $\alpha + \beta$ ad N in maniera che, ogni volta che conosciamo la lunghezza della trappola, che chiamiamo δ , possiamo stimare il valore di N per cui vale $\alpha_N + \beta_N \leq \delta$. Cioè diamo una stima dal basso del tempo affinché almeno uno dei punti P_r ($r = 0, 1, \dots, N$) sia contenuto nella trappola \mathbb{L} .

Siccome i risultati precedenti si ottengono mediante la scomposizione in frazione continua di θ , consideriamo il caso particolare di un θ che abbia uno sviluppo facile, come la *Sezione Aurea*.

La sezione aurea, o numero aureo, corrisponde a una delle possibili soluzioni dell'equazione

$$x^2 - x - 1 = 0 \tag{4.1}$$

le cui radici sono

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618033989\dots \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0,618033989\dots$$

Tra le due radici, quella che è più importante a livello geometrico, è la positiva, ovvero il numero irrazionale $1,618033989\dots$ che chiamiamo ϕ . La radice negativa dell'equazione presa in valore assoluto ha un valore pari di $0,618033989\dots$; questa viene spesso indicata con la lettera Φ e chiamata sezione argentea.

4.1 Proprietà matematiche del numero

Diamo di seguito alcune proprietà del *numero aureo*. Per le dimostrazioni (e approfondimenti) vedi articoli [?] e [?].

- 1) Il numero aureo è l'unico numero non naturale il cui quadrato e il suo reciproco mantengono inalterata la sua parte decimale:

$$\begin{cases} \phi = 1,618033989\dots; \\ \phi^2 = 2,618033989\dots; \\ \frac{1}{\phi} = 0,618033989\dots; \end{cases} \quad (4.2)$$

- 2) ϕ è il risultato di una frazione continua illimitata, avente tutti i termini uguali a 1 come denominatore

$$\phi = [1, 1, 1, 1, \dots, 1, \dots] = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

Ponendo:

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \dots}$$

si nota che il denominatore di questa frazione illimitata è uguale ϕ , per cui possiamo scriverla come:

$$1 = \phi + \frac{1}{\phi} \Rightarrow \phi^2 = \phi + 1,$$

che è l'equazione generatrice della sezione aurea. Il che dimostra che lo sviluppo in frazioni continue $[1; 1, 1, 1, 1, \dots]$ è quello di ϕ . Il viceversa vale per l'unicità della frazione continua, che è un fatto noto che qui non approfondiamo.

- 3) Ogni numero, benchè irrazionale, può infatti essere espresso, in maniera unica, da una frazione continua:

$$\theta = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}}}$$

scritta più brevemente come:

$$\theta = [a_0; a_1; a_2; a_3; a_4; \dots].$$

La frazione può essere interrotta in qualsiasi punto:

$$[a_0; \dots; a_n] := a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots \frac{1}{a_n}}}}$$

rappresentando a_0 la parte intera, l'approssimazione sarà determinata di volta in volta dai a_1, \dots, a_n presi in considerazione. Ritornando al caso di ϕ , ($a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$), essendo i numeratori della frazione continua tutti 1, ne risulterà che ϕ è il numero con l'approssimazione più imprecisa, cioè il numero aureo è il numero più difficile da approssimare con un rapporto fra due interi razionali, da qui l'affermazione di *numero più irrazionale fra gli irrazionali*.

- 4) La successione di Fibonacci è una successione in sequenza di numeri interi naturali ciascun numero della quale è il risultato della somma dei due precedenti. La successione si definisce matematicamente assegnando i valori dei due primi termini: $F_0 := 0$ $F_1 := 1$ e chiedendo che per ogni successivo sia $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \forall n > 1$. La successione di Fibonacci possiede moltissime proprietà di grande interesse, ad

esempio facendo il rapporto di due numeri consecutivi di Fibonacci noto che questo approssima sempre meglio il numero aureo man mano che si procede nella successione. Provare questo equivale a dimostrare che il limite della successione del rapporto fra numeri di Fibonacci consecutivi è ϕ , ovvero:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi \quad (4.3)$$

La relazione può essere dimostrata per induzione e supponendo che le precedenti frazioni convergano ad un valore definito x . La successione di Fibonacci è una serie ricorsiva i cui termini sono uguali a: $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$; possiamo quindi riscrivere il limite come:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n};$$

cioè uguale a 1 più il reciproco della frazione, che ripassando per il passaggio a limite possiamo riscrivere come

$$x = 1 + \frac{1}{x}.$$

risolvendo, il limite darà ϕ .

L'equazione generatrice $\phi^2 - \phi - 1 = 0$ posso scriverla come $\phi^2 = \phi + 1$, e vale $\phi^3 = \phi\phi^2 = \phi(\phi + 1) = \phi^2 + \phi$, allora procedendo per induzione su n si trova che:

$$\phi^n = \phi^{n-1} + \phi^{n-2}.$$

Ora verifichiamo che vale anche l'uguaglianza

$$\phi^n = F_n \phi + F_{n-1} \quad \forall n > 0$$

.

Dimostrazione. Per $n = 2$, $F_2 = 1$ e $F_1 = 1 \Rightarrow \phi^2 = \phi + 1$, e questo sappiamo che è vero, allora supponiamo l'uguaglianza vera per n e la verifichiamo per induzione per $n + 1$, otteniamo:

$$\phi^{n+1} = \phi\phi^n = F_n\phi^2 + F_{n-1}\phi = F_n(\phi + 1) + F_{n-1}\phi = (F_n + F_{n-1})\phi + F_n$$

□

Se l'uguaglianza vale per ϕ , si verifica sempre per induzione anche per $(1 - \phi)$, essendo essa soluzione dell'equazione di partenza. Allora sappiamo anche che:

$$(1 - \phi)^n = F_n(1 - \phi)^n + F_{n-1}.$$

Sottraendo le uguaglianze risulta che vale:

$$\phi^n - (1 - \phi)^n = F_n(\phi - (1 - \phi)) \Rightarrow F_n = \frac{\phi^n - (1 - \phi)^n}{\phi - (1 - \phi)} = \frac{\phi^n - (1 - \phi)^n}{\sqrt{5}}.$$

Quindi si dimostra che la funzione generatrice della successione F_n si basa proprio su ϕ :

$$F_n = \frac{\phi^n - (1 - \phi)^n}{\sqrt{5}}$$

ed essendo $(1 - \phi)^n < 1$ in valore assoluto, per n che diventa sempre più grande essa diventa una quantità così prossima a zero da risultare ininfluenza nella somma algebrica, tanto che per n grande i numeri della successione di Fibonacci possono essere approssimati con:

$$F_n \approx \frac{\phi^n}{\sqrt{5}}$$

Inoltre vale:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |F_n \phi - F_{n+1}| = \phi$$

La stretta corrispondenza tra la successione di Fibonacci e il valore aureo è descritta nel dettaglio nell'articolo [?]

Applichiamo ora le formule generali del *Capitolo 3* nel caso specifico in cui il valore di θ è pari al valor aureo.

4.2 Stima del tempo di caduta nella trappola

Presa la sequenza

$$s_n = s_{n-1} + \theta \pmod{1} \quad (4.4)$$

analizziamo il caso particolare per cui sia $\theta = \phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ oppure $\theta = \phi' = \phi - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Per entrambi i casi avremo lo stesso risultato essendo la sequenza $s_n \pmod{1}$ in \mathbb{S}^1 e per semplicità prendiamo $\theta = \phi'$.

Nel caso specifico possiamo scrivere la sequenza η_m , precedentemente definita, come :

$$\eta_m = (-1)^m (q_m \phi' - p_m) = (-1)^m (\phi' - \frac{p_m}{q_m}) q_m \quad (> 0)$$

e per le proprietà del numero aureo (vedi[?]) , vale la diseguaglianza :

$$|\phi' - \frac{p_m}{q_m}| < \frac{1}{\sqrt{5}q_m^2} \Rightarrow \eta_m < \frac{1}{\sqrt{5}q_m}. \quad (4.5)$$

Per i risultati generali visti nella (3.16) del capitolo precedente, sappiamo che la lunghezza del passo massima vale:

$$\alpha_N + \beta_N = \eta_m + \eta_{m-1} - (n+1)\eta_m = -n\eta_m + \eta_{m-1}$$

allora si verifica la diseguaglianza :

$$\alpha_N + \beta_N \leq \eta_{m-1} \leq \frac{1}{\sqrt{5}q_{m-1}} \quad (\text{per la (4.5)}) \quad (4.6)$$

Nel caso di ϕ' la sequenza dei convergenti $\{q_m\}$ è la successione dei numeri di Fibonacci F_m (vedi l'articolo [?]), per cui fissato un $\epsilon > 0$ abbastanza piccolo $\exists \bar{m} \in \mathbb{Z}^+$ t.c :

$$\forall m > \bar{m} \quad \text{vale} \quad \frac{q_m}{q_{m-1}} \leq \phi + \epsilon \quad \text{per} \quad (4.3); \quad (4.7)$$

e quindi

$$q_m \leq q_{m-1}(\phi + \epsilon).$$

Sappiamo dalla (3.12) che

$$N = (n + 1)q_m + q_{m-1} + k \quad (k = 0, 1, \dots, q_m - 1) \quad e \quad 0 \leq n \leq a_{m+1} - 1$$

ma $a_m = 1, \forall m$, per cui $n = 0$ e possiamo dare un stima dall'alto per N che verifica la seguente diseguaglianza:

$$N \leq 2q_m + q_{m-1}, \quad (4.8)$$

Per la (4.7) otteniamo:

$$N \leq q_{m-1} + 2(\phi + \epsilon)q_{m-1} \Rightarrow N \leq q_{m-1} + 2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} + \epsilon\right)q_{m-1} \quad (4.9)$$

Fissando per semplicità $\epsilon = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, per cui $(\phi + \epsilon) = 2$, troviamo:

$$N \leq q_{m-1} + 4q_{m-1} \Rightarrow N \leq (1 + 4)q_{m-1} \quad (4.10)$$

ovvero

$$\frac{1}{q_{m-1}} \leq \frac{5}{N} \quad (4.11)$$

Mettendo insieme la (4.6) e (4.11) otteniamo:

$$\alpha_N + \beta_N \leq \eta_{m-1} \leq \frac{1}{\sqrt{5}q_{m-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{5}{N} = \frac{\sqrt{5}}{N}. \quad (4.12)$$

Imponendo $\frac{\sqrt{5}}{N} \leq \delta$, ovvero

$$N \geq \frac{\sqrt{5}}{\delta},$$

si ha dalla (4.12) che $\alpha_N + \beta_N \leq \delta$, per cui abbiamo la certezza che almeno uno dei punti P_r ($r = 0, 1, 2, \dots, N$) cade dentro \mathbb{L} (che ha lunghezza δ).

Conclusioni

Studiando la dinamica del sistema matematico del biliardo circolare abbiamo convertito il problema alla mappa \mathbf{T} che descrive la rotazione del cerchio \mathbb{S}^1 . Grazie alla simmetria rotazionale del cerchio, tramite l'angolo di rotazione θ affrontiamo il nostro problema con parametro razionale ed irrazionale. Nel primo caso è in linea teorica facile ottenere una stima leggibile dei risultati essendo l'orbita periodica e finita, ma nonostante ciò, possiamo incontrare anche configurazioni particolarmente sfavorevoli e svantaggiose. Passando al caso irrazionale, coinvolgiamo le frazioni continue. Abbiamo quindi fatto l'esempio della *Sezione Aurea*, perché il suo sviluppo in frazione continua è noto e facile. Si possono studiare anche altri casi seppure i conti risulteranno talvolta molto più complicati.

Bibliografia

- [1] TABACHNIKOV, SERGE
Geometry and Billiards.
Student Mathematical Library, 30. *American Mathematical Society, Providence,RI;*
University Park, PA, 2005.

- [2] SLATER, NOEL B.
Gaps and steps for the sequence $n\theta \bmod 1$.
Proc. Cambridge.Philos.Soc. 63,(1967),1115-1123.

- [3] http://en.wikipedia.org/wiki/Continued_fraction#A_property_of_the_golden_ratio_.CF.8

- [4] <http://mathworld.wolfram.com/GoldenRatio.html>

- [5] http://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_number

Ringraziamenti

Ringrazio vivamente tutte le persone che hanno contribuito in maniera attiva in questi 3 anni al raggiungimento di questo mio primo traguardo (Avrò bisogno ancora di voi, non è finita). Un Grazie particolare al prof.Marco ed ai colleghi e futuri dottori: Bailardi, Merk, Marcello, Matteino, Dobri, Stefano, Fabio,...ai conquilini dell' unico appartamento di *Via Malaguti*: Fabio, il Fra, Alessandro, Enrico, Samuele, Martina, Leonardo, Montse, Eleonora...agli amici e conoscenti *di merenda e bevute*: Luca, Giacomo, Gianmarco, Vincent, il Dome, Francesco, Erik, Teo, Stiven, Vincent... alla mia famiglia: la Gemma, Richard, Giovanni, La Luciana, a mr-Apps, a quella gnocca della mia ragazza *Laura* e in particolare al mio cane *MORRIS* (senza di lui non sarebbe stato possibile!!!).

IL MEGLIO DEVE ANCORA VENIRE!!!! VAMOS!!!!!!!!!!!!!!!