Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Equazioni di convoluzione

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Alberto Parmeggiani

Presentata da:
Serena Federico

II Sessione
Anno Accademico 2011/2012

A Giuseppe,
il mio punto fisso.

Introduzione

Questa tesi si propone di illustrare alcuni risultati fondamentali circa le equazioni di convoluzione nei domini convessi. Il culmine dell'intera trattazione è rappresentato dalla dimostrazione di due fatti principali: l'approssimabilità delle soluzioni delle equazioni di convoluzione omogenee, e l'esistenza delle soluzioni in presenza di un termine sorgente (membro destro) analitico.

L'interesse per queste equazioni è motivato non solo dal loro possibile impiego nella risoluzione delle equazioni alle derivate parziali e integrali, ma anche dall'applicazione in fisica. Infatti un operatore alle derivate parziali a coefficienti costanti è invariante per traslazione, ed è dunque un operatore di convoluzione. Per questo è possibile ricondurre lo studio di un tale operatore a quello di un'equazione di convoluzione. In fisica ed ingegneria, ad esempio nei circuiti elettrici, è possibile determinare la corrente $i(t)$ anche come soluzione di un'equazione di convoluzione [14]. E ancora la soluzione di un'equazione integrale di Volterra può essere vista come una serie convergente di convoluzioni ottenuta come soluzione di un'equazione di convoluzione.

In generale un'equazione di convoluzione ha la forma

$$\mu * u = f,$$

in cui μ ed f sono distribuzioni note di $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, u è una distribuzione incognita di $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, e una tra le distribuzioni μ e u è necessariamente a supporto compatto. Come accennato sopra, questa classe di equazioni racchiude tutte le equazioni differenziali lineari alle derivate parziali a coefficienti costanti

$$\mu * u = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \mu_\alpha \mathrm{D}^\alpha u(x), \quad \mu(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} \mu_\alpha \mathrm{D}^\alpha \delta(\mathrm{x});$$

le equazioni lineari alle differenze

$$\mu * u = \sum_{\alpha} \mu_\alpha u(x - x_\alpha), \quad \mu(x) = \sum_{\alpha} \mu_\alpha \delta(x - x_\alpha);$$

le equazioni integrali lineari di prima specie

$$\mu * u = \int u(y)\mu(x-y)dy, \quad \mu(x) \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}};$$

le equazioni integrali lineari di seconda specie

$$\mu * u = u(x) + \int u(y)\mathscr{K}(x-y)dy, \quad \mu(x) = \delta + \mathscr{K}, \quad \mathscr{K} \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}};$$

le equazioni integro-differenziali lineari.

Sia $\mu \neq 0$ una distribuzione in $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, Ω un aperto convesso di $\mathbb{R}^n$, $u \in C^\infty(\Omega)$ e $\Omega_\mu = \{x; x - y \in \Omega \text{ quando } y \in \operatorname{supp} \mu\}$ l'insieme di definizione di $\mu * u$. Vogliamo determinare sotto quali condizioni l'equazione

$$\mu * u = f$$

con $f \in C^\infty(\Omega_\mu)$, ha soluzione.

La risposta dipende fortemente dalle proprietà della distribuzione μ (cfr. [2, 4]). Infatti se essa è invertibile (cfr. [8], [14]) la precedente equazione ha sempre una soluzione $u \in C^\infty(\Omega)$, altrimenti bisogna richiedere maggiore regolarità alla funzione f, cioè che essa sia analitica reale.

Il problema è stato affrontato dapprima da Malgrange [11, 12] in $\Omega = \mathbb{R}^n$, il quale ottenne un risultato di approssimazione delle soluzioni dell'equazione omogenea $\mu * u = 0$. In particolare egli dimostrò che, se E_μ è l'insieme di tutte le combinazioni lineari delle soluzioni di tipo esponenziale dell'equazione $\mu * u = 0$ in $\mathbb{R}^n$, ed N_μ è l'insieme delle $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tali che $\mu * u = 0$, allora E_μ è denso in N_μ. In questo modo ogni soluzione di classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ dell'equazione $\mu * u = 0$ è approssimata mediante soluzioni di tipo esponenziale.

Attraverso l'approssimabilità della soluzione omogenea Ehrenpreis [2] provò che, se μ è una distribuzione non invertibile in $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, l'equazione $\mu * u = f$ ha soluzione in $\Omega = \mathbb{R}^n$ se e soltanto se f è analitica reale.

Lo studio della risolubilità su $\Omega = \mathbb{R}^n$ ha condotto alla ricerca di analoghi risultati applicabili in casi più generali, ovvero in presenza di Ω convesso. Si devono ad Hörmander le generalizzazioni ai convessi, in cui egli dimostrò ciò che Malgrange ed Ehrenpreis provarono in $\mathbb{R}^n$. Il suo risultato di approssimazione viene provato seguendo le linee di Malgrange, ovvero mostrando che, l'insieme E_μ precedentemente menzionato ristretto al convesso $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è denso in N_μ, dove ora N_μ è l'insieme delle $u \in C^\infty(\Omega)$ tali che $\mu * u = 0$. Grazie a questo fatto riuscì a dimostrare la risolubilità dell'equazione $\mu * u = f$ quando f è una funzione reale analitica.
Il caso generale in cui Ω è un aperto qualsiasi è stato affrontato ancora da Hörmander, il quale ha mostrato nel volume II della serie sugli operatori alle derivate parziali [8], che l'equazione $\mu * u = f$ ha soluzione se e solo se μ è invertibile e gli aperti Ω e Ω_μ soddisfano l'ipotesi di μ-convessità (cfr. [8]). Per approfondimenti su quest'ultimo caso si rimanda a [8].

Questa tesi si concentra nel ricavare, nella maniera più autocontenuta possibile, le conclusioni ottenute da Hörmander nel suo articolo sulle equazioni di convoluzione nei domini convessi [6]. Vengono quindi provati, quando Ω è un aperto convesso, due risultati fondamentali: il teorema di approssimazione delle soluzioni dell'equazione omogenea, e l'esistenza della soluzione nel caso non omogeneo con termine sorgente analitico. Questi risultati richiedono un ampio uso delle funzioni plurisubarmoniche, per via del loro legame con le funzioni intere. Infatti esse possono sempre essere viste come funzioni del tipo $\log |\hat{\mu}|$, con $\mu \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, e $\hat{\mu}$ intera ($\hat{\mu}$ trasformata di Fourier di μ). Lavorando con queste funzioni si riescono a trovare delle stime valide per funzioni intere passando attraverso le stime di cui godono le funzioni plurisubarmoniche.
Il primo capitolo viene dunque dedicato all'introduzione delle proprietà di base delle funzioni subarmoniche, di quelle plurisubarmoniche, e alla formula di rappresentazione di Riesz. Nel secondo capitolo si determinano delle stime valide per particolari funzioni plurisubarmoniche, grazie alle quali si giunge ad un teorema di approssimazione per funzioni intere di tipo espo-

nenziale. Infine il Capitolo 3 contiene la prova dei due teoremi fondamentali sulle equazioni di convoluzione nei domini convessi, ovvero il Teorema di approssimazione e il Teorema di esistenza.

Notazioni

E : soluzione fondamentale dell'operatore di Laplace.
$L(dx)$: se $x \in \mathbb{C}^n$ indica la misura di Lebesgue in $\mathbb{C}^n$.
$\approx$: $A, B > 0$, $A \approx B$ se $\exists\, C_1, C_2 > 0 : C_1 A \leqslant B \leqslant C_2 A$.
$\hat{f}$: è la trafsformata di Fourier della funzione f, cioè $\hat{f}(\zeta) = \int e^{-i\langle x,\zeta\rangle} f(x) L(dx)$.
$\check{f}$: $\check{f}(x) = f(-x)$.

Indice

Capitolo 1

Formula di rappresentazione di Riesz

Poiché, come vedremo, il teorema di approssimazione della soluzione omogenea dell'equazione $\mu * u = 0$ è ricondotto ad un teorema di approssimazione delle funzioni intere di tipo esponenziale, è necessario studiare la fattorizzazione di tali funzioni. Siano f_1, f_2, f_3 funzioni intere legate dalla relazione $f_3 = f_1 f_2$. Supponiamo inoltre di sapere che le funzioni f_j, per $j = 1, 3$, sono trasformate di Fourier di distribuzioni a supporto compatto. Allora

$$\log|f_3| = \log|f_1| + \log|f_2|,$$

dove $\log|f_j|$ è una funzione plurisubarmonica per $j = 1, 2, 3$.
Ricordiamo che una funzione u definita su un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ a valori in $[-\infty, \infty)$ si dice plurisubarmonica se

1. u è superiormente semicontinua
2. per ogni z e $w \in \mathbb{C}^n$ la funzione $\tau \mapsto u(z + \tau w)$ è subarmonica nella parte di $\mathbb{C}$ in cui essa è definita, cioè $\{\tau \in \mathbb{C}; z + \tau w \in \Omega\}$.

La dimostrazione del teorema di approssimazione delle soluzioni omogenee richiede la conoscenza di una stima delle funzioni f_j, $j = 1, 2, 3$. Le funzioni f_1 ed f_3, essendo trasformate di Fourier di distribuzioni a supporto compatto, possiedono una stima fornita direttamente dal teorema di Paley-Wiener-Schwartz (Appendice A). Della funzione intera f_2 è invece necessario determinarne una stima, che verrà ricavata a partire da una stima del suo logaritmo. Questo rende di fondamentale importanza l'utilizzo delle proprietà delle funzioni plurisubarmoniche che, a loro volta, sono subarmoniche se si identifica $\mathbb{C}^n$ con $\mathbb{R}^{2n}$. Per stimare il $\log|f_2|$ bisogna ricorrere ad una serie di risultati sulle funzioni subarmoniche e plurisubarmoniche. Il primo di questa catena di risultati richiede l'utilizzo della formula di rappresentazione delle funzioni subarmoniche, su cui ci soffermiamo in questo capitolo.

1.1 Funzioni subarmoniche

Definizione 1.1.1 (Funzione subarmonica)**.** *Una funzione u definita su un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$ a valori in $[-\infty, \infty)$ è detta subarmonica se*

1. *u è superiormente semicontinua* $\big(\limsup_{z \to z_0} u(z) \leqslant u(z_0)\big)$
2. *per ogni conpatto $K \subset \Omega$, e per ogni funzione continua h su K, armonica nell'interno di K, e $\geqslant u$ su ∂K, risulta $h \geqslant u$ in K.*

Diamo una caratterizzazione delle funzioni subarmoniche in $\mathbb{R}^n$ mediante il seguente teorema.

Teorema 1.1.2. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. Se $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ è reale e $\triangle u \geqslant 0$, allora u è definita da una funzione subarmonica u_0, cioè superiormente semicontinua a valori in $[-\infty, \infty)$ e tale che*

$$M(x,r) = \int_{|w|=1} u_0(x+rw)dw/c_n, \quad c_n = \int_{|w|=1} dw,$$

è una funzione crescente di r per $x \in \Omega$ e $r < d(x, \partial\Omega)$. Viceversa, se u_0 è una funzione superiormente semicontinua a valori in $[-\infty, \infty)$, non identicamente $-\infty$ in ogni componente di Ω, e se $u_0(x) \leqslant M(x,r)$ quando $r < d(x, \partial\Omega)$, allora $u_0 \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e $\triangle u \geqslant 0$ per la distribuzione u definita da

u_0. La funzione u_0 è univocamente determinata da u in ogni punto. Se K è un sottoinsieme compatto di Ω allora è valido il principio del massimo

$$\sup_{\partial K} u_0 = \sup_K u_0.$$

Per la dimostrazione si veda [7, Teorema 4.1.8].

Esempio 1.1.3 (Fondamentale)**.** Un esempio fondamentale di funzione subarmonica in $\mathbb{R}^n$, e non armonica in $\mathbb{R}^n$, è rappresentato dalla soluzione fondamentale $x \mapsto E_y(x) = E(x-y)$, $-\infty$ nel punto $x = y$. Proviamo in maniera diretta mediante la Definizione 1.1.1 la subarmonicità di E_y. Questa funzione è continua a valori in $[-\infty, +\infty)$ e armonica in $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$. Ci resta pertanto da verificare solamente la proprietà 2. Dimostriamo l'affermazione distinguendo due casi: $y \notin K$ e $y \in K$, con $K \subset \mathbb{R}^n$ compatto.
1° caso: se $y \notin K$ la funzione E_y è armonica in K. Questo implica che, se $E_y \leqslant h$ su ∂K, allora per il principio del massimo per le funzioni armoniche $E_y \leqslant h$ in K.
2° caso: se $y \in K$ allora $E_y \leqslant h$ in qualche intorno aperto V di y. Inoltre $y \notin K \setminus V$, quindi $E_y \leqslant h$ su $\partial(K \setminus V) \subset \partial K \cup \partial V$. Ne segue che $E_y \leqslant h$ in $K \setminus V$ (perché siamo nel 1° caso), e dunque $E_y \leqslant h$ in K.
Analogamente la funzione $x \mapsto \sum a_j E(x - y_j)$ è subarmonica se, per ogni indice j, $a_j \geqslant 0$.

Il nostro interesse è rivolto in particolare alle funzioni subarmoniche v su $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n, x_n > 0\}$ tali che, per certe costanti $C_0 \geqslant 0$ e $C_1 > 0$, vale:

$$v(x) \leqslant C_0 + C_1 x_n, \quad x_n > 0. \tag{1.1}$$

Il teorema di Paley-Wiener-Schwartz assicura che, se u è una misura a supporto compatto su $\mathbb{R}$, e $\mathbb{C}$ è identificato con $\mathbb{R}^2$, la funzione subarmonica $v(z) = \log|\hat{u}(z)|$ soddisfa la (1.1). Con la notazione $\hat{u}$ indicheremo la trasformata di Fourier della funzione u.

Teorema 1.1.4.
(i) Se u è una funzione subarmonica e $0 < c \in \mathbb{R}$, allora cu è subarmonica.

(ii) Se u_α, $\alpha \in A$, *è una famiglia di funzioni subarmoniche, allora* $u = \sup_\alpha u_\alpha$ *è subarmonica se* u *è superiormente semicontinua e* $u < \infty$, *che è sempre vero se* A *è finito.*
(iii) Se $u_1, u_2, \dots$ *è una successione decrescente di funzioni subarmoniche, allora* $u = \lim_{j\to\infty} u_j$ *è ancora subarmonica.*

Per la dimostrazione si veda [9, Teorema 1.6.2].
Una applicazione del Teorema 1.1.4 è un'altra prova dell'Esempio 1.1.3 quando $n = 2$, e cioè che $\log|f|$ è subarmonica se $f \in \mathrm{A}(\Omega)$.

Esempio 1.1.5. Sia $A(\Omega)$ l'insieme delle funzioni analitiche in $\Omega \subset \mathbb{C}$. Se $f \in A(\Omega)$ allora $\log|f|$ è subarmonica.

L'esempio può essere dimostrato in due diversi modi: attraverso il Teorema 1.1.4, oppure direttamente, cioè mediante la Definizione 1.1.1.

Dimostrazione attraverso il Teorema 1.1.4. f è analitica complessa, pertanto la funzione

$$\log(|f(z)|^2 + \epsilon)^{1/2}, \quad \epsilon > 0,$$

è subarmonica. Infatti essa è continua, quindi in particolare superiormente semicontinua, e ha laplaciano positivo, cioè

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \log(|f(z)|^2 + \epsilon)^{1/2} = \frac{\epsilon}{2(|f(z)|^2 + \epsilon)^2}\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 \geqslant 0.$$

Sia ora $\epsilon \searrow 0^+$. Allora per il teorema precedente, punto (*iii*),

$$\log|f| = \lim_{\epsilon \searrow 0^+} \log(|f(z)|^2 + \epsilon)^{1/2}$$

è ancora subarmonica. Ciò prova l'asserto. □

Dimostrazione diretta. f è analitica complessa e $f \not\equiv 0$ in $\Omega \subset \mathbb{C}$. Fissato $K \subset \Omega$ compatto scriviamo

$$f(z) = g(z)\prod_{j=1}^{N}(z - z_j) \quad \forall z \in K,$$

dove gli elementi z_j sono gli zeri di f in K, e g è una funzione analitica tale che $g(z) \neq 0 \; \forall z \in K$. Allora $\log|g(z)|$ è una funzione armonica in un intorno di K. Quindi

$$\log|f(z)| = \log|g(z)| + \sum \log|z - z_j| \quad \forall z \in K.$$

Se

$$\log|f(z)| = \log|g(z)| + \sum \log|z - z_j| \leqslant h \quad \forall z \in \partial K,$$

allora

$$\sum \log|z - z_j| \leqslant h - \log|g(z)| \quad \forall z \in \partial K,$$

con $h - \log|g(z)|$ armonica in K. Dalla subarmonicità della soluzione fondamentale (vista nell'Esempio 1.1.3) si ha

$$\sum \log|z - z_j| \leqslant h - \log|g(z)| \quad \forall z \in K,$$

e $\log|f(z)| \leqslant h$ in K. La funzione $\log|f(z)|$ è anche superiormente semicontinua a valori in $[-\infty, \infty)$. Unendo i risultati si ottiene infine la subarmonicità. □

Lemma 1.1.6. *Se v è una funzione subarmonica in $\mathbb{R}^n_+$ che verifica la* (1.1) *allora*

$$M(x_n) = \sup_{x'} v(x', x_n)$$

è una funzione convessa di x_n.

Dimostrazione. Siano a e b due punti fissati di $\mathbb{R}_+$ con $0 < a < b$, e sia L una funzione lineare tale che $M(a) \leqslant L(a)$ e $M(b) \leqslant L(b)$. Per dimostrare che M è una funzione convessa di x_n basta verificare che $M(x_n) \leqslant L(x_n) \quad \forall x_n \in (a, b)$. Per mostrarlo consideriamo la funzione

$$v_\epsilon(x) = v(x) - L(x_n) - \epsilon\big(x_1^2 + ... + x_{n-1}^2 - (n-1)(x_n^2 - b^2)\big), \quad \epsilon > 0,$$

subarmonica e $\leqslant 0$ sul bordo della regione $S = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}^n_+ ; a \leqslant x_n \leqslant b\}$. Infatti $\triangle v_\epsilon = \triangle v \geqslant 0$ mentre $v_\epsilon(x', a)$ e $v_\epsilon(x', b)$ sono entrambe $\leqslant 0$. Allora per il principio del massimo $v_\epsilon \leqslant 0$ in tutta la regione S. Prendendo ora $\epsilon \to 0$ otteniamo

$$0 \geqslant \lim_{\epsilon \to 0} v_\epsilon(x) = v(x) - L(x_n).$$

Da ciò segue $v(x) \leqslant L(x_n)$, $\forall x_n \in (a,b)$, e quindi $M(x_n) \leqslant L(x_n)$, $\forall x_n \in (a,b)$. □

Osservazione 1.1.7. *Il Lemma 1.1.6 richiede che v verifichi la disuguaglianza (1.1), da cui segue anche $M(x_n) \leqslant C_0 + C_1 x_n$. Inoltre dalla convessità di M abbiamo che $\big(M(x_n) - M(1)\big)/(x_n - 1)$ è una funzione crescente di x_n, perciò esiste il limite*

$$\gamma = \lim_{x_n \to \infty} M(x_n)/x_n, \tag{1.2}$$

con $-\infty < \gamma \leqslant C_1$.
Infatti

$$\begin{aligned}\gamma = \lim_{x_n \to \infty} M(x_n)/x_n &= \lim_{x_n \to \infty} \big(M(x_n) - M(0)\big)/x_n \\ &\leqslant \lim_{x_n \to \infty} (C_0 + C_1 x_n - C_0)/x_n = C_1.\end{aligned}$$

Analogamente si può mostrare che

$$M(x_n + y_n) \leqslant M(x_n) + \gamma y_n. \tag{1.3}$$

Infatti, ancora per la convessità, la funzione $\big(M(x_n + y_n) - M(x_n)\big)/y_n$ è crescente rispetto a y_n, quindi

$$\big(M(x_n + y_n) - M(x_n)\big)/y_n \leqslant \lim_{y_n \to \infty} \big(M(x_n + y_n) - M(x_n)\big)/y_n = \gamma,$$

da cui segue la disuguaglianza.
Infine osserviamo che la funzione v, per la (1.3), soddisfa anche

$$v(x) \leqslant C_0 + \gamma x_n. \tag{1.4}$$

La verifica è immediata dato che

$$v(x) \leqslant M(x_n) = M(0 + x_n) \overset{(1.3)}{\leqslant} M(0) + \gamma x_n \leqslant C_0 + \gamma x_n.$$

1.2 La funzione di Green e il nucleo di Poisson in $\mathbb{R}^n_+$

Abbiamo precedentemente motivato l'interesse per le funzioni subarmoniche su $\mathbb{R}^n_+$ e la necessità di ricavare per queste una formula di rappresentazione. Dal momento che tale formula è espressa in termini del nucleo di Poisson e della funzione di Green, avremo bisogno di una loro espressione nello spazio $\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$.
Abbiamo indicato con $E(x)$ la soluzione fondamentale dell'operatore di Laplace in $\mathbb{R}^n$, cioè:

$$E(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log |x| & \text{, se } n = 2 \\ -\frac{1}{(n-2)c_n} |x|^{2-n} & \text{, se } n > 2, \end{cases} \tag{1.5}$$

dove c_n è l'area di $\mathbb{S}^{n-1} = \{(x_1, x_2, .., x_n) \in \mathbb{R}^n; \sum x_i = 1\}$. Per definizione la funzione $E(x)$ è tale che $\triangle E = \delta$ nel senso delle distribuzioni, e dunque $v = E * \phi$ è soluzione di $\triangle v = \phi$.
La funzione di Green di $\mathbb{R}^n_+$ sarà invece

$$G(x, y) = E(x - y) - E(x - y^*) = E(x - y) - E(x^* - y), \quad x, y \in \mathbb{R}^n_+, \tag{1.6}$$

dove $y^* = (y', -y_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_-$.
Se x è fissata in $\mathbb{R}^n_+$ abbiamo $\triangle_y G = \delta_x$, $G \leqslant 0$, e G si annulla quando $y \in \partial\mathbb{R}^n_+$ (cioè quando $y_n = 0$), stessa cosa con ruoli di x e y invertiti. Essa è inoltre omogenea di grado $2 - n$, cioè

$$G(x, y) = t^{2-n} G(x/t, y/t).$$

Il nucleo di Poisson di $\mathbb{R}^n_+$ è dato dalla funzione

$$P(x, y') = -\partial G(x, y)/\partial y_n\big|_{y_n=0} = \frac{2x_n}{c_n} |x - y|^{-n}\big|_{y_n=0},$$

armonica quando $x_n > 0$, e tale che

$$\int P(x, y') dy' = 1, \quad x_n > 0.$$

Per y limitata osserviamo che, se $x \to \infty$, si ottiene per la funzione di Green la seguente stima

$$G(x,y) = -|x|^{1-n} P(x/|x|, 0) y_n + O(y_n^2 x_n |x|^{-n-1}) = O(x_n |x|^{-n}). \tag{1.7}$$

Per ottenerla si sfrutta l'omogeneità della funzione G, che permette di scrivere $G(x,y) = |x|^{2-n} G(x/|x|, y/|x|)$. Indicando ora $w = x/|x|$, e $z = y/|x|$, andiamo a studiare $G(x,y) = |x|^{2-n} G(w,z)$ quando $|z| \to 0$. Per farlo si considera lo sviluppo di Taylor di $G(w,z)$ rispetto a z_n nel punto $z_n = 0$ e poi rispetto a $z' = (z_1, .., z_{n-1})$ nel punto $z' = 0$. Infine si ha

$$G(x,y) = |x|^{2-n} G(w,z) = -|x|^{1-n} P(x/|x|, 0) y_n + O(y_n^2 x_n |x|^{-n-1}) = O(x_n |x|^{-n}).$$

Per la simmetria di G vale anche $G(x,y) = O(y_n |y|^{-n})$ se x è limitata e $y \to \infty$.
La (1.7) dà anche che, se y è in un compatto di $\mathbb{R}^n_+$ e $|x|$ è grande, allora per qualche $C \geqslant 1$

$$C^{-1} x_n |x|^{-n} \leqslant |G(x,y)| \leqslant C x_n |x|^{-n}.$$

1.3 Formula di rappresentazione di Riesz

Teorema 1.3.1. *Sia v una funzione subarmonica in $\mathbb{R}^n_+$ non identicamente $-\infty$ per la quale vale la* (1.1)*. Allora la misura $v(x', x_n)dx'$, per $x_n \to 0$, converge debolmente ad una misura $d\sigma$ in $\mathbb{R}^{n-1}$. Se $d\mu = \triangle v$ abbiamo*

$$\int (1 + |y'|)^{-n} |d\sigma(y')| < \infty, \quad \int_{y_n > 0} y_n (1 + |y|)^{-n} d\mu(y) < \infty, \tag{1.8}$$

$$v(x) = \int P(x, y') d\sigma(y') + \int_{y_n > 0} G(x,y) d\mu(y) + \gamma x_n, \quad x \in \mathbb{R}^n_+, \tag{1.9}$$

dove γ è definita dalla (1.2).

Dimostrazione. Per ipotesi la funzione v soddisfa la (1.1) e $v(x) \leqslant C_0 + \gamma x_n$. Assumiamo per semplicità che $C_0 = \gamma = 0$ perché, se così non fosse, si potrebbe considerare la funzione subarmonica $w(x) = v(x) - C_0 - \gamma x_n$ per

la quale $C_0 = \gamma = 0$. Dall'assunzione segue inoltre $v \leqslant 0$.
Se consideriamo la funzione $0 \leqslant \chi \leqslant 1$, con $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n_+)$, allora possiamo scrivere

$$v(x) = \int_{y_n>0} G(x,y)\chi(y)d\mu(y) + v_\chi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n_+,$$

dove v_χ è subarmonica e $v_\chi \leqslant 0$. Per mostrare la subarmonicità di v_χ basta osservare che

$$\begin{aligned} v_\chi(x) &= v(x) - \int_{y_n>0} G(x,y)\chi(y)d\mu(y) \\ &= v(x) - \int E(x-y)\chi(y)d\mu(y) + \int E(x-y^*)\chi(y)d\mu(y), \end{aligned} \tag{1.10}$$

dove la funzione integranda è continua e limitata nel suppχ. Possiamo pertanto derivare sotto il segno di integrale. Poiché $\triangle_x E(x-y^*) = 0$ quando $x, y \in \mathbb{R}^n_+$, ne segue $\triangle v_\chi = (1-\chi)d\mu \geqslant 0$. Ora, per la (1.7), si ha per y dentro un compatto di $\mathbb{R}^n_+$ e x grande

$$G(x,y) \approx -\frac{x_n}{|x|^n},$$

e quindi, per x grande

$$\left| \int_{y_n>0} G(x,y)\chi(y)d\mu(y) \right| \leqslant \int_{y_n>0} |G(x,y)\chi(y)|d\mu(y) \leqslant |C_\chi x_n |x|^{-n}| \leqslant \epsilon.$$

Dunque, per ogni $\epsilon > 0$, esiste un compatto $K \subset \mathbb{R}^n_+$ tale che

$$\int_{y_n>0} G(x,y)\chi(y)d\mu(y) \geqslant -\epsilon, \quad x \in \mathbb{R}^n_+ \setminus K, \tag{1.11}$$

e $v_\chi \leqslant \epsilon$ sul ∂K. Da quest'ultima disuguaglianza segue, per il principio del massimo, $v_\chi \leqslant \epsilon$ in K, e quindi dall'arbitrarietà di ϵ, $v_\chi \leqslant 0$.
Consideriamo adesso una successione crescente di funzioni $\chi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ tale che $\chi_j = 1$ su ogni fissato compatto di $\mathbb{R}^n_+$ quando j è sufficientemente grande. Con questa scelta v_{χ_j} è una successione crescente ed è armonica su ogni compatto fissato per j abbastanza grande. La successione v_{χ_j} converge dunque (Teorema 1.1.4) ad una funzione armonica v_1 tale che

$$v(x) = v_1(x) + v_2(x), \quad v_2(x) = \int_{y_n>0} G(x,y)d\mu(y), \tag{1.12}$$

dove v_1 e v_2 sono entrambe $\leqslant 0$. Essendo v non identicamente $-\infty$, scegliendo x tale che $v(x) > -\infty$, si avrà

$$v_2(x) = \int_{y_n>0} G(x,y)d\mu(y) > -\infty. \tag{1.13}$$

Per la prima uguaglianza (1.7) si ha che per y fuori da un compatto di $\mathbb{R}^n_+$ e un'opportuna costante $C > 0$

$$-G(x,y) = |G(x,y)| \geqslant Cy_n(1+|y|)^{-n}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n_+ \setminus K,$$

e dunque

$$\int_{y\in\mathbb{R}^n_+\setminus K} Cy_n(1+|y|)^{-n}d\mu(y) \leqslant -\int_{y\in\mathbb{R}^n_+\setminus K} G(x,y)d\mu(y) < \infty,$$

dove K è un compatto di $\mathbb{R}^n_+$, e x è fissata opportunamente in modo tale che valga la (1.13). D'altra parte, la funzione $y_n(1+|y|)^{-n}$ è sommabile su ogni compatto, e quindi

$$\int_{y_n>0} y_n(1+|y|)^{-n}d\mu(y) < \infty.$$

Ciò prova la seconda disuguaglianza (1.8).
Per mostrare la convergenza debole di v ad una misura quando $x_n \to 0^+$ studiamo la convergenza debole delle funzioni v_1 e v_2. Mostriamo innanzitutto che $v_2(., x_n)$ converge debolmente a 0 come una misura. Per farlo basta dimostrare la convergenza nel senso delle distribuzioni ([7, Teorema 2.1.9]). Si vuole quindi provare che

$$\int v_2(x',x_n)\phi(x')dx' = \int_{y_n>0} d\mu(y) \int G(x',x_n,y',y_n)\phi(x')dx' \to 0, \quad x_n \to 0^+, \tag{1.14}$$

dove $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$. Se y è fissata in $\mathbb{R}^n_+$, per il teorema di Lebesgue della convergenza dominata, si ha

$$\int G(x',x_n,y',y_n)\phi(x')dx' \to 0, \quad x_n \to 0,$$

essendo $|G(x,y)| \leqslant Cy_n|y|^{-n}$ per y fuori da un compatto. Per poter passare al limite sotto il segno di integrale anche nella (1.14) bisogna ancora mostrare che

$$\left|\int G(x', x_n, y', y_n)\phi(x')dx'\right|$$

è limitato da una funzione sommabile e indipendente da x_n. Consideriamo pertanto la seguente funzione

$$F(y) = \int E(y' - x', y_n)\phi(x')dx'.$$

La funzione $F(y)$ è continua rispetto a y, e tali sono anche le derivate di ogni ordine rispetto a y'. Infatti indichiamo con $E_{y_n}(y') = E(y', y_n)$, dove y_n è pensato come un parametro, e sia $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$. Allora

$$F(y) = E_{y_n} * \phi(y') = \int E_{y_n}(y' - x')\phi(x')dx',$$

e quindi, per $1 \leqslant j \leqslant n-1$,

$$\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}F(y) = \Big(\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}E_{y_n} * \phi\Big)(y') = \Big(\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}\phi * E_{y_n}\Big)(y')$$

è C^∞ rispetto alle variabili $y_j, \forall j = 1, .., n-1$.
Poiché $\triangle F = 0$ quando $y_n \neq 0$, questo implica che le derivate seconde rispetto a y_n sono localmente limitate $\big(\frac{\partial^2 F(y)}{\partial y_n^2} = -\triangle_{y'}F(y)\big)$. Ciò garantisce la locale limitatezza delle derivate prime rispetto a y_n. Infatti, se $0 < y_n \leqslant C$, allora

$$\Big|\frac{\partial F(y', y_n)}{\partial y_n}\Big| \leqslant \int_0^1 \Big|\frac{\partial^2 F(y', ty_n)}{\partial y_n^2}\Big| dt|y_n| \leqslant C'.$$

Ne segue che F è localmente Lipschitz-continua, perciò

$$\int G(x', x_n, y', y_n)\phi(x')dx' = F(y', x_n - y_n) - F(y', x_n + y_n) = O(y_n),$$

quando $0 < y_n \leqslant C$. Di conseguenza

$$\left|\int G(x', x_n, y', y_n)\phi(x')dx'\right|, \quad 0 < x_n \leqslant C,$$

è uniformemente limitato da $Cy_n(1+|y|)^{-n}$ (non solo quando y è fuori da un compatto ma per ogni $y \in \mathbb{R}^n_+$), e $\to 0$ per $x_n \to 0$. Questo giustifica il passaggio al limite sotto il segno di integrale nella (1.14), da cui si ottiene

$$\int v_2(x', x_n)\phi(x')dx' = \int_{y_n>0} d\mu(y) \int G(x', x_n, y', y_n)\phi(x')dx' \to 0, \ x_n \to 0^+,$$

cioè $v_2(x)$ tende a 0 nel senso delle distribuzioni.
Bisogna ora determinare il limite debole della v_1. Sia $\epsilon > 0$ e $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$, $0 \leqslant \psi \leqslant 1$, allora

$$h_\psi(x) = v_1(x', x_n + \epsilon) - \int P(x, y')\psi(y')v_1(y', \epsilon)dy'$$

è armonica quando $x_n > 0$ e C^∞ quando $x_n \geqslant 0$. La prima affermazione deriva dal fatto che v_1 è armonica e lo è anche $P(x, y')$ se $x_n > 0$. La seconda è conseguenza dalla seguente proprietà del nucleo di Poisson:

$$\int P(x, y')\phi(y')dy' \to \phi(x'), \quad x_n \to 0,$$

dove $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$.
La funzione h_ψ è anche $\leqslant 0$. Infatti sul bordo, ovvero quando $x_n = 0$, per la proprietà di $P(x, y')$ appena vista, si ha $h_\psi(x', 0) = v_1(x', \epsilon)(1 - \psi(x')) \leqslant 0$. Inoltre $\limsup_{x\to\infty} h_\psi(x) \leqslant 0$. Infatti

$$\lim_{x\to\infty} \left(- \int P(x, y')\psi(y')v_1(y', \epsilon)dy' \right) = 0,$$

in quanto, essendo $|P(x, y')\psi(y')v_1(y', \epsilon)| \leqslant C(1 + |y'|)^{-n}$ e $P(x, y) \to 0$ per $|x| \to \infty$, per il teorema della convergenza dominata si ha

$$\lim_{x\to\infty} \int P(x, y')\psi(y')v_1(y', \epsilon)dy' = \int \lim_{x\to\infty} P(x, y')\psi(y')v_1(y', \epsilon)dy' = 0.$$

Dunque, poiché $v_1 \leqslant 0$, risulta

$$\limsup_{x\to\infty} h_\psi(x) = \limsup_{x\to\infty} v_1(x', x_n + \epsilon) \leqslant 0.$$

Dal principio del massimo segue $h_\psi \leqslant 0$. Se si estende la definizione di h_ψ su tutto $\mathbb{R}^n$ ponendo $h_\psi(x', x_n) = -h_\psi(x', -x_n)$ quando $x_n < 0$, si ha

$$\triangle h_\psi = 2v_1(x', \epsilon)\big(1 - \psi(x')\big)\delta'(x_n),$$

la cui verifica è riportata in Appendice B. La funzione h_ψ è dunque armonica nel punto $(x', 0)$ se $\psi = 1$ in un intorno di x'. Scegliendo come prima una successione crescente e non negativa $\psi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ tale che $\psi_j = 1$ su ogni compatto fissato di $\mathbb{R}^{n-1}$ per j grande, allora h_{ψ_j} tende ad una funzione armonica h in $\mathbb{R}^n \leqslant 0$ ($\geqslant 0$) nel semispazio superiore (inferiore). Così

$$v_1(x', x_n + \epsilon) = h(x) + \int P(x, y')v_1(y', \epsilon)dy', \quad x_n > 0,$$

dove h è una funzione lineare di x_n. Per mostrarlo rappresentiamo la funzione $x \mapsto h(Rx)$ con R grande nel seguente modo ([8, Lemma 16.1.3])

$$h(x) = \int_{|y|=1, y_n>0} \big(P_1(x/R, y) - P_1(x^*/R, y)\big)h(Ry)dS(y), \quad |x| < R,$$

$$P_1(x, y) = (1 - |x|^2)|x - y|^{-n}/c_n \quad x, y \in \mathbb{R}^n, |x| < 1 = |y|,$$

in cui P_1 è il nucleo di Poisson nella sfera unitaria, e dS è l'elemento di superficie della sfera unitaria. Osserviamo che

$$|x^*/R - y|^2 - |x/R - y|^2 = \frac{4x_n y_n}{R},$$

e che, essendo $|x| = |x^*|$,

$$P_1(x/R, y) - P_1(x^*/R, y) = c_n^{-1}\big(1 - (|x|/R)^2\big)\Big(\big(|x/R - y|^2\big)^{-\frac{n}{2}} - \big(|x^*/R - y|^2\big)^{-\frac{n}{2}}\Big).$$

Sia ora $f(t) = t^{-n/2}$ con $t = |x/R - y|^2$, e sia $s = |x^*/R - y|^2$. Allora, dallo sviluppo di Taylor della funzione $f(t)$ nel punto s, risulta

$$\big(|x/R - y|^2\big)^{-n/2} - \big(|x^*/R - y|^2\big)^{-n/2} = f(t) - f(s) = f'(s)(t - s) + f''(\xi_{s,t})(t - s)^2.$$

Inoltre, per x *fissata* con $|x| < R$, essendo $(t - s) = -4x_n y_n/R$, si ha

$$\begin{aligned} f'(s)(t - s) &= -\frac{n}{2}s^{-(n/2+1)}(t - s) = -\frac{n}{2}(-4x_n y_n/R)\big(|x^*/R - y|^2\big)^{-(n/2+1)} \\ &= \frac{2n x_n y_n}{R}\big(1 + O(1/R)\big), \end{aligned}$$

e analogamente

$$f''(\xi_{s,t})(t - s)^2 = C\frac{x_n^2 y_n^2}{R^2}\big(1 + O(1/R)\big).$$

Quindi, poiché x è *fissata* e y è limitata, si ottiene

$$f(t) - f(s) = \frac{2nx_ny_n}{R}\big(1 + O(1/R)\big)\left(1 + \frac{C'x_ny_n}{R}\right) = \frac{2nx_ny_n}{R}\big(1 + O(1/R)\big),$$

dove $\left(1 + \frac{C'x_ny_n}{R}\right) = \big(1 + O(1/R)\big)$.
D'altra parte $\big(1 - (|x|/R)^2\big) = \big(1 + O(1/R)\big)$, e dunque, unendo i risultati, si può scrivere

$$P_1(x/R, y) - P_1(x^*/R, y) = 2nx_ny_n\big(1 + O(1/R)\big)/Rc_n.$$

Di conseguenza, per ogni x *fissata* con $|x| < R$,

$$h(x) = c_n^{-1}2nx_n\big(1 + O(1/R)\big)\int_{|y|=1, y_n>0} h(Ry)y_nR^{-1}dS(y).$$

Ne segue che $h(x) = ax_n$ quando $R \to \infty$, dove a è una costante $\leqslant 0$ (perché $h \leqslant 0$). La disuguaglianza $v(x', x_n + \epsilon) \leqslant ax_n$, che segue da

$$v(x', x_n + \epsilon) = v_1(x', x_n + \epsilon) + v_2(x', x_n + \epsilon) \leqslant v_1(x', x_n + \epsilon) \leqslant h(x),$$

implica $a = 0$ per l'ipotesi $\gamma = 0$, e quindi $h(x) = ax_n = 0$. Tutto questo porta alla seguente espressione di v_1:

$$v_1(x', x_n) = \int P(x', x_n + \epsilon)v_1(y', \epsilon)dy', \quad x_n > \epsilon. \tag{1.15}$$

Ancora l'ipotesi $\gamma = 0$ permette, per ogni $\delta > 0$, di scegliere x con x_n grande tale che

$$v(x', x_n) > -\delta x_n,$$

e vale

$$-v_1(x) = |v_1(x)| < \delta x_n.$$

Effettuando le opportune sostituzioni nella precedente relazione si ricava

$$2/c_n\int |v_1(y', \epsilon)|(|x' - y|^2 + x_n^2)^{-n/2}dy' < \delta x_n/(x_n - \epsilon) < 2\delta.$$

In questo modo, se M_δ è sufficientemente grande, per ogni ϵ sufficientemente piccolo si ha

$$\int_{|y|>M_\delta} |v_1(y', \epsilon)||y'|^{-n}dy' < c_n\delta,$$

cioè $v_1(y', \epsilon)|y'|^{-n}$ è sommabile fuori da un compatto. Da ciò segue che $v_1(y', \epsilon)(1 + |y'|)^{-n} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
Sia ora $C_{(\infty)} = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}; \quad \lim_{|x|\to\infty} |f(x)| = 0\}$, e $M(\mathbb{R}^n) = C^*_{(\infty)}$, duale di $C_{(\infty)}$, lo spazio di Banach delle misure di Borel finite. Poiché la palla unitaria in $M(\mathbb{R}^n)$ è $*$-debolmente compatta (Teorema di Helly [3, Teorema 12]), ogni successione limitata in $M(\mathbb{R}^n)$ ammette una sottosuccessione $*$-debolmente convergente. Ne viene che, se $\{u_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ è uniformemente limitata in $L^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow M(\mathbb{R}^n)$, allora esiste $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$ e $\epsilon_k \to 0^+$ per $k \to \infty$ tale che $u_{\epsilon_k} dx \to d\mu$ $*$-debolmente per $k \to \infty$, cioè

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) u_{\epsilon_k} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) d\mu \quad \forall \varphi \in C_{(\infty)}(\mathbb{R}^n).$$

In seguito a queste considerazioni è chiaro che, scegliendo $\epsilon_k \to 0^+$ per $k \to \infty$, si ha che $v_1(y', \epsilon_k)(1 + |y'|)^{-n}$ converge $*$-debolmente ad una misura di Borel finita $d\sigma'$ per $k \to \infty$. Da qui si trae che $v_1(y', \epsilon_k)$ converge $*$-debolmente ad una misura temperata $d\sigma = (1 + |y'|)^n d\sigma'$ quando $k \to \infty$, in quanto

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\sigma = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 + |y'|)^n d\sigma' = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 + |y'|)^n (1 + |y'|)^{-n} v_1(y', \epsilon_k) dy'$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} v_1(y', \epsilon_k) dy'.$$

La misura $d\sigma$ soddisfa la prima disuguaglianza (1.8)

$$\infty > \int |d\sigma'| = \int (1 + |y'|)^{-n} |d\sigma(y')|,$$

e vale inoltre

$$v_1(x', x_n) = \int P(x, y') d\sigma(y'), \quad x_n > 0.$$

Questa, insieme alla (1.12), prova la (1.9).
Ora la (1.15) implica la convergenza debole (nel senso delle distribuzioni) di $v_1(x', x_n)dx'$ ad una misura $d\sigma$ quando $x_n \to 0$. Infatti, se $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$, si ha

$$\int v_1(x', x_n)\phi(x')dx' = \int d\sigma(y') \int P(x, y')\phi(x')dx',$$

e l'ultimo integrale converge uniformemente a $\phi(y')$ quando $x_n \to 0$. L'ultima affermazione è conseguenza del teorema della convergenza dominata di Lebesgue, applicabile grazie all'uniforme limitatezza dell'ultimo integrale che è uniformemente limitato da $C(1+|y'|)^{-n}$. Quindi si può concludere che il limite del doppio integrale per $x_n \to 0$ è $\int \phi(y')d\sigma(y')$, e $v(x) = v_1(x) + v_2(x)$ converge debolmente ad una misura $d\sigma$ per $x_n \to 0$. $\square$

Osservazione 1.3.2. *Anche nel semispazio $\mathbb{R}^n_-$ si può scrivere una formula di rappresentazione per funzioni subarmoniche equivalente alla precedente. Siano $x, y \in \mathbb{R}^n_+$ e $x^*, y^* \in \mathbb{R}^n_-$, allora*

$$G(x^*, y^*) = G(x, y)$$

$$P(x^*, y') = -P(x', x_n, y').$$

Si precisa che valgono le stesse uguaglianze se $x, y \in \mathbb{R}^n_-$ e $x^*, y^* \in \mathbb{R}^n_+$. L'espressione del nucleo di Poisson nel semispazio negativo è stata determinata mediante il principio di riflessione di Schwartz per funzioni armoniche. Poiché conosciamo la formula di rappresentazione per funzioni subarmoniche in $\mathbb{R}^n_+$ che verificano la (1.1), definiamo, per $x \in \mathbb{R}^n_-$, $v(x) = \tilde{v}(x^*)$, dove $x^* \in \mathbb{R}^n_+$, e $\tilde{v}$ è subarmonica in $\mathbb{R}^n_+$ e soddisfa la (1.1). Di conseguenza

$$v(x) = \tilde{v}(x^*) = \int P(x^*, y')d\sigma(y') + \int_{y_n^*>0} G(x^*, y^*)d\mu(y*) + \gamma x_n^*$$

$$= -\int P(x, y')d\sigma(y') + \int_{y_n<0} G(x', -x_n, y', y_n)d\tilde{\mu}(y) - \gamma x_n,$$

dove $d\tilde{\mu}$ è la misura $\triangle v$, per la quale vale

$$d\tilde{\mu}(y) = d\mu(y', -y_n) \quad \text{con } y_n < 0. \tag{1.16}$$

Inoltre v è subarmonica in $\mathbb{R}^n_-$ in quanto $(\triangle v)(x) = (\triangle \tilde{v})(x^*) = d\mu \geqslant 0$. Riassumendo, se v è una funzione subarmonica in $\mathbb{R}^n_-$ tale che, per certe costanti $C_0 \geqslant 0$ e $C_1 > 0$, vale

$$v(x) \leqslant C_0 + C_1|x_n|, \quad x_n < 0,$$

allora si può scrivere

$$v(x) = -\int P(x, y')d\sigma(y') + \int_{y_n<0} G(x, y)d\tilde{\mu}(y) + \gamma|x_n|,$$

con $d\tilde{\mu} = \triangle v \geqslant 0$.

1.4 Funzioni plurisubarmoniche e funzioni di supporto

I domini in cui risolviamo le equazioni di convoluzione sono insiemi convessi sui quali si può definire una funzione, detta funzione di supporto. Tale funzione interviene nel teorema di Paley-Wiener-Schwartz e nei teoremi che dimostreremo.

Definizione 1.4.1. *Se* K *è un compatto convesso di* $\mathbb{R}^n$*, la funzione di supporto* H *di* K *è definita da*

$$H_K(\xi) = \sup_{x\in K}\langle x, \xi\rangle, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Essa è convessa e positivamente omogenea di grado 1 (cioé $H_K(t\xi) = tH_K(\xi)$ *per ogni* $t \geqslant 0$*).*

Infatti

$$H_K(\xi+\eta) = \sup_{x\in K}\langle x, \xi+\eta\rangle \leqslant \sup_{x\in K}\langle x, \xi\rangle + \sup_{x\in K}\langle x, \eta\rangle = H_K(\xi)+H_K(\eta),\ \xi, \eta \in \mathbb{R}^n, \tag{1.17}$$

da cui segue banalmente la convessità, mentre

$$H_K(t\xi) = \sup_{x\in K}\langle tx, \xi\rangle = t\sup_{x\in K}\langle x, \xi\rangle = tH_K(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{1.18}$$

mostra l'omogeneità. Se K è l'insieme vuoto allora per definizione $H_K = -\infty$ e si assume $0 \cdot (-\infty) = -\infty$ nella (1.18).

Definizione 1.4.2. *Se K è un compatto di $\mathbb{R}^n$ si indica con chK la chiusura dell'inviluppo convesso di K. Equivalentemente chK è l'intersezione di tutti i convessi chiusi che contengono K, cioè*

$$chK = \{\sum \lambda_j x_j; 0 \leqslant \lambda_j, \sum \lambda_j = 1 \quad \text{con} \quad x_j \in K\}.$$

Osservazione 1.4.3. *Se K è un qualsiasi compatto allora $H_K(\xi) = H_{chK}(\xi)$. D'altra parte si vede che ogni funzione $H : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty)$ che soddisfa* (1.17) *e* (1.18) *è la funzione di supporto di uno e un solo compatto convesso $K = \{x; \langle x, \xi\rangle \leqslant H(\xi), \forall \xi \in \mathbb{R}^n\}$ (si veda [7]).*
Se K_1, K_2 sono insiemi compatti convessi con funzioni di supporto H_1, H_2, allora la funzione di supporto dell'insieme compatto convesso $K_1 \pm K_2$ è $H_1 \pm H_2$. Se H_α è la funzione di supporto di K_α, e $H = \sup_\alpha H_\alpha$ è finita ovunque, allora H è la funzione di supporto della chiusura dell'inviluppo convesso di $\cup_\alpha K_\alpha$.

Definizione 1.4.4 (Funzione plurisubarmonica)**.** *Una funzione u definita su un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ a valori in $[-\infty, \infty)$ si dice plurisubarmonica se*

1. *u è superiormente semicontinua*
2. *per ogni z e $w \in \mathbb{C}^n$ la funzione $\tau \mapsto u(z + \tau w)$ è subarmonica nella parte di $\mathbb{C}$ in cui essa è definita, cioè in $\{\tau \in \mathbb{C}; z + \tau w \in \Omega\}$.*

Esempio 1.4.5. Se f è analitica in $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ allora $\log |f|$ è plurisubarmonica (si veda l'Esempio 1.1.5).

Tutte le proprietà valide per le funzioni subarmoniche possono essere estese anche alle funzioni plurisubarmoniche. Infatti una funzione plurisubarmonica è subarmonica se $\mathbb{C}^n$ è identificato con $\mathbb{R}^{2n}$.

Come per gli insiemi si può dare una definizione di funzione di supporto per le funzioni plurisubarmoniche, che si basa sul lemma seguente.

Lemma 1.4.6. *Sia v una funzione plurisubarmonica in $\mathbb{C}^n$ tale che per certe costanti $C_0 \geqslant 0$ e $C_1 > 0$ vale*

$$v(x + iy) \leqslant C_0 + C_1|y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{1.19}$$

Se $v \not\equiv -\infty$ *la funzione di* y *definita da*

$$M(y) = \sup_x v(x + iy)$$

è convessa. Il limite

$$H(y) = \lim_{t \to \infty} \frac{M(ty)}{t} \tag{1.20}$$

esiste ed è una funzione di supporto. Vale inoltre $M(x + y) \leqslant M(x) + H(y)$ *per ogni* $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Grazie alle ipotesi sulla funzione v si ha $M(y) \leqslant C_0 + C_1|y|$ e $M \not\equiv -\infty$. Inoltre

$$M(y + ty_1) = \sup_x v\big(x + i(y + ty_1)\big) = \sup_x \sup_{w \in \mathbb{C}, \mathsf{Im}\, w = t} v(x + iy + wy_1),$$

con $v(x+iy+wy_1)$ subarmonica per la Definizione 1.4.4. Dalla subarmonicità di $v(x+iy+wy_1)$ segue, per il Lemma 1.1.6, che $\sup_{w \in \mathbb{C}, \mathsf{Im}\, w = t} v(x+iy+wy_1)$ è convessa. Poiché il sup di una famiglia di funzioni convesse è convesso, anche $M(y + ty_1)$ è una funzione convessa di t, quindi M è convessa.
La convessità di M assicura l'esistenza del limite

$$H(y) = \lim_{t \to \infty} M(ty)/t = \lim_{t \to \infty} \big(M(ty) - M(0)\big)/t,$$

che è a sua volta una funzione convessa, positivamente omogenea di grado uno, e tale che $H(y) \leqslant C_1|y|$. Essa gode inoltre della proprietà (1.17) valida per funzioni di supporto di insiemi compatti convessi. Infatti, grazie alla convessità, si ha

$$H(x + y) = H\big(2(x/2 + y/2)\big) = 2H(x/2 + y/2)$$

$$\leqslant 2\big(H(x)/2 + H(y)/2\big) = H(x) + H(y).$$

Analogamente

$$H(x + ty) \leqslant H(x) + H(ty) = H(x) + tH(y), \quad t \geqslant 0. \tag{1.21}$$

Dalla monotonia del quoziente $\big(M(ty)-M(0)\big)/t$ si ottiene $M(y) \leqslant M(0)+H(y)$, perché

$$H(y)=\lim_{t\to\infty}\big(M(ty)-M(0)\big)/t \geqslant M(y)-M(0),$$

e, più in generale, si ha

$$M(x+y) \leqslant M(0)+H(x+y). \tag{1.22}$$

Quindi

$$\begin{aligned} M(x+y)-M(x) &\leqslant \lim_{t\to\infty}\big(M(x+ty)-M(x)\big)/t \\ &= \lim_{t\to\infty}\big(M(x+ty)-M(x)-M(0)+M(0)\big)/t \\ &\overset{(1.22)}{\leqslant} \lim_{t\to\infty}\big(H(x+ty)-M(x)+M(0)\big)/t \\ &\overset{(1.21)}{\leqslant} \lim_{t\to\infty}\big(H(x)+tH(y)\big)/t = H(y), \end{aligned}$$

che prova il lemma. □

Definizione 1.4.7. *La funzione H definita dalla* (1.20) *verrà chiamata* funzione di supporto della funzione plurisubarmonica v. *Essa ha dunque le seguenti proprietà:*
(i) $H(y) \leqslant C_1|y|$
(ii) $H(tx)=tH(x),\ t \geqslant 0\ (H(tx)=-tH(-x),\ t \leqslant 0)$
(iii) $H(x+y) \leqslant H(x)+H(y)$ *(più forte della convessità).*
Si pone $H=-\infty$ *quando* $v=0$ ($H=-\infty$ *è la funzione di supporto dell'insieme vuoto*).

Osservazione 1.4.8. *Osserviamo che, dalle proprietà (i) e (iii), si ottiene che H è Lipschitz-continua. Infatti*

$$0=H(0) \quad (\text{per definizione di } H)$$

$$=H(y-y) \leqslant H(y)+H(-y),$$

e quindi $-H(-y) \leqslant H(y)$, *e equivalentemente,* $-H(y) \leqslant H(-y)$.
Ma allora

$$\begin{cases} -H(y) \geqslant -C_1|y| \\ H(-y) \geqslant C_1|y| \end{cases}$$

e dunque

$$-C_1|y| \leqslant -H(y) \leqslant H(-y) \leqslant C_1|y|,$$

da cui si ricava

$$-C_1|y| \leqslant H(y) \leqslant C_1|y|.$$

Di conseguenza $|H(y)| \leqslant C_1|y|$. *Ne segue allora che* H *è Lipschitz-continua, in quanto*

$$|H(x) - H(y)| = |H(x - y + y) - H(y)| \leqslant |H(x - y)| \leqslant C_1|x - y|, \quad C_1 > 0. \tag{1.23}$$

Inoltre, se H *è la funzione di supporto di una funzione plurisubarmonica* v, *allora*

$$v(z) \leqslant C_0 + H(\mathsf{Im}\, z), \tag{1.24}$$

cioè H *prescrive la crescita ottimale della funzione* v. *In altre parole* H *è la più piccola funzione di supporto per cui la* v *verifica la* (1.24).
Infatti, se $y = \mathsf{Im}\, z$, *si ha*

$$v(z) \leqslant M(y) = M(0 + y) \overset{(1.22)}{\leqslant} M(0) + H(y) \leqslant C_0 + H(y),$$

e dunque vale la (1.24).

Capitolo 2

Approssimazione di funzioni intere di tipo esponenziale

L'obiettivo di questo capitolo è quello di provare un teorema di approssimazione per funzioni intere di tipo esponenziale. A questo scopo saranno indispensabili alcune stime valide per funzioni subarmoniche e plurisubarmoniche. Queste funzioni intervengono in quanto, come già visto, il $\log|f_j|$, $1 \leqslant j \leqslant 3$, quando f_j è una funzione intera, è plurisubarmonico.
Se supponiamo che due di queste, per fissare le idee siano esse f_1 ed f_3, sono trasformate di Fourier di distribuzioni a supporto compatto, allora

$$|f_j(\zeta)| \leqslant C_0(1+|\zeta|)^N \exp\big(H_j(\mathsf{Im}\,\zeta)\big), \quad j = 1, 3$$

per il Teorema di Paley-Wiener-Schwartz. La funzione f_2, come vedremo, avrà una stima del tipo

$$|f_2(\zeta)| \leqslant C_\epsilon \exp\big(H_2(\mathsf{Im}\,\zeta) + \epsilon|\zeta|\big), \quad \zeta \in \mathbb{C}^n, \ \forall \epsilon > 0. \tag{2.1}$$

La (2.1) mostra che la funzione f_2 non deve necessariamente avere crescita polinomiale, e quindi, ancora per il Teorema di Paley-Wiener-Schwartz, non è indispensabile che sia la trasformata di Fourier di una distribuzione a supporto compatto. Per questo motivo si ricorre al teorema di approssimazione per funzioni intere di tipo esponenziale, che permette di approssimare la funzione f_2 mediante una funzione intera f_2^t tale che $f_2^t = \hat{\nu}$, $\nu \in \mathscr{E}'(\Omega)$. Questo fatto sarà cruciale nella dimostrazione del teorema di approssimazione delle soluzioni dell'equazione omogenea $\mu * u = 0$, dal quale seguirà il teorema di esistenza delle soluzioni per l'equazione non omogenea con termine sorgente (membro a destra) analitico. I primi due lemmi che dimostreremo saranno preliminari alla dimostrazione di una prima stima della funzione $v_2 = \log |f_2|$. Da questa seguiranno delle considerazioni sulla funzione $v_2(tz)/t$, grazie alle quali si otterrà finalmente una stima di v_2 espressa in termini della funzione di supporto H_2. Quest'ultima è la stima necessaria per giungere al Teorema di approssimazione.

2.1 Stime

Le stime che verranno dimostrate si riferiscono a funzioni subarmoniche e plurisubarmoniche in $\mathbb{C}^n$ che verificano la (1.19), cioè tali che

$$v(x+iy) \leqslant C_0 + C_1|y|, \quad C_0, C_1 > 0.$$

L'importanza di questa condizione di crescita è legata all'esistenza della funzione di supporto. Infatti, per il Lemma 1.4.6, se la funzione plurisubarmonica v soddisfa la (1.19), allora esiste la funzione di supporto H definita dalla (1.20).

Osserviamo che, se f è una funzione intera del tipo $f = \hat{\mu}$, dove μ è una misura a supporto compatto, allora la funzione plurisubarmonica $v = \log |f|$ verifica la (1.19) per il teorema di Paley-Wiener-Schwartz (si veda l'Appendice A), e dunque esiste la funzione di supporto H di v che coincide con la funzione di supporto $H_{\operatorname{supp}\mu}$.

Lemma 2.1.1. *Sia v una funzione subarmonica in $\mathbb{C}$ che soddisfa la* (1.19). *Allora*

$$\pi^{-1} \int |v(\xi)|/(1+\xi^2)d\xi \leqslant C_0 + K\big(C_0 + C_1 - v(0)\big) \tag{2.2}$$

dove K è una costante indipendente da C_0 e C_1.

Dimostrazione. Per la formula di rappresentazione di Riesz nei semispazi $\mathsf{Im}\, z > 0$ e $\mathsf{Im}\, z < 0$ abbiamo

$$v(z) = \int P(z,\xi)d\sigma(\xi) + \int_{\mathsf{Im}\,\zeta>0} G(z,\zeta)d\mu(\zeta) + \gamma \mathsf{Im}\, z, \quad \zeta = \xi + i\mathsf{Im}\,\zeta \in \mathbb{C}, \mathsf{Im}\, z > 0, \tag{2.3}$$

$$v(z) = -\int P(z,\xi)d\sigma(\xi) + \int_{\mathsf{Im}\,\zeta<0} G(z,\zeta)d\tilde{\mu}(\zeta) - \gamma \mathsf{Im}\, z, \; \zeta = \xi + i\mathsf{Im}\,\zeta \in \mathbb{C}, \mathsf{Im}\, z < 0, \tag{2.4}$$

dove $d\mu = d\tilde{\mu}$ per la (1.16), e la funzione di Green coincide ed è $\leqslant 0$ su entrambi i semispazi.
Quindi possiamo stimare $v(z)$ nello stesso modo su entrambi i semispazi, cioè

$$v(z) \leqslant \int P(z,\xi)d\sigma(\xi) + \gamma|\mathsf{Im}\, z| \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Determiniamo ora una maggiorazione per l'integrale al secondo membro. Consideriamo

$$\int P(z,\xi)d\sigma(\xi) = \limsup_{\mathsf{Im}\,\zeta\to 0} \int P(z,\xi)v(\zeta)d\xi. \tag{2.5}$$

Poiché

$$\limsup_{\mathsf{Im}\,\zeta\to 0} P(z,\xi)v(\zeta) = P(z,\xi)v(\xi),$$

e

$$|P(z,\xi)||v(\xi)| \leqslant C_0|P(z,\xi)|,$$

dove $C_0|P(z,\xi)|$ è una funzione sommabile indipendente da $\mathsf{Im}\,\zeta$, per il teorema della convergenza dominata si ha

$$(2.5) = \int P(z,\xi) \limsup_{\mathsf{Im}\,\zeta\to 0} v(\zeta)d\xi. \tag{2.6}$$

Essendo inoltre v superiormente semicontinua, si ha

$$(2.6) \leqslant \int P(z,\xi)v(\xi)d\xi,$$

e quindi

$$v(z) \leqslant \int P(z,\xi)v(\xi)d\xi + \gamma|\mathsf{Im}\, z|. \tag{2.7}$$

Esplicitando $P(z,\xi) = |\mathsf{Im}\, z||z-\xi|^{-2}/\pi,\ \forall z \in \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ ($n = 2$ e $c_n = 2\pi$), e ricordando che $\gamma \leqslant C_1$, si ha

$$v(z) \overset{(2.7)}{\leqslant} \frac{|\mathsf{Im}\, z|}{\pi} \int v(\xi)|z-\xi|^{-2} d\xi + C_1 |\mathsf{Im}\, z|, \quad \forall z \in \mathbb{C}. \tag{2.8}$$

Grazie all'uguaglianza $(|\mathsf{Im} z|/\pi) \int |z-\xi|^{-2} d\xi = 1$, sommando ad ambo i membri della (2.8) la costante C_0, si ottiene

$$v(z) + \frac{|\mathsf{Im}\, z|}{\pi} \int \big(C_0 - v(\xi)\big)|z-\xi|^{-2} d\xi \leqslant C_0 + C_1 |\mathsf{Im}\, z|, \tag{2.9}$$

dove $C_0 - v(\xi) = |v(\xi) - C_0|$. Quindi

$$v(z) + \frac{|\mathsf{Im}\, z|}{\pi} \int |v(\xi) - C_0||z-\xi|^{-2} d\xi \leqslant C_0 + C_1 |\mathsf{Im}\, z|. \tag{2.10}$$

Utilizzeremo da qui in poi le seguenti notazioni:

- $B_{\mathbb{R}^n}(x,R)$ è la palla di $\mathbb{R}^n$ centrata in x di raggio R
- $|B_{\mathbb{R}^n}(x,R)| = \mathscr{L}_n\{x' \in \mathbb{R}^n; |x-x'| < R\}$ è la misura di Lebesgue di $B_{\mathbb{R}^n}(x,R)$, dove $\mathscr{L}_n$ è la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$
- $M_{B_{\mathbb{R}^n}(x,R)}\big(x' \mapsto v(x')\big) = \frac{1}{|B_{\mathbb{R}^n}(x,R)|} \int_{|x-x'|<R} v(x')dx'$ è la media della funzione v su $B_{\mathbb{R}^n}(x,R)$, e x' è la variabile di integrazione.

Le stessa scrittura verrà utilizzata nel caso complesso, utilizzando la misura di Lebesgue in $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$. Facendo la media di ambo i membri della (2.10) su $B_{\mathbb{C}}(0,1)$ si ha

$$M_{B_{\mathbb{C}}(0,1)}\left(z \mapsto v(z) + \frac{|\mathsf{Im}\, z|}{\pi} \int |v(\xi) - C_0||z-\xi|^{-2} d\xi\right)$$
$$\leqslant M_{B_{\mathbb{C}}(0,1)}(z \mapsto C_0 + C_1|\mathsf{Im}\, z|),$$

da cui segue banalmente

$$M_{B_{\mathbb{C}}(0,1)}\big(z \mapsto v(z)\big) + M_{B_{\mathbb{C}}(0,1)}\left(z \mapsto \frac{|\mathsf{Im}\, z|}{\pi} \int |v(\xi) - C_0||z-\xi|^{-2} d\xi\right)$$
$$\leqslant M_{B_{\mathbb{C}}(0,1)}(z \mapsto C_0 + C_1|\mathsf{Im}\, z|). \tag{2.11}$$

Dalla subarmonicità della funzione v si trae la seguente minorazione per il primo membro della (2.11)

$$M_{B_{\mathbb{C}}(0,1)}\big(z \mapsto v(z)\big) + M_{B_{\mathbb{C}}(0,1)}\left(z \mapsto \frac{|\mathsf{Im}\, z|}{\pi} \int |v(\xi) - C_0||z-\xi|^{-2} d\xi\right)$$

$$\geqslant v(0) + (1/\pi) \int |v(\xi) - C_0| M_{B_{\mathbb{C}}(0,1)}(z \mapsto |\mathsf{Im}\, z||z-\xi|^{-2}) d\xi \qquad (2.12)$$

$$\geqslant v(0) + (1/\pi) \int |v(\xi) - C_0|(K(1+\xi^2))^{-1} d\xi, \qquad (2.13)$$

dove nel passaggio dalla (2.12) alla (2.13) si è applicata la disuguaglianza

$$M_{B_{\mathbb{C}}(0,1)}(z \mapsto |\mathsf{Im}\, z||z-\xi|^{-2}) \geqslant \big(K(1+\xi^2)\big)^{-1},$$

con K costante sufficientemente grande e indipendente da C_0 e C_1 (per la dimostrazione si veda l'Appendice C).
Per il secondo membro della (2.11) vale banalmente

$$M_{B_{\mathbb{C}}(0,1)}(z \mapsto C_0 + C_1|\mathsf{Im}\, z|) \leqslant C_0 + C_1. \qquad (2.14)$$

Dalle stime dei due membri della (2.11), date dalla (2.13) e dalla (2.14), si ricava dunque

$$\pi^{-1} \int |v(\xi)|/(1+\xi^2) d\xi \leqslant C_0 + K\big(C_0 + C_1 - v(0)\big),$$

che è esattamente la (2.2) che si voleva dimostrare.

□

Lemma 2.1.2. *Sia v una funzione plurisubarmonica in $\mathbb{C}^n$ non identicamente uguale a $-\infty$ che soddisfa la (1.19). Allora si ha*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |v(x)|(1+|x|)^{-n-1} dx < \infty, \qquad (2.15)$$

$$t^{-n-1} \int_{|x|<t} |v(x)| dx \to 0, \quad t \to \infty. \qquad (2.16)$$

Dimostrazione. La funzione plurisubarmonica v è tale che $v \in [-\infty, \infty)$ e $v \not\equiv -\infty$, quindi $v(x)$ sarà finita per qualche $x \in \mathbb{R}^n$. Per dimostrare la (2.15) assumiamo che $v(0) \in \mathbb{R}$.

Se w è un vettore unitario in $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$, per il Lemma 2.1.1, si ha

$$\pi^{-1} \int |v(rw)|/(1+r^2)dr \leqslant C_0 + K\big(C_0 + C_1 - v(0)\big).$$

Integrando ambo i membri della precedente disuguaglianza rispetto a w, e facendo il cambiamento di variabile $rw = x$, si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} |v(x)|(1+|x|^2)^{-1}|x|^{1-n}dx < \infty,$$

che implica la (2.15).

Per provare la (2.16) consideriamo $t, s \in \mathbb{R}$, $t > s$, e scriviamo

$$t^{-n-1}\int_{|x|<t} |v(x)|dx = t^{-n-1}\int_{|x|<s} |v(x)|dx + t^{-n-1}\int_{s<|x|<t} |v(x)|dx. \quad (2.17)$$

L'ultimo integrale al secondo membro si stima nel seguente modo:

$$\begin{aligned}\int_{s<|x|<t} t^{-n-1}|v(x)|dx &= \int_{s<|x|<t} \left(\frac{1+|x|}{t}\right)^{n+1} |v(x)|(1+|x|)^{-(n+1)}dx \\ &\leqslant \left(\frac{1}{t}+1\right)^{n+1} \int_{s<|x|<t} |v(x)|(1+|x|)^{-(n+1)}dx \\ &\leqslant \left(\frac{1}{t}+1\right)^{n+1} \int_{|x|>s} |v(x)|(1+|x|)^{-(n+1)}dx. \qquad (2.18)\end{aligned}$$

Mettendo assieme la (2.17) e la (2.18) si ha quindi per ogni $s < t$

$$t^{-n-1}\int_{|x|<t} |v(x)|dx \leqslant t^{-n-1}\int_{|x|<s} |v(x)|dx + (1+t^{-1})^{n+1}\int_{|x|>s} |v(x)|(1+|x|)^{-n-1}dx, \quad (2.19)$$

da cui segue che il limite superiore del primo membro della (2.19) per $t \to \infty$ è al più uguale a

$$\int_{|x|>s} |v(x)|(1+|x|)^{-n-1}dx < \infty.$$

Di conseguenza

$$0 \leqslant \liminf_{t\to\infty} t^{-n-1}\int_{|x|<t} |v(x)|dx \leqslant \limsup_{t\to\infty} t^{-n-1}\int_{|x|<t} |v(x)|dx$$

$$\overset{(2.19)+(2.15)}{\leqslant} \lim_{s\to\infty} \int_{|x|>s} |v(x)|(1+|x|)^{-n-1}dx = 0,$$

e dunque

$$\lim_{t\to\infty} t^{-n-1} \int_{|x|<t} |v(x)|dx = 0.$$

$\square$

Lemma 2.1.3. *Siano v_j, $j = 1, 2, 3$ funzioni plurisubarmoniche con $v_1+v_2 = v_3 \not\equiv -\infty$, e assumiamo che v_1 e v_3 soddisfino la* (1.19). *Allora vale*

$$v_2(z) \leqslant C_2(\epsilon) + C_3|\mathsf{Im}\, z| + \epsilon|z|, \tag{2.20}$$

con $C_3 = 2^{4n+4}C_1$ e $\epsilon > 0$ arbitraria.

Dimostrazione. Consideriamo $x \in \mathbb{R}^n$ e $R > 0$. Poiché v_1 è subarmonica si ha

$$\begin{aligned} v_1(x) &\leqslant M_{B_{\mathbb{C}^n}(x,R)}\big(z \mapsto v_1(z)\big) \\ &= M_{B_{\mathbb{C}^n}(x,R)}\big(z \mapsto v_1(z) - C_0 - C_1|\mathsf{Im}\, z|\big) + M_{B_{\mathbb{C}^n}(x,R)}(z \mapsto C_0 + C_1|\mathsf{Im}\, z|) \\ &\leqslant M_{B_{\mathbb{C}^n}(x,R)}\big(z \mapsto v_1(z) - C_0 - C_1|\mathsf{Im}\, z|\big) + C_0 + C_1R. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Per $|v_1|$ si ha

$$\begin{aligned} M_{B_{\mathbb{C}^n}(x,R)}\big(z \mapsto |v_1(z)|\big) &\overset{(2.21)}{\leqslant} M_{B_{\mathbb{C}^n}(x,R)}\big(z \mapsto \big|v_1(z) - C_0 - C_1|\mathsf{Im}\, z|\big|\big) + C_0 + C_1R \\ &= M_{B_{\mathbb{C}^n}(x,R)}\big(z \mapsto C_0 + C_1|\mathsf{Im}\, z| - v_1(z)\big) + C_0 + C_1R \\ &\leqslant 2(C_0 + C_1R) + |v_1(x)|, \end{aligned}$$

dove nell'ultima disuguaglianza si è usato

$$|v_1(x)| \geqslant -v_1(x) \geqslant M_{B_{\mathbb{C}^n}(x,R)}\big(z \mapsto -v_1(z)\big)$$

per la plurisubarmonicità. Si è quindi ottenuto

$$M_{B_{\mathbb{C}^n}(x,R)}\big(z \mapsto |v_1(z)|\big) \leqslant 2(C_0 + C_1R) + |v_1(x)|. \tag{2.22}$$

Usando la (2.22), sostituendo x con x', e prendendo $|x - x'| < R/2$, si ricava

$$2(C_0 + C_1R) + |v_1(x')| \geqslant M_{B_{\mathbb{C}^n}(x',R)}\big(z \mapsto |v_1(z)|\big)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2^{-2n}}{|B_{\mathbb{C}^n}(x',R/2)|}\int_{|z-x'|<R}|v_1(z)|L(dz)\\
&\geqslant \frac{2^{-2n}}{|B_{\mathbb{C}^n}(x,R/2)|}\int_{|z-x|<R/2}|v_1(z)|L(dz)\\
&= 2^{-2n}M_{B_{\mathbb{C}^n}(x,R/2)}\big(z\mapsto|v_1(z)|\big)
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

L'ultima minorazione richiede due considerazioni. La prima è che $|B_{\mathbb{C}^n}(x',R/2)| = |B_{\mathbb{C}^n}(x,R/2)|$, la seconda è che $B_{\mathbb{C}^n}(x,R/2)\subset B_{\mathbb{C}^n}(x',R)$ se $|x-x'|<R/2$. Riassumendo si ha

$$
2^{-2n}M_{B_{\mathbb{C}^n}(x,R/2)}\big(z\mapsto|v_1(z)|\big)\leqslant 2(C_0+C_1R)+|v_1(x')|. \tag{2.24}
$$

Facciamo agire la media su $B_{\mathbb{R}^n}(x,R/2)$ rispetto a x' (x' è la variabile di integrazione) in $\mathbb{R}^n$ su entrambi i membri della (2.24), cioè

$$
\begin{aligned}
&M_{B_{\mathbb{R}^n}(x,R/2)}\Big(x'\mapsto 2^{-2n}M_{B_{\mathbb{C}^n}(x,R/2)}\big(z\mapsto|v_1(z)|\big)\Big)\\
&\qquad\leqslant M_{B_{\mathbb{R}^n}(x,R/2)}\big(x'\mapsto 2(C_0+C_1R)+|v_1(x')|\big),
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

dove

$$
M_{B_{\mathbb{R}^n}(x,R/2)}\Big(x'\mapsto 2^{-2n}M_{B_{\mathbb{C}^n}(x,R/2)}\big(z\mapsto|v_1(z)|\big)\Big)=2^{-2n}M_{B_{\mathbb{C}^n}(x,R/2)}\big(z\mapsto|v_1(z)|\big) \tag{2.26}
$$

e

$$
M_{B_{\mathbb{R}^n}(x,R/2)}\big(x'\mapsto 2(C_0+C_1R)+|v_1(x')|\big)=2(C_0+C_1R)+M_{B_{\mathbb{R}^n}(x,R/2)}\big(x'\mapsto|v_1(x')|\big). \tag{2.27}
$$

Per (2.25), (2.26) e (2.27) vale

$$
2^{-2n}M_{B_{\mathbb{C}^n}(x,R/2)}\big(z\mapsto|v_1(z)|\big)\leqslant 2(C_0+C_1R)+M_{B_{\mathbb{R}^n}(x,R/2)}\big(x'\mapsto|v_1(x')|\big). \tag{2.28}
$$

La funzione $v_2(z)$ è plurisubarmonica e può essere stimata con la sua media su ogni palla di centro z e raggio arbitrario. Perciò

$$
\begin{aligned}
2^{-4n}v_2(z) &\leqslant 2^{-4n}M_{B_{\mathbb{C}^n}(z,R/4)}\big(z'\mapsto v_2(z')\big)\\
&= \frac{2^{-4n}}{|B_{\mathbb{C}^n}(z,R/4)|}\int_{|z-z'|<R/4}v_2(z')L(dz')
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{|B_{\mathbb{C}^n}(z,R)|}\int_{|z-z'|<R/4} v_2(z')L(dz'). \tag{2.29}$$

Ora, se $|z-x| < R/4$, con $x \in \mathbb{R}^n$, si ha $B_{\mathbb{C}^n}(z,R/4) \subset B_{\mathbb{C}^n}(x,R/2)$, e la (2.29) può essere maggiorata da

$$(2.29) \leqslant \frac{1}{|B_{\mathbb{C}^n}(x,R)|}\int_{|x-z'|<R/2} v_2(z')L(dz'), \quad \text{se } |z-x| < R/4$$

$$= 2^{-2n} M_{B_{\mathbb{C}^n}(x,R/2)}\big(z' \mapsto v_2(z')\big).$$

Quindi

$$2^{-4n} v_2(z) \leqslant 2^{-2n} M_{B_{\mathbb{C}^n}(x,R/2)}\big(z' \mapsto v_2(z')\big), \quad \text{se } |z-x| < R/4. \tag{2.30}$$

Dall'ipotesi $v_2 = v_3 - v_1$ segue

$$2^{-4n} v_2(z) \overset{(2.30)}{\leqslant} 2^{-2n} M_{B_{\mathbb{C}^n}(x,R/2)}\big(z' \mapsto v_2(z')\big)$$

$$= 2^{-2n} M_{B_{\mathbb{C}^n}(x,R/2)}\big(z' \mapsto v_3(z') - v_1(z')\big)$$

$$= 2^{-2n} M_{B_{\mathbb{C}^n}(x,R/2)}\big(z' \mapsto v_3(z')\big) + 2^{-2n} M_{B_{\mathbb{C}^n}(x,R/2)}\big(z' \mapsto -v_1(z')\big)$$

$$\leqslant 2^{-2n} M_{B_{\mathbb{C}^n}(x,R/2)}\big(z' \mapsto v_3(z')\big) + 2^{-2n} M_{B_{\mathbb{C}^n}(x,R/2)}\big(z' \mapsto |v_1(z')|\big). \tag{2.31}$$

Ora si ha

$$2^{-2n} M_{B_{\mathbb{C}^n}(x,R/2)}\big(z' \mapsto v_3(z')\big) \leqslant 2^{-2n} M_{B_{\mathbb{C}^n}(x,R/2)}(z' \mapsto C_0 + C_1|\mathsf{Im}\, z'|)$$

$$\leqslant 2^{-2n}(C_0 + C_1 R/2) \leqslant C_0 + C_1 R, \tag{2.32}$$

mentre l'ultima media nella (2.31) si maggiora usando la (2.28). Dunque

$$2^{-4n} v_2(z) \leqslant 3(C_0 + C_1 R) + M_{B_{\mathbb{R}^n}(x,R/2)}\big(x' \mapsto |v_1(x')|\big) \quad \text{se } |z-x| < R/4. \tag{2.33}$$

Sia ora $\delta > 0$, $x = \mathsf{Re}\ z$ e $R = 4|\mathsf{Im}\, z| + \delta|\mathsf{Re}\ z|$. Per la (2.16) del lemma precedente, con $t = |x| + R \leqslant (1+\delta^{-1})R$, si ha

$$M_{B_{\mathbb{R}^n}(x,R/2)}\big(x' \mapsto |v_1(x')|\big) = o(|z|) \quad z \to \infty.$$

Per la dimostrazione dell'ultima stima si veda l'Appendice C.
Sostituendo e portando 2^{-4n} al secondo membro nella (2.33) troviamo

$$v_2(z) \leqslant 3 \cdot 2^{4n} C_0 + 12 \cdot 2^{4n} C_1 |\mathsf{Im}\, z| + 3 \cdot 2^{4n} C_1 \delta |\mathsf{Re}\, z| + o(1)|z|$$

$$\leqslant 3 \cdot 2^{4n} C_0 + 2^{4n+4} C_1 |\mathsf{Im}\, z| + 3 \cdot 2^{4n} C_1 \delta |z| + o(1)|z|.$$

Osserviamo che

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists R_\epsilon > 0 : \quad |o(1)| \leqslant \epsilon \quad \text{se } |z| > R_\epsilon.$$

Considerando $|z| > R_\epsilon$, con $\epsilon = 2^{4n} C_1 \delta$, si ha

$$v_2(z) \leqslant 3 \cdot 2^{4n} C_0 + 2^{4n+4} C_1 |\mathsf{Im}\, z| + 3 \cdot 2^{4n} C_1 \delta |z| + 2^{4n} C_1 \delta |z|$$

$$= 3 \cdot 2^{4n} C_0 + 2^{4n+4} C_1 |\mathsf{Im}\, z| + 2^{4n+2} C_1 \delta |z|. \tag{2.34}$$

Se invece $|z| \leqslant R_\epsilon$, la funzione superiormente semicontinua v_1 ha un massimo nel compatto $K = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leqslant R_\epsilon\}$, e dunque $v_1(x') \leqslant C_\epsilon$ per ogni $|z| \leqslant R_\epsilon$. In definitiva, chiamando ancora ϵ la quantità $2^2\epsilon$, si ha

$$v_2(z) \leqslant (3 \cdot 2^{4n} C_0 + C'_\epsilon) + 2^{4n+4} C_1 |\mathsf{Im}\, z| + 2^{4n+2} C_1 \delta |z|$$

$$= C_2(\epsilon) + C_3 |\mathsf{Im}\, z| + \epsilon |z|,$$

per ogni $z \in \mathbb{C}^n$, $\epsilon = 2^{4n+2} C_1 \delta$, $C_3 = 2^{4n+4} C_1$ e $C_2(\epsilon) = 3 \cdot 2^{4n} C_0 + C'_\epsilon$. $\square$

Prendendo le ipotesi del Lemma 2.1.3 si vuole ora studiare la funzione $v_2(tz)/t$ per $t \to \infty$. Le proprietà di questa funzione saranno importanti quando andremo a determinare una stima della funzione plurisubarmonica $v_2 = \log |f_2|$ che coinvolge la funzione H_2.
Dalla (2.20) applicata a $v_2(tz)/t$ si ha

$$v_2(tz)/t \leqslant C_2(\epsilon)/t + C_3 |\mathsf{Im}\, z| + \epsilon |z|.$$

Quindi se

$$v(z) = \limsup_{t \to \infty} v_2(tz)/t,$$

allora (mandando $\epsilon \to 0^+$)

$$v(z) \leqslant C_3|\mathsf{Im}\, z|.$$

Se $V(z)$ è il più piccolo maggiorante superiormente semicontinuo della funzione $v : \mathbb{C}^n \longrightarrow [-\infty, \infty)$, cioè (abbreviando "superiormente semicontinua" con ssc)

$$V(z) = \inf\{F : \mathbb{C}^n \longrightarrow [-\infty, \infty);\ F\,\mathrm{ssc}\,, v(z) \leqslant F(z)\ \forall z \in \mathbb{C}^n\},$$

allora vale anche

$$V(z) \leqslant C_3|\mathsf{Im}\, z|.$$

Quando $v : \mathbb{C}^n \supset \Omega \longrightarrow [-\infty, \infty)$ allora V è definita da

$$V(z) = \inf\{F : \Omega \longrightarrow [-\infty, \infty);\ F\,\mathrm{ssc}\,, v(z) \leqslant F(z)\ \forall z \in \Omega\}.$$

Vediamo le caratteristiche della funzione V mediante due lemmi. Il primo mostrerà la subarmonicità di V, il secondo la plurisubarmonicità.

Lemma 2.1.4. *Sia v_k una successione di funzioni subarmoniche in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto convesso, e superiormente uniformemente limitate su ogni sottoinsieme compatto di Ω. Allora il più piccolo maggiorante superiormente semicontinuo V di $v = \limsup_{k\to\infty} v_k$ è subarmonico, e si ha $V = v$ quasi ovunque. Se K è un sottoinsieme compatto di Ω e f è una funzione continua su K, allora*

$$\lim_{k\to\infty} \sup_K (v_k - f) \leqslant \sup_K (V - f). \tag{2.35}$$

Dimostrazione. Poiché Ω può essere sostituito da un arbitrario sottodominio relativamente compatto contenente K, non è restrittivo assumere che la successione sia uniformemente limitata in Ω, e quindi anche $v_k \leqslant 0$ in Ω per ogni k. Indichiamo $\Omega_r = \{x; B(x,r) \subset \Omega\}$. Per la subarmonicità di v e per il lemma di Fatou

$$v(x) = \limsup_{k\to\infty} v_k(x) \leqslant \limsup_{k\to\infty} M_{B_{\mathbb{R}^n}(x,r)}\big(y \mapsto v_k(y)\big)$$

$$
\begin{aligned}
&= \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{|B_{\mathbb{R}^n}(x,r)|} \int_{B_{\mathbb{R}^n}(x,r)} v_k(y)dy \\
&\leqslant \frac{1}{|B_{\mathbb{R}^n}(x,r)|} \int_{B_{\mathbb{R}^n}(x,r)} \limsup_{k\to\infty} v_k(y)dy \\
&= M_{B_{\mathbb{R}^n}(x,r)}\big(y \mapsto v(y)\big), \quad x \in \Omega_r,
\end{aligned}
$$

e quindi

$$
v(x) \leqslant \limsup_{k\to\infty} M_{B_{\mathbb{R}^n}(x,r)}\big(y \mapsto v_k(y)\big) \leqslant M_{B_{\mathbb{R}^n}(x,r)}\big(y \mapsto v(y)\big), \quad x \in \Omega_r. \tag{2.36}
$$

Se $x \in \Omega_r$, e $0 < \epsilon < 1$, possiamo trovare un δ abbastanza piccolo tale che $\Omega_r \subset \Omega_{r+2\delta}$ e per ogni k

$$
v_k(\xi) \leqslant (1-\epsilon) M_{B_{\mathbb{R}^n}(x,r)}\big(y \mapsto v_k(y)\big), \quad \text{se } |x-\xi| < \delta. \tag{2.37}
$$

Infatti, poiché $v_k \leqslant 0$, se $|x-\xi| < \delta$ con $x \in \Omega_r \subset \Omega_{r+2\delta}$ per δ sufficientemente piccolo, allora

$$
\begin{aligned}
(r+\delta)^n v_k(\xi) &\leqslant (r+\delta)^n M_{B_{\mathbb{R}^n}(\xi,r+\delta)}\big(y \mapsto v_k(y)\big) \\
&= \frac{(r+\delta)^n}{|B_{\mathbb{R}^n}(\xi,r+\delta)|} \int_{B_{\mathbb{R}^n}(\xi,r+\delta)} v_k(y)dy \\
&= \frac{1}{|B_{\mathbb{R}^n}(\xi,1)|} \int_{B_{\mathbb{R}^n}(\xi,r+\delta)} v_k(y)dy.
\end{aligned} \tag{2.38}
$$

Le condizioni $|x-\xi| < \delta$ e $x \in \Omega_{r+2\delta}$, assicurano che $\xi \in \Omega_{r+\delta}$, e che $B_{\mathbb{R}^n}(x,r) \subset B_{\mathbb{R}^n}(\xi, r+\delta)$. Quindi, poiché $v_k \leqslant 0$, si ha

$$
\begin{aligned}
(2.38) &\leqslant \frac{1}{|B_{\mathbb{R}^n}(x,1)|} \int_{B_{\mathbb{R}^n}(x,r)} v_k(y)dy \\
&= r^n M_{B_{\mathbb{R}^n}(x,r)}\big(y \mapsto v_k(y)\big).
\end{aligned}
$$

Di conseguenza

$$
v_k(\xi) \leqslant \left(\frac{r}{r+\delta}\right)^n M_{B_{\mathbb{R}^n}(x,r)}\big(y \mapsto v_k(y)\big), \quad \text{se } |x-\xi| < \delta,\ x \in \Omega_r \subset \Omega_{r+2\delta}.
$$

Se δ è sufficientemente piccolo in modo da avere $\Omega_r \subset \Omega_{r+2\delta}$ e $\left(\frac{r}{r+\delta}\right)^n > 1-\epsilon$, essendo $M_{B_{\mathbb{R}^n}(x,r)}\big(y \mapsto v_k(y)\big) \leqslant 0$, si ha dunque

$$v_k(\xi) \leqslant \left(\frac{r}{r+\delta}\right)^n M_{B_{\mathbb{R}^n}(x,r)}\big(y \mapsto v_k(y)\big) \leqslant (1-\epsilon) M_{B_{\mathbb{R}^n}(x,r)}\big(y \mapsto v_k(y)\big),$$

e cioè la (2.37). Per la (2.36) si ha

$$\limsup_{k\to\infty} M_{B_{\mathbb{R}^n}(x,r)}\big(y \mapsto v_k(y)\big) \leqslant M_{B_{\mathbb{R}^n}(x,r)}\big(y \mapsto v(y)\big), \quad x \in \Omega_r, \tag{2.39}$$

mentre per la (2.37)

$$M_{B_{\mathbb{R}^n}(x,r)}\big(y \mapsto v_k(y)\big) \geqslant v_k(\xi)/(1-\epsilon). \tag{2.40}$$

Da (2.39) e (2.40) si ha dunque

$$\limsup_{k\to\infty} v_k(\xi)/(1-\epsilon) \leqslant M_{B_{\mathbb{R}^n}(x,r)}\big(y \mapsto v(y)\big).$$

Di conseguenza, se $a > M_{B_{\mathbb{R}^n}(x,r)}\big(y \mapsto v(y)\big)$, e $0 < \epsilon < 1$, allora

$$\limsup_{k\to\infty} v_k(\xi) < a(1-\epsilon), \quad \text{se } |x-\xi| < \delta,\ x \in \Omega_r,$$

e dunque, essendo ξ in un intorno di x, vale per $\xi = x$, e quindi

$$v(x) = \limsup_{k\to\infty} v_k(x) \leqslant M_{B_{\mathbb{R}^n}(x,r)}\big(y \mapsto v(y)\big)(1-\epsilon) < a(1-\epsilon).$$

Poiché V è il più piccolo maggiorante superiormente semicontinuo di v, risulta

$$V(x) \leqslant a(1-\epsilon).$$

Mandando ora a ad $M_{B_{\mathbb{R}^n}(x,r)}\big(y \mapsto v(y)\big)$, si ha

$$\begin{aligned} V(x) \leqslant M_{B_{\mathbb{R}^n}(x,r)}\big(y \mapsto v(y)\big)(1-\epsilon) &\leqslant M_{B_{\mathbb{R}^n}(x,r)}\big(y \mapsto v(y)\big) \\ &\leqslant M_{B_{\mathbb{R}^n}(x,r)}\big(y \mapsto V(y)\big), \end{aligned} \tag{2.41}$$

cioè V è subarmonica. Dimostriamo ora che $V = v$ quasi ovunque. Innanzitutto se $V = -\infty$ allora $v = -\infty$. D'altra parte V è finita in un insieme denso, quindi per la (2.41) v è localmente integrabile. Ne viene che, in ogni punto di Lebesgue, cioè in ogni punto x tale che

$$\lim_{r\to 0} M_{B_{\mathbb{R}^n}(x,r)}\big(y \mapsto v(y)\big) = v(x),$$

si ha

$$v(x) \leqslant V(x) \leqslant \lim_{r\to 0} M_{B_{\mathbb{R}^n}(x,r)}\big(y \mapsto v(y)\big) = v(x),$$

e quindi $V = v$ quasi ovunque.

Rimane adesso da mostrare la (2.35). Per farlo bisogna dimostrare che

$$\sup_K (v_k - f) \leqslant \sup_K (V - f), \quad \forall k \text{ grande},$$

dove f è continua su K compatto di Ω. Sia $a = \sup_K(V-f)+\epsilon$, e sia b tale che $\sup_K(V-f) < b < a$. Se $x \in K$ allora $V(x) < f(x)+b$, e $v(\xi) < f(x)+b$ se ξ è in un intorno di x. Equivalentemente $M_{B_{\mathbb{R}^n}(x,r)}\big(y \mapsto v(y)\big) < f(x)+b$ se r è abbastanza piccolo (in quanto y starà in un intorno di x). Ancora per (2.36) e (2.37) si possono trovare k_0 e $\delta > 0$ tali che

$$v_k(\xi) \leqslant M_{B_{\mathbb{R}^n}(x,r)}\big(y \mapsto v(y)\big) < f(x)+b, \quad \text{se } |x-\xi| < \delta \text{ e } k > k_0.$$

Poiché f è continua, per un altro $\delta > 0$ si ha

$$|f(x) - f(\xi)| < \epsilon' \quad \text{quando} \quad |x - \xi| < \delta,$$

e quindi

$$v_k(\xi) < f(x) + b \leqslant f(\xi) + \epsilon' + b \leqslant f(\xi) + a, \quad \forall k > k_0.$$

Per il Lemma di Borel Lebesgue si può trovare un ricoprimento finito di K fatto di palle del tipo $B_{\mathbb{R}^n}(x,\delta)$, con $x \in K$, su ognuna delle quali vale l'ultima relazione. Ne segue che

$$v_k(\xi) - f(\xi) < a, \quad \forall \xi \in K \text{ e } k \text{ grande}.$$

Analogamente

$$\lim_{k\to\infty} \sup_K (v_k - f) < a = \sup_K (V - f) + \epsilon,$$

da cui finalmente segue, mandando $\epsilon \to 0$, la (2.35). □

Dimostriamo adesso che la funzione V è anche plurisubarmonica.

Lemma 2.1.5. *Sia v_k una successione di funzioni plurisubarmoniche in Ω uniformemente superiormente limitate su ogni compatto di Ω. Allora il più piccolo maggiorante superiormente semicontinuo V di $v = \limsup_{k\to\infty} v_k$ è plurisubarmonico, e si ha $V = v$ quasi ovunque.*

Dimostrazione. Sia $\zeta \in \mathbb{C}^n$ e $D_\zeta = \{w\zeta; w \in \mathbb{C}, |w| \leqslant 1\}$. Indichiamo con $v(z,\zeta)$ la media di v su $\{z\} + D_\zeta$, cioè

$$v(z,\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 v(z + re^{i\theta}\zeta) r dr d\theta, \quad \text{con } \{z\} + D_\zeta \subset \Omega.$$

Affinché V sia plurisubarmonica devono valere le seguenti condizioni:

- V è superiormente semicontinua
- $V(z) \leqslant V(z,\zeta)$ se $\{z\} + D_\zeta \subset \Omega$.

La prima condizione è soddisfatta per ipotesi. Resta dunque da dimostrare la seconda proprietà.
Per il Lemma di Fatou

$$v(z) = \limsup_{k\to\infty} v_k(z) \leqslant \limsup_{k\to\infty} v_k(z,\zeta) \leqslant v(z,\zeta) \leqslant V(z,\zeta) \quad \text{se } \{z\} + D_\zeta \subset \Omega.$$

Ne segue

$$v(z) \leqslant V(z,\zeta). \tag{2.42}$$

Per provare la seconda proprietà basterà dimostrare che $V(z,\zeta)$ è superiormente semicontinua, in quanto, essendo $V(z)$ il più piccolo maggiorante superiormente semicontinuo, si avrà $V(z) \leqslant V(z,\zeta)$ per la (2.42). La funzione $z \mapsto V(z,\zeta)$, ancora per il Lemma di Fatou, è superiormente semicontinua. Infatti

$$\begin{aligned}\limsup_{z\to z_0} V(z,\zeta) &= \limsup_{z\to z_0} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 V(z + re^{i\theta}\zeta) r dr d\theta \\ &\leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \limsup_{z\to z_0} V(z + re^{i\theta}\zeta) r dr d\theta \leqslant \\ &\text{(per la semicontinuità di } V)\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 V(z_0 + re^{i\theta}\zeta)rdrd\theta = V(z_0,\zeta).$$

Dunque $V(z) \leqslant V(z,\zeta)$ per la (2.42). L'ultima parte del lemma segue dal Lemma 2.1.4 poiché le funzioni plurisubarmoniche sono in particolare subarmoniche. □

Per ottenere la stima di v_2 in termini della funzione di supporto H_2 bisogna disporre di una stima più precisa della funzione V, che seguirà dal seguente lemma.

Lemma 2.1.6. *Se v è funzione subarmonica di una variabile complessa $z \in \mathbb{C}$ e $v(z) \leqslant C|\mathsf{Im}\, z|$ per qualche costante $C > 0$, da*

$$\limsup_{t\to\infty} v(it)/t \leqslant a$$

segue

$$v(z) \leqslant a\mathsf{Im}\, z \quad \textit{quando } \mathsf{Im}\, z \geqslant 0.$$

Dimostrazione. Per definizione si ha

$$\limsup_{t\to\infty} v(it)/t = \inf_{R>0}\left(\sup_{t\geqslant R}\frac{v(it)}{t}\right).$$

Pertanto $\forall\epsilon > 0\ \exists R_\epsilon > 0$ tale che

$$\sup_{t\geqslant R_\epsilon}\frac{v(it)}{t} \leqslant a+\epsilon,$$

e dunque

$$v(it)/t \leqslant a+\epsilon \quad \forall t \geqslant R_\epsilon.$$

In altre parole, se t è fuori da un compatto di $\mathbb{R}_+$, allora $v(it) \leqslant (a+\epsilon)t$. D'altra parte v è superiormente semicontinua e ha massimo nel compatto $[0, R_\epsilon]$. Quindi, per ogni $0 \leqslant t \leqslant R_\epsilon$, $v(it) \leqslant C_{R_\epsilon} =: C_\epsilon > 0$. Di conseguenza

$$v(it) \leqslant (a+\epsilon)t + C_\epsilon \quad \forall t > 0.$$

Dall'applicazione del Teorema di Phragmén-Lindelhöf (si veda [13]) nel primo e secondo quadrante di $\mathbb{C}$ si ottiene

$$v(z) - (a+\epsilon)\mathsf{Im}\, z \leqslant C_\epsilon, \quad \mathsf{Im}\, z > 0.$$

Risulta quindi $v(z) - (a+\epsilon)\mathsf{Im}\, z$ limitata nel semipiano $\mathsf{Im}\, z > 0$, e $\leqslant 0$ sul bordo (cioè quando $\mathsf{Im}\, z = 0$). Infatti, poiché per ipotesi $v(z) \leqslant C|\mathsf{Im}\, z|$, si ha

$$v(z) - (a+\epsilon)\mathsf{Im}\, z \leqslant C|\mathsf{Im}\, z| - (a+\epsilon)\mathsf{Im}\, z = 0 \quad \text{quando } \mathsf{Im}\, z = 0.$$

Applicando nuovamente il teorema di Phragmén-Lindelhöf risulta

$$v(z) - (a+\epsilon)\mathsf{Im}\, z \leqslant 0 \quad \text{quando } \mathsf{Im}\, z \geqslant 0.$$

Infine, passando al limite per $\epsilon \to 0$ nell'ultima disuguaglianza, si ha il lemma.

$\square$

Grazie al Lemma 2.1.6 possiamo ora dimostrare il teorema che fornisce la stima della funzione plurisubarmonica $v_2 = \log|f_2|$ in termini di H_2. Questo risultato verrà utilizzato successivamente per stimare il $|f_2|$.

Teorema 2.1.7. *Siano v_j, $j = 1, 2, 3$ funzioni plurisubarmoniche in $\mathbb{C}^n$ con $v_1 + v_2 = v_3$. Assumiamo che v_1 e v_3 soddisfino la (1.19), e siano H_1 e H_3 le corrispondenti funzioni di supporto. Allora $H_2 = H_3 - H_1$ è una funzione di supporto, e per $\epsilon > 0$ e per qualche costante $C_\epsilon > 0$ si ha*

$$v_2(z) \leqslant H_2(\mathsf{Im}\, z) + \epsilon|z| + C_\epsilon. \tag{2.43}$$

Dimostrazione. Per dimostrare il teorema è sufficiente provare che il più piccolo maggiorante superiormente semicontinuo $V(z)$ di $v(z) = \limsup_{t\to\infty} \frac{v_2(tz)}{t}$ soddisfa la disuguaglianza

$$V(iy) \leqslant H_2(y), \quad y \in \mathbb{R}^n. \tag{2.44}$$

Infatti, se $x, y \in \mathbb{R}^n$, la funzione $w \mapsto V(x + wy)$ è subarmonica, $\leqslant 0$ se $w \in \mathbb{R}$, limitata da $C_3|y||\mathsf{Im}\, w|$, e inoltre, essendo V positivamente omogenea di grado 1 poiché lo è la v,

$$\limsup_{t\to\infty} V(x + ity)/t = \limsup_{t\to\infty} V(x/t + iy) \leqslant$$

$$\text{(per la semicontinuità superiore di } V)$$

$$\leqslant V(iy) \overset{(2.44)}{\leqslant} H_2(y). \tag{2.45}$$

Dalla (2.45), grazie al Lemma 2.1.6, segue $V(x + wy) \leqslant \mathsf{Im}\, w H_2(y) = H_2(\mathsf{Im}\, wy)$ quando $\mathsf{Im}\, w \geqslant 0$. Quindi, se $w = i$ con $\mathsf{Im}\, w = 1 \geqslant 0$, allora $z = x + wy$, e risulta

$$V(z) \leqslant H_2(\mathsf{Im}\, z). \tag{2.46}$$

Se H è la funzione di supporto di V, allora per la (2.46) $H \leqslant H_2$. Infatti

$$H(y) = \lim_{t\to\infty} M(ty)/t = \lim_{t\to\infty} t^{-1} \sup_{\mathsf{Im}\, z = ty} V(x + ity) \leqslant \lim_{t\to\infty} t^{-1} H_2(ty) = H_2(y),$$

con $y = \mathsf{Im}\, z$. Poiché $V(z) \leqslant H(\mathsf{Im}\, z)$, si ha

$$\begin{aligned}
\limsup_{t\to\infty} v_3(tz)/t &= \limsup_{t\to\infty} \big(v_1(tz)/t + v_2(tz)/t\big) \\
&\leqslant \limsup_{t\to\infty} v_1(tz)/t + \limsup_{t\to\infty} v_2(tz)/t \\
&\leqslant H_1(\mathsf{Im}\, z) + V(z) \\
&\leqslant H_1(\mathsf{Im}\, z) + H(\mathsf{Im}\, z).
\end{aligned}$$

Ne segue, per il Lemma 2.1.6 applicato a $v_3(z) - C_0$, che $v_3(z) \leqslant C_0 + H_1(\mathsf{Im}\, z) + H(\mathsf{Im}\, z)$. D'altra parte, essendo H_3 la funzione di supporto di v_3, si ha che $v_3(z) \leqslant C_0 + H_3(\mathsf{Im}\, z)$, dove H_3 misura la crescita ottimale della funzione v_3. In altre parole $H_3 = \inf\{H \text{ funzione di supporto}; v_3(z) \leqslant C_0 + H(\mathsf{Im}\, z)\}$, e quindi $H_3(\mathsf{Im}\, z) \leqslant H_1(\mathsf{Im}\, z) + H(\mathsf{Im}\, z)$. Questo dimostra che H_2 è una funzione di supporto, poiché allora $H \geqslant H_3 - H_1 = H_2 \geqslant H$, e dunque $H_2 = H$.

Da quanto visto si ha

$$\limsup_{t\to\infty} v_2(tz)/t \leqslant H_2(\mathsf{Im}\, z),$$

e poiché $v_2(tz)/t$ è superiormente uniformemente limitata sui compatti, si ottiene $\forall \epsilon > 0$ e per t grande

$$v_2(tz)/t \leqslant H_2(\mathsf{Im}\, z) + \epsilon, \quad \text{quando } |z| = 1.$$

Equivalentemente, se indichiamo nella precedente disuguaglianza $tz = Z$, con $|Z| = t|z|$ e $\mathsf{Im}\, Z = t\mathsf{Im}\, z$, allora possiamo scrivere

$$v_2(Z) \leqslant H_2(\mathsf{Im}\, Z) + \epsilon|Z|, \tag{2.47}$$

con $|Z|$ grande. Chiamiamo ancora z la variabile Z. Se $|z| \leqslant R_\epsilon$ allora $v_2(z) \leqslant C_\epsilon$, mentre se $|z| > R_\epsilon$ vale la (2.47), e quindi

$$v_2(z) \leqslant H_2(\mathsf{Im}\, z) + \epsilon|z| + C_\epsilon,$$

da cui segue il lemma. La conclusione si è ottenuta assumendo $V(iy) \leqslant H_2(y)$, condizione che rende valida la (2.45) e tutto ciò che ne segue. Resta pertanto da dimostrare quest'ultima disuguaglianza.
Sia $0 \neq y \in \mathbb{R}^n$. La funzione di supporto della funzione $w \mapsto v_j(z + wy)$ è uguale a $H_j(\mathsf{Im}\, w\, y)$ per $j = 1, 3$ per quasi ogni z (si veda [5, Teorema 3.3]). Sia z_0 uno di questi punti con $|z_0| < 1$. Allora per quasi ogni w con $\mathsf{Im}\, w > 0$

$$v_j(z_0 + twy)/t \longrightarrow H_j(\mathsf{Im}\, w\, y), \quad t \to \infty, \quad j = 1, 3$$

(si veda [1]). Indichiamo $v_j^t(z) = v_j(tz)/t$. Per $j = 1, 3$ si ha

$$v_j^t(z) \overset{(1.24)}{\leqslant} C_0/t + H_j(\mathsf{Im}\, z),$$

e per quasi ogni w nel semipiano superiore $\mathsf{Im}\, w > 0$

$$v_j^t(z_0/t + wy) \to H_j(\mathsf{Im}\, w\, y), \quad t \to \infty.$$

Se $\delta > 0$ e t è grande si ha dunque

$$|v_j^t(z_0/t + wy) - H_j(\mathsf{Im}\, w\, y)| < \delta, \tag{2.48}$$

cioè

$$H_j(\mathsf{Im}\, w\, y) - \delta < v_j^t(z_0/t + wy) < H_j(\mathsf{Im}\, w\, y) + \delta, \quad j = 1, 3.$$

Ne segue che

$$M_{B_{\mathbb{C}^n}(wy,\delta)}\big(z \mapsto v_j^t(z_0/t + z)\big) - H_j(\mathsf{Im}\, w\, y)$$

$$= \frac{1}{|B_{\mathbb{C}^n}(wy,\delta)|} \int_{|wy-z|<\delta} v_j^t(z_0/t+z)L(dz) - H_j(\mathsf{Im}\, w\, y)$$

$$= \frac{1}{|B_{\mathbb{C}^n}(wy,\delta)|} \int_{|wy-z|<\delta} \big(v_j^t(z_0/t+z) - H_j(\mathsf{Im}\, w\, y)\big)L(dz) \geqslant -\delta,$$

e quindi

$$-H_j(\mathsf{Im}\, w\, y) + \delta \geqslant -M_{B_{\mathbb{C}^n}(wy,\delta)}\big(z \mapsto v_j^t(z_0/t+z)\big), \quad j = 1,3. \tag{2.49}$$

Dunque, per $j = 1,3$,

$$M_{B_{\mathbb{C}^n}(wy,\delta)}\big(z \mapsto H_j(\mathsf{Im}\, z_0/t + \mathsf{Im}\, z) - v_j(z_0/t+z)\big)$$

$$= M_{B_{\mathbb{C}^n}(wy,\delta)}\big(z \mapsto H_j(\mathsf{Im}\, z_0/t + \mathsf{Im}\, z)\big) - M_{B_{\mathbb{C}^n}(wy,\delta)}\big(z \mapsto v_j(z_0/t+z)\big)$$

$$\overset{(2.49)}{\leqslant} M_{B_{\mathbb{C}^n}(wy,\delta)}\big(z \mapsto (H_j(\mathsf{Im}\, z_0/t + \mathsf{Im}\, z)\big) - H_j(\mathsf{Im}\, w\, y) + \delta$$

$$= \delta + M_{B_{\mathbb{C}^n}(wy,\delta)}\big(z \mapsto H_j(\mathsf{Im}\, z_0/t + \mathsf{Im}\, z) - H_j(\mathsf{Im}\, w\, y)\big). \tag{2.50}$$

Poiché H_j è Lipschitz-continua e vale la (1.23), si ha

$$(2.50) \leqslant \delta + M_{B_{\mathbb{C}^n}(wy,\delta)}(z \mapsto C_1|\mathsf{Im}\, z_0/t + \mathsf{Im}\, z - \mathsf{Im}\, w\, y|). \tag{2.51}$$

D'altra parte, osservando che su $B_{\mathbb{C}^n}(wy,\delta)$

$$|\mathsf{Im}\, z_0/t + \mathsf{Im}\, z - \mathsf{Im}\, w\, y| \leqslant |\mathsf{Im}\, z_0/t| + |z - wy| \leqslant |\mathsf{Im}\, z_0/t| + \delta,$$

e $C_1|\mathsf{Im}\, z_0/t| < \delta$ per t grande e $|z_0| < 1$, si ottiene

$$(2.51) \leqslant (2 + C_1)\delta.$$

Riassumendo, abbiamo

$$M_{B_{\mathbb{C}^n}(wy,\delta)}\big(z \mapsto H_j(\mathsf{Im}\, z_0/t + \mathsf{Im}\, z) - v_j(z_0/t+z)\big) \leqslant (2 + C_1)\delta, \quad j = 1,3. \tag{2.52}$$

Assumendo $C_0 = 0$ si ha

$$v_j^t(z) \leqslant C_0/t + H_j(\mathsf{Im}\, z) = H_j(\mathsf{Im}\, z), \quad j = 1,3.$$

Ciò implica che l'integrando al primo membro della (2.52) è $\geqslant 0$. Ora, se $|iy - wy| < \delta/2$ e t è grande, si ottiene

$$
\begin{aligned}
(2 + C_1)\delta &\overset{(2.52)}{\geqslant} M_{B_{\mathbb{C}^n}(wy,\delta)}\big(z \mapsto H_j(\mathsf{Im}\, z) - v_j(z)\big) \\
&= \frac{1}{|B_{\mathbb{C}^n}(wy,\delta)|} \int_{|z-wy|<\delta} \big(H_j(\mathsf{Im}\, z) - v_j(z)\big) L(dz) \\
&= \frac{2^{-2n}}{|B_{\mathbb{C}^n}(wy,\delta/2)|} \int_{|z-wy|<\delta} \big(H_j(\mathsf{Im}\, z) - v_j(z)\big) L(dz), \qquad (2.53)
\end{aligned}
$$

dove $L(dz)$ è la misura di Lebesgue in $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$.
Poiché $|iy - wy| < \delta/2$, si ha $B_{\mathbb{C}^n}(wy, \delta) \supset B_{\mathbb{C}^n}(iy, \delta/2)$. Inoltre $|B_{\mathbb{C}^n}(wy, \delta/2)| = |B_{\mathbb{C}^n}(iy, \delta/2)|$, e dunque

$$
\begin{aligned}
(2.53) &\geqslant \frac{2^{-2n}}{|B_{\mathbb{C}^n}(iy,\delta/2)|} \int_{|z-iy|<\delta/2} \big(H_j(\mathsf{Im}\, z) - v_j(z)\big) L(dz) \\
&= 2^{-2n} M_{B_{\mathbb{C}^n}(iy,\delta/2)}\big(z \mapsto H_j(\mathsf{Im}\, z) - v_j(z)\big).
\end{aligned}
$$

Quindi, per $j = 1, 3$,

$$
M_{B_{\mathbb{C}^n}(iy,\delta/2)}\big(z \mapsto H_j(\mathsf{Im}\, z) - v_j(z)\big) \leqslant 2^{2n}(2 + C_1)\delta, \quad \text{quando } |iy - wy| < \delta/2. \qquad (2.54)
$$

Essendo $H_2 - v_2 = H_3 - v_3 - (H_1 - v_1)$, e poiché per $j = 1, 3$ vale la (2.54), si ricava

$$
\begin{aligned}
& M_{B_{\mathbb{C}^n}(iy,\delta/2)}\big(z \mapsto |v_2^t(z) - H_2(\mathsf{Im}\, z)|\big) \qquad (2.55) \\
&= M_{B_{\mathbb{C}^n}(iy,\delta/2)}\big(z \mapsto |(H_3(\mathsf{Im}\, z) - v_3(z)) - (H_1(\mathsf{Im}\, z) - v_1(z))|\big) \\
&\leqslant M_{B_{\mathbb{C}^n}(iy,\delta/2)}\big(z \mapsto |H_3(\mathsf{Im}\, z) - v_3(z)|\big) + M_{B_{\mathbb{C}^n}(iy,\delta/2)}\big(z \mapsto |H_1(\mathsf{Im}\, z) - v_1(z)|\big) \\
&\overset{(2.54)}{\leqslant} 2^{2n+1}(2 + C_1)\delta.
\end{aligned}
$$

La funzione $v_2^t(z')$ è subarmonica e può essere stimata con la sua media su ogni palla di centro z' e raggio arbitrario, e dunque

$$
\begin{aligned}
v_2^t(z') &\leqslant M_{B_{\mathbb{C}^n}(z',\delta/4)}\big(z \mapsto v_2^t(z)\big) \\
&= M_{B_{\mathbb{C}^n}(z',\delta/4)}\big(z \mapsto v_2^t(z) - H_2(\mathsf{Im}\, z) + H_2(\mathsf{Im}\, z)\big)
\end{aligned}
$$

$$\leqslant M_{B_{\mathbb{C}^n}(z',\delta/4)}\big(z \mapsto |v_2^t(z) - H_2(\mathsf{Im}\, z)|\big) + M_{B_{\mathbb{C}^n}(z',\delta/4)}\big(z \mapsto H_2(\mathsf{Im}\, z)\big). \quad (2.56)$$

D'altra parte

$$M_{B_{\mathbb{C}^n}(z',\delta/4)}\big(z \mapsto |v_2^t(z) - H_2(\mathsf{Im}\, z)|\big)$$

$$= \frac{2^{2n}}{|B_{\mathbb{C}^n}(z', \delta/2)|} \int_{|z-z'|<\delta/4} \big|v_2^t(z) - H_2(\mathsf{Im}\, z)|L(dz). \quad (2.57)$$

Ora, se $|z' - iy| < \delta/4$, si ha $B_{\mathbb{C}^n}(z', \delta/4) \subset B_{\mathbb{C}^n}(iy, \delta/2)$, e quindi

$$(2.57) \leqslant 2^{2n} M_{B_{\mathbb{C}^n}(iy,\delta/2)}\big(z \mapsto |v_2^t(z) - H_2(\mathsf{Im}\, z)|\big)$$

$$\overset{(2.55)}{\leqslant} 2^{4n+1}(2 + C_1)\delta. \quad (2.58)$$

Di conseguenza, unendo (2.56) e (2.58), si ha

$$v_2^t(z') \leqslant M_{B_{\mathbb{C}^n}(z',\delta/4)}\big(z \mapsto H_2(\mathsf{Im}\, z)\big) + 2^{4n+1}(2 + C_1)\delta. \quad (2.59)$$

Adesso, per ogni $\epsilon > 0$ e t grande, grazie alla precedente disuguaglianza, si ha

$$v_2^t(z') - H_2(\mathsf{Im}(iy)) \leqslant$$

$$\overset{(2.59)}{\leqslant} 2^{4n+1}(2 + C_1)\delta + M_{B_{\mathbb{C}^n}(z',\delta/4)}\big(z \mapsto H_2(\mathsf{Im}\, z)\big) - H_2(y)$$

$$= 2^{4n+1}(2 + C_1)\delta + M_{B_{\mathbb{C}^n}(z',\delta/4)}\big(z \mapsto H_2(\mathsf{Im}\, z) - H_2(y)\big) \quad (2.60)$$

$$\leqslant 2^{4n+1}(2 + C_1)\delta + M_{B_{\mathbb{C}^n}(z',\delta/4)}(z \mapsto C_1|\mathsf{Im}\, z - y|) \quad (2.61)$$

$$\leqslant 2^{4n+1}(2 + C_1)\delta + C_1\delta/2 \quad (2.62)$$

$$= \delta\big(2^{4n+1}(2 + C_1) + C_1/2\big) < \epsilon$$

per δ sufficientemente piccolo, dove la (2.61) segue dalla (2.60) per la lipschitzianità della funzione H_2, mentre la (2.62) segue dalla (2.61) in quanto se $|z' - iy| < \delta/4$ e $|z - z'| < \delta/4$ allora

$$|\mathsf{Im}\, z - y| = |\mathsf{Im}\, z - \mathsf{Im}\,(iy)| \leqslant |z - iy| \leqslant |z - z'| + |z' - iy| < \delta/2.$$

Risulta quindi $v_2^t(z') \leqslant H_2(y) + \epsilon$ per ogni $\epsilon > 0$ e $|z' - iy| < \delta/4$, e dunque

$$\limsup_{t\to\infty} v_2^t(z') = H_2(y) \quad \text{se } |z' - iy| < \delta/4.$$

Ricordando che V è il più piccolo maggiorante superiormente semicontinuo di $\limsup_{t\to\infty} v_2^t(z)$, si ricava allora

$$V(z') \leqslant H_2(y) \quad \text{se } |z' - iy| < \delta/4.$$

In definitiva, prendendo $z' = iy$, che è tale da verificare la condizione $|z' - iy| < \delta/4$, finalmente si ottiene la (2.44). □

Finora abbiamo sempre assunto che le funzioni plurisubarmoniche v_1 e v_3 fossero tali da soddisfare la condizione (1.19). Si è anche giustificato il motivo di tale richiesta, legata all'esistenza della funzione di supporto. Abbiamo visto inoltre che le funzioni v_j, $j = 1, 2, 3$, possono essere viste come $v_j = \log |f_j|$, con f_j, $1 \leqslant j \leqslant 3$, intere, ed f_j, $j = 1, 3$, trasformate di Fourier-Laplace di distribuzioni a supporto compatto. In quanto tali, per le funzioni $f_j, j = 1, 3$, si conosce una stima fornita dal teorema di Paley-Wiener-Schwartz, e che coinvolge le funzioni di supporto. Non ci è nota invece una stima simile della funzione f_2. Adesso è possibile ricavarla a partire dalla stima ottenuta per il suo logaritmo, cioè di $v_2 = \log |f_2|$, vista nel Teorema 2.1.7.

Corollario 2.1.8. *Siano $\mu_j \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, 3$, sia*

$$H_j(\eta) = \sup\{\langle x, \eta\rangle; x \in \operatorname{supp} \mu_j\},$$

e sia f_j la trasformata di Fourier-Laplace di μ_j. Assumiamo che $f_2 = f_3/f_1$ sia intera. Allora $H_2 = H_3 - H_1$ è una funzione di supporto, e per ogni $\epsilon > 0$

$$|f_2(\zeta)| \leqslant C_\epsilon \exp\bigl(H_2(\operatorname{Im} \zeta) + \epsilon|\zeta|\bigr), \quad \zeta \in \mathbb{C}^n. \tag{2.63}$$

Dimostrazione. Sia $0 \neq \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e H la funzione di supporto di $\operatorname{supp} \varphi$. Con questa scelta la funzione $v_j = \varphi * \mu_j$, $j = 1, 3$, è una misura avente come funzione di supporto la funzione $H + H_j$ per il Teorema dei supporti (cfr. [8]). Poiché $\hat{v}_j = \hat{\varphi}\hat{\mu}_j$ per $j = 1, 3$, ne segue

$$\hat{v}_3 = \hat{\varphi}\hat{\mu}_3 = \hat{\varphi} f_3 = \hat{\varphi} f_1 f_2 = \hat{\varphi}\hat{\mu}_1 f_2 = \hat{v}_1 f_2,$$

e dunque

$$\log|\hat{v}_3| = \log|\hat{v}_1| + \log|f_2|.$$

Inoltre le funzioni $\log|f_2|$, $\log|\hat{v}_1|$ e $\log|\hat{v}_3|$ soddisfano le ipotesi del Teorema 2.1.7. Infatti esse sono plurisubarmoniche, e $\log|\hat{v}_1|$, $\log|\hat{v}_3|$ soddisfano la (1.19). Allora, per il Teorema 2.1.7, si ha

$$\log|f_2(\zeta)| \leqslant H_2(\mathsf{Im}\,\zeta) + \epsilon|\zeta| + C'_\epsilon,$$

e quindi

$$|f_2| \leqslant C_\epsilon \exp\bigl(H_2(\mathsf{Im}\,\zeta) + \epsilon|\zeta|\bigr), \quad \zeta \in \mathbb{C}^n.$$

Ciò prova l'asserto. □

2.2 Teorema di approssimazione per funzioni intere di tipo esponenziale

Il Teorema di approssimazione mostra che le funzioni intere di tipo esponenziale possono essere approssimate da funzioni intere ottenute come trasformate di Fourier di distribuzioni a supporto compatto. Nella sezione precedente abbiamo ricavato una stima della funzione intera f_2 espressa in termini della funzione di supporto H_2. La stima ottenuta prova che la funzione f_2 non soddisfa le ipotesi del Teorema di Paley-Wiener-Schwartz, e dunque non può essere la trasformata di Fourier di una distribuzione a supporto compatto. Tuttavia la crescita esponenziale esibita da questa funzione, data dal Corollario 2.1.8, fa sì che essa possa essere approssimata mediante una funzione intera $f_2^t = \hat{\nu}$, con $\nu \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$. Questo fatto risulterà essenziale nella dimostrazione del Teorema di approssimazione delle soluzioni dell'equazione di convoluzione omogenea $\mu * u = 0$, che verrà dimostrato nel Capitolo 3.

Enunciamo dunque il Teorema di approssimazione per funzioni intere di tipo esponenziale.

Teorema 2.2.1. *Siano f_1, f_2, f_3 funzioni intere tali che $f_3 = f_1 f_2$. Assumiamo che ci sia una funzione di supporto H tale che*

$$|f_2(z)| \leqslant C \exp H(\mathsf{Im}\, z), \quad 2|\mathsf{Im}\, z| > |\mathsf{Re}\, z|, \tag{2.64}$$

e che f_2 sia di tipo esponenziale su tutto lo spazio, cioè

$$|f_2(z)| \leqslant C \exp(A|z|) \quad A \in \mathbb{R}, \quad \forall z \in \mathbb{C}^n. \tag{2.65}$$

Allora, per $0 < t < 1$, si può trovare una funzione intera f_2^t tale che $\forall z \in \mathbb{C}^n$

$$|f_2^t(z)| \leqslant C(t)(1+|z|)^{n+6} \exp H(\mathsf{Im}\, z) \tag{2.66}$$

e

$$|f_3(z) - f_1(z) f_2^t(z)| \leqslant Ct\big(|f_3(z)||z|^2 + |f_1(z)|(1+|z|)^{n+6} \exp H(\mathsf{Im}\, z)\big). \tag{2.67}$$

Dimostrazione. Sia $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ tale che $\varphi(t) = 0$ quando $t < 0$ e $\varphi(t) = 1$ quando $t > 1$. Definiamo la funzione

$$\phi(z) = \varphi(\mathsf{Re}\, z^2), \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

dove $\mathsf{Re}\, z^2 = |\mathsf{Re}\, z|^2 - |\mathsf{Im}\, z|^2$. Ne segue che $\operatorname{supp} \phi = \{z \in \mathbb{C}^n; |\mathsf{Im}\, z| \leqslant |\mathsf{Re}\, z|\}$. Poiché $\bar{\partial}\phi(z) = \varphi'(\mathsf{Re}\, z^2)\bar{z}$, si ha

$$|\bar{\partial}\phi(z)| \leqslant C|z|, \tag{2.68}$$

e $\operatorname{supp} \bar{\partial}\phi = \{z \in \mathbb{C}^n; 0 \leqslant |\mathsf{Re}\, z|^2 - |\mathsf{Im}\, z|^2 \leqslant 1\}$. Questo implica che la (2.64) è valida nel $\operatorname{supp} \bar{\partial}\phi$ fuori da un compatto.
Consideriamo ora la funzione

$$f_2^t(z) = \big(\phi(z) \exp(-tz^2) + (1 - \phi(z))\big) f_2(z) - v^t(z).$$

La scelta di ϕ garantisce che il valore assoluto dell'esponenziale nella precedente formula sia $\leqslant 1$ nel supporto di ϕ. Infatti

$$|\exp(-tz^2)| = \exp(-t\mathsf{Re}\, z^2) \leqslant 1, \quad t > 0 \quad \text{se} \quad \mathsf{Re}\, z^2 \geqslant 0,$$

dove $\mathsf{Re}\, z^2$ è sempre $\geqslant 0$ se $z \in \operatorname{supp} \phi$. Affinché la funzione f_2^t sia analitica è necessario scegliere v^t tale che

$$\bar{\partial} v^t(z) = \bar{\partial}\big(f_2(z)\big(\exp(-tz^2)-1\big)\phi(z)\big) = f_2(z)\big(\exp(-tz^2)-1\big)\bar{\partial}\phi(z) =: g^t(z).$$

Determiniamo ora una stima della funzione g^t. Osserviamo innanzitutto che, essendo $|e^w - 1| \leqslant C|w|$ quando $\mathsf{Re}\, w \leqslant 0$, per (2.64) e (2.68) si ha per $z \in \operatorname{supp} \bar{\partial}\phi \setminus K$

$$|g^t(z)| = |f_2(z)||\exp(-tz^2) - 1||\bar{\partial}\phi(z)| \leqslant C|-tz^2||z|e^{H(\mathsf{Im}\, z)} = Ct|z|^3 e^{H(\mathsf{Im}\, z)}, \tag{2.69}$$

in quanto la (2.64) è valida nel supporto di $\bar{\partial}\phi$ fuori da un compatto.
Se $z \in K \subset \operatorname{supp} \bar{\partial}\phi$, allora per la (2.65)

$$|g^t(z)| \leqslant Ct|z|^3 \exp(A|z|).$$

Poiché z è in un compatto si ha $|z| \leqslant C$ e $|H(\mathsf{Im}\, z)| \leqslant C_1|\mathsf{Im}\, z| \leqslant C_2$. Ne viene

$$|z| \leqslant C \leqslant C' + \frac{H(\mathsf{Im}\, z)}{A}, \quad C' \geqslant C + C_2/A,$$

e dunque

$$|g^t(z)| \leqslant Ct|z|^3 \exp(A|z|) \leqslant Ct|z|^3 \exp H(\mathsf{Im}\, z), \quad z \in K.$$

In definitiva si ha

$$|g^t(z)| \leqslant Ct|z|^3 \exp H(\mathsf{Im}\, z), \quad \forall z \in \mathbb{C}^n, \tag{2.70}$$

essendo $g^t(z) = 0$ fuori dal supporto di $\bar{\partial}\phi$.
Dalla stima di g^t si ottiene che

$$\int |g^t(z)|^2 \exp(-2H(\mathsf{Im}\, z))(1 + |z|^2)^{-n-4} L(dz)$$

$$\overset{(2.70)}{\leqslant} \int (Ct|z|^3 \exp H(\mathsf{Im}\, z))^2 \exp(-2H(\mathsf{Im}\, z))(1 + |z|^2)^{-n-4} L(dz)$$

$$= \int C^2 t^2 |z|^6 \exp(2H(\mathsf{Im}\, z)) \exp(-2H(\mathsf{Im}\, z))(1 + |z|^2)^{-n-4} L(dz)$$

$$\leqslant C^2 t^2 \int (1+|z|^2)^3 (1+|z|^2)^{-n-4} L(dz)$$
$$= C^2 t^2 \int (1+|z|^2)^{-n-1} L(dz) \leqslant C' t^2,$$

in quanto la funzione $(1+|z|^2)^{-n-1}$ è sommabile in $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$.
Ne segue, per [9, Teorema 4.4.1], che l'equazione $\bar{\partial} v^t = g^t$ ha una soluzione tale che

$$\int |v^t(z)|^2 \exp(-2H(\operatorname{Im} z))(1+|z|^2)^{-n-4}(1+|z|^2)^{-2} L(dz)$$
$$\leqslant \int |g^t(z)|^2 \exp(-2H(\operatorname{Im} z))(1+|z|^2)^{-n-4} L(dz) \leqslant C t^2.$$

Dalla teoria sulla regolarità delle soluzioni delle equazioni differenziali ellittiche si ha che, se v è una funzione in $L^2(B_{\mathbb{C}^n}(0,1))$ tale che $\bar{\partial} v = g$, e le componenti di g sono in $L^\infty(B_{\mathbb{C}^n}(0,1))$, allora v è continua e

$$|v(0)| \leqslant C(\|v\|_{L^2(B_{\mathbb{C}^n}(0,1))} + \|g\|_{L^\infty(B_{\mathbb{C}^n}(0,1))})$$

(per la dimostrazione si veda [8, Lemma 15.1.8]).
Essendo $v^t \in L^2(\mathbb{C}^n)$ e $g^t \in L^\infty(\mathbb{C}^n)$, fissando una qualunque $z \in \mathbb{C}^n$ risulta

$$|v^t(z)| \leqslant C(\|v^t\|_{L^2(B_{\mathbb{C}^n}(z,1))} + \|g^t\|_{L^\infty(B_{\mathbb{C}^n}(z,1))}). \tag{2.71}$$

Stimiamo ora il membro di destra della (2.71) cominciando dalla $\|v^t\|_{L^2(B_{\mathbb{C}^n}(z,1))}$.
Per definizione

$$\|v^t\|^2_{L^2(B_{\mathbb{C}^n}(z,1))} = \int_{B_{\mathbb{C}^n}(z,1)} |v^t(\xi)|^2 L(d\xi)$$

$$= \int_{B_{\mathbb{C}^n}(z,1)} |v^t(\xi)|^2 (1+|\xi|)^{-(n+6)} e^{-2H(\operatorname{Im}\xi)} (1+|\xi|)^{n+6} e^{2H(\operatorname{Im}\xi)} L(d\xi). \tag{2.72}$$

Osserviamo che, se $|\xi - z| \leqslant 1$, si ha $|\xi| \leqslant 1 + |z|$, e dunque $1+|\xi| \leqslant 2+|z| \leqslant 2(1+|z|)$. Questo implica che

$$(1+|\xi|^2) \leqslant (1+|\xi|)^2 \leqslant 4(1+|z|)^2.$$

D'altra parte $H(\operatorname{Im}\xi) = H(\operatorname{Im}\xi - \operatorname{Im} z + \operatorname{Im} z) \leqslant H(\operatorname{Im}\xi - \operatorname{Im} z) + H(\operatorname{Im} z)$, dove

$$H(\operatorname{Im}\xi - \operatorname{Im} z) = |\operatorname{Im}\xi - \operatorname{Im} z| H\left(\frac{\operatorname{Im}\xi - \operatorname{Im} z}{|\operatorname{Im}\xi - \operatorname{Im} z|}\right).$$

Poiché $|\mathsf{Im}\,\xi - \mathsf{Im}\,z| \leqslant |\xi - z| \leqslant 1$, e $\frac{\mathsf{Im}\,\xi - \mathsf{Im}\,z}{|\mathsf{Im}\,\xi - \mathsf{Im}\,z|} = w \in \mathbb{S}^{n-1}(0)$, si ha quindi

$$H(\mathsf{Im}\,\xi) \leqslant \sup_{w\in\mathbb{S}^{n-1}(0)} H(w) + H(\mathsf{Im}\,z) \leqslant C + H(\mathsf{Im}\,z). \tag{2.73}$$

Sostituendo quanto trovato nella (2.72) si ottiene

$$\begin{aligned} &\|v^t\|^2_{L^2(B_{\mathbb{C}^n}(z,1))} \\ &\leqslant 4(1+|z|)^{2(n+6)} e^C e^{2H(\mathsf{Im}\,z)} \int_{B_{\mathbb{C}^n}(z,1)} |v^t(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^{-(n+6)} e^{-2H(\mathsf{Im}\,\xi)} L(d\xi) \\ &\leqslant C'(1+|z|)^{2(n+6)} e^{H(2\mathsf{Im}\,z)} \int_{\mathbb{C}^n} |v^t(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^{-(n+6)} e^{-2H(\mathsf{Im}\,\xi)} L(d\xi) \\ &\leqslant C'' t^2 (1+|z|)^{2(n+6)} e^{H(2\mathsf{Im}\,z)}, \end{aligned}$$

e dunque

$$\|v^t\|_{L^2(B_{\mathbb{C}^n}(z,1))} \leqslant Ct(1+|z|)^{(n+6)} e^{H(\mathsf{Im}\,z)}. \tag{2.74}$$

Per $\|g\|_{L^\infty(B_{\mathbb{C}^n}(z,1))}$ si ha invece la seguente maggiorazione:

$$\begin{aligned} \|g^t\|_{L^\infty(B_{\mathbb{C}^n}(z,1))} &= \sup_{\xi\in B_{\mathbb{C}^n}(z,1)} |g^t(\xi)| \leqslant \sup_{\xi\in B_{\mathbb{C}^n}(z,1)} \big(Ct|\xi|^3 e^{H(\mathsf{Im}\,\xi)}\big) \\ &\leqslant \sup_{\xi\in B_{\mathbb{C}^n}(z,1)} \big(Ct(1+|z|)^3 e^{H(\mathsf{Im}\,z)+C}\big) = Ct(1+|z|)^3 e^{H(\mathsf{Im}\,z)}. \end{aligned}$$

Ne segue

$$\|g^t\|_{L^\infty(B_{\mathbb{C}^n}(z,1))} \leqslant Ct(1+|z|)^3 e^{H(\mathsf{Im}\,z)}. \tag{2.75}$$

Sostituendo ora (2.74) e (2.75) in (2.71) si ha dunque

$$|v^t(z)| \leqslant Ct(1+|z|)^{n+6} \exp H(\mathsf{Im}\,z), \quad \forall z \in \mathbb{C}^n. \tag{2.76}$$

Grazie a questa stima è possibile ora ricavare la (2.67) distinguendo due casi: $2|\mathsf{Im}\,z| > |\mathsf{Re}\,z|$ e $2|\mathsf{Im}\,z| \leqslant |\mathsf{Re}\,z|$.

Se $z \in \{z \in \mathbb{C}^n; 2|\mathsf{Im}\,z| > |\mathsf{Re}\,z|\}$ e in più $z \in \operatorname{supp}\phi$, allora

$$\begin{aligned} |f_2^t(z)| &\leqslant |\big(\phi(z)\exp(-tz^2) + (1-\phi(z))\big)||f_2(z)| + |v^t(z)| \\ &\leqslant \big(|\phi(z)||\exp(-tz^2)| + |1-\phi(z)|\big)|f_2(z)| + |v^t(z)| \\ &\leqslant \big(\phi(z) + 1 - \phi(z)\big)|f_2(z)| + |v^t(z)| \end{aligned}$$

$$= |f_2(z)| + |v^t(z)|.$$

Se $z \in \{z \in \mathbb{C}^n; 2|\mathsf{Im}\, z| > |\mathsf{Re}\, z|\}$ ma $z \notin \operatorname{supp}\phi$, si ha

$$f_2^t(z) = f_2(z) - v^t(z),$$

e quindi

$$|f_2^t(z)| \leqslant |f_2(z)| + |v^t(z)|.$$

Mettendo assieme i risultati si ha dunque

$$|f_2^t(z)| \leqslant |f_2(z)| + |v^t(z)|, \quad 2|\mathsf{Im}\, z| > |\mathsf{Re}\, z|.$$

Sostituendo ora (2.64) e (2.76) nella precedente disuguaglianza si ottiene

$$|f_2^t(z)| \leqslant C(t)(1+|z|)^{n+6} \exp(H(\mathsf{Im}\, z)), \quad 2|\mathsf{Im}\, z| > |\mathsf{Re}\, z|. \tag{2.77}$$

La stessa stima si dimostra per valori di z che soddisfano $|\mathsf{Re}\, z| \geqslant 2|\mathsf{Im}\, z|$. Infatti $\{z \in \mathbb{C}^n; |\mathsf{Re}\, z| \geqslant 2|\mathsf{Im}\, z|\} \subset \{z \in \mathbb{C}^n; |\mathsf{Re}\, z| \geqslant |\mathsf{Im}\, z|\} = \operatorname{supp}\phi$, e quindi come prima

$$|f_2^t(z)| \leqslant |f_2(z)| + |v^t(z)|, \quad |\mathsf{Re}\, z| \geqslant 2|\mathsf{Im}\, z|.$$

In particolare, se $z \in \{z \in \mathbb{C}^n; |\mathsf{Re}\, z| \geqslant 2|\mathsf{Im}\, z|\}$ e $|\mathsf{Re}\, z|^2 - |\mathsf{Im}\, z|^2 > 1$, allora $\phi(z) = 1$, $\exp(-tz^2)$ decresce rapidamente all'infinito e $|z| \approx |\mathsf{Re}\, z|$. Per l'ipotesi di crescita su f_2, e per definizione di f_2^t, questo implica che

$$|f_2^t(z)| \leqslant C_1 + |v^t(z)| \leqslant C(t)(1+|z|)^{n+6} \exp H(\mathsf{Im}\, z).$$

D'altra parte, se $z \in \{z \in \mathbb{C}^n; |\mathsf{Re}\, z| \geqslant 2|\mathsf{Im}\, z|\}$ e $|\mathsf{Re}\, z|^2 - |\mathsf{Im}\, z|^2 \leqslant 1$, allora

$$\begin{cases} |\mathsf{Re}\, z|^2 \leqslant 1 + |\mathsf{Im}\, z|^2 \\ |\mathsf{Re}\, z|^2 \geqslant 4|\mathsf{Im}\, z|^2 \end{cases}$$

da cui segue $4|\mathsf{Im}\, z|^2 \leqslant |\mathsf{Re}\, z|^2 \leqslant 1 + |\mathsf{Im}\, z|^2$, e dunque $|\mathsf{Im}\, z|^2 \leqslant 1/3$ e $|\mathsf{Re}\, z|^2 \leqslant 4/3$. Si ottiene così $|z| \leqslant C$ e $|H(\mathsf{Im}\, z)| \leqslant C_1|\mathsf{Im}\, z| \leqslant C_2$, e quindi

$$|z| \leqslant C \leqslant C' + \frac{H(\mathsf{Im}\, z)}{A}, \quad C' \geqslant C + C_2/A.$$

Ma allora per la (2.65) si ha

$$|f_2^t(z)| \leqslant |f_2(z)| + |v^t(z)| \leqslant \exp\left(A\Big(C' + \frac{H(\mathsf{Im}\, z)}{A}\Big)\right) + Ct(1+|z|)^{n+6} e^{H(\mathsf{Im}\, z)}$$

$$\leqslant C'' \exp H(\mathsf{Im}\, z) + Ct(1+|z|)^{n+6} \exp H(\mathsf{Im}\, z)$$

$$\leqslant C(t)(1+|z|)^{n+6} \exp H(\mathsf{Im}\, z).$$

Di conseguenza

$$|f_2^t(z)| \leqslant |f_2(z)| + |v^t(z)| \leqslant C(t)(1+|z|)^{n+6} \exp H(\mathsf{Im}\, z), \quad \forall z \in \mathbb{C}^n,$$

cioè vale la (2.66).
Per concludere la dimostrazione proviamo adesso la (2.67). Essendo $f_1 f_2 = f_3$ si ha che

$$f_3(z) - f_1(z) f_2^t(z) = f_3(z) - f_1(z)\bigg(\Big(\phi(z)\exp(-tz^2) + \big(1-\phi(z)\big)\Big) f_2(z) - v^t(z)\bigg)$$

$$= f_3(z) - f_1(z)\bigg(\Big(\phi(z)\big(\exp(-tz^2) - 1\big) + 1\Big) f_2(z) - v^t(z)\bigg)$$

$$= f_3(z) - f_1(z) f_2(z)\phi(z)\big(\exp(-tz^2) - 1\big) - f_1(z) f_2(z) + f_1(z) v^t(z)$$

$$= f_3(z)\phi(z)\big(1 - \exp(-tz^2)\big) + f_1(z) v^t(z),$$

e quindi

$$|f_3(z) - f_1(z) f_2^t(z)| \leqslant |f_3(z)||\phi(z)||1 - \exp(-tz^2)| + |f_1(z)||v^t(z)|. \quad (2.78)$$

Inoltre $|1 - \exp(-tz^2)| \leqslant Ct|z|^2$ nel $\operatorname{supp} \phi$ e $|\phi(z)| \leqslant 1$, quindi risulta

$$(2.78) \overset{(2.76)}{\leqslant} |f_3(z)| Ct|z|^2 + |f_1(z)| C't(1+|z|)^{n+6} \exp H(\mathsf{Im}\, z)$$

$$\leqslant C'' t\Big(|f_3(z)||z|^2 + |f_1(z)|(1+|z|)^{n+6} \exp H(\mathsf{Im}\, z)\Big),$$

cioè vale la (2.67) e il teorema è dimostrato. □

Capitolo 3

Teorema di approssimazione e Teorema di esistenza

Questo capitolo è dedicato alla dimostrazione dei Teoremi ottenuti da Hörmander sulle equazioni di convoluzione nei domini convessi. Tutti i risultati ottenuti in precedenza sono necessari alla comprensione e allo svolgimento delle dimostrazioni contenute in questo capitolo.

3.1 Teorema di approssimazione

Descriviamo sinteticamente il problema.
Sia $0 \neq \mu \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ e sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Indichiamo con Ω_μ l'insieme di definizione della convoluzione $\mu * u$, cioè

$$\Omega_\mu = \{x;\, x - y \in \Omega,\, y \in \operatorname{supp} \mu\}. \tag{3.1}$$

Grazie ai risultati dimostrati da Malgrange sappiamo che, se $\Omega = \mathbb{R}^n$, le soluzioni dell'equazione $\mu * u = 0$ sono approssimate da soluzioni di tipo esponenziale. Indichiamo con E_μ l'insieme delle combinazioni lineari delle soluzioni di tipo esponenziale, ovvero

$$E_\mu = \{u(x) = P(x)e^{i\langle x,\zeta\rangle};\, \mu * u = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n\}, \tag{3.2}$$

dove P è un polinomio e $\zeta \in \mathbb{C}^n$.
Vogliamo dimostrare che, se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto convesso, allora le soluzioni dell'equazione $\mu * u = 0$, con $\mu \in \mathscr{E}'(\Omega)$, sono ancora approssimabili mediante soluzioni di tipo esponenziale. Se chiamiamo

$$N_\mu = \{u \in C^\infty(\Omega);\ \mu * u = 0 \quad \text{in} \quad \Omega_\mu\}, \tag{3.3}$$

per provare l'approssimabilità basterà dimostrare che E_μ ristretto ad Ω è denso in N_μ. In questo modo ogni funzione $u \in N_\mu$ può essere approssimata da una funzione $v \in E_\mu\big|_\Omega$ tale che $v * u = 0$ in Ω_μ, con $v(x) = P(x)e^{i\langle x,\zeta\rangle}$.

Il teorema di approssimazione si riduce dunque al seguente teorema.

Teorema 3.1.1. *Se Ω è convesso la restrizione ad Ω degli elementi in E_μ è densa in N_μ.*

Dimostrazione. Per il Corollario 1 del Teorema di Hahn-Banach [15] è sufficiente provare che ogni distribuzione $\nu \in \mathscr{E}'(\Omega)$ ortogonale a E_μ è anche ortogonale a N_μ. In particolare dire che ν è ortogonale a E_μ è equivalente alla seguente scrittura

$$\hat{\nu}(\zeta) = \hat{\mu}(-\zeta)G(\zeta),$$

dove G è una funzione intera (si veda [11]).
Dal Corollario 2.1.8 sappiamo che la funzione G è di tipo esponenziale e che, per ogni $\epsilon > 0$, si ha

$$|G(\zeta)| \leqslant C_\epsilon \exp\bigl(H(\mathsf{Im}\,\zeta) + \epsilon|\zeta|\bigr), \quad \zeta \in \mathbb{C}^n, \tag{3.4}$$

dove H è la funzione di supporto di un insieme compatto convesso $K \subset \mathbb{R}^n$ tale che

$$K + ch\,\mathrm{supp}\,\check{\mu} = \mathrm{ch\,supp}\,\nu \subset \Omega,[1]$$

con $\check{\mu}(\xi) = \mu(-\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Dalla (3.4) si ottiene, cambiando nome ad ϵ ($\sqrt{5}\epsilon =$ nuovo ϵ)

$$|G(\zeta)| \leqslant C'_\epsilon \exp\bigl(H(\mathsf{Im}\,\zeta) + \epsilon|\mathsf{Im}\,\zeta|\bigr), \quad \text{quando} \quad 2|\mathsf{Im}\,\zeta| > |\mathsf{Re}\,\zeta|,$$

[1] Dal Corollario 2.1.8 e dall'Osservazione 1.4.3 risulta $H_K = H_{\mathrm{supp}\,\nu} - H_{\mathrm{supp}\,\check{\mu}} = H_{\mathrm{ch\,supp}\,\nu} - H_{\mathrm{ch\,supp}\,\check{\mu}}$. Ne segue, ancora per l'Osservazione 1.4.3, che $K = \mathrm{ch\,supp}\,\nu - \mathrm{ch\,supp}\,\check{\mu}$.

in quanto $|\zeta| \approx |\mathsf{Im}\,\zeta|$ se $2|\mathsf{Im}\,\zeta| > |\mathsf{Re}\,\zeta|$.
Inoltre la funzione G è di tipo esponenziale su tutto lo spazio, cioè $|G(\zeta)| \leqslant C\exp(A|\zeta|)\ \forall\zeta \in \mathbb{C}^n$, in quanto la funzione di supporto $H(\mathsf{Im}\,\zeta) \leqslant C_1|\mathsf{Im}\,\zeta| \leqslant C_1|\zeta|$. Scegliamo ora ϵ sufficientemente piccolo tale che

$$B_{\mathbb{R}^n}(0,\epsilon) + K + \operatorname{supp}\check{\mu} \subset \Omega, \tag{3.5}$$

e osserviamo che la funzione di supporto di $B_{\mathbb{R}^n}(0,\epsilon)+K$ è $H(\mathsf{Im}\,\zeta)+\epsilon|\mathsf{Im}\,\zeta|$. Allora per il Teorema 2.2.1 esiste una funzione intera G_t, $0 < t < 1$, tale che

$$|G_t(\zeta)| \leqslant C(t)(1+|\zeta|)^{n+6}\exp\bigl(H(\mathsf{Im}\,\zeta)+\epsilon|\zeta|\bigr), \quad \zeta \in \mathbb{C}^n. \tag{3.6}$$

Poiché μ, $\nu \in \mathscr{E}'(\Omega)$ esse possiedono una stima fornita dal Teorema di Paley-Wiener-Schwartz (Appendice A), cioè

$$|\hat{\mu}(\zeta)| \leqslant C(1+|\zeta|)^N e^{H(\mathsf{Im}\,\zeta)}$$

$$|\hat{\nu}(\zeta)| \leqslant C(1+|\zeta|)^{N'} e^{H(\mathsf{Im}\,\zeta)}, \quad \zeta \in \mathbb{C}^n.$$

Prendendo $\mathsf{Re}\,\zeta = \xi \in \mathbb{R}^n$, poiché le funzioni $\hat{\nu}(\xi)$, $\hat{\mu}(-\xi)$ e $G(\xi)$ soddisfano le ipotesi del Teorema 2.2.1, allora per la (2.67) si ha

$$|\hat{\nu}(\xi) - \hat{\mu}(-\xi)G_t(\xi)| \leqslant Ct\bigl(|\hat{\nu}(\xi)||\xi|^2 + |\hat{\mu}(-\xi)|(1+|\xi|)^{n+6}\bigr)$$

(poiché $\mathsf{Im}\,\xi = 0$).
Ricordando le stime di $\hat{\nu}(\xi)$ e $\hat{\mu}(-\xi)$, per C ed N scelte opportunamente si ha quindi

$$|\hat{\nu}(\xi) - \hat{\mu}(-\xi)G_t(\xi)| \leqslant Ct(1+|\xi|)^N, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{3.7}$$

Dalla (3.6) segue, ancora per il Teorema di Paley-Wiener-Schwartz, che esiste una distribuzione σ_t con supporto in $B_{\mathbb{R}^n}(0,\epsilon)+K$ tale che $G_t = \hat{\sigma}_t$. Inoltre la (3.7) mostra che $\nu - \check{\mu} * \sigma_t \to 0$ in $\mathscr{S}'$ per $t \to 0$.
Poiché $\operatorname{supp}\check{\mu}*\sigma_t = B_{\mathbb{R}^n}(0,\epsilon)+K+\operatorname{supp}\check{\mu} \subset \Omega$ (per il Teorema dei supporti [7, Teorema 4.4.3]), esso sarà contenuto in un fissato compatto di Ω indipendente da t, e quindi $\check{\mu}*\sigma_t \in \mathscr{E}'(\Omega)$ e $\nu - \check{\mu}*\sigma_t \to 0$ in $\mathscr{E}'(\Omega)$[2] per $t \to 0$, cioè

[2]Sia $\Omega \supset K' = \operatorname{supp}(\nu - \check{\mu}*\sigma_t)$, $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\psi = 1$ su K' e $0 \leqslant \psi \leqslant 1$. Allora, per ogni $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, si ha che $\langle \nu - \check{\mu}*\sigma_t|\varphi\rangle = \langle(\nu - \check{\mu}*\sigma_t)\psi|\varphi\rangle = \langle \nu - \check{\mu}*\sigma_t|\varphi\psi\rangle \to 0$ per $t \to 0$, essendo $\varphi\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Ne segue che $\langle \nu - \check{\mu}*\sigma_t|\varphi\rangle \to 0$ per $t \to 0$ per ogni $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, cioè che $\nu - \check{\mu}*\sigma_t \to 0$ in $\mathscr{E}'(\Omega)$ per $t \to 0$

$\check{\mu} * \sigma_t \to \nu$ in $\mathscr{E}'(\Omega)$ per $t \to 0$.
Ne viene che, se $u \in N_\mu$, allora

$$\nu(u) = \lim_{t\to 0}(\check{\mu} * \sigma_t)(u) = \lim_{t\to 0} \sigma_t(\mu * u) = 0,$$

e dunque ν è ortogonale a N_μ. Ciò prova l'asserto. □

Il Teorema di approssimazione per funzioni intere di tipo esponenziale si è rivelato fondamentale nella dimostrazione del Teorema 3.1.1. Guardando la funzione G come trasformata di una distribuzione a supporto compatto si è riusciti ad ottenere la tesi utilizzando semplicemente le proprietà della convoluzione.

3.2 Teorema di esistenza

Assumendo le ipotesi precedenti, ovvero $0 \neq \mu \in \mathscr{E}'(\Omega)$, Ω aperto convesso di $\mathbb{R}^n$, e Ω_μ definito dalla (3.1), consideriamo l'equazione di convoluzione non omogenea

$$\mu * u = f, \tag{3.8}$$

con $f \in C^\infty(\Omega_\mu)$ e $u \in C^\infty(\Omega)$. Il Teorema che ora dimostreremo fornisce le condizioni di esistenza della soluzione dell'equazione (3.8) senza imporre restrizioni sulla distribuzione μ, cioè senza richiedere a μ la proprietà di invertibilità (cfr. [8]).
Utilizzando il Teorema 3.1.1 dimostriamo dunque il seguente teorema.

Teorema 3.2.1. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è convesso e $0 \neq \mu \in \mathscr{E}'(\Omega)$, allora l'equazione $\mu * u = f$ ha una soluzione $u \in C^\infty(\Omega)$ per ogni f reale analitica in Ω_μ.*

Dimostrazione. Consideriamo una successione di aperti convessi Ω^j tali che

$$\Omega^1 \Subset \Omega^2 \Subset \cdots \quad \text{e} \quad \bigcup_j \Omega^j = \Omega,$$

dove $\Omega^j \Subset \Omega^{j+1}$ indica che $\Omega^j \subset \bar{\Omega}^j \subset \Omega^{j+1}$ con $\bar{\Omega}^j$ insieme compatto. Se indichiamo con $\Omega^j_\mu = \{x; x - \operatorname{supp}\mu \subset \Omega^j\}$ si ha ancora

$$\Omega^1_\mu \Subset \Omega^2_\mu \Subset \cdots \quad \text{e} \quad \bigcup_j \Omega^j_\mu = \Omega_\mu.$$

Per provare il teorema servirà dimostrare che, per ogni j, si può trovare una funzione $u_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$\mu * u_j = f \quad \text{in} \quad \Omega_\mu^j.$$

Da ciò, poiché i convessi formano un'esaustione, seguirà la risolubilità su tutto Ω_μ.
Infatti, essendo $\mu * (u_j - u_{j-1}) = 0$ in Ω_μ^{j-1}, in quanto $u_j = u_{j-1}$ in Ω_μ^{j-1}, per il Teorema 3.1.1 si può sottrarre alla funzione u_j un elemento di E_μ (la sottrazione $u_j - v$, con $v \in E_\mu$, la chiamo ancora u_j, e $\mu * (u_j - v) = f$ in Ω_μ^j) in modo tale che $u_j - u_{j-1}$ appartenga ad un intorno di 0 in $C^\infty(\Omega^{j-1})$. Questo garantisce l'esistenza di $u = \lim_{j\to\infty} u_j$ in $C^\infty(\Omega)$.
In questo modo ci si riduce alla prova dell'esistenza delle soluzioni locali, da cui segue l'esistenza di $u \in C^\infty(\Omega)$. Chiamiamo per semplicità u la funzione che soddisfa l'equazione

$$\mu * u = f \quad \text{in} \quad \Omega_\mu^j, \tag{3.9}$$

e dimostriamone l'esistenza. Osserviamo innanzitutto che l'equazione (3.9) è equivalente alla seguente scrittura

$$f(\varphi) = (\mu * u)(\varphi) = u(\check{\mu} * \varphi), \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega_\mu^j),$$

e vediamo che è possibile costruire la funzione u (soluzione locale) mediante il Teorema di Hahn-Banach. Questo significa trovare una mappa

$$u : \check{\mu} * \varphi \mapsto f(\varphi),$$

continua nella topologia di $\mathscr{E}'$. Consideriamo $0 \neq \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, e proviamo che

$$|f(\varphi)| \leqslant C\|\check{\mu} * \varphi * \psi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega_\mu^j). \tag{3.10}$$

Infatti, se vale la stima (3.10), allora esiste una funzione $v \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ (essendo il duale di L^1 uguale a L^∞) tale che

$$f(\varphi) = \int v \cdot (\check{\mu} * \varphi * \psi) dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega_\mu^j).$$

Prendendo $u = v * \check{\psi}$, allora $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $f = \mu * u$ in Ω_μ^j, poiché

$$f(\varphi) = (\mu*u)(\varphi) = (\mu*v*\check{\psi})(\varphi) = (v*\mu*\check{\psi})(\varphi) = v\big((\mu*\check{\psi})\check{}*\varphi\big) = v(\check{\mu}*\psi*\varphi).$$

Quindi esiste $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che $f = \mu * u$ in Ω_μ^j. Resta dunque da provare la (3.10). Consideriamo lo spazio delle funzioni intere ϕ tali che, per qualche costante M, vale

$$|\hat{\mu}(-\zeta)\phi(\zeta)\hat{\psi}(\zeta)| \leqslant M \exp\big(H(\mathsf{Im}\,\zeta) + H_j(\mathsf{Im}\,\zeta)\big), \tag{3.11}$$

dove H è la funzione di supporto di supp $(\check{\mu}*\psi)$ e H_j è la funzione di supporto di $\bar{\Omega}_\mu^j$. Queste funzioni formano uno spazio di Banach $\mathscr{B}$ con la norma definita dalla più piccola costante M per la quale vale la (3.11). Per il Teorema 2.1.7 segue che, per ogni $\epsilon > 0$, si ha

$$|\phi(\zeta)| \leqslant C_{\phi,\epsilon} \exp\big(H(\mathsf{Im}\,\zeta) + \epsilon|\zeta|\big). \tag{3.12}$$

Infatti dalla (3.11) risulta, grazie al Teorema di Paley-Wiener-Schwartz, che $\check{\mu}(-\zeta)\phi(\zeta)\hat{\psi}(\zeta)$ è la trasformata di Fourier-Laplace di una misura a supporto compatto λ (cioè di una distribuzione di ordine 0 a supporto compatto). Questo implica che, se chiamiamo $v_1(\zeta) = \log|\hat{\mu}(-\zeta)\hat{\psi}(\zeta)|$, $v_2(\zeta) = \log|\phi(\zeta)|$ e $v_3(\zeta) = \log|\hat{\lambda}|$, si avrà che $H_j = H_{v_3} - H$, e che v_j, $j = 1, 3$, essendo logaritmi di trasformate di Fourier di misure a supporto compatto, soddisfano la (1.19) (si veda Appendice A). Le funzioni v_j, $j = 1, 2, 3$, sono inoltre plurisubarmoniche, e dunque soddisfano tutte le ipotesi del Teorema 2.1.7, da cui segue

$$|\phi(\zeta)| \leqslant C_{\phi,\epsilon} \exp\big(H(\mathsf{Im}\,\zeta) + \epsilon|\zeta|\big).$$

Sia ora K un intorno compatto convesso di $\bar{\Omega}_\mu^j$ in cui f è analitica. Dalla (3.12), per il Teorema di Polya-Ehrenpreis-Martineau [9, Teorema 4.5.3], si ha che esiste una misura $d\nu_\phi$ supportata in K la cui trasformata di Fourier-Laplace coincide la funzione ϕ. Sia $F : \mathscr{B} \ni \phi \mapsto d\nu_\phi \in \mathsf{M}(K)$ ed $\mathsf{M}(K)$ lo spazio di Banach delle misure finite con supporto in K. Si verifica che F è un operatore chiuso, e dunque per il Teorema del grafico chiuso si ha che F è continuo, e quindi

$$\int |d\nu_\phi| = \|d\nu_\phi\| \leqslant C\|\phi\|_{\mathscr{B}} \leqslant CM.$$

Quando $\phi = \hat{\varphi}$, con $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\mu^j)$, vale ancora la (3.11) con $M = \|\check{\mu}*\varphi*\psi\|_{L^1}$. Infatti

$$\begin{aligned}
|\hat{\mu}(-\zeta)\hat{\varphi}(\zeta)\hat{\psi}(\zeta)| &= |(\check{\mu}*\varphi*\psi)\hat{}(\zeta)| \\
&= \left|\int_{\text{supp}\,(\check{\mu}*\varphi*\psi)} e^{-i\langle x,\zeta\rangle}(\check{\mu}*\varphi*\psi)(x)dx\right| \\
&\leqslant e^{\sup_{\text{supp}\,(\check{\mu}*\varphi*\psi)} \mathsf{Re}(-i\langle x,\zeta\rangle)} \int |(\check{\mu}*\varphi*\psi)(x)|dx \\
&\leqslant \exp\big(H_{\text{supp}\,(\check{\mu}*\varphi*\psi)}(\mathsf{Im}\,\zeta)\big)\|\check{\mu}*\varphi*\psi\|_{L^1} \\
&= \exp\big(H_{\text{ch}\,\text{supp}\,(\check{\mu}*\varphi*\psi)}(\mathsf{Im}\,\zeta)\big)\|\check{\mu}*\varphi*\psi\|_{L^1},
\end{aligned} \tag{3.13}$$

e quindi, essendo $(\check{\mu}*\psi)*\varphi$ una convoluzione di distribuzioni distribuzioni a supporto compatto, dal Teorema dei supporti si ha che $\text{ch}\,\text{supp}\big((\check{\mu}*\psi)*\varphi\big) = \text{ch}\,\text{supp}\big(\check{\mu}*\psi\big) + \text{ch}\,\text{supp}(\varphi)$, e dunque $H_{\text{ch}\,\text{supp}\,(\check{\mu}*\varphi*\psi)} = H_{\text{ch}\,\text{supp}\,(\check{\mu}*\psi)} + H_{\bar{\Omega}_\mu^j} = H + H_j$ (si ricordi quanto detto per la (3.11)). Sostituendo quanto trovato nella (3.13) si ottiene

$$|\hat{\mu}(-\zeta)\hat{\varphi}(\zeta)\hat{\psi}(\zeta)| \leqslant M\exp\big(H(\mathsf{Im}\,\zeta) + H_j(\mathsf{Im}\,\zeta)\big), \quad M = \|\check{\mu}*\varphi*\psi\|_{L^1}.$$

Di consegenza, quando $\phi = \hat{\varphi}$, con $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\mu^j)$, risulta

$$\int e^{-i\langle z,\zeta\rangle}d\nu_\phi(z) = \phi(\zeta) = \int e^{-i\langle z,\zeta\rangle}\varphi(x)dx,$$

essendo ϕ la trasformata di Fourier-Laplace di $d\nu_\phi$. Quest'ultima uguaglianza implica dunque l'identità

$$\int G(z)d\nu_\phi(z) = \int G(x)\varphi(x)dx, \tag{3.14}$$

che è valida dapprima quando si prende $G(z) = z^\alpha$, poi prendendo G analitica in un intorno di K, ed infine prendendo G approssimata uniformemente da polinomi su K. Di conseguenza, da (3.14), abbiamo

$$|f(\varphi)| = \Big|\int f(z)d\nu_\phi\Big| \leqslant C'M = C'\|\check{\mu}*\varphi*\psi\|_{L^1},$$

cioè vale la (3.10), e il teorema è provato. □

Appendice A

Teorema di Paley-Wiener-Schwartz

Teorema A.0.2 (Paley-Wiener-Schwartz-Schwartz)**.** *Sia K un sottoinsieme compatto convesso di $\mathbb{R}^n$ con funzione di supporto H. Se u è una distribuzione di ordine N con supporto contenuto in K, allora*

$$|\hat{u}(\zeta)| \leqslant C(1+|\zeta|)^N e^{H(\mathsf{Im}\,\zeta)}, \quad \zeta \in \mathbb{C}^n. \tag{A.1}$$

Viceversa, ogni funzione analitica intera in $\mathbb{C}^n$ che soddisfa una stima del tipo (A.1) *è la trasformata di Fourier-Laplace di una distribuzione con supporto contenuto in K. Se $u \in C_0^\infty(K)$ per ogni N esiste una costante C_N tale che*

$$|\hat{u}(\zeta)| \leqslant C_N(1+|\zeta|)^N e^{H(\mathsf{Im}\,\zeta)}, \quad \zeta \in \mathbb{C}^n. \tag{A.2}$$

Viceversa, ogni funzione analitica intera che verifica la (A.2) *per ogni N è la trasformata di Fourier-Laplace di una funzione in $C_0^\infty(K)$.*

Per la dimostrazione si veda [7, Teorema 7.3.1].

Osservazione A.0.3. *Se μ è una misura a supporto compatto in $\mathbb{R}^n$ allora la funzione subarmonica $f(\zeta) = \log|\hat{\mu}(\zeta)|$ soddisfa la* (1.19).

Dimostrazione. Innanzitutto, se μ è una misura a supporto compatto in $\mathbb{R}^n$, essa è in particolare una distribuzione di ordine 0 a supporto compatto in

$\mathbb{R}^n$. Segue quindi, dal Teorema di Paley-Wiener-Schwartz, che

$$|\hat{\mu}(\zeta)| \leqslant Ce^{H(\mathsf{Im}\,\zeta)}, \quad \zeta \in \mathbb{C}^n,$$

e dunque, essendo $H = H_{\mathrm{supp}\,\mu}$,

$$f(\zeta) = \log|\hat{\mu}(\zeta)| \leqslant C_0 + H(\mathsf{Im}\,\zeta) \leqslant C_0 + C_1|\mathsf{Im}\,\zeta|, \quad \zeta \in \mathbb{C}^n,$$

che è esattamente la (1.19). $\square$

Appendice B

Il laplaciano di h_ψ

Nella dimostrazione della formula di rappresentazione di Riesz si è fatto uso della funzione

$$h_\psi(x) = v_1(x', x_n + \epsilon) - \int P(x, y')\psi(y')v_1(y', \epsilon)dy', \quad x \in \mathbb{R}^n_+,$$

estesa su tutto lo spazio $\mathbb{R}^n$ ponendo $h_\psi(x) = -h_\psi(x', -x_n)$ quando $x_n < 0$. Mostriamo che, con questa assunzione, risulta

$$\triangle h_\psi \overset{\mathscr{D}'}{=} 2v_1(x', \epsilon)\big(1 - \psi(x')\big)\delta'(x_n). \tag{B.1}$$

Dimostrazione. Chiamiamo H_ψ la funzione

$$H_\psi(x) = \begin{cases} h_\psi(x), & x_n \geqslant 0 \\ -h(x', -x_n), & x_n < 0 \end{cases}$$

con $H_\psi(0) = h_\psi(0) = v_1(x', \epsilon)\big(1 - \psi(x')\big)$, e consideriamo

$$\langle \triangle H_\psi | \varphi \rangle = \langle H_\psi | \triangle \varphi \rangle = \langle H_\psi | \sum_{i=1}^n \partial^2_{x_i} \varphi \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^n \langle H_\psi | \partial^2_{x_i} \varphi \rangle = \langle H_\psi | \triangle_{x'} \varphi \rangle + \langle H_\psi | \partial^2_{x_n} \varphi \rangle. \tag{B.2}$$

Dimostriamo la formula (B.1) calcolando separatamente gli ultimi due termini della (B.2). Tenendo presente l'espressione di H_ψ risulta

$$\langle H_\psi | \partial^2_{x_n} \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} H_\psi(x) \partial^2_{x_n} \varphi(x) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{x_n \geqslant 0} H_\psi \partial^2_{x_n} \varphi \, dx_n dx' + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{x_n < 0} H_\psi \partial^2_{x_n} \varphi \, dx_n dx'$$

$$= \iint_{x_n \geqslant 0} h_\psi(x', x_n) \partial^2_{x_n} \varphi(x', x_n) dx_n dx' - \iint_{x_n < 0} h_\psi(x', -x_n) \partial^2_{x_n} \varphi(x', x_n) dx_n dx'$$

$$= \int [h_\psi(x', x_n) \partial_{x_n} \varphi(x', x_n)]_0^{+\infty} dx' - \iint_{x_n \geqslant 0} (\partial_{x_n} h_\psi)(x', x_n) \partial_{x_n} \varphi(x', x_n) dx_n dx' +$$

$$- \int [h_\psi(x', -x_n) \partial_{x_n} \varphi(x', x_n)]_{-\infty}^{0} dx' - \iint_{x_n < 0} (\partial_{x_n} h_\psi)(x', -x_n) \partial_{x_n} \varphi(x', x_n) dx_n dx'$$

$$= -2 \int h(x', 0) \partial_{x_n} \varphi(x', 0) dx' - \int [(\partial_{x_n} h_\psi)(x', x_n) \varphi(x', x_n)]_0^{+\infty} dx' +$$

$$+ \iint_{x_n \geqslant 0} (\partial^2_{x_n} h_\psi)(x', x_n) \varphi(x', x_n) dx_n dx' - \int [(\partial_{x_n} h_\psi)(x', -x_n) \varphi(x', x_n)]_{-\infty}^{0} dx' +$$

$$- \iint_{x_n < 0} (\partial^2_{x_n} h_\psi)(x', -x_n) \varphi(x', x_n) dx_n dx'$$

$$= -2 \int h_\psi(x', 0) \partial_{x_n} \varphi(x', 0) + \iint_{x_n \geqslant 0} (\partial^2_{x_n} h_\psi)(x', x_n) \varphi(x', x_n) dx_n dx' +$$

$$- \iint_{x_n < 0} (\partial^2_{x_n} h_\psi)(x', -x_n) \varphi(x', x_n) dx_n dx'$$

$$= \int 2 h_\psi(x', 0) \langle \delta'(x_n) | \varphi(x', \cdot) \rangle dx' + \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x_n| \geqslant \epsilon} \int \partial^2_{x_n} H_\psi(x', x_n) \varphi(x', x_n) dx' dx_n. \tag{B.3}$$

Analogamente, per $1 \leqslant j \leqslant n-1$, si ha

$$\langle H_\psi | \partial^2_{x_j} \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} H_\psi(x) \partial^2_{x_j} \varphi(x) dx$$

$$= \int\limits_{x_n \geqslant 0} \int h_\psi(x', x_n) \partial^2_{x_j} \varphi(x', x_n) dx' dx_n - \int\limits_{x_n < 0} \int h_\psi(x', -x_n) \partial^2_{x_j} \varphi(x', x_n) dx' dx_n$$

$$= - \int\limits_{x_n \geqslant 0} \int (\partial_{x_j} h_\psi)(x', x_n) \partial_{x_j} \varphi(x', x_n) dx' dx_n +$$

$$+\int\limits_{x_n<0}\int(\partial_{x_j}h_\psi)(x',-x_n)\partial_{x_j}\varphi(x',x_n)dx'dx_n =$$

(integrando ancora per parti)

$$=\int\limits_{x_n\geqslant 0}\int(\partial^2_{x_j}h_\psi)(x',x_n)\varphi(x',x_n)dx'dx_n-\int\limits_{x_n<0}\int(\partial^2_{x_j}h_\psi)(x',-x_n)\varphi(x',x_n)dx'dx_n$$

$$=\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x_n|\geqslant\epsilon}\int\partial^2_{x_j}H_\psi(x',x_n)\varphi(x',x_n)dx'dx_n, \quad 1\leqslant j\leqslant n-1. \tag{B.4}$$

Dalla (B.3) e dalla (B.4) segue

$$\langle\triangle H_\psi|\varphi\rangle=\int 2h_\psi(x',0)\langle\delta'(x_n)|\varphi(x',\cdot)\rangle dx'+\lim_{\epsilon\to 0}\int\limits_{|x_n|\geqslant\epsilon}\int\triangle H_\psi(x)\varphi(x)dx'dx_n,$$

e quindi, essendo $\triangle H_\psi(x',x_n)=0$ per $|x_n|\geqslant\epsilon$ (poiché $h_\psi(x)$ è armonica per $x_n>0$ e di conseguenza lo è anche $-h(x',-x_n)$ per $x_n<0$), ed essendo $h(x',0)=v_1(x',\epsilon)\big(1-\psi(x')\big)$, risulta

$$\langle\triangle H_\psi|\varphi\rangle=\int 2v_1(x',\epsilon)\big(1-\psi(x')\big)\langle\delta'(x_n)|\varphi(x',\cdot)\rangle dx',$$

e dunque vale la (B.1). $\square$

Appendice C

Stime sulle medie

In questa appendice daremo la prova di alcune stime sulle medie assunte nel Lemma 2.1.1 e nel Lemma 2.1.3.

C.1 Prima stima

La prima stima che dimostreremo è la seguente:

$$M_{B_{\mathbb{C}}(0,1)}(z \mapsto |\mathsf{Im}\, z||z-\xi|^{-2}) \geqslant \big(K(1+\xi^2)\big)^{-1}, \tag{C.1}$$

dove K è una costante sufficientemente grande e indipendente dalle costanti C_0 e C_1 del Lemma 2.1.1.

Dimostrazione di (C.1).
Sia $\xi \in \mathbb{R}$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$ e

$$\begin{aligned} M_{B_{\mathbb{C}}(0,1)}(z \mapsto |\mathsf{Im}\, z||z-\xi|^2) &= \frac{1}{|B_{\mathbb{C}}(0,1)|}\int_{|z|<1} \frac{|\mathsf{Im}\, z|}{|\mathsf{Re}\, z-\xi|^2 + |\mathsf{Im}\, z|^2} L(dz) \\ &= \frac{1}{|B_{\mathbb{C}}(0,1)|}\iint\limits_{x^2+y^2<1} \frac{|y|}{|x-\xi|^2+y^2} dxdy =: F(\xi). \end{aligned}$$

Chiamiamo inoltre per semplicità B la costante $|B_{\mathbb{C}}(0,1)|^{-1}$. Osserviamo innanzitutto che, se $r \geqslant 1$ e $|\xi| \leqslant r$, allora

$$\{(x,y); x^2+y^2<1\} \subset \{|x-\xi|^2+|y|^2 \leqslant (r+1)^2\}.$$

Ne segue che, prendendo $r \geqslant 1$, per ogni $|\xi| \leqslant r$ si ha

$$F(\xi) \leqslant M \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant (r+1)^2} \frac{|y|}{|x-\xi|^2+y^2} dxdy$$

$$= M \int_0^{r+1} \int_0^{2\pi} |\sin\theta| d\theta d\rho = 4(r+1)M,$$

e quindi, per ogni fissato $r \geqslant 1$, $F(\xi)$ è una funzione limitata per $|\xi| \leqslant r$. Dunque, per ogni $r \geqslant 1$ fissato, l'integrando di $F(\xi)$ appartiene allo spazio $L^1(\{|z| < 1\})$ per ogni $|\xi| \leqslant r$.
Consideriamo ora $|\xi| \geqslant 1 + \delta$ con $\delta > 0$ arbitrario. Essendo $|x| \leqslant 1$ nel dominio di integrazione, risulta

$$\delta^2 \leqslant |x-\xi|^2 \leqslant 2(|x-1|^2 + |\xi-1|^2),$$

che implica

$$\frac{|y|}{2|x-1|^2+2|\xi-1|^2+y^2} \leqslant \frac{|y|}{|x-\xi|^2+y^2} \overset{(2)}{\leqslant} \frac{|y|}{\delta^2+y^2}.$$

La $\overset{(2)}{\leqslant}$ mostra che, per ogni $\delta > 0$, la funzione

$$\{|\xi| \geqslant 1+\delta\} \ni \xi \mapsto F(\xi) \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

è continua per il Teorema della convergenza dominata di Lebesgue. Inoltre, ancora per il Teorema di Lebesgue, essa tende a 0 per $|\xi| \to \infty$. Di conseguenza $F \in C^0\big(\{|\xi| > 1\}; (0, +\infty)\big)$ e $F = o(1)$ per $|\xi| \to \infty$. D'altra parte, poiché

$$\frac{\xi^2|y|}{|x-\xi|^2+y^2} \underset{|\xi|\to\infty}{\longrightarrow} |y|,$$

esiste $R \geqslant 1$ tale che

$$B_1 \leqslant \xi^2 F(\xi) \leqslant B_2, \quad \forall |\xi| \geqslant R, \tag{C.2}$$

dove B_1 e B_2 sono delle opportune costanti positive (in quanto F è positiva). Osserviamo che, per il Lemma di Fatou, risulta

$$\liminf_{\xi\to\xi_0} F(\xi) \geqslant F(\xi_0), \quad \forall \xi_0 \in \mathbb{R},$$

cioè $F(\xi)$ è inferiormente semicontinua $\forall \xi$, e quindi ha minimo su ogni compatto di $\mathbb{R}$. In definitiva la funzione F risulta inferiormente semicontinua su ogni compatto e continua fuori dai compatti del tipo $[-R, R]$, con $R \geqslant 1$. Dunque, dalle disuguaglianze

$$(1+\xi^2)F(\xi) \overset{(C.2)}{\geqslant} c_0 > 1, \quad \text{quando} \quad |\xi| \geqslant R,$$

$$(1+\xi^2)F(\xi) \geqslant c_2 > 0, \quad \text{quando} \quad |\xi| \leqslant R,$$

si ottiene che

$$(1+\xi^2)F(\xi) \geqslant \min(c_1, c_2) = c_3 > 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Pertanto esisterà una costante K sufficientemente grande tale che

$$(1+\xi^2)F(\xi) \geqslant \frac{1}{K},$$

e quindi

$$F(\xi) = M_{B_{\mathbb{C}}(0,1)}(z \mapsto |\mathsf{Im}\, z||z-\xi|^{-2}) \geqslant \frac{1}{K(1+\xi^2)},$$

e la prova è conclusa. □

C.2 Seconda stima

Mostriamo ora la stima assunta nella dimostrazione del Lemma 2.1.3, cioè

$$M_{B_{\mathbb{R}^n}(x,R/2)}\big(x' \mapsto |v_1(x')|\big) = o(|z|) \quad z \to \infty, \tag{C.3}$$

con $x = \mathsf{Re}\, z$, $R = 4|\mathsf{Im}\, z| + \delta|\mathsf{Re}\, z|$ e $\delta > 0$.

Dimostrazione di (C.3).
La prova segue dall'applicazione del Lemma 2.1.2 con $t = |x| + R \leqslant R\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)$.
Innanzitutto osserviamo che

$$\begin{aligned} M_{B_{\mathbb{R}^n}(x,R/2)}\big(x' \mapsto |v_1(x')|\big) &= \frac{1}{|B_{\mathbb{R}^n}(x,R/2)|}\int_{|x-x'|<R/2} |v_1(x')|dx' \\ &= \frac{R^{-n}}{|B_{\mathbb{R}^n}(x,1/2)|}\int_{|x-x'|<R/2} |v_1(x')|dx', \end{aligned} \tag{C.4}$$

e indichiamo per semplicità B la costante $|B_{\mathbb{R}^n}(x,1/2)|^{-1}$. Di conseguenza, essendo $B_{\mathbb{R}^n}(x,R/2) \subset B_{\mathbb{R}^n}(0,|x|+R) = B_{\mathbb{R}^n}(0,t)$, si ha

$$(C.4) \leqslant B\frac{R}{R^{n+1}}\int_{|x'|<t}|v_1(x')|dx'. \tag{C.5}$$

Poiché $t^{-(n+1)} \geqslant R^{-(n+1)}\left(1+\frac{1}{\delta}\right)^{-(n+1)}$, scegliendo δ sufficientemente piccolo tale che $R \leqslant C_\delta|z|$, risulta

$$(C.5) \leqslant BC_\delta\frac{|z|}{t^{n+1}}\int_{|x'|<t}|v_1(x')|dx',$$

e quindi

$$M_{B_{\mathbb{R}^n}(x,R/2)}\big(x' \mapsto |v_1(x')|\big) \leqslant C'_\delta\frac{|z|}{t^{n+1}}\int_{|x'|<t}|v_1(x')|dx'.$$

Ma allora

$$0 \leqslant \frac{1}{|z|}M_{B_{\mathbb{R}^n}(x,R/2)}\big(x' \mapsto |v_1(x')|\big) \leqslant C'_\delta\frac{1}{t^{n+1}}\int_{|x'|<t}|v_1(x')|dx' \overset{(2.16)}{\longrightarrow} 0,\ \ t \to \infty.$$

Ne segue che, poiché $t \to \infty \iff R \to \infty \iff |z| \to \infty$, risulta

$$\frac{1}{|z|}M_{B_{\mathbb{R}^n}(x,R/2)}\big(x' \mapsto |v_1(x')|\big) \underset{|z|\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

e dunque

$$M_{B_{\mathbb{R}^n}(x,R/2)}\big(x' \mapsto |v_1(x')|\big) = o(|z|), \quad z \to \infty.$$

Ciò prova l'asserto. $\square$

Bibliografia

[1] AHLFORS L., HEINS M., *Questions of regularity connected with the Phragmén-Lindelöf principle*, Ann. of Math **50**, 341-346 (1949).

[2] EHRENPREIS L., *Solutions of some problems of division IV*, Amer J. Math **82**, 522-588 (1960).

[3] LAX P.D., *Functional analysis*, Wiley-Interscience (2002).

[4] HÖRMANDER L., *On the range of convolution operators*, Ann. of Math **76**, 148-170 (1962).

[5] HÖRMANDER L., *Supports and singular supports of convolution*, Acta Math **110**, 279-302 (1963).

[6] HÖRMANDER L., *Convolution Equations in Convex Domains*, Inventiones math. 4 (1968), 306-317.

[7] HÖRMANDER L., *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*, Springer-Verlag (1980).

[8] HÖRMANDER L., *The Analysis of Partial Differential Operators II*, Springer (1983).

[9] HÖRMANDER L., *An introduction to complex analysis in several variables*, North Holland (1990).

[10] HÖRMANDER L., *Notions of convexity*, Birhäuser (1994).

[11] MALGRANGE B., *Existence et approximation des équation aux dérivées partielles et des équations des convolutions*, Ann. Inst. Fourier **6**, 271-355 (1955/1956).

[12] MALGRANGE B., *Sur les équations de convolution*, Univ. e Politec. Torino Rend. Sem. Mat. **19**, 19-27 (1959/60).

[13] RUDIN W., *Real and complex analysis*, McGraw-Hill (1987).

[14] SCHWARTZ L., *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Hermann (1987).

[15] TREVES F., *Topological vector spaces, distributions and kernels*, Academic Press (1967).

Ringraziamenti

La prima persona che voglio ringraziare è il relatore della mia tesi, il prof. Alberto Parmeggiani, per avermi guidato con passione e pazienza nella stesura di questo lavoro. Rivolgo a lui un ulteriore ringraziamento per i consigli e gli stimoli che è riuscito a darmi con le sue indiscusse qualità personali e di matematico.
Ringrazio la collega, ma sopratutto l'amica, Antonia Pietromartire, con la quale ho affrontato, fianco a fianco, l'intero percorso universitario, fatto di sostegno reciproco e discussioni sulla matematica.
Grazie anche al collega Luca Pallucchini, per aver dedicato il suo tempo alla lettura di questa tesi e per avermi pazientemente consigliato.
Ringrazio la mia famiglia, per aver sempre creduto in me, per il supporto che mi ha sempre dato, e per avermi permesso di realizzare i miei sogni condividendo e accettando tutte le mie scelte.
Ringrazio per ultimo, ma non in ordine di importanza, Giuseppe, per aver vissuto insieme a me le difficoltà e le gioie di questi anni.