ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

DIMOSTRAZIONE E APPLICAZIONI DEL TEOREMA DI CAMPBELL, BAKER E HAUSDORFF

Tesi di Laurea in Analisi

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Andrea Bonfiglioli

Presentata da:
Mirko Ruffilli

II Sessione
Anno Accademico 2011-2012

Non ci sono isole in matematica

I. N. Herstein

Introduzione

Già a partire dai corsi di base di Matematica, è ben nota l'importanza della funzione esponenziale reale: una delle sue peculiarità caratterizzanti è la ben nota proprietà di omomorfismo, ossia $e^x e^y = e^{x+y}$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ (dimostreremo a pagina 1 che essa è equivalente al Teorema Binomiale di Newton).

Successivamente (durante gli studi universitari), ad esempio dalla Teoria delle Equazioni Differenziali Ordinarie (in particolare dallo studio dei sistemi lineari a coefficienti costanti), ci si domanda in modo inevitabile se una formula analoga sussista anche per l'esponenziale di matrici quadrate. Osservando immediatamente che $e^0 = I$ e che $(e^A)^{-1} = e^{-A}$, è a questo punto naturale chiedersi (anche a causa dell'esperienza nel caso dell'esponenziale reale) se l'insieme delle matrici $\{e^A : A \in \mathfrak{M}_{n\times n}(\mathbb{R})\}$ sia un gruppo con l'operazione ovvia. La risposta (tranne il caso $n = 1$) è negativa. Vi è tuttavia una risposta parzialmente positiva: se $A, B \in \mathfrak{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ hanno norma (matriciale, e.g.) abbastanza piccola (quanto piccola lo chiariremo nel Capitolo 3), esiste $C \in \mathfrak{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tale che $e^A e^B = e^C$. Dimostreremo questo interessante fatto nel seguito.

Proprio con l'intento di investigare la natura del prodotto di esponenziali di matrici, il matematico inglese Henry Frederick Baker aprì la strada (all'inizio del secolo scorso) verso il teorema di cui vogliamo trattare in questa Tesi (e che porta anche il suo nome): il Teorema di Campbell, Baker e Hausdorff.

Accade inoltre che in ambiti diversi, ad esempio in Geometria Differenziale, vi siano situazioni con evidenti analogie al *problema del prodotto di esponenziali*: osservando che lo sviluppo di Taylor del flusso di un campo vettoriale ha una forma "palesemente esponenziale", si è portati a sperare di riuscire a capire come evolve la composizione di due flussi con tecniche simili a quelle usate nel caso matriciale.

Fortunatamente questo approccio non presenta sostanziali problemi: il Teorema di Campbell, Baker e Hausdorff (che abbrevieremo con CBH) funge infatti da *punto di contatto tra l'Analisi, l'Algebra e la Geometria.*

In questo elaborato affrontiamo la questione da un punto di vista prettamente algebrico per il seguente motivo: nel contesto delle serie formali $\mathfrak{T}[\![x, y]\!]$ in due indeterminate non commutative, si può enunciare (e dimostrare molto facilmente!) il Teorema CBH sul prodotto $e^x e^y$; questo Teorema si riduce a una famiglia numerabile di infinite identità *polinomiali* in x e y; per la proprietà universale dell'algebra dei polinomi $\mathfrak{T}(x, y)$, queste infinite identità si specializzano ad analoghe identità, *mutatis mutandis*, in una qualunque algebra associativa A. Sarà dunque lecito sostituire A, e.g., con: l'algebra delle matrice quadrate $\mathfrak{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$; l'algebra degli operatori differenziali lineari a coefficienti C^∞ (su un aperto di $\mathbb{R}^N$); etc. Con un po' di lavoro aggiuntivo, sarà altresì lecito considerare il problema del prodotto di Esponenziali su un gruppo di Lie.

La struttura della Tesi è la seguente:

1. Nel Capitolo 1 daremo una dimostrazione del Teorema CBH;

2. Nel Capitolo 2 mostreremo che esiste una formula universale per esprimere quanto afferma il Teorema CBH e da ciò ricaveremo una famiglia numerabile di identità;

3. Nel Capitolo 3, mostreremo che esiste $r > 0$ per cui il prodotto di due elementi di $\{e^A : A \in \mathfrak{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \quad \|A\| < r\}$ è del tipo e^C;

4. Nel Capitolo 4 daremo due applicazioni del Teorema CBH, una di Analisi e una di Geometria: dimostreremo una formula di approssimazione per la composizione di curve integrali di campi vettoriali; da questa si ottiene in modo molto semplice l'analogo del Teorema CBH al caso dei *gruppi di Lie* analitici.

Indice

Capitolo 1

Il Teorema di Campbell, Baker, Hausdorff

Dopo una breve introduzione degli oggetti algebrici con cui lavoreremo in tutta la Tesi, passiamo ad enunciare e dimostrare il Teorema di Campbell-Baker-Hausdorff, seguendo l'idea fornita nel lavoro di Djokovic [3] (che abbiamo privilegiato per la naturalezza con cui vengono raggiunti i risultati).

1.1 Premesse algebriche

Iniziamo con una semplice ma interessante osservazione: la proprietà di omomorfismo dell'esponenziale complesso (ossia $e^x e^y = e^{x+y}$ per ogni $x, y \in \mathbb{C}$) è equivalente al Teorema Binomiale di Newton.

Proposizione 1.1. *La Formula Binomiale di Newton*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{C}, \quad \forall\, n \geq 0 \tag{1.1}$$

è equivalente alla proprietà

$$e^x e^y = e^{x+y} \qquad \forall\ x, y \in \mathbb{C}. \tag{1.2}$$

Dimostrazione. $\Downarrow$: Per ogni $x, y \in \mathbb{C}$ si ha

$$\begin{aligned}
e^{x+y} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} \overset{(1.1)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\
&\quad \text{(è lecito scambiare le somme in virtù della convergenza uniforme)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{x^k y^{n-k}}{k!\,(n-k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \\
&\quad \text{(nella serie interna, si pone } n-k=j \text{ e si ottiene il prodotto di due serie)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!} = e^x\, e^y.
\end{aligned}$$

$\Uparrow$: Siano $x, y \in \mathbb{C}$; al variare di $t \in \mathbb{R}$ si ha (da (1.2))

$$e^{tx} e^{ty} = e^{tx+ty}, \qquad \text{cioè} \qquad e^{tx} e^{ty} = e^{t(x+y)}.$$

Derivando rispetto a t si ottiene, considerando il fatto che $\dfrac{d^n}{dt^n} e^{zt} = z^n e^{zt}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&\frac{d^n}{dt^n}(e^{tx} e^{ty}) = \frac{d^n}{dt^n} e^{t(x+y)} \\
&\text{ossia (applicando la regola di Leibnitz generalizzata)} \\
&\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{d^k}{dt^k} e^{tx} \right) \left(\frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}} e^{ty} \right) = (x+y)^n e^{t(x+y)}.
\end{aligned}$$

Ora, il primo membro è uguale a

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x^k e^{tx})(y^{n-k} e^{ty}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} e^{tx} e^{ty} \overset{(1.2)}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} e^{t(x+y)}.$$

Dunque

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} e^{t(x+y)} = (x+y)^n e^{t(x+y)}.$$

Prendendo $t = 0$, (1.1) segue immediatamente. $\square$

In tutto l'elaborato consideriamo un fissato campo $\mathbb{K}$ di caratteristica nulla.

La coppia $(A, *)$ è detta $\mathbb{K}$-**algebra** se A è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e

$$* : A \times A \longrightarrow A, \quad (a, b) \mapsto a * b$$

è una operazione binaria su A ed è $\mathbb{K}$-bilineare. Per brevità sottointenderemo il riferimento al campo $\mathbb{K}$ e parleremo semplicemente di algebra associativa. Data un'algebra, diremo che $B \subseteq A$ è una **sottoalgebra di** A se B è un sottospazio di A chiuso rispetto a $*$. È evidente che l'intersezione di una famiglia di sottoalgebre di A è una sottoalgebra di A. Nel caso in cui, data un'algebra $(A, *)$, $*$ sia anche antisimmetrica e inoltre valga la seguente identità, detta di Jacobi,

$$(a * b) * c + (b * c) * a + (c * a) * b = 0 \qquad \forall\ a, b, c \in A,$$

A viene detta **algebra di Lie** ed è usuale la notazione $[a, b]$ al posto di $a * b$.

Sia $\mathfrak{T}(x, y)$ l'algebra associativa dei polinomi[1] a coefficienti in $\mathbb{K}$ nelle due indeterminate non commutative x, y (l'operazione binaria è l'usuale prodotto di polinomi, associativo ma non commutativo, denotato con $(p, q) \mapsto p \cdot q$ o semplicemente $p\,q$). Come tutte le algebre associative, essa è naturalmente dotata di una struttura di algebra di Lie ponendo

$$[p, q] := p \cdot q - q \cdot p, \qquad p, q \in \mathfrak{T}(x, y).$$

Si definisce

$$\mathfrak{L}(x, y) = \bigcap_{\{x,y\} \subset \mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{T}(x,y)} \mathfrak{g}$$

la più piccola sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{T}(x, y)$ che contiene x e y (l'intersezione si considera fatta su tutte le sottoalgebre di Lie di $\mathfrak{T}(x, y)$ che contengono $\{x, y\}$). I suoi elementi sono detti **polinomi di Lie** in x, y.

Denotiamo con $\mathfrak{T}[\![t]\!]$ l'algebra associativa unitaria delle serie formali di potenze in una indeterminata t a coefficienti nell'algebra $\mathfrak{T}(x, y)$. Gli elementi di $\mathfrak{T}[\![t]\!]$ sono della forma

$$p = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k, \qquad \text{con } a_k \in \mathfrak{T}(x, y), \text{ per ogni } k \geq 0.$$

Il prodotto in $\mathfrak{T}[\![t]\!]$, è il solito prodotto di Cauchy per le serie formali di potenze:

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \Big) \cdot \Big(\sum_{j=0}^{\infty} b_j t^j \Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{i+j=k} a_i b_j \Big) t^k,$$

[1] Per una definizione più precisa di $\mathfrak{T}(x, y)$, si tenga presente che, denotato con V il $\mathbb{K}$-spazio vettoriale libero sull'insieme $\{x, y\}$, segue che $\mathfrak{T}(x, y) := \mathfrak{T}(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathfrak{T}_k(V)$, dove $\mathfrak{T}_0(V) = \mathbb{K}$ e $\mathfrak{T}_k(V)$ è lo spazio vettoriale dei k-tensori in x, y.

dove $a_i, b_i \in \mathfrak{T}(x,y)$ per ogni $i, j \geq 0$.

Definizione 1.2 (Ordine di una serie formali di potenze)**.** *Sia* $p = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \in \mathfrak{T}[\![t]\!]$. *Si definisce* ***ordine*** *di* p *il numero* $\underline{\deg}(p)$ *tale che*

$$\underline{\deg}(p) = \begin{cases} +\infty & \textit{se } p = 0, \\ \min\{k : \, a_k \neq 0\} & \textit{se } p \neq 0. \end{cases}$$

Definizione 1.3 (Struttura metrica su $\mathfrak{T}[\![t]\!]$)**.** $\mathfrak{T}[\![t]\!]$ *può essere dotato di una metrica, ponendo*

$$d(p,q) := \exp(-\underline{\deg}(p-q)), \qquad p, q \in \mathfrak{T}[\![t]\!],$$

con la convenzione $e^{-\infty} = 0$. *Più esplicitamente, si ha*

$$d\left(\sum_{j\geq 0} a_j t^j, \sum_{j \geq 0} b_j t^j\right) = \begin{cases} 0 & \textit{se } a_i = b_i \textit{ per ogni } i \geq 0 \\ e^{-\min\{i : \, a_i \neq b_i\}} & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

Si ha, infatti, per ogni $p, q, r \in \mathfrak{T}[\![t]\!]$,

(i) $d(p,q) \geq 0$, $d(p,q) = 0 \iff p = q$;

(ii) $d(p,q) = d(q,p)$;

(iii) $d(p,q) \leq d(p,r) + d(q,r)$.

Le prime due condizioni sono ovvie, la terza segue dal fatto che

$$d(p,q) \leq \max\{d(p,r), d(r,q)\} \qquad \forall \, p, q, r \in \mathfrak{T}[\![t]\!].$$

Da ciò segue che $\mathfrak{T}[\![t]\!]$ è uno spazio ultrametrico.

Osservazione 1.4. Data una successione $\{p_n\}_n$ in $\mathfrak{T}[\![t]\!]$ si ha

$$p_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Leftrightarrow \underline{\deg}(p_n) \xrightarrow{n\to\infty} +\infty. \tag{1.3}$$

Osservazione 1.5 ($\mathfrak{T}[\![t]\!]$ è un'algebra topologica). Dall'osservazione precedente segue che le operazioni somma e prodotto di serie, rispettivamente

$$\mathfrak{T}[\![t]\!] \times \mathfrak{T}[\![t]\!] \ni (p, q) \mapsto p + q, p \cdot q \in \mathfrak{T}[\![t]\!],$$

sono continue (considerando il dominio munito della topologia prodotto): ciò significa che $\mathfrak{T}[\![t]\!]$ con la topologia indotta dalla struttura metrica è un'algebra topologica.

Osservazione 1.6 ($\mathfrak{T}[\![t]\!]$ è completo). Sia $\{p_n\}_n$ una successione di Cauchy in $\mathfrak{T}[\![t]\!]$, ossia $d(p_n, p_m) \to 0$ se $n, m \to \infty$.

Ciò significa che l'ordine di $p_n - p_m$ tende a $+\infty$ quando $n, m \to \infty$ o, equivalentemente, che, per ogni $k \in \mathbb{N}$, tutti i p_n con n abbastanza grande (dipendente da k) hanno gli stessi coefficienti di grado $\leq k$. Ciò assicura che i coefficienti $a_{n,k} \in \mathfrak{T}(x, y)$ di

$$p_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} t^k$$

diventano definitivamente costanti. Da ciò segue la convergenza della serie.

Definizione 1.7 (∂_t su $\mathfrak{T}[\![t]\!]$)**.** *Definiamo il seguente endomorfismo di* $\mathfrak{T}[\![t]\!]$*:*

$$\partial_t : \mathfrak{T}[\![t]\!] \to \mathfrak{T}[\![t]\!], \qquad \sum_{k \geq 0} a_k t^k \mapsto \sum_{k \geq 0} (k+1) a_{k+1} t^k.$$

Osservazione 1.8. Sotto l'ipotesi di $\mathbb{K}$ a caratteristica 0, si può mostrare che $\partial_t p = \partial_t q$ se e solo se $p - q$ ha grado 0 o $+\infty$.

Introduciamo ora due sottoinsiemi dell'insieme delle serie formali di potenze con termine di grado 0 uguale a 0 e ad 1:

$$\mathfrak{T}[\![t]\!]_+ := \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \in \mathfrak{T}[\![t]\!] : a_0 = 0 \right\}, \tag{1.4}$$

$$1 + \mathfrak{T}[\![t]\!]_+ := \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \in \mathfrak{T}[\![t]\!] : a_0 = 1 \right\}. \tag{1.5}$$

Si vede facilmente che ∂_t è una biezione da $\mathfrak{T}[\![t]\!]_+$ su $\mathfrak{T}[\![t]\!]$ e da $1 + \mathfrak{T}[\![t]\!]_+$ su $\mathfrak{T}[\![t]\!]$.

Definizione 1.9 (Derivazione di un'algebra)**.** *Sia* $(A, *)$ *un'algebra. Un'applicazione* $D : A \longrightarrow A$ *è detta* ***derivazione di*** A *se è lineare e se vale*

$$D(a * b) = (Da) * b + a * (Db), \qquad \text{per ogni } a, b \in A.$$

Nel caso di un'algebra di Lie si avrà

$$D[a,b] = [Da,b] + [a,Db], \qquad \textit{per ogni } a,b \in A.$$

Osservazione 1.10. Non è difficile dimostrare che ∂_t è una derivazione di $\mathfrak{T}[\![t]\!]$, nel senso sopra definito.

Osservazione 1.11 (∂_t è continua sullo spazio metrico $(\mathfrak{T}[\![t]\!], d)$). Poiché ∂_t è lineare, è sufficiente mostrare che è continua in 0. Ora, se $p_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ in $\mathfrak{T}[\![t]\!]$, abbiamo $\underline{\deg}(p_n) \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$. Poiché $\mathbb{K}$ ha caratteristica 0, è vero che

$$\underline{\deg}(\partial_t p_n) \geq \underline{\deg}(p_n) - 1, \quad \forall\, p \in \mathfrak{T}[\![t]\!].$$

Ne segue che $\underline{\deg}(\partial_t p_n) \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$, cioè che $\partial_t p_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ in $\mathfrak{T}[\![t]\!]$.

I prossimi due risultati (rispettivamente un lemma ed un'osservazione) mostreranno che in $(\mathfrak{T}[\![t]\!], d)$ una serie è convergente se e solo se il termine n-esimo tende a 0.

Lemma 1.12. *Sia (X,d) uno spazio ultrametrico. Una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy se e solo se $d(x_n, x_{n+1}) \to 0$ per $n \to \infty$.*

Dimostrazione. La parte "solo se" della prova è ben nota.

Supponiamo ora che $d(x_n, x_{n+1}) \to 0$ per $n \to \infty$. Se $n > m$, si ha

$$d(x_n, x_m) \leq \max\{d(x_n, x_{n-1}),\ d(x_{n-1}, x_{n-2}),\ \ldots,\ d(x_{m+1}, x_m)\}.$$

Il massimo a secondo membro tende a 0, per $m, n \to \infty$, grazie all'ipotesi; ne segue che la successione è di Cauchy. □

Osservazione 1.13. Siano mantenute le ipotesi formulate nel lemma precedente. Supposto inoltre che X sia uno spazio vettoriale e che la funzione distanza soddisfi $d(a,b) = d(a+c, b+c)$ per ogni $a,b,c \in X$, si ha che $\sum_{n\geq 0} x_n$ soddisfa la condizione di Cauchy se e solo se $x_n \to 0$ per $n \to \infty$.

Definizione 1.14 (Exp e Log su $\mathfrak{T}[\![t]\!]$)**.** *Conformemente alle notazioni precedenti in* (1.4) *e* (1.5)*, introduciamo le seguenti funzioni:*

$$\mathrm{Exp} : \mathfrak{T}[\![t]\!]_+ \longrightarrow 1 + \mathfrak{T}[\![t]\!]_+ \qquad \mathrm{Exp}(p) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!}, \tag{1.6a}$$

$$\mathrm{Log} : 1 + \mathfrak{T}[\![t]\!]_+ \longrightarrow \mathfrak{T}[\![t]\!]_+ \qquad \mathrm{Log}(1+q) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} q^k. \tag{1.6b}$$

(Osserviamo che $1/k!$ e $1/k$ hanno senso perché $\mathbb{K}$ ha caratteristica nulla). Occorre dimostrare che la definizione è ben posta, ossia che le serie convergono nello spazio metrico $\mathfrak{T}[\![t]\!]$. Grazie al risultato dell'osservazione precedente, basta mostrare che $p^k \xrightarrow{k\to\infty} 0$ per ogni $p \in \mathfrak{T}[\![t]\!]_+$. Poiché $\underline{\deg}(p) \geq 1$ per p in $\mathfrak{T}[\![t]\!]_+$, si ottiene $\underline{\deg}(p^k) \geq k$, da cui

$$\underline{\deg}(p^k) \xrightarrow{k\to\infty} +\infty.$$

Da (1.3) ciò prova che $p^k \xrightarrow{k\to\infty} 0$ come volevamo.

Proposizione 1.15. *Le mappe* Exp *e* Log *sopra definite, sono l'una l'inversa dell'altra.*

Dimostrazione. Fissiamo $p \in \mathfrak{T}[\![t]\!]_+$. Si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathrm{Log}(\mathrm{Exp}(p)) &= \mathrm{Log}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^k}{k!}\right) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(-1)^{h+1}}{h} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^k}{k!}\right)^h \\
&= \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(-1)^{h+1}}{h} \sum_{k_1=1}^{\infty} \frac{p^{k_1}}{k_1!} \cdots \sum_{k_h=1}^{\infty} \frac{p^{k_h}}{k_h!} \\
&= \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k_1,\cdots,k_h \geq 1} \frac{(-1)^{h+1}}{h} \frac{1}{k_1! \cdots k_h!} p^{k_1+\cdots+k_h} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} p^n \sum_{h=1}^{n} \sum_{k_1+\cdots+k_h=n} \frac{(-1)^{h+1}}{h} \frac{1}{k_1! \cdots k_h!}.
\end{aligned}$$

Ora, lo stesso calcolo vale se $x \in \mathbb{R}$ (anche $\mathbb{R}$ è un'algebra topologica!)

$$\log(\exp(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{h=1}^{n} \sum_{k_1+\cdots+k_h=n} \frac{(-1)^{h+1}}{h} \frac{1}{k_1! \cdots k_h!}.$$

Poiché sappiamo che $\log(\exp(x)) = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, ne viene che

$$\sum_{h=1}^{n} \sum_{k_1+\cdots+k_h=n} \frac{(-1)^{h+1}}{h} \frac{1}{k_1! \cdots k_h!} = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1, \\ 0 & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Sostituendo questa notevole identità nel calcolo precedente, si ha $\mathrm{Log}(\mathrm{Exp}(p)) = p$ per ogni $p \in \mathfrak{T}[\![t]\!]_+$. In modo analogo si dimostra $\mathrm{Exp}(\mathrm{Log}(q)) = q$ per ogni $q \in 1+\mathfrak{T}[\![t]\!]_+$. $\square$

Proposizione 1.16. *Per ogni $a \in \mathfrak{T}(x, y)$ vale*

$$\partial_t(\mathrm{Exp}(at)) = a \cdot \mathrm{Exp}(at) = \mathrm{Exp}(at) \cdot a. \tag{1.7}$$

Dimostrazione. Se $a \in \mathfrak{T}(x,y)$ allora $at \in \mathfrak{T}[\![t]\!]_+$, dunque $\mathrm{Exp}(at)$ è definito. Dalla definizione di Exp e di ∂_t e dalla commutatività di t con ogni elemento di $\mathfrak{T}[\![t]\!]$ si ha:

$$\partial_t(\mathrm{Exp}(at)) = \partial_t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{k!} = \partial_t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t^k}{k!} = \partial_t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k t^{k-1}}{(k-1)!}$$
$$= \begin{cases} a \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} = a \cdot \mathrm{Exp}(at) \\ \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} \right) a = \mathrm{Exp}(at) \cdot a. \end{cases}$$

Questo conclude la prova. □

1.2 Dimostrazione del Teorema CBH

Siamo ora in grado di formulare il teorema oggetto di questo elaborato.

Teorema 1.17 (Campbell-Baker-Hausdorff)**.** *Sia $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}(x,y)$ la $\mathbb{Q}$-algebra dei polinomi in due variabili non commutative. Consideriamo la serie di potenze in $\mathfrak{T}[\![t]\!]$ così definita*

$$Z = \mathrm{Log}(\mathrm{Exp}(xt) \cdot \mathrm{Exp}(yt)),$$

e denotiamo con $Z_n(x,y) \in \mathfrak{T}(x,y)$ i suoi coefficienti (univocamente determinati):

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(x,y) t^n.$$

Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}, Z_n(x,y)$ è un polinomio di Lie in x, y:

$$Z_n(x,y) \in \mathfrak{L}(x,y) \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Il teorema è altamente non banale; infatti, dalle definizioni di $\mathrm{Exp}, \mathrm{Log}$ si ha

$$Z = \mathrm{Log}(\mathrm{Exp}(xt) \cdot \mathrm{Exp}(yt)) = \mathrm{Log}\left(\sum_{i+j \geq 1} \frac{x^i y^i}{i!j!} t^{i+j} \right)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{i_1+j_1,\dots,i_k+j_k \geq 1} \frac{x^{i_1} y^{j_1} \cdots x^{i_k} y^{j_k}}{i_1! j_1! \cdots i_k! j_k!} t^{i_1+j_1+\cdots+i_k+j_k}.$$

Dunque il Teorema di Campbell-Baker-Hausdorff assicura che, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$Z_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{\substack{(i_1,j_1),\dots,(i_k,j_k)\neq(0,0)\\ i_1+j_1+\cdots+i_k+j_k=n}} \frac{x^{i_1}y^{j_1}\cdots x^{i_k}y^{j_k}}{i_1!j_1!\cdots i_k!j_k!} \in \mathfrak{L}(x,y). \tag{1.8}$$

Per dimostrare l'asserto abbiamo bisogno di ulteriori prerequisiti.

Definizione 1.18 (Aggiunto di $x \in \mathfrak{g}$)**.** *Sia $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$ un'algebra di Lie. Fissato $x \in \mathfrak{g}$, si considera il seguente endomorfismo:*

$$\mathrm{ad}\, x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \qquad \mathrm{ad}\, x(y) := [x,y].$$

Osserviamo che, dall'identità di Jacobi, segue che $\mathrm{ad}\, x$ è una derivazione dell'algebra $\mathfrak{g}$. Ci serviranno inoltre due lemmi di algebra non commutativa. Il primo ci darà l'espressione, in termini del prodotto $*$, dell'endomorfismo che si ottiene iterando l'aggiunto di un elemento dell'algebra.

Lemma 1.19. *Sia $(A,*)$ un'algebra associativa unitaria. Allora si ha*

$$(\mathrm{ad}\, b)^n(a) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{k} b^{n-i} * a * b^i, \tag{1.9}$$

per ogni $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e per ogni $a, b \in A$.

Dimostrazione. Dato $c \in A$, denotiamo con L_c, R_c gli endomorfismi che moltiplicano rispettivamente a sinistra e a destra per c gli elementi di A:

$$L_c(a) := c * a, \qquad R_c(a) := a * c, \qquad \forall a \in A.$$

Con questa notazione possiamo esprimere $\mathrm{ad}(b)$ in termini di L_b e R_{-b}; inoltre, poiché L_b e R_{-b} commutano tra loro, dalla Formula del Binomio di Newton si ha

$$(\mathrm{ad}\, b)^n(a) = (L_b + R_{-b})^n(a) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k} L_b^{n-i} \circ R_{-b}^{i}(a),$$

che è equivalente a quanto si asserisce nell'enunciato. $\square$

Lemma 1.20. *Sia $(A, *)$ un'algebra associativa unitaria e sia D una derivazione di A. Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed ogni $u \in A$, si ha*

$$D(u^n) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} u^{n-1-k} * (-\operatorname{ad} u)^k (Du) \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} (-\operatorname{ad} u)^k (Du) * u^{n-1-k}. \end{cases} \tag{1.10}$$

Poiché D è una derivazione si ha, ovviamente,

$$D(u^n) = D(u * u * \cdots * u) = D(u) * u * \cdots * u + u * D(u) * \cdots * u + \cdots + u * u * \cdots * D(u).$$

Dunque il significato della formula è quello di avere una riscrittura che permetta di avere tutte le "u" spostate a sinistra o tutte a destra.

Dimostrazione. Fissiamo $u \in A$. Si ha il seguente calcolo:

$$\begin{aligned}
&D(u^{n+1}) = D(u^n) * u + u^n * D(u) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} u^{n-1-k} * (-\operatorname{ad} u)^k (Du) * u + u^n * (Du) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} u^{n-1-k} * u * (-\operatorname{ad} u)^k (Du) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} u^{n-1-k} * [(-\operatorname{ad} u)^k (Du), u] + u^n * (Du) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} u^{n-k} * (-\operatorname{ad} u)^k (Du) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} u^{n-1-k} * [-u, (-\operatorname{ad} u)^k (Du)] + u^n * (Du) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} u^{n-k} * (-\operatorname{ad} u)^k (Du) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} u^{n-1-k} * (-\operatorname{ad} u)^{k+1} (Du) + u^n * (Du) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} u^{n-k} * (-\operatorname{ad} u)^k (Du)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \sum_{k'=1}^{n} \binom{n}{k'} u^{n-k'} * (-\mathrm{ad}\, u)^{k'}(Du) + u^n * (Du) \\
&= nu^n * (Du) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} \right) u^{n-k} * (-\mathrm{ad}\, u)^k (Du) \\
&\quad + (-\mathrm{ad}\, u)^n (Du) + u^n * (Du) \\
&= (n+1) u^n * (Du) + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n+1}{k+1} u^{n-k} * (-\mathrm{ad}\, u)^k (Du) + (-\mathrm{ad}\, u)^n (Du) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} u^{n-k} * (-\mathrm{ad}\, u)^k (Du).
\end{aligned}
$$

Questo conclude la prova. □

Teorema 1.21 (Coniugio per un esponenziale)**.** *Per ogni* $u \in \mathfrak{T}[\![t]\!]_+$ *si ha*

$$
\mathrm{Exp}(u) \cdot z \cdot \mathrm{Exp}(-u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\mathrm{ad}\, u)^n (z). \tag{1.11}
$$

In modo equivalente, con notazione compatta, $e^u \cdot z \cdot e^{-u} = e^{\mathrm{ad}\, u}(z)$.

Dimostrazione. Poiché $\mathfrak{T}[\![t]\!]$ è un'algebra topologica, si ha

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Exp}(u) \cdot z \cdot \mathrm{Exp}(-u) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{u^m \cdot z \cdot (-u)^i}{m!\, i!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} u^{n-i} \cdot z \cdot u^i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\mathrm{ad}\, u)^n (z).
\end{aligned}
$$

Nell'ultima uguaglianza abbiamo usato il Lemma 1.19. □

Teorema 1.22. *Sia* D *una derivazione continua su* $\mathfrak{T}[\![t]\!]$. *Per ogni* $u \in \mathfrak{T}[\![t]\!]_+$ *si ha*

$$
D(\mathrm{Exp}(u)) = \begin{cases} \mathrm{Exp}(u) \cdot \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (-\mathrm{ad}\, u)^{k-1} \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (\mathrm{ad}\, u)^{k-1} \cdot \mathrm{Exp}(u). \end{cases} \tag{1.12}
$$

Con una notazione compatta le formule possono essere riscritte così:

$$
D(e^u) = e^u \cdot \frac{1 - e^{-\mathrm{ad}\ u}}{\mathrm{ad}\, u} (D\, u), \qquad D(e^u) = \frac{e^{\mathrm{ad}\ u - 1} - 1}{\mathrm{ad}\, u} (D\, u) \cdot e^u.
$$

Dimostrazione. Poiché D è continuo e lineare, possiamo far passare D sotto il simbolo di serie:

$$D(\mathrm{Exp}(u)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} D(u^n) \overset{(1.10)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} u^{n-1-k} \cdot (-\mathrm{ad}\, u)^k (D\, u).$$

Ora usiamo l'identità $\frac{1}{n!}\binom{n}{k+1} = \frac{1}{(k+1)!(n-1-k)!}$ e scriviamo le serie nel seguente modo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k+1}^{\infty}.$$

Rinominando poi l'indice interno con $m = n - k - 1$, otteniamo

$$\begin{aligned} D(\mathrm{Exp}(u)) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{u^m \cdot (-\mathrm{ad}\, u)^k (Du)}{(k+1)!m!} \\ &= \mathrm{Exp}(u) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{ad}\, u)^k (Du)}{(k+1)!} \right) \\ &= \mathrm{Exp}(u) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-\mathrm{ad}\, u)^{k-1} (Du). \end{aligned}$$

La seconda identità del teorema può essere provata attraverso la seconda identità in (1.10). Con ciò la dimostrazione è completa. □

In seguito ci serviremo della seguente notazione:[2]

$$Z(t) := \mathrm{Log}(\mathrm{Exp}(xt) \cdot \mathrm{Exp}(yt)).$$

Dalla definizione di $Z(t)$ abbiamo

$$\mathrm{Exp}(Z(t)) = \mathrm{Exp}(xt) \cdot \mathrm{Exp}(yt), \tag{1.13}$$

e dalla Proposizione 1.16

$$\partial_t(\mathrm{Exp}(xt)) = x \cdot \mathrm{Exp}(xt), \qquad \partial_t(\mathrm{Exp}(yt)) = \mathrm{Exp}(yt) \cdot y. \tag{1.14}$$

[2]Benché non intervenga alcuna funzione di t, abbiamo scritto Z come $Z(t)$, in quanto l'argomento si adatta bene a casi in cui effettivamente $Z(t)$ è una curva in qualche spazio normato...

Grazie a ciò che si è mostrato sinora, possiamo effettuare il seguente calcolo fondamentale:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1-e^{-\mathrm{ad}\ Z(t)}}{\mathrm{ad}\, Z(t)}(\partial_t Z(t)) \overset{(1.12)}{=} \mathrm{Exp}(-Z(t))\cdot \partial_t(\mathrm{Exp}(Z(t)))\\
&\overset{(1.13)}{=} \mathrm{Exp}(-Z(t))\cdot \partial_t(\mathrm{Exp}(xt)\cdot \mathrm{Exp}(yt))\\
&= \mathrm{Exp}(-Z(t))\cdot \partial_t(\mathrm{Exp}(xt))\cdot \mathrm{Exp}(yt)+\\
&\qquad + \mathrm{Exp}(-Z(t))\cdot \mathrm{Exp}(xt)\cdot \partial_t(\mathrm{Exp}(yt))\\
&\overset{(1.14)}{=} \mathrm{Exp}(-Z(t))\cdot x\cdot \mathrm{Exp}(xt)\cdot \mathrm{Exp}(yt)+\\
&\qquad + \mathrm{Exp}(-Z(t))\cdot \mathrm{Exp}(xt)\cdot \mathrm{Exp}(yt)\cdot y\\
&\overset{(1.13)}{=} \mathrm{Exp}(-Z(t))\cdot x\cdot \mathrm{Exp}(Z(t)) + y \overset{(1.11)}{=} e^{-\mathrm{ad}\, Z(t)}(x)+y.
\end{aligned}
$$

Prendendo il primo e l'ultimo termine,

$$\frac{1-e^{-\mathrm{ad}\, Z(t)}}{\mathrm{ad}\, Z(t)}(\partial_t Z(t)) = e^{-\mathrm{ad}\ Z(t)}(x)+y, \tag{1.15a}$$

che può essere riscritto, formalmente, come una "E.D.O. non lineare" in $Z(t)$:

$$\partial_t Z(t) = \frac{\mathrm{ad}\, Z(t)}{e^{\mathrm{ad}\, Z(t)}-1}(x+e^{\mathrm{ad}\, Z(t)}(y)), \tag{1.15b}$$

o, in una forma più simmetrica,

$$\partial_t Z(t) = \frac{\mathrm{ad}\, Z(t)}{e^{\mathrm{ad}\, Z(t)}-1}(x) + \frac{-\mathrm{ad}\, Z(t)}{e^{-\mathrm{ad}\, Z(t)}-1}(y). \tag{1.15c}$$

Siamo pronti per fornire l'attesa **dimostrazione del Teorema di Campbell-Baker-Hausdorff**:

Dimostrazione. Sia $Z(t) \in \mathfrak{T}[\![t]\!]$ la serie formale in t definita da

$$Z(t) = \mathrm{Log}(\mathrm{Exp}(xt)\cdot \mathrm{Exp}(yt)).$$

Si ha $Z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n t^n$, per dei polinomi univocamente determinati $Z_n \in \mathfrak{T}(x,y)$ (per ogni $n \in \mathbb{N}$). Inseriamo questa serie in ambo i lati di (1.15a) e mettiamo in evidenza le potenze di t. Il membro sinistro di ciò che si ottiene come appena descritto è

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1-e^{-\operatorname{ad} Z(t)}}{\operatorname{ad} Z(t)}\right)(\partial_t Z(t)) = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}(-\operatorname{ad} Z(t))^{k-1}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} n Z_n\, t^{n-1}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n Z_n\, t^{n-1} + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\Big[\underbrace{Z(t), \cdots \Big[Z(t),}_{k-1} \sum_{n=1}^{\infty} n Z_n\, t^{n-1}\Big]\cdots\Big] \\
&= \sum_{h=0}^{\infty}(h+1) Z_{h+1} t^h + \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n_1,\dots,n_j\geq 1} t^{n_1+\cdots+n_j+n-1}\cdot\frac{(-1)^j n}{(j+1)!}[Z_{n_1},\cdots[Z_{n_j}, Z_n]\cdots];
\end{aligned}
$$

il membro destro è invece

$$
\begin{aligned}
&e^{-\operatorname{ad} Z(t)}(x) + y = y + x + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}(-\operatorname{ad} Z(t))^k(x) \\
&\quad = y + x + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n_1,\dots,n_k\geq 1}\frac{(-1)^k}{k!}[Z_{n_1},\cdots[Z_{n_k}, Z_n]\cdots]t^{n_1+\cdots+n_k}.
\end{aligned}
$$

Ora, uguagliando i coefficienti di $t^0, t^1, \dots, t^h$ di entrambi i membri dell'equazione, otteniamo la seguente famiglia di identità:

$$
\begin{aligned}
&Z_1 = y + x \\
&2Z_2 - \frac{1}{2}[Z_1, Z_1] = -[Z_1, x] \qquad \left(\text{dunque } Z_2 = \frac{1}{2}[x,y]\right) \\
&\vdots \\
&(h+1)Z_{h+1} + \sum_{j=1}^{h}\sum_{\substack{n_1,\dots,n_j\geq 1\\ n_1+\cdots+n_j+n-1=h}}\frac{(-1)^j n}{(j+1)!}[Z_{n_1},\cdots[Z_{n_j}, Z_n]\cdots] \\
&\qquad = \sum_{k=1}^{h}\sum_{\substack{n_1,\dots,n_k\geq 1\\ n_1+\cdots+n_k=h}}\frac{(-1)^k}{k!}[Z_{n_1},\cdots[Z_{n_k}, x]\cdots].
\end{aligned}
$$

L'osservazione cruciale è che gli $Z_n, Z_{n_1}, \dots, Z_{n_k}$ nelle due somme precedenti *hanno pedici non superiori ad h*. Di conseguenza, le identità precedenti danno una formula ricorsiva per trovare Z_{h+1} *in funzione dei bracket iterati di* $Z_1, \dots, Z_h$. Poiché $Z_1 = x + y, Z_2 =$

$\frac{1}{2}[x, y]$ sono polinomi di Lie in x, y, possiamo inferire che tutti gli Z_h sono polinomi di Lie in x, y e il teorema è quindi dimostrato. $\square$

Capitolo 2

Formula di Dynkin

In questo capitolo troveremo una formula chiusa e non ricorsiva (utile anche dal punto di vista computazionale) per determinare i coefficienti Z_n che compaiono nel Teorema CBH: osserveremo che questa formula è, in un qualche senso, "universale", e infine ne daremo un'applicazione.

2.1 Esistenza di una formula universale per il prodotto di esponenziali

In questa sezione presentiamo la forma originale della formula di Dynkin, che esprime i coefficienti della serie di Lie $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n(x,y)t^n$. Per fare ciò ci serviremo (senza provarlo) del seguente risultato, caso particolare del cosiddetto Lemma di Dynkin, Specht e Wever.

Lemma 2.1. *Si consideri la mappa lineare $\phi : \mathfrak{I}(x,y) \longrightarrow \mathfrak{L}(x,y)$ tale che $\phi(1) = 0$, $\phi(x) = x$, $\phi(y) = y$ e*

$$\phi(x^{i_1} y^{j_1} \cdots x^{i_k} y^{j_k}) := \frac{(\operatorname{ad} x)^{i_1} (\operatorname{ad} y)^{j_1} \cdots (\operatorname{ad} x)^{i_k} (\operatorname{ad} y)^{j_k - 1}(y)}{i_1 + j_1 + \cdots + i_k + j_k},$$

per ogni scelta di indici non negativi $i_1, j_1, \dots, i_k, j_k$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Allora ϕ è una proiezione, ϕ è suriettiva e $\phi(t) = t$ per ogni $t \in \mathfrak{L}(x,y)$.

Grazie al Teorema 1.17 e alla mappa ϕ di cui sopra si ha

$$
\begin{aligned}
Z_n(x,y) = \phi(Z_n(x,y)) &= \phi \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{\substack{(i_1,j_1),\dots,(i_k,j_k)\neq(0,0) \\ i_1+j_1+\cdots+i_k+j_k=n}} \frac{x^{i_1}y^{j_1}\cdots x^{i_k}y^{j_k}}{i_1!j_1!\cdots i_k!j_k!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{\substack{(i_1,j_1),\dots,(i_k,j_k)\neq(0,0) \\ i_1+j_1+\cdots+i_k+j_k=n}} \frac{(\mathrm{ad}\ x)^{i_1}(\mathrm{ad}\ y)^{j_1}\cdots(\mathrm{ad}\ x)^{i_k}(\mathrm{ad}\ y)^{j_k-1}(y)}{n\cdot i_1!j_1!\cdots i_k!j_k!}.
\end{aligned}
$$

Che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ ci dà l'espressione di $Z_n(x,y)$ *come polinomio di Lie*:

$$
Z_n(x,y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{\substack{(i_1,j_1),\dots,(i_k,j_k)\neq(0,0) \\ i_1+j_1+\cdots+i_k+j_k=n}} \frac{(\mathrm{ad}\ x)^{i_1}(\mathrm{ad}\ y)^{j_1}\cdots(\mathrm{ad}\ x)^{i_k}(\mathrm{ad}\ y)^{j_k-1}(y)}{i_1!j_1!\cdots i_k!j_k!}.
$$

Più esplicitamente abbiamo provato la seguente famiglia di identità tra due variabili non commutative *in una qualunque algebra associativa unitaria*:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{\substack{(i_1,j_1),\dots,(i_k,j_k)\neq(0,0) \\ i_1+j_1+\cdots+i_k+j_k=n}} \frac{x^{i_1}y^{j_1}\cdots x^{i_k}y^{j_k}}{i_1!j_1!\cdots i_k!j_k!} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{\substack{(i_1,j_1),\dots,(i_k,j_k)\neq(0,0) \\ i_1+j_1+\cdots+i_k+j_k=n}} \frac{(\mathrm{ad}\ x)^{i_1}(\mathrm{ad}\ y)^{j_1}\cdots(\mathrm{ad}\ x)^{i_k}(\mathrm{ad}\ y)^{j_k-1}(y)}{i_1!j_1!\cdots i_k!j_k!}.
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Questa è la **Formula di Dynkin** per i coefficienti $Z_n(x,y)$ della serie di Campbell-Baker-Hausdorff.

Teorema 2.2 (**Universalità della formula di Dynkin**)**.** *Dalla proprietà universale dell'algebra $\mathfrak{T}(x,y)$, la formula* (2.1) *vale per tutti gli elementi X, Y di un'algebra associativa unitaria $(A,*)$, sostituendo x con X, y con Y e il prodotto in $\mathfrak{T}(x,y)$ con il prodotto $*$.*

2.2 Una famiglia numerabile di identità polinomiali

Definizione 2.3 (Coefficienti di Dynkin)**.** *Sia $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$ un'algebra di Lie. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo delle applicazioni $Z_n : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $(a,b) \mapsto Z_n(a,b)$, dove*

$$
Z_n(a,b) := \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{\substack{(i_1,j_1),\dots,(i_k,j_k)\neq(0,0) \\ i_1+j_1+\cdots+i_k+j_k=n}} \frac{(\mathrm{ad}\, a)^{i_1}(\mathrm{ad}\, b)^{j_1}\cdots(\mathrm{ad}\, a)^{i_k}(\mathrm{ad}\, b)^{j_k-1}(b)}{n\cdot i_1!j_1!\cdots i_k!j_k!}. \tag{2.2}
$$

Chiaramente se $j_k = 0$ bisogna intendere che l'ultimo fattore al numeratore della seconda sommatoria finisca con $\cdots (\operatorname{ad} a)^{i_k - 1}(a)$.

Per ogni $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definiamo le mappe $C_{i,j} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $(a, b) \mapsto C_{i,j}(a, b)$, dove

$$C_{i,j}(a,b) := \sum_{k=1}^{i+j} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{\substack{(i_1,j_1),\dots,(i_k,j_k) \neq (0,0) \\ i_1+\cdots+i_k=i \\ j_1+\cdots+j_k=j}} \frac{(ad\ a)^{i_1}(ad\ b)^{j_1} \cdots (ad\ a)^{i_k}(ad\ b)^{j_k-1}(b)}{(i+j) \cdot i_1! j_1! \cdots i_k! j_k!}. \tag{2.3}$$

Inoltre poniamo

$$a \diamond b := \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(a,b), \tag{2.4}$$

se ciò ha senso (e.g., se la serie converge per qualche topologia in $\mathfrak{g}$). Diremo che la serie in (2.4) *è la* ***serie omogenea di Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin (CBHD)*** *e che la formula* (2.2) *è la rappresentazione di Dynkin di $Z_n(a, b)$.*

Dalle definizioni si ottiene ovviamente

$$Z_n(a,b) = \sum_{i+j=n} C_{i,j}(a,b), \qquad n \geq 1. \tag{2.5}$$

Osservazione 2.4. Chiaramente, nel caso in cui $i = 0$ e $j \geq 2$ oppure nel caso in cui $i \geq 2$ e $j = 0$, si ha $C_{i,j}(a, b) = 0$.

Osservazione 2.5. Considerando la serie formale nelle due indeterminate non commutative x, y data da $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n(a, b)$, inserendo l'espressione esplicita (2.2) e scambiando la sommatoria in k con la sommatoria in n, otteniamo la seguente espressione di $a \diamond b$:

$$a \diamond b = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{(i_1,j_1),\dots,(i_k,j_k) \neq (0,0)} \frac{(\operatorname{ad} a)^{i_1}(\operatorname{ad} b)^{j_1} \cdots (\operatorname{ad} a)^{i_k}(\operatorname{ad} b)^{j_k-1}(b)}{(i_1 + j_1 + \cdots + i_k + j_k) \cdot i_1! j_1! \cdots i_k! j_k!}. \tag{2.6}$$

Osservazione 2.6. Dall'osservazione precedente è chiaro che gli elementi $C_{i,j}(a, b)$ sono la somma dei termini della serie di Lie $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n(a, b)$ dove a compare esattamente i volte e b compare esattamente j volte. Di conseguenza possiamo esprimere $a \diamond b$ come la somma dei $C_{i,j}(a, b)$ (quando questa associazione di addendi è lecita, ad esempio se la serie converge totalmente rispetto a qualche struttura di spazio normato completo...)

$$a \diamond b = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(a,b) = \sum_{i,j=0}^{\infty} C_{i,j}(a,b). \tag{2.7}$$

Osservazione 2.7. Forniamo il risultato del calcolo esplicito dei primi coefficienti della serie omogenea di Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin:

$$\begin{aligned}
Z_1(a,b) =& a+b \\
Z_2(a,b) =& \frac{1}{2}[a,b] \\
Z_3(a,b) =& \frac{1}{12}[a,[a,b]] + \frac{1}{12}[b,[b,a]] \\
Z_4(a,b) =& -\frac{1}{24}[a,[b,[a,b]]] \\
Z_5(a,b) =& -\frac{1}{120}([a[b[a[a,b]]]] + [b[a[b[b,a]]]])+ \\
&+\frac{1}{360}([b[a[a[a,b]]]] + [a[b[b[b,a]]]])+ \\
&-\frac{1}{720}([a[a[a[a,b]]]] + [b[b[b[b,a]]]]).
\end{aligned}$$

Inoltre forniamo il valore dei primi $C_{i,j}(a,b)$:

$$\begin{aligned}
C_{1,0}(a,b) =& a, \qquad C_{0,1}(a,b) = b \\
C_{1,1}(a,b) =& \frac{1}{2}[a,b] \\
C_{2,1}(a,b) =& \frac{1}{12}[a,[a,b]] \\
C_{2,2}(a,b) =& -\frac{1}{24}[a,[b,[a,b]]] \\
C_{3,1}(a,b) =& 0 \\
C_{4,1}(a,b) =& -\frac{1}{720}[a,[a,[a,[a,b]]]] \\
C_{3,2}(a,b) =& -\frac{1}{120}[a,[b,[a,[a,b]]]] + \frac{1}{360}[b,[a,[a,[a,b]]]].
\end{aligned}$$

Osserviamo che i termini $C_{i,j}(a,b)$ con $i<j$ si possono ottenere scambiando i ruoli di a e b nelle precedenti formule nel membro destro, tenendo presente che[1]

$$a \diamond b = -((-b) \diamond (-a)),$$

e quindi $Z_n(b,a) = -Z_n(-a,-b) = (-1)^{n+1} Z_n(a,b)$, da cui anche

$$C_{j,i}(a,b) = (-1)^{i+j+1} C_{i,j}(b,a).$$

[1]Si ha infatti $e^{a\diamond b} = e^a e^b$, da cui $e^{-(a\diamond b)} = e^{-b}e^{-a} = e^{(-b)\diamond(-a)}$ e quindi $-(a\diamond b) = (-b)\diamond(-a)$ per l'iniettività di Exp su $\mathfrak{T}[\![t]\!]_+$

Con le notazioni introdotte in precedenza, il Teorema CBHD si può scrivere come

$$\operatorname{Exp}(xt)\cdot\operatorname{Exp}(yt)=\operatorname{Exp}\biggl(\sum_{n=1}^{\infty}Z_n(x,y)t^n\biggr). \tag{2.8}$$

Consideriamo ora $\widehat{\mathfrak{T}}(x,y)$, l'algebra delle serie formali in due variabili x, y non commutative.[2] Si possono dimostrare, come semplici conseguenze della Formula di Dynkin (2.1), le seguenti identità tra serie formali di potenze in $\widehat{\mathfrak{T}}(x,y)$:

$$\operatorname{Exp}(x)\cdot\operatorname{Exp}(y)=\operatorname{Exp}\biggl(\sum_{n=1}^{\infty}Z_n(x,y)\biggr), \tag{2.9}$$

$$\operatorname{Log}(\operatorname{Exp}(x)\cdot\operatorname{Exp}(y))=\sum_{n=1}^{\infty}Z_n(x,y). \tag{2.10}$$

Partendo da queste identità tra serie è possibile derivare infinite identità polinomiali nelle indeterminate x, y. Per fare questo abbiamo bisogno della seguente notazione: dato un monomio del tipo

$$x^{i_1}y^{j_1}\cdots x^{i_k}y^{j_k}$$

si dice che:

- esso ha grado in x uguale a $i_1+\cdots+i_k$;
- esso ha grado in y uguale a $j_1+\cdots+j_k$;
- esso ha grado in x, y uguale a $i_1+j_1+\cdots+i_k+j_k$.

I gradi (in x, in y, in x, y) per i polinomi sono definiti prendendo il massimo dei gradi dei monomi componenti (rispettivamente in x, in y, in x, y) che compaiono con coefficienti non nulli. Dato un polinomio $p\in\mathfrak{T}(x,y)$ o una serie formale di potenze $p\in\widehat{\mathfrak{T}}(x,y)$, per ogni $n, m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ denotiamo con

$$\underset{n,m}{\mathrm{DEG}}(p) \qquad \underset{n}{\mathrm{DEG}}(p)$$

rispettivamente:[3]

---

[2] $\widehat{\mathfrak{T}}(x,y)$ è completamento isometrico dello spazio metrico $(\mathfrak{T}(x,y),d)$; più esplicitamente si ha $\widehat{\mathfrak{T}}(x,y)=\prod_{k=0}^{\infty}\mathfrak{T}_k(V)$, con le stesse notazioni nella nota a pagina 3 e con una metrica $\widehat{d}$ analoga a d in Definizione 1.3.

[3] Osserviamo che le definizioni sono ben poste per l'indipendenza lineare dei monomi che contengono x e y un differente numero di volte.

- la somma dei monomi componenti di p che hanno, contemporaneamente, grado in x minore o uguale a n e grado in y minore o uguale a m;

- la somma dei monomi componenti di p di grado in x, y minore o uguale a n.

Per esempio, si ha:

$$\underset{n,m}{\mathrm{DEG}}\Big(\mathrm{Exp}(x)\cdot\mathrm{Exp}(y)\Big) = \sum_{0\le i\le n, 0\le j\le m}\frac{x^i y^j}{i!j!},$$

$$\underset{n}{\mathrm{DEG}}\Big(\mathrm{Exp}(x)\cdot\mathrm{Exp}(y)\Big) = \sum_{0\le i+j\le n}\frac{x^i y^j}{i!j!}.$$

Abbiamo, dunque, grazie a (2.9), le seguenti identità valide, per ogni $m, n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{0\le i\le n, 0\le j\le m}\frac{x^i y^j}{i!j!} = \underset{n,m}{\mathrm{DEG}}\Big\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\Big(\sum_{h=1}^{\infty}Z_h(x,y)\Big)^k\Big\},$$

$$\sum_{0\le i+j\le n}\frac{x^i y^j}{i!j!} = \underset{n}{\mathrm{DEG}}\Big\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\Big(\sum_{h=1}^{\infty}Z_h(x,y)\Big)^k\Big\}.$$

Osserviamo che in entrambe le identità possiamo limitarci a considerare i termini delle serie fino al grado $\max\{m, n\}$; di più possiamo selezionare nella seconda identità i termini $C_{i,j}$ che danno un contributo effettivo.

Più precisamente, si ottiene il seguente utilissimo risultato:

Teorema 2.8 (Identità polinomiali dal Teorema BCH). *Sia $\mathfrak{T}(x, y)$ l'algebra dei polinomi in due variabili x, y non commutative (su un campo di caratteristica nulla) e siano $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

Allora si hanno le seguenti identità:

$$\sum_{k=0}^{\max\{n,m\}}\frac{1}{k!}\Big(\sum_{0\le i\le n, 0\le j\le m}C_{i,j}(x,y)\Big)^k = \sum_{0\le i\le n, 0\le j\le m}\frac{x^i y^j}{i!j!} + \mathcal{R}_{n,m}(x,y), \tag{2.11}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\Big(\sum_{h=1}^{n}Z_h(x,y)\Big)^k = \sum_{0\le i+j\le n}\frac{x^i y^j}{i!j!} + \mathcal{R}_n(x,y), \tag{2.12}$$

dove $\mathcal{R}_{n,m}(x, y) \in \mathfrak{T}(x, y)$ è un polinomio che risulta essere somma finita di monomi di grado strettamente maggiore di n in x, oppure di grado strettamente maggiore di m in y; $\mathcal{R}_n(x, y) \in \mathfrak{T}(x, y)$ è un polinomio che risulta essere somma finita di monomi di grado strettamente maggiore di n in x, y.

Osservazione 2.9. Grazie alla proprietà universale dell'algebra $\mathfrak{T}(x, y)$, le precedenti identità valgono in ogni algebra associativa unitaria $(A, *)$ sostituendo x e y con due qualsiasi elementi di A e, conformemente, sostituendo il prodotto di $\mathfrak{T}(x, y)$ con $*$.

Capitolo 3

Applicazioni al caso delle matrici

In questo capitolo daremo prova del fatto che in $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ esiste un intorno dell'origine U tale che il prodotto di due matrici e^A, e^B (con $A, B \in U$) è del tipo e^C con C in un intorno dell'origine, "più grande" di U. (Daremo a breve un asserto preciso, si veda il Teorema 3.8.) In realtà dimostreremo questo in un contesto molto più vasto di quello matriciale. Mostreremo infine che non esiste un analogo matriciale all'asserto, valido per i numeri complessi, che garantisce che l'insieme $\{e^z : z \in \mathbb{C}\}$ sia un gruppo rispetto al prodotto.

3.1 Convergenza locale della serie CBHD omogenea

Consideriamo un'algebra di Lie $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$. Per convenienza notazionale, poniamo

$$[a^{h_1} b^{k_1} \cdots a^{h_n} b^{k_n}] := [\overbrace{a, \cdots [a,}^{h_1 \text{volte}} \overbrace{[b, \cdots [b}^{k_1 \text{volte}} \cdots \overbrace{[a, \cdots [a,}^{h_n \text{volte}} \overbrace{[b, \cdots , b]}^{k_n \text{volte}} \cdots] \cdots] \cdots],$$

con $h_1, \ldots, h_n, k_1, \ldots, k_n$ in $\mathbb{N} \cup \{0\}$ e $a, b \in \mathfrak{g}$. Dati h, k multi-indici di lunghezza n, con $(h, k) \neq (0, 0)$, poniamo inoltre

$$D_{(h,k)}(a, b) := [a^{h_1} b^{k_1} \cdots a^{h_n} b^{k_n}], \quad a, b \in \mathfrak{g},$$
$$\mathcal{N}_n := \left\{ (h, k) \;\middle|\; h, k \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n, \; (h_1, k_1), \ldots (h_n, k_n) \neq (0, 0) \right\}.$$

Di più, dato $n \in \mathbb{N}$ ed $(h,k) \in \mathcal{N}_n$, poniamo

$$c_n := \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \qquad \mathbf{c}(h,k) := \frac{1}{h!k!(|h|+|k|)}.$$

Infine, dato $N \in \mathbb{N}$, poniamo

$$\eta_N(a,b) := \sum_{n=1}^{N} c_n \sum_{(h,k)\in\mathcal{N}_n : |h|+|k|\le N} \mathbf{c}(h,k) D_{(h,k)}(a,b), \qquad a,b \in \mathfrak{g}.$$

Riordinando i termini, si riconosce immediatamente che

$$\eta_N(a,b) = \sum_{j=1}^{N} Z_j(a,b) \qquad \forall\ a,b \in \mathfrak{g},$$

dove

$$Z_j(a,b) := \sum_{n=1}^{j} c_n \sum_{(h,k)\in\mathcal{N}_n : |h|+|k|=j} \mathbf{c}(h,k) D_{(h,k)}(a,b) \quad a,b \in \mathfrak{g}.$$

In seguito denoteremo con $\|A\|_F$ la norma di Frobenius di una matrice A di ordine $n \times n$ a entrate reali (tutto funziona, in realtà, anche nel caso complesso); ossia, se $|\xi|$ denota la norma euclidea di $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\|A\|_F := \max_{|\xi|=1} |A\xi|.$$

Teorema 3.1. *Esiste una norma matriciale $\|\cdot\|$ in $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ per cui*

$$\|[A,B]\| \le \|A\| \cdot \|B\|, \qquad A,B \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}). \tag{3.1}$$

Dimostrazione. Osserviamo anzitutto che

$$\|[A,B]\|_F = \|AB - BA\|_F \le 2\,\|A\|_F\,\|B\|_F,$$

poiché la norma di Frobenius è submoltiplicativa. Ponendo quindi $\|\cdot\| := 2\,\|\cdot\|_F$, si ha

$$\|[A,B]\| = 2\,\|[A,B]\|_F \le 4\,\|A\|_F\,\|B\|_F = 2\|A\|_F \cdot 2\|B\|_F = \|A\| \cdot \|B\|.$$

Questo conclude la semplicissima prova. $\square$

Dalla definizione di $D_{(h,k)}(a,b)$ si ha, considerando la norma del lemma precedente,

$$\|D_{(h,k)}(a,b)\| \leq \|a\|^{|h|} \cdot \|b\|^{|k|},$$

per ogni $a, b \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ e per ogni $(h,k) \in \mathcal{N}_n$. (Si noterà come tutti i calcoli a seguire valgono in una qualunque **algebra di Banach-Lie** $\mathfrak{g}$; ossia $\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie (reale o complessa) dotata di una norma che la rende uno spazio normato completo (i.e., uno spazio di Banach) tale che la norma è compatibile col bracket, nel senso che $\|[a,b]\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$, per ogni $a, b \in \mathfrak{g}$.)

Teorema 3.2. *Sia* $\|\cdot\|$ *una norma matriciale su* $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ *che soddisfa* (3.1)*. Allora, per ogni* $N \in \mathbb{N}$ *ed ogni* $a, b \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ *vale*

$$\sum_{n=1}^{N} |c_n| \sum_{(h,k)\in\mathcal{N}_n : |h|+|k|\leq N} \boldsymbol{c}(h,k) \|D_{(h,k)}(a,b)\| \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} (e^{\|a\|} e^{\|b\|} - 1)^n.$$

Dimostrazione. Osserviamo preliminarmente che, dati numeri reali $A, B \geq 0$,

$$\sum_{(h,k)\in\mathcal{N}_n} \frac{A^{|h|} B^{|k|}}{h!k!} = (e^{A+B} - 1)^n, \tag{3.2}$$

infatti

$$\begin{aligned}\sum_{(h,k)\in\mathcal{N}_n} \frac{A^{|h|} B^{|k|}}{h!k!} &= \left(\sum_{i,j\in\mathbb{N}\cup\{0\}:(i,j)\neq(0,0)} \frac{A^i B^j}{i!j!} \right)^n \\ &= \left(\sum_{i\geq 0} \frac{A^i}{i!} \cdot \sum_{j\geq 0} \frac{B^j}{j!} - 1 \right)^n = (e^A e^B - 1)^n.\end{aligned}$$

Ora, per ogni $a, b \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ e $N \in \mathbb{N}$ risulta

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{N} |c_n| \sum_{(h,k)\in\mathcal{N}_n : |h|+|k|\leq N} \mathbf{c}(h,k) \|D_{(h,k)}(a,b)\| \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{N} |c_n| \sum_{(h,k)\in\mathcal{N}_n : |h|+|k|\leq N} \mathbf{c}(h,k) \|a\|^{|h|} \cdot \|b\|^{|k|} = \\ &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} |c_n| \sum_{(h,k)\in\mathcal{N}_n : |h|+|k|\leq N} \frac{\|a\|^{|h|} \cdot \|b\|^{|k|}}{h!k!(|h|+|k|))} \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \sum_{(h,k)\in\mathcal{N}_n} \frac{\|a\|^{|h|} \cdot \|b\|^{|k|}}{h!k!} \overset{(3.2)}{=} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} (e^{\|a\|} e^{\|b\|} - 1)^n.\end{aligned}$$

Questo conclude la prova. $\square$

Osservazione 3.3. Dal teorema precedente abbiamo le seguenti stime:

$$\|\eta_N(a,b)\| \le \sum_{j=1}^{N} \|Z_j(a,b)\| \le \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}(e^{\|a\|}e^{\|b\|}-1)^n, \quad a,b \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}).$$

Osservazione 3.4. Poiché in $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ tutte le norme sono equivamenti, data una qualunque norma matriciale $\|\cdot\|_*$ su $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$,

$$\text{esiste } M>0 \text{ tale che } \|[a,b]\|_* \le M\,\|a\|_* \cdot \|b\|_*, \quad \text{per ogni } a,b \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}).$$

Ora, considerando la seguente norma matriciale equivalente a $\|\cdot\|_*$,

$$\|a\| := M\|a\|_*,$$

si ha che $\|\cdot\|$ è una norma matriciale che verifica (3.1).

Poiché la norma $\|\cdot\|$ di cui sopra soddisfa le ipotesi del Teorema 3.1, si ha il seguente risultato:

Corollario 3.5. *Presa una qualsiasi norma matriciale $\|\cdot\|_*$ su $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, data una costante M come nell'osservazione precedente relativamente a $\|\cdot\|_*$, si ottiene che, per ogni $N\in\mathbb{N}$ e per ogni $a,b\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, i numeri reali*

$$\|\eta_N(a,b)\|_*, \qquad \sum_{j=1}^{N}\|Z_j(a,b)\|_*,$$
$$\sum_{n=1}^{N}|c_n| \sum_{(h,k)\in\mathcal{N}_n:|h|+|k|\le N} \mathbf{c}(h,k)\|D_{(h,k)}(a,b)\|_*,$$

sono tutti limitati da

$$M^{-1}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}(e^{M(\|a\|_*+\|b\|_*)}-1)^n.$$

Per quanto riguarda i prossimi risultati sulla convergenza della serie CBHD omogenea, ci serviremo della seguente semplice stima:

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}(e^Ae^B-1)^n \le \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(e^Ae^B-1)^n = -\log(2-e^{A+B}) \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(e^Ae^B-1)^n = \frac{e^{A+B}-1}{2-e^{A+B}}. \end{cases}$$

che si ottiene per numeri reali A, B tali che $|e^{A+B} - 1| < 1$, cioè se $A + B < \log 2$.

Supponiamo che $a, b, \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ siano tali che $\|a\| + \|b\| < \log 2$, dove $\|\cdot\|$ soddisfa (3.1). Dalla precedente osservazione notiamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(e^{\|a\|}e^{\|b\|} - 1)^n = -\log(2 - e^{\|a\|+\|b\|}) < \infty, \quad \text{ogniqualvolta } \|a\| + \|b\| < \log 2. \quad (3.3)$$

Mostreremo ora che, se $\|a\| + \|b\| < \log 2$, risulta che $\{\eta_N(a, b)\}_N$ è una successione di Cauchy in $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ (dotato della struttura di spazio normato da $\|\cdot\|$ come sopra). Dal fatto che $\mathbb{R}^{2n}$ con la topologia euclidea è completo, tale è anche $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, considerato che tutte le norme matriciali sono equivalenti; ne seguirà che $\{\eta_N(a, b)\}_N$ è una successione convergente, se $\|a\| + \|b\| < \log 2$.

Riguardo alla citata condizione di Cauchy, si ha

$$\|\eta_{n+p}(a, b) - \eta_n(a, b)\| = \left\| \sum_{j=n+1}^{n+p} Z_j(a, b) \right\| \leq \sum_{j=n+1}^{n+p} \|Z_j(a, b)\| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \|Z_j(a, b)\|.$$

Poiché l'ultimo termine tende a 0 per $n \longrightarrow \infty$ in quanto resto n-esimo di una serie convergente (si veda (3.3)!), la successione è effettivamente di Cauchy.

Questo prova che per ogni $a, b \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ con $\|a\| + \|b\| < \log 2$ esiste

$$a \diamond b := \lim_{N \to \infty} \eta_N(a, b) = \sum_{j=1}^{\infty} Z_j(a, b).$$

Di più, abbiamo ottenuto la stima

$$\|a \diamond b\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|Z_j(a, b)\| \leq \log\left(\frac{1}{2 - e^{\|a\|+\|b\|}}\right), \quad \text{ogniqualvolta } \|a\| + \|b\| < \log 2. \quad (3.4)$$

Raccogliendo dunque i risultati ottenuti, abbiamo provato il seguente risultato:

Teorema 3.6 (Convergenza della serie CBHD omogenea per $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$). *Una condizione sufficiente per l'esistenza di $a \diamond b$ è che la coppia (a, b) appartenga all'insieme*

$$D := \Big\{(a, b) \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \times \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) : \|a\| + \|b\| < \log 2\Big\}.$$

In particolare, ciò è vero nel caso in cui a, b stanno nel seguente disco centrato nell'origine

$$Q := \left\{a \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) : \|a\| < \frac{\log 2}{2}\right\}.$$

Di più, la serie $\sum_{j=1}^{\infty} Z_j(a,b)$ *converge tolalmente*[1] *su ogni insieme del tipo*

$$D_\delta := \Big\{(a,b) \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \times \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) : \|a\| + \|b\| \leq \delta\Big\}, \qquad \textit{con } \delta < \log 2.$$

Osservazione 3.7. Si può generalizzare il risultato ad una norma qualunque $\|\cdot\|_*$, rimpiazzando D e Q con i seguenti insiemi

$$D_* := \Big\{(a,b) \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \times \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) : \|a\|_* + \|b\|_* < \frac{\log 2}{M}\Big\},$$
$$Q_* := \Big\{a \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) : \|a\|_* < \frac{\log 2}{2M}\Big\},$$

dove M è una costante come nell'Osservazione (3.4) relativamente a $\|\cdot\|_*$.

Poichè, come non è difficile verificare,[2] ogniqualvolta la serie $a \diamond b = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(a,b)$ converge in $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ essa dà origine ad una matrice che verifica la notevole identità

$$e^a e^b = e^{a \diamond b},$$

abbiamo provato il seguente risultato:

Teorema 3.8. *Sia data una norma* $\|\cdot\|$ *su* $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ *che verifica* (3.1) *(ad essa ci si può sempre ricondurre a partire da una qualunque norma matriciale, vedasi l'Osservazione 3.4). Per ogni coppia di matrici* A, B *nel disco*

$$Q = \Big\{A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) : \|A\| < \frac{\log 2}{2}\Big\},$$

esiste una matrice $C \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ *tale che*

$$e^A \cdot e^B = e^C.$$

Di più, se A, B *appartengono al disco di centro l'origine e raggio* δ *(con* $\delta < \log 2/2$*), si può trovare* C *come sopra nel disco di centro l'origine e raggio* $R(\delta)$*, ove*

$$R(\delta) := \log\Big(\frac{1}{2 - e^{2\delta}}\Big).$$

[1] Ossia $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \sup_{(a,b)\in D_\delta} \|Z_j(a,b)\| < \infty.$

[2] Si veda [1, Theorem 5.54, page 341].

Dimostrazione. Basta prendere $C = A \diamond B = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(A, B)$, essendo la serie convergente per gli argomenti di cui sopra. L'ultimo asserto segue dalla stima (3.4). $\square$

Si osservi che $\lim_{\delta \to (\log 2/2)^-} R(\delta) = +\infty$ e $\lim_{\delta \to 0^+} R(\delta) = 0$. Si può anche riconoscere facilmente, da un semplicissimo studio di funzione, che $R(\delta)$ è sempre maggiore di δ.

3.2 Perché non è lecito aspettarsi un risultato globale

Osservazione 3.9. *La serie CBHD omogenea non converge in tutto $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.*

Non è difficile[3] provare che, date due matrici $A, B \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, se la serie CBHD omogenea $A \diamond B = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(A, B)$ converge in $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, allora necessariamente $e^{A \diamond B} = e^A \cdot e^B$. Ne segue che se non esiste $C \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ tale che $e^A \cdot e^B = e^C$ allora la serie CBHD omogenea $A \diamond B = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(A, B)$ *non può convergere.*

Diamo un esempio di matrici $A, B \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ tali che non esiste $C \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ tale che $e^A \cdot e^B = e^C$. A partire da questo esempio è semplice ottenerne uno su un qualunque altro spazio di matrici $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

Il seguente controesempio è dovuto a Wei [4]. Considerate le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -5\pi/4 \\ 5\pi/4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dimostreremo che non esiste $C \in \mathfrak{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tale che $\exp(A) \cdot \exp(B) = \exp(C)$. Da un calcolo diretto si ha[4]

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad \exp(B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

[3] Si veda anche [1, Section 5.6, page 354], in cui si utilizza un po' di teoria delle funzioni analitiche in spazi di Banach...

[4] Osserviamo infatti che vale la seguente formula:

$$\exp \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\alpha \cos\beta & -e^\alpha \sin\beta \\ e^\alpha \sin\beta & e^\alpha \cos\beta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

che può essere ottenuta osservando che la matrice di cui si vuole fare l'esponenziale è la matrice dell'endomorfismo di $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ ottenuto moltiplicando per il numero complesso $\alpha + i\beta$...

dunque

$$\exp(A)\exp(B) = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} =: D.$$

Supponiamo per assurdo che esista $C \in \mathfrak{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tale che $\exp(C) = D$. Si ha dunque che $\exp(C/2)$ è una radice quadrata di $D \in \mathfrak{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Per tale ragione si avrebbe

$$\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix}.$$

Ne conseguirebbe che $b = 0$ oppure $a = -d$. Nel primo caso si avrebbe $d^2 = -\sqrt{2}$ (il che è assurdo poiché $d \in \mathbb{R}$), mentre nel secondo si avrebbe $-1/\sqrt{2} = 0$, un altro assurdo. Dunque C non può esistere.

Capitolo 4

Applicazioni

In questo capitolo diamo due applicazioni del Teorema CBH, una all'Analisi (per approssimare la composizione di flussi di campi vettoriali) e una alla Geometria Differenziale (per dimostrare l'analogo del Teorema di Campbell-Baker-Hausdorff per i gruppi di Lie analitici).

4.1 Approssimazione di campi vettoriali

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ e sia X un campo vettoriale su Ω. Sia $\gamma_X(t)$ una qualsiasi curva integrale di X definita su $I \subseteq \mathbb{R}$ a valori in Ω. Allora si ha:

Teorema 4.1 (Differenziazione lungo una curva integrale)**.** *Nelle precedenti notazioni, se $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ si ha*

$$\frac{d}{dt}(f(\gamma_X(t))) = (Xf)(\gamma_X(t)), \quad t \in I. \tag{4.1}$$

Inoltre, se $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e se $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R})$ otteniamo induttivamente

$$\frac{d^k}{dt^k}(f(\gamma_X(t))) = (X^k f)(\gamma_X(t)), \quad t \in I. \tag{4.2}$$

Di conseguenza, se $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, la serie di McLaurin di $f(\gamma_{X,x}(t))$ è

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(X^k f)(x)}{k!} t^k. \tag{4.3}$$

Infine, se $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f \in C^{k+1}(\Omega, \mathbb{R})$, $x \in \Omega$ e $\gamma_{X,x}(t)$ è la curva integrale di X che parte da x (a tempo $t = 0$), dalla formula di Taylor con resto integrale abbiamo la seguente espressione

$$f(\gamma_{X,x}(t)) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(X^k f)(x)}{k!} t^k + \frac{1}{n!} \int_0^t (t-s)^n (X^{n+1} f)(\gamma_{X,x}(s)) ds. \tag{4.4}$$

Dimostrazione. Denotiamo γ_X con γ. Grazie alla regola della catena, per ogni $t \in I$

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \langle (\nabla f)(\gamma(t)), \dot{\gamma}\ (t) \rangle = \langle (\nabla f)(\gamma(t)), XI\gamma(t) \rangle = (Xf)(\gamma(t)).$$

Le altre affermazioni seguono pressoché immediatamente da questa. □

Sostituendo f in (4.3) con una qualunque delle funzioni componenti della funzione identità $I(x) = (x_1, \ldots, x_N)$ di $\mathbb{R}^N$, otteniamo anche la serie di McLaurin per $\gamma_{X,x}(t)$ (che qui denota la curva integrale del campo vettoriale X a tempo t uscente da x a tempo nullo):

$$\gamma_{X,x}(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(X^k I)(x)}{k!} t^k.$$

Si noti che, *roughly speaking*, il membro di destra assomiglia ad un "esponenziale di tX" (qualunque cosa questo possa significare). Ci serviremo, per questa ragione, della seguente notazione per $\gamma(t, X, x)$:

$$\exp(tX)(x) := \gamma(t, X, x), \tag{4.5}$$

dove $X \in \mathcal{X}(\Omega)$ (quest'ultimo denota lo spazio dei campi vettoriali su Ω a coefficienti C^∞), $x \in \Omega$ e t sta nel dominio massimale di esistenza di $\gamma(t, X, x)$, che denoteremo con $\mathcal{D}(X, x)$.

Il risultato di base che motiva la nostra ricerca è rappresentato dal seguente teorema:

Teorema 4.2 (Sviluppo della composizione di due campi vettoriali)**.** *Siano $X, Y \in \mathcal{X}(\Omega)$, $x \in \Omega$ e $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. Allora, la serie di Taylor di*

$$(t, s) \mapsto f(\exp(tY)\exp(sX)(x))$$

(che è ben definita in un intorno dell'origine di $\mathbb{R}^2$) è

$$\sum_{i,j \geq 0} \frac{X^i Y^j f(x)}{i!j!} s^i t^j. \tag{4.6}$$

Notiamo l'ordine inverso di X e Y in (4.6) rispetto all'ordine in cui compaiono in $\exp(tY)\exp(sX)(x)$.

Dimostrazione. Siano x, X, Y come richiesti. La curva $\exp(sX)(x)$ è definita per $s \in \mathcal{D}(X, x)$ che è un intervallo aperto contenente 0. Sia $\varepsilon > 0$ tale che $[-\varepsilon, \varepsilon] \subset \mathcal{D}(X, x)$. Allora l'insieme $K := \{\gamma(s, X, x) : s \in [-\varepsilon, \varepsilon]\}$ è un compatto in Ω. Dunque, dai teoremi generali sulle EDO esiste $\delta > 0$ tale che $\exp(tY)(k)$ esiste per ogni $t \in [-\delta, \delta]$ e per ogni $k \in K$. Questo mostra che la funzione $F(s, t) := f(\exp(tY)\exp(sX)(x))$ è ben definita per $(s, t) \in U := [-\varepsilon, \varepsilon] \times [-\delta, \delta]$ ed è liscia nell'interno di U, un intorno aperto di $(0, 0)$ in $\mathbb{R}^2$. Per ogni $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ usando ripetutamente la (4.2) si ha:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^{i+j} F}{\partial s^i \partial t^j}(0,0) = \frac{\partial^i}{\partial s^i}\bigg|_{s=0} \left(\frac{\partial^j}{\partial t^j}\bigg|_{t=0} F(s,t) \right) \\
&= \frac{\partial^i}{\partial s^i}\bigg|_{s=0} \left(\frac{\partial^j}{\partial t^j}\bigg|_{t=0} f(\gamma_Y(t,z)) \right) \qquad (\text{con } z = \exp(sX)(x)) \\
&\overset{(4.2)}{=} \frac{\partial^i}{\partial s^i}\bigg|_{s=0} \Big((Y^j f)(\exp(sX)(x)) \Big) = \frac{\partial^i}{\partial s^i}\bigg|_{s=0} \Big((Y^j f)(\gamma_X(s,x)) \Big) \\
&\overset{(4.2)}{=} X^i(Y^j f)(x).
\end{aligned}
$$

Abbiamo quindi provato che

$$
\frac{\partial^{i+j} F}{\partial s^i \partial t^j}(0,0) = X^i(Y^j f)(x), \qquad \forall\, i, j \geq 0. \tag{4.7}
$$

Poiché la serie di McLaurin di $F(s, t)$ in $(0, 0)$ è, per definizione, data da

$$
\sum_{i,j \geq 0} \frac{\partial^{i+j} F(0,0)}{\partial s^i \partial t^j} \frac{s^i t^j}{i!j!}.
$$

(4.6) segue da (4.7). □

Ora, la serie in (4.6) può essere *formalmente* riscritta come il prodotto di due serie formali di potenze di tipo esponenziale (che agiscono su f):

$$
\textit{formalmente} \quad \sum_{i,j \geq 0} \frac{X^i Y^j}{i!j!} s^i t^j = \sum_{i \geq 0} \frac{(sX)^i}{i!} \sum_{j \geq 0} \frac{(tY)^j}{j!} =: e^{sX} \cdot e^{tY}.
$$

Se siamo in grado di produrre identità per serie formali di potenze in due variabili non commutative x, y per il prodotto formale $e^x \cdot e^y$, allora possiamo migliorare la nostra conoscenza della composizione $\exp(tY)\exp(sX)(x)$. Orbene, *tali identità sono state prodotte nel Teorema CBH!* (Si veda precisamente il Teorema 2.8.)

Siano X, Y campi vettoriali lisci su un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$. Dato un compatto K di Ω, vogliamo dare una approssimazione della composizione di flussi

$$(\Psi_t^Y \circ \Psi_s^X)(x), \qquad x \in K,$$

per mezzo del flusso di un terzo campo vettoriale che può essere ottenuto in modo universale dall'iterazione dei commutatori di tY e sX. A tal fine useremo le identità date nel Teorema 2.8.

Sia $\varepsilon > 0$ tale che $(\Psi_t^Y \circ \Psi_s^X)(x)$ sia definito per ogni $x \in K$ e ogni $s, t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Sia poi $n \in \mathbb{N}$ fissato. Mostriamo che esiste una costante C_n e un campo vettoriale liscio $Z(s,t)$ (che dipende da n, ma non da x) tale che

$$|\Psi_t^Y(\Psi_s^X(x)) - \Psi_1^{Z(s,t)}(x)| \leq C_n(|s| + |t|)^{n+1}, \tag{4.8}$$

per ogni $x \in K$ e per ogni $t, s \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Possiamo riscrivere (4.8) come segue:

$$\exp(tY)(\exp(sX)(x)) = \exp(Z(s,t))(x) + \mathcal{O}(|s| + |t|)^{n+1}. \tag{4.9}$$

Da risultati generali sullo sviluppo di Taylor di funzioni lisce, (4.9) seguirà dal fatto che possiamo definire un campo vettoriale liscio $Z(s,t)$ in modo che lo sviluppo di Taylor in $(s,t) = (0,0)$ delle due funzioni

$$\exp(tY)(\exp(sX)(x)) \quad \text{e} \quad \exp(Z(s,t))(x)$$

coincida fino al grado n in s, t.

Dal Teorema 4.2 il polinomio di McLaurin di grado n della prima funzione è

$$\sum_{0 \leq i+j \leq n} \frac{X^i Y^j I(x)}{i!j!} s^i t^j. \tag{4.10}$$

Dunque, è naturale definire $Z(s,t)$ come il campo vettoriale ottenuto dalla somma

$$Z(s,t) := \sum_{h=1}^{n} Z_h(sX, tY) = sX + tY + \frac{st}{2}[X, Y] + \cdots . \tag{4.11}$$

Restringendo al più ε, possiamo supporre che $1 \in \mathcal{D}(Z(s,t),x)$ per ogni $x \in K$, e per ogni $t,s \in [-\varepsilon,\varepsilon]$. Dalla formula (4.4) abbiamo la seguente identità (in cui $Z = Z(s,t)$):

$$\exp(Z(s,t))(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(Z^k I)(x)}{k!} t^k + \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-\rho)^n (Z^{n+1} I)(\gamma_{Z,x}(\rho)) d\rho. \qquad (4.12)$$

Ricorrendo a quest'ultima identità, mostreremo che il polinomio di McLaurin di grado n in s,t della funzione $\exp(Z(s,t))(x)$ ci dà esattamente (4.10).

Il resto integrale contiene *solo* termini di grado $\geq n+1$ in s,t (si veda infatti (4.11)), dunque può essere ignorato. Dall'identità (2.12) si ha (fatte le opportune considerazioni sull'effettiva liceità della sostituzione $x = sX, y = tY$)

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(\sum_{h=1}^{n} Z_h(sX,tY) \right)^k = \sum_{0 \leq i+j \leq n} \frac{X^i Y^j}{i!j!} s^i t^j + \mathcal{R}_n(sX,tY). \qquad (4.13)$$

Dal Teorema 2.8, risulta che $\mathcal{R}_n(sX,tY)$ è un operatore differenziale i cui coefficienti (oltre ad essere funzioni di x) sono, rispetto ad s e t, polinomi di grado strettamente maggiore di n in s,t.

Applicando gli operatori differenziali di cui in (4.13) alla funzione identità I e valutando in $x \in K$, si ottiene infine

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(\sum_{h=1}^{n} Z_h(sX,tY) \right)^k I(x) = \sum_{0 \leq i+j \leq n} \frac{X^i Y^j I(x)}{i!j!} s^i t^j + \mathcal{O}_x(|s|+|t|)^{n+1}.$$

Ora, osservando (4.12), la precedente identità mostra che $\sum_{k=0}^{n} \frac{Z^k I(x)}{k!}$ nel membro destro di (4.12) ha esattamente lo sviluppo di Taylor (4.10), come volevamo dimostrare.

Abbiamo quindi dimostrato il seguente teorema:

Teorema 4.3. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto e X,Y campi vettoriali lisci su Ω. Sia $K \subset \Omega$ compatto e sia $n \in \mathbb{N}$. Consideriamo il campo vettoriale liscio*

$$Z(s,t) := \sum_{h=1}^{n} Z_h(sX,tY),$$

dove Z_h è definito come in (2.2). Allora esistono $\varepsilon > 0$ ed una costante C (dipendenti altresì da n) tali che

$$\Big| \exp(tY)(\exp(sX)(x)) - \exp(Z(s,t))(x) \Big| \leq C\,(|s|+|t|)^{n+1},$$

per ogni $t,s \in [-\varepsilon,\varepsilon]$ e per ogni $x \in K$.

4.2 Il Teorema Esponenziale su un gruppo di Lie

Lo scopo della presente sezione è quello di applicare al caso dei gruppi di Lie (analitici) il Teorema di Campbell-Baker-Hausdorff. Utilizziamo il seguente lemma, di interesse indipendente.

Teorema 4.4. *Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$, dove $\mathbb{K}$ è $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Consideriamo $\mathfrak{g}$ munita della struttura di spazio normato ottenuta identificando $\mathfrak{g}$ con $\mathbb{K}^n$ (dove $n = \dim(\mathfrak{g})$) attraverso le coordinate di una base fissata (su $\mathfrak{g}$).*

Allora esiste una palla aperta U di centro 0 in $\mathfrak{g}$ tale che la serie omogenea di Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin

$$a \diamond b = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(a, b)$$

converge uniformemente su $U \times U$.

Dimostrazione. Poiché $\mathfrak{g}$ è uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{K}$ (con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$), possiamo fissare una norma $\|\cdot\|$ su $\mathfrak{g}$ in modo tale da identificare $\mathfrak{g}$ con l'usuale spazio normato $\mathbb{K}^n$ (dove $n = \dim(\mathfrak{g})$) attraverso le coordinate di una base di $\mathfrak{g}$ fissata. Poiché la mappa $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni (a, b) \mapsto [a, b] \in \mathfrak{g}$ è bilineare, grazie al fatto che $\mathfrak{g}$ è di dimensione finita, possiamo dire che essa è anche continua (sul codominio abbiamo fissato la topologia dello spazio metrico $(\mathfrak{g}, \|\cdot\|)$, mentre sul dominio l'ovvia topologia prodotto). Da una caratterizzazione delle funzioni multilineari continue,[1] deriviamo l'esistenza di una costante $M > 0$ tale che

$$\|[a, b]\| \le M\|a\| \cdot \|b\|, \qquad \text{per ogni } a, b \in \mathfrak{g}. \tag{4.14}$$

Da questo risultato possiamo ricavare la seguente disuguaglianza per i commutatori di ordine superiore:

$$\Big\|[a_1[a_2 \cdots [a_{k-1}, a_k] \cdots]]\Big\| \le M^{k-1}\|a_1\| \cdot \|a_2\| \cdots \|a_k\|, \tag{4.15}$$

[1]Sia $(V, \|\cdot\|)$ uno spazio normato (su $\mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$). Sia $k \in \mathbb{N}$ e supponiamo che

$$F : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k \text{ times}} \to V$$

sia k-multilineare. Allora F è continua (nelle ovvie topologie) se e solo se esiste $M > 0$ tale che $\|F(v_1, \ldots, v_k)\| \le M\,\|v_1\| \cdots \|v_k\|$, per ogni $v_1, \ldots, v_k \in V$.

valida per ogni $k \in \mathbb{N}$ ed ogni $a_1, \dots, a_k \in \mathfrak{g}$. Siamo pronti a definire U come segue:

$$U := \left\{ a \in \mathfrak{g} : \|a\| \leq \frac{\log 2}{3M} \right\}. \tag{4.16}$$

Dimostreremo ora che la condizione

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{a,b \in U} \|Z_n(a,b)\| < \infty \tag{4.17}$$

è sufficiente[2] per la convergenza uniforme della serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n(a,b)$ su $U \times U$. È importante osservare che la citata sufficienza discende dal fatto che $(\mathfrak{g}, \|\cdot\|)$ è uno spazio di Banach (essendo $\mathfrak{g}$ di dimensione finita).

Dati $a, b \in U$ abbiamo le seguenti stime, basate sulla rappresentazione di Dynkin (vista in precedenza) di $Z_n(a,b)$ (si veda precisamente (2.2)):

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \|Z_n(a,b)\| \leq \qquad \text{(usiamo (4.15))} \\
&\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sum_{\substack{(i_1,j_1),\dots,(i_k,j_k) \neq (0,0) \\ i_1+j_1+\dots+i_k+j_k = n}} \frac{M^{i_1+j_1+\dots+i_k+j_k-1} \|a\|^{i_1} \|b\|^{j_1} \cdots \|a\|^{i_k} \|b\|^{j_k}}{n \cdot i_1! j_1! \cdots i_k! j_k!} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{(i_1,j_1),\dots,(i_k,j_k) \neq (0,0)} \frac{M^{i_1+j_1+\dots+i_k+j_k-1} \|a\|^{i_1} \|b\|^{j_1} \cdots \|a\|^{i_k} \|b\|^{j_k}}{(i_1+j_1+\dots+i_k+j_k) \cdot i_1! j_1! \cdots i_k! j_k!} \\
&\leq \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{(i_1,j_1),\dots,(i_k,j_k) \neq (0,0)} \frac{(M\|a\|)^{i_1+\dots+i_k} \cdot (M\|b\|)^{j_1+\dots+j_k}}{i_1! j_1! \cdots i_k! j_k!} \\
&= \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\sum_{(i,j) \neq (0,0)} \frac{(M\|a\|)^i}{i!} \cdot \frac{(M\|b\|)^j}{j!} \right)^k \\
&= \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(e^{M\|a\|} \cdot e^{M\|b\|} - 1 \right)^k =: (\star).
\end{aligned}$$

Ci serviamo ora del ben noto sviluppo di McLaurin

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} q^k = -\log(1-q), \quad |q| < 1. \tag{4.18}$$

[2] In questo caso diremo che $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n(a,b)$ converge totalmente su $U \times U$.

Poiché $e^{M\|a\|} \cdot e^{M\|b\|} - 1 = e^{M\|a\|+M\|b\|} - 1 < 1$ è equivalente al fatto che $M(\|a\| + \|b\|) < \log 2$, cosa che è assicurata dal fatto che $a, b \in U$ (si veda (4.16)), possiamo ulteriormente valutare $(\star)$ grazie a (4.18), ottenendo

$$(\star) = -\frac{1}{M}\log(2 - e^{M(\|a\|+\|b\|)}) = \frac{1}{M}\log\left(\frac{1}{2 - e^{M(\|a\|+\|b\|)}}\right) < \infty.$$

Ciò fornisce la seguente stima

$$\|a \diamond b\| \leq \frac{1}{M}\log\left(\frac{1}{2 - e^{M(\|a\|+\|b\|)}}\right), \tag{4.19}$$

dove M soddisfa (4.14).

Siamo infine in grado di provare (4.17), ripercorrendo il conto fatto qui sopra sostituendo $\|a\|, \|b\|$ col maggiorante comune $H := \dfrac{\log 2}{3M}$. Ciò porta a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{a,b \in U} \|Z_n(a,b)\| \leq \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(e^{2MH} - 1)^k = \frac{1}{M}\log\left(\frac{1}{2 - e^{2MH}}\right) \approx \frac{0.885}{M}.$$

Siamo qui autorizzati ad utilizzare (4.18) in quanto $q := e^{2MH} - 1 = \sqrt[3]{4} - 1 \approx 0.587$ soddisfa $|q| < 1$. Questo conclude la dimostrazione. □

Osservazione 4.5. Uno sguardo più approfondito alla precedente dimostrazione mostra che gli unici argomenti usati sono i seguenti:

1. $(\mathfrak{g}, \|\cdot\|)$ è uno spazio di Banach,

2. l'applicazione $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni (a,b) \mapsto [a,b]$ è continua.

Quando 1 e 2 sono sosddisfatte, si dice che la terna $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], \|\cdot\|)$ è un'**algebra di Banach-Lie**. Abbiamo dunque provato che *la serie omogenea CBHD converge uniformemente in un intorno dell'origine per ogni algebra di Banach-Lie.*

Proposizione 4.6 (Invertibilità locale di Exp)**.** *Sia* $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, *)$ *un gruppo di Lie. Allora* $\mathrm{Exp} : \mathrm{Lie}(\mathbb{G}) \to \mathbb{G}$ *è un diffeomorfismo locale da un intorno aperto di* $0 \in \mathrm{Lie}(\mathbb{G})$ *su un intorno aperto di* $e \in \mathbb{G}$ *(*e *è l'elemento neutro di* $\mathbb{G}$*).*

Per facilità, forniamo le prove dei teoremi seguenti per una classe particolare di gruppi di Lie: quelli la cui varietà soggiacente è $\mathbb{R}^N$ (con l'usuale struttura differenziale); mediante l'uso opportuno di carte locali, tutte le prove a seguire si possono adattare al caso di gruppi di Lie qualunque. Nel caso semplificato in cui $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, *)$, ha senso parlare della cosiddetta **base Jacobiana di** $\mathrm{Lie}(\mathbb{G})$: essa è la base di $\mathrm{Lie}(\mathbb{G})$ costituita dai campi vettoriali le cui N-ple dei coefficienti sono date dai vettori colonna della matrice Jacobiana $\mathcal{J}_{\tau_x}(e)$, ove $\tau_x(y) = x * y$ (si veda [2, Section 1.2]).

Dimostrazione. Identifichiamo $\mathrm{Lie}(\mathbb{G})$ con $\mathbb{R}^N$ fissando un sistema lineare di coordinate rispetto alla base Jacobiana $J_1, \ldots, J_N$. Grazie al Teorema della Funzione Inversa, dal fatto che la mappa

$$\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N, \qquad \Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_N) := \mathrm{Exp}(\alpha_1 J_1 + \cdots + \alpha_N J_N)$$

ha la matrice Jacobiana invertibile in $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) = 0$, seguirà l'asserto.

A tal fine, consideriamo il seguente calcolo:

$$\begin{aligned}
\Phi(\alpha) &= \exp(\alpha_1 J_1 + \cdots + \alpha_N J_N)(e) \qquad \text{(grazie al Teorema 4.1)} \\
&= e + \alpha_1 J_1 I(e) + \cdots + \alpha_N J_N I(e) + \\
&\quad + \int_0^1 (1-s)(\alpha_1 J_1 + \cdots + \alpha_N J_N)^2 I(\gamma(s, X(\alpha), e))\, ds,
\end{aligned}$$

dove abbiamo posto $X(\alpha) = \alpha_1 J_1 + \cdots + \alpha_N J_N$. Non è difficile[3] provare che il resto integrale è $\mathcal{O}(\|\alpha\|^2)$, quando $\alpha \to 0$. Richiamando il fatto che $J_i I(e)$ è l'i-esimo vettore della base standard di $\mathbb{R}^N$, ne segue che

$$\Phi(\alpha) = e + \alpha + \mathcal{O}(\|\alpha\|^2), \qquad \text{per } \alpha \to 0,$$

il che implica immediatamente che $J_\Phi(0)$ è la matrice identità di ordine N. □

Siamo pronti ad affrontare il risultato principale di questa sezione.

[3] Attenzione al fatto che α compare anche in $\gamma(s, X(\alpha), e)$. Per provare che

$$(\alpha_1 J_1 + \cdots + \alpha_N J_N)^2 I(\gamma(s, X(\alpha), e)) = \mathcal{O}(\|\alpha\|^2), \qquad \text{per } \alpha \to 0,$$

uniformemente per $s \in [0,1]$, si deve prima dimostrare che $\gamma(s, X(\alpha), e)$ giace in un compatto di $\mathbb{R}^N$. Questo discende da argomenti standard di EDO.

Teorema 4.7 (Teorema CBH per i Gruppi di Lie). *Sia* $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, *)$ *un gruppo di Lie analitico. Allora esiste un intorno* $\mathfrak{D} \subseteq \mathrm{Lie}(\mathbb{G})$ *di* 0 *(il campo vettoriale nullo) tale che la serie CBHD omogenea*

$$X \diamond Y = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(X, Y)$$

converge uniformemente[4] *per* $(X, Y) \in \mathfrak{D} \times \mathfrak{D}$.

Inoltre (se $\mathfrak{D}$ *è sufficientemente piccolo), si ha la seguente fondamentale identità*

$$\mathrm{Exp}(X) * \mathrm{Exp}(Y) = \mathrm{Exp}(X \diamond Y), \qquad \textit{per ogni } X, Y \in \mathfrak{D}, \tag{4.20}$$

Chiameremo (4.20) *la* ***Formula di Campbell-Baker-Hausdorff sul gruppo di Lie*** $\mathbb{G}$ *(Formula CBH, per brevità).*

Dimostrazione. Poiché $\mathrm{Lie}(\mathbb{G})$ ha dimensione N, la prima affermazione sulla convergenza uniforme (in realtà totale) della serie segue dal Teorema 4.4. Infatti, è sufficiente fissare una norma arbitraria $\|\cdot\|$ su $\mathrm{Lie}(\mathbb{G})$, fissare una costante $M > 0$ tale che valga (4.14), e infine definire $\mathfrak{D}$ come segue:

$$\mathfrak{D} := \left\{ X \in \mathrm{Lie}(\mathbb{G}) : \|X\| \leq \frac{\log 2}{3M} \right\}. \tag{4.21}$$

Per ipotesi $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, *)$ è un gruppo analitico, ossia la mappa

$$\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \ni (x, y) \mapsto x * y^{-1} \in \mathbb{R}^N$$

è di classe C^ω (nel senso che le sue funzioni componenti sono real-analitiche su $\mathbb{R}^{2N}$). Poiché, come richiamato in precedenza, una base di $\mathrm{Lie}(\mathbb{G})$ è data dai campi vettoriali i cui vettori dei coefficienti sono le colonne di $\mathcal{J}_{\tau_x}(e)$ (la citata base Jacobiana), osserviamo che ogni campo vettoriale $X \in \mathrm{Lie}(\mathbb{G})$ ha coefficienti C^ω. Da risultati generali dalla Teoria delle Equazioni Differenziali Ordinarie, ogni curva integrale di X è anch'essa real-analitica, come funzione a valori in $\mathbb{R}^N$ definita su $\mathbb{R}$. Di più, dai risultati che concernono la dipendenza delle soluzioni di una EDO dall'equazione, deduciamo che $\mathrm{Exp} : \mathrm{Lie}(\mathbb{G}) \to \mathbb{G}$ è di classe C^ω (qui, come al solito, $\mathrm{Lie}(\mathbb{G})$ è identificato con $\mathbb{R}^N$

[4] Qui $\mathrm{Lie}(\mathbb{G})$ è munito di una qualsiasi metrica dovuta all'identificazione di $\mathrm{Lie}(\mathbb{G})$ con l'usuale spazio metrico Euclideo $\mathbb{R}^N$, con la scelta di coordinate lineari su $\mathrm{Lie}(\mathbb{G})$ rispetto ad una base arbitraria.

attraverso un sistema di coordinate lineari rispetto a qualche base fissata). Quindi, per ogni $X, Y \in \mathrm{Lie}(\mathbb{G})$, la mappa

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto F(t) := \mathrm{Exp}(tX) * \mathrm{Exp}(tY)$$

è di classe C^ω. Osserviamo che si ha (si veda ad esempio [2, Section 1.2.4])

$$F(t) = \mathrm{Exp}(tX) * \gamma_Y(t, e) = \gamma_Y(t, \mathrm{Exp}(tX)) = \exp(tY)(\exp(tX)(e)).$$

Qui abbiamo riconosciuto che il prodotto $\mathrm{Exp}(tX) * \mathrm{Exp}(tY)$ *è dato dalla composizione di flussi: questa è la parte cruciale del teorema che ci permette di ricondurre il Teorema CBH su un gruppo di Lie al Teorema CBH per i campi vettoriali!*

Supponiamo che $X, Y \in \mathfrak{D}$ come in (4.21). Notiamo che (grazie all'omogeneità di $\|\cdot\|$) $tX, tY \in \mathfrak{D}$ per ogni $t \in [-1, 1]$, quindi $(tX) \diamond (tY)$ è ben definito. Dall'omogeneità delle funzioni polinomiali Z_n, si ha

$$g(t) := (tX) \diamond (tY) = \sum_{h=1}^{\infty} Z_h(tX, tY) = \sum_{h=1}^{\infty} Z_h(X, Y) t^h.$$

Poiché la serie $\sum_{h=1}^{\infty} \|Z_h(X, Y)\|$ converge (come si è visto durante la dimostrazione del Teorema 4.4), ne deduciamo che $g(t)$ è una funzione real-analitica di $t \in [-1, 1]$ a valori in $\mathrm{Lie}(\mathbb{G}) \simeq \mathbb{R}^N$. Abbiamo ora il risultato cruciale: come nella dimostrazione del Teorema 4.3, si mostra che, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\exp(tY)(\exp(tX)(e)) = \exp(g(t))(e) + \mathcal{O}_n(t^{n+1}), \qquad \text{per } t \to 0.$$

Ponendo $G(t) := \mathrm{Exp}(g(t)) = \exp(g(t))(e)$, abbiamo quindi ottenuto

$$F(t) = G(t) + \mathcal{O}_n(t^{n+1}), \qquad \text{per } t \to 0.$$

Ciò implica l'uguaglianza tra $\dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} F(0)$ e $\dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} G(0)$, per ogni $k = 0, 1, \ldots, n$. Per l'arbitrarietà di $n \in N$ otteniamo

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} F(0) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} G(0), \qquad \text{per ogni } k \geq 0.$$

Ora, dal fatto che sia F che G sono funzioni C^ω (notiamo che G è composizione di due funzioni analitiche, Exp e g), l'uguaglianza di tutte le derivate di F e G in 0 implica che F e G coincidono in tutto il loro dominio comune di definizione, che contiene $[-1, 1]$. Quindi $F(1) = G(1)$, che è esattamente (4.20), cioè la dimostrazione è completa. $\square$

Conclusioni

Nel presente elaborato si è affrontato lo studio del Teorema di Campbell-Baker-Hausdorff, enfatizzandone gli aspetti algebrici.

Nonostante gli argomenti si prestino ad una esposizione basata su pochi prerequisiti, i concetti su cui si fonda il Teorema di Campbell-Baker-Hausdorff sono estremamente profondi: abbiamo munito lo spazio delle serie formali $\widehat{\mathfrak{T}}(x, y)$ in due indeterminate x, y di una metrica dalle inaspettate proprietà; abbiamo trovato una formula esplicita ed universale per il prodotto di esponenziali in $\widehat{\mathfrak{T}}(x, y)$; da questa formula si è ricavata infine una famiglia di infinite identità polinomiali, che valgono in ogni algebra associativa unitaria.

Abbiamo infine fornito le seguenti applicazioni:

- abbiamo mostrato che esiste $r > 0$ per cui il prodotto di due matrici nell'insieme $\{e^A : A \in \mathfrak{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \quad \|A\| < r\}$ è ancora una matrice del tipo e^C (ricavando una formula esplicita per C come serie nei commutatori successivi di A e B);

- abbiamo fornito una formula di approssimazione per la composizione di curve integrali di campi vettoriali;

- abbiamo ricavato da quest'ultima l'analogo del Teorema di Campbell-Baker-Hausdorff per i gruppi di Lie analitici.

Bibliografia

[1] A. Bonfiglioli, R. Fulci: *Topics in Noncommutative Algebra. The Theorem of Campbell, Baker, Hausdorff and Dynkin*, Lecture Notes in Mathematics, **2034**, Springer-Verlag: Heidelberg, 2012. ISBN: 978-3-642-22596-3.

[2] A. Bonfiglioli, E. Lanconelli, F. Uguzzoni: *Stratified Lie Groups and Potential Theory for their sub-Laplacians*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag: Berlin, 2007. ISBN: 978-3-540-71896-3.

[3] D. Ž. Djoković: *An elementary proof of the Baker-Campbell-Hausdorff-Dynkin formula*, Math. Z., **143**, n. 3, 209–211 (1975). ISSN: 0025-5874.

[4] Wei, J.: *Note on the global validity of the Baker-Hausdorff and Magnus theorems*, J. Math. Phys., **4**, 1337–1341 (1963). ISSN: 0022-2488; ISSN: 1089-7658.

Ringraziamenti

Ringrazio il Prof. Bonfiglioli, non solo per la sua grande pazienza e disponibilità, ma anche per aver reso la creazione di questa Tesi un'esperienza stimolante sia dal punto di vista culturale che da quello professionale.

Ringrazio i miei genitori, per avermi permesso di continuare gli studi.

Ringrazio infine amici e parenti, per i tanti bei momenti passati insieme.