Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

RISOLUZIONE SPETTRALE PER OPERATORI AUTOAGGIUNTI IN UNO SPAZIO DI HILBERT

Tesi di Laurea in Istituzioni di Analisi Superiore

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Bruno Franchi

Presentata da:
Paola Bianca Martina Capriati

II Sessione
Anno Accademico 2011/2012

Ai miei genitori,

Giancarlo e Ignazia

Introduzione

Lo scopo di questa tesi è quello di presentare una introduzione alla rappresentazione spettrale per un operatore autoaggiunto.

Nel primo capitolo vengono ricordati alcuni concetti fondamentali dell'Analisi funzionale, utili per poter affrontare i capitoli successivi: in primo luogo viene definito il prodotto interno su di uno spazio vettoriale, che permette di introdurre la nozione di spazio di Hilbert, uno spazio completo rispetto alla norma indotta dal prodotto scalare. Sempre grazie a quest'ultimo introduciamo la definizione di ortogonalità tra due elementi dello spazio e conseguentemente anche quella di complemento ortogonale di un sottospazio ortogonale chiuso dello spazio di partenza. A queste ultime nozioni si collega il teorema delle proiezioni, dove vengono appunto trattati gli operatori di proiezione, per poi passare invece ad un'altra nozione, quella di operatore aggiunto, la cui esistenza è garantita dal teorema di Riesz.
In particolare l'attenzione è focalizzata sugli operatori autoaggiunti, cioè operatori che coincidono con il proprio aggiunto. Verrà dimostrato che le proiezioni godono di questa proprietà.

Il secondo capitolo inizia con la definizione di risoluzione dell'identità cioè una famiglia di proiezioni parametrizzata dall'insieme dei reali, che gode di tre proprietà principali: il prodotto di due proiezioni è la proiezione con l'indice minore, la proiezione il cui indice è meno infinito, è la proiezione nulla, mentre quella con indice più infinito coincide con l'identità. Inoltre deve esistere il limite destro.
Poichè la funzione che a due elementi dello spazio associa il prodotto scala-

re del primo proiettato con indice λ con il secondo è a variazione limitata nelle λ, allora è ben definito l'integrale di una funzione continua a valori nel campo complesso rispetto alla risoluzione dell'identità scelta, come il limite delle somme di Riemann quando il massimo tra due indici consecutivi della famiglia di proiezioni tende a zero.
Quando esiste il limite destro, si potrà anche definire l'integrale generalizzato su $\mathbb{R}$.
Ora un importante teorema mostrerà l'equivalenza tra tre condizioni che permettono di definire un operatore autoaggiunto H, dipendente dalla famiglia di proiezioni e dalla funzione considerate, e in particolare fornirà informazioni sul dominio di esistenza dell'integrale.
Nel caso in cui la funzione scelta sia l'identità, l'integrale verrà chiamato risoluzione spettrale dell'operatore autoaggiunto H.

Dopo aver fornito due esempi, si passa al terzo ed ultimo capitolo, dove vengono definite le funzioni $f(H)$ di un operatore autoaggiunto H, dove le funzioni f sono boreliane.
Per concludere un teorema mostra le proprietà che riguardano tali funzioni come la somma, il prodotto per uno scalare e la composizione.

Indice

Introduzione **i**

1 Nozioni sugli spazi di Hilbert **1**

1.0.1 Operatori lineari 3

1.1 Operatori di proiezione 3

1.2 Operatori aggiunti 8

1.2.1 Il duale di uno spazio di Hilbert 8

1.2.2 Operatori autoaggiunti 9

2 La Risoluzione dell'Identità **13**

2.1 Risoluzione spettrale dell'operatore autoaggiunto H 20

2.2 Alcuni esempi 23

3 Funzioni di un operatore autoaggiunto **27**

Bibliografia **33**

Capitolo 1

Nozioni sugli spazi di Hilbert

Definizione 1.1. Sia X uno spazio vettoriale sul campo complesso (o reale). Si chiama ***prodotto interno*** su X una funzione $<,>: X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ con le seguenti proprietà:

1. per ogni $y \in X$ fissato la funzione $x \longmapsto < x, y >$ è lineare, cioè vale:

   $$< \alpha x + \beta x', y >= \alpha < x, y > +\beta < x', y > \quad \forall x, x' \in X, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

2. $< x, y >= \overline{< y, x >}$ dove $\bar{z}$ indica il complesso coniugato di z

3. $< x, x >\geq 0 \quad \forall x \in X$ e in particolare $< x, x >= 0 \Leftrightarrow x = 0$

Osserviamo che dalle proprietà 2. e 3. segue che il prodotto scalare è antilineare nella seconda variabile:

$$< x, \alpha y + \beta y' >= \bar{\alpha} < x, y > +\bar{\beta} < x, y' > .$$

Osserviamo anche, che se il campo scalare é $\mathbb{R}$, il prodotto scalare è una forma bilineare.

Proposizione 1.0.1 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz).
Per ogni $x, y \in X$ *vale*

$$|< x, y >|^2 \leq < x, x >< y, y > .$$

Dimostrazione. Se $y = 0$ la dimostrazione è banale.
Supponiamo quindi $y \neq 0$, ne verrà $< y, y >> 0$.
Poniamo $\alpha = \dfrac{< x, y >}{< y, y >}$. Allora risulta:

$$\begin{aligned} 0 \leq < x - \alpha y, x - \alpha y > &= < x, x > - \alpha < y, x > - \bar{\alpha} < x, y > + |\alpha|^2 < y, y > \\ &= < x, x > - \frac{|< x, y >|^2}{< y, y >} \end{aligned}$$

cioé $|< x, y >|^2 \leq < x, x >< y, y >$ che è esattamente il risultato cercato.
□

Teorema 1.0.2. *La funzione* $\| \ \| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *che ad* x *associa* $\sqrt{< x, x >}$ *definisce una norma su* X*. Questa verrà chiamata* ***norma indotta dal prodotto scalare*** *su* X*.*

Dimostrazione. È immediato che $\|x\| \geq 0$ dalla definizione di prodotto scalare. In particolare $\|x\| = 0 \Leftrightarrow < x, x >= 0 \Leftrightarrow x = 0$.
Verifichiamo ora che $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\| \quad \forall x \in X, \forall \alpha \in \mathbb{C}$.
Infatti

$$\|\alpha x\| = \sqrt{< \alpha x, \alpha x >} = \sqrt{\alpha\bar{\alpha} < x, x >} = \sqrt{|\alpha|^2 < x, x >} = |\alpha|\|x\|.$$

L'ultima proprietà da dimostrare è la disuguaglianza triangolare:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Osserviamo preliminarmente che, introducendo la norma indotta dal prodotto scalare, la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz diventa

$$|< x, y >| \leq \|x\|\|y\|$$

Ora:

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + 2Re < x,y > + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2| < x,y > | + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + \|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

Ora, estraendo la radice quadrata, otteniamo la disuguaglianza. $\square$

Definizione 1.2. Sia X uno spazio vettoriale sul quale è definito un prodotto scalare. Se X è completo rispetto alla norma indotta dal prodotto scalare si dirà che X è uno ***spazio di Hilbert***.

1.0.1 Operatori lineari

Definizione 1.3. Siano X, Y due spazi normati.
Un'applicazione $T : X \longrightarrow X'$ è ***lineare*** se $\forall x, y \in X$ e $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ vale:

- $T(x+y) = T(x) + T(y)$
- $T(\alpha x) = \alpha T(x)$

Osservazione 1. Sia $L(X,Y) = \{T : X \longrightarrow Y, \quad T \quad \text{lineare continua}\}$.
Definiamo $\|T\| = \inf_{\|x\|=1} \|Tx\|$ dove con Tx indichiamo $T(x)$.
Allora con tale norma $L(X,Y)$ risulta essere uno spazio normato.
Inoltre si avrà $L(X,Y)$ completo $\Leftrightarrow Y$ completo.

1.1 Operatori di proiezione

Definizione 1.4. Sia X uno spazio di Hilbert. $x, y \in X$ si dicono ortogonali se $< x, y >= 0$.
Sia M un sottoinsieme di X. Indicheremo con $M^{\perp}$ la totalitá dei vettori in

X ortogonali ad ogni vettore $m \in M$ cioè

$$M^{\perp} = \{x \in X : \quad < x, m >= 0 \quad \forall m \in M\}.$$

Proposizione 1.1.1. *Sia D un sottoinsieme chiuso e convesso di X con X spazio di Hilbert allora esiste $x_0 \in D$ tale che $\|x_0\| = \inf_{x \in D} \|x\| = d(0, D)$*

Dimostrazione. Unicità
Supponiamo esistano $x_0, y_0 \in D$ per cui $\|x_0\| = \|y_0\| = d(0, D) := d$.
Sia $\lambda \in (0, 1)$ allora per la convessità di D avremo che

$$\lambda x_0 + (1 - \lambda) y_0 \in D.$$

Possiamo quindi scrivere:
$d^2 \leq \|\lambda x_0 + (1 - \lambda) y_0\|^2 = \lambda^2 \|x_0\|^2 + (1 - \lambda)^2 \|y_0\|^2 + 2\lambda(1 - \lambda) < x_0, y_0 > \leq$ $\lambda^2 \|x_0\|^2 + (1 - \lambda)^2 \|y_o\|^2 + 2\lambda(1 - \lambda)\|x_0\|\|y_0\| = (\lambda\|x_0\| + (1 - \lambda)\|y_0\|)^2 = d^2$
Conseguentemente al risultato ottenuto, le disuguaglianze sopra saranno tutte uguaglianze e quindi, in particolare, sarà

$$< x_0, y_0 >= \|x_0\|\|y_0\|.$$

Ora:

$$\begin{aligned} 0 = (\|x_0\| - \|y_0\|)^2 &= \|x_0\|^2 - 2\|x_0\|\|y_0\| + \|y_0\|^2 \\ &= \|x_0\|^2 + 2 < x_0, y_0 > + \|y_0\|^2 = \|x_0 - y_0\|^2. \end{aligned}$$

A questo punto basta osservare che per una proprietà della norma risulterà

$$\|x_0 - y_0\|^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = y_0.$$

Esistenza
Poichè D è chiuso esisterà una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D tale che

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = d$$

dove d'ora in poi quando scriviamo lim ci riferiamo al limite forte cioè in norma.
Consideriamo $n, m \in \mathbb{N}$ allora:

$$\left\|\frac{x_n}{2} - \frac{x_m}{2}\right\|^2 = 2\left\|\frac{x_n}{2}\right\|^2 + 2\left\|\frac{x_m}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2$$

$$\|x_n - x_m\|^2 = 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 - 4\left\|\frac{x_n}{2} + \frac{x_m}{2}\right\|^2 \leq \|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 - 4d^2 \longrightarrow 0$$

per $n, m \to +\infty$
Questo dimostra che (x_n) è una successione di Cauchy in uno spazio completo quindi converge ad x_0. Questo $x_0 \in D$ perchè D chiuso per ipotesi, quindi avremo contemporaneamente:
$\|x_n\| \longrightarrow \|x_0\|$ e $\|x_n\| \longrightarrow d$. Per l'unicità del limite sarà $\|x_0\| = d$. $\square$

Teorema 1.1.2 (delle proiezioni)**.** *Sia M un sottospazio vettoriale chiuso di uno spazio di Hilbert X. Allora vale:*

1. *$M^\perp$ è ancora un sottospazio vettoriale chiuso di X ed è detto complemento ortogonale di M*

2. *$X = M \oplus M^\perp$*

3. *esistono due applicazioni lineari continue*

   $$P : X \longrightarrow M, \quad Q : X \longrightarrow M^\perp$$

   con $\|P\| = \|Q\| = 1$ e tali che $P + Q = id_X$.
   P é chiamata ***proiezione*** *su M, Q proiezione su $M^\perp$*

4. *$\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2 \quad \forall x \in X$.*

Dimostrazione. Per prima cosa dimostriamo che $M^\perp$ è uno spazio vettoriale: siano $x, x' \in M^\perp$, allora $\forall y \in M \quad < x, y >=< x', y >= 0$:

$$< x + x', y >=< x, y > + < x', y >= 0$$

così $x + x' \in M^\perp$. Analogamente vale per αx con $\alpha \in \mathbb{C}$, infatti

$$< \alpha x, y >= \alpha < x, y >= 0.$$

Per dimostrare la chiusura di $M^\perp$ si considera una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente ad $x \in X$. Bisogna mostrare che il limite appartiene in particolare a $M^\perp$.
Sia $y \in M$

$$| < x_n, y > - < x, y > | = | < x_n - x, y > | \leq \|x_n - x\|\|y\|.$$

Per ipotesi $\|x_n - x\| \to 0$ perciò per $n \to +\infty \quad < x_n, x > \longrightarrow < x, y >$
e poichè $< x_n, y >= 0$ anche $< x, y >= 0$, cioè $x \in M^\perp$.
Per quanto riguarda il punto 2. dimostriamo preliminarmente che $x + M$ è chiuso e convesso:
sia $x \in X, \quad x + M = \{x + y, \quad y \in M\}$.
Siano $y, y' \in M$. Per provare la convessità bisogna vedere che

$$\forall \lambda \in (0, 1) \quad \lambda(x + y) + (1 - \lambda)(x + y') \in x + M.$$

Ora:

$$\lambda(x+y)+(1-\lambda)(x+y') = \lambda x+(1-\lambda)x+\lambda y+(1-\lambda)y' = x+\lambda y+(1-\lambda)y' \in x+M$$

poichè $\lambda y + (1 - \lambda)y' \in M$ in quanto M convesso.
Risulta quindi $x + M$ convesso.
Per dimostrare la chiusura il procedimento è analogo a quello usato per dimostrare il punto 1. Consideriamo quindi una successione $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M.

Supponiamo che la successione $x + y_n$ sia convergente in X ad un elemento z, vogliamo vedere che $z \in x + M$.
Ora la successione $y_n = x + y_n - x \longrightarrow z - x \in M$ in quanto abbiamo già dimostrato M chiuso. Per concludere basta osservare che possiamo scrivere z come $z - x + x$ che quindi appartiene a $x + M$.
Possiamo quindi applicare ad $x + M$ la Proposizione 1.1.1: esisterà $Qx \in x + M$ che soddisfa

$$\|Qx\| = inf\{\|z\|, z \in x + M\}.$$

Ponendo $Px : x - Qx$ avremo

$$x = Px + Qx$$

con $Px \in M$. Ci resta da vedere che $Qx \in M^{\perp}$ ovvero $< Qx, y >= 0 \quad \forall y \in M$:

$$0 \leq \|Qx\|^2 \leq \|x - (Px + \alpha y)\|^2 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

dalla propretà di Qx di essere punto di minimo. Ma

$$\|x - (Px + \alpha y)\|^2 = \|Qx - \alpha y\|^2 = \|Qx\|^2 + \alpha^2\|y\|^2 - 2\alpha < Qx, y > .$$

Derivando dunque $\|x-(Px+\alpha y)\|^2$ come funzione di α per $\alpha = 0$ si conclude quindi $< Qx, y >= 0$.
Ora per mostare che X è somma diretta di M e $M^{\perp}$ dobbiamo vedere che l'intersezione tra M e $M^{\perp}$ consiste del solo elemento nullo.
Per assurdo supponiamo che esista $x \neq 0, x \in M \cap M^{\perp}$.
Sarà quindi $< x, x >= 0$ ma $< x, x >= \|x\|^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
Che P e Q siano lineari si dimostra facilmente. Occupiamoci quindi di vedere che $\|P\| = \|Q\| = 1$.
Sia $x \in M$, la decomposizione ortogonale di x si riduce soltanto a $x = Px$ perciò $\|x\| = \|Px\|$.

Da qui abbiamo

$$\|P\| = \sup_{\|x\|=1} \|Px\| \leq 1.$$

Per assurdo supponiamo $\|P\| < 1$. Allora esisterà $\delta \in (0,1)$tale che

$$\|x\| = \|Px\| \leq \delta\|x\|$$

e questo è assurdo. Dunque $\|P\| \geq 1$.
Dalle due disuguaglianze risulta infine $\|P\| = 1$. Un discordo analogo vale per $\|Q\|$.
Il punto 4. si vede banalmente in quanto

$$\|x\|^2 = \|Px+Qx\|^2 = \|Qx\|^2+\|Px\|^2+2 < Px, Qx > \quad \text{ma} \quad < Px, Qx >= 0.$$

$\square$

1.2 Operatori aggiunti

1.2.1 Il duale di uno spazio di Hilbert

Definizione 1.5. $L(X, \mathbb{R})$ è uno spazio completo e prende il nome di ***spazio duale*** di X. D'ora in poi lo indicheremo con X^*.

Teorema 1.2.1 (di rappresentazione di Riesz)**.** *Sia X uno spazio di Hilbert e sia $T \in X^*$ allora esiste univocamente determinato $x_T \in X$ tale che*

$$T(x) =< x, x_T > \quad \forall x \in X.$$

Inoltre vale $\|T\|_{X^*} = \|x_T\|_X$.

Dimostrazione. Consideriamo $KerT = \{x \in X : \quad T(x) = 0\}$.
$KerT$ è un sottospazio chiuso di X.
Se $KerT \neq X$ poniamo $M = KerT$. Per il Teorema delle proiezioni

$KerT^{\perp} \neq \{0\}$.
Non è restrittivo considerare $u \in M^{\perp}$ con $\|u\| = 1$. Consideriamo:
$T(T(u)x - T(x)u) = T(u)T(x) - T(x)T(u) = 0$, ciò significa che $T(u)x - T(x)u \in M$.
Ora $< T(u)x - T(x)u, u >= 0$ ma $< T(u)x - T(x)u >=< T(u)x, u > -T(x) < u, u >$ e $< u, u >= \|u\|^2 = 1$.

$$\Rightarrow T(x) = T(u) < x, u >=< x, T(u)u >$$

Per concludere poniamo $x_T = T(u)u$.
L'unicità si prova facilmente: supponiamo per assurdo che esistano $x_T, x'_T \in X$ tali che valga:
$T(x) =< x, x_T >$
$T(x) =< x, x'_T >$.
Allora ne verrebbe $0 =< x, x_T - x'_T > \quad \forall x \in X$ cioè $x_T - x'_T \perp x \quad \forall x \in X$ e questo è impossibile. $\square$

1.2.2 Operatori autoaggiunti

Teorema 1.2.2. *Sia X uno spazio di Hilbert e sia $A : X \longrightarrow X$ un operatore lineare e limitato. L'**aggiunto** di A è l'unico operatore $A^* : X \longrightarrow X$ lineare e limitato tale che:*

$$< Ax, y >=< x, A^*, y > \quad \forall x, y \in X.$$

Vale inoltre: $\|A\| = \|A^*\|$

Dimostrazione. $\forall x \in X$ si definisce il funzionale lineare $L_x : X \longrightarrow \mathbb{R}$

$$L_x(y) =< Ay, x > \quad \forall y \in X$$

Per applicare il teorema di Riesz deve essere L_x limitata e lineare.
$\forall y, y' \in X, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha

$$L_x(\alpha y+\beta y') =< A(\alpha y+\beta y'), x >= \alpha < Ay, x > +\beta < Ay', x >= \alpha L_x(y)+\beta L_x(y').$$

$$\|L_x(y)\| = \| < Ay, x > \| \leq \|Ay\|\|x\| \leq \|A\|\|y\|\|x\|$$

quindi avremo $\|L_x\| \leq \|A\|\|x\|$ e poichè A limitato anche L_x limitato.
Applicando il teorema esisterà $x' \in X$ tale per cui si può scrivere
$L_x(y) =< y, x' >$ e dunque otteniamo:

$$< Ay, x >=< y, x' > .$$

Sia A^* la trasformazione tale che $x' = A^*x$ cioè $< Ay, x >=< y, A^*x >$.
Osserviamo:

$$\|A^*x\| = \sup_{\|y\|=1} | < y, A^*x > | = \sup_{\|y\|=1} | < Ay, x > | \leq \sup_{\|y\|=1} \|Ay\|\|x\| = \|A\|\|x\|.$$

Abbiamo così trovato A^* limitato. Inoltre vale $\|A^*\| \leq \|A\|$. Analogamente risulta

$$\|Ax\| = \sup_{\|y\|=1} | < Ax, y > | = \sup_{\|y\|=1} | < x, A^*y > | \leq \sup_{\|y\|=1} \|x\|\|A^*y\| = \|A^*\|\|x\|.$$

Perciò vale $\|A\| \leq \|A^*\|$ quindi abbiamo trovato infine che $\|A\| = \|A^*\|$. □

Definizione 1.6. Sia X uno spazio di Hilbert. Un operatore $A : X \longrightarrow X$ lineare a limitato è detto ***autoaggiunto*** se $A^* = A$.

Teorema 1.2.3. *Un operatore lineare e limitato P su X spazio di Hilbert è una proiezione* $\Leftrightarrow$

- $P^* = P$ *(P autoaggiunto)*
- $P^2 = P$ *(P idempotente)*

Dimostrazione. Supponiamo che P sia la proiezione su M e Q quella su $M^\perp$. Siano $x, y \in X$:

- $P^2(x) = P(Px) = Px$ poichè $Px \in M$

- Osserviamo preliminarmente che

$$< Px, Qy > = < Qx, Py > = 0.$$

Ora usando il teorema delle proiezioni possiamo dire che:

$$< Px, y > = < Px, Py+Qy > = < Px, Py > = < Px+Qx, Py > = < x, Py > .$$

Viceversa supponiamo valga $P = P^2 = P^*$. Sia $M = \{x \in X : Px = x\}$. Si vede immediatamente che M è un sottospazio vettoriale di X.
Ogni vettore $y \in X$ può essere scritto come

$$y = Py + (y - Py)$$

dove $Py \in M$ poichè $P(Py) = P^2y = Py$.
Per provare che P è una proiezione su M dobbiamo verificare che $y - Py \in M^{\perp}$. Infatti sia $z \in M$:

$$< y - Py, z > = < y - Py, Pz > = < Py - P^2y, z > = < Py - Py, z > = 0$$

dove abbiamo usato le proprietà di P di essere autoaggiunto e idempotente.

$\square$

Capitolo 2

La Risoluzione dell'Identità

Definizione 2.1. Sia X uno spazio di Hilbert e sia T un operatore lineare definito su $D(T) \subseteq X$ a valori in X, che sia densamente definito, ovvero $\overline{D(T)} = X$. Anche nel caso di operatori non limitati indicheremo con T^* l'***operatore aggiunto***, che sarà definito come segue:
sia $y \in X$, $y \in D(T^*)$ se e solo se esiste $y^* \in X$ tale che valga

$$< Tx, y >=< x, y^* > \quad \forall x \in D(T)$$

e definiamo $T^*y = y^*$.

Definizione 2.2. Sia X uno spazio di Hilbert. Un operatore lineare con dominio $D(T) \subseteq X$ a valori in X è detto ***simmetrico*** se $T^* \supseteq T$ o in altre parole T^* è un'estensione di T.

Definizione 2.3. Un operatore lineare T è detto ***autoaggiunto*** se $T^* = T$.

Definizione 2.4. Una famiglia di proiezioni $E(\lambda)$, con $-\infty < \lambda < +\infty$, in uno spazio di Hilbert X è detta ***risoluzione dell'identità*** se soddisfa le condizioni:

$$E(\lambda)E(\mu) = E(\min(\lambda, \mu)) \tag{2.1}$$

$$E(-\infty) = 0, E(+\infty) = Id \tag{2.2}$$

dove $E(-\infty)x := \lim_{\lambda\downarrow-\infty} E(\lambda)x$ e $E(+\infty)x := \lim_{\lambda\uparrow+\infty} E(\lambda)x$.

$$E(\lambda+0) = E(\lambda) \tag{2.3}$$

dove $E(\lambda+0)x := \lim_{\mu\downarrow\lambda} E(\mu)x$. Proveremo piú sotto che tale limite da destra esiste sempre.

Proposizione 2.0.4. *$\forall x, y \in X$, la funzione $\lambda \to < E(\lambda)x, y >$ è una funzione a variazione limitata.*

Prima di procedere con la dimostrazione forniamo alcune osservazioni preliminari:

Osservazione 2. Sia $E(\lambda)$ con $-\infty < \lambda < \infty$ una famiglia di proiezioni. Siano α, β due di tali indici con $\alpha < \beta$. Possiamo definire una nuova proiezione:

$$E(\alpha, \beta] = E(\beta) - E(\alpha)$$

Dimostrazione. Per il Teorema 1.2.3 basterà dimostrare che $E(\alpha, \beta]$ è un operatore autoaggiunto e idempotente.

$$\begin{aligned} < E(\alpha,\beta]x, y > &= < E(\beta)x - E(\alpha)x, y > = < E(\beta)x, y > - < E(\alpha)x, y > \\ &= < x, E(\beta)y > - < x, E(\alpha)y > = < x, E(\beta) - E(\alpha)y > \\ &= < x, E(\alpha,\beta]y > \end{aligned}$$

così abbiamo provato che $E(\alpha, \beta]$ è autoaggiunto.
Ora sfruttando la proprietà (2.1) otteniamo:

$$\begin{aligned} E(\alpha,\beta]^2 &= (E(\beta) - E(\alpha))^2 = E(\beta)^2 - 2E(\beta)E(\alpha) + E(\alpha)^2 \\ &= E(\beta) - 2E(\alpha) + E(\alpha) = E(\beta) - E(\alpha) \end{aligned}$$

e troviamo anche il secondo risultato che ci permette di affermare che si tratta ancora di un operatore di proiezione. $\square$

Osservazione 3. Siano $(\lambda_i)_{i=1\dots n}$ una famiglia di numeri reali con $\lambda_i < \lambda_{i+1}$, per $i \in \mathbb{N}$. Allora risulta che due proiezioni distinte sono tra loro ortogonali cioè

$$E(\lambda_{j-1}, \lambda_j] \cdot E(\lambda_{i-1}, \lambda_i] = 0 \quad (i \neq j). \tag{2.4}$$

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre $i < j$. Sviluppando otteniamo:

$$\begin{aligned} E(\lambda_{j-1},\lambda_j] \cdot E(\lambda_{i-1}, \lambda_i] &= (E(\lambda_j) - E(\lambda_{j-1})(E(\lambda_i) - E(\lambda_{i-1})) \\ &= E(\lambda_j)E(\lambda_i) - E(\lambda_{j-1})E(\lambda_i) - E(\lambda_j)E(\lambda_{i-1}) + E(\lambda_{j-1})E(\lambda_{i-1}) \\ &= E(\lambda_i) - E(\lambda_i) - E(\lambda_{i-1}) - E(\lambda_{i-1}) = 0. \end{aligned}$$

dove l'unica proprietà usata è la (2.1). □

Ora possiamo dimostrare la Proposizione 2.0.4:

Dimostrazione. Siano $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$. Possiamo quindi scrivere grazie alla proprietà (2.1) e alla disuguaglianza di Cauchy-Schwartz:

$$\sum_j | < E(\lambda_{j-1}, \lambda_j]x, y > | = \sum_j | < E(\lambda_{j-1}, \lambda_j]^2 x, y > | \tag{2.5}$$

$$= \sum_j | < E(\lambda_{j-1}, \lambda_j]x, E(\lambda_{j-1}, \lambda_j]y > | \tag{2.6}$$

$$\leq \sum_j \|E(\lambda_{j-1}, \lambda_j]x\| \cdot \|E(\lambda_{j-1}, \lambda_j]y\| \tag{2.7}$$

$$\leq \left(\sum_j \|E(\lambda_{j-1}, \lambda_j]x\|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_j \|E(\lambda_{j-1}, \lambda_j]y\|^2 \right)^{1/2} \tag{2.8}$$

$$= (\|E(\lambda_1, \lambda_n]x\|^2)^{1/2} \cdot (\|E(\lambda_1, \lambda_n]y\|^2)^{1/2} \leq \|x\|\|y\| \tag{2.9}$$

dove tra il passaggi (2.8) e (2.9) abbiamo usato l'ortogonalità.
Infatti siano $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n \geq 1$. Otteniamo:

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &\geq \|E(\lambda_n, \lambda_m]x\|^2 = \|E(\lambda_m)x - E(\lambda_n)x\|^2 \\ &= \|E(\lambda_m)x - E(\lambda_{n+1})x + E(\lambda_{n+1})x - E(\lambda_n)x)\|^2 \\ &= \left\| \sum_{i=n}^{m-1} E(\lambda_{i+1})x - E(\lambda_i)x \right\|^2 = \sum_{i=n}^{m-1} \|E(\lambda_{i+1})x - E(\lambda_i)x\|^2 \\ &= \sum_{i=n}^{m-1} \|E(\lambda_i, \lambda_{i+1}]x\|^2\end{aligned}$$

□

Corollario 2.0.5. *Per ogni λ con $-\infty < \lambda < +\infty$, gli operatori $E(\lambda + 0) := \lim_{\lambda' \downarrow \lambda} E(\lambda')$ e $E(\lambda - 0) := \lim_{\lambda' \uparrow \lambda} E(\lambda')$ esistono.*

Dimostrazione. Sia (λ_n) una successione tale che $\lambda_n \uparrow \lambda$.
Vogliamo dimostrare che $E(\lambda_n)x$ è una successione di Cauchy cioè che

$$\lim_{j,k \to +\infty} \|E(\lambda_j)x - E(\lambda_k)x\|^2 \longrightarrow 0 \quad \text{per} \quad j, k \to +\infty.$$

Dal sistema di disuaglianze scritto sopra otteniamo esattamente

$$\lim_{j,k \to \infty} \|E(\lambda_j, \lambda_k]x\|^2 = 0$$

per il criterio di convergenza di Cauchy per le serie.
Quindi avremo che esiste

$$\lim_{\lambda_n \uparrow \lambda} E(\lambda_n)x := E(\lambda - 0)$$

Un discorso analogo può essere ripetuto nel caso $\lambda_n \downarrow \lambda$. □

Definizione 2.5. Sia $f : (-\infty, +\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua e sia $x \in X$ con X spazio di Hilbert. Per $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$, possiamo definire

$$\int_\alpha^\beta f(\lambda) dE(\lambda)x$$

come il limite delle somme di Riemann:

$$\sum_j f(\lambda'_j) E(\lambda_j, \lambda_{j+1}]x$$

dove $\alpha = \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n = \beta$, $\lambda'_j \in (\lambda_j, \lambda_{j+1})$
quando il $\max_j |\lambda_{j+1} - \lambda_j|$ tende a zero.

Dobbiamo però provare che la definizione sia ben posta cioè che non dipenda dalla scomposizione considerata:

Dimostrazione. Abbiamo che f è uniformemente continua sull'intervallo compatto $[\alpha, \beta]$ cioè
$\forall \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0, \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$ tale che

$$\text{se} \quad |\lambda - \lambda'| \leq \delta \quad \text{allora} \quad |f(\lambda) - f(\lambda')| \leq \epsilon.$$

Consideriamo due scomposizioni dell'intervallo $[\alpha, \beta]$:

$$\alpha = \lambda_1 < \cdots < \lambda_n = \beta, \quad \max_j |\lambda_{j+1} - \lambda_j| \leq \delta$$
$$\alpha = \mu_1 < \cdots < \mu_m = \beta, \quad \max_j |\mu_{j+1} - \mu_j| \leq \delta$$

e sia

$$\alpha = \nu_1 < \cdots < \nu_p = \beta, \quad p \leq m + n,$$

la sovrapposizione di queste due scomposizioni. Allora, se $\mu'_k \in (\mu_k, \mu_{k+1})$, abbiamo

$$\sum_j f(\lambda'_j) E(\lambda_j, \lambda_{j+1}]x - \sum_k f(\mu'_k) E(\mu_k, \mu_{k+1}]x = \sum_s \epsilon_s E(\nu_s, \nu_{s+1}]x,$$

con $|\epsilon_s| \leq 2\epsilon$, e quindi avremo:

$$\left\| \sum_s \epsilon_s E(\nu_s, \nu_{s+1}]x \right\|^2 \leq 4\epsilon^2 \left\| \sum_s E(\nu_s, \nu_{s+1}]x \right\|^2 = 4\epsilon^2 \|E(\alpha, \beta]x\|^2 \leq 4\epsilon^2 \|x\|^2.$$

□

Definizione 2.6. Possiamo definire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)dE(\lambda)x$$

come

$$\lim_{\alpha\downarrow-\infty,\beta\uparrow+\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda)dE(\lambda)x$$

quando esiste il limite destro.

Teorema 2.0.6. *Sia X spazio di Hilbert e sia $x \in X$, allora le tre condizioni seguenti sono equivalenti:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)dE(\lambda)x \quad \textit{esiste}, \tag{2.10}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)x\|^2 < +\infty, \tag{2.11}$$

$$F(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \|x-(Px+\alpha y)\|^2 f(\lambda)d < E(\lambda)y, x > \tag{2.12}$$

definisce un funzionale lineare limitato.

Dimostrazione. Dobbiamo provare le implicazioni seguenti:
(2.10) $\to$ (2.12) $\to$ (2.11) $\to$ (2.10).
(2.10) $\to$ (2.12).
Consideriamo il prodotto scalare di y con le somme di Riemann che approssimano $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)dE(\lambda)x$.
Il funzionale

$$y \longmapsto < y, \sum_j f(\lambda_j')E(\lambda_j, \lambda_{j-1}]x >$$

è lineare. Ora:

$$\begin{aligned} < y, \sum_j f(\lambda_j')E(\lambda_j,\lambda_{j+1}]x > &= \sum_j f(\lambda_j') < y, E(\lambda_j,\lambda_{j+1}]x > \\ &= \sum_j f(\lambda_j') < E(\lambda_j,\lambda_{j+1}]y, x >. \end{aligned}$$

Se dimostriamo che $\sum_j f(\lambda'_j) < E(\lambda_j, \lambda_{j+1}]y, x >$ è limitata, allora anche l'integrale sarà limitato. Ora

$$\begin{aligned}\left\| \sum_j f(\lambda'_j) < E(\lambda_j, \lambda_{j+1}]y, x > \right\| &\leq \sum_j \| f(\lambda'_j) < E(\lambda_j, \lambda_{j+1}]y, x > \| \\ &\leq \sum_j |f(\lambda_j)| \| E(\lambda_{j+1}, \lambda_j]y \| \|x\|.\end{aligned}$$

Per concludere basta applicare ad F il Teorema di Banach-Steinhaus e avremo che F è un funzionale lineare limitato.
(2.12) $\rightarrow$ (2.11).
Applichiamo l'operatore $E(\alpha, \beta]$ alle somme di Riemann che approssimano $y = \int_\alpha^\beta \overline{f(\lambda)} dE(\lambda)x$, ottenendo:

$$\begin{aligned}E(\alpha, \beta)y =& E(\alpha, \beta)\left(\sum_j \overline{f(\lambda'_j)} E(\lambda_j, \lambda_{j+1}]x \right) \\ =& \sum_k E(\lambda_k, \lambda_{k-1}] \left(\sum_j \overline{f(\lambda'_j)} E(\lambda_j, \lambda_{j+1}]x \right) \\ =& \sum_j \sum_k \overline{f(\lambda_j)} E(\lambda_k, \lambda_{k+1}] E(\lambda_j, \lambda_{j+1}]x\end{aligned}$$

ma quest'ultima è diversa da 0 solo quando $j = k$. Quindi sarà:

$$\sum_j \overline{f(\lambda_j)} E(\lambda_j, \lambda_{j+1}]^2 x = \sum_j \overline{f(\lambda_j)} E(\lambda_j, \lambda_{j+1}]x = y$$

cioè risulta

$$y = E(\alpha, \beta]y.$$

Così,

$$
\begin{aligned}
\overline{F(y)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(\lambda)} d < E(\lambda)x, y > = \lim_{\alpha' \downarrow -\infty, \beta' \uparrow +\infty} \int_{\alpha'}^{\beta'} \overline{f(\lambda)} d < E(\lambda)x, y > \\
&= \lim_{\alpha' \downarrow -\infty, \beta' \uparrow +\infty} \int_{\alpha'}^{\beta'} \overline{f(\lambda)} d < E(\lambda)x, E(\alpha, \beta]y > \\
&= \lim_{\alpha' \downarrow -\infty, \beta' \uparrow +\infty} \int_{\alpha'}^{\beta'} \overline{f(\lambda)} d < E(\alpha, \beta]E(\lambda)x, y > \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} \overline{f(\lambda)} d < E(\lambda)x, y > = \|y\|^2.
\end{aligned}
$$

Dunque $\|y\|^2 \leq \|F\| \cdot \|y\|$, cioè, $\|y\| \leq \|F\|$. D'altra parte approssimando $y = \int_{\alpha}^{\beta} \overline{f(\lambda)} dE(\lambda)x$ con le somme di Riemann, otteniamo, sempre per (2.1),

$$
\|y\|^2 = \left\| \int_{\alpha}^{\beta} \overline{f(\lambda)} dE(\lambda)x \right\|^2 = \int_{\alpha}^{\beta} |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)x\|^2,
$$

così che $\int_{\alpha}^{\beta} |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)x\|^2 \leq \|F\|^2$.

Pertanto, per $\alpha \downarrow -\infty, \beta \uparrow +\infty$, vediamo che (2.11) è vera.

(2.11) $\rightarrow$ (2.10).

Consideriamo $\alpha' < \alpha < \beta < \beta'$,

$$
\begin{aligned}
&\left\| \int_{\alpha'}^{\beta'} f(\lambda) dE(\lambda)x - \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda) dE(\lambda)x \right\|^2 \\
&= \int_{\alpha'}^{\alpha} |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)x\|^2 + \int_{\beta}^{\beta'} |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)x\|^2
\end{aligned}
$$

Per $\alpha' \downarrow -\infty, \beta' \uparrow +\infty, \alpha \uparrow 0, \beta \downarrow 0$ otteniamo (2.10). □

2.1 Risoluzione spettrale dell'operatore autoaggiunto H

Teorema 2.1.1. *Sia X uno spazio di Hilbert. Sia $f(\lambda)$ una funzione continua a valori in $\mathbb{R}$. Allora possiamo definire un operatore autoaggiunto H*

$$
< Hx, y >= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d < E(\lambda)x, y > \quad \forall y \in X \tag{2.13}
$$

$$\forall x \in D(H) := D = \left\{ x : \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)x\|^2 < +\infty \right\},$$

e abbiamo $HE(\lambda) \supseteq E(\lambda)H$, *cioè,* $HE(\lambda)$ *è un'estensione di* $E(\lambda)H$.

Dimostrazione. Per ogni $y \in X$ e per ogni $\epsilon > 0$, esistono α e β con $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$ tali che

$$\|y - E(\alpha, \beta]y\| < \epsilon.$$

Inoltre abbiamo che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)E(\alpha, \beta]y\|^2 = \int_{\alpha}^{\beta} |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)y\|^2.$$

Dunque $E(\alpha, \beta]y \in D$ e così $\bar{D} = X$. Vogliamo ora dimostrare che H è simmetrico cioè $< Hx, y >=< x, Hy >$ e questo si vede immediatamente poichè vale:

$$f(\lambda) = \overline{f(\lambda)}, \quad < E(\lambda)x, y >= \overline{< E(\lambda)y, x >}.$$

In questo modo abbiamo quindi che $D(H) \subseteq D(H^*)$. Dimostriamo ora l'altra inclusione.
Sia $y \in D(H^*)$ e $H^*y := y^*$, allora poichè $E(\alpha, \beta]z \in D \quad \forall z \in X$,

$$< z, E(\alpha, \beta]y^* >=< E(\alpha, \beta]z, H^*y >=< HE(\alpha, \beta]z, y >= \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda)d < E(\lambda)z, y >$$

Pertanto, per il teorema di Banach-Steinhaus,

$$\lim_{\alpha\downarrow-\infty, \beta\uparrow+\infty} < z, E(\alpha, \beta]y^* > = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)d < E(\lambda)z, y > = F(z)$$

è un funzionale lineare limitato. Dunque, per il teorema precedente,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)y\|^2 < +\infty, \quad \text{cioè,} \quad y \in D.$$

Pertanto $D = D(H) \supseteq D(H^*)$ quindi H deve essere autoaggiunto cioè risulta $H = H^*$.
In fine, sia $x \in D(H)$. Allora applicando $E(\mu)$ alle somme di Riemann che

approssimano

$$Hx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) dE(\lambda)x,$$

otteniamo per (2.1),

$$\begin{aligned} E(\mu)Hx &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d(E(\mu)E(\lambda)x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d(E(\lambda)E(\mu)x) = HE(\mu)x. \end{aligned}$$

□

Corollario 2.1.2. *Nel caso particolare in cui $f(\lambda) = \lambda$ abbiamo*

$$< Hx, y >= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d < E(\lambda)x, y >, \quad x \in D(H), \quad y \in X. \tag{2.14}$$

Scriveremo

$$H = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE(\lambda),$$

e la chiameremo ***risoluzione spettrale*** *o* ***rappresentazione spettrale*** *dell'operatore autoaggiunto H.*

Corollario 2.1.3. *Abbiamo, per $H = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)dE(\lambda)$,*

$$\|Hx\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)x\|^2 \quad \forall x \in D(H). \tag{2.15}$$

In particolare, se H è un operatore autoaggiunto limitato, allora

$$< H^n x, y >= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)^n d < E(\lambda)x, y > \quad per \quad x, y \in X \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \tag{2.16}$$

Dimostrazione. Dal momento che $E(\lambda)Hx = HE(\lambda)x$ per $x \in D(H)$, abbiamo per la proprietà (2.1)

$$
\begin{aligned}
< Hx, Hx > &= \int f(\lambda) d < E(\lambda)x, Hx > = \int f(\lambda) d < HE(\lambda)x, x > \\
&= \int f(\lambda) d_\lambda \Big\{ \int f(\mu) d_\mu < E(\mu)E(\lambda)x, x > \Big\} \\
&= \int f(\lambda) d_\lambda \{ \int_{-\infty}^{\lambda} f(\mu) d < E(\mu)x, x > \} \\
&= \int f(\lambda)^2 d \|E(\lambda)x\|^2.
\end{aligned}
$$

L'ultima parte del corollario si dimostra in maniera analoga. □

2.2 Alcuni esempi

Esempio 1. Mostriamo che l'operatore di moltiplicazione

$$Hx(t) = tx(t) \quad \text{in} \quad L^2(-\infty, +\infty)$$

ammette la risoluzione spettrale $H = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE(\lambda)$, dove

$$E(\lambda)x(t) = \begin{cases} x(t) & \text{se } t \leq \lambda, \\ 0 & \text{se } t > \lambda. \end{cases} \tag{2.17}$$

Infatti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 d\|E(\lambda)x\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 d_\lambda \int_{-\infty}^{\lambda} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |x(t)|^2 dt = \|Hx\|^2,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d < E(\lambda)x, y > = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d_\lambda \int_{-\infty}^{\lambda} x(t)\overline{y(t)} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot x(t)\overline{y(t)} dt =< Hx, y >$$

Esempio 2 (Risoluzione spettrale dell'operatore impulso H_1)**.**

$$H_1(x) = \frac{1}{i}\frac{d}{dt} x(t) \quad \text{in} \quad L^2(-\infty, +\infty).$$

La trasformata di Fourier U definita da

$$x(t) = U \cdot y(s) = \lim_{n \to +\infty} (2\pi)^{-1/2} \int_{-n}^{+n} e^{ist} y(s) ds$$

è unitaria e vale $U^{-1}x(t) = U^*x(t) = Ux(-t)$.
Dunque, indicando con $E(\lambda)$ la risoluzione dell'identità data da (2.17), otteniamo una risoluzione dell'identità data da $\{E'(\lambda)\}, E'(\lambda) = UE(\lambda)U^{-1}$.
Se $y(s)$ e $sy(s)$ appartengono entrambi a $L^2(-\infty, +\infty) \cap L^1(-\infty, +\infty)$, allora

$$\begin{aligned}\frac{1}{i}\frac{d}{dt}x(t) &= \frac{1}{i}\frac{d}{dt}\left((2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ist}y(s)ds\right)\\ &= (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ist}sy(s)ds = U(sy(s)) = UsU^{-1}x(t),\end{aligned}$$

o, in maniera simbolica,

$$\frac{1}{i}\frac{d}{dt} = UsU^{-1}. \tag{2.18}$$

Dunque, per l'operatore autoaggiunto $H = s\cdot = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE(\lambda)$, abbiamo

$$U^{-1}H_1U \cdot y(s) = s \cdot y(s) = Hy(s)$$

quando $y(s)$ e $sy(s)$ appartengono entrambi a $L^2(-\infty, +\infty) \cap L^1(-\infty, +\infty)$.
Per ogni $y(s) \in D(H) = D(s\cdot)$, sia

$$y_n(s) = \begin{cases} y(s) & \text{se} |s| \leq n, \\ 0 & \text{se} |s| > n. \end{cases}$$

Allora abbiamo che sia $y_n(s)$ che $sy_n(s)$ appartengono a $L^2(-\infty, +\infty) \cap L^1(-\infty, +\infty)$ e, inoltre che, $\lim_{n\to+\infty} y_n = y$, $\lim_{n\to+\infty} Hy_n = Hy$.
Pertanto, poichè gli operatori autoaggiunti $U^{-1}H_1U$ e H sono chiusi, abbiamo

$$(U^{-1}H_1U)y = Hy \quad \forall y \in D(H),$$

in quanto $(U^{-1}H_1U)y_n = Hy_n$.
Quindi avremo che $U^{-1}H_1U$ è un'estensione autoaggiunta dell'operatore autoaggiunto H.
Ora, considerando l'aggiunto, si vede che $H^* = H$ è un'estensione di $(U^{-1}H_1U)^* =$

$U^{-1}H_1U$.

Di conseguenza sarà $U^{-1}H_1U = H$ e quindi

$$H_1 = UHU^{-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d(UE(\lambda)U^{-1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE'(\lambda).$$

Capitolo 3

Funzioni di un operatore autoaggiunto

Definizione 3.1. Sia X uno spazio topologico. La più piccola $\sigma-$algebra che contiene tutti gli aperti si chiama *σ − algebra di Borel*. Gli *insiemi di Borel* sono gli insiemi contenuti nella $\sigma-$algebra di Borel.
Una misura si dice di Borel se è definita su una $\sigma-$algebra di Borel.
Una funzione a valori nel campo complesso f è detta *funzione di Borel* se $f^{-1}(S)$ è un insieme di Borel per ogni S aperto.

Sia $H = \int \lambda dE(\lambda)$ la risoluzione spettrale di un operatore autoaggiunto H in uno spazio di Hilbert X.
Per una funzione di Borel a valori complessi $f(\lambda)$, consideriamo l'insieme

$$D(f(H)) = \left\{ x \in X : \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)x\|^2 < +\infty \right\} \tag{3.1}$$

dove l'integrale è preso rispetto alla misura di Borel m determinata da $m((\lambda_1, \lambda_2]) = \|E(\lambda_2)x\|^2 - \|E(\lambda_1)x\|^2$. Come nel caso di funzioni continue $f(\lambda)$ trattate nel capitolo precedente, vediamo che l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d < E(\lambda)x, y > \quad x \in D(f(H)),\ y \in X, \tag{3.2}$$

esiste ed è finito rispetto alla misura di Borel $m((\lambda_1, \lambda_2]) =< E(\lambda_2)x, y >$ $- < E(\lambda_1)x, y >$.
Ulteriormente vediamo che (3.2) fornisce il complesso coniugato di un funzionale lineare e limitato nelle y. Dunque grazie al Teorema di Rappresentazione di Riesz possiamo scrivere (3.2) come $< f(H)x, y >$.
In questo modo possiamo definire funzioni di H:

$$f(H) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) dE(\lambda) \tag{3.3}$$

grazie alla (3.1) e alla (3.2).

Teorema 3.0.1. *Per una funzione $f(H)$ di un operatore autoaggiunto $H = \int \lambda dE(\lambda)$ in uno spazio di Hilbert X, abbiamo che $f(H)$ commuta con ogni operatore lineare limitato che commuti con H.*
In particolare, poichè $E(\lambda)$ commuta con H per il teorema 2.1.1, anche $f(H)$ commuta con $E(\lambda)$.

Teorema 3.0.2.

1. *Sia $\bar{f}(\lambda)$ la funzione coniugata complessa di $f(\lambda)$. Allora $D(\bar{f}(H)) = D(f(H))$ e $\forall x, y \in D(f(H)) = D(\bar{f}(H))$, abbiamo*

$$< f(H)x, y >=< x, \bar{f}(H)y > . \tag{3.4}$$

2. *Se $x \in D(f(H))$, $y \in D(g(H))$, allora*

$$< f(H)x, g(H)y >= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\bar{g}(\lambda) d < E(\lambda)x, y >. \tag{3.5}$$

3. *$(\alpha f)(H)x = \alpha f(H)x$ se $x \in D(f(H))$.*
   Se $x \in D(f(H)) \cap D(g(H))$, allora

$$(f + g)(H)x = f(H)x + g(H)x. \tag{3.6}$$

4. *Se $x \in D(f(H))$, allora la condizione $f(H)x \in D(g(H))$ è equivalente alla condizione $x \in D(f \cdot g(H))$, dove $f \cdot g(\lambda) = f(\lambda)g(\lambda)$, e abbiamo*

$$g(H)f(H)x = (g \cdot f)(H)x. \tag{3.7}$$

5. *Se $f(\lambda)$ è finita dappertutto , allora $f(H)$ è un operatore normale e*

$$f(H)^* = \bar{f}(H). \tag{3.8}$$

In particolare $f(H)$ è autoaggiunto se $f(\lambda)$ prende valori in $\mathbb{R}$ ed è finita dappertutto.

Dimostrazione. 1. Il fatto che $D(f(H)) = D(\bar{f}(H))$ è chiaro e

$$\begin{aligned} < f(H)x, y > = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d < E(\lambda)x, y > = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d < x, E(\lambda)y > \\ = \overline{< f(H)y, x >} =< x, \bar{f}(H)y > . \end{aligned}$$

2. Sappiamo che $E(\lambda)$ commuta con $g(H)$. Così

$$\begin{aligned} < f(H)x, g(H)y > &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d < E(\lambda)x, g(H)y > \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d < x, E(\lambda)g(H)y > \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d\overline{< g(H)E(\lambda)y, x >} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{g(\mu)} d\overline{< E(\mu)E(\lambda)y, x >} \right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d \left(\int_{-\infty}^{\lambda} \overline{g(\mu)} d\overline{< y, E(\mu)x >} \right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\overline{g(\lambda)} d < E(\lambda)x, y >. \end{aligned}$$

3. è ovvia

4. Consideriamo una x che soddisfi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)x\|^2 < +\infty,$$

allora per la proprietà (2.1), la condizione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)f(H)x\|^2 < +\infty$$

implica, in virtù della commutatività di $E(\lambda)$ con $f(H)$,

$$\begin{aligned}
+\infty > & \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)f(H)x\|^2 \\
= & \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\lambda)|^2 d\|f(H)E(\lambda)x\|^2 \\
= & \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\lambda)|^2 d\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\mu)|^2 d\|E(\mu)E(\lambda)x\|^2\right) \\
= & \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\lambda)|^2 d\left(\int_{-\infty}^{\lambda} |f(\mu)|^2 d\|E(\mu)x\|^2\right) \\
= & \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\lambda)f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)x\|^2.
\end{aligned}$$

Vediamo che, sotto l'ipotesi che $x \in D(f(H))$, le due condizioni $f(H)x \in D(g(H))$ e $x \in D(f \cdot g(H))$ sono equivalenti e abbiamo

$$\begin{aligned}
< g(H)f(H)x, y >= & \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) d < E(\lambda)f(H)x, y > \\
= & \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) d\left(\int_{-\infty}^{\lambda} f(\mu) d < E(\mu)x, y >\right) \\
= & \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)f(\lambda) d < E(\lambda)x, y > =< (g \cdot f)(H)x, y > .
\end{aligned}$$

5. Poniamo $h(\lambda) = |f(\lambda)| + \alpha$, $k(\lambda) = h(\lambda)^{-1}$, $g(\lambda) = f(\lambda)h(\lambda)^{-1}$, dove α è un qualunque intero positivo. Allora $k(\lambda)$ e $g(\lambda)$ sono entrambe funzioni limitate. Dunque $D(k(H)) = D(g(H)) = X$. Così, per la 4.,

$$f(H) = h(H)g(H) = g(H)h(H) \tag{3.9}$$

Abbiamo, per la 1. e poichè $D(k(H)) = X$, che $k(H)^* = k(H)$, cioè $k(H)$ è autoaggiunto.

Per la 4. abbiamo $\forall x \in X \quad x = h(H)k(H)x$ e $x = k(H)h(H) \quad \forall x \in D(h(H))$. Dunque $h(H) = k(H)^{-1}$ e risulta $h(H)$ è autoaggiunto.
Pertanto $D(f(H)) = D(h(H))$ è denso in X e così possiamo definire $f(H)^*$. Ora l'ultima cosa che ci manca da dimostrare è che $f(H)^* = \bar{f}(H)$.
Siano $y, y^* \in X$ tale che $< f(H)x, y >=< x, y^* > \quad \forall x \in D(f(H))$.
Allora, poichè $g(H)^* = \bar{g}(H)$ (che risulta da 1. e da (3.9)),

$$< f(H)x, y >=< g(H)h(H)x, y >=< h(H)x, \bar{g}(H)y > .$$

Ora, dal momento che $x \in D(f(H)) = D(h(H))$ e $h(H)$ è autoaggiunto otteniamo:

$$\bar{g}(H)y \in D(h(H)) \quad e \quad h(H)\bar{g}(H)y = y^*.$$

Pertanto, sempre per (3.9), otteniamo $\bar{f}(H)y = y^*$ così che $f(H)^* = \bar{f}(H)$.
In fine, per 4., vediamo che $f(H)$ è normale cioè vale $f(H)^*f(H) = f(H)f(H)^*$.

$\square$

Bibliografia

[1] K. Yosida. *Functional Analysis*. Springer, New York, 1980.

[2] D. Huet. *Dècomposition Spectrale et Opèrateurs*. Presses Universitaires de France, Vendôme, 1976.