Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea in Matematica

OPERATORI PSEUDO-DIFFERENZIALI

Tesi di Laurea in Istituzioni di Analisi Superiore

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Bruno Franchi

Presentata da:
Giulia Galaffi

II Sessione
Anno Accademico 2011/2012

Alla mia famiglia

Introduzione

Lo scopo di questa tesi è di dare le prime nozioni della teoria degli operatori pseudo-differenziali. In particolar modo ho approfondito tre temi: l'espansione asintotica di un simbolo, il prodotto tra due operatori pseudo-differenziali e l'aggiunto formale di un operatore pseudo-differenziale. Nel primo capitolo ho fatto alcuni richiami alla trasformata di Fourier, necessaria per dare la definizione di operatore pseudo-differenziale. In particolare ho evidenziato due risultati importanti, quali la formula di inversione di Fourier e il teorema di Plancherel.

Al fine di ottenere una classe di operatori generale e facilmente trattabile è necessario porre alcune condizioni di crescita sulle funzioni a cui tali operatori vengono associati. In questo lavoro mi sono limitata allo lo spazio dei simboli S^m. Per questo, nel secondo capitolo, ho dato in primo luogo la definizione di simbolo e poi quella di operatore pseudo- differenziale. Successivamente ho enunciato le principali proprietà di un operatore pseudo-differenziale e definito l'espansione asintotica di un simbolo, dimostrandone l'esistenza. Quest'ultima è una somma infinita di simboli appartenenti a spazi diversi, di ordine via via decrescente. Un numero finito di termini di tale somma fornisce una buona approssimazione del simbolo stesso.

Nel terzo capitolo ho dimostrato che il prodotto tra due operatori pseudo-differenziali è ancora un operatore pseudo-differenziale. Infatti tale operatore è associato a un simbolo appartenente allo spazio il cui ordine è la somma tra gli ordini degli spazi a cui appartengono i simboli associati ai due operatori moltiplicati.

Infine nel quarto ed ultimo capitolo ho definito l'aggiunto formale di un operatore pseudo-differenziale e ho dimostrato che è ancora un operatore pseudo-differenziale.

Indice

Capitolo 1

Richiami sulla trasformata di Fourier

In questo capitolo enunceremo alcuni risultati riguardanti la trasformata di Fourier, che utilizzeremo per definire gli operatori pseudo-differenziali. In particolare un risultato importante nella teoria della trasformata di Fourier, che tornerà utile nel definire gli operatori pseudo-differenziali, è la formula di inversione per le funzioni nello spazio di Schwartz.

Ricordiamo innanzitutto le definizioni di norma L^p, di spazio di funzioni a p-esima potenza sommabile $L^p(\mathbb{R}^n)$ e di convoluzione di due funzioni.

Definizione 1.0.1. *(Norma L^p) Sia X uno spazio di misura con misura μ e sia $1 \leq p < \infty$. Sia inoltre f una funzione misurabile definita su X e a valori reali o complessi. Si definisce norma p-esima o L^p-norma di f il numero:*

$$||f||_p = \left(\int_X |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

Definizione 1.0.2. *(Spazio $L^p(\mathbb{R}^n)$) Sia X uno spazio di misura con misura μ e sia $1 \leq p < \infty$. Sia inoltre f una funzione misurabile definita su X e a valori reali o complessi. Lo spazio delle funzioni tali che*

$$||f(x)||_p < \infty$$

è detto $L^p(\mu)$ e le funzioni appartenenti ad esso si dicono a p-esima potenza sommabile.

Definizione 1.0.3. *Siano $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$*

Allora definiamo:

$$(f * g) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

Tale integrale esiste per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e si definisce convoluzione di f e g. Inoltre si ha che $(f * g) \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Ora è possibile dare la definizione di trasformata di Fourier.

Definizione 1.0.4. *(Trasformata di Fourier) Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Definiamo:*

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx, \qquad \xi \in R^n.$$

La funzione $\hat{f}$ è chiamata Trasformata di Fourier di f e talvolta si denota anche così $\mathfrak{F}f$.

Vediamo ora alcune importanti proprietà della trasformata di Fourier.

Proposizione 1.0.5. *Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora:*

$$(f * g)\hat{}(\xi) = 2\pi^{-n/2} \hat{f}\hat{g}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
(2\pi)^{-n/2}(f * g)\hat{}(\xi) &= (2\pi)^{-n} \int_{R^n} e^{-ix\cdot\xi}(f * g)(x)dx \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{R^n} e^{-ix\cdot\xi} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \right) dx \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{R^n} \int_{R^n} e^{-i(x-y)\cdot\xi} f(x-y) e^{-iy\cdot\xi} g(y)dydx \qquad (1.1) \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{R^n} e^{-iy\cdot\xi} g(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x-y)\cdot\xi} f(x-y)dx \right) dy \\
&= (2\pi)^{-n/2} \left(\int_{R^n} e^{-iy\cdot\xi} g(y) \right) \hat{f}(\xi) = \hat{g}(\xi)\hat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

□

Daremo ora la definizione di spazio di Schwartz, ovvero lo spazio delle funzioni a decrescenza rapida. Tale spazio, indicato con $\mathcal{S}$, ha l'importante proprietà di essere invariante per la trasformata di Fourier. Per poter dare tale definizione è necessario dare la definizione di multi-indice.

Definizione 1.0.6. *(Multi-indice) Sia* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$*, con* $\alpha_i \in \{\mathbb{N} \cup \{0\}\}$ *per ogni* $i = 1, 2, \ldots, n$*. Se per ogni* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *valgono:*

(i) $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$

(ii) $x^\alpha = (x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \ldots, x_n^{\alpha_n})$

(iii) $\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$

allora α *si definisce multi-indice.*

Indichiamo inoltre con D_j *l'operatore definito da:*

$$D_j = -i\partial_j.$$

Quindi per ogni multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$*,* D^α *sarà dato da:* $D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \ldots D_n^{\alpha_n}$*.*

Definizione 1.0.7. *(Spazio di Schwartz) Lo spazio di Schwartz è definito nel seguente modo:*

$$\mathcal{S} = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) | \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty, \forall \alpha, \beta\}$$

Proposizione 1.0.8. *Sia* $\varphi \in S$*. Allora:*

(i) $(D^\alpha \varphi)\hat{}(\xi) = \xi^\alpha \hat{\varphi}(\xi)$ *per ogni multi-indice* α

(ii) $(D^\beta \hat{\varphi})(\xi) = ((-x)^\beta \varphi)\hat{}(\xi)$ *per ogni multi-indice* β

(iii) $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}$

Dimostrazione.

(i) Integrando per parti, abbiamo:

$$\begin{aligned}(D^\alpha\varphi)\hat{}(\xi) &= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}(D^\alpha\varphi)(x)dx \\ &= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} \xi^\alpha e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x)dx \\ &= \xi^\alpha\hat{\varphi}(\xi).\end{aligned} \tag{1.2}$$

(ii) Si ha:

$$\begin{aligned}(D^\beta\hat{\varphi}) &= (2\pi)^{-n/2}D^\beta\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x)dx\right) \\ &= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}(-x)^\beta e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x)dx \\ &= ((-x)^\beta\varphi)\hat{}(\xi).\end{aligned} \tag{1.3}$$

Lo scambio d'ordine tra differenziale e integrale è giustificato dall'appartenenza di $(-x)^\beta\varphi$ ad $\mathcal{S}$.

(iii) Siano α e β due qualsiasi multi-indici. Allora da *(i)* e *(ii)*,

$$\xi^\alpha(D^\beta\hat{\varphi}(\xi) = \left|\xi^\alpha((-x)^\beta\varphi\hat{}(\xi)\right| = \left|\{D^\alpha((-x)^\beta\varphi)\}\hat{}(xi)\right|.$$

Dato che $D^\alpha((-x)^\beta\varphi) \in \mathcal{S}$, allora appartiene anche a $L^1\mathbb{R}^n$, segue che:

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}|\xi^\alpha(D^\beta\hat{\varphi}(\xi)| = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}\left|D^\alpha((-x)^\beta\varphi)\hat{}(\xi)\right|$$

$$\leq (2\pi)^{-n/2}||D^\alpha((-x)^\beta\varphi)||_1 < \infty.$$

□

Proposizione 1.0.9. *(Lemma di Riemann-Lebesgue) Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora:*

(i) *f è continua su $\mathbb{R}^n$*

(ii) $\lim_{|\xi|\to\infty}\hat{f}(\xi) = 0$

(iii) *$f_j \to f$ in $L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \hat{f}_j \to \hat{f}$ uniformemente su $\mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione. Sia $f_j \to f$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora:

$$|\hat{f}_j(\xi) - \hat{f}(\xi)| \leq (2\pi)^{-n/2}||f_j - f||_1.$$

Allora $\hat{f}_j(\xi)$ converge uniformemente a $\hat{f}(\xi)$ su $\mathbb{R}^n$. Questo prova *(iii)*. Sia $\varphi \in \mathcal{S}$, allora per la proposizione 1.0.8 $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}$. Quindi *(i)* e *(ii)* sono soddisfatte per $\varphi \in \mathcal{S}$. Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dato che $\mathcal{S}$ è denso in $L^1(\mathbb{R}^n)$, segue che esiste una successione $\{\varphi_j\}$ di funzioni in $\mathcal{S}$ tali che $\varphi_j \to f$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Da *(iii)* segue che $\hat{\varphi}_j \to \hat{f}$ uniformemente su $\mathbb{R}^n$. Questo prova *(i)* e *(ii)*.

□

Vediamo ora tre proposizioni che ci serviranno in particolare per mostrare il teorema di inversione di Fourier.

Proposizione 1.0.10. *Sia f una funzione misurabile in $\mathbb{R}^n$. Sia $y \in \mathbb{R}^n$ fissato e $a \neq 0$. Allora definiamo le seguenti funzioni:*

(i) $(T_y f)(x) = f(x + y), \qquad x \in \mathbb{R}^n$

(ii) $(M_y f)(x) = e^{ix\cdot\xi} f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n$

(iii) $(D_a f)(x) = f(ax), \qquad x \in \mathbb{R}^n$

Tali funzioni sono in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Inoltre:

(i) $(T_y f)\hat{}(\xi) = (M_y \hat{f})(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}^n$

(ii) $(M_y f)\hat{}(\xi) = (T_{-y} \hat{f}), \qquad \xi \in \mathbb{R}^n$

(iii) $(D_a f)\hat{}(\xi) = |a|^{-n}(D_{\frac{1}{a}} \hat{f})(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}^n$

Proposizione 1.0.11. *Sia $\varphi(x) = e^{\frac{-|x|^2}{2}}$. Allora $\hat{\varphi}(\xi) = e^{\frac{-|\xi|^2}{2}}$.*

Proposizione 1.0.12. *Siano f e g funzioni in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \hat{g}(x)$$

Teorema 1.0.13. *(Formula di Inversione di Fourier) Definiamo:*

$$\check{g}(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} g(\xi) d\xi, \qquad g \in \mathcal{S}.$$

La funzione $\check{g}$ *è usualmente chiamata inversa della trasformata di Fourier di* g*. Allora per ogni* $f \in \mathcal{S}$ *si ha:* $\quad \check{(\hat{f})} = f$.

Dimostrazione. Abbiamo:

$$(\check{\hat{f}}(x)) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

Sia $\epsilon > 0$. Definiamo:

$$I_\epsilon(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi - \frac{\epsilon^2|\xi|^2}{2}} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

Sia:

$$g(\xi) = e^{ix\cdot\xi - \frac{\epsilon^2|\xi|^2}{2}} = (M_x D_\epsilon \varphi)(\xi)$$

dove:

$$\varphi(\xi) = e^{\frac{-|\xi|^2}{2}}.$$

Allora per le proposizioni 1.0.10 e 1.0.11:

$$\hat{g}(\eta) = (T_{-x} \epsilon^{-n} D_{\frac{1}{\epsilon}} \hat{\varphi})(\eta)$$

$$= \epsilon^{-n} e^{\frac{-|\eta - x|^2}{2\epsilon^2}}.$$

Quindi per la proposizione 1.0.12 e per le considerazioni precedenti

$$\begin{aligned} I_\epsilon(x) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(\eta) f(\eta) d\eta \\ &= \epsilon^{-n} (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-|\eta - x|}{2\epsilon^2}} f(\eta) d\eta \\ &= (2\pi)^{-n/2} (f * \varphi_\epsilon)(x) \end{aligned} \tag{1.4}$$

dove $\varphi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\varphi(\frac{x}{\epsilon})$. Dato che $f \in \mathcal{S}$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$. Allora dalle considerazioni precedenti

$$I_\epsilon \to (2\pi)^{-n/2}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-|x|^2}{2}}\right) f = f$$

in $L^p(\mathbb{R}^n)$ quando $\epsilon \to 0$. Quindi esiste una sequenza $\{\epsilon_n\}$ di numeri positivi tali che $I_{\epsilon_n}(x) \to f(x)$ per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$ quando $\epsilon \to 0$. Dalla definizione di I_ϵ e dal teorema della convergenza dominata di Lebesgue segue che:

$$I_\epsilon(x) \to (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} d\xi$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ quando $\epsilon \to 0$. Pertanto:

$$(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \hat{f}(\xi) d\xi = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

□

Osserviamo che se definiamo $\tilde{f}(x) = f(-x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, allora si ha che $\hat{\hat{f}} = \tilde{f}$, $f \in \mathcal{S}$.

Corollario 1.0.14. *la trasformata di Fourier $\mathfrak{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ è biettiva.*

Dimostrazione. E' sufficiente che proviamo la suriettività. Consideriamo una funzione $g \in S$. Dobbiamo provare che esiste $f \in \mathcal{S}$ tale che $\hat{f} = g$. Definiamo $f = \widehat{g(-x)}$. Per la considerazione appena fatta si ha:

$$\hat{f}(\xi) = \hat{\hat{g}}(-\xi) = g(\xi) \qquad \xi \in \mathbb{R}^n$$

□

Enunciamo ora una proposizione che servirà per dimostrare il teorema di Plancherel.

Proposizione 1.0.15. *Siano f e g funzioni in $\mathcal{S}$. Allora la convoluzione $f * g$ è ancora in $\mathcal{S}$.*

Teorema 1.0.16. *(Teorema di Plancherel) La trasformata di Fourier $\mathfrak{F}$: $L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Utilizzando la densità di $\mathcal{S}$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ e la formula di inversione di Fourier è sufficiente mostrare che

$$||\varphi||_2 = ||\varphi||_2, \qquad \varphi \in \mathcal{S}$$

Sia ψ la funzione così definita:

$$\psi(x) = \overline{\varphi(-x)} \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

Allora $\psi \in \mathcal{S}$ e

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}(\xi) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}\overline{\varphi(-x)}dx \\
&= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\overline{\varphi(x)}dx \\
&= \overline{\hat{\varphi}(\xi)}.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Allora:

$$||\varphi||_2^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\overline{\varphi(x)} = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\psi(-x)dx = (\varphi * \psi)(0).$$

Per la proposizione precedente $\varphi * \psi \in \mathcal{S}$. Allora per la proposizione 1.0.5 e per la formula di inversione di Fourier,

$$\begin{aligned}
(\varphi * \psi)(0) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi * \psi)\check{\ }(\xi)d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi)\hat{\psi}(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi)\overline{\hat{\varphi}(\xi)}d\xi = ||\hat{\varphi}||_2^2
\end{aligned} \tag{1.6}$$

$\square$

Capitolo 2

Simboli, Operatori pseudo-differenziali ed Espansione asintotica

In questo capitolo daremo la definizione di *Operatore Pseudo-differenziale* e ne enunceremo alcune proprietà. Inoltre tratteremo la definizione e l'esistenza dell'espansione asintotica di un simbolo.

2.1 Definizione di operatore pseudo-differenziale e prime proprietà

Introduciamo la definizione di simbolo.

Definizione 2.1.1. *Sia $m \in (-\infty, +\infty)$. Definiamo S^m come l'insieme di funzioni $\sigma(x, \xi)$ in $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tale che per ogni coppia di multi-indici α e β esiste una costante positiva $C_{\alpha,\beta}$ tale che:*

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta \sigma(x, \xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1 + |\xi|)^{m-|\beta|}, \qquad x, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Una funzione $\sigma(x, \xi) \in \cup_{m \in \mathbb{R}} S^m$ si definisce simbolo.

Ora è possibile dare la definizione di operatore pseudodifferenziale.

Definizione 2.1.2. *(Operatore Pseudo-differenziale) Sia σ un simbolo. Allora definiamo l'operatore pseudodifferenziale T_σ associato a σ:*

$$T_\sigma \varphi(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \sigma(x,\xi) \hat{\varphi}(\xi) d\xi, \qquad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Diamo ora alcuni esempi.

Esempio 2.1. Sia $P(x,D) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) D^\alpha$ un operatore differenziale lineare parziale su $\mathbb{R}^n$. Se tutti i coefficienti sono C^∞ e hanno derivate limitate di ogni ordine allora il polinomio $P(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \xi^\alpha$ è in S^m e quindi $P(x,D)$ è un operatore pseudo-differenziale.

Dimostrazione. Mostriamo che $P(x,\xi) \in S^m$. Siano δ e γ multi-indici. Allora

$$|D_x^\gamma D_\xi^\delta P(x,\xi)| \le \sum_{|\alpha|\le m} C_{\alpha,\gamma} |\partial_\xi^\delta \xi^\alpha|$$

per ogni $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, dove $C_{\alpha,\gamma} = \sup |(D_x^\gamma a_\alpha)(x)|$. Si ha che:

$$\partial_\xi^\delta \xi^\alpha = \begin{cases} \delta! \binom{\alpha}{\delta} \xi^{(\alpha-\delta)}, & \text{se } \delta \le \alpha \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{2.1}$$

per ogni $x, \xi \in \mathbb{R}^n$. Ne segue:

$$|D_x^\gamma D_\xi^\delta P(x,\xi)| \le \sum_{|\alpha|\le m} C_{\alpha,\gamma} \delta! \binom{\alpha}{\gamma} |\xi|^{|\alpha|-|\delta|} \le C_{\gamma,\delta}(1+|\xi|)^{m-|\delta|}$$

per ogni $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ dove $C_{\alpha,\gamma} = \sum_{|\alpha|\le m} C_{\alpha,\gamma} \delta! \binom{\alpha}{\gamma}$ □

Esempio 2.2. Sia $\sigma(\xi) = (1+|\xi|^2)^{m/2}, \quad -\infty < m < \infty$. Allora $\sigma \in S^m$ e quindi T_σ è un operatore pseudo-differenziale. T_σ spesso si denota come $(I-\Delta)^{m/2}$ dove I è l'operatore identità e Δ è il Laplaciano, i.e., $\Delta = \sum_{j=1}^n \partial^2/\partial x_j^2$

Dimostrazione. Dobbiamo provare che per ogni $m \in (-\infty, \infty)$ e multi-indice β esiste una costante positiva $C_{m,\beta}$ tale che:

$$|(D^\beta \sigma)(\xi)| \le C_{m,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\beta|} \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

Naturalmente questo è vero per $\beta = 0$. Supponiamo che sia vero per ogni $m \in (-\infty, +\infty)$ e per ogni multi-indice β di lunghezza L. Supponiamo che γ sia un multi-indice di lunghezza $L+1$. Allora $D^\gamma = D^\beta D_j$ un certo $j = 1, 2, \ldots,$ e un certo multi-indice β di lunghezza L. Pertanto

$$|(D^\gamma \sigma)(\xi)| = |(\partial^\beta \partial_j \sigma)(\xi)| = |(\partial^\beta \tau)(\xi)| \qquad \forall x, \xi \in \mathbb{R}^n$$

Allora per la formula di Leibnitz:

$$(\partial^\beta \tau)(\xi) = m \sum_{\delta \leq \beta} \binom{\beta}{\delta} (\partial^\delta \xi_j) \partial^{\beta - \delta}((1 + |\xi|^2)^{m/2-1}) \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

Quindi, per ipotesi induttiva esiste una costante positiva $C_{m,\beta}$ tale che:

$$|(\partial^\beta \tau)(\xi)| \leq C_{m,\beta} \sum_{\delta \leq \beta} \binom{\beta}{\delta} (1+|\xi|)^{1-|\delta|}(1+|\xi|)^{m-2-|\beta|+|\delta|} = C'_{m,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\gamma|} \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

dove $C'_{m,\beta} = \sum_{\delta \leq \beta} \binom{\beta}{\delta}$ □

Prima di dimostrare le principali proprietà degli operatori pseudo-differenziali introduciamo la nozione di funzione temperata.

Definizione 2.1.3. *(Funzione temperata) Sia f una funzione misurabile definita su $\mathbb{R}^n$ tale che*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{(1 + |x|)^N} dx < \infty$$

per un intero positivo N. Allora f è una funzione temperata.

Proposizione 2.1.4. *Sia f una funzione definita su $\mathbb{R}^n$.Introduciamo la seguente notazione:*

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x), \qquad \varphi \in \mathcal{S}$$

Tale integrale converge sempre per $\varphi \in \mathcal{S}$.

Dimostrazione. Sia N un intero positivo tale che:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{(1+|x|)^N} dx < \infty$$

Allora per ogni funzione $\varphi \in \mathcal{S}$, l'integrale:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx$$

esiste. Infatti abbiamo:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)||\varphi(x)|dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{(1+|x|)^N}(1+|x|)^N|\varphi(x)|dx$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{(1+|x|)^N}\right) \cdot \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\{(1+|x|)^N|\varphi(x)|\} < \infty$$

□

Proposizione 2.1.5. *Sia $\sigma(x,\xi)$ un simbolo in S^m. Allora σ è una funzione temperata.*

Dimostrazione. Per la definizione di simbolo esiste una costante positiva C tale che:

$$|\sigma(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^m$$

Di conseguenza:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\sigma(\xi)|}{(1+|\xi|)^{m+n+1}} d\xi \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|\xi|)^{n+1}} d\xi < \infty$$

□

Vediamo alcune importanti proprietà degli operatori pseudo-differenziali.

Lemma 2.1.6. *Sia f una funzione continua, temperata e tale che*

$$T_f(\varphi), \qquad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Allora f è identicamente nulla su $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Assumiamo che f sia a valori reali. Supponiamo per assurdo che $f(x_0) \neq 0$ per un qualche x_0 in $\mathbb{R}^n$. Allora esiste un disco $B(x_0, r)$ di centro x_0 e raggio r su cui f è strettamente positiva (o negativa). Scegliamo una funzione diversa da zero $\varphi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che $\varphi_0 \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e $supp(\varphi_0) \subseteq B(x_0, r)$. Si avrà che $\varphi_0 \in \mathcal{S}$ e

$$T_f(\varphi_0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_0(x)dx$$

è strettamente positiva (o negativa). Quindi abbiamo l'assurdo. $\square$

Proposizione 2.1.7. *Siano τ e σ due simboli tali che $T_\tau = T_\sigma$, allora $\tau = \sigma$.*

Dimostrazione. Se $T_\tau = T_\sigma$ si ha che $\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}(\sigma(x,\xi) - \tau(x,\xi))\hat{\varphi}(x)d\xi = 0,\ \varphi \in \mathcal{S}$. Dalla formula di inversione della trasformata di Fourier segue che:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}(\sigma(x,\xi) - \tau(x,\xi))\varphi(x)d\xi = 0 \qquad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Ora, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ fissato, $e^{ix\cdot\xi}(\sigma(x,\xi) - \tau(x,\xi))$ è una funzione continua nella variabile ξ. Dal lemma dimostrato precedentemente segue che:

$$e^{ix\xi}(\sigma(x,\xi) - \tau(x,\xi)) = 0 \qquad x, \xi \in \qquad \mathbb{R}^n,$$

Questo prova che $\sigma = \tau$. $\square$

Proposizione 2.1.8. *Sia σ un simbolo. Allora T_σ mappa lo spazio di Schwartz in se stesso.*

Dimostrazione. Sia $\varphi \in \mathcal{S}$. Allora per ogni coppia di multi-indici α e β dobbiamo provare che:

$$sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^\alpha(D^\beta(T_\sigma\varphi))(x)| < \infty.$$

Usando l'integrazione per parti e la formula di Leibnitz si ha:

$$x^\alpha(D^\beta(T_\sigma\varphi))(x) = x^\alpha(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} D_x^\beta(e^{ix\cdot\xi}\sigma(x,\xi))\hat{\varphi}(\xi)d\xi =$$

$$x^\alpha (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\gamma \le \beta} \binom{\beta}{\gamma} \xi^\gamma e^{ix\cdot\xi} (D_x^{\beta-\gamma}\sigma)(x,\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi =$$

$$(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\gamma \le \beta} \binom{\beta}{\gamma} \xi^\gamma (D_\xi^\alpha e^{ix\cdot\xi}) (D_x^{\beta-\gamma}\sigma)(x,\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi =$$

$$(2\pi)^{-n/2}(-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\gamma \le \beta} \binom{\beta}{\gamma} e^{ix\cdot\xi} D_\xi^\alpha ((D_x^{\beta-\gamma}\sigma)(x,\xi)\xi^\gamma\hat{\varphi}(\xi))d\xi =$$

$$(2\pi)^{-n/2}(-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\gamma \le \beta} \sum_{\delta \le \beta} \binom{\beta}{\gamma}\binom{\alpha}{\delta} e^{ix\cdot\xi} (D_\xi^{\alpha-\delta} D_x^{\beta-\gamma}\sigma)(x,\xi) D_\xi^\delta(\xi^\gamma\hat{\varphi}(\xi))d\xi.$$

Sapendo che $\sigma \in S^m$ possiamo trovare una costante positiva $C_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ tale che:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha (D^\beta(T_\sigma\varphi))(x)| \le$$

$$\le (2\pi)^{-n/2} \sum_{\gamma \le \beta} \sum_{\delta \le \beta} \binom{\beta}{\gamma}\binom{\alpha}{\delta} C_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^{m-|\alpha|+|\gamma|} |D_\xi^\delta(\xi^\gamma\hat{\varphi}(\xi))|d\xi.$$

Ne segue che:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha (D^\beta(T_\sigma\varphi))(x)| < \infty$$

Ora bisogna solo giustificare lo scambio di derivata e integrale, ma dall'ultima considerazione fatta possibile osservare che l'integrale è assolutamente convergente. Quindi la dimostrazione è completa. $\square$

2.2 Espansione asintotica di un simbolo

Definizione 2.2.1. *Sia $\sigma \in S^m$. Supponiamo di poter trovare $\sigma_j \in S^{m_j}$ dove $m = m_0 > m_1 > \ldots > m_j \quad \to -\infty$ quando $j \to \infty$ tale che:*

$$\sigma - \sum_{j=0}^{N-1} \sigma_j \in S^{m_N}$$

per ogni intero positivo N. Allora chiamiamo $\sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j$ espansione asintotica di σ e scriviamo:

$$\sigma \sim \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j.$$

Ora dobbiamo occuparci di dimostrare l'esistenza dell'espansione asintotica. Enuncio una proposizione che servirà a dimostrare un più importante risultato, riguardante proprio l'esistenza dell'espansione asintotica.

Proposizione 2.2.2. *Esiste una funzione $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che:*

(i) $0 \leq \psi(\xi) \leq 1$ *per* $\xi \in \mathbb{R}^n$

(ii) $\psi(\xi) = 0$ *per* $|\xi| \leq 1$

(iii) $\psi(\xi) = 1$ *per* $|\xi| \geq 2$

Dimostrazione. Dobbiamo costruire una funzione $\varphi_0 \in C_0^\infty$ tale che:

(i) $0 \leq \varphi_0(\xi) \leq 1$ per $\xi \in \mathbb{R}^n$

(ii) $\varphi_0(\xi) = 1$ per $|\xi| \leq 1$

(iii) $\varphi_0(\xi) = 0$ per $|\xi| \geq 2$

Allora la funzione $\psi(\xi) = 1 - \varphi_0(\xi)$ soddisferà tutte le condizioni richieste. Sia $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$una funzione non negativa tale che $\varphi(s) = 0$ per $|s| \geq \frac{1}{4}$ e

$$\int_{|s| \leq \frac{1}{4}} \varphi(s) ds = 1$$

Sia $\varphi_0 = f * \varphi$. Allora $\varphi_0 \in C_0^\infty$. Inoltre per la posizione dei supporti di f e φ, osserviamo che $\varphi_0(t) = 0$ per $|t| \geq 2$. Infine per $|t| \leq 1$,

$$\varphi_0(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t-s)\varphi(s)ds = \int_{|s|\leq \frac{1}{4}} f(t-s)\varphi(s)ds.$$

Dato che $|t| \leq 1$ e $|s| \leq \frac{1}{4}$, abbiamo $|s-t| \leq \frac{5}{4}$ e quindi $f(t-s) = 1$. Allora dalle considerazioni precedenti si ha che $\varphi_0(t) = 1$ per $|t| = 1$ e che $0 \leq \varphi(t) \leq 1$.

□

Teorema 2.2.3. *Siano $m_0 > m_1 > \ldots > m_j \quad \to -\infty$ quando $j \to \infty$. Supponiamo $\sigma_j \in S^{m_j}$. Allora esiste un simbolo $\sigma \in S_{m_0}$ tale che $\sigma \sim \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j$. Inoltre se τ è un'altro simbolo con la stessa espansione asintotica, allora $\sigma - \tau \in \cap_{m\in\mathbb{R}} S^m$.*

Dimostrazione. Sia $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che $0 \leq \psi(\xi) \leq 1$ per $\xi \in \mathbb{R}^n, \psi(\xi) = 0$ per $|\xi| \leq 1$ e $\psi(\xi) = 1$ per $|\xi| \geq 2$. Tale funzione esiste per la proposizione appena dimostrata. Sia ϵ_j una sequenza di numeri positivi tale che: $1 > \epsilon_0 > \ldots > \epsilon_j \to -\infty$ quando $j \to \infty$. Definiamo la funzione $\sigma \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$\sigma(x,\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi(\epsilon_j \xi)\sigma(x,\xi), \qquad x, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Osserviamo che per ogni $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, esiste un intorno U di (x_0, ξ_0)e un intero positivo N tale che $\psi(\epsilon_j \xi)\sigma_j(x,\xi) = 0$ per ogni $(x,\xi) \in U$ e $j > N$. Pertanto $\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.Inoltre per ogni $\epsilon \in (0,1]$ e multi-indice $\alpha \neq 0$,

(i) $\psi(\epsilon\xi) = 0$ se $|\xi| \leq \frac{1}{\epsilon}$

(ii) $\psi(\epsilon\xi) = 1$ se $|\xi| \geq \frac{2}{\epsilon}$

(iii) $\partial_\xi^\alpha(\psi(\epsilon\xi)) = \epsilon^{|\alpha|}(\partial^\alpha(\psi)(\epsilon\xi)) = 0$ se $|\xi| \leq \frac{1}{\epsilon}$ o $|\xi| \geq \frac{2}{\epsilon}$

(iv) $\partial_\xi^\alpha(\psi(\epsilon\xi)) \leq C_\alpha \epsilon |\alpha| \forall \xi \in \mathbb{R}^n$, dove $C_\alpha = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |(\partial^\alpha\psi)(\xi)|$.

Se $\frac{1}{\epsilon} \leq |\xi| \leq \frac{2}{\epsilon}$allora $\epsilon \leq \frac{2}{|\xi|} \leq \frac{4}{1+|\xi|}$. Quindi per ogni multi-indice α non nullo, abbiamo:

$$|\partial_\xi^\alpha(\psi(\epsilon\xi))| \leq C_\alpha 4^{|\alpha|}(1+|\xi|)^{-|\alpha|} = C'_\alpha(1+|\xi|)^{-|\alpha|}, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

dove $C'_\alpha = C_\alpha 4^{|\alpha|}$. Precisiamo che questo è vero anche per il multi-indice nullo.

Ora utilizzando la formula di Leibnitz e l'appartenenza di σ_j a S^m possiamo trovare due costanti positive $C_{\alpha,\gamma}$ e $C_{j,\beta,\gamma}$ tali che:

$$\begin{aligned}
&|D_\xi^\alpha D_x^\beta(\psi(\epsilon\xi)\sigma_j(x,\xi))| = \\
&|D_\xi^\alpha(\psi(\epsilon\xi)(D_x^\beta\sigma_j)(x,\xi))| = \\
&|\sum_{\gamma\leq\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}(D_\xi^{\alpha-\gamma}(\psi(\epsilon\xi)))(D_\xi^\gamma D_x^\beta\sigma_j)(x,\xi)| \\
&\leq \sum_{\gamma\leq\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}C_{\alpha,\gamma}(1+|\xi|)^{-|\alpha|+|\gamma|}C_{j,\beta,\gamma}(1+|\xi|)^{m_j-|\gamma|} = \\
&\sum_{\gamma\leq\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}C_{\alpha,\gamma}C_{j,\beta,\gamma}(1+|\xi|)^{m_j-|\alpha|} = \\
&C_{j,\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{-1}(1+|\xi|)^{m_j+1-|\alpha|}
\end{aligned} \tag{2.2}$$

per ogni $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ dove $C_{j,\alpha,\beta} = \sum_{\gamma\leq\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}C_{\alpha,\gamma}C_{j,\beta,\gamma}$. Adesso scegliamo ϵ_j tale che

$$C_{j,\alpha,\beta}\epsilon_j \leq 2^{-j}$$

per ogni coppia di multi-indici α, β tali che $|\alpha+\beta| \leq j$. Dalla definizione di ψ abbiamo

$$\psi(\epsilon_j\xi) = 0$$

quando $1+|\xi| \leq \epsilon_j^{-1}$. Ne segue:

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta(\psi(\epsilon_j\xi)\sigma_j(x,\xi)| \leq 2^{-j}\epsilon_j^{-1}(1+|\xi|)^{-1}(1+|\xi|)^{m_j+1-|\alpha|} \leq 2^{-j}(1+|\xi|)^{m_j+1-|\alpha|}$$

quando $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ e $|\alpha+\beta| \leq j$. Ora per ogni coppia di multi-indici α_0 e β_0 prendiamo j_0 abbastanza grande da soddisfare: $j_0 \geq |\alpha_0+\beta_0|$ e $m_{j_0}+1 \leq m_0$.

Scriviamo:

$$\sigma(x,\xi) = \sum_{j=0}^{j_0-1} \psi(\epsilon_j\xi)\sigma_j(x,\xi) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \psi(\epsilon_j\xi)\sigma_j(x,\xi) = I(x,\xi) + J(x,\xi).$$

$I(x,\xi)$ è una somma finita e quindi $I \in S^{m_0}$ Si ha:

$$\begin{aligned} |(D_\xi^{\alpha_0} D_x^{\beta_0} J)(x,\xi)| &\leq |\sum_{j=j_0}^{\infty} (D_\xi^{\alpha_0} D_x^{\beta_0}(\psi(\epsilon_j\xi)\sigma_j(x,\xi))| \\ &\leq \sum_{j=j_0}^{\infty} 2^{-j}(1+|\xi|)^{m_j+1-|\alpha_0|} \leq \sum_{j=j_0}^{\infty} 2^{-j}(1+|\xi|)^{m_0-|\alpha_0|} = \\ &= 2^{-j_0+1}(1+|\xi|)^{m_0-|\alpha_0|}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Quindi anche $J \in S^{m_0}$. Di conseguenza anche $\sigma \in S^{m_0}$. Dobbiamo verificare che $\sigma - \sum_{j=0}^{N-1} \sigma_j \in S^m$. Perciò scriviamo:

$$\begin{aligned} &\sigma(x,\xi) - \sum_{j=0}^{N-1} \sigma_j(x,\xi) = \\ &\sum_{j=0}^{\infty} \psi(\epsilon_j\xi)\sigma_j(x,\xi) - \sum_{j=0}^{N-1} \sigma_j(x,\xi) = \\ &\sum_{j=0}^{N-1} (\psi(\epsilon_j\xi) - 1)\sigma_j(x,\xi) = + \sum_{j=N}^{\infty} \psi(\epsilon_j\xi)\sigma_j(x,\xi). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Dobbiamo provare che $\sum_{j=N}^{\infty} \psi(\epsilon_j\xi)\sigma_j(x,\xi) \in S^{m_N}$.
Da $\psi(\epsilon_j\xi) - 1 = 0$ per $j \leq N-1$ se $|\xi| \geq \frac{2}{\epsilon_{N-1}}$, segue che

$$\sum_{j=0}^{N-1} (\psi(\epsilon_j\xi) - 1)\sigma_j(x,\xi) \in \cap_{m\in\mathbb{R}} S^m$$

e di conseguenza $\sigma - \sum_{j=0}^{N-1} \sigma_j \in S^m$. Infine se τ è un altro simbolo tale per cui $\tau \sim \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j$, allora

$$\sigma - \tau = [\sigma - \sum_{j=0}^{N-1} \sigma_j] - [\tau - \sum_{j=0}^{N-1} \sigma_j] \in S^{m_N} \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

$m_N \to -\infty$ quando $N \to \infty$, segue che $\sigma - \tau \in \cap_{m\in\mathbb{R}} S^m$. □

Capitolo 3

Prodotto tra due operatori pseudo-differenziali

In questo capitolo si vuole provare che il prodotto o la composizione di due operatori pseudo-differenziali è ancora un operatore pseudo-differenziale. Inoltre vedremo qual è l'espansione asintotica del simbolo del prodotto tra i due operatori.

3.1 La partizione dell'unità

E' necessario enunciare alcuni risultati riguardanti la partizione dell'unità, che utilizzeremo per decomporre un simbolo $\sigma(x,\xi)$ in una famiglia di simboli $\sigma_k(x,\xi)$ a supporto compatto nella variabile ξ. Questo ci sarà utile per lo studio del prodotto tra due operatori pseudo-differenziali. Costruiamo in primo luogo una partizione dell'unità associata a una decomposizione di $\mathbb{R}^n$ in corone diadiche.

Teorema 3.1.1. *Esiste una successione di funzioni $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ in $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ tale che:*

(i) $0 \leq \varphi_k(\xi) \leq 1, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n$

(ii) $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\xi) = 1 \qquad \xi \in \mathbb{R}^n$

(iii) *$\forall\xi \in \mathbb{R}^n$, almeno una e al massimo tre funzioni φ_k sono non nulle.*

(iv) *$supp(\varphi_0) \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 2\}$*

(v) *$supp(\varphi_k) \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n : 2^{k-2} \leq |\xi| \leq 2^{k+1} \quad k = 1, 2, \ldots$*

(vi) *per ogni multi-indice α, esiste una costante $A_\alpha > 0$ tale che:*

$$sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}|(\partial^\alpha\varphi_k)(\xi)| \leq A_\alpha 2^{-k|\alpha|} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Ora, sia $\sigma \in S^m$. Per $K = 0, 1, 2, \ldots$ scriviamo:

$$\sigma_k(x, \xi) = \sigma(x, \xi)\varphi_k(\xi) \qquad \forall x, \xi \in \mathbb{R}^n \tag{3.1}$$

e consideriamo:

$$K_k(x, z) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iz\cdot\xi}\sigma_k(x, \xi)d\xi \tag{3.2}$$

Teorema 3.1.2. *Per ogni intero non negativo N, e multi-indice α e β, esiste una costante A, dipendente da m,n,N,α e β tale che:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |z|^N |(\partial_x^\beta\partial_z^\alpha K_k)(x, z)|dz \leq A2^{(m+|\alpha|-N)k}$$

$\forall k = 0, 1, 2, \ldots$

Infine consideriamo una versione della formula di Taylor con resto integrale, che acquisterà un ruolo importante nel dimostrare che il prodotto di due operatori pseudo-differenziali è ancora un operatore pseudo-differenziale.

Teorema 3.1.3. *Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Allora per ogni intero positivo N*

$$f(\xi + \eta) = \sum_{|\alpha|<N} \frac{(\partial^\alpha f)(\xi)}{\alpha!}\eta^\alpha + N\sum_{\gamma=N}\frac{\eta^\gamma}{\gamma!}\int_0^1 (1-\theta)^{N-1}(\partial^\gamma f)(\xi + \theta_\eta)d\theta$$

$\forall\xi, \eta \in R^n$

3.2 Prodotto tra due operatori pseudo-differenziali

Teorema 3.2.1. *Siano $\sigma \in S^{m_1}$ e $\tau \in S^{m_2}$. Allora il prodotto $T_\sigma T_\tau$ tra due operatori pseudodifferenziali T_σ e T_τ è ancora un operatore pseudo-differenziale T_λ, dove $\lambda \in S^{m_1+m_2}$ e ha la seguente espansione asintotica:*

$$\lambda \sim \sum_{\eta} \frac{(-i)^{|\eta|}}{\eta!}(\partial_\xi^\eta \sigma)(\partial_x^\eta \tau)$$

Questo significa che:

$$\lambda - \sum_{\eta<N} \frac{(-i)^{|\eta|}}{\eta!}(\partial_\xi^\eta \sigma)(\partial_x^\eta \tau) \tag{3.3}$$

è un simbolo in $S^{m_1+m_2-N}$ per ogni intero positivo N.

Dimostrazione. Per qualsiasi funzione $\varphi \in \mathcal{S}$ abbiamo:

$$(T_{\sigma_k}\varphi)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\sigma_k(x,\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

dove $\sigma_k(x,\xi) = \sigma(x,\xi)\varphi_k(\xi)$ e $\{\varphi_k\}$ è la partizione dell'unità. Quindi:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{\infty}(T_{\sigma_k}\varphi)(x) = \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}(\sum_{k=0}^{\infty}\sigma_k(x,\xi))\hat{\varphi}(\xi)d\xi = \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\sigma(x,\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi \qquad x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{3.4}$$

Lo scambio di somma e integrale è giustificato dal teorema di Fubini. Pertanto, scriviamo:

$$T_\sigma\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} T_{\sigma_k}\varphi$$

Questa serie converge assolutamente e uniformemente per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.Ora dobbiamo calcolare $T_\sigma T_\tau$, ma per farlo è necessario calcolare prima $T_{\sigma_k}T_\tau$. Allora, dalla definizione di operatore pseudo-differenziale, dalla trasformata di Fourier e dal teorema di Fubini segue che:

$$\begin{aligned}
&(T_{\sigma_k}T_\tau\varphi)(x)\\
&= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\sigma_k(x,\xi)(T_\tau\varphi)\hat{(}\xi)d\xi\\
&= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\sigma_k(x,\xi)\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\cdot y}(T_\tau\varphi)(y)dy\right)d\xi\\
&= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\xi}\sigma_k(x,\xi)d\xi\right)(T_\tau\varphi)(y)dy\\
&= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} K_k(x,x-y)(T_\tau\varphi)(y)dy
\end{aligned} \tag{3.5}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Pertanto, ancora dalla definizione di operatore pseudo-differenziale e dal teorema di Fubini si ottiene:

$$\begin{aligned}
&(T_{\sigma_k}T_\tau\varphi)(x)\\
&= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} K_k(x,x-y)(\int_{\mathbb{R}^n} e^{iy\cdot\eta}\tau(y,\eta)\hat{\varphi}(\eta)d\eta)dy\\
&= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\eta}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x-y)\cdot\eta}K_k(x,x-y)\tau(y,\eta)dy)\hat{\varphi}(\eta)d\eta\\
&= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\eta}\lambda_k(x,\eta)\hat{\varphi}(\eta)d\eta
\end{aligned} \tag{3.6}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, dove:

$$\lambda_k(x,\eta)(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x-y)\cdot\eta}K_k(x,x-y)\tau(y,\eta)dy.$$

Con un cambiamento di variabile si ha:

$$\lambda_k(x,\eta) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz\cdot\eta}K_k(x,z)\tau(x-z,\eta)dz \qquad \forall x,\eta \in \mathbb{R}^n$$

Per cui si avrà:

$$(T_\sigma T_\tau\varphi)(x) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\eta}\lambda(x,\eta)\hat{\varphi}(\eta)d\eta \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

dove $\lambda(x,\eta) = \sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k(x,\xi)\forall x,\eta \in \mathbb{R}^n$

Rimane da provare che $\lambda(x,\eta)$ è un simbolo in $S^{m_1+m_2}$ e soddisfa:

$$\lambda \sim \sum_\eta \frac{(-i)^{|\eta|}}{\eta!}(\partial_\xi^\eta\sigma)(\partial_x^\eta\tau)$$

Se avessimo cominciato con $(T_\sigma T_\tau\varphi)(x)$ invece di $(T_{\sigma_k}T\tau\varphi)(x)$ avremmo ricavato l'integrale divergente $\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\xi}\sigma(x,\xi)d\xi$ invece di $\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\xi}\sigma_k(x,\xi)d\xi$. E' per questo ch abbiamo utilizzato la partizione dell'unità.

Ora, per $K = 0,1,2,\ldots$, definiamo λ_k nel seguente modo:

$$\lambda_k(x,\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz\cdot\xi}K_k(x,z)\tau(x-z,\xi)dz \qquad \forall x,\xi\in\mathbb{R}^n$$

Utilizziamo la formula di Taylor con resto integrale, precedentemente definita. Si ha:

$$\tau(x-z,\xi) = \sum_{|\mu|<N_1}\frac{(-z)^\mu}{\mu!}(\partial_x^\mu\tau)(x,\xi) + R_{N_1}(x,z,\xi)$$

dove:

$$R_{N_1}(x,z,\xi) = N_1\sum_{|\mu|=N_1}\frac{(-z)^\mu}{\mu!}\int_0^1(1-\theta)^{N_1-1}(\partial_x^\mu\tau)(x-\theta z,\xi)d\theta$$

per ogni $(x,\xi)\in\mathbb{R}^n$. andando a sostituire $\tau(x-z,\xi)$ si ha:

$$\lambda_k(x,\xi) = \sum_{|\mu|<N-1}\frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!}(\partial_\xi^\mu\sigma_k)(x,\xi)(\partial_x^\mu\tau)(x,\xi) + T_{N_1}^{(k)}(x,\xi),$$

dove:

$$T_{N_1}^{(k)}(x,\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}K_k(x,z)R_{N_1}(x,z,\xi)dz$$

per ogni $x,\xi\in\mathbb{R}^n$. Per ogni intero positivo N la funzione λ soddisfa:

$$\begin{aligned}\lambda - \sum_{|\mu|<N}&\frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!}(\partial_\xi^\mu\tau)\\ &= \lambda - \sum_{|\mu|<N_1}\frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!}(\partial_\xi^\mu\sigma)(\partial_x^\mu\tau)\\ &+ \sum_{N\le|\mu|<N_1}\frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!}(\partial_\xi^\mu\sigma)(\partial_x^\mu\tau)\end{aligned} \tag{3.7}$$

dove N_1 è un intero maggiore di N. Si ha:

$$\sum_{N\le|\mu|<N_1}\frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!}(\partial_\xi^\mu\sigma)(\partial_x^\mu\tau)\in S^{m_1+m_2-N}$$

Quindi se possiamo provare che per ogni coppia di multi-indici α e β, esiste una costante $C_{\alpha,\beta} > 0$ tale che:

$$|\{D_x^\alpha D_\xi^\beta [\sum_{N \leq |\mu| < N_1} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!} (\partial_\xi^\mu \sigma)(\partial_x^\mu \tau)]\}(x,\xi)|$$
$$\leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m_1+m_2-N-|\beta|} \qquad x,\xi \in \mathbb{R}^n,$$

Quindi possiamo concludere cheλ è in $S_{m_1+m_2}$ e ha una espansione asintotica data da 3.3. A questo scopo notiamo

$$\lambda - [\sum_{|\mu|<N_1} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!} (\partial_\xi^\mu \sigma)(\partial_x^\mu \tau)] = \sum_{k=0}^{\infty} T_{N_1}^{(k)}.$$

Allora, per ogni coppia di multi-indici α e β, dobbiamo stimare $D_x^\alpha D_\xi^\beta T_{N_1}^{(k)} \quad \forall k = 0,1,2,\ldots$. Abbiamo il seguente risultato:

Lemma 3.2.2. *Per ogni intero non negativo M, esiste una costante C_{α,β,M,N_1} tale che:*

$$|(D_x^\alpha D_\xi^\beta T_{N_1}^{(k)}(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta,M,N_1}(1+|\xi|^2)^{-M}(1+|\xi|)^{m_2} \cdot 2^{(m_1+2M-N_1)k}$$

per ogni $x,\xi \in \mathbb{R}^n$ e $k = 0,1,2,\ldots$.

Assumiamo questo lemma per ora, lo dimostreremo successivamente. Allora per ogni intero positivo N e per ogni coppia di multi-indici α e β, possiamo scegliere un intero positivo M tale che:

$$(1+|\xi|^2)^{-M}(1+|\xi|)^{m_2} \leq (1+|\xi|)^{m_1+m_2-N-|\beta|} \qquad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Fissato M, possiamo scegliere un altro intero positivo N_1 abbastanza grande da soddisfare:

$$m_1 + 2M - N_1 < 0$$

Dalle considerazioni fatte segue:

$$\begin{aligned} &|\{D_x^\alpha D_\xi^\beta (\lambda - \sum_{|\mu|<N_1} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!} (\partial_\xi^\mu \sigma)(\partial_x^\mu \tau)\}(x,\xi)| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} C_{\alpha,\beta,M,N_1}(1+|\xi|)^{m_1+m_2-N-|\beta|} \cdot 2(m_1+2M-N_1)k \\ &= C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m_1+m_2-N-|\beta|} \qquad x,\xi \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{3.8}$$

dove:

$$C_{\alpha,\beta} = C_{\alpha,\beta,M,N_1} \sum_{N_1}^{\infty} 2^{(m_1+2M-N_1)k}$$

Rimane solo da provare il lemma enunciato precedentemente. Per farlo abbiamo bisogno di un altro lemma:

Lemma 3.2.3. *Sia $R_N(x,z,\xi)$ la funzione data da:*

$$R_{N_1}(x,z,\xi) = N_1 \sum_{|\mu|=N_1} \frac{(-z)^\mu}{\mu!} \int_0^1 (1-\theta)^{N_1-1} (\partial_x^\mu \tau)(x-\theta z,\xi) d\theta$$

Allora per ogni coppia di multi-indici α, β e γ esiste una costante $C_{\alpha,\beta,\gamma} > 0$ tale che:

$$|(\partial_x^\gamma \partial_z \alpha \partial_\xi^\beta R_{N_1})(x,z,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta,\gamma} [\sum_{\gamma'<\gamma} |z|^{N_1-|\gamma'|}](1+|\xi|)^{m_2-|\beta|}$$

per ogni $x, z, \xi \in \mathbb{R}^n$.

Ora possiamo provare il lemma 3.2.2.

Dimostrazione. Si ha:

$$(\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta R_{N_1})(x,z,\xi) = N_1 \sum_{|\mu|=N_1} \frac{(-z)^\mu}{\mu!} \int_0^1 (1-\theta)^{N_1-1} (\partial_x^{\alpha+\mu} \partial_\xi^\beta \tau)(x-\theta z,\xi) d\theta$$

per ogni $x, z, \xi \in \mathbb{R}^n$. Quindi per la formula di Leibnitz si ha:

$$\begin{aligned} &(\partial_z^\gamma \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta R_{N_1})(x,z,\xi) \\ &= N_1 \sum_{|\mu|=N_1} \sum_{\gamma' \leq \gamma} \binom{\gamma}{\gamma'} \frac{1}{\mu!} (\partial_z^{\gamma'} (-z)^\mu \int_0^1 (1-\theta)^{N_1-1} \\ &(\partial_x^{\gamma-\gamma'+\alpha+\mu} \partial_\xi^\beta \tau)(x-\theta z,\xi)(-\theta)^{|\gamma-\gamma'|} d\theta \end{aligned} \tag{3.9}$$

Quindi dato che $\tau \in S^{m_2}$ e esiste una costante positiva $C_{\gamma'}$ e $C_{\alpha,\beta,\gamma',\mu}$ tale che:

$$\begin{aligned} &|(\partial_z^\gamma \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta R_{N_1})(x,z,\xi|) \\ &\leq N_1 \sum_{|\mu|=N_1} \sum_{\gamma' \leq \gamma} \binom{\gamma}{\gamma'} C_{\gamma'} |z|^{N_1-|\gamma'|} \int_0^1 C_{\alpha,\beta,\gamma',\mu} (1+|\xi|^{m_2-|\beta|}) d\theta \\ &\leq C_{\alpha,\beta,\gamma} [\sum_{\gamma' \leq \gamma} |z|^{N_1-|\gamma'|}](1+|\xi|)^{m_2-|\beta|} \end{aligned} \tag{3.10}$$

per ogni $x, z, \xi \in \mathbb{R}^n$, dove:

$$C_{\alpha,\beta,\gamma} = N_1 \sum_{|\mu|=N_1} \sup_{\gamma\leq\gamma'} \left\{ \binom{\gamma}{\gamma'} C_{\gamma'} C_{\alpha,\beta,\gamma',\mu} \right\}$$

□

La dimostrazione del teorema ora è completa.

□

Capitolo 4

L'aggiunto formale di un operatore pseudo-differenziale

In questo capitolo ci proponiamo di definire e di mostrare l'esistenza dell'aggiunto formale di un operatore pseudo-differenziale, di verificare che si tratta di un operatore pseudo-differenziale. Inoltre vogliamo ottenere ottenere una espansione asintotica del simbolo dell'aggiunto formale.

Definizione 4.0.4. *Per ogni coppia di funzioni φ, ψ in $\mathcal{S}$ definiamo (φ, ψ) come:*

$$(\varphi, \psi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\overline{\psi(x)}dx$$

Definizione 4.0.5. *Sia σ un simbolo inS^m e T_σ l'operatore pseudo-differenziale associato. L'aggiunto formale dell'operatore T_σ è l'operatore, $T_\sigma^* : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ tale che:*

$$(T_\sigma\varphi, \psi) = (\varphi, T_\sigma^*\psi), \qquad \varphi, \psi \in \mathcal{S}$$

Teorema 4.0.6. *Sia σ un simbolo in S^m. L'aggiunto formale dell'operatore pseudo-differenziale T_σ è ancora un operatore pseudo-differenziale T_τ, dove τ è un simbolo in S^m e*

$$\tau(x, \xi) \sim \sum_{\mu} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!}(\partial_x^\mu \partial_\xi^\mu \overline{\sigma})(x, \xi).$$

Questo significa che

$$\tau(x,\xi) - \sum_{\mu} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!}(\partial_x^\mu \partial_\xi^\mu \overline{\sigma})(x,\xi)$$

è un simbolo in S^{m-N} *per ogni intero positivo* N.

Prima di dimostrare il teorema vediamo come può essere costruito il simbolo τ. Per $k = 0, 1, 2, \ldots$ definiamo σ_k e K_k da 3.1 e 3.2 Allora per la definizione di aggiunto formale,

$$(T_\sigma\varphi, \psi) = (\varphi, T_\sigma^*\psi) \qquad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{S}$$

Dalle proposizioni 1.0.10, 1.0.11 e dalla definizione di operatore pseudo-differenziale,

$$\begin{aligned}
(T_\sigma\varphi, \psi) &= \int_{\mathbb{R}^n} (T_{\sigma_k}\varphi)(x)\overline{\psi(x)}dx = \\
&= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\eta}\sigma_k(x,\eta)\hat{\varphi}(\eta)d\eta \right\} \overline{\psi(x)}dx \qquad (4.1)\\
&= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\sigma}_k(x, y-x)\varphi(y)dy \right\} \overline{\psi(x)}dx
\end{aligned}$$

dove

$$\hat{\sigma_k}(x,y) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\cdot\eta}\sigma_k(x,\eta)d\eta \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Pertanto da 3.2 e dal teorema di Fubini si ha:

$$(T_{\sigma_k}\varphi, \psi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\sigma_k}(x, y-x)\overline{\psi(x)}dx \right\} \varphi(y)dy$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} K_k(x, x-y)\overline{\psi(x)}dx \right\} \varphi(y)dy \qquad \varphi, \psi \in \mathcal{S}.$$

Ne segue:

$$(T_{\sigma_k}^*\psi)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{K_k}(y, y-x)\psi(y)dy \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Quindi, applicando la formula di inversione di Fourier alla funzione ψ, il teorema di Fubini e un cambiamento di variabile, si ha:

$$\begin{aligned}(T^*_{\sigma_k \psi})(x) &= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\overline{K_k}(y,y-x)\left\{\int_{\mathbb{R}^n}e^{iy\cdot\eta}\hat{\psi}(\eta)d\eta\right\}dy\\ &= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\left\{\int_{\mathbb{R}^n}e^{iy\cdot\eta}\overline{K_k}(y,y-x)dy\right\}\hat{\psi}(\eta)d\eta\\ &= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}e^{iy\cdot\eta}\left\{\int_{\mathbb{R}^n}e^{i\eta\cdot(y-x)}\overline{K_k}(y,y-x)dy\right\}\hat{\psi}(\eta)d\eta\\ &= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}e^{iy\cdot\eta}\left\{\int_{\mathbb{R}^n}e^{i\eta\cdot z}\overline{K_k}(x+z,z)dz\right\}\hat{\psi}(\eta)d\eta\end{aligned} \tag{4.2}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Ne segue:

$$T^*_{\sigma_k} = T^*_{\tau_k}$$

dove:

$$\tau_k(x,\eta) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}e^{i\eta\cdot z}\overline{K_k}(x+z,z)dz.$$

Dato che $(T_\sigma\varphi,\psi) = \sum_{k=0}^{\infty}(T_{\sigma_k}\varphi,\psi)$ per ogni $\varphi,\psi \in \mathcal{S}$, τ sarà dato da:

$$\tau(x,\eta) = \sum_{k=0}^{\infty}\tau_k(x,\eta) \qquad \forall x,\eta \in \mathbb{R}^n$$

Quindi rimane da provare che τ è un simbolo di ordine m con una espansione asintotica data nel teorema 4.0.6 e che:

$$(T_{\sigma_k}\varphi,\psi) = (\varphi, T_\tau\psi) \qquad \forall\varphi,\psi \in \mathcal{S}.$$

Dimostrazione. Per $k = 0,1,2,\dots$ definiamo τ_k come in 4. Sia N_1 un intero positivo. Allora dalla formula di Taylor con resto integrale:

$$K_k(x+z,z) = \sum_{|\mu|<N_1}\frac{z^\mu}{\mu!}(\partial_x^\mu K_k)(x,z) + R^{(k)}_{N_1}(x,z),$$

dove

$$\begin{aligned}R^{(k)}_{N_1}(x,z) &= N_1\sum_{|\mu|=N_1}\frac{z^\mu}{\mu!}\int_0^1(1-\theta)^{N_1-1}(\partial_x^\mu K_k)(x+\theta z,z)d\theta\\ &= N_1\sum_{|\mu|=N_1}\frac{z^\mu}{\mu!}\int_0^1(1-\theta)^{N_1-1}(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}e^{iz\cdot\xi}(\partial_x^\mu\sigma_k)(x+\theta z,\xi)d\xi d\theta.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Quindi per la definzione di $\tau_k(x,\eta)$ e per la proposizione 1.0.8

$$\tau_k(x,\eta) = \sum_{|\mu|<N_1} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!}(\partial_x^\mu \partial_\eta^\mu \overline{\sigma}_k)(x,\eta) + T_{N_1}(x,\eta)$$

dove

$$T_{N_1}(x,\eta) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\eta\cdot z}\overline{R_{N_1}^{(k)}}(x,z)dz \qquad \forall x,\mu \in \mathbb{R}^n.$$

Per ogni intero positivo N,

$$\begin{aligned} &\tau - \sum_{|\mu|<N} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!}\partial_x^\mu \partial_\eta^\mu \overline{\sigma} \\ &\tau - \sum_{|\mu|<N_1} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!}\partial_x^\mu \partial_\eta^\mu \overline{\sigma} + \sum_{N\leq|\mu|<N_1} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!}\partial_x^\mu \partial_\eta^\mu \overline{\sigma} \end{aligned} \tag{4.4}$$

dove N_1 è un'intero più grande di N. La somma $\sum_{N\leq|\mu|<N_1} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!}\partial_x^\mu \partial_\eta^\mu \overline{\sigma}$ è in S^{m-N}. Quindi se proviamo che per ogni coppia di multi-indici α,β esiste una costante $C_{\alpha,\beta} > 0$ tale che

$$\left|\left(D_x^\alpha D_\mu^\beta \left\{\tau - \sum_{N\leq|\mu|<N_1} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!}\partial_x^\mu \partial_\eta^\mu \overline{\sigma}\right\}\right)(x,\eta)\right|$$

$$\leq C_{\alpha,\beta}(1+|\eta|)^{m-N-|\beta|} \qquad x,\eta\in\mathbb{R}^n,$$

allora possiamo concludere che $\tau \in S^m$ e ha come espansione asintotica quella definita nell'enunciato. A tal fine osserviamo che

$$\tau - \sum_{|\mu|<N_1} \frac{(-i)^{|\mu|}}{\mu!}\partial_x^\mu \partial_\eta^\mu \overline{\sigma} = \sum_{k=0}^{\infty} T_{N_1}^{(k)}$$

Siano α e β due multi-indici. Allora per come abbiamo definito $T_{N_1}^{(k)}$ e per la formula di integrazione per parti:

$$\begin{aligned} &(D_x^\alpha D_\eta^\beta T_{N_1}^{(k)})(x,\eta) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\eta\cdot z} z^\beta (D_x^\alpha \overline{R_{N_1}^{(k)}})(x,z)dz \\ &= (1+|\eta|^2)^{-K}(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\eta\cdot z}(1-\Delta_z)^K \left\{ z^\beta (D_x^\alpha \overline{R_{N_1}^{(k)}})(x,z)\right\}dz \end{aligned} \tag{4.5}$$

dove K è un intero positivo. Sia $P(D) = (1-\Delta)^k$. Allora per la formula di Leibnitz e l'integrazione per parti

$$
\begin{aligned}
&(1-\Delta_z)^K \left\{ z^\beta (D_x^\alpha \overline{R_{N_1}^{(k)}})(x,z) \right\} \\
&= (1-\Delta_z)^K N_1 \sum_{|\mu|=N_1} \frac{z^{\mu+\beta}}{\mu!} \int_0^1 (1-\theta)^{N_1-1} (2\pi)^{-n/2} \\
&\cdot \int_{\mathbb{R}^n} (-i)^{|\alpha|} e^{-iz\cdot\xi} (\partial_x^{\alpha+\mu} \overline{\sigma_k})(x+\theta z, \xi) d\xi d\theta \\
&= N_1 \sum_{|\mu|=N_1} \sum_{|\delta|\leq 2K} \frac{P^{(\delta)}(D)(z^{\mu+\beta})}{\mu!\delta!} \int_0^1 (1-\theta)^{N_1-1} (2\pi)^{-n/2} \cdot \\
&\cdot \int_{\mathbb{R}^n} (-i)^{|\alpha|} \sum_{\rho\leq\delta} \binom{\delta}{\rho} \theta^{|\theta-\rho|} (D_z^\rho e^{-iz\cdot\xi}) \cdot \\
&\cdot (D_x^{\delta-\rho} \partial_x^{\alpha+\mu} \overline{\sigma}_k)(x+\theta z, \xi).
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

Sia γ un multi-indice. Allora applicando l'integrazione per parti e la formula di Leibnitz:

$$
\begin{aligned}
&(1-\Delta_z)^K \left\{ z^\beta (D_x^\alpha \overline{R_{N_1}^{(k)}})(x,z)) \right\} \\
&= N_1 \sum_{|\mu|=N_1} \sum_{|\delta|\leq 2K} \sum_{\rho\leq\delta} \binom{\delta}{\rho} \frac{P^{(\delta)}(D)(z^{\mu+\beta})}{\mu!\delta!} \\
&\int_0^1 (1-\theta)^{N_1-1} \theta^{|\delta-\rho|} (2\pi)^{-n/2} (**) d\theta
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

dove $z^\gamma(**)$ è uguale a

$$
\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz\xi} (-i)^{|\alpha|} \sum_{\gamma'\leq\gamma} \binom{\gamma}{\gamma'} \left\{ D_\xi^{\gamma'} (\xi^\rho D_x^{\delta-\rho} \partial_x^{\alpha+\mu} \overline{\sigma}) \right\}
$$

$$
(x+\theta z, \xi) \left(D^{\gamma-\gamma'} \varphi_k \right) (\xi) d\xi
$$

Utilizzando l'appartenenza di σ a S^m e il teorema 3.1 possiamo trovare una costante $C > 0$ che dipende da $\gamma', \rho, \delta, \alpha, \mu$ tale che:

$$
|z^\gamma(**)| \leq \int_{W_k} \sum_{\gamma\leq\gamma'} C(1+|\xi|)^{m+|\rho|-|\gamma'|} 2^{-k|\gamma-\gamma'|} d\xi
$$

dove $W_0 = \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 2\}$ e $W_k = \{\xi \in \mathbb{R}^n : 2^{k-2} \leq |\xi| \leq 2^{k+1}\}$, $k = 1, 2, \ldots$. Sia M un intero positivo. Allora esiste una costante $C > 0$, dipendente da M, ρ, α, μ tale che

$$|(**)| \leq C|z|^{-2M} 2^{k(m+|\rho|-2M+n)}.$$

Quindi esiste una costante $C > 0$ dipendente da α, β, k, M, N_1 tale che

$$\left|(1-\Delta)^K \left\{ z^\beta \left(D_x^\alpha \overline{R_{N_1}^{(k)}} \right)(x,z) \right\} \right|$$

$$\leq C|z|^{-2M} \left\{ \sum_{|\delta| \leq 2K} |z|^{|\beta + N_1 - |\delta|} \right\} 2^{k(m+2K-2M+n)}.$$

Scegliamo K abbastanza grande da soddisfare:

$$(1+|\eta|^2)^{-K} \leq (1+|\eta|)^{m-N-|\beta|} \qquad \forall \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Scegliamo $M = M'$ abbastanza grande da soddisfare:

$$m + 2K - 2M' + n < 0.$$

Poi scegliamo N_1 abbastanza grande da soddisfare:

$$\int_{|z| \leq 1} |z|^{-2M'} \left\{ \sum_{|\delta| \leq 2K} |z|^{|\beta + N_1 - |\delta|} \right\} dz < \infty$$

Quindi esiste una costante $C_1 > 0$ dipendente da $\alpha, \beta, K, M', N_1$ tale che:

$$\int_{|z| \leq 1} \left|(1-\Delta)^K \left\{ z^\beta \left(D_x \alpha \overline{R_{N_1}^{(k)}}(x,z) \right) \right\} \right| \leq C_1 2^{k(m+2K-2M'+n)}.$$

poi scegliamo $M = M''$ abbastanza grande da soddisfare:

$$m + 2K - 2M'' + n < 0$$

e:

$$\int_{|z| \geq 1} |z|^{-2M''} \left\{ \sum_{|\delta| \leq 2K} |z|^{|\beta + N_1 - |\delta|} \right\} dz < \infty$$

Quindi esiste una costante $C_2 > 0$ dipendente da $\alpha, \beta, K, M'', N_1$ tale che:

$$\int_{|z|\geq 1} \left| \left(1-\delta\right)^K \left\{ z^\beta \left(D_x^\alpha \overline{R_{N_1}^{(k)}}(x,z) \right) \right\} \right| dz$$

Quindi avremo un'altra costante $C > 0$ dipendente da $\alpha, \beta, K, M', M'', N_1$ tale che:

$$\left| \left(D_x^\alpha D_\eta^\beta T_{N_1} \right)(x,\eta) \right|$$

$$\leq C(1+|\eta|^2)^{-k} \left\{ 2^{k(m+2K-2M'+n)+2^{k(m+2K-2M''+n)}} \right\}.$$

Pertanto la funzione τ è un simbolo in S^m la cui espansione asintotica è quella definita nell'enunciato del teorema. Inoltre vale

$$(T_\sigma \varphi, \psi) = (\varphi, T_\sigma^* \psi)$$

$\square$

Bibliografia

[1] M.W. Wong *An introduction to pseudo-differential operators*. World Scientific, 1991.

[2] L. Hörmander. *Linear partial differential operators*. Springer-Verlag, 1963.

[3] L.C. Evans. *Parital differential equations*, Seconda Edizione. American Mathematical Society, 2010.