Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Triennale in Matematica

APPROSSIMAZIONE DI FUNZIONI INVERSE E VOLATILITA' IMPLICITA

Tesi di Laurea in Finanza Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
ANDREA PASCUCCI

Presentata da:
EVA GALLETTI

II Sessione
Anno Accademico 2011-2012

A chi mi vuole bene davvero

Introduzione

L'argomento trattato nella seguente tesi è l'approssimazione della volatilità implicita, una variabile molto importante nell' ambito finanziario. Partendo dalla formula di Black & Scholes ricaviamo σ (la volatilità) approssimando il suo valore attraverso il polinomio di Taylor. Quindi arriveremo ad ottenere un metodo analitico in alternativa ai diversi metodi numerici di uso frequente(Newton, Mathematica).

Il lavoro si sviluppa principalmente in due parti, una prima in cui vengono introdotti e illustrati il concetto di volatilià implicita e la formula di Black & Scholes; mentre la seconda parte riguarda l'applicazione, cioè viene svolto il procedimento per ricavare e approssimare tale parametro, con relative conclusioni.

Indice

Capitolo 1

Alcuni concetti di probabilità

In questo capitolo andrò ad illustare brevemente le nozioni di probablità che vengono utilizzate all'interno della tesi.

1.1 Distribuzione normale

Un numero aleatorio X ha *distribuzione normale standard* (si indica con la notazione N(0,1)) se la sua funzione di densità è:

$$f(x) = Ke^{-\frac{x^2}{2}}, x \in \mathbb{R}$$

La costante K di normalizzazione si ricava e risulta essere:

$$K = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

La funzione di ripartizione[1] si indica con

$$N(x) := \int_{-\infty}^{x} n(t)\,dx$$

dove si è definito $n(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$

[1]Funzione di ripartizione: dato un numero aleatorio X, la sua funzione di ripartizione è data da:

$$F(x) := P(X \leq x), x \in \mathbb{R}$$

La previsione della distribuzione normale standard è:

$$P(X) = \int_{\mathbb{R}} xn(x) \ = 0$$

poichè la funzione $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ é dispari, mentre la varianza è data da :

$$\sigma^2(X) = \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \ = 1$$

Introduciamo ora la *distribuzione normale*, indicata con la notazione $N(\mu, \sigma^2)$. Sia $X \sim N(0,1)$ e consideriamo $Y = \mu + \sigma X$, con $\sigma > 0$; la funzione di distribuzione di Y è:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\mu + \sigma X \leq y) = P\left(X \leq \frac{y-\mu}{\sigma}\right) = N\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)$$

La densità di Y é allora:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

1.2 Covarianza e varianza

Dati due numeri aleatori X e Y, si definisce *covarianza* di X e Y

$$cov(X,Y) = P((X - P(X))(Y - P(Y)))$$

Sviluppando questa formula si ottiene:

$$cov(X,Y) = P(XY) - P(X)P(Y)$$

La *varianza* é definita come

$$\sigma^2(X) = cov(X,Y)$$

Si ottiene che $\sigma^2 = P(X^2) - P(X)^2$

Capitolo 2

Volatilità e formula di Black & Scholes

2.1 La volatilità implicita

La volatilità è una misura del rischio che l'investimento in attività finanziarie comporta per l'investitore. Più precisamente esprime l'ampiezza delle variazioni subite dal prezzo di un titolo; definisce dunque la minore o maggiore facilità con cui tale prezzo varia al variare del rendimento richiesto. É dunque una componente da tenere in considerazione durante la valutazione del rischio di un investimento in titoli; una elevata volatilità ,infatti, sta ad indicare che il prezzo di quel titolo tende ad ampie oscillazioni nel tempo, in conseguenza di ciò l' investitore potrà registrare elevati guadagni o elevate perdite. La volatilità viene solitamente misurata da indicatori statistici quali la deviazione standard o la varianza, valori elevati della deviazione standard indicano un maggiore grado di variabilità del rendimento medio dell' investimento e quindi una maggiore incertezza circa il suo esito. Con questo termine si possono inoltre indicare tre differenti concetti, in particolare quando ci si riferisce alle opzioni. Avremo dunque:

- volatilità attesa
- volatilità storica
- volatilità implicita

La **volatilità attesa** è un valore incerto, deriva infatti da una stima realizzata nel presente ipotizzando un andamento futuro. Dunque è importante trovare un metodo per stimarla nel periodo a venire (da oggi alla scadenza dell'opzione). La volatilità storica e quella implicita sono due modalità per effettuare tale stima.

La **volatilità storica** consiste nella stima di questa attraverso l'osservazione delle variazioni del prezzo in un periodo antecedente alla data di valutazione del contratto. Infatti l'idea di fondo si basa sull'ipotesi che la voltatilità futura sarà approssimativamente pari a quella manifestata nel passato. Per il calcolo di questa si procede alla determinazione della serie dei rendimenti periodali in un dato lasso temporale e al calcolo della relativa media; vengono poi calcolati gli scostamenti elevati al quadrato di ogni singolo rendimento rispetto alla media. La media di tali scostamenti è la varianza, la cui radice quadrata determina la deviazione standard.

La **volatilità implicita** consiste invece nella determinazione a ritroso di questa a partire dal prezzo di mercato dell'opzione.

Il concetto di volatilità implicita è così importante e diffuso che nei mercati finanziari le opzioni plain vanilla [1] sono comunemente quotate in termini di tale parametro piuttosto che esplicitamente assegnandone il prezzo. In effetti l'utilizzo di questa variabile risulta conveniente per svariati motivi. Anzitutto, poichè i prezzi di call e put sono funzioni crescenti di essa, la quotazione in termini di volatilità implicita permette di avere un'idea immediata della costosità di un' opzione. Analogamente, l'utilizzo di questa rende agevole il confronto fra opzioni sullo stesso titolo ma con diversi strike e scadenze.

[1] Opzioni plain vanilla: è il tipo standard di opzione con semplice scadenza T e strike K.

2.2 La formula di Black & Scholes

Il modello di pricing delle opzioni più famoso e più generale è stato elaborato agli inizi degli anni settanta da Fisher Black e Myron Scholes (1973). In origine questo modello é stato sviluppato per prezzare le opzioni finanziarie di tipo Europeo (che cioè non possono essere liquidate prima della scadenza) e dalla prima versione ha contribuito e influenzato tutti i modelli di pricing successivi. Un importante contributo allo sviluppo definitivo del modello di Black e Scholes va senza dubbio a Merton che sulla base della versione del 1973 ha apportato modifiche e miglioramenti. Nel modello di Black & Scholes, come nel modello binomiale, l'ipotesi di base è quella della possibilità di creare un portafoglio equivalente all' opzione, costituito in parte da unità del sottostante e in parte da obbligazioni prive di rischio. Il modello di Black & Scholes permette di definire e valutare una opzione a partire dalla conoscenza di cinque variabili fondamentali che sono:

- S = valore del sottostante
- K = prezzo dell'opzione detto strike
- T = scadenza dell'opzione
- r = tasso di interesse privo di rischio corrispondente alla vita dell'opzione
- σ = volatilità del sottostante

Di tutti i parametri che determinano il prezzo di B-S, l'unico che non è direttamente osservabile è proprio la volatilità σ. Consideriamo quindi un'opzione CALL europea[2]con scadenza T, strike K e prezzo del sottostante S fissati, dunque il valore finale del sottostante risulta essere:

$$S_T = Se^{[(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma Z_T]} \tag{2.1}$$

[2]Opzione call Europea: è uno strumento derivato, un contratto, che dà il diritto di acquistare il sottostante al tempo T e al prezzo strike K.

ove $Z_T \sim N_{0,T}$ cioè un numero aleatorio con distribuzione normale di parametri 0,T (previsione = 0 e varianza = T). Definiamo quindi il prezzo di B-S come:

$$F(\sigma, S, T, K, r) = e^{-rT} E[(S_T - K)^+] = \int_{\mathbb{R}} (S_T - K)^+ f(x) dx \qquad (2.2)$$

dove $(S_T - K)^+$ rappresenta il payoff[3] dell'opzione CALL, in particolare

$$(S_T - K)^+ = max\{0, S_T - K\}$$

Mentre con $f(x)$ indico la funzione di densità della distribuzione normale

$$f(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2 T})} (e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 T}})$$

Riporto così, l'espressione del prezzo al tempo t di una call Europea con strike K e scadenza T :

$$c_t = g(d_1)$$

dove g è la funzione definita da

$$g(d) = S_t \Phi(d) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d - \sigma\sqrt{T-t}), d \in \mathbb{R} \qquad (2.3)$$

e

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

$$d_1 = \frac{\log(\frac{S_t}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Notiamo che la funzione $F(\sigma, S, T, K, r)$ dipende in realtà solo dalla variabile σ (la volatilità) come incognita.

[3] Payoff: valore finale dell'opzione.

Capitolo 3

Applicazione: ricavare la volatilità

Data la notevole importanza di questo parametro σ viene naturale domandarsi in che modo sia possibile conoscerne il valore, considerando il fatto che è l'unica variabile del modello Black & Scholes che non è direttamente osservabile. Esistono diversi metodi numerici per fare ciò, anche
Mathematica è dotata di una funzione che ricava il valore di σ con un'approssimazione molto precisa. Tuttavia può risultare utile avere un metodo analitico, così da ottenere formule esplicite attraverso cui ricavo il parametro in questione.
In questa seconda parte della tesi andremo quindi, ad illustrare il procedimento sviluppato per ricavare la volatilità implicita attraverso la formula di Black-Scholes.

3.1 Approssimare una funzione inversa

Punto cruciale di questo lavoro è il concetto di approssimazione di una funzione inversa; per fare ciò si è pensato di utilizzare lo sviluppo in serie di Taylor. Consideriamo quindi una funzione $y = f(x)$ e la sua inversa $f^{-1}(y)$; vorremmo scrivere lo sviluppo di Taylor di f^{-1} conoscendo però solo f, quindi il polinomio sarà scritto in termini della funzione diretta. Ora per calcolare i coefficienti dello sviluppo, ci serviamo delle derivate della funzione inversa come da definizione:

$$D(f^{-1}(y)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Scegliendo x_0 come punto iniziale, otteniamo il seguente polinomio di primo ordine:

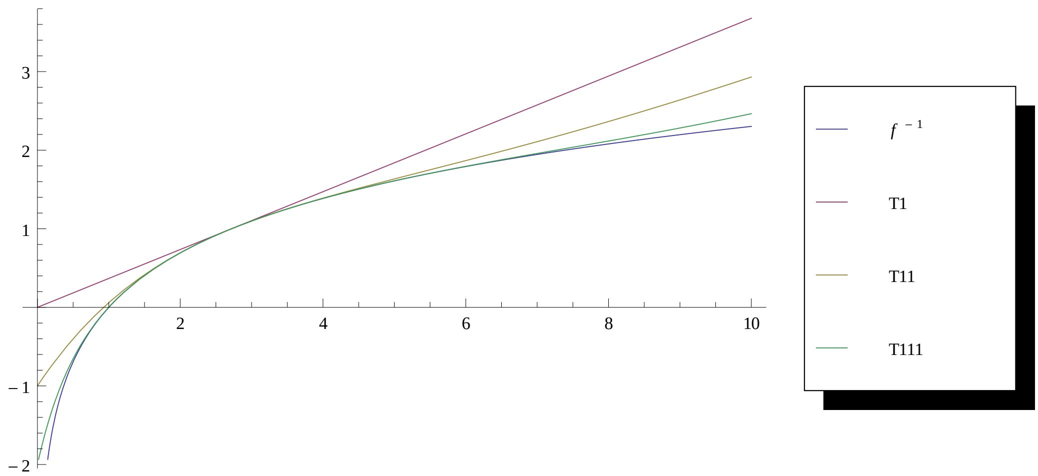
$$T1(y, x_0) := x_0 + \frac{y - f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Ci accorgiamo (attraverso alcuni semplici esempi) come l'approssimazione della funzione dipenda fortemente dal punto iniziale. Per risolvere questo problema abbiamo pensato di utilizzare come x_0 lo stesso polinomio di Taylor; in altre parole iterando il procedimento così da essere meno legati al punto iniziale che si va a scegliere. Riporto di seguito una formula esplicita che mostra l'idea appena enunciata:

$$T11(y, x_0) := T1(y, T1(y, x_0)) = x_0 + \frac{y - f(x_0)}{f'(x_0)} + \frac{y - f(x_0 + \frac{y - f(x_0)}{f'(x_0)})}{f'(x_0 + \frac{y - f(x_0)}{f'(x_0)})}$$

In questo modo possiamo costruire tutte le iterazioni che desideriamo, notando un effettivo miglioramento.

Ad esempio, osserviamo il caso della funzione esponenziale con $x_0 = 1$ dove la funzione T111 è quella che approssima al meglio la f^{-1}.



Per essere più precisi abbiamo calcolato gli errori numericamente, servendoci della seguente formula:

$$\frac{||T_{n,x_0}(y) - f^{-1}(y)||}{||T_{n,x_0}||}$$

Considerando $x_0 = 1$ e un vettore di punti da 0.1 a 10 con passo 0.1, otteniamo:

$$\frac{||T1(y) - f^{-1}(y)||}{||T1||} = 0.32943$$

$$\frac{||T11(y) - f^{-1}(y)||}{||T11||} = 0.164656$$

$$\frac{||T111(y) - f^{-1}(y)||}{||T111||} = 0.0535265$$

Così, attraverso i valori ottenuti, possiamo confermare chiaramente quanto osservato in precedenza: l'approssimazione data dalla funzione T111 è la migliore, infatti il suo errore è il minore.

3.2 Approssimazione della volatilità

Per raggiungere il nostro scopo, utilizziamo il procedimento illustrato precedentemente prendendo come funzione iniziale quella di
Black & Scholes. Innanzitutto consideriamo il prezzo di B-S dell'opzione Call come una funzione di una sola incognita σ e lo scriviamo così:

$$f_{BS}(mr, vt) := \frac{1}{2}\left(mr + mrErf\left(\frac{\frac{vt^2}{2} + \log(mr)}{\sqrt{2}vt}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(-2 + Erfc\left(\frac{\frac{-vt^2}{2} + \log(mr)}{\sqrt{2}vt}\right)\right)\right)$$

$$g_{BS}(vt) := f_{BS}\left(\frac{S}{e^{-rT}K}, vt\right) \tag{3.1}$$

$$BS(S, K, T, r, vol) := (e^{-rT})Kg_{BS}(\sqrt{T}vol) \tag{3.2}$$

Ora possiamo calcolare i coefficienti dello sviluppo di Taylor di $(g_{BS})^{-}1$, ricordandoci che siamo a conoscenza solo di g_{BS} indi per cui dovremo scrivere lo sviluppo in termini della funzione stessa.
A questo punto è importante soffermarci sul concetto di invertibilità, poichè necessita di alcune condizioni fondamentali che la nostra funzione dovrà soddisfare.Più precisamente la funzione dovrà essere strettamente monotona (quindi o strettamente crescente o strettamente decrescente), per verificare ciò basta studiare la derivata, se è sempre positiva allora la f è crescente, viceversa se è sempre negativa allora la f è decrescente.
La funzione di Black & Scholes sembra complicata e quindi difficile da invertire; tuttavia la sua derivata rispetto a σ ha un'espressione molto piu

semplice. Considero la funzione c_t come in (2.3) e ne calcolo la derivata rispetto a σ.

$$\begin{aligned}\partial_\sigma c_\sigma &= g'(d_1)\partial_\sigma d_1 + Ke^{-r(T-t)}\Phi'(d_1 - \sigma\sqrt{T-t})\sqrt{T-t} = \\ &= Ke^{-r(T-t)}\Phi'(d_1 - \sigma\sqrt{T-t})\sqrt{T-t} = \\ &= S_t\sqrt{T-t}\Phi'(d_1)\end{aligned}$$

Notiamo quindi che la derivata è positiva e di conseguenza il prezzo di una call è una funzione strettamente crescente della volatilità (cfr. Figura 3.1). Ne segue infatti che il prezzo dell'opzione è una funzione invertibile.

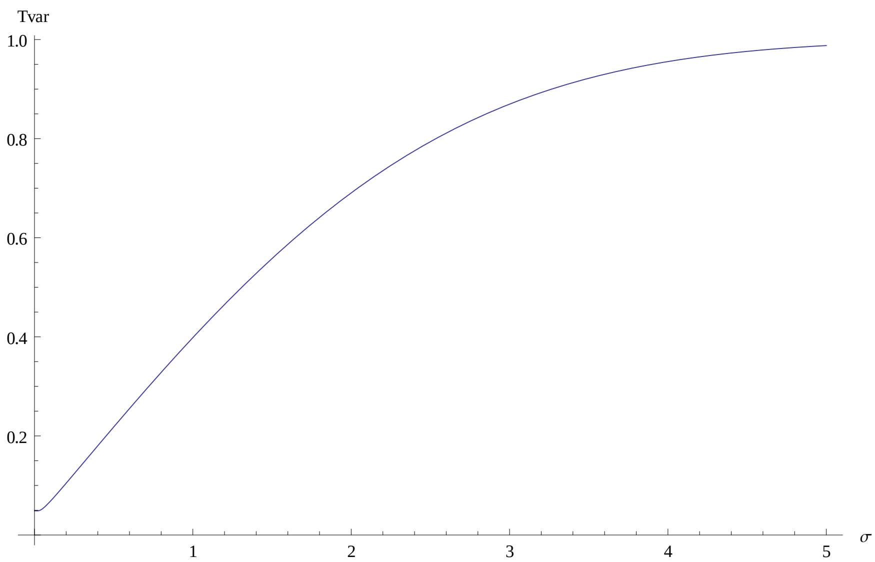


Figura 3.1: Grafico del prezzo di una call Europea nel modello di Black & Scholes, in funzione della volatilità ($0 \leq \sigma \leq 5$) e del tempo alla scadenza ($0.05 \leq Tvar \leq 1$). I parametri sono: $S = K = 1$ e tasso privo di rischio $r = 0.05$

Infine otteniamo l'approssimazione, data dal polinomio di Taylor di ordini diversi (siamo arrivati fino al quinto), della funzione IV (Implied Volatility) utilizzando come punto iniziale dello sviluppo $\bar{\sigma}$.

Ora attraverso alcuni grafici possiamo notatare come la qualità dell'approssimazione dipenda fortemente dal punto iniziale (σ); ed anche aumentando l'ordine dello sviluppo di Taylor non si risolve il problema.
Per sviluppare i seguenti grafici abbiamo utilizzato il modello di Variance-Gamma fissando alcuni valori per i parametri:

- S=1
- T=1
- r=0.05
- σ=0.3 (=0.6 nel secondo grafico)

Figura 3.2: Taylor con punto iniziale 0.3

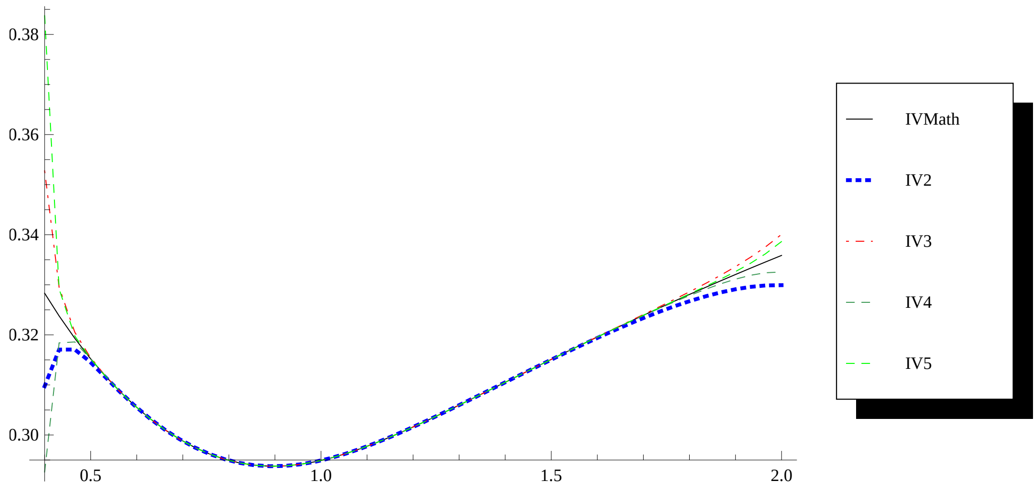
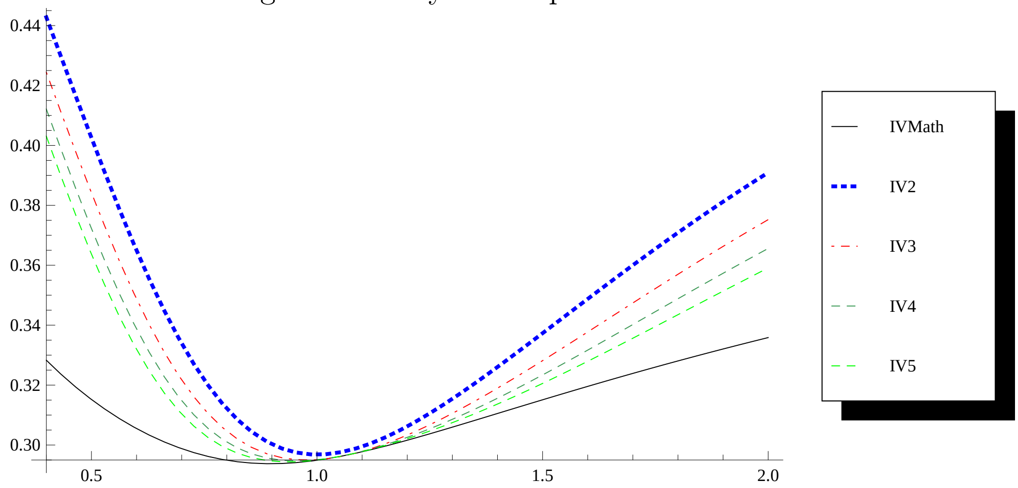


Figura 3.3: Taylor con punto iniziale 0.6



Quindi miglioriamo l'approssimazione utilizzando, come già spiegato in precedenza, come punto iniziale lo stesso polinomio di Taylor.

Osserviamo dai grafici sottostanti il miglioramento effettivo dell'approssimazione, nonostante venga scelto ogni volta un punto di partenza differente. Abbiamo deciso in questo caso di confrontare IV22, IV222, IV333 sempre rispetto alla funzione di Mathematica. Utilizziamo, come prima, il modello di Variance-Gamma fissati gli stessi valori per i parametri.

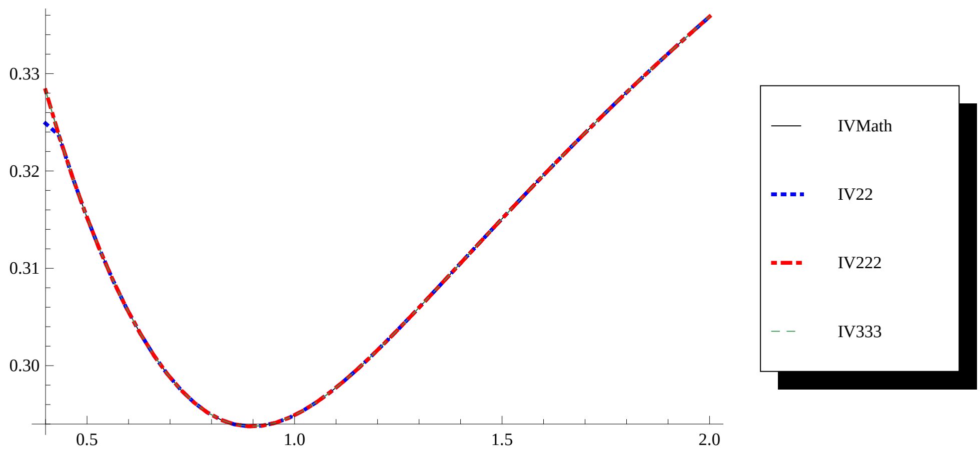


Figura 3.4: punto iniziale $\bar{\sigma} = 0.3$

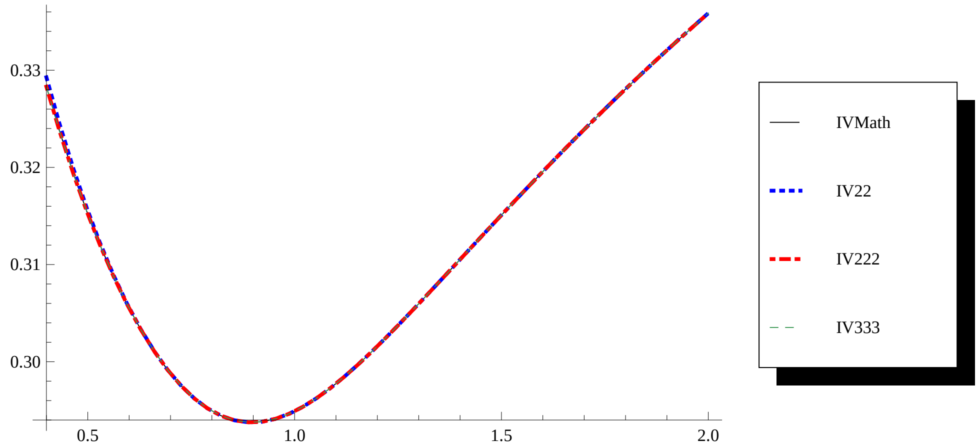


Figura 3.5: punto iniziale $\bar{\sigma} = 0.4$

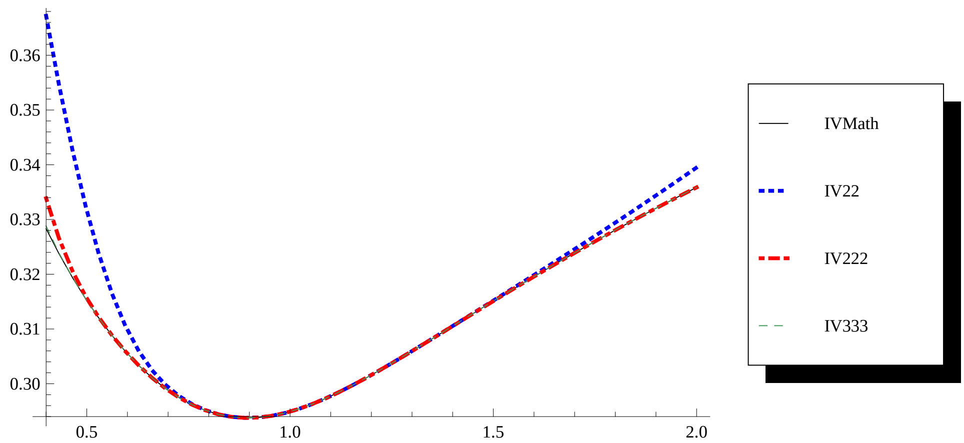


Figura 3.6: punto iniziale $\bar{\sigma} = 0.6$

3.3 Stima dell'errore

Ricordiamo che lo sviluppo in serie di Taylor si può scrivere con due resti differenti: quello di Peano o quello di Lagrange. Il resto in forma di Lagrange consente di dare una maggiorazione dello scarto $R_n(x)$ tra $f(x)$ e $T_n(x)$ (x varia in un intorno U di x_0), se si riesce a limitare la derivata $(n+1)-esima$ di f, quando x si mantiene vicino a x_0. Infatti, nell'ipotesi che esista una costante $M \in \mathbb{R}$ tale che, se x varia in un opportuno intorno $U(x_0)$,

$$|f^{n+1}(x)| \leq M$$

ottengo:

$$|R_n(x)| = |f(x) - T_n(x)| = \left| \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$$

Riassumiamo il tutto con il seguente enunciato:

Teorema 3.3.1 (Formula di Taylor con resto di Lagrange)**.**
Sia f una funzione di classe C^{n+1} su un intervallo I e siano x, x_0 due punti di I allora esiste c un punto compreso tra x e x_0 tale che

$$f(x) - T_{n,x_0} = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

L'errore soddisfa la seguente stima:

$$|f(x) - T_{n,x_0}(x)| \leq \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} max_{t \in (x,x_0)} |f^{n+1}(t)|$$

Quindi è evidente quanto possa essere utile il resto di Lagrange per fornire una stima numerica dell'errore. Nel nostro specifico caso per stimare l'errore andremo ad inserire nella formula al posto di $f(x)$, $f^{-1}(x)$.

Innanzitutto osservo che le derivate n-esime della funzione inversa sono della forma:

$$D^n(f^{-1}) = \frac{\sum_i c_i \prod_{\sum k_i \alpha_{k_i} = 2n-2} f_{k_i}^{\alpha_{k_i}}}{(f')^{2n-1}}$$

dove f_{k_i} indica la derivata $k_i - esima$ di f.

Ora calcolo, ad esempio, la stima delle prime 4 derivate, seguendo tale formula:

$$|D^n(f^{-1})| \leq \sum_i |c_i| \frac{|\prod f_k^{\alpha_k}|}{|(f')^{2n-1}|}$$

Per quanto riguarda la derivata di primo ordine ottengo:

$$|D(f^{-1})| \leq \frac{|c_i|}{|f'|} = \frac{1}{|f'|} \leq \frac{1}{min|f'|}$$

Ricordiamo infatti che vale:

$$max \left| \frac{1}{f} \right| = \frac{1}{min|f|}$$

Per le successive derivate abbiamo che

$$|D^2(f^{-1})| \leq |c_i| \frac{|f''|}{|(f')^3|} = \frac{|f''|}{|(f')^3|}$$

$$|D^3(f^{-1})| \leq \frac{|3(f'')^2 - (f')^4|}{|(f')^5|}$$

$$|D^4(f^{-1})| \leq \frac{|-15(f'')^3 + 10f'f''f^{(3)} - (f')^2 f^{(4)}|}{|(f')^7|}$$

Deduciamo dalle formule precedenti come la stima dipenda fortemente dalle potenze della derivata prima della funzione $((f')^{2n-1})$; infatti è bene notare che più la f' è vicino allo 0, peggiore è l'approssimazione data dallo sviluppo di Taylor.

Bibliografia

[1] Pascucci Andrea: *Calcolo stocastico per la finanza*, Springer 2007.

[2] Istituto della ENCICOLPEDIA ITALIANA fondata da Giovanni Treccani: *Enciclopedia italiana di scienze, lettere ed arti.* Roma 1949.

Ringraziamenti

Desidero ringraziare il Professor Pascucci per aver reso possibile la realizzazione di questo lavoro e soprattutto per la passione che è riuscito a trasmettermi verso questa materia.
Vorrei poi ringraziare la mia famiglia per l'amore e il sostegno che mi dimostrano ogni giorno.