Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

IL PROBLEMA DI DIRICHLET PER IL LAPLACIANO

Tesi di Laurea in Complementi di Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.ma Prof.
Annamaria Montanari

Presentata da:
Sara Gruppioni

II **Sessione**
Anno Accademico 2011-2012

A chi
sa di non sapere

Introduzione

In questa trattazione ci proponiamo di dare una soluzione più o meno esplicita a quello che è comunemente conosciuto come problema di Dirichlet per il Laplaciano. Dato U aperto e limitato in $\mathbb{R}^n$ ed una funzione $f \in C(\partial U)$ assegnata, vogliamo individuare un'ulteriore funzione $u : U \to \mathbb{R}, \quad u \in C^2(U) \cap C(\bar{\mathrm{U}})$ t.c.

$$\begin{cases} \triangle u = 0 \quad \text{in} \quad U \\ \quad u = f \quad \text{su} \quad \partial U. \end{cases} \tag{1}$$

Tale problema venne formulato da Peter Gustav Lejeune Dirichlet (Düren 1805, Gottinga 1859), matematico tedesco di origine francese che frequentò a Parigi i corsi di Pierre-Simon Laplace (1749 -1827). Come vedremo tra poco, la risoluzione del problema di Dirichlet si rifa ad altri problemi alle derivate parziali più generali, e che ci permettono quindi di fornire una soluzione al nostro problema come soluzione particolare di questi ultimi.

A tale proposito, tra tutte le più importanti equazioni alle derivate parziali troviamo senza dubbio l'*equazione di Laplace*

$$\triangle u = 0 \tag{2}$$

e l'*equazione di Poisson*

$$- \triangle u = f. \tag{3}$$

Sia in (2) che in (3) considereremo $x \in U$, e l'incognita sarà $u : \bar{\mathrm{U}} \to \mathbb{R}, \quad u = u(x)$. Ricordiamo inoltre che il *Laplaciano* di u è un operatore differenziale lineare definito come $\triangle u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}$, e che una funzione $u \in C^2$ che soddisfa (2) è chiamata funzione *armonica.*

A questo punto, possiamo immediatamente osservare che il nostro problema di Dirichlet

(1) non è altro che l'equazione di Laplace (2) considerata *in simultanea* ad una condizione sul bordo (o problema ai valori sul bordo) $u = f$ su ∂U. Tuttavia, l'equazione (1) costituisce un caso particolare della più generale equazione di Poisson (3). Possiamo allora concludere che risolvere il problema di Dirichlet per il Laplaciano significa risolvere l'equazione di Poisson (3) per una f particolare, aggiungendo la condizione sul bordo.

Per fare questo abbiamo impostato questa trattazione in 5 capitoli. Nel primo diamo un quadro generale di quello che è il significato fisico del problema di Dirichlet; con il secondo, invece, daremo una soluzione $C^2(\mathbb{R}^n)$ dell'equazione di Poisson in $\mathbb{R}^n$. Nel terzo e quarto capitolo cominceremo ad avvicinarci al nostro scopo introducendo le *formule di media*, che ci permetteranno non solo di dare una prima dimostrazione dell'unicità della soluzione del nostro problema, ma anche di presentare alcune caratteristiche fondamentali delle funzioni armoniche. Infine, nel quinto capitolo introdurremo la *funzione di Green* per poter enunciare un teorema di esistenza della soluzione del problema; quindi, studiando la *funzione di Green per il disco unitario* otterremo un'espressione esplicita della soluzione sul disco di centro l'origine. Concluderemo fornendo una seconda dimostrazione dell'unicità di tale soluzione con il metodo dell'energia.

Indice

Capitolo 1

Interpretazione fisica

L'equazione di Laplace interviene in un'ampia varietà di contesti fisici. Tipicamente u denota la densità di una qualche quantità (i.e. la concentrazione chimica) in equilibrio. In tal caso, se V è un sottoinsieme con bordo regolare di U, il flusso finale di u attraverso ∂V è nullo:

$$\int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \nu dS = 0,$$

dove $\mathbf{F}$ denota la densità di flusso e ν la normale esterna unitaria. Applicando il teorema di Gauss-Green, otteniamo

$$\int_V div \mathbf{F} dx = \int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \nu dS = 0,$$

e quindi

$$\text{div } \mathbf{F} = 0 \text{ in } U, \tag{1.1}$$

poichè V è arbitrario. In alcuni casi è ragionevole assumere che il flusso $\mathbf{F}$ sia proporzionale al gradiente Du, ma con verso opposto (poichè il flusso va da regioni con più alta a regioni con più bassa concentrazione). In questo modo

$$\mathbf{F} = \text{-}aDu \quad (a > 0). \tag{1.2}$$

Sostituendo (1.2) in (1.1) otteniamo l'equazione di Laplace

$$\text{div}(Du) = \triangle u = 0.$$

Se u denota

$$\begin{cases} \text{la concentrazione chimica} \\ \text{la temperatura} \\ \text{il potenziale elettrostatico} \end{cases}$$

l'equazione (1.2) è

$$\begin{cases} \text{la legge di Fick della diffusione} \\ \text{la legge di Fourier della conduzione termica} \\ \text{la legge di Ohm della conduzione elettrica.} \end{cases}$$

Ritroviamo l'equazione di Laplace anche nello studio delle funzioni analitiche e nel modello probabilistico del moto Browniano.

Capitolo 2

Soluzione fondamentale

2.1 Calcolo della soluzione fondamentale

Una buona strategia per studiare una qualunque equazione alle derivate parziali è prima di tutto identificare delle soluzioni esplicite, quindi, purchè l'equazione esaminata sia lineare, assemblare soluzioni più complesse diverse da quelle appena trovate. Inoltre, nel cercare delle soluzioni esplicite spesso è astuto concentrarsi su classi di funzioni con proprietà di simmetria. Poichè l'equazione di Laplace è invariante per rotazioni, di conseguenza è opportuno cercare innanzitutto delle soluzioni *radiali*, cioè delle funzioni di $r = |x|$.

Pertanto cerchiamo una soluzione u dell'equazione di Laplace (2) in $U = \mathbb{R}^n$ della forma

$$u(x) = v(r),$$

dove $r = |x| = (x_1^2 + ... + x_n^2)^{1/2}$ e v deve essere selezionata (se possibile) in modo tale che valga $\triangle u = 0$. Osserviamo che, per $i = 1, ..., n$

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2}(x_1^2 + ... + x_n^2)^{-1/2} 2x_i = \frac{x_i}{r} \quad (x \neq 0).$$

Così abbiamo

$$u_{x_i} = v'(r)\frac{x_i}{r}, \quad u_{x_i x_i} = v''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + v'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right)$$

per $i = 1, ..., n$, e in questo modo

$$\triangle u = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r).$$

Quindi $\triangle u = 0$ se e solo se

$$v'' + \frac{n-1}{r} v' = 0. \tag{2.1}$$

Se $v' \neq 0$, deduciamo che

$$[\log(v')]' = \frac{v''}{v'} = \frac{1-n}{r},$$

e perciò $v'(r) = \frac{a}{r^{n-1}}$ per una qualche costante a. Di conseguenza, se $r > 0$ abbiamo

$$v(r) = \begin{cases} b \log r + c & (n = 2) \\ \frac{b}{r^{n-2}} + c & (n \geq 3), \end{cases}$$

dove b e c sono costanti.

Queste considerazioni motivano la seguente

Definizione 2.1. La funzione

$$\Phi(x) \colon = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x| & (n = 2) \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{1}{|x|^{n-2}} & (n \geq 3), \end{cases} \tag{2.2}$$

definita per $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, è la *soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace.*

La scelta delle costanti nella definizione (2.2) è dettata dal fatto che $\Phi(x)$ è stata ottenuta normalizzando la funzione *v(r)* sul disco unitario in $\mathbb{R}^n$. Ricordiamo infatti che $\alpha(n)$ denota il volume del disco unitario n-dimensionale.

Avvertiamo che talvolta abuseremo delle notazioni e scriveremo $\Phi(x) = \Phi(|x|)$ per sottolineare il fatto che la soluzione fondamentale è radiale. Osserviamo anche che abbiamo le stime

$$|D\Phi(x)| \leq \frac{C}{|x|^{n-1}}, \quad |D^2\Phi(x)| \leq \frac{C}{|x|^n} \quad (x \neq 0) \tag{2.3}$$

per una qualche costante $C > 0$.

2.2 Equazione di Poisson

Per costruzione la funzione $x \mapsto \Phi(x)$ è armonica per $x \neq 0$. Se spostiamo l'origine in un nuovo punto y, l'equazione alle derivate parziali (2) rimane invariata; così $x \mapsto \Phi(x-y)$ è anch'essa armonica come funzione di x, $x \neq y$. Prendiamo ora $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e notiamo che l'applicazione $x \mapsto \Phi(x-y)f(y)$ $(x \neq y)$ è armonica per ogni punto $y \in \mathbb{R}^n$, e così sarà la somma di un numero finito di tali espressioni costruite per vari punti y.

Questo ragionamento potrebbe suggerire che la convoluzione

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y)dy \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \log(|x-y|)f(y)dy & (n=2) \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}}dy & (n \geq 3) \end{cases} \end{aligned} \tag{2.4}$$

risolva l'equazione di Laplace (2). *Tuttavia, questo non è vero:* infatti *non possiamo* semplicemente calcolare

$$\triangle u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \triangle_x \Phi(x-y)f(y)dy = 0. \tag{2.5}$$

Infatti, per la stima (2.3) $D^2\Phi(x-y)$ *non* è sommabile vicino alla singolarità in $y = x$, quindi la differenziazione sotto il segno di integrale in (2.5) è ingiustificata (e non corretta). Dovremo procedere con più cautela nel calcolo di $\triangle u$.

Ora assumiamo per semplicità $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$; cioè, f è differenziabile due volte con continuità ed ha supporto compatto.

Teorema 2.2.1 (Soluzione $C^2(\mathbb{R}^n)$ dell'equazione di Poisson)**.** *Definiamo u come in (2.4). Allora*

(i) $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$;

(ii) $-\triangle u = f \quad in \quad \mathbb{R}^n.$

Di conseguenza vediamo che (2.4) fornisce una formula per una soluzione dell'equazione di Poisson (3) in $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. 1. Abbiamo

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)f(x-y)dy;$$

quindi

$$\frac{u(x+he_i)-u(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)\left[\frac{f(x+he_i-y)-f(x-y)}{h}\right]dy,$$

dove $h \neq 0$ ed $e_i = (0,...,1,...,0)$ con *i-esima* componente l'elemento 1. Ma

$$\frac{f(x+he_i-y)-f(x-y)}{h} \to \frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y)$$

uniformemente in $\mathbb{R}^n$ per $h \to 0$, e così

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y)dy \quad (i = 1,...,n).$$

Analogamente

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x-y)dy \quad (i,j = 1,...n). \tag{2.6}$$

Poichè il membro di destra di (2.6) è continuo in x, abbiamo $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$.

2. Poichè Φ salta in 0, avremo bisogno di alcuni calcoli per isolare questa singolarità in un disco di raggio piccolo a piacere. Fissiamo quindi $\varepsilon > 0$, e ricordiamo che con la notazione $B(0,\varepsilon)$ intendiamo il disco di centro l'origine e raggio ε. Allora

$$\triangle u(x) = \int_{B(0,\varepsilon)} \Phi(y) \triangle_x f(x-y)dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} \Phi(y) \triangle_x f(x-y)dy \tag{2.7}$$

$$=: I_\varepsilon + J_\varepsilon.$$

Ora

$$|I_\varepsilon| \leq C\|D^2 f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)|dy \leq \begin{cases} C\varepsilon^2|\log\varepsilon| & (n=2) \\ C\varepsilon^2 & (n \geq 3). \end{cases} \tag{2.8}$$

Integrando per parti otteniamo

$$\begin{aligned} J_\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} \Phi(y) \triangle_y f(x-y)dy \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} D\Phi(y)\cdot D_y f(x-y)dy \\ &\quad + \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \Phi(y)\frac{\partial f}{\partial \nu}(x-y)dS(y) \\ &=: K_\varepsilon + L_\varepsilon, \end{aligned} \tag{2.9}$$

dove ν denota la normale unitaria *interna* lungo $\partial B(0,\varepsilon)$. Verifichiamo facilmente che

$$|L_\varepsilon| \le \|Df\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)|dSy \le \begin{cases} C\varepsilon|\log\varepsilon| & (n=2) \\ C\varepsilon & (n\ge 3). \end{cases} \tag{2.10}$$

3. Continuiamo integrando per parti ancora una volta nel termine K_ε, e troviamo che

$$\begin{aligned} K_\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} \triangle\Phi(y) f(x-y)dy - \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y)f(x-y)dS(y) \\ &= -\int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y)f(x-y)dS(y), \end{aligned}$$

poichè Φ è armonica lontano dall'origine. Ora $D\Phi(y) = \frac{-1}{n\alpha(n)}\frac{y}{|y|^n}$ $(y \neq 0)$ e $\nu = \frac{-y}{|y|} = -\frac{y}{\varepsilon}$ su $\partial B(0,\varepsilon)$. Di conseguenza $\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y) = \nu\cdot D\Phi(y) = \frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}}$ su $\partial B(0,\varepsilon)$. Poichè $n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}$ è l'area della sfera $\partial B(0,\varepsilon)$, abbiamo

$$\begin{aligned} K_\varepsilon &= -\frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} f(x-y)dS(y) \\ &= -\fint_{\partial B(x,\varepsilon)} f(y)dS(y) \to -f(x) \quad \text{per} \quad \varepsilon \to 0. \end{aligned} \tag{2.11}$$

(Ricordiamo che una barra lungo un integrale denota una media.)

4. Combinando ora (2.7)-(2.11) e mandando $\varepsilon \to 0$, troviamo $- \triangle u(x) = f(x)$, che è quanto avevamo affermato.

$\square$

Osservazione 1. Talvolta si scrive

$$- \triangle \Phi = \delta_0 \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n,$$

dove δ_0 denota la misura di Dirac in $\mathbb{R}^n$ che esprime l'unità di massa del punto 0. Adottando questa notazione, potremmo formalmente calcolare:

$$\begin{aligned} - \triangle u(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} - \triangle_x \Phi(x-y) f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta_x f(y) dy = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n), \end{aligned}$$

in accordo con il **Teorema 2.2.1**. Questo corregge il calcolo sbagliato di (2.5).

Osservazione 2. Il **Teorema 2.2.1** è anzi valido sotto ipotesi di regolarità molto meno restringenti per *f*.

Capitolo 3

Formule di media

Consideriamo ora un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ e supponiamo che u sia una funzione armonica in U. In seguito deriveremo le importanti *formule di media*, che affermano che *u(x)* è pari sia alla media di u sulla sfera $\partial B(x,r)$ sia alla media di u sul disco $B(x,r)$, purchè $B(x,r) \subset U$. Queste formule implicite che coinvolgono u hanno un numero notevole di conseguenze, tra cui il principio del massimo forte e una stima delle derivate delle funzioni armoniche, come vedremo tra poco.

Teorema 3.0.2 (Formule di media per l'equazione di Laplace)**.** *Se $u \in C^2(U)$ è armonica, allora*

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u dS = \fint_{B(x,r)} u dy \tag{3.1}$$

per ogni disco $B(x,r) \subset U$.

Dimostrazione. 1. Poniamo

$$\phi(r) \colon = \fint_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y) = \fint_{\partial B(0,1)} u(x+rz) dS(z).$$

Allora

$$\phi'(r) = \fint_{\partial B(0,1)} Du(x+rz) \cdot z dS(z),$$

e conseguentemente, usando la formula di Green calcoliamo

$$\begin{aligned}\phi'(r) &= \fint_{\partial B(x,r)} Du(y) \cdot \frac{y-x}{r} dS(y) \\ &= \fint_{\partial B(x,r)} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS(y) \\ &= \frac{r}{n} \fint_{B(x,r)} \triangle u(y) dy = 0.\end{aligned}$$

Quindi ϕ è costante, e così

$$\phi(r) = \lim_{t \to 0} \phi(t) = \lim_{t \to 0} \fint_{\partial B(x,t)} u(y) dS(y) = u(x).$$

2. Osserviamo poi che l'uso delle coordinate polari produce

$$\begin{aligned}\int_{B(x,r)} u dy &= \int_0^r \left(\int_{\partial B(x,s)} u dS \right) ds \\ &= u(x) \int_0^r n\alpha(n) s^{n-1} ds = \alpha(n) r^n u(x).\end{aligned}$$

□

Teorema 3.0.3 (Dalle formule di media all'armonicità)**.** *Se* $u \in C^2(U)$ *soddisfa*

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u dS$$

per ogni disco $B(x,r) \subset U$*, allora* u *è armonica.*

Dimostrazione. Per assurdo, se fosse $\triangle u \not\equiv 0$ esisterebbe un disco $B(x,r) \subset U$ tale che, diciamo, $\triangle u > 0$ in $B(x,r)$. Ma allora, per ϕ come sopra avremmo

$$0 = \phi'(r) = \frac{r}{n} \fint_{B(x,r)} \triangle u(y) dy > 0,$$

assurdo. □

Capitolo 4

Proprietà delle funzioni armoniche

Presentiamo ora una serie di interessanti conclusioni sulle funzioni armoniche, tutte basate sulle formule di media. Assumiamo in seguito che $U \subset \mathbb{R}^n$ sia aperto e limitato.

4.1 Principio del massimo forte, unicità

Teorema 4.1.1 (Principio del massimo forte)**.** *Supponiamo che $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ sia armonica in U.*

(i) *Allora*

$$\max_{\bar{U}} u = \max_{\partial U} u.$$

(ii) *Inoltre, se U è connesso ed esiste un punto $x_0 \in U$ tale che*

$$u(x_0) = \max_{\bar{U}} u,$$

allora

$$u \textit{ è costante in } U.$$

L'affermazione *(i)* è il *principio del massimo* per l'equazione di Laplace e *(ii)* è il *principio del massimo forte.* Rimpiazzando u con -u ritroviamo un risultato simile con "min" al posto di "max".

Dimostrazione. Supponiamo che esista un punto $x_0 \in U$ con $u(x_0) = M \colon = \max_{\bar{U}} u$. Allora per $0 < r < \text{dist}(x_0, \partial U)$, le formule di media (3.1) affermano che

$$M = u(x_0) = \fint_{B(x_0,r)} u dy \leq M.$$

Poichè l'uguaglianza vale solo se $u \equiv M$ in $B(x_0, r)$, dovrà essere $u(y) = M$ per ogni $y \in B(x_0, r)$. Dunque l'insieme $\{x \in U | u(x) = M\}$ è allo stesso tempo aperto e relativamente chiuso in U, pertanto è uguale ad U se U è connesso. Questo dimostra l'affermazione *(ii)*, dalla quale segue *(i)*. □

Osservazione 3. Il principio del massimo forte afferma in particolare che se U è connesso e $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ soddisfa

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & \text{in} \quad U \\ u = g & \text{su} \quad \partial U, \end{cases}$$

dove $g \geq 0$, allora u è positiva *ovunque* in U se g è positiva *da qualche parte* su ∂U.

Un'importante applicazione del principio del massimo è stabilire l'unicità delle soluzioni di alcuni problemi al bordo per l'equazione di Poisson.

Teorema 4.1.2 (Unicità)**.** *Sia $g \in C(\partial U)$, $f \in C(U)$. Allora esiste al più una soluzione $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ del problema al bordo*

$$\begin{cases} -\triangle u = f & in \quad U \\ u = g & su \quad \partial U. \end{cases} \tag{4.1}$$

Dimostrazione. Se u e $\tilde{u}$ soddisfano entrambe (4.1), applichiamo il teorema 4.1.1 alle funzioni armoniche $w \colon = \pm(u - \tilde{u})$. □

4.2 Regolarità

Ora dimostreremo che se $u \in C^2$ è armonica, allora necessariamente $u \in C^\infty$. In questo modo *le funzioni armoniche sono automaticamente differenziabili all'infinito.*

Questa sorta di enunciato è chiamato teorema *di regolarità*. Il punto interessante è che la struttura algebrica dell'equazione di Laplace $\triangle u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = 0$ porta alla deduzione analitica che tutte le derivate parziali di u esistono, anche quelle che non appaiono nell'equazione alle derivate parziali.

Teorema 4.2.1 (Regolarità). *Se $u \in C(U)$ soddisfa la proprietà di media (3.1) per ogni disco $B(x,r) \subset U$, allora*

$$u \in C^\infty(U).$$

Notiamo attentamente che u potrebbe non essere regolare, o addirittura continua, fuori da ∂U.

Dimostrazione. Sia η un mollificatore standard, e ricordiamo che η è una funzione radiale. Poniamo $u^\varepsilon :\, = \eta_\varepsilon * u$ in $U_\varepsilon = \{x \in U |\ \mathrm{dist}(x, \partial U) > \varepsilon\}$. Varrà che $u^\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$. Proveremo che u è regolare dimostrando che in realtà $u \equiv u^\varepsilon$ su U_ε. Infatti, se $x \in U_\varepsilon$, allora

$$\begin{aligned}
u^\varepsilon(x) &= \int_U \eta_\varepsilon(x-y)u(y)dy \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{B(x,\varepsilon)} \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)u(y)dy \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)\left(\int_{\partial B(x,r)} u dS\right)dr \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n}u(x)\int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) n\alpha(n) r^{n-1} dr \qquad \text{(da (3.1))} \\
&= u(x)\int_{B(0,\varepsilon)} \eta_\varepsilon dy = u(x).
\end{aligned}$$

Così $u^\varepsilon \equiv u$ in U_ε, quindi $u \in C^\infty(U_\varepsilon)$ per ogni $\varepsilon > 0$. □

4.3 Stime locali di funzioni armoniche

In seguito ci serviremo delle formule di media per derivare delle stime accurate sulle varie derivate parziali di una funzione armonica.

Teorema 4.3.1 (Stime di derivate)**.** *Assumiamo che u sia armonica in U. Allora*

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_k}{r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))} \tag{4.2}$$

per ogni disco $B(x_0, r) \subset U$ ed ogni multi-indice α di lunghezza $|\alpha| = k$.
In particolare

$$C_0 = \frac{1}{\alpha(n)}, \quad C_k = \frac{(2^{n+1}nk)^k}{\alpha(n)} \qquad (k = 1, ...). \tag{4.3}$$

Dimostrazione. 1. Dimostriamo (4.2) e (4.3) per induzione su k, dove il caso $k = 0$ risulta immediato dalla formula di media (3.1). Per $k = 1$, derivando l'equazione di Laplace notiamo che $u_{x_i} \quad (i = 1, ..., n)$ è armonica. Di conseguenza

$$\begin{aligned} |u_{x_i}(x_0)| &= |\fint_{B(x_0,r/2)} u_{x_i} dx| \\ &= |\frac{2^n}{\alpha(n) r^n} \int_{\partial B(x_0,r/2)} u\nu_i dS| \\ &\leq \frac{2n}{r} \|u\|_{L^\infty(\partial B(x_0,r/2))}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Ora se $x \in \partial B(x_0, r/2)$, allora $B(x, r/2) \subset B(x_0, r) \subset U$, e così

$$|u(x)| \leq \frac{1}{\alpha(n)} \left(\frac{2}{r}\right)^n \|u\|_{L^1(B(x_0,r))}$$

da (4.2) e (4.3) per $k = 0$. Combinando le disuguaglianze sopra, deduciamo che

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{2^{n+1}n}{\alpha(n)} \frac{1}{r^{n+1}} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))}$$

se $|\alpha| = 1$. Questo prova (4.2) e (4.3) per $k = 1$.

2. Assumiamo ora $k \geq 2$ e supponiamo che (4.2) e (4.3) siano valide per tutti i dischi in U e per ogni multi-indice di lunghezza minore o uguale a $k - 1$. Fissiamo $B(x_0, r) \subset U$ e sia α un multi-indice con $|\alpha| = k$. Allora $D^\alpha u = (D^\beta u)_{x_i}$ per un qualche $i \in \{1, ..., n\}$, $|\beta| = k - 1$. Da calcoli simili a quelli in (4.4), troviamo che

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{nk}{r} \|D^\beta u\|_{L^\infty(\partial B(x_0, \frac{r}{k}))}.$$

Se $x \in \partial B(x_0, \frac{r}{k})$, allora $B(x, \frac{k-1}{k}r) \subset B(x_0, r) \subset U$. Così (4.2) e (4.3) con $|\alpha| = k-1$ implicano

$$|D^\beta u(x)| \leq \frac{(2^{n+1}n(k-1))^{k-1}}{\alpha(n)\left(\frac{k-1}{k}r\right)^{n+k-1}} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))}.$$

Combinando le due stime precedenti otteniamo il limite

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{(2^{n+1}nk)^k}{\alpha(n)r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))}. \tag{4.5}$$

Questo conferma (4.2) e (4.3) per $|\alpha| = k$.

□

4.4 Teorema di Liouville

Nel prossimo teorema vedremo che non esistono funzioni armoniche limitate e non banali in tutto $\mathbb{R}^n$.

Teorema 4.4.1 (Teorema di Liouville)**.** *Supponiamo che $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sia armonica e limitata. Allora u è costante.*

Dimostrazione. Fissiamo $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, e applichiamo il teorema (4.3.1) su $B(x_0, r)$:

$$\begin{aligned} |Du(x_0)| &\leq \frac{C_1}{r^{n+1}} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))} \\ &\leq \frac{C_1\alpha(n)}{r} \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \to 0, \end{aligned}$$

per $r \to \infty$. Così $Du \equiv 0$, quindi u è costante. □

Teorema 4.4.2 (Formula di rappresentazione per le soluzioni limitate dell'equazione di Poisson)**.** *Sia $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 3$. Allora ogni soluzione limitata di*

$$-\triangle u = f \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^n$$

ha la forma

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y)dy + C \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

per una qualche costante C.

Dimostrazione. Poichè $\Phi(x) \to 0$ per $|x| \to \infty$ se $n \geq 3$, ũ$(x) \colon = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y)dy$ è una soluzione limitata di $- \triangle u = f$ in $\mathbb{R}^n$. Se u è un'altra soluzione, per il teorema di Liouville $w \colon = u - \tilde{u}$ è costante. □

Osservazione 4. Se $n = 2$, $\Phi(x) = -\frac{1}{2\pi} \log |x|$ è illimitata per $|x| \to \infty$, e così potrebbe essere $\int_{\mathbb{R}^2} \Phi(x-y)f(y)dy$.

Capitolo 5

Funzione di Green

Assumiamo ora che $U \subset \mathbb{R}^n$ sia aperto e limitato, e che ∂U sia C^1. Proponiamo in seguito di ottenere una formula di rappresentazione generale per la soluzione dell'equazione di Poisson

$$-\triangle u = f \quad \text{in} \quad U,$$

soggetta alla prescritta condizione sul bordo

$$u = g \quad \text{su} \quad \partial U.$$

5.1 Calcolo della funzione di Green

Supponiamo innanzitutto che $u \in C^2(\bar{U})$ sia una funzione arbitraria. Fissiamo $x \in U$, scegliamo $\varepsilon > 0$ piccolo tale che $B(x, \varepsilon) \subset U$, ed applichiamo la formula di Green sul sottoinsieme $V_\varepsilon \colon = U - B(x, \varepsilon)$ ad $u(y)$ e $\Phi(y - x)$. Con ciò calcoliamo

$$\begin{aligned} &\int_{V_\varepsilon} u(y) \triangle \Phi(y-x) - \Phi(y-x) \triangle u(y) dy \\ &\quad = \int_{\partial V_\varepsilon} u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) - \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) dS(y), \end{aligned} \tag{5.1}$$

dove ν denota la normale unitaria esterna su ∂V_ε. Ricordiamo quindi che $\triangle \Phi(x-y) = 0$ per $x \neq y$. Osserviamo anche che

$$\left| \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) dS(y) \right| \leq C \varepsilon^{n-1} \max_{\partial B(0,\varepsilon)} |\Phi| = o(1)$$

per $\varepsilon \to 0$. Inoltre i calcoli nella dimostrazione del teorema (2.2.1) mostrano che

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)} u(y)\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x)dS(y) = \fint_{\partial B(x,\varepsilon)} u(y)dS(y) \to u(x)$$

per $\varepsilon \to 0$. Quindi mandando $\varepsilon \to 0$ in (5.1) otteniamo la formula:

$$\begin{aligned} u(x) = &\int_{\partial U} \Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y)\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x)dS(y) \\ &- \int_U \Phi(y-x) \triangle u(y)dy. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Questa identità è valida per ogni punto $x \in U$ e per ogni funzione $u \in C^2(\bar{\mathrm{U}})$.

Ora la formula (5.2) potrebbe permetterci di trovare *u(x)* se conoscessimo i valori di $\triangle u$ in U e i valori di $u, \partial u/\partial \nu$ lungo ∂U. Tuttavia, per la nostra applicazione all'equazione di Poisson con valori al bordo per u dati, la derivata direzionale $\partial u/\partial \nu$ lungo ∂U è sconosciuta. Dobbiamo quindi in un qualche modo modificare (5.2) per rimuovere questo termine.

L'idea è di introdurre per x fissato un *correttore*, cioè una funzione $\phi^x = \phi^x(y)$ soluzione del problema ai valori sul bordo:

$$\begin{cases} \triangle \phi^x = 0 & \text{in} \quad U \\ \phi^x = \Phi(y-x) & \text{su} \quad \partial U. \end{cases} \tag{5.3}$$

Applicando ancora una volta la formula di Green, calcoliamo

$$\begin{aligned} -\int_U \phi^x(y) \triangle u(y)dy &= \int_{\partial U} u(y)\frac{\partial \phi^x}{\partial \nu}(y) - \phi^x(y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)dS(y) \\ &= \int_{\partial U} u(y)\frac{\partial \phi^x}{\partial \nu}(y) - \Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)dS(y). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Quindi introduciamo questa

Definizione 5.1. La *funzione di Green* per l'aperto limitato U è

$$G(x,y) \colon = \Phi(y-x) - \phi^x(y) \quad (x,y \in U, x \neq y).$$

Adottando questa terminologia e aggiungendo (5.4) a (5.2), troviamo

$$u(x) = -\int_{\partial U} u(y)\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y)dS(y) - \int_U G(x,y) \triangle u(y)dy \quad (x \in U), \tag{5.5}$$

dove

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) = D_y G(x,y) \cdot \nu(y)$$

è la derivata normale esterna di G rispetto alla variabile y. Osserviamo che il termine $\partial u/\partial \nu$ non appare nell'equazione (5.5): abbiamo introdotto il correttore ϕ^x precisamente per ottenere questo risultato.

Supponiamo ora che U sia un dominio limitato con bordo C^1 e che $u \in C^2(\bar{\mathrm{U}})$ risolva il problema al bordo

$$\begin{cases} -\triangle u = f & \text{in} \quad U \\ \quad u = g & \text{su} \quad \partial U, \end{cases} \tag{5.6}$$

per due funzioni continue date f,g. Inserendo in (5.5), otteniamo

Teorema 5.1.1 (Formula di rappresentazione con funzione di Green)**.** *Se* $u \in C^2(\bar{U})$ *risolve il problema (5.6), allora*

$$u(x) = -\int_{\partial U} g(y)\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y)dS(y) + \int_U f(y)G(x,y)dy \quad (x \in U). \tag{5.7}$$

Dal teorema sopra abbiamo una formula per la soluzione del problema al bordo (5.6), a patto di saper costruire la funzione di Green G per un dominio dato U. Questo è in generale un problema di difficile risoluzione, e può essere risolto solo quando U ha geometria semplice (i.e. U è un disco). Le sezioni successive identificano alcuni casi speciali per i quali un calcolo esplicito di G è possibile.

Osservazione 5. Fissiamo $x \in U$. Allora, considerando G come funzione di y, potremmo simbolicamente scrivere

$$\begin{cases} -\triangle\ G = \delta_x & \text{in} \quad U \\ \quad G = 0 & \text{su} \quad \partial U, \end{cases}$$

con δ_x che denota la misura di Dirac e che esprime l'unità di massa del punto x.

Prima di spostarci su esempi specifici, prendiamo nota dell'affermazione generale che G è simmetrica nelle variabili x e y:

Teorema 5.1.2 (Simmetria della funzione di Green). *Per ogni $x, y \in U$, $x \neq y$, abbiamo*

$$G(y,x) = G(x,y).$$

Dimostrazione. Fissiamo $x, y \in U$, $x \neq y$. Scriviamo

$$v(z) :\ = G(x,z), \quad w(z) :\ = G(y,z) \quad (z \in U).$$

Allora $\triangle v(z) = 0 \quad (z \neq x)$, $\triangle w(z) = 0 \quad (z \neq y)$ e $w = v = 0$ su ∂U. Così applicando l'identità di Green su $V :\ = U - [B(x,\varepsilon) \cup B(y,\varepsilon)]$ per $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo, otteniamo

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial v}{\partial \nu} w - \frac{\partial w}{\partial \nu} v dS(z) = \int_{\partial B(y,\varepsilon)} \frac{\partial w}{\partial \nu} v - \frac{\partial v}{\partial \nu} w dS(z), \tag{5.8}$$

con ν che denota il campo di vettori unitari su $\partial B(x,\varepsilon) \cup \partial B(y,\varepsilon)$ che puntano verso l'interno. Ora w è regolare vicino a x; da cui

$$|\int_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial w}{\partial \nu} v dS| \leq C\varepsilon^{n-1} \sup_{\partial B(x,\varepsilon)} |v| = o(1) \quad \text{per} \quad \varepsilon \to 0.$$

D'altra parte, $v(z) = \Phi(z-x) - \phi^x(z)$, dove ϕ^x è regolare in U. Così

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial v}{\partial \nu} w dS = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(x-z) w(z) dS = w(x),$$

dai calcoli fatti nella dimostrazione del teorema (2.2.1). Così il membro di sinistra di (5.8) converge a $w(x)$ per $\varepsilon \to 0$. Nello stesso modo il membro di destra converge a $v(y)$. Di conseguenza

$$G(y,x) = w(x) = v(y) = G(x,y).$$

□

5.2 Funzione di Green per un disco

Per costruire la funzione di Green per il disco unitario $B(0,1)$ ci si avvarrà ancora di una sorta di riflessione, questa volta sulla sfera $\partial B(0,1)$.

Definizione 5.2. Se $x \in \mathbb{R}^n - 0$, il punto

$$\tilde{x} = \frac{x}{|x|^2}$$

si chiama punto *duale* di x rispetto a $\partial B(0,1)$. La mappa $x \mapsto \tilde{x}$ è l'*inversione* attraverso la sfera unitaria $\partial B(0,1)$.

Ora utilizzeremo l'inversione attraverso la sfera per calcolare la funzione di Green per il disco unitario $U = B(0,1)$. Fissiamo $x \in B(0,1)$. Ricordiamo che dobbiamo trovare un correttore $\phi^x = \phi^x(y)$ che risolva

$$\begin{cases} \triangle\, \phi^x = 0 & \text{in} \quad B(0,1) \\ \quad \phi^x = \Phi(y-x) & \text{su} \quad \partial B(0,1); \end{cases} \tag{5.9}$$

allora la funzione di Green sarà

$$G(x,y) = \Phi(y-x) - \phi^x(y). \tag{5.10}$$

L'idea è ora di "invertire la singolarità" da $x \in B(0,1)$ a $\tilde{x} \notin B(0,1)$. Assumiamo per il momento $n \geq 3$. Ora l'applicazione $y \mapsto \Phi(y-\tilde{x})$ è armonica per $y \neq \tilde{x}$. Così $y \mapsto |x|^{2-n}\Phi(y-\tilde{x})$ è armonica per $y \neq \tilde{x}$, quindi

$$\phi^x(y) :\, = \Phi(|x|(y-\tilde{x})) \tag{5.11}$$

è armonica in U. Inoltre, se $y \in \partial B(0,1)$ e $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} |x|^2|y-\tilde{x}|^2 &= |x|^2\left(|y|^2 - \frac{2y\cdot x}{|x|^2} + \frac{1}{|x|^2}\right) \\ &= |x|^2 - 2y\cdot x + 1 = |x-y|^2. \end{aligned}$$

Così $(|x||y-\tilde{x}|)^{-(n-2)} = |x-y|^{-(n-2)}$. Di conseguenza

$$\phi^x(y) = \Phi(y-x) \quad (y \in \partial B(0,1)), \tag{5.12}$$

come richiesto.

Definizione 5.3. La *funzione di Green per il disco unitario* è

$$G(x,y) :\, = \Phi(y-x) - \Phi(|x|(y-\tilde{x})) \quad (x,y \in B(0,1), x \neq y). \tag{5.13}$$

La stessa formula è valida anche per $n = 2$.

Assumiamo ora che u risolva il problema a valori sul bordo

$$\begin{cases} \triangle\, u = 0 & \text{in} \quad B(0,1) \\ \quad u = g & \text{in} \quad \partial B(0,1). \end{cases} \tag{5.14}$$

Allora usando (5.7), vediamo che

$$u(x) = -\int_{\partial B(0,1)} g(y) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) dS(y). \tag{5.15}$$

In base alla formula (5.13),

$$\frac{\partial G}{\partial y_i}(x,y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}(y-x) - \frac{\partial}{\partial y_i}\Phi(|x|(y-\tilde{x})).$$

Ma

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_i}(x-y) = \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^n},$$

e per di più

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_i}(|x|(y-\tilde{x})) = \frac{-1}{n\alpha(n)} \frac{y_i|x|^2 - x_i}{(|x||y-\tilde{x}|)^n} = -\frac{1}{n\alpha(n)} \frac{y_i|x|^2 - x_i}{|x-y|^n}$$

se $y \in \partial B(0,1)$. Pertanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) &= \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial G}{\partial y_i}(x,y) \\ &= \frac{-1}{n\alpha(n)} \frac{1}{|x-y|^n} \sum_{i=1}^{n} y_i((y_i - x_i) - y_i|x|^2 + x_i) \\ &= \frac{-1}{n\alpha(n)} \frac{1-|x|^2}{|x-y|^n}. \end{aligned}$$

Così la formula (5.15) produce la formula di rappresentazione

$$u(x) = \frac{1-|x|^2}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} \frac{g(y)}{|x-y|^n} dS(y).$$

Supponiamo ora che invece di (5.14) u risolva il problema ai valori sul bordo

$$\begin{cases} \triangle\, u = 0 & \text{in} \quad B(0,r) \\ \quad u = g & \text{in} \quad \partial B(0,r) \end{cases} \tag{5.16}$$

per $r > 0$. Allora $\tilde{u}(x) = u(rx)$ risolve (5.14) con $\tilde{g}(x) = g(rx)$ al posto di g. Cambiamo variabili per ottener la *formula di Poisson*

$$u(x) = \frac{r^2 - |x|^2}{n\alpha(n)r} \int_{\partial B(0,r)} \frac{g(y)}{|x-y|^n} dS(y) \quad (x \in B(0,r)). \tag{5.17}$$

Definizione 5.4. La funzione

$$K(x,y)\colon = \frac{r^2 - |x|^2}{n\alpha(n)r} \frac{1}{|x-y|^n} \quad (x \in B(0,r), y \in \partial B(0,r))$$

è il *nucleo di Poisson* per il disco $B(0,r)$.

Abbiamo stabilito (5.17) sotto l'ipotesi che una soluzione regolare di (5.16) esista. Quindi affermiamo che questa formula fornisce effettivamente una soluzione:

Teorema 5.2.1 (Formula di Poisson per un disco)**.** *Assumiamo $g \in C(\partial B(0,r))$ e definiamo u come in (5.17). Allora*

(i) $u \in C^\infty(B(0,r))$,

(ii) $\triangle u = 0 \quad \text{in} \quad B(0,r)$,

e infine

(iii) $\lim_{x \to x^0} u(x) = g(x^0) \quad$ *per ogni punto* $\quad x^0 \in \partial B(0,r), \quad x \in B(0,r)$.

5.3 Metodi dell'energia

La maggior parte della nostra analisi delle funzioni armoniche fino ad ora dipendeva discretamente da formule di rappresentazione esplicita che richiedevano la soluzione fondamentale, la funzione di Green, ecc. In questa sezione conclusiva illustriamo il metodo "dell'energia", cioè una tecnica che coinvolge la norma L^2 di varie espressioni.

5.3.1 Unicità

Consideriamo il problema ai valori sul bordo

$$\begin{cases} -\triangle\, u = f & \text{in} \quad U \\ u = g & \text{su} \quad \partial U. \end{cases} \tag{5.18}$$

Ci siamo già serviti del principio del massimo per dimostrare l'unicità, ma ora esporremo una semplice dimostrazione alternativa. Assumiamo che U sia aperto e limitato, e che ∂U sia C^1.

Teorema 5.3.1 (Unicità)**.** *Esiste una ed una sola soluzione* $u \in C^2(\bar{U})$ *del problema (5.18).*

Dimostrazione. Assumiamo che ũ sia un'altra soluzione e poniamo $w\colon = u - \tilde{u}$. Allora $\triangle w = 0$ in U, ed un'integrazione per parti mostra che

$$0 = -\int_U w \triangle w dx = \int_U |Dw|^2 dx.$$

Così $Dw \equiv 0$ in U, e, poichè $w = 0$ su ∂U, deduciamo che $w = u - \tilde{u} \equiv 0$ in U. □

Capitolo 6

Appendice

Ricordiamo ora alcune definizioni ed alcuni risultati fondamentali che abbiamo utilizzato nel corso di questo approfondimento sul problema di Dirichlet per il Laplaciano.

Teorema 6.0.2 (Teorema della divergenza[1])**.** *Sia X una varietà di Riemann. Sia ω la forma canonica di Riemann di volume su ∂X e sia Ω la forma canonica di Riemann di volume su X stesso. Sia n il vettore campo normale unitario esterno alla frontiera, e sia ξ un campo vettore C^1 su X con supporto compatto. Allora*

$$\int_X (div_\Omega \xi)\Omega = \int_{\partial X} < n, \xi > \omega.$$

Teorema 6.0.3 (Formula di Green[2])**.** *Sia (X, g) una varietà di Riemann orientata e possibilmente con frontiera, e siano φ, ψ due funzioni su X con supporto compatto. Sia ω la forma canonica del volume associata alla metrica indotta sulla frontiera. Allora*

$$\int_X (\varphi \triangle \psi - \psi \triangle \varphi) vol_g = \int_{\partial X} (\varphi \partial_n \psi - \psi \partial_n \varphi)\omega.$$

Definizione 6.1. Consideriamo una $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ t.c. $J \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $J \geq 0$, $J = J(|x|)$, *supp* $J \subseteq B(0,1)$, $\int_{B(0,1)} J(x)dx = 1$. Chiamo

$$J_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} J\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

[1] Vedi [4, cap. 10].

[2] Vedi [4, cap. 10].

mollificatore standard [3], $J_\varepsilon \in C^\infty$, $J_\varepsilon \geq 0$, *supp* $\quad J_\varepsilon \subseteq B(0,\varepsilon)$, $\int_{B(0,\varepsilon)} J_\varepsilon(x)dx = 1$.

Definizione 6.2. Sia M una σ-algebra in un insieme X, e sia μ una misura positiva su M. Sia inoltre $f \in L^1(\mu)$. Per ogni $E \in M$ definiamo l'*integrale medio di f su E* [4] come

$$\fint_E f d\mu = \frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu.$$

Teorema 6.0.4 (Formula di integrazione per parti rispetto alla derivata i-esima [5])**.** *Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Sia $\nu : \partial U \to \mathbb{R}^n$ la normale esterna al bordo ∂U. Siano $u, w : \bar{U} \to \mathbb{R}$ campi scalari, con $u, w \in C^0(\bar{U}) \cap C^1(\Omega)$. Si ha per ogni $i = 1, ..., n$*

$$\int_U \frac{\partial u}{\partial x_i} w dx = -\int_U u \frac{\partial w}{\partial x_i} dx + \int_{\partial U} uw\nu_i dS.$$

[3] Vedi [3].
[4] Vedi [3, cap. 1].
[5] Vedi [3, cap. 11].

Bibliografia

[1] Lawrence C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 1998

[2] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer- Verlag Berlin Heidelberg New York, 1977

[3] Rudin Walter, *Real and Complex Analysis, Third Edition*, McGraw-Hill Book Company, 1986

[4] Lang Serge, *Introduction to Differentiable Manifolds, Second Edition*, Springer, 2002

[5] Kline Morris, *Storia del pensiero matematico*, I-II volume, Einaudi, 1972

Ringraziamenti

Vorrei ringraziare la professoressa Montanari per la sua cordialità, ma anche per il sorriso con il quale mi ha sempre accolta durante la preparazione di questa tesi. Penso che un buon professore sia quello che è capace di immedesimarsi nei suoi studenti trasmettendo loro curiosità e serenità.
Sono grata alla mia famiglia e a chi, con loro, ha fatto sacrifici per permettermi di studiare e ha saputo portare pazienza nel periodo degli esami.
Grazie infine a Gabriele e a tutti i miei amici che col tempo hanno imparato a confortarmi quando qualcosa non andava.