

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

**SULLA TEORIA  
DELLE  
FRAZIONI CONTINUE**

Tesi di Laurea in Teoria dei Numeri

Relatore:  
Chiar.mo Prof.  
SALVATORE COEN

Presentata da:  
FEDERICO GRECO

Seconda Sessione  
Anno Accademico 2011/2012

*Alla mia famiglia*

*”L’immaginazione è più importante della conoscenza. La conoscenza è limitata, l’immaginazione abbraccia il mondo, stimolando il progresso, facendo nascere l’evoluzione...”*

*(A. Einstein)*



# Introduzione

La tesi si propone di fornire una introduzione completa ai fondamenti della teoria delle frazioni continue (numeriche).

Questo darà adito anche alla illustrazione ed alla soluzione di vari problemi specialmente nell'ambito della teoria dei numeri che, in vari modi, si rifanno alle frazioni continue.

Il primo capitolo è dedicato ai fondamenti della teoria: definizioni, prime proprietà e notazioni. Questo capitolo serve principalmente ad introdurre il linguaggio e gli strumenti elementari della teoria delle frazioni continue: si introducono gradualmente notazioni più generali e si dimostrano i teoremi preliminari. Viene data la definizione di frazione continua *finita* ed esaminate da vicino le relative proprietà aritmetiche. Viene poi messo a tema il problema della *rappresentazione* dei numeri razionali come frazioni continue finite: viene dimostrato che *ogni numero razionale si può rappresentare come frazione continua finita (o limitata)* e di queste rappresentazioni ce ne sono esattamente due che si rapportano facilmente l'una all'altra. Vediamo poi come le frazioni continue si dimostrino utili nella risoluzione effettiva delle equazioni lineari indeterminate note anche come *equazioni diofantee*: equazioni in una o più incognite con coefficienti interi di cui si ricercano le soluzioni intere.

Passiamo, poi, nel secondo capitolo alla trattazione delle frazioni continue *infinite* (o illimitate) ed allo studio dei loro valori. Questo ci permette di dimostrare l'esistenza e l'unicità dello sviluppo in frazione continua infinita, determinato univocamente, dei numeri irrazionali concludendo quindi che

*ogni numero reale si può rappresentare in frazione continua e la frazione continua associata a un reale è illimitata se e solo se il numero è irrazionale.*

Il terzo capitolo tratta delle frazioni continue *periodiche* mediante le quali vengono studiati i numeri *irrazionali quadratici* cioè gli irrazionali che sono soluzioni di equazioni algebriche del secondo grado a coefficienti interi ma che non sono soluzioni di equazioni di grado uno. Infine dimostriamo il teorema di Lagrange sugli irrazionali quadratici secondo cui *lo sviluppo in frazioni continua di un numero reale  $\alpha$  è periodico se e solo se  $\alpha$  è irrazionale quadratico, ovvero algebrico di grado 2*. Un particolare interesse viene dedicato, naturalmente, alla *sezione aurea* che presenta lo sviluppo in frazione continua più semplice di tutti: sviluppo puramente periodico tutto composto da unità.

Nel quarto capitolo l'attenzione è rivolta a particolari problemi di *approssimazione diofantea*, il campo della matematica che tratta dell'approssimazione dei numeri reali mediante numeri razionali. Euristicamente la "piccolezza" della distanza (in valore assoluto) del numero reale da approssimare al numero razionale che lo approssima è una semplice misura di quanto buona sia l'approssimazione.

Definiamo *migliore approssimazione razionale* di un reale  $\alpha$  un numero razionale che ha la caratteristica di essere più prossimo a  $\alpha$  di qualunque altra approssimazione con un denominatore più piccolo. Dimostriamo che le ridotte, o convergenti,

$$c_n = \frac{p_n}{q_n}$$

di una frazione continua aritmetica, di ordine maggiore od uguale ad 1 sono le migliori approssimazioni per il numero irrazionale  $\alpha$  e, di più, ogni convergente  $\frac{p_n}{q_n}$  è tale che

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

Il capitolo si chiude ricordando il celebre teorema di Hurwitz che mostra come la precedente disuguaglianza si possa migliorare: *per ogni irrazionale*

$\alpha$  esistono infiniti razionali  $\frac{p}{q}$  tali che

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2} \quad (q \geq 1).$$

Il numero  $\sqrt{5}$  è il migliore possibile: l'affermazione sarebbe falsa se a  $\sqrt{5}$  si sostituisse un qualsiasi numero maggiore.

Si individua, poi, una opportuna relazione di equivalenza sui reali in modo che la disuguaglianza del teorema di Hurwitz si possa migliorare ancora con la sola eccezione della classe di equivalenza rappresentata dal numero aureo che pur essendo il più semplice dal punto di vista dello sviluppo in frazione continua è il peggior numero approssimabile. Vale infatti: per ogni numero irrazionale  $\alpha$  non equivalente alla sezione aurea  $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  esistono infinite approssimazioni razionali  $\frac{p}{q}$  che soddisfano

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{8}q^2} \quad (q \geq 1).$$

Nel quinto capitolo ci si propone di fornire, senza troppi dettagli, un quadro sulle *origini storiche* delle frazioni continue. Le frazioni continue si ritengono tradizionalmente originate da Euclide con il ben noto algoritmo di divisione euclidea al quale sono strettamente legate, tuttavia il formalismo algebrico che comportano non sembra fosse familiare ad Euclide ed ai suoi immediati successori. E' al genio di Eulero (1707-1783) che dobbiamo la prima sistematizzazione e formalizzazione organica delle frazioni continue. Prima di Eulero si registra soltanto l'uso di frazioni continue per risolvere una equazione diofantea lineare da parte del matematico indiano Aryabhata, attorno al 550. Secondo alcuni storici, è appunto alla matematica indiana che si può far risalire il primo uso delle frazioni continue, anche se anche precedentemente nel periodo ellenistico già si potrebbero intravedere metodi di questo tipo. In tempi molto più tardi cominciamo a trovare l'uso di questi metodi corredato da una certa consapevolezza. La scuola degli algebristi bolognesi si era cimentata con questi con il Bombelli e poi con Cataldi. Si occuparono anche

di frazioni continue Wallis (1616-1703) Lord Brouncker (1620-1684) che fu il primo presidente della Royal Society e Christian Huygens(1629-1695) che applicò il calcolo con le frazioni continue per approssimare i rapporti tra gli ingranaggi necessari per la costruzione di un planetario meccanico. In tempi più moderni, Brezinski, Jacobi, Perron, Hermite, Gauss, Cauchy, Stieltjes diedero contributi allo studio delle frazioni continue e recentemente sono state utilizzate all'interno di algoritmi di calcolo per le approssimazioni di un numero reale e in relazione alla teoria del caos.



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>i</b>
<b>1 Numeri razionali come frazioni continue limitate</b>	<b>1</b>
1.1 Introduzione . . . . .	1
1.2 Definizioni e notazioni . . . . .	3
1.3 Rappresentazione di un numero razionale come frazione continua finita (o limitata) . . . . .	5
1.4 Frazioni continue finite e relative proprietà aritmetiche . . . . .	12
1.4.1 Regola di Eulero . . . . .	15
1.4.2 Convergenti di una frazione continua limitata e relative proprietà aritmetiche . . . . .	18
1.5 Frazioni continue ed equazioni lineari diofantee . . . . .	23
1.5.1 L'equazione indeterminata $ax - by = \pm 1$ , $(a, b) = 1$ . . . . .	23
1.5.2 La soluzione generale di $ax - by = c$ , $(a, b) = 1$ . . . . .	26
1.5.3 La soluzione generale di $ax + by = c$ , $(a, b) = 1$ . . . . .	26
1.5.4 L'equazione generale $Ax \pm By = \pm C$ . . . . .	27
<b>2 Numeri Irrazionali come frazioni continue illimitate</b>	<b>29</b>
2.1 Premessa: le frazioni continue infinite . . . . .	29
2.2 Definizioni e notazioni . . . . .	31
2.3 Rappresentazione di un numero irrazionale come frazione continua infinita (o illimitata) . . . . .	34

---

<b>3</b>	<b>Frazioni continue periodiche</b>	<b>41</b>
3.1	Definizioni e primi esempi . . . . .	41
3.2	Irrazionali quadratici . . . . .	42
3.3	Frazioni continue puramente periodiche . . . . .	50
3.4	Il teorema di Lagrange sugli irrazionali quadratici . . . . .	60
3.5	Un irrazionale quadratico particolare: la sezione aurea . . . . .	63
<b>4</b>	<b>Approssimazione razionale di numeri irrazionali</b>	<b>67</b>
4.1	Posizione del problema . . . . .	67
4.2	Teoremi di approssimazione . . . . .	68
4.3	Le migliori approssimazioni razionali . . . . .	72
4.4	Numeri equivalenti . . . . .	74
4.5	Teorema di Hurwitz . . . . .	76
<b>5</b>	<b>La storia della teoria delle frazioni continue</b>	<b>79</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>95</b>

# Capitolo 1

## Numeri razionali come frazioni continue limitate

### 1.1 Introduzione

Esistono diversi algoritmi per calcolare il massimo comune divisore di due numeri naturali: uno di questi ha origini antiche e risale a Euclide (settimo libro degli *Elementi*), si tratta del cosiddetto "metodo della divisione euclidea". C'è un altro modo per esprimere l'algoritmo, per effetto del quale il quoziente di due numeri naturali viene rappresentato sotto forma di frazione. Vediamolo con un semplice esempio.

Applichiamo l'algoritmo di Euclide ai due numeri naturali 59 e 25 e vediamo come ottenere la rappresentazione del numero razionale  $\frac{59}{25}$  sotto forma di frazione continua. I passi sono i seguenti:

$$59 = 2 \times 25 + 9,$$

$$25 = 2 \times 9 + 7$$

$$9 = 1 \times 7 + 2$$

$$7 = 3 \times 2 + 1.$$

L'ultimo resto non nullo è 1, come dovevamo aspettarci, essendo i numeri 59 e 25 relativamente primi. Ora scriviamo ciascuna equazione sotto forma di

frazione:

$$\frac{59}{25} = 2 + \frac{9}{25},$$

$$\frac{25}{9} = 2 + \frac{7}{9},$$

$$\frac{9}{7} = 1 + \frac{2}{7},$$

$$\frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2},$$

L'ultima frazione di ciascuna equazione è il reciproco della prima frazione dell'equazione successiva. Quindi possiamo eliminare tutte le frazioni intermedie ed esprimere la frazione originale nella forma:

$$\frac{59}{25} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}}}$$

Chiameremo tale espressione *frazione continua (aritmetica) finita o limitata*.

Per convenienza sia tipografica che di notazione, si porrà:

$$\frac{59}{25} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}}} := [2, 2, 1, 3, 2]$$

I numeri 2, 2, 1, 3, 2 si diranno *termini* della frazione continua o *quozienti parziali*. Mentre i numeri  $\frac{59}{25}$ ,  $\frac{25}{9}$ ,  $\frac{9}{7}$ ,  $\frac{7}{2}$  saranno chiamati *quozienti completi*.

E' semplice dimostrare che ogni numero razionale si può scrivere come frazione continua finita e di rappresentazioni ce ne sono esattamente due che si rapportano facilmente l'una all'altra.

## 1.2 Definizioni e notazioni

Una *frazione continua semplice* è una espressione della forma

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}}}$$

dove  $a_0$  è un intero mentre gli altri  $a_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) sono interi positivi.

Più formalmente diamo la seguente definizione.

**Definizione 1.1.** Si chiama *frazione continua (aritmetica) limitata* una successione che scriviamo

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}}} = [a_0, a_1, \dots, a_n]$$

per la quale valgono le seguenti regole:

$$[a_0] = a_0$$

$$[a_0, a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}$$

$$[a_0, a_1, a_2] = [a_0, [a_1, a_2]] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}$$

$$[a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n] = [a_0, a_1, \dots, a_{n-2}, [a_{n-1}, a_n]]$$

$$[a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n] = [a_0, a_1, \dots, a_{h-1}, [a_h, \dots, a_n]] \quad (1 \leq h \leq n-1)$$

Gli elementi  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  che sono numeri reali si dicono *termini* della frazione continua o *quozienti parziali*. La frazione continua si dice *aritmetica semplice* se tutti i termini  $a_i$  sono interi positivi ad eccezione di  $a_0$  che può essere anche negativo.

La scrittura

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}}}$$

risulta scomoda e ingombrante. Un modo più conveniente è scrivere questa espressione come:

$$a_0 + \frac{1}{a_1 +} \frac{1}{a_2 +} \cdots \frac{1}{a_i +} \cdots \frac{1}{a_n}$$

dove i segni + che seguono il primo sono scritti più in basso per ricordare la scrittura "in discesa" che compare nelle frazioni continue. Altrettanto utile è la notazione  $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ .

**Definizione 1.2.** Sia  $\alpha$  un numero razionale. E sia  $[a_0, a_1, \dots, a_n]$  una frazione continua finita. Se risulta

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}}}$$

allora il numero razionale  $\alpha$  si dice *valore* della frazione continua  $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$ <sup>1</sup> e si pone  $\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ .

Un numero *razionale* è una frazione della forma  $\frac{p}{q}$  con  $p$  e  $q$  interi e  $q \neq 0$ . Dimosteremo nel prossimo paragrafo, mediante l'algoritmo euclideo delle divisioni successive, che ogni frazione, cioè ogni numero razionale, si può esprimere come frazione continua aritmetica limitata e viceversa ogni frazione continua aritmetica limitata corrisponde a un numero razionale che è il *valore* della frazione continua stessa.

<sup>1</sup>Con abuso di notazione  $\alpha$  indica sia la frazione continua che il suo valore. Non c'è ambiguità: ogni frazione continua finita rappresenta un numero razionale che è appunto il suo *valore*.

## 1.3 Rappresentazione di un numero razionale come frazione continua finita (o limitata)

E' noto che ogni numero reale positivo o nullo si può rappresentare in uno ed un solo modo come  $\alpha = Int(\alpha) + Mt(\alpha)$  dove  $Int(\alpha)$  è un numero intero positivo o nullo chiamato *parte intera* di  $\alpha$  definito come:

$$Int(\alpha) = \max \{n \in \mathbb{Z}, n \leq \alpha\}$$

mentre  $Mt(\alpha)$  è un elemento di  $[0, 1[$  chiamato *parte frazionaria* o *mantissa* di  $\alpha$ :

$$Mt(\alpha) := \alpha - Int(\alpha).$$

Si è preferito utilizzare le notazioni  $Int(\alpha)$  e  $Mt(\alpha)$  anzichè le usuali  $[\alpha]$  e  $\{\alpha\}$  per denotare, rispettivamente, la parte intera e la parte frazionaria di un numero perchè in questo contesto i simboli  $[ ]$  e  $\{ \}$  potrebbe generare confusione.

Ora, ogni frazione continua aritmetica limitata è un numero razionale e, viceversa, ogni numero razionale  $\frac{p}{q}$  si può esprimere come frazione continua aritmetica limitata e la *rappresentazione* (detta anche *sviluppo*) è essenzialmente unica. Vale infatti il seguente teorema fondamentale.

**Teorema 1.3.1.** *Sia  $\alpha$  un numero razionale non negativo e sia  $a_0 = Int(\alpha)$ . Allora sono univocamente determinati un numero naturale  $n$  e una sequenza ordinata di numeri naturali  $a_1, a_2, \dots, a_n$  con  $a_n \geq 2$  tali che  $\alpha$  sia il valore della frazione continua limitata di termini  $a_0, a_1, \dots, a_n$  cioè:*

$$\alpha = Int(\alpha) + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}}} = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$$

avendo posto  $a_0 = Int(\alpha)$ . Il numero naturale  $n$  si dice *profondita'* di  $\alpha$ . Viceversa, ogni sequenza ordinata di numeri naturali  $a_1, a_2, \dots, a_n$  con  $a_n \geq 2$

è associata, nel modo indicato, ad uno ed un solo numero razionale non intero  $\alpha$  avente come parte intera un numero naturale  $a_0$  arbitrariamente fissato.

*Osservazione 1.* L'ipotesi che l'ultimo intero  $a_n$  sia maggiore o uguale a 2 è essenziale per l'unicità della rappresentazione. Infatti, ad esempio:

$$\frac{3}{8} = [0, 2, 1, 2] = 0 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}} = [0, 2, 1, 1, 1]$$

Visto il largo uso che ne faremo e il ruolo cruciale che esso gioca in questa parte richiamiamo il celebre elementare *lemma euclideo* della divisione con resto.

**Teorema 1.3.2** (Di divisione euclidea). *Dati due interi  $a$  e  $b$  con  $b$  non nullo esiste ed è unica la coppia di interi  $q$  ed  $r$  detti, rispettivamente, quoziente e resto tali che:*

$$\begin{aligned} a &= b \times q + r \text{ con} \\ 0 &\leq r < |b| \end{aligned}$$

dove  $|b|$  denota il valore assoluto del divisore.

Premettiamo alla dimostrazione del teorema un piccolo lemma anche se potrebbe risultare banale.

**Lemma 1.3.3.** *Ogni numero razionale della forma*

$$y = \frac{1}{k_1 + \frac{1}{k_2 + \frac{1}{k_3 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{k_n}}}}}$$

con  $k_i$  numero naturale ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) verifica:

- $y$  non nullo
- $y \leq 1$



- $y = 1$  se e solo se  $n = 1$  e  $k_1 = 1$ .

*Dimostrazione.* (Dimostrazione del teorema[1.1.1])

La seconda osservazione del teorema (cioè che ogni frazione continua finita individua un numero razionale) è evidente: se uno sviluppo è finito possiamo sempre fare il "cammino a ritroso" e riportare lo sviluppo a una frazione ordinaria.

Proviamo la seconda affermazione del teorema anzitutto per  $0 \leq \alpha < 1$ . Il risultato sarà valido per ogni razionale non negativo  $\alpha$  essendo:  $\alpha = Int(\alpha) + Mt(\alpha)$  con  $0 \leq Mt(\alpha) < 1$ .

Ora, si tratta di una dimostrazione di tipo costruttivo. Sia  $\alpha = \frac{a}{b}$  con  $a < b$ . In virtù del lemma di divisione, essendo  $b > a$ , possiamo certamente scrivere:  $b = q_1 \cdot a + r_1$ . I due numeri naturali  $q_1$  e  $r_1$ , il secondo dei quali è diverso da zero risultano univocamente determinati e  $r_1 < b$ : il resto deve essere minore del divisore  $b$ . Se  $r_1 = 0$  siamo a posto: certamente  $q_1 \geq 2$  e  $x = \frac{a}{b}$ . Se invece  $r_1 > 0$ , la disuguaglianza  $r_1 < a$  permette di iterare l'algoritmo della divisione con resto al caso dei due numeri naturali  $a$  ed  $r_1$ , ottenendo allora una nuova identità del tipo  $a = q_2 \cdot r_1 + r_2$ , con un nuovo quoziente  $q_2$  e un nuovo resto  $r_2 < r_1$ . Se per esempio  $r_2$  è diverso da zero, possiamo riscrivere  $r_1 = q_3 \cdot r_2 + r_3$ , e così' via. E' possibile che non si arrivi mai ad un resto  $r_n$  nullo, così' che il procedimento di divisione continui sempre? Ciò è evidentemente impossibile: l'insieme dei resti  $\{r_1, r_2, r_3, \dots\}$  costituisce un sottoinsieme non vuoto dei numeri naturali e quindi è dotato di minimo; questo minimo è necessariamente zero (altrimenti ci troveremmo nell'assurda situazione di infiniti interi positivi fra loro diversi e tutti minori di un dato intero positivo  $q$ ). Per semplicità supponiamo che sia proprio il terzo resto  $r_3$  ad essere nullo. Riscriviamo le tre identità ottenute, e cerchiamo di dedurne delle nuove:

$$(i) \quad b = q_1 \cdot a + r_1$$

$$(ii) \quad a = q_2 \cdot r_1 + r_2$$

$$(iii) \quad r_1 = q_3 \cdot r_2.$$

Risulta necessariamente, nelle attuali condizioni,  $q_3 \geq 2$ , perchè altrimenti sarebbe  $r_1 = r_2$ , contro l'ipotesi  $r_2 < r_1$ . Ora, si comprende subito che  $r_2$ , l'ultimo resto non nullo nella catena di divisioni successive, deve essere esattamente il massimo comune divisore (MCD) dei numeri  $a$  e  $b$ .<sup>2</sup> Ora, cerchiamo di dedurre dalle tre identità (i) (ii) (iii) un'altra identità, quella per i nostri scopi più interessante. Da (iii) si ricava  $r_2 = \frac{r_1}{q_3}$ , e sostituendo in (ii) si ottiene:  $a = q_2 r_1 + r_2 = q_2 r_1 + \frac{r_1}{q_3} = r_1 \left( q_2 + \frac{1}{q_3} \right)$ , ovvero:  $r_1 = \frac{a}{q_2 + \frac{1}{q_3}}$ . Sostituendo quest'espressione in (i), si otteniamo:

$$b = q_1 a + r_1 = q_1 a + \frac{a}{q_2 + \frac{1}{q_3}} = a \left( q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3}} \right),$$

ossia:

$$\alpha = \frac{a}{b} = \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3}}}.$$

Dobbiamo soltanto provare che la rappresentazione così determinata per il numero razionale  $x$  è univocamente determinata, cioè dobbiamo provare che

---

<sup>2</sup>Infatti ogni numero naturale  $d$  che divida  $a$  e  $b$  deve dividere necessariamente  $r_1 = b - q_1 a$ , e quindi anche  $r_2 = a - q_2 r_1$ . Viceversa, è chiaro che  $r_2$  è un divisore di  $a$  e di  $b$ , dal momento che esso risulta un divisore di  $r_1$  (dall'ultima identità), e quindi un divisore di  $a$  in virtù della seconda identità, e infine un divisore di  $b$  in virtù della prima ( $r_2$  divide  $a$  ed  $r_1$ , e quindi divide pure  $q_1 a + r_1 = b$ ). Dalle tre identità riportate si deduce, fra l'altro, la famosa identità di Bezout, che esprime il MCD di due numeri  $a$  e  $b$  come combinazione lineare a coefficienti interi, ovviamente con segno, degli stessi  $a$  e  $b$ :  $MCD(a, b) = \lambda a + \mu b$ , per certi valori  $\lambda$  e  $\mu$  interi. Una possibile coppia di valori  $\lambda$  e  $\mu$  che realizzano l'identità in oggetto si trova in questo modo: dalla penultima identità si ricava  $r_2 = a - q_2 r_1$ , e sostituendo qui il valore di  $r_1$  che si trova dall'identità precedente (nel nostro caso subito la prima), vale a dire:  $r_1 = b - q_1 a$ , ecco che si ottiene infine:  $r_2 = a - q_2 r_1 = a - q_2 (b - q_1 a) = (1 + q_1 q_2) a - q_2 b$

se:

$$\alpha = \frac{a}{b} = \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3}}} = \frac{1}{k_1 + \frac{1}{k_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{k_n}}}} \quad (1.1)$$

allora necessariamente vale  $n = 3$ , e  $q_1 = k_1$ ,  $q_2 = k_2$  e  $q_3 = k_3$ . Ora diventa fondamentale l'ipotesi che l'ultimo termine di questa rappresentazione sia maggiore o uguale di 2. Passando agli inversi dei due termini dell'identità (1.1), si ottiene:

$$q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3}} = k_1 + \frac{1}{k_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{k_n}}}$$

e  $n = 1$  non può essere, perchè sappiamo che il primo membro dell'ultima uguaglianza non è un intero (è un numero razionale diverso da 0 e minore di 1). Se  $n \geq 2$ , ossia se il termine  $\frac{1}{k_2 + \dots + \frac{1}{k_n}}$  compare effettivamente, esso è un numero razionale minore di 1, in virtù dell'ipotesi  $k_n \geq 2$ , e del lemma [1.1.3]. Quindi dall'identità in esame si deduce che  $q_1$  e  $k_1$  sono le rispettive parti intere dei numeri in considerazione, quindi certamente  $q_1 = k_1$ . Veniamo ricondotti quindi all'identità, che, uguagliando gli inversi di entrambi i membri diventa

$$q_2 + \frac{1}{q_3} = k_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{k_n}}$$

Possiamo ripetere il ragionamento:  $n = 2$  non potrà essere, perchè altrimenti avremmo  $q_2 + \frac{1}{q_3} = k_2$ , mentre al primo membro c'è un numero non intero, e quindi  $n \geq 3$ . Poichè  $k_n \geq 2$ , il secondo addendo  $\frac{1}{\dots + \frac{1}{k_n}}$  è un numero razionale maggiore di 0 e minore di 1, quindi  $q_2$  e  $k_2$  sono esattamente le parti intere dei numeri in questione, da cui

$$\frac{1}{q_3} = \frac{1}{k_3 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{k_n}}}$$

Nuovo passaggio all'inverso, e infine la conclusione:

$q_3 = k_3 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{k_n}}$  non può sussistere se  $n > 3$  e  $k_n \geq 2$ .  $\square$

**Teorema 1.3.4.** *Ogni numero razionale  $\frac{p}{q}$  si può esprimere mediante una frazione continua aritmetica limitata nella quale l'ultimo termine può essere scelto in modo che il numero dei termini dello sviluppo sia pari o dispari.*

*Dimostrazione.* Siano  $a_0, a_1, \dots, a_n$  i termini dello sviluppo di  $\frac{p}{q}$  individuati dall'algoritmo euclideo come nella dimostrazione del teorema precedente:  $\frac{p}{q} = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ . Possiamo sempre modificare l'ultimo termine  $a_n$  in modo che il numero dei termini sia a nostra scelta pari o dispari. Per dimostrare questo fatto osserviamo che, se  $a_n$  è maggiore di 1 si può scrivere:

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{(a_n - 1) + \frac{1}{1}}$$

e quindi

$$\frac{p}{q} = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n - 1, 1].$$

$\square$

**Esempio 1.1.** Osserviamo la "stratificazione" dei numeri razionali compresi tra 0 e 1 in base alla loro profondità:

profondità 0: 0 e 1

(e naturalmente al di fuori di  $I : 2, 3, 4, \dots$ )

profondità 1: gli inversi di 2, 3, ..., vale a dire:

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \dots > \frac{1}{10} > \dots > \frac{1}{n}$$

e naturalmente al di fuori di  $I$ :

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} > 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} > 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} > 1 + \frac{1}{5} > \dots > 1 + \frac{1}{n}$$

profondità 2: gli inversi dei numeri riportati sopra al di fuori di  $I$ , vale a dire:

$$\frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{5}{6} < \dots$$

$$\frac{2}{5} < \frac{3}{7} < \frac{4}{9} < \frac{5}{11} < \dots$$

e naturalmente al di fuori di  $I$  :

$$1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} < 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} < 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5} < 1 + \frac{5}{6} = \frac{11}{6} < \dots$$

*Osservazione 2.* Si dice anche che noi con queste ipotesi abbiamo adoperato la divisione con resto positivo. Nulla vieta di considerare i resti negativi e di conseguenza avere (eventualmente) anche quozienti negativi, ma generalmente in sede di sviluppo di un numero reale in frazione continua si preferisce questa posizione.

*Osservazione 3.* Osserviamo esplicitamente che, dato un numero razionale  $\alpha$  (in realtà questo, come vedremo in seguito, vale anche per i numeri irrazionali), la rappresentazione in frazione continua *limitata* (per  $\alpha$  irrazionale sarà invece *illimitata*) che si può univocamente associare ad esso si ottiene semplicemente attraverso la seguente regola dei quozienti parziali. Si comincia a considerare la parte intera di  $\alpha$  ossia

$$Int(\alpha) := \max \{n \in \mathbb{Z}, n \leq \alpha\}$$

e si ha evidentemente

$$\alpha = Int(\alpha) + \alpha - Int(\alpha) = Int(\alpha) + Mt(\alpha).$$

Se  $Mt(\alpha) \neq 0$  possiamo prenderne l'inverso e porre

$$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha - Int(\alpha)}$$

e ottenere

$$\alpha = Int(\alpha) + \frac{1}{\alpha_1}.$$

A questo punto se  $Mt(\alpha_1)$ , cioè  $\alpha_1$  è intero, ci fermiamo, altrimenti procediamo ponendo

$$\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - Int(\alpha_1)}$$

e così via. Si tratta di una costruzione sempre più difficile da scrivere sotto l'aspetto simbolico ma concettualmente chiara e semplice. Considerando

questa costruzione abbiamo una "caratterizzazione" dei razionali.

*Si incontra una parte frazionaria nulla dopo  $n$  passi, e quindi l'inverso non si può fare, se e solo se  $\alpha$  è razionale di profondità  $n$ .* Proveremo in seguito, infatti, che per gli irrazionali questo procedimento non avrà mai termine e la rappresentazione in frazione continua sarà infinita.

## 1.4 Frazioni continue finite e relative proprietà aritmetiche

Consideriamo la frazione continua

$$[a_0, a_1, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n}}}. \quad (1.2)$$

Prima di analizzare le proprietà aritmetiche delle frazioni continue è opportuno ricercare alcune loro relazioni puramente algebriche. Tali relazioni sono in effetti identità, la cui validità non dipende dalla natura dei termini  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ . Per ora tratteremo questi termini come variabili, non necessariamente numeri naturali. Se lavoriamo sulla frazione continua (1.2) per gradi, otteniamo una sua riformulazione equivalente come quoziente di due somme costituite da prodotti formati con i termini  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ .

Se  $n = 1$  si ha

$$[a_0, a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}.$$

Se  $n = 2$  otteniamo

$$[a_0, a_1, a_2] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = a_0 + \frac{a_2}{a_1 a_2 + 1} = \frac{a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2}{a_1 a_2 + 1}$$

dove nel passaggio intermedio abbiamo inserito il valore per  $a_1 + \frac{1}{a_2}$  ottenuto col calcolo precedente, ponendo  $a_1$  e  $a_2$  al posto di  $a_0$  e  $a_1$ .

Analogamente, se  $n = 3$ , si ha

$$\begin{aligned} [a_0, a_1, a_2, a_3] &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}} = a_0 + \frac{a_2 a_3 + 1}{a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3} = \\ &= \frac{a_0 a_1 a_2 a_3 + a_0 a_1 + a_0 a_3 + a_2 a_3 + 1}{a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3}. \end{aligned}$$

Anche qui è stato usato il risultato del passaggio precedente.

Quindi possiamo costruire le frazioni continue generalizzate in questo modo.

In accordo con le notazioni che adotteremo per la *regola di Eulero* nel prossimo paragrafo, il numeratore della frazione continua (1.2), qualora venga calcolato in questo modo, con:

$$P(a_0, a_1, \dots, a_n).$$

Così  $P(a_0) = a_0$ ;

$$P(a_0, a_1) = a_0 a_1 + 1;$$

$$P(a_0, a_1, a_2) = a_0 a_1 a_2 + a_2 + a_0;$$

$$P(a_0, a_1, a_2, a_3) = a_0 a_1 a_2 a_3 + a_2 a_3 + a_0 a_3 + a_0 a_1 + 1;$$

e così via. Osserviamo che negli esempi considerati sopra, il denominatore dell'espressione ottenuta per la frazione continua è

$$P(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Ciò è vero in generale. Infatti se consideriamo ad esempio il terzo passaggio in

$$\begin{aligned} a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}} &= a_0 + \frac{a_2 a_3 + 1}{a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3} = \\ &= \frac{a_0 a_1 a_2 a_3 + a_0 a_1 + a_0 a_3 + a_2 a_3 + 1}{a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3} \end{aligned} \quad (1.3)$$

il denominatore finale proviene dal numeratore di  $a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}$ , e pertanto ha il valore

$$P(a_1, a_2, a_3).$$

Ragionando come sopra, si prova facilmente per induzione che la frazione continua generale ha dunque un valore dato da

$$[a_0, a_1, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n}}} = \frac{P(a_0, a_1, \dots, a_n)}{P(a_1, a_2, \dots, a_n)}. \quad (1.4)$$

E' chiaro dal calcolo effettuato in (1.3) come la funzione  $P(a_0, a_1, a_2, a_3)$  si costruisca a partire da  $P(a_1, a_2, a_3)$  e  $P(a_2, a_3)$ . Infatti il calcolo mostra che:

$$P(a_0, a_1, a_2, a_3) = a_0 \cdot P(a_1, a_2, a_3) + P(a_2, a_3).$$

Ciò è ovviamente tipico del caso generale, e vale la regola

$$P(a_0, a_1, \dots, a_n) = a_0 \cdot P(a_1, a_2, \dots, a_n) + P(a_2, a_3, \dots, a_n).$$

Questa è una *relazione di ricorrenza* che definisce la funzione  $P$  passo dopo passo. Così come è scritta, la formula si applica solo da  $n = 2$  in poi. Si applica anche quando  $n = 1$  con la convenzione  $P(\ ) = 1$  e la formula diventa:

$$P(a_0, a_1) = a_0 P(a_1) + 1 = a_0 a_1 + 1.$$

**Esempio 1.2.** Il numero razionale  $\frac{11}{31}$  ha il seguente sviluppo in frazione continua:

$$\frac{31}{11} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}} := [2, 1, 4, 2].$$

Si ha:

$$\begin{aligned} P(4, 2) &= 4 \cdot 2 + 1 = 9, \\ P(1, 4, 2) &= 1 \cdot P(4, 2) + P(2) = 9 + 2 = 11 \\ P(2, 1, 4, 2) &= 2 \cdot P(1, 4, 2) + P(4, 2) = 2 \cdot 11 + 9 = 31 \end{aligned}$$

Dunque:

$$\frac{31}{11} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}} := [2, 1, 4, 2] = \frac{P(2, 1, 4, 2)}{P(1, 4, 2)}.$$

*Osservazione 4.* In virtù di (1.4) si può esprimere la frazione continua generale nella forma

$$[a_0, a_1, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}} = \frac{P(a_0, a_1, \dots, a_n)}{P(a_1, a_2, \dots, a_n)}$$

dove la funzione  $P$  è somma di certi prodotti delle variabili  $a_0, a_1, \dots, a_n$ . Dimostriamo nel prossimo paragrafo che non si può semplificare nulla tra numeratore e denominatore in questa espressione. Questo è vero in due sensi: uno *algebrico* e uno *aritmetico*. Per quanto riguarda il primo, numeratore



e denominatore sono polinomi nelle variabili  $a_0, a_1, \dots, a_n$  e si può dimostrare che questi sono irriducibili. Nel secondo senso, se  $a_0, a_1, \dots, a_n$  sono numeri interi, numeratore e denominatore sono interi e coprimi. Dimostreremo questo fatto in seguito. Il primo fatto (numeratore e denominatore sono polinomi irriducibili) è "semplice da dimostrare, ma non ha interesse dal punto di vista della teoria dei numeri" (cfr Davenport).

### 1.4.1 Regola di Eulero

A Eulero si deve la prima esposizione organica e sistematica della teoria delle frazioni continue nella "*Introductio in analysis infinitorum*" (1748). La teoria, come vedremo in seguito, è stata poi ripresa e sviluppata ulteriormente da Lagrange (1770), nelle note aggiunte alla traduzione francese dell'*"Algebra"* di Eulero, e da Legendre (1830),

Le frazioni continue, come abbiamo già osservato, hanno diversi tipi di notazione e di trattazione, e una delle più efficaci è data dalla cosiddetta *regola di Eulero* che non è altro che una "formalizzazione" sistematica di quanto visto nel paragrafo precedente e risulta particolarmente comoda per esprimere lo sviluppo in frazioni continue.

**Definizione 1.3.** Se  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$  sono indeterminate, si definisce:

$$P(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

il polinomio ottenuto sommando i seguenti monomi:

1. il prodotto di tutti gli  $n + 1$  fattori  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ;
2. i prodotti di  $n - 1$  fattori ottenuti dal precedente prodotto omettendo (in tutti i modi possibili) un paio di fattori contigui del tipo  $a_0 a_1, a_1 a_2, a_2 a_3, \dots, a_{n-1} a_n$ . Questo contributo alla somma è dunque:  
 $a_2 a_3 a_4 \cdots a_{n-1} a_n + a_0 a_3 a_4 \cdots a_{n-1} a_n + a_0 a_1 a_4 \cdots a_{n-1} a_n + a_0 a_1 a_2 \cdots a_{n-3} a_n + a_0 a_1 a_2 \cdots a_{n-2}$ ;

3. i prodotti di  $n - 3$  fattori, ottenuti dal precedente prodotto 1) omettendo (in tutti i modi possibili) due paia disgiunte di fattori contigui come  $a_0a_1$  e  $a_2a_3$ ,  $a_0a_1$  e  $a_3a_4, \dots, a_0a_1$  e  $a_{n-1}a_n, \dots, a_1a_2$  e  $a_3a_4, \dots, a_{n-3}a_{n-2}$  e  $a_{n-1}a_n$ . Questo contributo alla somma è dunque:  $a_4a_5 \dots a_{n-1}a_n + a_2a_5 \dots a_{n-1}a_n + a_2a_3a_6 \dots a_{n-1}a_n + \dots + a_0a_1 \dots a_{n-4}$  e così' via.
4. Quando  $n - 1$  è pari l'ultimo contributo è 1.

In altri termini prima si prende il prodotto di tutti gli  $n + 1$  termini; poi si prende ciascun prodotto che può essere ottenuto omettendo (in tutti i modi possibili) un paio di termini consecutivi; poi si prende ciascun prodotto che può essere ottenuto omettendo (in tutti i modi possibili) due paia disgiunte di termini consecutivi, e così' via. E' chiaro che se  $n + 1$  è pari, termineremo con il prodotto ottenuto omettendo tutti i termini, il cui valore convenzionale è 1.

Con abuso di notazione indicheremo, a seconda del contesto, sempre con il simbolo  $P(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)$  sia il polinomio nelle  $n$  indeterminate  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$  sia il valore numerico che esso assume quando alle indeterminate si sostituiscono  $n$  numeri interi.

**Proposizione 1.4.1** (Regola di Eulero). *Nelle ipotesi precedenti:*  
per  $n = 1$  si ha

$$[a_0, a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0a_1 + 1}{a_1} = \frac{P(a_0, a_1)}{P(a_1)}$$

per  $n = 2$  si ha

$$[a_0, a_1, a_2] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = \frac{a_0a_1a_2 + a_0 + a_2}{a_1 + a_2 + 1} = \frac{P(a_0, a_1, a_2)}{P(a_1, a_2)}$$

per  $n = m$  si ha

$$[a_0, a_1, \dots, a_m] = \frac{P(a_0, a_1, \dots, a_m)}{P(a_1, a_2, \dots, a_m)}$$

*Dimostrazione.* I casi  $n = 1, 2, 3$  sono stati provati nel paragrafo precedente.

Il caso generale si ottiene direttamente per induzione su  $n$ .  $\square$

**Esempio 1.3.** I primi esempi della regola di Eulero sono i seguenti:

$$P(a_0) = a_0;$$

$$P(a_0, a_1) = a_0a_1 + 1;$$

$$P(a_0, a_1, a_2) = a_0a_1a_2 + a_2 + a_0;$$

$$P(a_0, a_1, a_2, a_3) = a_0a_1a_2a_3 + a_2a_3 + a_0a_3 + a_0a_1 + 1;$$

Qui, ad esempio, abbiamo preso prima il prodotto di tutti i termini, poi il prodotto in cui è stata omessa prima la coppia  $a_0, a_1$  poi la coppia  $a_1, a_2$ , e ancora la coppia  $a_2, a_3$ , e infine il prodotto in cui sono state omesse sia la coppia  $a_0, a_1$ , sia  $a_2, a_3$ .

$$P(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = a_0a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4 + a_0a_3a_4 + a_0a_1a_4 + a_0a_1a_2 + a_4 + a_2 + a_0;$$

e così' via.

**Proposizione 1.4.2.** *Valgono le seguenti proprietà:*

i) *Invarianza per riordinamento delle indeterminate  $a_0, \dots, a_n$ :*

$$P(a_0, a_1, \dots, a_n) = P(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0)$$

ii)

$$\begin{aligned} P(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}a_n) &= a_0P(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}a_n) + P(a_2, a_3, \dots, a_{n-1}a_n) = \\ &= P(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a_{n-1})a_n + P(a_0, a_1, \dots, a_{n-2}) \end{aligned}$$

*Dimostrazione.* i) Segue semplicemente dal fatto che la definizione di  $P(a_0, a_1, \dots, a_n)$  è combinatoria e la proprietà di due termini, di non essere contigui, si conserva quando si inverte l'ordine dei simboli  $a_i$ . ii) Il secondo membro dell'uguaglianza, cioè l'addendo  $a_0P(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}a_n)$  contiene tutti e soli gli addendi di  $P(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}a_n)$  in cui è presente il paio  $a_0, a_1$ . Invece  $P(a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n)$  contiene tutti e soli gli addendi di  $P(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)$  in cui il paio  $a_0, a_1$  non è ammesso. Pertanto il valore al secondo membro è esattamente il valore al primo membro. Analogamente per la successiva uguaglianza che si ottiene scambiando  $a_0$  con  $a_n$ ,  $a_1$  con  $a_{n-1}$ ,  $a_2$  con  $a_{n-2}$ , e così' via.  $\square$

### 1.4.2 Convergenti di una frazione continua limitata e relative proprietà aritmetiche

**Definizione 1.4.** Sia data una frazione continua finita qualsiasi

$$\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n].$$

Ogni frazione continua  $c_m = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_m]$ , con  $0 \leq m \leq n$ , si chiama *ridotta  $m$ -esima* (o di ordine  $m$ ) di  $\alpha$  o *convergente  $m$ -esima* (o di ordine  $m$ ) ad  $\alpha$ .

Così  $a_0$  è la ridotta di ordine zero,

$$c_1 = [a_0, a_1] = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} \text{ è la ridotta di ordine 2}$$

$$c_2 = [a_0, a_1, a_2] = \frac{a_0 a_1 a_2 + a_2 + a_0}{a_1 a_2 + 1} \text{ è la terza ridotta}$$

e così' via.

**Esempio 1.4.** I convergenti del numero razionale  $\frac{251}{137}$  sono

$$[1], [1, 1], [1, 1, 4], [1, 1, 4, 1], [1, 1, 4, 1, 22].$$

Le ridotte, per definizione, sono numeri razionali per cui ha senso indicarle come frazioni

$$c_m = \frac{p_m}{q_m}$$

dove  $p_m$  e  $q_m$  sono interi primi tra loro e  $q_m \neq 0$ . Vedremo nel corso della dimostrazione del seguente teorema [1.4.2] che valgono delle relazioni particolari per i numeratori  $p_m$  e denominatori  $q_m$  delle convergenti di una frazione continua e, in particolare, si ha:

$$p_m = P(a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, a_m) \quad q_m = P(a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m).$$

**Teorema 1.4.3** (Relazioni ricorrenti di Eulero-Wallis). *Sia data una frazione continua finita qualsiasi*

$$\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n].$$

Per i numeratori e i denominatori delle convergenti  $c_m = \frac{p_m}{q_m}$  valgono le seguenti formule ricorrenti a tre termini:

$$i) p_m = a_m p_{m-1} + p_{m-2}$$

$$ii) q_m = a_m q_{m-1} + q_{m-2}$$

con le condizioni iniziali  $p_{-1} = 1$  e  $p_0 = a_0$  per i numeratori mentre  $q_{-1} = 0$  e  $q_0 = 1$  per i denominatori.

*Dimostrazione.* Dimostriamo che risulta:

$$p_m = P(a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, a_m) \quad q_m = P(a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m).$$

Ne verrà, dal lemma [1.2.1], la tesi:

$$\begin{aligned} p_m &= P(a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, a_m) = P(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{m-2}, a_{m-1})a_m + P(a_0, a_1, \dots, a_{m-2}) = \\ &= a_m p_{m-1} + p_{m-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_m &= P(a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m) = P(a_1, a_2, \dots, a_{m-2}, a_{m-1})a_m + P(a_1, \dots, a_{m-2}) = \\ &= a_m q_{m-1} + q_{m-2} \end{aligned}$$

Per i valori iniziali si ha che:

$$p_0 = P(a_0) = a_0; \quad p_1 = P(a_0, a_1) = a_0 a_1 + 1;$$

$$q_0 = 1; \quad q_1 = P(a_1) = a_1;$$

Per induzione su  $m$  sia  $p_i = P(a_0, a_1, \dots, a_{i-1}, a_i)$  e  $q_i = P(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i)$  per ogni  $i < m$ . Dalla definizione di frazione continua si ha che:

$$\begin{aligned} \frac{p_m}{q_m} &= [a_0, a_1, a_2, \dots, a_m] = a_0 + \frac{1}{[a_1, a_2, \dots, a_m]} = \\ &= a_0 + \frac{1}{\frac{P(a_1, a_2, \dots, a_m)}{P(a_2, a_3, \dots, a_m)}} = a_0 + \frac{P(a_2, a_3, \dots, a_m)}{P(a_1, a_2, \dots, a_m)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a_0 P(a_1, a_2, \dots, a_m) + P(a_2, a_3, \dots, a_m)}{P(a_1, a_2, \dots, a_m)} = \\
&= \frac{P(a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, a_m)}{P(a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m)}.
\end{aligned}$$

La frazione continua generale ha dunque un valore dato da:

$$\frac{p_m}{q_m} = [a_0, a_1, \dots, a_m] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + a_m}}} = \frac{P(a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, a_m)}{P(a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m)}$$

Tornando alla penultima uguaglianza si ha che:

$$\begin{aligned}
\frac{p_m}{q_m} &= \frac{a_0 P(a_1, a_2, \dots, a_m) + P(a_2, a_3, \dots, a_m)}{P(a_1, a_2, \dots, a_m)} = \\
&= \frac{a_m P(a_{m-1}, a_{m-2}, \dots, a_0) + P(a_{m-2}, a_{m-3}, \dots, a_0)}{P(a_m, a_{m-1}, \dots, a_1)} = \\
&= \frac{a_m p_{m-1} + p_{m-2}}{a_m q_{m-1} + q_{m-2}}.
\end{aligned}$$

□

**Teorema 1.4.4.** *Nello sviluppo in frazioni continue di un numero, una qualunque coppia di convergenti consecutive, soddisfa la relazione:*

$$p_m q_{m-1} - p_{m-1} q_m = (-1)^{m-1}$$

*Dimostrazione.* Sia  $m = 1$  allora:

$$p_0 = P(a_0) = a_0; \quad p_1 = P(a_0, a_1) = a_0 a_1 + 1;$$

$$q_0 = 1; \quad q_1 = P(a_1) = a_1;$$

Pertanto  $p_1 q_0 - p_0 q_1 = (a_0 a_1 + 1) \cdot 1 - a_0 a_1 = 1$ .

In virtù delle relazioni (i) e (ii) di [1.2.2] si ottiene che:

$$\begin{aligned}
&p_m q_{m-1} - p_{m-1} q_m = \\
&= (a_m p_{m-1} + p_{m-2}) q_{m-1} - p_{m-1} (a_m q_{m-1} + q_{m-2}) = \\
&= -(p_{m-1} q_{m-2} - p_{m-2} q_{m-1}).
\end{aligned}$$

Pertanto posto  $\Delta_m = p_m q_{m-1} - p_{m-1} q_m$  si ha che:

$$\Delta_m = -\Delta_{m-1}$$

e continuando

$$\Delta_m = -\Delta_{m-1} = +\Delta_{m-2} = \cdots = \pm\Delta_1$$

ma, come visto sopra,  $\Delta_1 = 1$ , perciò

$$\Delta_m = (-1)^{m-1}$$

e questo prova che  $p_m q_{m-1} - p_{m-1} q_m = (-1)^{m-1}$ .  $\square$

*Osservazione 5.* Una immediata conseguenza è che  $p_m$  e  $q_m$  sono relativamente primi (ogni eventuale fattore comune deve dividere 1). Pertanto la frazione  $\frac{p_m}{q_m}$  che rappresenta una convergente generica è ridotta ai minimi termini.

Proviamo ora che le convergenze  $c_m$  ottenute sviluppando un numero razionale  $\frac{a}{b}$  sono alternativamente minori e maggiori del valore finale  $\frac{a}{b}$ . Più precisamente tutte le convergenze di ordine pari sono minori di  $\frac{a}{b}$ , e le convergenze di ordine dispari sono maggiori di  $\frac{a}{b}$ .

**Corollario 1.4.5.** *Nelle notazioni precedenti, per  $n \geq 2$  vale:*

$$c_m - c_{m-1} = \frac{p_m}{q_m} - \frac{p_{m-1}}{q_{m-1}} = \frac{(-1)^{m-1}}{q_{m-1} q_m}.$$

*Dimostrazione.* I numeratori e denominatori delle ridotte  $\alpha_m = \frac{p_m}{q_m}$  soddisfanno la relazione fondamentale (teorema [1.4.3]):

$$p_m q_{m-1} - p_{m-1} q_m = (-1)^{m-1}$$

e, dividendo entrambi i membri per la quantità  $q_n q_{n-1}$ , si ottiene la tesi.  $\square$

**Corollario 1.4.6.** *Nelle notazioni precedenti, per  $n \geq 3$  vale:*

$$c_m - c_{m-2} = \frac{p_m}{q_m} - \frac{p_{m-2}}{q_{m-2}} = \frac{a_m (-1)^{m-1}}{q_{m-1} q_m}.$$

*Dimostrazione.* Evidentemente

$$c_m - c_{m-2} = \frac{p_m}{q_m} - \frac{p_{m-2}}{q_{m-2}} = \frac{p_m q_{m-2} - p_{m-2} q_m}{q_m q_{m-2}}.$$

Nel numeratore dell'ultima frazione eseguiamo le sostituzioni

$$p_m = a_m p_{m-1} + p_{m-2} \qquad q_m = a_m q_{m-1} + q_{m-2},$$

e si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{p_m q_{m-2} - p_{m-2} q_m}{q_m q_{m-2}} &= (a_m p_{m-1} + p_{m-2}) q_{m-2} - p_{m-2} (a_m q_{m-1} + q_{m-2}) = \\ &= a_m (p_{m-1} q_{m-2} - p_{m-2} q_{m-1}) = a_m (-1)^{m-1} \end{aligned}$$

nelle quali l'ultima uguaglianza segue da [1.4.3] sostituendo  $m-1$  a  $m$ .  $\square$

**Teorema 1.4.7.** *Data una frazione continua aritmetica limitata le ridotte di ordine dispari  $c_{2m+1}$  costituiscono una successione crescente mentre le ridotte di ordine pari  $c_{2m}$  costituiscono una successione decrescente e le prime sono tutte minori delle seconde; di più, ogni ridotta di ordine maggiore o uguale a 3 è compresa fra le due che la precedono:*

$$c_1 < c_3 < c_5 < \cdots < c_{2m+1} < \cdots < c_{2m} < \cdots < c_4 < c_2.$$

*Dimostrazione.* Ponendo  $n=2$  e  $n=3$  in [1.4.4] e tenendo presente che i  $q_m$  sono positivi ( $m > 0$ ), si vede che

$$c_2 - c_1 = \frac{1}{q_2 q_1} > 0 \qquad c_3 - c_2 = -\frac{1}{q_3 q_2} < 0$$

rispettivamente. Queste disuguaglianze provano che  $c_1 < c_2$  e  $c_3 < c_2$ .

D'altra parte il corollario [1.4.5], per  $n=3$ , ci dice che

$$c_3 - c_1 = \frac{a_3 (-1)^2}{q_3 q_1} = \frac{a_3}{q_3 q_1} > 0,$$

essendo  $a_3, q_1$  e  $q_1$  interi positivi. Dunque  $c_1 < c_3$  e quindi per quanto visto poco sopra

$$c_1 < c_3 < c_2.$$



Analogamente ponendo  $n = 3$  e  $n = 4$  in [1.4.4] e poi  $n = 4$  in [1.4.5] troviamo che

$$c_3 < c_4 < c_2.$$

Procedendo successivamente in questo modo si ottengono le disuguaglianze

$$c_3 < c_5 < c_4$$

$$c_5 < c_6 < c_4$$

e così via. Combinando tutte queste disuguaglianze si ottiene

$$c_1 < c_3 < c_5 < \cdots < c_{2m+1} < \cdots < c_{2m} < \cdots < c_4 < c_2.$$

□

## 1.5 Frazioni continue ed equazioni lineari diofantee

### 1.5.1 L'equazione indeterminata $ax - by = \pm 1$ ( $(a, b) = 1$ )

Facciamo vedere come si possano usare le frazioni continue per risolvere l'equazione indeterminata  $ax - by = \pm 1$  dove  $a$  e  $b$  sono interi positivi dati e  $x$  e  $y$  sono interi incogniti. Consideriamo l'equazione diofantea  $ax - by = 1$  (l'equazione  $ax - by = -1$  è della stessa forma salvo lo scambio di posto tra  $x$  e  $y$ ). Gli interi  $a$  e  $b$  non possono avere divisori comuni maggiori di 1: infatti se un intero  $d$  divide sia  $a$  che  $b$  esso divide pure l'intero 1 del secondo membro dell'equazione e quindi deve essere necessariamente  $d = 1$ . In altre parole gli interi  $a$  e  $b$  devono essere coprimi:  $(a, b) = 1$ .

**Teorema 1.5.1.** *L'equazione diofantea  $ax - by = 1$ , dove  $a$  e  $b$  sono interi positivi primi tra loro, ha infinite soluzioni intere  $(x, y)$ .*

*Dimostrazione.* Se  $a$  e  $b$  sono due numeri coprimi, è possibile, grazie all'algoritmo di Euclide, trovare due numeri naturali  $x$  e  $y$  che soddisfano l'equazione

$ax - by = 1$ . Il procedimento usato per convertire  $\frac{a}{b}$  in frazione continua fornisce un buon procedimento per la costruzione di questi due numeri  $x$  e  $y$ . Supponiamo che la frazione continua sia

$$\frac{a}{b} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

L'ultima ridotta  $\frac{p_n}{q_n}$  è  $\frac{a}{b}$  stessa. La ridotta precedente  $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$  verifica:

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n-1}$$

cioè

$$a q_{n-1} - b p_{n-1} = (-1)^{n-1},$$

dal corollario [1.4.3]. Quindi, se prendiamo  $x = q_{n-1}$  e  $y = p_{n-1}$ , abbiamo proprio una soluzione dell'equazione  $ax - by = (-1)^{n-1}$ , con  $x$  e  $y$  numeri naturali. Questa tuttavia è una soluzione particolare e non la soluzione generale. Indichiamo con  $(x_0, y_0)$  la soluzione particolare. Se  $n$  è dispari, si ha l'equazione proposta. Se  $n$  è pari, si ha  $(-1)^{n-1} = -1$ , quindi il procedimento usato finora non risulta adatto. Ci sono però altri due metodi (che in realtà sono equivalenti), che ci permettono di risolvere questo problema. Il primo metodo consiste nel prendere  $x = b - q_{n-1}$  e  $y = a - p_{n-1}$  ottenendo

$$ax - by = a(b - q_{n-1}) - b(a - p_{n-1}) = -aq_{n-1} + bp_{n-1} = 1.$$

Il secondo consiste nel modificare la frazione continua sostituendo l'ultimo termine  $a_n$  con  $(a_n - 1) + \frac{1}{1}$ . La nuova frazione continua avrà così un termine in più rispetto all'originaria, e quindi la sua penultima ridotta fornirà una soluzione dell'equazione diofantea  $ax - by = 1$  ( $n$  è diventato dispari, quindi  $(-1)^{n-1} = 1$ ). Questa costruzione fornisce la soluzione per cui si ha che  $x$  è minore di  $b$  e  $y$  è minore di  $a$ .

Una volta che si è determinata una soluzione particolare  $(x_0, y_0)$  allora la soluzione generale sarà data da

$$x = x_0 + bt, \quad y = y_0 + at$$

dove  $t$  è un qualsiasi intero, positivo o zero. Proviamo questo fatto. Sia  $(x_0, y_0)$  una soluzione particolare e sia  $(x, y)$  una qualunque altra soluzione. Allora:

$$ax - by = 1$$

e

$$ax_0 - by_0 = 1,$$

e sottraendo si ottiene:

$$a(x - x_0) = b(y - y_0).$$

Questo prova che  $b$  divide il primo membro dell'uguaglianza ma  $b$  non ha divisori comuni con  $a$  quindi  $b$  deve dividere  $x - x_0$  cioè  $x - x_0$  multiplo intero di  $b$  e, per  $t$  intero, possiamo scrivere:

$$x = x_0 + tb$$

da cui si ha  $a(tb) = b(y - y_0)$  così che:

$$y = y_0 + ta.$$

Quindi tutte le soluzioni  $(x, y)$  dell'equazione  $ax - by = 1$  hanno questa forma. E viceversa si verifica direttamente che data una soluzione particolare  $(x_0, y_0)$  ogni coppia  $(x_0 + ta, y_0 + tb)$  per  $t$  intero è soluzione dell'equazione. Diciamo che i valori di  $x$  e  $y$  dati da  $(x_0 + ta, y_0 + tb)$  costituiscono la *soluzione generale* dell'equazione indeterminata  $ax - by = 1$ .  $\square$

**Esempio 1.5.** Risolviamo l'equazione diofantea  $27x + 43y = 1$ . Sviluppando in frazione continua il numero razionale  $\frac{27}{43}$  si ha:

$$\frac{27}{43} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5}}}}}$$

Il calcolo diretto prova che la penultima ridotta, cioè la quarta convergente (o ridotta di ordine 4), vale  $\frac{5}{8}$ . Allora:

$$27 \cdot 8 - 43 \cdot 5 = 1$$

quindi  $x = 8$  e  $y = 5$  è la soluzione che cercavamo.

### 1.5.2 La soluzione generale di $ax - by = c$ , $(a, b) = 1$

Abbiamo visto come risolvere l'equazione  $ax - by = 1$  con  $a$  e  $b$  interi positivi e primi tra loro. A questo punto è facile risolvere l'equazione  $ax - by = c$ , nella quale  $a$  e  $b$  sono interi positivi con  $(a, b) = 1$  e  $c$  è un intero qualunque. Sia  $(x_0, y_0)$  una soluzione particolare di  $ax - by = 1$  quindi

$$ax_0 - by_0 = 1$$

e, moltiplicando per  $c$  si ottiene:

$$a(cx_0) - b(cy_0) = c$$

e quindi  $(cx_0, cy_0)$  è soluzione particolare di  $ax - by = c$ . Si dimostra che la soluzione generale è della forma:

$$x = cx_0 + bt, \quad y = cy_0 + at$$

con  $t$  intero. Questa si può facilmente verificare sostituendola direttamente nell'equazione.

### 1.5.3 La soluzione generale di $ax + by = c$ , $(a, b) = 1$

La discussione di questa equazione è simile, a parte lievi modifiche, a quella dell'equazione  $ax - by = c$ . Supponendo ancora una volta che  $a$  e  $b$  siano interi positivi, troviamo anzitutto una soluzione particolare dell'equazione  $ax + by = 1$ ,  $(a, b) = 1$ . Sviluppiamo il numero razionale  $\frac{a}{b}$  in frazione continua con un numero pari di quozienti parziali. Sia  $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$  la penultima ridotta. Certo vale:

$$aq_{n-1} + bp_{n-1} = 1.$$

Ora, scriviamo l'equazione data nella forma:

$$ax + by = c \cdot 1 = c \cdot (aq_{n-1} + bp_{n-1})$$

e, cambiando l'ordine dei termini si ha:

$$a(cq_{n-1} - x) = b(y + cp_{n-1}). \quad (1.3)$$

Quindi l'intero  $b$  divide  $a(cq_{n-1} - x)$  ma  $(a, b) = 1$ . Dunque  $b$  deve dividere  $(cq_{n-1} - x)$ : esiste un intero  $t$  tale che  $cq_{n-1} - x = tb$  cioè  $x = cq_{n-1} - tb$ . Sostituendo questa espressione in (1.3) si ottiene:

$$a(tb) = b(y + cp_{n-1})$$

e, risolvendo rispetto a  $y$ :

$$y = at - cp_{n-1}.$$

Viceversa, qualunque sia l'intero  $t$ , posto  $x = cq_{n-1} - tb$  e  $y = at - cp_{n-1}$  si ha:

$$\begin{aligned} ax + by &= a(cq_{n-1} - tb) + b(at - cp_{n-1}) = \\ &= acq_{n-1} - tab + tab - bcp_{n-1} = c(aq_{n-1} - bp_{n-1}) = c \cdot 1 = c \end{aligned}$$

e l'equazione di partenza  $ax + by = c$  è soddisfatta. Abbiamo quindi provato che la soluzione generale dell'equazione  $ax + by = c$ ,  $(a, b) = 1$  è:

$$x = cq_{n-1} - tb$$

$$y = at - cp_{n-1}.$$

con  $t$  intero.

#### 1.5.4 L'equazione generale $Ax \pm By = \pm C$

Osserviamo preliminarmente che, eventualmente moltiplicando per  $-1$ , ogni equazione della forma  $\pm Ax \pm By = \pm C$  si può ricondurre ad uno dei due tipi seguenti:

$$Ax + By = \pm C \qquad Ax - By = \pm C \quad (1.4)$$

dove  $A$  e  $B$  sono interi positivi.

Non tutte le equazioni in questa forma ammettono soluzioni. Infatti sia  $d$  il massimo comune divisore degli interi  $A$  e  $B$ . Allora, se  $d$  non divide  $C$ , nessuna delle due equazioni in (1.4) ammette soluzioni intere: il primo membro sarebbe divisibile per  $d$  mentre il secondo non lo è. D'altra parte se  $C$  è divisibile per  $d$  allora possiamo dividere entrambi i membri per  $d$  riducendo le equazioni in (1.4) alla forma già trattata:  $ax \pm by = c$  con  $(a, b) = 1$ .

## Capitolo 2

# Numeri Irrazionali come frazioni continue illimitate

### 2.1 Premessa: le frazioni continue infinite

Fino a questo punto abbiamo considerato le frazioni continue finite e con l'algoritmo euclideo abbiamo trovato l'espressione dei numeri razionali in frazione continua: *ogni numero razionale si può sviluppare in frazione continua in modo essenzialmente unico*. In realtà è possibile rappresentare anche un numero irrazionale in termini di frazioni continue, ma in questo caso l'espansione va avanti all'infinito invece di giungere ad una fine.

Siano  $\alpha$  un numero irrazionale,  $a_0$  la sua parte intera e  $\alpha'$  la sua parte frazionaria; allora  $\alpha = a_0 + \alpha'$ , e, data la supposta irrazionalità di  $\alpha$  si ha necessariamente  $0 < \alpha' < 1$ . Poniamo  $\alpha' = \frac{1}{\alpha_1}$  allora

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{\alpha_1}$$

dove  $\alpha_1 > 1$ . Naturalmente  $\alpha_1$  è a sua volta irrazionale:  $a_0$  è intero e  $\alpha$  lo stiamo supponendo irrazionale. Così possiamo ripetere il ragionamento fino ad  $\alpha_n$  che possiamo quindi esprimere come:

$$\alpha_n = a_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}}$$

dove  $\alpha_{n+1} > 1$  e  $\alpha_{n+1}$  è un intero positivo.

Quindi arriviamo alla seguente espressione per il numero irrazionale  $\alpha$  :

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}}}}}. \quad (2.1)$$

I *termini*, o *quozienti parziali*  $a_0, \dots, a_n$  sono numeri naturali, e  $a_0$  è un intero che può essere positivo, negativo o uguale a zero. Il *quoziente completo* corrispondente a  $a_n$  è  $\alpha_n$ , o, equivalentemente,  $a_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}}$ . Il processo non potrà mai avere una fine perchè ogni quoziente completo  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  è a sua volta un numero irrazionale.

L'equazione (2.1) ci permette di esprimere il numero irrazionale di partenza  $\alpha$  in termini del quoziente completo  $\alpha_{n+1}$  e delle due convergenti  $\frac{p_n}{q_n}$  e  $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ . Infatti (2.1) equivale a:

$$\alpha = \frac{[a_0, a_1, \dots, a_n, \alpha_{n+1}]}{[a_1, a_2, \dots, a_n, \alpha_{n+1}]}.$$

Ora, dalla relazione [1.2.1], segue che:

$$[a_0, a_1, \dots, a_n, \alpha_{n+1}] = \alpha_{n+1}[a_0, a_1, \dots, a_n] + [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}] = \alpha_{n+1}p_n + p_{n-1},$$

e analogamente il denominatore sarà:

$$[a_1, a_2, \dots, a_n, \alpha_{n+1}] = \alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}.$$

Dopo aver in qualche modo osservato che la (2.1) è valida per ogni  $n$ , si avrebbe la tentazione di scrivere più semplicemente

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n + \frac{1}{a_{n+1} + \frac{1}{\dots}}}}}.$$



## 2.2 Definizioni e notazioni

Euristicamente una *frazione continua aritmetica illimitata* o *infinita* è una espressione della forma:

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n + \dots}}}}}$$

dove le somme ai denominatori procedono, appunto, all'infinito. Procediamo con un risultato di convergenza che ci servirà per trattare in maniera in maniera più rigorosa il concetto di frazione continua illimitata.

**Lemma 2.2.1.** *Sia data una successione qualunque di numeri naturali  $(a_k)_{k \geq 1}$ . Allora la successione  $(c_n)_{n \geq 1}$  definita per ricorrenza ponendo:*

$$\begin{aligned} c_1 &:= \frac{1}{a_1} \\ c_2 &:= \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} \\ &\dots \\ c_n &:= \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}}} \end{aligned}$$

*converge ad un numero reale compreso tra 0 e 1 estremi esclusi; cioè esiste  $\alpha \in ]0, 1[$  tale che:*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \alpha.$$

*Dimostrazione.* Il termine  $c_n$  della successione non è altro che, per definizione, la frazione continua finita  $[a_1, \dots, a_{n-1}, a_n]$ . Abbiamo provato precedentemente che tale frazione continua non è altro che il numero razionale  $\frac{p_n}{q_n}$  dove numeratore e denominatore sono ricorsivamente definiti da:

$$\text{i) } p_m = a_m p_{m-1} + p_{m-2}$$

$$\text{ii) } q_m = a_m q_{m-1} + q_{m-2}$$

con le condizioni iniziali  $p_{-1} = 1$  e  $p_0 = a_0$  per i numeratori mentre  $q_{-1} = 0$  e  $q_0 = 1$  per i denominatori. Abbiamo anche provato che le frazioni  $\frac{p_m}{q_m}$  sono ridotte ai minimi termini essendo:

$$p_m q_{m-1} - p_{m-1} q_m = (-1)^{m-1}.$$

In particolare da questa ultima uguaglianza segue che:

$$\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}} - \frac{p_m}{q_m} = \frac{(-1)^m}{q_{m+1} q_m}$$

e, poichè la successione dei denominatori  $q_m$  è strettamente monotona crescente (e quindi divergente, essendo costituita da tutti numeri naturali), da questa identità si deduce che:

$$c_2 < c_4 < c_6 < \dots < c_5 < c_3 < c_1$$

Basta sommare tra loro due identità "successive"

$$\frac{p_{m+2}}{q_{m+2}} - \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}} = \frac{(-1)^{m+1}}{q_{m+2} q_{m+1}}$$

e

$$\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}} - \frac{p_m}{q_m} = \frac{(-1)^m}{q_{m+1} q_m}$$

per avere

$$c_{m+2} - c_m = (-1)^m \frac{q_{m+2} - q_m}{q_{m+2} q_{m+1} q_m}.$$

Inoltre segue che le due successioni strettamente monotone  $c_2, c_4, c_6, \dots$  e  $c_1, c_3, c_5, \dots$  (rispettivamente crescente e decrescente) non solo convergono ai loro rispettivi estremi superiore e inferiore, in quanto limitate, ma che tali estremi (certamente diversi da 0 e da 1) coincidono.  $\square$

**Definizione 2.1.** Sia data una qualunque successione  $(a_n)_{n \geq 0}$  con  $a_0$  intero qualunque e  $a_1, a_2, \dots$  interi positivi. Si consideri la *frazione continua*

(aritmetica) illimitata di termini  $a_0, a_1, a_2, \dots$

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{\dots}}}}}$$

Il numero reale

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n]$$

si definisce *valore* della frazione continua e si pone:

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{\dots}}}}}$$

*Osservazione 6.* La definizione è ben posta in virtù del lemma [1.3.1].

Con abuso di notazione i simboli

$\alpha,$

$$[a_0, a_1, \dots, a_n, \dots]$$

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots}}}$$

denotano sia la frazione continua sia il suo valore, cioè il numero reale che è il limite della successione delle "somme parziali".

## 2.3 Rappresentazione di un numero irrazionale come frazione continua infinita (o illimitata)

**Proposizione 2.3.1.** *Sia  $\alpha$  un numero irrazionale arbitrario. Allora è univocamente individuata la successione di numeri naturali  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  tali che, posto  $a_0 = \text{Int}(\alpha)$  risulti:*

$$\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots].$$

*In altri termini  $\alpha$  è il valore della frazione continua  $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$  cioè il limite della successione:*

$$a_0 + \frac{1}{a_1}, a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}, a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}}, \dots$$

*Viceversa, ogni successione di numeri naturali  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  rimane associata nel modo indicato ad uno ed un solo numero irrazionale  $\alpha$  avente come parte intera un numero naturale  $a_0$  arbitrariamente fissato.*

*Dimostrazione.* Come nel caso dei numeri razionali, si tratta di una dimostrazione di tipo costruttivo. Sia  $\alpha$  un numero irrazionale arbitrario. Allora

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{\alpha_1}$$

dove

$$\begin{aligned} a_0 &= \text{Int}(\alpha) \quad (a_0 = \text{parte intera di } \alpha) \\ 0 &< \frac{1}{\alpha_1} < 1 \quad (\frac{1}{\alpha_1} = \text{parte frazionaria di } \alpha). \end{aligned}$$

Ora,  $\alpha_1 > 1$  perciò

$$\alpha_1 = a_1 + \frac{1}{\alpha_2}$$

dove

$$a_1 = \text{Int}(\alpha_1) \quad (a_1 = \text{parte intera di } \alpha_1)$$

$$0 < \frac{1}{\alpha_2} < 1 \quad \left(\frac{1}{\alpha_2} = \text{parte frazionaria di } \alpha_1\right).$$

Iterando il procedimento si ottiene

$$\alpha_n = a_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}}$$

dove

$$a_n = \text{Int}(\alpha_n) \quad (a_n = \text{parte intera di } \alpha_n)$$

$$\text{e } 0 < \frac{1}{\alpha_{n+1}} < 1 \quad \left(\frac{1}{\alpha_{n+1}} = \text{parte frazionaria di } \alpha_n\right).$$

Quindi:

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}}}}}}$$

dove  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sono numeri naturali (notiamo che  $a_0$  può essere positivo, negativo o nullo, se  $\alpha > 1$  allora  $a_0 > 0$ ). Utilizzando la regola di Eulero, valida anche per numeri reali qualsiasi, si ottiene:

$$\alpha = \frac{P(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, \alpha_{n+1})}{P(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, \alpha_{n+1})}$$

dove

$$P(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, \alpha_{n+1}) = \alpha_{n+1}P(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n) + P(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) =$$

$$= \alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}$$

$$P(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, \alpha_{n+1}) = \alpha_{n+1}P(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) + P(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) =$$

$$= \alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}$$

Quindi

$$\alpha = \frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}}. \tag{2.2}$$

A questo punto è opportuno mostrare che la convergente  $\frac{p_n}{q_n}$  effettivamente tende al numero irrazionale  $\alpha$  per  $n \rightarrow +\infty$ . Mostriamo, quindi, che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_n}{q_n} = \alpha$$

o, equivalentemente,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| = 0.$$

Ora,

$$\begin{aligned} \left| \frac{p_n}{q_n} \right| &= \left| \frac{\alpha_{n+1} p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \\ &= \left| \frac{p_{n-1} q_n - p_n q_{n-1}}{q_n (\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1})} \right| = \\ &= \frac{1}{q_n (\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1})} \end{aligned}$$

per il corollario [1.4.3]. Ora poichè

$$\alpha_{n+1} > a_{n+1}$$

si ottiene che:

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n (a_{n+1} q_n + q_{n-1})} = \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

ma essendo  $q_0 < q_1 < \dots < q_n$  naturali strettamente crescenti si ha che:

$$\frac{1}{q_n q_{n+1}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty$$

quindi

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty$$

cioè  $\frac{p_n}{q_n}$  converge all'irrazionale  $\alpha$  per  $n \rightarrow +\infty$ . Rimane adesso da stabilire, come nel caso del teorema [1.1.1], che la rappresentazione così determinata è unica, nel senso che da un'identità del tipo:

$$\alpha = \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \dots}}} = \frac{1}{k_1 + \frac{1}{k_2 + \frac{1}{k_3 + \dots}}}$$

si deduce necessariamente  $q_1 = k_1, q_2 = k_2, \dots$ . La cosa sarebbe immediata se si avesse ancora a disposizione il "piccolo lemma" di cui ci siamo serviti nel corso della dimostrazione del teorema [1.1.1], ma in questo caso abbiamo di

fronte un algoritmo infinito.

Passiamo agli inversi delle identità in esame:

$$q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \frac{1}{\dots}}} = k_1 + \frac{1}{k_2 + \frac{1}{k_3 + \frac{1}{\dots}}}$$

Le due frazioni continue che compaiono nella nuova identità corrispondono, in virtù del lemma [2.2.1], a numeri reali diversi da zero e minori di 1, quindi si deduce che  $q_1$  e  $k_1$  devono essere proprio le parti intere dei numeri in questione, e quindi  $q_1 = k_1$ . Confrontiamo ora

$$\frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \frac{1}{\dots}}} = \frac{1}{k_2 + \frac{1}{k_3 + \frac{1}{\dots}}},$$

che essendo ancora due numeri reali diversi da zero possiamo invertire, trovando:

$$q_2 + \frac{1}{q_3 + \frac{1}{\dots}} = k_2 + \frac{1}{k_3 + \frac{1}{\dots}}.$$

Ma possiamo ripetere il ragionamento, dovrà essere  $q_2 = k_2$ , e così via.  $\square$

*Osservazione 7.* Nel corso della dimostrazione di [2.3.1] abbiamo provato in particolare (2.2): la relazione tra  $\alpha$  e un qualsiasi quoziente completo è data dalla formula:

$$\alpha = \frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}}.$$

*Ricapitolazione.* Facciamo un piccolo riassunto di quanto abbiamo visto finora. Ogni numero reale  $\alpha$  si può rappresentare in uno e un solo modo come  $\alpha = Int(\alpha) + Mt(\alpha)$  dove  $Int(\alpha)$  è un numero intero chiamato *parte intera* di  $\alpha$  definito come:

$$Int(\alpha) = \max \{n \in Z, n \leq \alpha\}$$

mentre  $Mt(\alpha)$  è un elemento di  $[0, 1[$  chiamato *parte frazionaria* di  $\alpha$ :

$$Mt(\alpha) := \alpha - Int(\alpha)$$

Risulta  $Mt(\alpha) = 0$  se e solo se  $x$  è un numero reale intero. Se  $\alpha$  è *razionale* allora si può rappresentare in modo essenzialmente unico come frazione continua finita mentre se  $\alpha$  è irrazionale si può scrivere in uno ed un solo modo come frazione continua *infinita*. Mettendo insieme i teoremi [1.3.1][1.7.2] enunciamo il seguente teorema fondamentale di rappresentazione dei reali in frazione continua.

**Teorema 2.3.2** (Sulla rappresentazione di un numero reale in frazione continua). *Sia  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Supponiamo che la parte frazionaria di  $\alpha$  sia non nulla (cioè  $\alpha$  non è un numero intero). Allora, se  $\alpha$  è razionale,  $\alpha$  si può rappresentare in uno ed un solo modo come frazione continua limitata, vale a dire nella forma:*

$$\alpha = [Int(\alpha), a_1, a_2, \dots, a_n] = Int(\alpha) + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}}$$

con  $a_n \geq 2$ . Se, invece,  $\alpha$  è irrazionale allora  $\alpha$  si può rappresentare univocamente come frazione continua illimitata:

$$\alpha = [Int(\alpha), a_1, a_2, \dots, a_n, \dots] = Int(\alpha) + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\dots}}}}$$

*Osservazione 8.* Le frazioni continue forniscono un mezzo per costruire numeri irrazionali. Di più: stabiliscono una corrispondenza biunivoca tra gli irrazionali maggiori di 1 e le sequenze infinite di interi positivi  $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ .

*Osservazione 9.* Abbiamo definito la *profondita'* di un numero razionale come la "lunghezza"  $n$  della sequenza di interi  $a_1, \dots, a_n$  che interviene nello sviluppo in frazione continua del numero stesso. Alla luce del teorema [1.6.3] è ragionevole dire che la *profondita'* dei numeri irrazionali è *infinito*. La rappresentazione dei reali in frazione continua è in un certo senso la migliore possibile: consente di comprendere la natura più complessa dei numeri irrazionali e illustrare il rapporto tra numero irrazionale e *infinito*.



*Osservazione 10.* Osserviamo esplicitamente che, dato un numero reale  $\alpha$ , la rappresentazione in frazione continua che si può univocamente associare ad esso si ottiene semplicemente attraverso la seguente regola dei quozienti parziali. Si comincia a considerare la parte intera di  $\alpha$  ossia

$$Int(\alpha) := \max \{n \in \mathbb{Z}, n \leq \alpha\}$$

e si ha evidentemente

$$\alpha = Int(\alpha) + \alpha - Int(\alpha) = Int(\alpha) + Mt(\alpha).$$

Se  $Mt(\alpha) \neq 0$  possiamo prenderne l'inverso e porre

$$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha - Int(\alpha)}$$

e ottenere

$$\alpha = Int(\alpha) + \frac{1}{\alpha_1}.$$

A questo punto se  $Mt(\alpha_1)$ , cioè  $\alpha_1$  è intero, ci fermiamo, altrimenti procediamo ponendo

$$\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - Int(\alpha_1)}$$

e così via. *Si incontra una parte frazionaria nulla dopo  $n$  passi, e quindi l'inverso non si può fare, se e solo se  $\alpha$  è razionale di profondità  $n$ .*<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Una formalizzazione di questo procedimento per i numeri irrazionali positivi minori di 1 è la seguente. Sia  $M := \{x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} : 0 < x < 1\}$ . L'insieme  $M$  è l'insieme dei reali irrazionali positivi minori di 1.

Definiamo le funzioni  $K$  e  $T$  come segue:

$$K : [0, 1[ \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$K(x) \equiv Kx := Int\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$T : [0, 1[ \rightarrow [0, 1[$$

$$T(x) \equiv Tx := Mt\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - Int\left(\frac{1}{x}\right) = x - Kx$$

La funzione  $T$  è la trasformazione da un resto al resto successivo della frazione continua.

Definiamo la successione  $x_1, x_2, \dots$  dei resti del numero irrazionale  $x$  :

$$\begin{aligned}
 x_1 &= x \\
 x_2 &= Tx_1 \\
 x_3 &= Tx_2 = T^2x_1 = T^2x \\
 x_4 &= Tx_3 = T^3x \\
 &\dots \\
 x_{n+1} &:= Tx_n = T^n x
 \end{aligned}$$

Ora le parti intere  $k_1, k_2, \dots$  degli inversi dei resti sono le cifre della frazione continua del numero irrazionale  $x$ . La successione delle parti intere degli inversi dei resti è data da:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= Kx_1 = Kx \\
 k_2 &= Kx_2 = K(Tx) \\
 &\dots \\
 k_n &:= K(x_n) = K(T^{n-1}x)
 \end{aligned}$$

Dunque

$$x = \frac{1}{k_1 + \frac{1}{k_2 + \frac{1}{k_3 + \dots}}}$$

# Capitolo 3

## Frazioni continue periodiche

### 3.1 Definizioni e primi esempi

**Definizione 3.1.** Una frazione continua aritmetica illimitata  $\alpha = [a_0, a_1, a_3, \dots]$  si definisce *periodica* se da un certo indice in poi, gli interi  $a_i$  si ripetono periodicamente cioè se esistono  $h \geq 0$  e  $T \geq 1$  interi tali che per ogni indice  $m \geq h$  si ha

$$a_{m+T} = a_m. \quad (*)$$

In questo caso si pone

$$\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_{h-1}, \overline{a_h, a_{h+1}, \dots, a_{h+T-1}}]$$

Il minimo naturale  $T$  per cui vale la (\*) si chiama *periodo* mentre il minimo naturale  $h > 0$  per cui vale la (\*) si chiama *antiperiodo*. Una frazione continua periodica si dice *semplicemente periodica* se  $h = 0$  e si scrive  $[\overline{a_0, a_1, \dots, a_i, \dots, a_{T-1}}]$ . In tal caso nella (\*) può essere  $m = h = 0$ .

Ricordiamo che un numero complesso si definisce *algebrico di ordine  $n$*  se è radice di un'equazione algebrica a coefficienti interi di grado  $n$

$$a_n x^n + \dots + a_i x^i + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

con  $a_i \in Z, i = 0, \dots, n; a_n \neq 0$  e non di una equazione di grado minore.

Un numero algebrico di ordine  $n$  si dice *intero algebrico di ordine  $n$*  se

$a_n = 1$ .

Un numero complesso si dice *trascendente* se non è algebrico ossia se non è radice di un polinomio a coefficienti interi.

I numeri razionali e solo essi sono numeri algebrici del primo ordine.

**Definizione 3.2.** I numeri (reali) algebrici del secondo ordine ossia gli irrazionali soluzioni di equazioni della forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

con  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ,  $a \neq 0$ ,  $c \neq 0$  e  $b^2 - 4ac > 0$  si definiscono *irrazionali quadratici*. Se  $\alpha \in \mathbb{R}$  è irrazionale quadratico definiamo *coniugato* di  $\alpha$  il numero reale  $\alpha'$  che è l'altra soluzione dell'equazione del secondo grado a coefficienti interi di cui è radice  $\alpha$ .

## 3.2 Irrazionali quadratici

Gli *irrazionali quadratici* sono i più semplici e familiari numeri irrazionali, ossia i numeri irrazionali che sorgono come soluzioni di equazioni quadratiche con coefficienti interi. In particolare, la radice quadrata di un numero  $N$ , che non è un quadrato perfetto, è un irrazionale quadratico, poichè è soluzione dell'equazione  $x^2 - N = 0$ . Le frazioni continue degli irrazionali quadratici hanno notevoli proprietà, che ora esamineremo. Iniziamo con qualche esempio numerico.

**Esempio 3.1.** Vediamo come determinare lo sviluppo in frazione continua di  $\sqrt{2}$  che sappiamo essere irrazionale dai tempi di Pitagora (VI secolo a.C.). Poichè  $1 < \sqrt{2} < 2$  (infatti  $1 < \sqrt{2} < 2 \Leftrightarrow 1 < 2 < 4$  vero!) la parte intera è 1 e quindi abbiamo  $a_0 = 1$  e

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\alpha_1}$$

con  $\alpha_1 > 1$ . Da qui otteniamo:

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2} + 1}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = \sqrt{2} + 1.$$

Da qui si ha:

$$\alpha_1 = 2 + \frac{1}{\alpha_2}$$

con  $\alpha_2 > 1$  e  $a_1 = 2$  e:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\alpha_2}}$$

Da  $\alpha_1 = \sqrt{2} + 1$  e  $\alpha_1 = 2 + \frac{1}{\alpha_2}$  si ottiene:

$$\sqrt{2} + 1 = 2 + \frac{1}{\alpha_2}$$

e quindi:

$$\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1 = 2 + \frac{1}{\alpha_3}$$

con  $\alpha_3 > 1$  e  $a_2 = 2$ . Come prima abbiamo avuto  $\alpha_1 = \sqrt{2} + 1$  e  $a_1 = 2$ , ora abbiamo  $\alpha_2 = \sqrt{2} + 1$  e  $a_2 = 2$ . E' chiaro che otterremo ancora una volta  $\alpha_3 = \sqrt{2} + 1$  e  $a_3 = 2$  e che quindi risulterà sempre  $a_i = 2 \forall i \in \mathbb{N}$ . Ecco quindi lo sviluppo in frazione continua che cercavamo:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\dots}}}}}} = [1; 2, 2, 2, \dots] := [1; \bar{2}].$$

Osserviamo le convergenti di questa frazione continua.

La ridotta di ordine 0 cioè 1 è banalmente una approssimazione per difetto di  $\sqrt{2}$ ; la ridotta di ordine 1:

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$$

è invece una approssimazione per eccesso. Andiamo meglio con la ridotta di ordine 2 cioè:

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{5} = 1,4$$

e andiamo ancora meglio con la terza ridotta:

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = \frac{17}{12} = 1.466666666\dots$$

La frazione  $\frac{17}{12}$  fu individuata sin dall'antichità come una buona approssimazione della *costante di Pitagora* (nel senso che le prime due cifre decimali sono quelle esatte).

Analogamente per il numero irrazionale  $\sqrt{3}$  si ottiene:

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \dots}}}}} = [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots] := [1; \overline{1, 2}].$$

**Esempio 3.2.** Per un esempio un po' più complicato consideriamo il numero irrazionale  $\alpha = \frac{24 - \sqrt{15}}{17}$  e cerchiamone lo sviluppo in frazione continua. Sappiamo già che  $\alpha$  si rappresenta in un modo unico in frazione continua illimitata.

Poichè  $\frac{24 - \sqrt{15}}{17}$  si trova tra 3 e 4, la parte intera è 1. Il primo passo, come prima, consiste nello scrivere:

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha_1}$$

così che:

$$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha - 1} = \frac{17}{7 - \sqrt{15}} = \frac{7 + \sqrt{15}}{2}.$$

La parte intera di  $\alpha_1$  è 5 quindi:

$$\alpha_1 = 5 + \frac{1}{\alpha_2}$$

con

$$\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - 5} = \frac{2}{\sqrt{15} - 3} = \frac{\sqrt{15} + 3}{3}.$$

La parte intera di  $\alpha_2$  è 2 quindi:

$$\alpha_2 = 2 + \frac{1}{\alpha_3}$$

dove

$$\alpha_3 = \frac{1}{\alpha_2 - 2} = \frac{3}{\sqrt{15} - 3} = \frac{\sqrt{15} + 3}{2}.$$

La parte intera di  $\alpha_3$  è 3 quindi:

$$\alpha_3 = 3 + \frac{1}{\alpha_4}$$

dove

$$\alpha_4 = \frac{1}{\alpha_3 - 3} = \frac{2}{\sqrt{15} - 3} = \frac{\sqrt{15} + 3}{3}.$$

Poichè  $\alpha_4 = \alpha_2$ , gli ultimi due passi saranno ripetuti all'infinito, e la frazione continua che si ottiene è periodica mista:

$$\frac{24 - \sqrt{15}}{17} = 1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \dots}}}}}} = [1; 5, 2, 3, 2, 3, 2, \dots] := [1; 5, \overline{2, 3}].$$

Proviamo ora che gli irrazionali quadratici sono tutti e soli i numeri che si presentano nella forma

$$\frac{P \pm \sqrt{D}}{Q}$$

dove  $P, Q, D$  sono interi con  $P \neq 0$  e  $D$  positivo che non è un quadrato perfetto, o equivalentemente nella forma

$$A + B\sqrt{D}$$

dove  $A$  e  $B \neq 0$  sono razionali arbitrari e  $D$  intero positivo ma non un quadrato perfetto.

Osserviamo anzitutto che, fissato un qualunque intero  $D$  che non sia un

quadrato perfetto il numero  $\frac{P \pm \sqrt{D}}{Q}$  si può scrivere in un solo modo, salvo variazioni banali come

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{5} = \frac{6}{4} + \frac{2}{6}\sqrt{5}.$$

Vale infatti la seguente proposizione.

**Proposizione 3.2.1.** *Siano  $A_1, A_2, B_1, B_2 \in Z$  e  $D$  intero positivo ma non un quadrato perfetto. Allora vale:*

$$A_1 + B_1\sqrt{D} = A_2 + B_2\sqrt{D} \iff A_1 = A_2 \text{ e } B_1 = B_2$$

*Dimostrazione.* Scriviamo l'uguaglianza come

$$A_1 - A_2 = (B_2 - B_1)\sqrt{D}.$$

Se fosse  $B_2 \neq B_1$  allora

$$\sqrt{D} = \frac{A_1 - A_2}{B_2 - B_1}$$

sarebbe razionale contro l'ipotesi. Quindi deve essere  $B_1 = B_2$  e conseguentemente  $A_1 = A_2$  come si voleva dimostrare.  $\square$

*Osservazione 11.* Tra i numeri della forma  $A + B\sqrt{D}$  consideriamo compresi anche quelli con  $B = 0$  cioè i numeri razionali e proveremo che vale

$$A \pm B\sqrt{D} \text{ è irrazionale quadratico} \iff B \neq 0.$$

*Osservazione 12.* Se  $\alpha$  e  $\beta$  sono numeri della forma  $A + B\sqrt{D}$  allora lo sono anche

$$\alpha + \beta, \quad \alpha - \beta, \quad \alpha \cdot \beta, \quad \frac{\alpha}{\beta}.$$

**Proposizione 3.2.2.** *Ogni numero della forma*

$$A + B\sqrt{D},$$

con  $A$  e  $B \neq 0$  razionali  $D$  intero positivo ma non un quadrato perfetto, è irrazionale quadratico, vale a dire radice di un'equazione del secondo grado  $ax^2 + bx + c = 0$  i cui coefficienti  $a > 0, b, c$  sono interi tali che  $b^2 - 4ac > 0$ . Di più: il coniugato di  $x$  è

$$x' = A - B\sqrt{D}.$$



*Dimostrazione.* Ricordiamo preliminarmente che ogni equazione del secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a > 0 \quad (3.1)$$

ammette radici reali se e solo se  $b^2 - 4ac \geq 0$  e, in questo caso, ha per radici

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = A + B\sqrt{D}$$

$$x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = A - B\sqrt{D}$$

dove  $D = b^2 - 4ac$ . Conseguentemente valgono le relazioni<sup>1</sup>

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2A$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = A^2 - B^2D$$

Perciò se  $a \neq 0$  possiamo scrivere l'equazione (3.1) come

$$x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a}$$

e quindi come

$$x^2 - 2Ax + A^2 - B^2D = 0 \quad (3.2)$$

Ora, sia  $x$  un numero reale della forma  $x = A + B\sqrt{D}$ , con  $A$  e  $B \neq 0$  razionali e  $D$  intero positivo ma non un quadrato perfetto. Dobbiamo provare che  $x$  è radice di un'equazione del secondo grado  $ax^2 + bx + c = 0$  i cui coefficienti  $a > 0, b, c$  sono interi tali che  $b^2 - 4ac > 0$ . I numeri  $x = A + B\sqrt{D}$  e  $x' = A - B\sqrt{D}$  soddisfano (3.2). Infatti si prova per sostituzione diretta che

$$(A \pm B\sqrt{D})^2 - 2A(A \pm B\sqrt{D}) + A^2 - B^2D =$$

---

<sup>1</sup>E' noto che data un'equazione di secondo grado  $ax^2 + bx + c = 0$  con  $b^2 - 4ac \geq 0$  valgono le seguenti relazioni che legano la somma e il prodotto delle radici  $x_1, x_2$  con i coefficienti dell'equazione:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

$$= A^2 \pm 2AB\sqrt{D} + B^2D - 2A^2 \mp 2AB\sqrt{D} + A^2 - B^2D = 0.$$

Ora, l'equazione  $x^2 - 2Ax + A^2 - B^2D = 0$  non è necessariamente a coefficienti interi ma indicando con  $a$  in denominatore comune dei due numeri razionali  $2A$  e  $A^2 - B^2D$  e moltiplicando per  $a$  entrambi i membri di (3.2) si ottiene l'equazione del secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

i cui coefficienti  $a > 0$ ,  $b = -2aA$ ,  $c = a(A^2 - B^2D)$  sono interi.

Infine il discriminante di quest'ultima equazione  $b^2 - 4ac$  è positivo; infatti

$$b^2 - 4ac = (-2aA)^2 - 4a^2(A^2 - B^2D) = 4a^2B^2D > 0$$

poichè  $D$  si è supposto positivo. Si osservi pure che  $b^2 - 4ac$  non è un quadrato perfetto.  $\square$

**Proposizione 3.2.3.** *Un irrazionale quadratico  $A + B\sqrt{D}$  soddisfa a una ed una sola equazione del secondo grado  $ax^2 + bx + c = 0$  nella quale i coefficienti  $a, b, c$  sono interi primi tra loro.*

*Dimostrazione.* Se  $A + B\sqrt{D}$  fosse radice di

$$g_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$$

ed anche di

$$g_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$$

allora sarebbe pure radice dell'equazione

$$a_2g_1(x) - a_1g_2(x) = (a_2b_1 - a_1b_2)x + (a_2c_1 - a_1c_2) = 0.$$

Ora, se

$$a_2b_1 - a_1b_2 \neq 0$$

si avrebbe

$$x = -\frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_2b_1 - a_1b_2}$$

e il numero sarebbe razionale contro l'ipotesi. In questo caso  $A + B\sqrt{D}$  non può soddisfare ad entrambe le ipotesi. D'altra parte se  $a_2b_1 - a_1b_2 = 0$ , l'uguaglianza

$$(a_2b_1 - a_1b_2)x + (a_2c_1 - a_1c_2) = 0$$

implica che  $a_2c_1 - a_1c_2 = 0$  e quindi che

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = k$$

così che  $a_2 = ka_1, b_2 = kb_1, c_2 = kc_1$  e le due equazioni di secondo grado  $g_1(x) = 0$  e  $g_2(x) = 0$  sono in effetti la medesima equazione poichè una è data dall'altra moltiplicata per un fattore.  $\square$

*Osservazione 13.* Sia  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Allora

- $\alpha$  è irrazionale quadratico

$\Updownarrow$  *definizione*

- $\alpha$  è radice di un'equazione del secondo grado a coefficienti interi ma non di una di grado minore

$\Updownarrow$  *proposizione*

- $\alpha$  radice di un'equazione del secondo grado  $ax^2 + bx + c = 0$  i cui coefficienti  $a > 0, b, c$  sono interi tali che  $b^2 - 4ac > 0$

$\Updownarrow$  *proposizione*

- $\alpha$  si presenta nella forma  $A + B\sqrt{D}$  con  $A$  e  $B \neq 0$  razionali e  $D$  intero positivo ma non un quadrato perfetto.

*Osservazione 14.* Se  $\alpha \in \mathbb{R}$  è irrazionale quadratico abbiamo definito *coniugato* di  $\alpha$  il numero reale  $\alpha'$  che è l'altra soluzione dell'equazione del secondo grado a coefficienti interi di cui è radice  $\alpha$ . Dunque

$$\alpha = A + B\sqrt{D} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha' = A - B\sqrt{D}$$

**Proposizione 3.2.4** (Proprietà del coniugato). *Siano  $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in R$  allora valgono:*

$$i) (\alpha')' = \alpha$$

$$ii) (\alpha_1 + \alpha_2)' = \alpha_1' + \alpha_2'$$

$$iii) (\alpha_1 - \alpha_2)' = \alpha_1' - \alpha_2'$$

$$iv) (\alpha_1 \cdot \alpha_2)' = \alpha_1' \cdot \alpha_2'$$

$$v) \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)' = \frac{\alpha_1'}{\alpha_2'}$$

*Dimostrazione.* Proviamo i) e ii).

i) Il coniugato del coniugato di  $\alpha$  è  $\alpha$ . Questo segue direttamente dalla definizione di coniugato e dal fatto che un'equazione di secondo grado non può avere più di due radici.

ii) Siano  $\alpha_1 = A_1 + B_1\sqrt{D}$  e  $\alpha_2 = A_2 + B_2\sqrt{D}$ . Allora il coniugato della somma è

$$\begin{aligned} (\alpha_1 + \alpha_2)' &= [(A_1 + A_2) + (B_1 + B_2)\sqrt{D}]' = \\ &= (A_1 + A_2) - (B_1 + B_2)\sqrt{D}. \end{aligned}$$

D'altra parte la somma dei coniugati è

$$\begin{aligned} \alpha_1' + \alpha_2' &= (A_1 + B_1\sqrt{D})' + (A_2 + B_2\sqrt{D})' = A_1 - B_1\sqrt{D} + A_2 - B_2\sqrt{D} = \\ &= (A_1 + A_2) - (B_1 + B_2)\sqrt{D}. \end{aligned}$$

Dal confronto delle due espressioni segue la tesi  $(\alpha_1 + \alpha_2)' = \alpha_1' + \alpha_2'$ .  $\square$

### 3.3 Frazioni continue puramente periodiche

Abbiamo provato <sup>2</sup> che se

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots \frac{1}{a_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}}}}$$

in cui

$$\alpha_{n+1} = a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+2} + \frac{1}{a_{n+3} + \dots}}$$

---

<sup>2</sup>capitolo 2, osservazione 7

allora

$$\alpha = \frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}} \quad (3.2.1)$$

dove  $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$  e  $\frac{p_n}{q_n}$  sono le ridotte corrispondenti, rispettivamente, ai quozienti parziali  $a_{n-1}$  e  $a_n$ . In effetti la (3.2.1) fa vedere che possiamo trattare

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}}}}}$$

come se fosse una frazione continua limitata e, nel calcolo di  $\alpha$ , possiamo considerare  $\alpha_{n+1}$  come un vero quoziente parziale.

Nel caso di una frazione continua periodica pura

$$\alpha = [\overline{a_0, a_1, \dots, a_n}] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}}}}}$$

si vede che

$$\alpha_{n+1} = a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+2} + \frac{1}{a_{n+3} + \dots}} = \alpha$$

e la (3.2.1) ci dice che il numero  $\alpha$  si può calcolare mediante la formula:

$$\alpha = \frac{\alpha p_n + p_{n-1}}{\alpha q_n + q_{n-1}} \quad (3.2.2).$$

**Teorema 3.3.1.** *Sia  $\alpha$  il valore della frazione continua puramente periodica  $[\overline{a_0, a_1, \dots, a_n}]$ . Allora valgono i seguenti fatti:*

i)  $\alpha$  è irrazionale quadratico

ii)  $\alpha > 1$

iii) Se  $\beta$  è il valore della frazione continua a periodo invertito cioè

$\beta = [\overline{a_n, a_{n-1}, \dots, a_0}]$  allora  $\alpha' = -\frac{1}{\beta}$  è il coniugato di  $\alpha$  cioè l'altra radice (o radice coniugata) dell'equazione di secondo grado di cui  $\alpha$  è radice. Di più

$$-1 < \alpha' < 0.$$

**Definizione 3.3.** Nelle ipotesi del teorema[3.3.1] se valgono le tre condizioni i), ii) iii) allora l'irrazionale quadratico  $\alpha$  si dice *quadratico ridotto* (o semplicemente *ridotto*).

*Dimostrazione.* (del teorema 3.3.1)

Sia  $\alpha = [\overline{a_0, a_1, \dots, a_n}]$ . Se il periodo inizia con  $a_0$  allora

$a_0 = a_{n+1} \geq 1$ , e cioè  $\alpha > 1$  (ii).

Inoltre dall'equazione generale (3.2.2)

$$\alpha = \frac{\alpha p_n + p_{n-1}}{\alpha q_n + q_{n-1}}$$

segue che

$$q_n \alpha^2 - (p_n - q_{n-1})\alpha - p_{n-1} = 0. \quad (*)$$

Il polinomio di secondo grado

$$f(x) = q_n x^2 - (p_n - q_{n-1})x - p_{n-1}$$

è irriducibile in  $Q[x]$ , poichè l'equazione associata (\*) non ha radici razionali (la frazione continua non è finita e, in quanto tale, il numero  $\alpha$  che essa rappresenta è irrazionale) (i).

Infine per la regola di Eulero si ha:

$$p_n = P(a_0, a_1, \dots, a_n) \qquad q_n = P(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Consideriamo ora la frazione continua che si ottiene da  $\alpha$  rovesciando il periodo:

$$\beta = [\overline{a_n, a_{n-1}, \dots, a_0}].$$

Notiamo che  $\beta$  è maggiore di 1 essendo  $a_n \geq 1$  e dall'equazione generale si ha:

$$\beta = \frac{\beta_{n+1} p_n + q_n}{\beta_{n+1} p_{n-1} + p_{n-1}} = \frac{\beta p_n + q_n}{\beta p_{n-1} + p_{n-1}}$$

da cui

$$p_{n-1} \beta^2 - (p_n - q_{n-1})\beta - q_n = 0$$

che è equivalente all'equazione:

$$q_n \left( -\frac{1}{\beta} \right)^2 - (p_n - q_{n-1}) \left( -\frac{1}{\beta} \right) - p_{n-1} = 0$$

Allora  $-\frac{1}{\beta}$  è zero di  $f(x)$  diverso da  $\alpha$  poichè  $\beta > 1$  si ha che  $-1 < -\frac{1}{\beta} < 0$ , cioè  $-\frac{1}{\beta} = (\alpha')$  soddisfa la iii).  $\square$

*Osservazione 15.* Le frazioni continue periodiche si possono suddividere così:

- Frazioni continue puramente periodiche, ovvero della forma

$$\alpha = [\overline{a_0, a_1, \dots, a_n}].$$

In questo caso abbiamo dimostrato che il coniugato algebrico  $\alpha'$  soddisfa la condizione  $-1 < \alpha' < 0$ .

- Frazioni continue periodiche miste il cui antiperiodo è costituito da un solo quoziente, quindi della forma

$$\alpha = [a_0, \overline{a_1, \dots, a_n}].$$

In questo caso si dimostra che il coniugato algebrico  $\alpha'$  è minore di  $-1$  oppure maggiore di  $0$ .

- Frazioni continue periodiche miste il cui antiperiodo è costituito da almeno due quozienti come

$$\alpha = [a_0, a_1, a_2, \overline{a_3, \dots, a_n}].$$

In questo caso si dimostra che il coniugato algebrico  $\alpha'$  è sempre maggiore di  $0$ .

**Esempio 3.3.** Sia  $\alpha$  il valore della frazione continua periodica pura  $[4, 1, 3]$ :

$$\alpha = [4, 1, 3] = 4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \dots}}}}}$$

Le prime convergenti sono

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{4}{1}; \quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{5}{1}; \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{19}{4}.$$

Otteniamo quindi

$$\alpha = \frac{\alpha p_2 + p_1}{\alpha q_2 + q_1} = \frac{19\alpha + 5}{4\alpha + 1}$$

cioè  $\alpha$  è radice della seguente equazione del secondo grado a coefficienti interi:

$$4\alpha^2 - 18\alpha - 5 = 0.$$

Consideriamo ora il numero reale  $\beta$  valore della frazione continua che si ottiene da  $[\overline{4, 1, 3}]$  invertendo il periodo vale a dire:

$$\beta = [\overline{3, 1, 4}].$$

Le prime convergenti sono

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{3}{1}; \quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{4}{1}; \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{19}{5}.$$

Si ha quindi

$$\beta = \frac{\beta p_2 + p_1}{\beta q_2 + q_1} = \frac{19\beta + 4}{5\beta + 1}$$

e  $\beta$  è radice della seguente equazione quadratica:

$$5\beta^2 - 18\beta - 4 = 0.$$

Questa si può scrivere nella forma

$$4 \left( -\frac{1}{\beta} \right)^2 - 18 \left( -\frac{1}{\beta} \right) - 5 = 0.$$

Quindi l'equazione  $4x^2 - 18x - 5 = 0$  ha come radici  $\alpha$  e  $-\frac{1}{\beta}$ . Esse non possono coincidere poichè  $\alpha$  e  $\beta$  sono entrambi positivi e quindi  $\alpha$  e  $-\frac{1}{\beta}$  hanno segno opposto. Inoltre  $\beta > 1$  perciò  $-1 < -\frac{1}{\beta} < 0$ . Questo prova che l'equazione  $4x^2 - 18x - 5 = 0$  ha una radice positiva  $\alpha$  e una radice negativa  $\alpha' = -\frac{1}{\beta}$  con  $-1 < \alpha' < 0$ .

*Osservazione 16.* Il teorema [3.0.1] afferma in sostanza che ogni frazione continua puramente periodica rappresenta un irrazionale quadratico  $\alpha$  maggiore di 1 e il cui coniugato è compreso tra  $-1$  e  $0$ . Tale coniugato è  $-\frac{1}{\beta}$  dove  $\beta$  è definito dalla frazione continua con il periodo rovesciato.

Il prossimo teorema è l'inverso del teorema [3.0.1]: se  $\alpha > 1$  è un irrazionale quadratico, cioè se è radice di un'equazione del secondo grado a coefficienti



interi e se la seconda radice  $\alpha'$  di questa equazione è compresa tra  $-1$  e  $0$ , allora la frazione continua sviluppo di  $\alpha$  è periodica pura. Questa notevole proprietà fu dimostrata per la prima volta da Galois nel 1828 ma il risultato era implicito in un risultato precedente di Lagrange. Quello che è importante rilevare è che queste sole proprietà di  $\alpha$  e  $\alpha'$  caratterizzano i numeri che si sviluppano in frazione continua periodica pura.

**Teorema 3.3.2.** *Sia  $\alpha$  un irrazionale quadratico e sia  $\alpha'$  il suo coniugato. Supponiamo  $\alpha$  irrazionale quadratico ridotto, vale a dire:*

- i)  $\alpha > 1$
- ii)  $-1 < \alpha' < 0$ .

Allora la frazione continua che rappresenta  $\alpha$  è puramente periodica.

*Dimostrazione.* Sia  $\alpha$  zero reale positivo del polinomio  $f(x) = ax^2 + bx + c$  irriducibile in  $Z[x]$ ; sia poi  $\alpha'$  l'altro zero di  $f(x)$  e si supponga che  $-1 < \alpha' < 0$ . Quindi

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{P + \sqrt{D}}{Q}$$

$$\alpha' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{P - \sqrt{D}}{Q}$$

ove  $P, Q \in Z$  e  $D$  intero positivo che non è un quadrato. Per ipotesi  $\alpha$  è ridotto, allora  $\alpha > 1$  e  $-1 < \alpha' < 0$ , pertanto

$$\begin{aligned} 1. \alpha - \alpha' > 0 &\Rightarrow \frac{2\sqrt{D}}{Q} > 0 &\Rightarrow Q > 0 \\ 2. \alpha + \alpha' > 0 &\Rightarrow \frac{2P}{Q} > 0 &\Rightarrow P > 0 \\ 3. \alpha' < 0 &\Rightarrow \frac{P - \sqrt{D}}{Q} < 0 &\Rightarrow P < \sqrt{D} \\ 4. \alpha > 1 &\Rightarrow \frac{P + \sqrt{D}}{Q} > 1 &\Rightarrow P + \sqrt{D} > Q \end{aligned}$$

Riassumendo:

$$0 < P < \sqrt{D} \tag{3.3}$$

$$0 < Q < 2\sqrt{D}. \quad (3.4)$$

Inoltre poichè  $Q = \pm 2a$  e  $P^2 - D = (-b)^2 - (b^2 - 4ac)$  si ha che:

$$Q|P^2 - D \quad (3.5)$$

cioè  $P^2 - D$  è multiplo di  $Q$ .

Possiamo ora procedere con la dimostrazione. Sia

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{\alpha_1}$$

dove  $a_0$  è la parte intera di  $\alpha$  ( $a_0 \geq 1$ ) e  $\frac{1}{\alpha_1}$  è la parte frazionaria di  $\alpha$  (con  $\alpha_1 > 1$ ). Anche  $\alpha_1$  è un irrazionale quadratico ridotto, applicando a  $\alpha$  le proprietà dei coniugati (proposizione [3.2.4]) si ottiene:

$$\alpha' = \left(a_0 + \frac{1}{\alpha_1}\right)' = a_0 + \frac{1}{\alpha_1'}$$

da cui

$$\alpha_1' = -\frac{1}{a_0 - \alpha'}$$

dove  $-1 < \alpha' < 0$ . Dunque  $-1 < \alpha_1' < 0$  cioè  $\alpha_1$  è ridotto.

Analogamente anche  $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$  sono irrazionali quadratici ridotti. Si nota che:

$$\frac{1}{\alpha_1} = \alpha - a_0 = \frac{P + \sqrt{D}}{Q} - a_0 = \frac{P - a_0Q + \sqrt{D}}{Q}$$

da cui

$$\alpha_1 = \frac{Q}{P - a_0Q + \sqrt{D}}.$$

Ora, ponendo

$$P_1 = -P + Qa_0 \quad (3.6)$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{Q}{-P_1 + \sqrt{D}} = \\ &= \frac{Q(\sqrt{D} + P_1)}{D - P_1^2}. \end{aligned}$$

Ora, ponendo

$$Q_1 = \frac{D - P_1^2}{Q} \quad (3.7)$$

si ottiene

$$\alpha_1 = \frac{P_1 + \sqrt{D}}{Q_1}. \quad (3.8)$$

Prestiamo ora attenzione al seguente ragionamento: per la (3.4)  $P_1 \equiv -P \pmod{Q}$  ma per la (3.3):  $Q|P^2 - D$  quindi

$$Q|(-P_1)^2 - D \Rightarrow Q|D - P_1^2.$$

$P_1$  è intero e anche  $Q_1$  lo è essendo  $Q|D - P_1^2$ . Riassumendo  $\alpha_1$  è ridotto allora gli interi  $P_1$  e  $Q_1$  sono positivi e soddisfano le condizioni (3.1) e (3.2). Inoltre per la (3.5):  $Q_1|P_1^2 - D$ . Quindi possiamo ripetere il ragionamento fatto finora partendo con  $\alpha_1$  al posto di  $\alpha$  e tutto funziona. In generale ogni quoziente completo ha la forma:

$$\alpha_n = \frac{P_n + \sqrt{D}}{Q_n}$$

dove  $P_n$  e  $Q_n$  sono interi positivi che soddisfano le condizioni (3.1) e (3.2), e  $Q_n|P_n^2 - D$ . Dopo al più  $2D$  passi si ottiene una ripetizione della coppia  $(P_r, Q_r) = (P_{r+n+1}, Q_{r+n+1})$  e quindi la periodicità  $\alpha_r = \alpha_{r+n+1}$ . Rimane da dimostrare che il periodo è puro (cioè  $r = 0$ ). Introduciamo, per ogni  $i$ , il numero:

$$\beta_i = -\frac{1}{\alpha'_i} \quad (-1 < \alpha'_i < 0 \Rightarrow -\frac{1}{\alpha'_i} = \beta_i > 1)$$

e coniugando  $\alpha_i$  si ottiene

$$\left( \alpha_i = a_i + \frac{1}{\alpha_{i+1}} \right)'$$

$$\alpha'_i = a_i + \frac{1}{\alpha'_{i+1}} \quad (3.9)$$

che si riscrive

$$-\frac{1}{\beta_i} = a_i - \beta_{i+1}$$

4

$$\beta_{i+1} = a_i + \frac{1}{\beta_i}. \quad (3.10)$$

Osservando le relazioni (3.7) e (3.8) notiamo che

$$\text{Int}(\alpha'_i) = a_i = \text{Int}(\beta_{i+1})$$

essendo

$$\alpha_r = \alpha_{r+n+1} \Rightarrow \alpha'_r = \alpha'_{r+n+1} \Rightarrow \beta_r = \beta_{r+n+1}$$

ma  $\text{Int}(\beta_r) = a_{r-1}$  e  $\text{Int}(\beta_{r+n+1}) = a_{r-1+n+1}$  quindi

$$a_{r-1} = a_{r+n}.$$

Ora  $a_{r-1} = a_{r+n}$  e  $\alpha_r = \alpha_{r+n+1}$  quindi

$$\alpha_{r-1} = \alpha_{r-1+n+1}$$

poichè  $\alpha_{r-1} = a_{r-1} + \frac{1}{\alpha_r}$  e  $\alpha_{r-1+n+1} = a_{r-1+n+1} + \frac{1}{\alpha_{r+n+1}}$ . Iterando il procedimento si trova

$$\alpha_0 = \alpha_{n+1}$$

come si voleva. Quindi  $\alpha$  è puramente periodico.  $\square$

*Osservazione 17.* Le frazioni continue puramente periodiche rappresentano tutti e soli gli irrazionali quadratici ridotti.

**Corollario 3.3.3.** *Sia  $N$  un numero naturale che non è un quadrato perfetto. La frazione continua che rappresenta  $\sqrt{N}$  è periodica mista ed è necessariamente della forma*

$$[a_0, a_1, a_2, \dots, a_2, a_1, 2a_0]$$

*cioè il periodo inizia immediatamente dopo il primo termine  $a_0$ , e consiste di una parte palindroma seguita dal termine  $2a_0$ .*

*Dimostrazione.* Il teorema [3.3.2] prova che le frazioni continue per  $\sqrt{N}$ , dove  $N$  è un numero naturale e non è un quadrato perfetto, non sono puramente periodiche. Infatti, il coniugato di  $\sqrt{N}$  è  $-\sqrt{N}$ , e questo non è compreso tra  $-1$  e  $0$ , come invece vorrebbe la condizione sulla pura periodicità. Ma se consideriamo il numero  $\sqrt{N} + a_0$ , dove  $a_0$  è la parte intera di  $\sqrt{N}$ , il coniugato

di questo numero è  $-\sqrt{N} + a_0$ , ed è tale che  $-1 < -\sqrt{N} + a_0 < 0$ . Quindi, la frazione continua per  $-\sqrt{N} + a_0$  è puramente periodica, ed è la seguente:

$$\sqrt{N} + a_0 = 2a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_n + \frac{1}{2a_0 + \dots}}}} \quad (3.11)$$

In accordo con [3.3.1], la frazione continua ottenuta invertendo il periodo è

$$+ \frac{1}{a_n + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{2a_0 + \frac{1}{a_n + \dots}}}}}$$

e rappresenta  $-\frac{1}{\alpha'}$ , dove  $\alpha = \sqrt{N} + a_0$ . Ora  $\alpha' = -\sqrt{N} + a_0$ , quindi

$$-\frac{1}{\alpha'} = \frac{1}{\sqrt{N} - a_0} = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_n + \frac{1}{2a_0 + \dots}}}}$$

dalla (3.9). Confrontando le ultime due frazioni continue vediamo che

$$a_n = a_1, a_{n-1} = a_2, \dots$$

e questo prova la tesi: il periodo inizia immediatamente dopo il primo termine  $a_0$ , e consiste della parte simmetrica  $a_1, a_2, \dots, a_2, a_1$ , seguita dal termine  $2a_0$ .

□

$\sqrt{N}$	frazione continua	<i>periodo</i>
$\sqrt{2}$	[1; 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, ...]	2
$\sqrt{3}$	[1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, ...]	1, 2
$\sqrt{4}$	[2]	-
$\sqrt{5}$	[2; 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, ...]	4
$\sqrt{6}$	[2; 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, ...]	2, 4
$\sqrt{7}$	[2; 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, ...]	1, 1, 1, 4
$\sqrt{8}$	[2; 1, 4, 1, 4, 1, 4, 1, 4, ...]	1, 4
$\sqrt{9}$	[3]	-
$\sqrt{10}$	[3; 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, ...]	6
$\sqrt{11}$	[3; 3, 6, 3, 6, 3, 6, 3, 6, ...]	3, 6
$\sqrt{12}$	[3; 2, 6, 2, 6, 2, 6, 2, 6, ...]	2, 6
$\sqrt{13}$	[3; 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, ...]	1, 1, 1, 6
$\sqrt{14}$	[3; 1, 2, 1, 6, 1, 2, 1, 6, ...]	2, 6
$\sqrt{15}$	[3; 1, 6, 1, 6, 1, 6, 1, 6, ...]	1, 6
$\sqrt{16}$	[4]	-
$\sqrt{17}$	[4; 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, ...]	4, 8
$\sqrt{18}$	[4; 4, 8, 4, 8, 4, 8, 4, 8, ...]	4, 8
$\sqrt{19}$	[4; 2, 1, 3, 1, 2, 8, 2, 1, ...]	2, 1, 3, 1, 2, 8
$\sqrt{20}$	[4; 2, 8, 2, 8, 2, 8, 2, 8, ...]	2, 8
$\sqrt{30}$	[5; 2, 10, 2, 10, 2, 10, 2, 10, ...]	2, 10
$\sqrt{40}$	[6; 3, 12, 3, 12, 3, 12, 3, 12, ...]	3, 12
$\sqrt{50}$	[7; 14, 14, 14, 14, 14, 14, 14, ...]	14

Tabella. Sviluppo in frazione continua di  $\sqrt{N}$ .

### 3.4 Il teorema di Lagrange sugli irrazionali quadratici

Abbiamo ora tutti gli strumenti necessari per dimostrare il teorema di Lagrange, secondo cui ogni irrazionale quadratico ha una frazione continua che è periodica da un certo punto in poi. Basterà mostrare che sviluppando un qualsiasi irrazionale quadratico  $\alpha$  in frazione continua, si ottiene, ad un certo punto, un quoziente completo  $\alpha_n$  che è un irrazionale quadratico ridotto; quindi la frazione continua risulterà periodica da questo punto in poi.

**Teorema 3.4.1** (di Lagrange). *Lo sviluppo in frazione continua di un numero reale  $\alpha$  è periodico se e solo se  $\alpha$  è irrazionale quadratico, ovvero algebrico di grado 2.*

*Dimostrazione.* "⇒" Mostriamo che se una frazione continua è periodica allora rappresenta un numero reale algebrico di grado 2. Se

$$\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots, \overline{a_r, \dots, a_{r+n}}]$$

è periodico allora si ha che

$$\alpha_{r+n+1} = \alpha_r$$

e pertanto

$$\alpha = \frac{\alpha_r p_{r-1} + p_{r-2}}{\alpha_r q_{r-1} + q_{r-2}} = \frac{\alpha_{r+n+1} p_{r+n} + p_{r+n-1}}{\alpha_{r+n+1} q_{r+n} + q_{r+n-1}}$$

da cui si ha che  $\alpha_r$  è zero di un polinomio di grado 2 su  $Z[x]$ . Supponiamo che tale polinomio sia:

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Ora scrivendo  $\alpha_r$  in funzione di  $\alpha$  (cioè  $\alpha_r(\alpha)$ ) e andandolo a sostituire in  $f(x)$  si ottiene:

$$f(\alpha_r(\alpha)) = a(\alpha_r(\alpha))^2 + b(\alpha_r(\alpha)) + c = 0$$

da cui si ha che anche  $\alpha$  è zero di un polinomio di grado 2 su  $Q[x]$ , pertanto è algebrico di grado 2 su  $Q$ .

"⇐" Mostriamo ora che ogni irrazionale quadratico ha uno sviluppo in frazioni continua che diventa periodico da un certo punto in poi. Per mostrare ciò sarà sufficiente mostrare che, quando un qualsiasi irrazionale  $\alpha$  è sviluppato in frazioni continue, si raggiungerà prima o poi un quoziente completo  $\alpha_n$  che sia un irrazionale quadratico ridotto; infatti in tale caso la frazione continua si ripeterà da quel punto. Sappiamo che:

$$\alpha = \frac{\alpha_{n+1} p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1}}$$

con  $p_n, p_{n-1}, q_n, q_{n-1} \in \mathbb{N}$ . Ora, essendo  $\alpha$  e  $\alpha_{n+1}$  irrazionali quadratici allora la stessa relazione sussiste tra:

$$\alpha' = \frac{\alpha'_{n+1} p_n + p_{n-1}}{\alpha'_{n+1} q_n + q_{n-1}}$$

con  $p_n, p_{n-1}, q_n, q_{n-1} \in \mathbb{N}$ . quindi

$$\alpha'_{n+1} = -\frac{q_{n-1}\alpha' - p_{n-1}}{q_n\alpha' - p_n} = -\frac{q_{n-1}}{q_n} \left( \frac{\alpha' - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}}{\alpha' - \frac{p_n}{q_n}} \right).$$

Per  $n \rightarrow +\infty$ ,  $\frac{p_n}{q_n}$  e  $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$  tendono a  $\alpha$  pertanto il valore tra parentesi tende a 1. Però  $q_{n-1}, q_n \in \mathbb{N}$  cioè sono positivi quindi  $\alpha'_{n+1}$  sarà definitivamente negativo. Inoltre i numeri  $\frac{p_n}{q_n}$  sono alternativamente più grandi e più piccoli di  $\alpha$ , e dunque la frazione fra parentesi è alternativamente appena minore o appena maggiore di 1. Scegliendo un valore di  $n$  per cui essa è più piccola di 1, e osservando che  $q_{n-1} < q_n$ , si vede che  $-1 < \alpha'_{n+1} < 0$ . Per un tale valore di  $n$ , il numero  $\alpha_{n+1}$  è un irrazionale quadratico ridotto. Conseguentemente la frazione continua sarà puramente periodica da quel punto in poi.  $\square$

**Esempio 3.4.** Non esistono molti irrazionali, oltre ai quadratici, di cui si conosca qualche aspetto di regolarità. Eulero nel 1737 trovò i seguenti sviluppi:

$$e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, \dots]$$

dove i numeri 2, 4, 6, ... sono separati ogni volta da due 1, e più, in generale, per  $k$  intero positivo qualunque allora vale lo sviluppo

$$e^{\frac{1}{k}} = [1, k-1, 1, 1, 3k-1, 1, 1, 5k-1, 1, 1, \dots],$$

$$\frac{e-1}{e+1} = [0, 2, 6, 10, 14, \dots]$$

dove i termini formano una progressione aritmetica di ragione 4. Se  $k$  è un intero positivo arbitrario vale

$$\frac{e^{\frac{2}{k}} - 1}{e^{\frac{2}{k}} + 1} = [0, k, 3k, 5k, \dots]$$



dove i termini formano una progressione aritmetica di ragione  $2k$ .

Altri sviluppi regolari riguardano la tangente e la tangente iperbolica:

$$\tan\left(\frac{1}{k}\right) = [0, k-1, 1, 3k-2, 1, 5k-2, 1, 7k-2, 1, 9k-2, 1, \dots]$$

$$\tanh\left(\frac{1}{k}\right) := \frac{e^{\frac{1}{k}} - e^{-\frac{1}{k}}}{e^{\frac{1}{k}} + e^{-\frac{1}{k}}} = [0, k, 3k, 5k, 7k, 9k, 11k, 13k, 15k, \dots]$$

e un caso particolare di quest'ultima formula è

$$\tanh(1) := \frac{e - e^{-1}}{e + e^{-1}} = [0, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \dots].$$

### 3.5 Un irrazionale quadratico particolare: la sezione aurea

Alquanto interessante è calcolare lo sviluppo in frazione continua della *sezione aurea*. Nella geometria euclidea, dato un qualunque segmento si definisce *sezione aurea* quella parte del segmento che è media proporzionale tra l'intero segmento e la parte restante. In termini più aritmetici (basti pensare a un segmento di lunghezza unitaria) la *sezione aurea* è definita classicamente come quella frazione dell'unità  $\varphi$  che sta all'unità come il suo completamento all'unità sta a se' stesso, in formule:

$$\varphi : 1 = 1 - \varphi : \varphi$$

per cui si ha:

$$\varphi^2 = 1 - \varphi \Leftrightarrow \varphi^2 + \varphi = \varphi(\varphi + 1) = 1$$

cioè vale l'equazione:

$$\varphi = \frac{1}{1 + \varphi} \quad (*)$$

In altri termini  $\varphi$  è la soluzione positiva dell'equazione del secondo grado a coefficienti interi:

$$\varphi^2 + \varphi - 1 = 0$$

e quindi la sezione aurea  $\varphi$  è il numero irrazionale algebrico quadratico:

$$\varphi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Osserviamo come la relazione (\*) può essere iterata dando direttamente lo sviluppo in frazione continua:

$$\varphi = \frac{1}{1 + \varphi} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \varphi}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \varphi}}} = \dots$$

per cui già avremmo la tentazione di scrivere:

$$\varphi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = [0; 1, 1, 1, 1, \dots].$$

Per via più rigorosa procediamo come negli esempi sopra. La parte intera di  $\varphi$  è 0 quindi possiamo scrivere:

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0 + \frac{1}{\alpha_1}$$

da cui

$$\alpha_1 = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

e da qui:

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1 + \frac{1}{\alpha_2}$$

dove facendo i calcoli

$$\alpha_2 = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

e così via... Dunque siamo di fronte a uno sviluppo periodico di periodo 1. Questa frazione continua è la più semplice delle frazioni continue essendo formata da sole unità.

Si dimostra che gli approssimanti razionali di  $\varphi$  sono rapporti di numeri di Fibonacci:

$$\alpha_n = \frac{p_n}{q_n} = \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

dove i numeri di Fibonacci sono definiti per ricorrenza dalla relazione:

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

con le condizioni iniziali  $a_0 = a_1 = 1$ .

Vale la pena osservare che qualche autore preferisce definire la sezione aurea come l'inverso di  $\varphi$ :  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  e vale:

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = [1; 1, 1, 1, 1, \dots] = \overline{[1]}.$$



# Capitolo 4

## Approssimazione razionale di numeri irrazionali

### 4.1 Posizione del problema

Lo studio che ci ha condotto al teorema [2.3.1] ci porta a pensare che ogni ridotta della frazione continua sviluppo di un numero irrazionale  $\alpha$  sarà sempre più vicina ad  $\alpha$  della precedente ridotta. In questo capitolo vengono presentati alcuni risultati importanti di *approssimazione diofantea*<sup>1</sup> che derivano dalla teoria delle frazioni continue.

---

<sup>1</sup>La cosiddetta *approssimazione diofantea* consiste nell'approssimare i numeri irrazionali attraverso numeri razionali. L'aggettivo 'diofanteo' deriva dal matematico greco Diofanto di Alessandria, uno dei primi grandi studiosi della teoria dei numeri. Saper approssimare i numeri irrazionali è di fondamentale importanza per poter svolgere calcoli con essi. Infatti un numero irrazionale è per ovvi motivi aritmeticamente intrattabile. Per servirsi di essi, per esempio per calcolare un'area, una traiettoria, eccetera, è necessario saperli approssimare in maniera soddisfacente con numeri utilizzabili per i calcoli, cioè numeri razionali. Il primo numero irrazionale approssimato in maniera soddisfacente con numeri razionali fu  $\pi$  greco. Autore di tale grande risultato fu Archimede di Siracusa (circa 287 A. C.) nell'opera 'Misura del Cerchi'. La dimostrazione dell'irrazionalità di  $\pi$  greco fu data solo nel 1768 da Jean H. Lambert. Tuttavia Archimede doveva averne intuito la sua natura irrazionale dal momento che non tentò, come fecero in molti prima e dopo di lui, di esprimerlo come il rapporto di due numeri interi.

In particolare viene messo in evidenza che l'irrazionale peggio approssimabile è il numero aureo che trova la sua migliore approssimazione proprio mediante lo sviluppo in frazione continua in virtù del risultato di Hurwitz.

## 4.2 Teoremi di approssimazione

Abbiamo visto come l'algoritmo delle frazioni fornisca una sequenza infinita di approssimazioni razionali di un numero irrazionale assegnato  $\alpha$ , ossia le ridotte. Ma quanto rapidamente queste frazioni si avvicinano ad  $\alpha$ ? Vediamo ora come stimare di quanto le convergenze siano vicine al numero originario.

**Teorema 4.2.1.** *Sia  $\alpha \in \mathbb{R}$  irrazionale e sia*

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_n}{q_n} \dots$$

*la successione delle ridotte del suo sviluppo in frazione continua. Allora ogni ridotta è strettamente più prossima ad  $\alpha$  rispetto alla ridotta precedente, cioè per ogni  $n > 1$  vale:*

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \left| \alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| \quad (4.1)$$

*Dimostrazione.* Sia  $n \geq 1$

$$\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_n, \alpha_{n+1}]$$

dove  $\alpha_{n+1}$  è il quoziente completo

$$\alpha_{n+1} = [a_{n+1}, a_{n+2}, \dots].$$

Allora dall'equazione generale

$$\alpha = \frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}}$$

si ottiene

$$\alpha(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}) = \alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}$$

o equivalentemente per  $n \geq 2$

$$\alpha_{n+1}(\alpha q_n - p_n) = -(\alpha q_{n-1} - p_{n-1}) = -q_{n-1} \left( \alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right).$$

Ora, dividendo per  $\alpha_{n+1}q_n$  otteniamo:

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \left( -\frac{q_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n} \right) \left( \alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right),$$

da cui, passando ai moduli,

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| = \left| \frac{q_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n} \right| \left| \alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right|. \quad (4.2)$$

Sappiamo che, se  $n \geq 2$ ,  $\alpha_{n+1} > 1$  e che  $q_n > q_{n-1} > 0$  quindi

$$0 < \frac{q_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n} < 1$$

cioè

$$0 < \left| \frac{q_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n} \right| < 1.$$

Dunque la (4.3) ci dice che, per  $n \geq 2$  vale

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \left| \alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right|.$$

Quindi  $\frac{p_n}{q_n}$  è più vicino ad  $\alpha$  di quanto non lo sia  $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$  e il teorema è dimostrato.  $\square$

A questo punto cerchiamo una *stima*, o *misura*, di quanto la ridotta  $\frac{p_n}{q_n}$  si discosta da  $\alpha$ .

**Teorema 4.2.2.** *Sia  $\alpha \in \mathbb{R}$  e sia*

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_n}{q_n} \dots$$

<sup>2</sup> *la successione delle ridotte del suo sviluppo in frazione continua. Allora vale:*

*i)  $\forall n \geq 1$  vale*

$$p_n = q_n \alpha + \frac{\delta_n}{q_n}, \quad |\delta_n| < 1 \quad (4.3)$$

---

<sup>2</sup>se  $\alpha$  è razionale lo sviluppo in frazione continua sarà chiaramente limitato

ii)  $\forall n \geq 1$  vale

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2} \quad (4.4)$$

iii)  $\forall n \geq 2$  vale

$$\frac{1}{2q_{n+1}^2} < \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2} \quad (4.5)$$

*Dimostrazione.* i) Sia

$$\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots] = [a_0, a_1, \dots, a_n, \alpha_{n+1}]$$

dove  $\alpha_{n+1}$  denota il quoziente completo. Allora abbiamo visto che possiamo scrivere  $\alpha$  come

$$\alpha = \frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}} \quad (4.6)$$

e che valgono le relazioni di Eulero Wallis

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n. \quad (4.7)$$

Da (4.7) e (4.8) abbiamo

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^{n+1}}{(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n} \quad (4.8)$$

Ora, poichè  $\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1} > q_{n+1}$ , da alcuni semplici passaggi algebrici si ottiene

$$p_n = q_n \alpha + \frac{(-1)^n}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}} = q_n \alpha + \frac{(-1)^n \rho_n}{q_{n+1}} \quad (4.9)$$

con

$$0 < \rho_n = \frac{q_{n+1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}} < 1.$$

Si giunge alla tesi moltiplicando e dividendo l'ultimo membro di (4.10) per  $q_n$  e ponendo

$$\delta_n = (-1)^n \rho_n \frac{q_n}{q_{n+1}}.$$

ii) Da (4.7) e (4.8) segue che

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})} < \frac{1}{\alpha_{n+1}q_n^2} < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2}.$$



iii) Il lato destro della disuguaglianza si ottiene da ii) tenendo conto che  $a_n \geq 1 \forall n \geq 1$  mentre per quanto riguarda il lato sinistro da (4.9) si ha

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n}$$

e

$$q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}) < q_n(q_{n+1} + q_n) < q_n^2 + q_{n+1}^2 < 2q_{n+1}^2$$

da cui la tesi.  $\square$

Abbiamo quindi i seguenti teoremi.

**Teorema 4.2.3.** *Se  $\alpha \in \mathbb{R}$  è irrazionale esistono infiniti numeri razionali  $\frac{p}{q}$  con  $(p, q) = 1$  e  $q > 0$  tali che*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}. \quad (4.10)$$

**Teorema 4.2.4** (di Dirichlet). *Sia  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Allora  $\alpha$  è irrazionale se e solo se la disuguaglianza*

$$|q\alpha - p| < \frac{1}{q} \quad (4.11)$$

*è soddisfatta da infiniti interi  $(p, q)$ ,  $q > 0$ .*

*Dimostrazione.* Essendo  $q > 0$  si ha

$$|q\alpha - p| < \frac{1}{q} \Leftrightarrow \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$$

Se  $\alpha$  è irrazionale il teorema [4.2.3] afferma che esistono infiniti razionali  $\frac{p}{q}$  con  $p$  e  $q$  primi tra loro e  $q > 0$  tali che

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

D'altra parte se  $\alpha$  è razionale e  $\alpha = \frac{a}{b}$  siano  $p$  e  $q$  interi con  $\frac{p}{q} = \frac{a}{b}$ . Si ha

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| = \left| \frac{a}{b} - \frac{p}{q} \right| = \frac{|aq - bp|}{bq} > \frac{1}{bq}$$

quindi, assumendo [4.2.2, iii)], otteniamo  $q < b$ ; di conseguenza

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$$

ha solo un numero finito di soluzioni.  $\square$

### 4.3 Le migliori approssimazioni razionali

In sede di *approssimazione diofantea* dato un qualunque numero reale  $\alpha$  l'obiettivo è quello di ricercare numeri razionali  $\frac{r}{s}$  che rendano minima la distanza

$$\left| \alpha - \frac{r}{s} \right|.$$

Fissato  $s$  tale distanza è minima quando  $r$  è l'intero più vicino a  $s\alpha$ . Trovato l'intero  $r$  che soddisfa tale condizione si dice allora che  $\frac{r}{s}$  è la 'migliore' approssimazione di  $\alpha$  di complessità  $s$  (cioè con denominatore minore o uguale a  $s$ ). Queste 'migliori' approssimazioni si trovano attraverso le frazioni continue.

**Definizione 4.1.** Sia  $\xi$  un numero reale e siano  $p$  e  $q$  interi coprimi con  $q > 0$ . Si dice che la frazione  $\frac{p}{q}$  è la *migliore approssimazione razionale* di  $\xi$  di complessità  $q$  se e solo se per ogni altro numero razionale della forma  $\frac{r}{s}$  con  $s > 0$  la disuguaglianza

$$\left| \xi - \frac{r}{s} \right| < \left| \xi - \frac{p}{q} \right|$$

implica  $s > q$ .

In altri termini, la *migliore approssimazione razionale* di  $\xi$  è un numero razionale che ha la caratteristica di essere più prossimo a  $\xi$  di qualunque altra approssimazione con un denominatore più piccolo. Le ridotte

$$c_n = \frac{p_n}{q_n}$$

di una frazione continua aritmetica, di ordine maggiore od uguale ad 1 sono le migliori approssimazioni per il numero reale  $\xi$ . Vediamo un lemma preliminare.

**Lemma 4.3.1.** Sia  $\xi \in \mathbb{R}$  e sia  $\frac{p_n}{q_n}$  la ridotta  $n$ -esima del suo sviluppo in frazione continua con  $n \geq 2$ . Allora per ogni  $r, s$  interi coprimi con  $0 < s \leq q_n$  e  $\frac{r}{s} \neq \frac{p_n}{q_n}$  si ha

$$|q_n \xi - p_n| < |s \xi - r|.$$

*Dimostrazione.* Abbiamo già dimostrato che

$$|q_n \xi - p_n| < |q_{n-1} - p_{n-1}| \quad \forall n \geq 0.$$

Proviamo quindi che

$$|s\xi - r| \geq |q_{n-1} - p_{n-1}| \quad \forall n \geq 1.$$

Ora, esistono due numeri interi  $x$  e  $y$  tali che

$$\begin{cases} p_n x + p_{n-1} y = r \\ q_n x + q_{n-1} y = s \end{cases}$$

e questo segue dal fatto che la matrice dei coefficienti ha determinante  $\pm 1$ . Non può evidentemente essere  $y = 0$ . Per ipotesi  $s < q_n$  e quindi o  $x = 0$  oppure  $x$  e  $y$  sono di segno opposto. Consideriamo l'identità

$$s\xi - r = x(q_n \xi - p_n) + y(q_{n-1} \xi - p_{n-1})$$

Le due quantità entro parentesi hanno segno opposto (le convergenti sono alternatamente maggiori e minori di  $\xi$ ) ed anche  $x$  e  $y$  hanno segno opposto. Allora

$$|s\xi - r| = |x(q_n \xi - p_n)| + |y(q_{n-1} \xi - p_{n-1})|.$$

Poichè  $y \neq 0$ , abbiamo

$$|s\xi - r| \geq |q_{n-1} \xi - p_{n-1}|$$

□

**Teorema 4.3.2.** *Le convergenti  $\frac{p_n}{q_n}$  di una frazione continua aritmetica, di ordine  $n$  maggiore od uguale ad 1, relative ad un numero reale  $\xi$ , sono le migliori approssimazioni.*

*Dimostrazione.* Per assurdo, sia  $\frac{r}{s} \neq \frac{p_n}{q_n}$  una frazione che verifica

$$\left| \xi - \frac{r}{s} \right| < \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right|$$

con  $r$  ed  $s$  interi coprimi e  $0 < s < q_n$ . Allora, moltiplicando entrambi i membri per  $s$  e tenendo conto dell'ipotesi  $s < q_n$

$$|s\xi - r| < \underbrace{\frac{s}{q_n}}_{<1} |q_n\xi - p_n| < |q_n\xi - p_n|.$$

Ma questo è in contraddizione con il lemma [4.0.1].  $\square$

## 4.4 Numeri equivalenti

**Definizione 4.2.** Siano  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Diciamo che  $\alpha$  e  $\beta$  sono *numeri equivalenti* e poniamo  $\alpha \equiv \beta$  se esistono  $a, b, c$  interi tali che  $\alpha$  si possa esprimere rispetto a  $\beta$  nella forma:

$$\alpha = \frac{a\beta + b}{c\beta + d}, \quad \text{con } ad - bc = \pm 1 \quad (4.12)$$

o, equivalentemente, in notazione matriciale

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{con } \det A = \pm 1 \quad (4.13)$$

**Esempio 4.1.** I numeri reali

$$\alpha = \sqrt{2}, \quad \beta = \sqrt{2} + 1$$

sono equivalenti. Infatti  $\beta$  si può scrivere nella forma  $\beta = \sqrt{2} + 1 = \frac{2\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}+1}$ .

**Proposizione 4.4.1.** Siano  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Valgono le seguenti proprietà:

- (i)  $\equiv$  è una relazione di equivalenza;
- (ii) se  $\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_n, \alpha_{n+1}]$  allora  $\alpha \equiv \alpha_{n+1}$ ;
- (iii) se  $\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_n, \alpha_{n+1}]$  e  $\beta = [b_0, b_1, \dots, b_m, \beta_{m+1}]$  e se  $\alpha_{n+1} = \beta_{m+1}$  allora  $\alpha \equiv \beta$ .

*Dimostrazione.* La (i) si dimostra facilmente da (4.14); la (ii) segue da (4.7) e (4.8). La (iii) segue dalla transitività di  $\equiv$  e da (ii).  $\square$

**Esempio 4.2.** Tutti i numeri razionali sono equivalenti. Infatti, siano  $\alpha$  e  $\beta$  razionali con le seguenti rappresentazioni:  $\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_n]$  e  $\beta = [b_0, b_1, \dots, b_m]$ . Banalmente possiamo scrivere  $\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_n, 1]$  e  $\beta = [b_0, b_1, \dots, b_m, 1]$ . Da [4.4.1] la tesi.

**Teorema 4.4.2.** Siano  $\alpha$  un numero reale equivalente a  $\xi > 1$  e siano  $P, Q, R, S$  interi con  $Q > S > 0$  e tali che

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} P & R \\ Q & S \end{pmatrix}}_B \begin{pmatrix} \xi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P\xi + R \\ Q\xi + S \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \det B = \pm 1 \quad (4.14)$$

Allora  $\frac{R}{S}$  e  $\frac{P}{Q}$  sono due convergenti consecutive della frazione continua il cui valore è  $\alpha$ . Di più: se  $\frac{R}{S}$  e  $\frac{P}{Q}$  sono rispettivamente l' $n$ -esima e l' $(n+1)$ -esima convergente (o viceversa) allora  $\xi$  è l' $(n+1)$ -esimo quoziente completo.<sup>3</sup>

*Dimostrazione.* Siano  $\frac{R}{S}$  e  $\frac{P}{Q}$  rispettivamente l' $n$ -esima e l' $(n+1)$ -esima convergente e proviamo che  $\xi$  è l' $(n+1)$ -esimo quoziente completo. Vediamo i passi principali della dimostrazione (si veda anche [7]).

Possiamo scrivere il numero razionale  $\frac{P}{Q}$  come

$$\frac{P}{Q} = [a_0, a_1, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$$

scegliendo  $n$  in modo tale che si abbia<sup>4</sup>  $PS - QR = (-1)^n$ . Ma allora vale  $(P, Q) = 1$  e, poichè  $Q > 0$  per ipotesi, si ha immediatamente  $P = p_n$  e  $Q = q_n$  e

$$p_n S - q_n R = (-1)^n = p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n \quad \Leftrightarrow \quad p_n (S - q_{n-1}) = q_n (R - p_{n-1}).$$

Quindi, essendo  $(p_n, q_n) = 1$  si ha  $q_n | (S - q_{n-1})$ . Ma vale anche  $|S - q_{n-1}| < q_n$  perciò si ha  $S = q_{n-1}$ ,  $R = p_{n-1}$  e

$$\alpha = \frac{p_n \xi - p_{n-1}}{q_n \xi - q_{n-1}}$$

<sup>3</sup>In altri termini se  $\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots] = [a_0, a_1, \dots, a_n, \alpha_{n+1}]$  con  $a_n = \frac{R}{S}$  e  $a_{n+1} = \frac{P}{Q}$  allora  $\alpha_{n+1} = \xi$ .

<sup>4</sup>E' possibile effettuare tale scelta per [1.3.4]: ogni numero razionale si può esprimere mediante una frazione continua limitata nella quale l'ultimo termine può essere modificato in modo che il numero dei termini dello sviluppo sia pari o dispari.

proprio come in (4.7). Dunque  $\xi$  è l'( $n + 1$ )-esimo quoziente completo.  $\square$

Il seguente teorema fornisce un criterio per stabilire se due numeri reali sono equivalenti.

**Teorema 4.4.3.** *Due numeri reali  $\alpha, \beta$  sono equivalenti se e solo se  $\alpha$  e  $\beta$  hanno rappresentazione in frazione continua della forma:*

$$\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_i, g_1, g_2, g_3, \dots] \quad \beta = [b_0, b_1, \dots, b_j, g_1, g_2, g_3, \dots]$$

*cioè l' $i$ -esimo quoziente completo di  $\alpha$  coincide con il  $j$ -esimo quoziente completo di  $\beta$  per  $i$  e  $j$  opportuni.*

## 4.5 Teorema di Hurwitz

Abbiamo dimostrato con il teorema [4.2.3] che per ogni irrazionale  $\alpha$  esistono infiniti numeri razionali  $\frac{p}{q}$  con  $(p; q) = 1$  e  $q > 0$  tali che

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2} \quad (4.15)$$

Si può migliorare la disuguaglianza con il seguente teorema che noi non dimostriamo.

**Teorema 4.5.1.** *Sia  $\alpha \in \mathbb{R}$ . In ogni coppia di ridotte successive  $\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$  della frazione continua sviluppo di  $\alpha$  almeno una, diciamola  $\frac{p}{q}$ , soddisfa*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2}. \quad (4.16)$$

*Di più: se  $\alpha \in \mathbb{R}$  è irrazionale e se  $\frac{p}{q}$  è un qualunque numero razionale con  $(p, q) = 1$  e  $q \geq 1$  tale che valga (4.17) allora  $\frac{p}{q}$  è necessariamente una delle ridotte della frazione continua di cui  $\alpha$  è valore.*

Considerando la disuguaglianza (4.17), è lecito domandarsi se, dato un irrazionale  $\alpha$  esiste un numero reale  $k > 2$  tale che la disuguaglianza

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{kq^2} \quad (q \geq 1), \quad (4.17)$$

ammetta infinite soluzioni  $\frac{p}{q}$ . Abbiamo dimostrato in [4.2.2] che se la frazione continua sviluppo del numero reale  $\alpha$  è  $[a_0, a_1, \dots, a_n, \dots]$  e  $\frac{p_n}{q_n}$  è l' $n$ -esima ridotta allora vale

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2}; \quad (4.18)$$

Abbiamo quindi delle ottime approssimazioni di  $\alpha$  se i numeri  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  crescono molto rapidamente. Dal punto di vista dell'approssimazione l'irrazionale che è rappresentato dalla più "semplice" delle frazioni continue è anche il peggiore da approssimare: la sezione aurea  $\varphi$  che ha il seguente sviluppo

$$\varphi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = [0; 1, 1, 1, 1, \dots],$$

poichè ogni  $a_n$  ha il minimo valore possibile. Le ridotte di  $\varphi$  sono le frazioni

$$\frac{0}{0}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \dots$$

in modo che  $q_{n-1} = p_n$  e

$$\frac{q_{n-1}}{q_n} = \frac{p_n}{q_n} \rightarrow \varphi.$$

Si può dimostrare che per  $n$  molto grande l'espressione

$$\left| \varphi - \frac{p_n}{q_n} \right| = \left| \frac{\sqrt{5} - 1}{2} - \frac{p_n}{q_n} \right|$$

si approssima sempre più a  $\frac{1}{\sqrt{5}q_n^2}$ . Quest'osservazione suggerisce il teorema seguente, dimostrato per la prima volta da Hurwitz nel 1891.

**Teorema 4.5.2** (di Hurwitz). *Ogni numero irrazionale  $\alpha$  ammette infinite approssimazioni razionali  $\frac{p}{q}$  che soddisfano*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2} \quad (q \geq 1). \quad (4.19)$$

*Il numero  $\sqrt{5}$  è il migliore possibile: l'affermazione sarebbe falsa se a  $\sqrt{5}$  si sostituisse un qualsiasi numero maggiore.*

*Osservazione 18.* Dicendo "falsa", intendiamo dire che se a  $\sqrt{5}$  si sostituisse un qualunque altro numero  $k > \sqrt{5}$ , allora vi potrebbe essere solo un numero finito, anzichè infinito, di tali approssimazioni irrazionali di  $\alpha$ .

Abbiamo definito in (4.4) una relazione di equivalenza sui reali. Ora, ci sono infiniti numeri irrazionali equivalenti alla sezione aurea  $\varphi$ ; consideriamoli sviluppati in frazioni continue. Allora, da un certo punto in poi, ciascuna di queste frazioni continue, conterrà, per il teorema (4.4.3), i quozienti 1, 1, 1, ... e saranno, quindi, altrettanto difficili da approssimare. Se scartiamo  $\varphi$  e tutti i suoi equivalenti la costante  $\sqrt{5}$  che compare nel teorema di Hurwitz si può sostituire con un numero maggiore: vale infatti il seguente teorema.

**Teorema 4.5.3.** *Ogni numero irrazionale  $\alpha$  non equivalente a  $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  ammette infinite approssimazioni razionali  $\frac{p}{q}$  che soddisfano*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{8}q^2} \quad (q \geq 1). \quad (4.20)$$



## Capitolo 5

# La storia della teoria delle frazioni continue

Le più antiche tracce dell'idea di frazione continua sono alquanto confuse, poichè "molti antichi risultati aritmetici richiamano alla mente questo argomento ma non se ne trova ancora una trattazione sistematica" (cfr Olds). Abbiamo visto che il metodo di Euclide (libro VII,1-2) per trovare il massimo comune divisore tra due numeri naturali equivale sostanzialmente allo sviluppo di una frazione in una frazione continua (aritmetica limitata). Gli storici della matematica sono pressochè concordi nell'affermare che questo è il primo passo importante (300 a.C.) nello sviluppo dell'idea di frazione continua.

Tracce di procedimenti concettualmente vicini alle frazioni continue sono presenti nel commento di Teone di Alessandria<sup>1</sup> (tardo IV secolo d. C.)

---

<sup>1</sup>Teone è stato filosofo e matematico greco antico, che visse ed insegnò ad Alessandria d'Egitto nel IV secolo. E' noto per essere il creatore delle scuole filomatiche, e avere redatto varie edizioni commentate di opere matematiche e scientifiche, tra cui gli *Elementi* di Euclide e l'*Almagesto* di Tolomeo, e per aver scritto un saggio sull'astrolabio piano. Va ricordata in particolare la sua edizione degli *Elementi* grazie alla quale, probabilmente, l'opera di Euclide fu sottratta all'oblio. Infatti tutte le edizioni circolanti nei secoli successivi, fino all'edizione di Johan Ludvig Heiberg del 1880, sono state riconosciute come fondate sul testo di Teone. Solo un manoscritto, ritrovato nella Biblioteca Vaticana verso

all'*Almagesto* di Claudio Tolomeo nel quale Teone affronta il problema di 'trovare in modo approssimato il lato di una superficie quadrata che non ha radice esatta' (cfr Favaro). Nella soluzione che Teone propone per questo problema è stata individuata una embrionale idea di frazione continua.

Al matematico Aryabhata viene generalmente riconosciuto il merito del più vasto ed importante testo della matematica indiana l'*Aryabhatiya*, scritto intorno al 500 nel quale troviamo riferimenti alle frazioni continue. Il lavoro di Aryabhata contiene uno dei più antichi tentativi di risoluzione generale di un'equazione lineare indeterminata attraverso una tecnica concettualmente assai vicina alla frazione continua.

Nel Liber Abbaci (1202), il capolavoro di Leonardo Pisano detto Fibonacci (1170 circa-1250 circa) troviamo tecniche che accennano, sostanzialmente, alle frazioni continue ascendenti cioè frazioni continue che (con notazioni moderne) sono del tipo<sup>2</sup>

$$1 + \frac{1 + \dots}{m_3} \\ 1 + \frac{\quad}{m_2} \\ \frac{\quad}{m_1}$$

Gli spunti di Fibonacci sono poi ripresi dall'arabo Abu' l Hasan Alkalsadi, in un trattato di aritmetica pubblicato nel 1463 e da Luca Pacioli (1445-1515 circa).

La maggior parte degli esperti è d'accordo nel ritenere che la teoria moderna delle frazioni continue inizi con gli scritti di Raffaele Bombelli (1526-1572) matematico bolognese. Il suo trattato di algebra (1572) contiene un capitolo sulle radici quadrate. Con simboli moderni uno dei suoi risultati è il seguente:

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{4}{6 + \frac{4}{6 + \frac{4}{\dots}}}$$

---

la fine dell'Ottocento, sembra essere di data anteriore.

<sup>2</sup>una frazione continua di questa forma si definisce anche *ascendente*

Ciò indica che egli sapeva essenzialmente che

$$\sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a + \frac{b}{\dots}}}$$

Bombelli tuttavia non approfondisce questa tecnica.

Il secondo autore del Rinascimento che considerò queste frazioni fu ancora un bolognese, Pietro Antonio Cataldi (1548-1626), noto soprattutto per i suoi rapporti al calcolo delle radici quadrate mediante serie aritmetiche e l'algoritmo delle frazioni continue, riprendendo in parte l'opera di Rafael Bombelli. 'Lo studio dell'algebra che dopo il Bombelli era stato troppo trascurato si rialzò per opera di un professore dell'Università di Bologna, di Pietro Antonio Cataldi, il quale usciva da una scuola che aveva già dato di molti e valenti algebristi' (cfr Favaro). Si occupò inoltre della dimostrazione del quinto postulato di Euclide e scoprì il sesto e il settimo (8.589.869.056 e 137.438.691.328) dei numeri perfetti. Il suo lavoro sulle tecniche algebriche venne inoltre applicato alla sfera militare. Nel 1613 Cataldi pubblica il suo trattato sulla teoria delle radici, che egli intitola " *Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadrata delli numeri*". Egli, per estrarre la radice quadrata del naturale  $n$ , suggerisce innanzi tutto di porre:

$$n = q^2 + r$$

dove  $q$  è intero e  $q^2$  è il massimo quadrato non maggiore di  $n$  e, una volta fatto questo, suggerisce di assumere come approssimazione di  $n$  il valore (in notazione moderna):

$$\sqrt{q^2 + r} = q + \frac{r}{2q + \frac{r}{2q + \frac{r}{2q + \dots}}}$$

Giustificiamo in termini generali questa formula. Poniamo:

$$\sqrt{q^2 + r} = q + \frac{1}{\beta} \tag{5.1}$$

da cui

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{q^2 + r} - q} = \frac{\sqrt{q^2 + r} + q}{r}.$$

Ora, tenendo conto di (5.1), si ha:

$$\beta = \frac{\sqrt{q^2 + r} + q}{r} = \frac{q + \frac{1}{\beta} + q}{r} = \frac{2q + \frac{1}{\beta}}{r}$$

da cui

$$\frac{1}{\beta} = \frac{r}{2q + \frac{1}{\beta}} \quad (5.2)$$

Da (5.1) e (5.2) risulta quindi

$$\sqrt{q^2 + r} = q + \frac{r}{2q + \frac{1}{\beta}}$$

e sostituendo in questa ripetutamente l'uguaglianza (5.2) otteniamo:

$$\sqrt{q^2 + r} = q + \frac{r}{2q + \frac{r}{2q + \frac{r}{2q + \frac{r}{2q + \dots}}}}.$$

Nel suo trattato sulla teoria delle radici Cataldi esprime  $\sqrt{18}$  come <sup>3</sup>

$$4. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}. \dots$$

<sup>3</sup>Per quanto riguarda la convergenza delle frazioni continue introdotte da Cataldi, osserviamo che la convergenza di:

$$\frac{2}{8 + \frac{2}{8 + \frac{2}{8 + \frac{2}{8 + \dots}}}}$$

è garantita dal teorema di Sleszynski-Pringsheim (tardo XIX secolo) che afferma che, se  $a_1, a_2, a_3, \dots$  e  $b_1, b_2, b_3, \dots$  sono numeri reali e per ogni  $n$  vale

$$|b_n| \geq |a_n| + 1$$

che coincide sostanzialmente con la notazione moderna

$$\sqrt{18} = 4 + \frac{2}{8 + \frac{2}{8 + \frac{2}{8 + \frac{2}{8 + \dots}}}}$$

Con l' opera di Cataldi viene messo a punto un procedimento iterativo efficace, elegante e dallo spirito moderno; per cui le frazioni continue possono essere ricordate da E. Bortolotti come "i primi passi verso la generalizzazione del concetto di numero (fino ad allora ristretto al solo campo dei razionali) e verso l' avvento del metodo infinitesimale".

Un altro matematico degno di essere ricordato è Daniel Schwenter (1585-1636) che fu, a varie riprese, professore di ebraico, di lingue orientali e di matematica presso l'università di Altdorf in Germania. Nel suo trattato *Geometrica Practica* trova delle approssimazioni per il numero razionale  $\frac{177}{233}$  determinando il massimo comune divisore di 177 e 233, e ne ricava le ridotte  $\frac{79}{104}$ ,  $\frac{19}{25}$ ,  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{1}{1}$  e  $\frac{0}{1}$ . Molti, nei secoli seguenti, sono gli studi condotti da prestigiosi matematici sulle frazioni continue; molti risultati e molti procedimenti ad esse collegati vengono ideati e perfezionati. Nel 1625, Albert Girard (1590-1633) in un commento ad un manuale di aritmetica di Simon Stevin (1548-1620) descrive alcuni sviluppi in frazioni continue di reali irrazionali, ma senza riportare una loro completa giustificazione.

Un altro matematico degno di nota che fece uso delle frazioni continue fu Lord Brouncker (1620-1684) il primo presidente della *Royal Society*. Egli trasformò l'interessante prodotto infinito

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \dots}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \dots}$$

allora la frazione continua generalizzata

$$\frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \frac{a_4}{b_4 + \dots}}}}$$

converge a un numero reale positivo minore di 1

scoperto dal matematico inglese John Wallis (1655) nella frazione continua<sup>4</sup>

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \frac{7^2}{2 + \dots}}}}$$

ma non usò ulteriormente queste frazioni.

Nel suo libro *Arithmetica infinitorum*, pubblicato nel 1655, John Wallis (1617-1703), discutendo la frazione di Brouncker, stabilì molte proprietà elementari delle ridotte di una frazione continua generica comprese le regole per costruirle. Vale la pena sottolineare che proprio a Wallis va attribuito il merito di aver utilizzato per la prima volta il termine "frazione continua".

Negli *Opuscoli postumi*, pubblicati nel 1703, di Christiaan Huygens (1629-1695) si trova un esempio di sviluppo in frazione continua (limitata) di un numero reale razionale basato sull' algoritmo della "divisione euclidea". Huygens è stato un matematico, astronomo e fisico olandese, fra i protagonisti della rivoluzione scientifica. Huygens preparò le fondamenta del calcolo infinitesimale (poi sviluppato da Leibniz e Newton) nei suoi lavori sui con, ma soprattutto è famoso per la sua ipotesi circa la natura ondulatoria della luce, oltre alle diverse importanti osservazioni astronomiche. Huygens applicò il calcolo con le frazioni continue per approssimare i rapporti tra gli ingranaggi necessari per la costruzione di un planetario meccanico. Nella sua macchina i pianeti ruotavano attorno al sole rispettando il rapporto tra i loro periodi di rivoluzione. Nel realizzare il suo planetario meccanico gli si pose il problema di determinarne il numero di denti degli ingranaggi che avrebbero mosso la Terra e gli altri pianeti, in modo che non risultassero troppo esigui, e quindi non in grado di animare correttamente i pianeti, o troppo numerosi, e dunque impossibili da realizzare materialmente. Consideriamo come esempio il caso di Saturno: all'epoca si credeva che il suo periodo di rivoluzione fosse di 29,46 anni (mentre sappiamo essere di 29,43), quindi ad un giro completo

---

<sup>4</sup>Questo risultato sarà dimostrato solo qualche decennio più tardi da Leonhard Euler (1707-1783).

dell'ingranaggio di Saturno la ruota della Terra ne avrebbe dovuti fare esattamente 29,46. Per risolvere il problema Christiaan ebbe un'idea semplice ma geniale: approssimare il numero decimale con una frazione il cui numeratore avrebbe costituito il numero dei denti dell'ingranaggio di Saturno ed il denominatore quello degli ingranaggi della Terra. Chiaramente la frazione  $\frac{2946}{100}$  è quella giusta tuttavia appare chiaro che costruire un ingranaggio con 2946 denti non è facile da costruire e quindi diventa importante trovare una frazione con numeratore e denominatore più piccoli che ben approssimi  $\frac{2946}{100}$ . Utilizzando le frazioni continue, determinò le prime approssimazioni di 29,46:  $\frac{29}{1}$ ,  $\frac{59}{2}$ , e  $\frac{206}{7}$ . Le prime vennero scartate per ovvie ragioni (ruote con 1 o 2 denti non sono molto utili!) ma la terza non presentava particolari difficoltà costruttive e quindi il gioco era fatto: un ingranaggio con 206 denti per Saturno ed uno con 7 per la Terra.

Dopo questi inizi, grandi matematici come Eulero (1707-1783), Lambert (1728-1777), Lagrange (1736-1813) e molti altri, come vedremo, svilupparono la teoria sulle frazioni continue in maniera organica e sistematica, come noi oggi la conosciamo. In particolare, un importante lavoro di Eulero *De fractionibus Continuis* pose le basi della trattazione moderna. Nel Capitolo XVIII de "*Introductio in analysin infinitorum*" si legge:

*356. Quoniam in praecedentibus capitibus plura cum de seriebus infinitis tum de productis ex infinitis factoribus conflatis disserui, non incongruum fore visum est, si etiam nonnulla de tertio quodam expressionum infinitarum genere addidero, quod continuis fractionibus vel divisionibus continetur. Quanquam enim hoc genus parum adhuc est excultum, tamen non dubitamus, quin ex eo amplissimus usus in analysin infinitorum aliquando sit redundaturus. Exhibui enim iam aliquoties eiusmodi specimina, quibus haec expectatio non parum probabilis redditur. Imprimis vero ad ipsam arithmetica et algebrae communem non contemnenda subsidia affert ista speculatio, quae hoc capite breviter indicare atque exponere constitui.*

357. *Fractionem autem continuam voco eiusmodi fractionem, cuius denominator constat ex numero integro cum fractione, cuius denominator denuo est aggregatum ex integro et fractione, quae porro simili modo sit comparata, sive ista affectio in infinitum progrediatur sive alicubi sistatur. Huiusmodi ergo fractio continua erit sequens expressio*

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{1}{e + \text{etc}}}}} \qquad a + \frac{\alpha}{b + \frac{\beta}{c + \frac{\gamma}{d + \frac{\delta}{e + \text{etc}}}}$$

*in quarum forma priori omnes fractionum numeratores sunt unitates, quam potissimum hic contemplantur in altera vero forma sunt numeratores numeri cuicumque.*

356. *Dal momento che nei precedenti capitoli ho dissertato di molti argomenti a riguardo sia delle serie che dei prodotti costituiti da infiniti fattori, non sembra incongruo che io aggiunga qualcosa su un terzo tipo di espressioni di genere infinito che contenga frazioni o divisioni continue. Sebbene infatti questo genere sia stato fin qui poco coltivato, tuttavia non dubitiamo che di questo concetto si trovino numerosissime applicazioni nell'analisi degli infinitesimi. Ho già mostrato infatti molti esempi in cui queste previsioni si dimostrano non poco probabili. Soprattutto invero la ricerca che ho deciso di indicare ed esporre brevemente in questo capitolo fornisce un aiuto non disprezzabile alla stessa aritmetica ed algebra comune.*

357. *Pertanto chiamo continua una frazione fatta in modo da avere il denominatore costituito da un numero intero sommato ad una frazione il cui denominatore è fatto a sua volta da un intero e da una frazione e che in avanti sia costituita in simile modo sia che questo comportamento si estenda all'infinito o si fermi ad un certo punto. In questo senso pertanto chiamiamo*



*frazione continua una espressione del tipo*

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{1}{e + \text{etc}}}}} \quad a + \frac{\alpha}{b + \frac{\beta}{c + \frac{\gamma}{d + \frac{\delta}{e + \text{etc}}}}$$

*nella forma della prima delle quali i numeratori delle frazioni sono tutti unitari, mentre nella seconda, che qui mostreremo essere molto potente i numeratori sono numeri qualunque.*

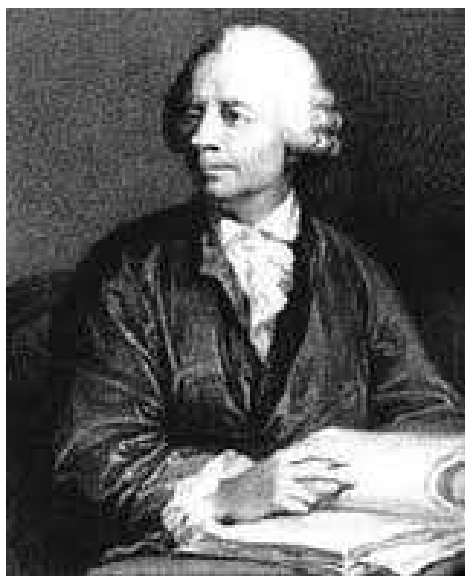


Figura 5.1: Leonhard Euler, noto in Italia come Eulero (Basilea, 15 aprile 1707 - San Pietroburgo, 18 settembre 1783). Sembra che Pierre Simon Laplace abbia affermato ‘Leggete Eulero; egli è il maestro di tutti noi’.

Eulero dimostra che *ogni numero razionale si può sviluppare in frazione continua limitata* e quindi per provare che un numero è irrazionale, osserva Eulero, è sufficiente verificare che il numero è sviluppabile in frazione continua infinita. Ed è proprio così che Eulero dimostra l’irrazionalità di  $e$ . Egli si accorge

che vale lo sviluppo

$$\frac{e-1}{e} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{10 + \frac{1}{14 + \text{etc}}}}}$$

dove i termini sono in progressione aritmetica. Eulero, osserva che lo sviluppo procede all'infinito: la successione dei denominatori cresce indefinitamente e non termina mai e dimostrerà, come vedremo, in modo rigoroso questo fatto in sede di risoluzione dell'equazione differenziale di Riccati. Ora, poichè i numeri razionali hanno sviluppo in frazione continua limitata, e solo i razionali, allora se il numero  $\frac{e-1}{e}$  ha sviluppo infinito in frazione continua esso non può certamente essere razionale e, pertanto, neppure  $e$ . Inoltre nell'*Introductio* Eulero perviene al seguente sviluppo

$$2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \text{etc}}}}}}}}$$

Eulero nell'*Intorductio* dimostra che ogni frazione continua si può ottenere come somma di una serie a segni alterni il cui termine generale dipende dai dati che definiscono la frazione continua stessa e, viceversa, assegnata una serie a segni alterni, esiste una frazione continua che rappresenta la sua somma. Per dirlo con le parole di Eulero

*374. Hoc modo innumerabiles inveniri poterunt fractiones continuæ in infinitum progredientes, quarum valor verus exhiberi queat. Cum enim ex supra traditis infinitæ series, quarum summae constant, ad hoc negotium accommodari queant, unaquæque transformari poterit in fractionem continuam, cuius adeo valor*

*summae illius seriei est aequalis. Exempla, quae iam hic sunt allata, sufficiunt ad hunc usum ostendendum. Verumtamen optandum esset, ut methodus detegeretur, cuius beneficio, si proposito fuerit fractio continua quaecunque, eius valor immediate inveniri posset. Quaquam enim fractio continua transmutari potest in seriem infinitam, cuius summa per methodos cognitae investigari queat, tamen plerumque istae series tantopere fiunt intricatae, ut earum summa, etiamsi sit satis simplex, vix ac ne vix quidem obtineri possit.*

374. *In questo modo si sono potute trovare innumerevoli frazioni continue che si spingono all'infinito, delle quali possiamo mostrare il valore vero. Infatti dal momento che le serie infinite che abbiamo precedentemente trattato, delle quali si conosce la somma, possono essere utilizzate a questo fine, ciascuna di esse potrà essere trasformata in una frazione continua, il cui valore è precisamente uguale a alla somma di quella serie. Gli esempi che abbiamo già fin qui portato, sono sufficienti ad illustrare questa applicazione. Purtuttavia è auspicabile che si trovi un metodo, per mezzo del quale, se è assegnata una frazione continua qualunque, si possa trovare immediatamente il suo valore. Sebbene infatti ogni frazione continua si possa trasformare in una serie infinita la cui somma possa essere studiata con metodi noti, tuttavia la maggior parte di queste serie diventano estremamente complicate, così che la loro somma, nonostante sia abbastanza semplice, solo con fatica e a volte neppure con fatica si può trovare.*

Se

$$x = a + \frac{\alpha}{b + \frac{\beta}{c + \frac{\gamma}{d + \frac{\delta}{e + \frac{\epsilon}{f + \text{etc.}}}}}}$$

allora

$$x = a + \frac{\alpha}{b} - \frac{\alpha\beta}{b(bc + \beta)} + \frac{\alpha\beta\gamma}{(bc + \beta)(bcd + \beta d + \gamma b)} - \dots$$

Il fatto interessante e sorprendente è che se applichiamo questa formula a  $\frac{e-1}{2}$  troviamo

$$\frac{e-1}{2} = 1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{7 \cdot 71} - \text{etc.}$$

e questo non sembra legato a nessuno dei noti sviluppi in serie per  $e$ .<sup>5</sup>

Preso in considerazione l'equazione di Riccati

$$ady + y^2 dx = x^{\frac{-4n}{2n+1}} dx \quad (5.3)$$

Eulero si accorge che, posto

$$p = (2n + 1)x^{\frac{1}{2n+1}}$$

l'equazione (4.3) diventa

$$adq + q^2 dp = dp$$

dove

$$q = \frac{a}{p} + \frac{1}{\frac{5a}{p} + \frac{1}{\frac{7a}{p} + \frac{1}{\dots + \frac{1}{\frac{2n-1}{p} + \frac{1}{x^{\frac{2n}{2n+1}} y}}}}}. \quad (5.4)$$

D'altra parte, separando le variabili in (4.3) Eulero ottiene

$$\frac{adq}{1 - q^2} = dp$$

da cui integrando

$$\frac{a}{2} \log \left( \frac{1+q}{1-q} \right) = p + C.$$

Posto  $C = 0$  si ha

$$e^{\frac{2p}{a}} = \frac{q+1}{q-1} = 1 + \frac{1}{q-1}$$

---

<sup>5</sup>Per questa parte su Eulero si veda [5]

e, ricordando lo sviluppo in frazione continua per  $q$  (5.4), si ottiene

$$e^{\frac{2p}{a}} = 1 + \frac{1}{\frac{a-p}{p} + \frac{1}{\frac{5a}{p} + \frac{1}{\frac{7a}{p} + \text{etc.}}}}$$

Posto  $p = 1$  e  $a = 2$  si ha

$$e = e^1 = e^{\frac{2 \cdot 1}{2}} = 1 + \frac{2}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{10 + \frac{1}{14 + \text{etc}}}}}$$

Eulero dimostra così, tramite lo studio dell'equazione di Riccati, che lo sviluppo in frazione continua di  $e$  è infinito provando l'irrazionalità di  $e$ .

Nel 1770, Johann Heinrich Lambert (1728-1777) pubblica *Beytrage zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung*, lavoro in cui viene data una sistemazione organica alle ricerche sulle frazioni continue.

Un altro matematico a cui dobbiamo alcuni risultati cruciali nella teoria delle frazioni continue è Joseph-Louis Lagrange (Torino, 25 gennaio 1736 - Parigi, 10 aprile 1813) al cui genio era serbato di aprire anche in questo come in ogni altro ramo del calcolo una vena fecondissima di nuovi metodi per trattare una moltitudine di argomenti e risolvere un'infinità di problemi" (cfr Favaro). Lagrange dimostra (1770) che una frazione continua periodica è la radice di un'equazione di secondo grado e, viceversa, un irrazionale quadratico (ovvero una radice di un'equazione di secondo grado a coefficienti interi il cui discriminante non sia un quadrato perfetto) è sviluppabile in una frazione continua periodica.

Sessanta anni dopo Lagrange, Evariste Galois (1811-1832) proverà che sviluppando in frazione continua le radici di un'equazione di secondo grado i periodi sono composti dagli stessi numeri ordinati inversamente. Anche il primo lavoro matematico di Galois è dedicato alle frazioni continue: *Demonstration d'un theoreme sur les fractions continues periodiques*, pubblicato (1 aprile 1829) quando l'autore è studente nel College Louis- Le-Grand.

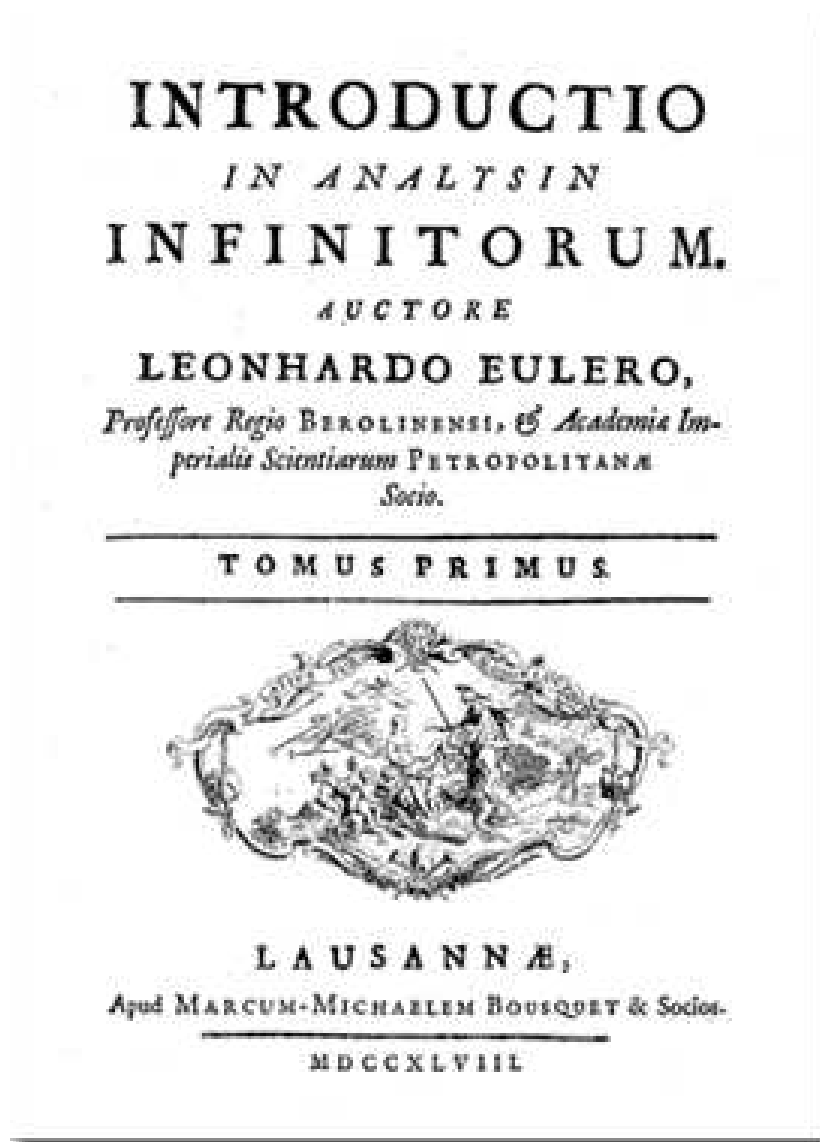


Figura 5.2: *Introductio in analysin infinitorum* è l'opera di Leonhard Euler che pone le basi all'analisi matematica. Pubblicato nel 1748, l'*Introductio* è in due volumi: il primo contiene 18 capitoli mentre il secondo ne contiene 22.



Figura 5.3: Joseph-Louis Lagrange Torino, (25 gennaio 1736 - Parigi, 10 aprile 1813).

Anche i matematici Brezinski, Jacobi, Perron, Hermite, Cauchy, Stieltjes diedero contributi degni di nota allo studio delle frazioni continue.

Un altro matematico al quale dobbiamo contributi importanti sulle frazioni continue è Felix Klein<sup>6</sup>. Una sorprendente interpretazione geometrica della frazione continua di un numero irrazionale fu proposta da Klein nel 1895. Supponiamo che  $\alpha$  sia un irrazionale positivo. Consideriamo tutti i punti del piano le cui coordinate sono interi positivi, e immaginiamo di piantare nel piano dei pioli in corrispondenza di tutti questi punti. La retta  $y = \alpha x$  non passa per nessuno di essi. Immaginiamo un filo teso lungo tale retta e avente un'estremità fissata a un punto della retta infinitamente distante. Se l'altro capo del filo, nell'origine, viene spostato dalla retta, il filo si appoggerà a certi pioli; se verrà trascinato via dall'altra parte della retta, il filo si appoggerà a certi altri pioli. I pioli in uno di questi insiemi (quelli sotto alla retta) saranno associati ai punti con coordinate  $(q_0, p_0), (q_2, p_2), (q_4, p_4); \dots$  corrispondenti ai punti con coordinate minori di  $\alpha$ . I pioli nell'altro insieme (quelli sopra alla retta) saranno associati ai punti di coordinate  $(q_1, p_1), (q_3, p_3), (q_5, p_5) \dots$  corrispondenti ai convergenti maggiori di  $\alpha$ . Il filo in ciascuna delle due posizioni formerà una poligonale che si avvicinerà alla retta  $y = \alpha x$ .

Oggi molti ricercatori si occupano di frazioni continue e, recentemente, le frazioni continue generalizzate sono state utilizzate in relazione alla teoria del caos.

---

<sup>6</sup>Felix Christian Klein (1849 -1925) è stato un matematico tedesco. E' conosciuto soprattutto per i suoi contributi alla geometria non euclidea, ai collegamenti tra geometria e teoria dei gruppi e per alcuni risultati sulla teoria delle funzioni.



# Bibliografia

- [1] H. Davenport, 'Aritmetica superiore', Zanichelli Editore, Bologna, sesta edizione 1994
- [2] C.D. Olds, 'Continued fractions', Random House and The L.W. Singer Company, second printing 1963
- [3] M. Giaquinta, 'La forma delle cose. Idee e metodi in matematica tra storia e filosofia, vol. 1', Edizioni di Storia e Letteratura, Roma, 2010
- [4] Giorgio T. Bagni, 'Frazioni continue discendenti e ascendenti', Bollettino dei Docenti di Matematica 30 (1995), 85-90
- [5] Sandifer C. Edward , 'How euler did it', Mathematical Association Of America, United States, 08/2007
- [6] A. Favaro, 'Notizie storiche sulle frazioni continue dal secolo decimoterzo al decimosettimo', in: 'Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche' , dir. da B. Boncompagni, A, VII, Forni, Bologna 1874.
- [7] G.H. Hardy and E.M.Wright, 'An Intoduction to the Theory of Numbers', Oxford at the Clarendon Press , (fifth edition 1979)
- [8] 'Gli Elementi' Euclide. (a cura di A. Frajese - L. Maccioni). UTET, 1970.
- [9] Note del corso di Teoria dei numeri I, a.a. 2010/2011, Proff. Calogero Tinaglia.



# Ringraziamenti

In queste poche righe desidero ringraziare, anzitutto, il mio Relatore di Tesi, il professore Salvatore Coen per il sostegno, l'incoraggiamento, la Sua grande disponibilita' e per avermi dato la possibilita' di lavorare su questo argomento.

Ringrazio il professore Calogero Tinaglia per avere acconsentito a rivedermi il testo di questa tesi.

Ringrazio la professoressa Giovanna Citti e il professore Ermanno Lanconelli per i diversi consigli e l'assistenza nel progetto Cap Excel.

Ringrazio i miei colleghi Dott. Nicola Biagi, Dott.ssa Roberta Mazzone, Dott.ssa Beatrice Abbondanza, Dott. Gianluca Pasini, Dott.ssa Arianna Monti, Dott.ssa Giorgia Laghi e Dott.ssa Chiara Spino per la collaborazione in questi anni di studio.

Da ultimo, di certo non per ordine di importanza, ringrazio tutta la mia famiglia e i miei amici più cari.

*"Sai cos'è bello, qui? Guarda: noi camminiamo, lasciamo tutte quelle orme sulla sabbia, e loro restano lì, precise, ordinate. Ma domani, ti alzerai, guarderai... e non ci sarà più nulla, un'orma, un segno qualsiasi, niente. Il mare cancella, di notte. La marea nasconde. È come se non fosse mai passato nessuno... Se c'è un luogo, al mondo, in cui puoi pensare di essere nulla, quel luogo è qui. Non è più terra, non è ancora mare... È tempo. Tempo che passa. E basta" (Oceano Mare)*