Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

EQUIVALENZA DEI SISTEMI DI FORZE E RIDUZIONE AI SISTEMI SEMPLICI

Tesi di Laurea in Fisica Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Emanuela Caliceti

Presentata da:
Matteo Umberto Italiani

Sessione II
Anno Accademico 2011-2012

a Vincenzo e Maria Pia

Indice

Elenco delle figure

Capitolo 1

Introduzione e nozioni preliminari

Lo scopo di questa tesi è lo studio dei sistemi di forze e la determinazione di condizioni che ne assicurino l' equilibrio. Primo passo in questa direzione sarà quello di introdurre la nozione di *equivalenza* fra sistemi di forze e l'individuazione di alcuni sistemi particolarmente semplici che verranno classificati come "sistemi elementari". Si procederà poi a stabilire che nell' ambito della Statica, e ai fini dell' equilibrio, è possibile sostituire un sistema di forze con un altro ad esso equivalente. Dunque l' obiettivo centrale sarà quello di *ridurre* un generico sistema di forze, ovvero di dimostrare che è equivalente ad una combinazione di sistemi elementari, ed in particolare ad un sistema costituito da tre forze, di cui due compongono una *coppia.* Quindi un sistema formato da un numero arbitrariamente alto di forze, potrà essere *ridotto* ad un sistema "facile" da studiare e che ne conserva le caratteristiche, ovvero l' azione esercitata sul corpo.
Nel primo capitolo si richiameranno le definizioni e i risultati preliminari utili nel corso della trattazione, per i quali non si daranno dimostrazioni ma si rimanda alla lettura di [1]. Il Capitolo 2 contiene il corpo della tesi, ovvero si tratterà della riduzione dei sistemi di forze. Negli ultimi due capitoli si applicherà quanto dimostrato nel secondo capitolo al caso di particolari tipi

di sistemi di forze, ovvero quelli costituiti da forze parallele tra loro, e in particolar modo al caso in cui le forze parallele siano le *forze peso* dei corpi presi in esame. Si introdurrà in particolare la nozione di *baricentro* di un corpo, nozione molto importante sia in Statica che nel più generale ambito della Dinamica di sistemi meccanici.
Nell' intera trattazione si è fatto riferimento ai testi [2], [3],[5] e [4] ma specialmente a [1], al quale si rimanda il lettore per ulteriori chiarimenti ed approfondimenti.

1.1 Forze e principi di statica

Intuitivamente il movimento di un corpo è strettamente legato al concetto di *forza*: ad esempio una spinta che fa oscillare l'altalena, o l'azione dei freni che permette di fermare un treno. La nozione intuitiva di forza viene semplicemente tradotta in matematica.

Definizione 1.1 (forza). *Si definisce forza una quantità definita da*

- *una intensità, indicata da un numero non negativo;*
- *una direzione;*
- *un verso;*
- *un punto nel quale è applicata.*

Si ha quindi che una forza può essere rappresentata univocamente da un vettore applicato $(\overrightarrow{F}, A)$, *dove* $\overrightarrow{F}$ *è un vettore in* $\mathbb{R}^3$, *detto vettore della forza, e* A *è un punto dello spazio euclideo reale tridimensionale, detto punto di applicazione della forza. Si definisce linea d'azione della forza la retta passante per il punto di applicazione e parallela alla direzione del vettore* $\overrightarrow{F}$.

Come si è già osservato, la presenza di forze fa sì che un corpo possa muoversi (o fermarsi se già in movimento). In questo contesto considereremo un corpo soggetto all' azione di forze che non ne alterano lo stato di quiete iniziale. Lo studio delle condizioni sotto le quali ciò è possibile prende il nome di *Statica*.

Osservazione 1. Si osserva che l'effetto di una forza agente su un corpo è strettamente legato alla *massa* del corpo stesso. Quindi anche nel caso in cui una forza sia applicata a corpi approssimabili a punti, questi dovranno essere "dotati" di massa; per questo motivo si ha bisogno di introdurre la nozione di *punto materiale*.

Definizione 1.2 (punto materiale)**.** *Si definisce punto materiale un corpo approssimabile per dimensioni ad un punto e dotato di massa m.*

In Meccanica ogni corpo e ogni sistema di corpi può essere rappresentato come insieme di punti materiali. Questi ultimi, e di conseguenza i corpi, si distinguono in:

- *liberi*: se possono passare dalla loro posizione a qualsiasi altra geometricamente "vicina";
- *vincolati*: se non è possibile per tali punti accedere a tutte le posizioni geometricamente "vicine" per l' azione di legami o *vincoli*.

Ad esempio si può considerare come corpo vincolato un libro su un tavolo orizzontale: per il libro sono vietati tutti gli spostamenti verso il basso.

Osservazione 2. Si può definire *corpo rigido* un insieme di punti materiali vincolati tra loro in modo che la loro distanza, a due a due, sia fissa. Un vincolo di questo tipo è chiamato *vincolo di rigidità*.

Quindi esistono dei vincoli "interni" al corpo stesso; si possono distinguere infatti i

- *vincoli interni ad un sistema*: dovuti all' azione di punti appartenenti al corpo;
- *vincoli esterni*: dovuti all' azione di punti o corpi esterni al sistema.

Si osserva che è possibile riprodurre gli effetti che un vincolo ha su un corpo tramite l' azione di opportune forze. Si ha quindi il seguente postulato

Postulato 1.3 (delle rezioni vincolari)**.** *Senza alterare la quiete o il moto di un corpo o di un sistema di corpi, si possono sopprimere alcuni o tutti i vincoli che agiscono sul corpo purché si applichino ad esso opportune forze dette reazioni vicolari.*

Di particolare interesse risultano i *vincoli lisci*

Definizione 1.4. *Un vincolo si dice liscio o privo di attrito se è in grado di esplicare l' azione di un' unica reazione vincolare avente la stessa direzione e verso opposto di uno spostamento totalmente proibito, ovvero di uno spostamento virtuale che porterebbe il corpo in una posizione né accessibile né avvicinabile tramite spostamenti consentiti dai vincoli.*

Le forze si possono dunque distinguere in

- *reazioni vincolari*: dovute all' azione di vincoli;
- *forze attive*: tutte le altre.

Un altro postulato fondamentale è il celebre *Principio d' azione e reazione*:

Postulato 1.5 (Principio d'azione e reazione)**.** *Se sul punto materiale A agisce una forza dovuta ad un altro punto B, allora A esercita su B una forza uguale e contraria e sulla stessa linea d' azione coincidente con la retta passante per i due punti.*

Osservazione 3. Il Principio d' azione e reazione vale anche per le reazioni vincolari; quindi se sul punto A agisce una forza esercitata da un vincolo che lo lega a B, allora su B agisce una reazione vincolare uguale e contraria dovuta ad A.

Dall' Osservazione 3 segue che le forze attive (o le reazioni vincolari) *interne*, ovvero dipendenti solo dai punti costituenti il corpo, sono sempre scindibili in sistemi di due forze attive (o reazioni vincolari) uguali e contrarie tra loro.

1.2 Equilibrio delle forze applicate ad un punto materiale

Si è osservato come per alterare lo stato di quiete o di moto di un punto o di un corpo sia necessario applicare (o rimuovere) al punto delle forze. Dalle esperienze seguono i postulati

Postulato 1.6. *Le variazioni di quiete o di moto prodotte da un sistema di forze agente sullo stesso punto materiale P, vincolato o libero, si possono ottenere sostituendo il sistema con un' unica forza, detta risultante delle forze. La risultante è applicata anch' essa in P ed ha vettore determinato dalla somma*[1] *dei vettori delle forze del sistema.*

Definizione 1.7 (sistema di forze in equilibrio)**.** *Un sistema di forze si dice in equilibrio su un punto materiale libero P quando, applicato su P, non ne altera lo stato di quiete o di moto indipendentemente da altri sistemi agenti sullo stesso punto.*

Per i punti materiali vincolati vale il teorema

Teorema 1.8. *Sia P un punto materiale in quiete. Condizione necessaria e sufficiente affinchè P rimanga in quiete è*

$$\overrightarrow{F} + \overrightarrow{\Phi} = 0 \tag{1.1}$$

dove $\overrightarrow{F}$ e $\overrightarrow{\Phi}$ sono rispettivamente le risultanti delle forze attive e delle reazioni vincolari agenti su P.

1.3 Sistemi di forze.

In generale le forze che agiscono su un corpo non sono applicate tutte nello stesso punto materiale:

[1] somma vettoriale:composizione tramite la regola del parallelogramma

Definizione 1.9 (sistema di forze)**.** *Si definisce sistema di forze una n-upla di vettori applicati*

$$(S): \quad (\overrightarrow{F_1}, A_1), \quad (\overrightarrow{F_2}, A_2), \quad \ldots \quad ,(\overrightarrow{F_n}, A_n).$$

Definizione 1.10 (risultante di un sistema di forze)**.** *Si definisce risultante di un sistema di forze il vettore $\overrightarrow{R}$, dato dalla somma dei vettori delle singole forze:*

$$\overrightarrow{R} \ = \ \overrightarrow{F_1} \ + \ \overrightarrow{F_2} \ + \ \ldots \ + \ \overrightarrow{F_n}$$

Definizione 1.11 (momento di una forza)**.** *Sia data una forza $(\overrightarrow{F}, A)$ ed un generico punto dello spazio O. Si definisce momento di $\overrightarrow{F}$ rispetto al polo O il vettore*

$$\overrightarrow{\Omega}(O) \ = \ \overrightarrow{F} \ \times (O - A).$$

Indicando, come in Figura 1.1 con α l'angolo formato da $O - A$ e $\overrightarrow{F}$ si ha che il modulo di $\overrightarrow{\Omega}(O)$ vale

$$\Omega \ = \ F \ (\overline{AO}) \ \sin\alpha \ = \ F \ d$$

dove d è chiamato braccio della forza rispetto al punto O, e rappresenta la distanza di O dalla linea d' azione di $\overrightarrow{F}$.
Quindi il momento è un vettore che ha per modulo il prodotto del modulo della forza per la distanza del polo dalla linea d' azione, direzione normale al piano contenente la linea d' azione della forza e il polo e verso tale che un osservatore posto in O nel senso del momento veda la forza agire dalla sua destra alla sua sinistra.

Osservazione 4. Il momento dipende dal punto considerato come polo; tuttavia scegliendo come polo un qualsiasi punto della linea d' azione della forza (e quindi anche il suo punto di applicazione) si ha che il momento è nullo: i vettori $A - O$ e $\overrightarrow{F}$ sono paralleli, quindi il loro prodotto vettoriale è nullo. Viceversa, sempre considerando la definizione del momento, esso è nullo solo per i punti della linea d' azione di $(\overrightarrow{F}, A)$.

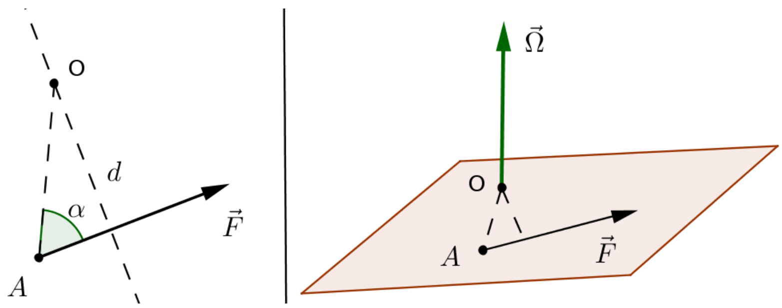

Figura 1.1: Braccio e momento di una forza rispetto a un polo

Osservazione 5. Il vettore di una forza può essere applicato in qualsiasi punto della linea d' azione (operazione di *scorrimento)* senza alterarne il momento. Sia infatti $\overrightarrow{\Omega'}(O)$ il momento rispetto al polo O di $(\overrightarrow{F}, A')$. Essendo $A - A'$ parallelo ad $\overrightarrow{F}$ si ha allora

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Omega'}(O) &= \overrightarrow{F} \times (O - A') = \\ &= \overrightarrow{F} \times (O - A) + \overrightarrow{F} \times (A - A') = \overrightarrow{\Omega}(O).\end{aligned}$$

Definizione 1.12. *Si chiama momento risultante di un sistema di forze* $(\overrightarrow{F_1}, A_1), (\overrightarrow{F_2}, A_2), \ \ldots \ , (\overrightarrow{F_n}, A_n)$ *rispetto al polo* O *il vettore* $\overrightarrow{\Omega}(O)$ *somma dei momenti di ogni singola forza componente il sistema rispetto al punto* O*.*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Omega}(O) &= \overrightarrow{\Omega_1}(O) + \overrightarrow{\Omega_2}(O) + \ldots + \overrightarrow{\Omega_n}(O) = \\ &= \overrightarrow{F_1} \times (O - A_1) + \overrightarrow{F_2} \times (O - A_2) + \ldots + \overrightarrow{F_n} \times (O - A_n) = \\ &= \sum_{s=1}^{n} \overrightarrow{F_s} \times (O - A_s).\end{aligned} \tag{1.2}$$

Proposizione 1.13. *Il momento risultante dipende dal polo considerato; in particolare se* O *e* O_1 *sono due punti dello spazio, chiamati con* $\overrightarrow{\Omega}(O)$ *e* $\overrightarrow{\Omega}(O_1)$ *i momenti risultanti di un sistema di forze calcolati rispetto a* O *e* O_1*, allora si ha*

$$\overrightarrow{\Omega}(O_1) = \overrightarrow{\Omega}(O) + \overrightarrow{R} \times (O_1 - O), \tag{1.3}$$

con $\overrightarrow{R}$ *vettore risultante del sistema di forze.*

Dimostrazione. Si ha infatti

$$\vec{\Omega}(O_1) = \sum_{s=1}^{n} \vec{F}_s \times (O_1 - A_s) \ =$$
$$= \sum_{s=1}^{n} \vec{F}_s \times (O_1 - O) + \sum_{s=1}^{n} \vec{F}_s \times (O - A_s) \ = \ \vec{R} \times (O_1 - O) + \vec{\Omega}(O).$$

□

Osservazione 6. Dalla relazione (1.3) si evince che il momento risultante di un sistema è costante per tutti i punti dello spazio se e solo se il vettore risultante delle forze $\vec{R}$ è nullo.

Se tutte le forze sono situate su un piano, si può definire la nozione utile di *momento statico.*

Definizione 1.14. *Sia* $(\vec{F}, A)$ *una forza; si definisce momento statico* N *di* $\vec{F}$ *rispetto ad* O*, il valore*

$$N \ = \ \pm\, F\, d \ = \ \pm\Omega \quad , \tag{1.4}$$

con la convenzione di scegliere il segno positivo quando un osservatore in O *vede* $\vec{F}$ *andare da destra a sinistra.*

Osserviamo che, indicato con $\vec{k}$ un versore normale al piano contenente la forza e il polo e diretto verso l' osservatore, il momento $\vec{\Omega}$ e $N\vec{k}$ hanno uguale modulo, direzione e verso, quindi

$$\vec{\Omega} \ = \ N\vec{k}\,.$$

Quindi per un sistema di forze complanari, il momento risultante rispetto ad O è:

$$\vec{\Omega}(O) \ = \ (N_1 + N_2 + \ \ldots \ + N_n)\,\vec{k}\,, \tag{1.5}$$

dove N_1 , N_2, … , N_n sono i momenti statici delle forze del sistema rispetto al polo O. Quindi si ha che

Proposizione 1.15. *Condizione necessaria e sufficente affinché il momento risultante di un sistema di forze complanari sia nullo consiste nell' annullarsi della somma dei suoi momenti statici.*

Di particolare importanza è il seguente

Teorema 1.16. *Condizione necessaria e sufficente affinché due forze abbiano risultante e momento risultante nulli è che siano uguali, opposte e con la stessa linea d' azione.*

Di conseguenza, se un sitema si scinde in un numero di sistemi formati da coppie di forze uguali e contrarie con stessa linea d' azione, allora i vettori risultante e momento risultante sono entrambi nulli. Abbiamo già osservato che, per il *Principio di azione e reazione* 1.5, le forze attive interne e le forze vincolari interne di un sistema di forze costituiscono due sistemi di forze composte da coppie come sopra. Quindi

Teorema 1.17. *Il sistema delle forze attive interne e delle reazioni vincolari interne agenti su un corpo ha vettore risultante e momento risultante nulli.*

1.3.1 Equilibrio di sistemi di forze

Si consideri un corpo costituito da N punti $A_1, A_2, \ldots, A_N$. Indichiamo con $\overrightarrow{F_s}$ e $\overrightarrow{\Phi_s}$ rispettivamente i vettori risultanti delle forze attive e delle reazioni vincolari agenti su A_s, $\;s = 1, \ldots, N$. Si è provato che ogni punto A_s del sistema, per $s = 1, \ldots, N$, se in stato di quiete, vi rimane se e solo se

$$\overrightarrow{R_s} := \overrightarrow{F_s} + \overrightarrow{\Phi_s} \;=\; 0.$$

Sommando su s e ponendo

$$\overrightarrow{F} = \sum_{s=1}^{N} \overrightarrow{F_s}, \qquad \overrightarrow{\Phi} = \sum_{s=1}^{N} \overrightarrow{\Phi_s}$$

si ottiene

$$\overrightarrow{R} := \;\overrightarrow{F} + \overrightarrow{\Phi} \;=\; 0. \tag{1.6}$$

Indicando poi con $\overrightarrow{F_e}$ e $\overrightarrow{\Phi_e}$ rispettivamente i vettori risultanti delle forze attive esterne e delle reazioni vincolari esterne, in virtù del Teorema 1.17, dalla (1.6) si ottiene

$$\overrightarrow{R_e} := \overrightarrow{F_e} + \overrightarrow{\Phi_e} = 0. \tag{1.7}$$

Con lo stesso procedimento si dimostra che deve valere

$$\overrightarrow{\Omega_e}(O) + \overrightarrow{\Psi_e}(O) = 0 \quad , \tag{1.8}$$

dove $\overrightarrow{\Omega_e}(O)$ e $\overrightarrow{\Psi_e}(O)$ indicano rispettivamente i momenti risultanti delle forze attive esterne e delle reazioni vincolari esterne. In definitiva

Teorema 1.18. *Per la quiete di un corpo è necessario che siano nulle la somma dei vettori risultanti delle forze attive esterne e delle reazioni vincolari esterne e la somma dei momenti risultanti delle forze attive esterne e delle reazioni vincolari esterne rispetto ad un qualunque polo O.*

Quindi, ricordando la Definizione 1.7, si ha

Teorema 1.19. *(equilibrio di un sistema di forze) Condizione necessaria affinché un sistema di forze (S) sia in equilibrio è che siano soddisfatte*

$$\overrightarrow{R} = 0 \tag{1.9}$$

$$\overrightarrow{\Omega}(O) = 0 \ , \qquad \forall O \in \mathbb{R}^3, \tag{1.10}$$

dove $\overrightarrow{R}$ e $\overrightarrow{\Omega}(O)$ sono rispettivamente il vettore risultante e il momento risultante rispetto al polo O del sistema (S).

Capitolo 2

Equivalenza dei sistemi di forze

Definizione 2.1 (sistemi di forze equivalenti)**.** *Siano dati due sistemi di forze* $(\overrightarrow{F_1}, A_1), (\overrightarrow{F_2}, A_2), \ \dots \ , (\overrightarrow{F_n}, A_n)$ *e* $(\overrightarrow{F_1}', A_1'), (\overrightarrow{F_2}', A_2'), \ \dots \ , (\overrightarrow{F_m}', A_m')$ *che indicheremo con* (S) *e* (S') *rispettivamente. Si dice che* (S) *è equivalente a* (S') *se sono soddisfatte le seguenti condizioni*

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R}' \tag{2.1}$$

$$\overrightarrow{\Omega}(O) = \overrightarrow{\Omega}'(O) \qquad \forall \ O \in \mathbb{R}^3 \tag{2.2}$$

dove i vettori $\overrightarrow{R}$ *e* $\overrightarrow{R}'$ *sono rispettivamente i vettori risultanti di* (S) *e di* (S') *e analogamente i vettori* $\overrightarrow{\Omega}(O)$ *e* $\overrightarrow{\Omega}'(O)$ *sono i momenti risultanti dei due sistemi, calcolati rispetto allo stesso polo generico* O*.*

Osservazione 7. In virtù della relazione (1.3), se vale la (2.1), affinché sia soddisfatta la (2.2) per ogni $O \in \mathbb{R}^3$ è sufficiente che essa sia soddisfatta per un particolare punto O_1 dello spazio. Infatti si ha

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Omega}(O) &= \overrightarrow{\Omega}(O_1) + \overrightarrow{R} \times (O - O_1) \\ &= \overrightarrow{\Omega}'(O_1) + \overrightarrow{R}' \times (O - O_1) = \overrightarrow{\Omega}'(O). \end{aligned}$$

Osservazione 8. Ricordando, in base al Teorema 1.19, che un sistema di forze $(\overrightarrow{F_1}, A_1), (\overrightarrow{F_2}, A_2), \ \dots \ , (\overrightarrow{F_n}, A_n)$ è in equilibrio se e solo se

$$\begin{cases} \overrightarrow{R} = 0 \\ \overrightarrow{\Omega}(O) = 0 \quad \forall O \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

l'insieme delle forze di un sistema e quelle di un sistema equivalente, ma di verso opposto, costituiscono un sistema in equilibrio. Infatti il vettore risultante, dato dalla somma dei vettori risultanti dei due sistemi, sarà nullo per (2.1). Allo stesso modo, per (2.2) e per l' Osservazione 7, il momento risultante è anch' esso nullo. Quindi il sistema è in equilibrio.

Allora se ad un sistema di forze applicate ad un corpo si sostituisce un sistema equivalente, non viene alterato lo stato di quiete o moto. Ciò significa che è possibile semplificare lo studio della quiete o del moto di un corpo sostituendo il sistema dato con un altro ad esso equivalente e che sia il più "semplice" possibile.

2.1 Sistemi semplici di forze

2.1.1 Una singola forza

Sicuramente il sistema di forze più semplice è quello costituito da una singola forza $(\overrightarrow{F}, A)$. E' evidente che:

- il vettore risultante è $\overrightarrow{F}$ stesso;
- il momento risultante rispetto ad un generico polo O è $\overrightarrow{F} \times (O - A)$, che è nullo quindi se e solo se il punto O è sulla linea di azione di $\overrightarrow{F}$;
- i sistemi equivalenti formati da una sola forza applicata sono ottenuti traslando $\overrightarrow{F}$ lungo la sua linea d'azione. Più precisamente $(\overrightarrow{F}, A)$ e $(\overrightarrow{F}', A')$ sono equivalenti se e solo se $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}'$ e A' sta sulla linea d' azione di $(\overrightarrow{F}, A)$.

Vale il seguente teorema:

Teorema 2.2. *Un sistema formato da due forze, le cui linee d'azione siano rette sghembe, non può essere equivalente ad una forza sola.*

Dimostrazione. Per assurdo, se il sistema fosse equivalente ad una sola forza $(\overrightarrow{F}, A)$, allora il sistema formato dalle due forze e da $(-\overrightarrow{F}, A)$ sarebbe in equilibrio. Ma condizione necessaria affinchè ciò sia possibile è la complanarità dei tre vettori, che è contro l'ipotesi del teorema. □

2.1.2 La coppia

Definizione 2.3. *si definisce coppia il sistema formato da due forze di uguale intensità, verso opposto e linee d'azione parallele e non coincidenti.*

Quindi una coppia è costituita da due vettori applicati del tipo $(\overrightarrow{F}, A)$ e $(-\overrightarrow{F}, B)$, come in Figura 2.1.

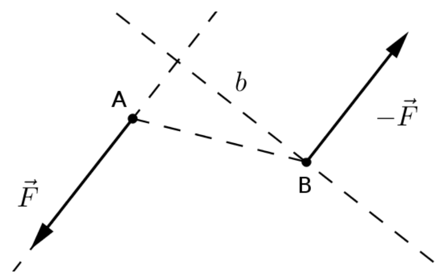

Figura 2.1: Esempio di coppia

E' immediato verificare che:

- la risultante delle forze è nulla;
- il momento risultante non dipende dal polo considerato.

In particolare la seconda proprietà è diretta conseguenza della prima: sia $\overrightarrow{\Omega}(O)$ il momento risultante rispetto ad $O \in \mathbb{R}^3$. Considerato un altro punto qualsiasi dello spazio O_1, si ha che:

$$\overrightarrow{\Omega}(O_1) = \overrightarrow{\Omega}(O) + \overrightarrow{R} \times (O_1 - O).$$

Quindi, dato che $\overrightarrow{R} = 0$, i due momenti sono uguali.

Definizione 2.4. *Si definisce momento della coppia, indicato con* $\overrightarrow{\Omega}$*, il momento risultante della coppia rispetto ad un qualsiasi punto di* $\mathbb{R}^3$*.*

Osservazione 9. Per quanto detto finora il momento della coppia è uguale al momento di una delle due forze rispetto al punto di applicazione dell'altra:

$$\overrightarrow{\Omega} = \overrightarrow{F} \times (B - A) \tag{2.3}$$

Osservazione 10. Il momento di una coppia è normale al piano contenente le due forze, detto *piano della coppia.* Il verso è tale che un osservatore posto nel punto di applicazione di una delle forze e orientato come il momento, vede l'altra forza agire da destra verso sinistra.

Proposizione 2.5. *Il modulo del momento di una coppia vale*

$$\Omega = Fb \tag{2.4}$$

dove b *è la distanza delle due forze, come mostrato in Figura 2.1, chiamata braccio della coppia.*

Osservazione 11. Osserviamo che, avendo vettori risultanti nulli, due coppie sono equivalenti tra loro se e solo se hanno lo stesso momento della coppia. Quindi le coppie di questo genere giacciono sullo stesso piano, o su piani paralleli (in modo tale che $\overrightarrow{\Omega}$ sia normale a entrambi i piani della coppia) e hanno verso uguale (ovvero è uguale il verso che un osservatore posto nel punto di applicazione di una forza attribuisce all'altra forza della coppia) per l' Osservazione 10. Inoltre, per la Proposizione 2.5, avranno il prodotto *braccio della coppia-intensità di una forza* uguali tra loro.

Si dimostra che:

Proposizione 2.6. *Fissato un vettore* $\overrightarrow{\Omega}$*, esistono, e sono infinite, coppie che hanno come momento tale vettore.*[1]

[1] Tali coppie sono tutte equivalenti tra loro

Dimostrazione. Sia $\overrightarrow{F}$ un vettore arbitrario tra i vettori ortogonali a $\overrightarrow{\Omega}$. Per un teorema del calcolo vettoriale, esiste un vettore $A - B$ tale che

$$\overrightarrow{\Omega} = (A - B) \times \overrightarrow{F} = \overrightarrow{F} \times (B - A); \tag{2.5}$$

quindi la coppia formata da $(\overrightarrow{F}, A)$ e $(-\overrightarrow{F}, B)$ ha come momento $\overrightarrow{\Omega}$. Per l'arbitrarietà di $\overrightarrow{F}$ si ha che il numero di coppie ottenute con questo procedimento è infinito. □

In particolare si avrà che data una coppia, essa potrà essere sempre sostituita in modo equivalente da un'altra coppia che abbia delle caratteristiche assegnate: ad esempio si può scegliere ad arbitrio l'intensità delle forze; in questo caso le coppie equivalenti dovranno avere un braccio tale da mantenere costante il momento della coppia. Viceversa è possibile fissare i punti di applicazione e il braccio e trovare una coppia equivalente semplicemente adattando l'intensità delle forze.

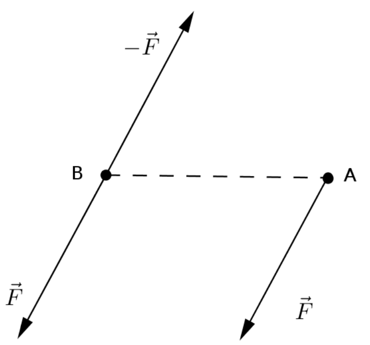

Figura 2.2: Come traslare parallelamente una forza aggiungendo una coppia

Osservazione 12. Aggiungendo opportune coppie è possibile traslare una forza parallelamente a se stessa. Infatti, si consideri una forza applicata $(\overrightarrow{F}, A)$; in un generico punto B si applichino ora le forze $\overrightarrow{F}$ e $-\overrightarrow{F}$ [2] come in Figura 2.2.

[2]essendo uguali e contrarie e applicate nello stesso punto, le due forze hanno risultante e momento nulli

Quindi si verrà ad avere una coppia $(\overrightarrow{F}, A), (-\overrightarrow{F}, B)$ e la forza $(\overrightarrow{F}, B)$, il tutto equivalente alla forza $(\overrightarrow{F}, A)$. In particolare $(\overrightarrow{F}, B)$ è il risultato di $(\overrightarrow{F}, A)$ alla quale è sommata una coppia opportuna. Verifichiamo ora che vale anche il viceversa:

Proposizione 2.7. *Il sistema formato da una forza $(\overrightarrow{F}, A)$ e da una coppia di momento $\overrightarrow{\Omega}$ normale al vettore $\overrightarrow{F}$ è equivalente alla forza $(\overrightarrow{F}, B)$ ottenuta traslando $\overrightarrow{F}$ in un opportuno punto B dello spazio.*

Dimostrazione. Essendo $\overrightarrow{F}$ ortogonale a $\overrightarrow{\Omega}$, esiste un punto B dello spazio tale che $\overrightarrow{\Omega} = \overrightarrow{F} \times (B - A)$. Allora la forza $(\overrightarrow{F}, B)$ è equivalente al sistema iniziale. In generale, potendo applicare una forza in modo equivalente in tutti i punti della propria linea d' azione, i punti B così definiti sono infiniti. □

2.2 Riduzione di sistemi di forze in sistemi semplici

Ridurre un sistema qualunque di forze in modo equivalente, per la Definizione 2.1, equivale a trovare un altro sistema (che sia il più semplice possibile) in modo tale mantenere invariati il vettore risultante e il momento risultante. Osserviamo che i sistemi introdotti di *singola forza* e *coppia* sono "caratterizzati" rispettivamente da un vettore applicato e da un momento. Allora intuitivamente combinando opportunamente una forza (che manterrà il ruolo della risultante) ed una coppia (che tramanderà un momento) si può ridurre in modo equivalente un qualunque sistema.
Si giunge al seguente teorema fondamentale:

Teorema 2.8. *Qualunque sistema di forze (S) equivale sempre ad un sistema formato da una sola forza e una sola coppia.*

Dimostrazione. Siano $\overrightarrow{R}$ e $\overrightarrow{\Omega}$ rispettivamente il vettore risultante e il momento risultante del sistema rispetto ad un fissato $O \in \mathbb{R}^3$. Considero la forza $(\overrightarrow{F}, O)$ con $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{R}$. Aggiungendo a questa forza una coppia con momento $\overrightarrow{\Omega}$, si ottiene un sistema con vettore risultante $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{R}$ e momento rispetto ad O uguale ad $\overrightarrow{\Omega}$, e quindi equivalente ad (S). $\square$

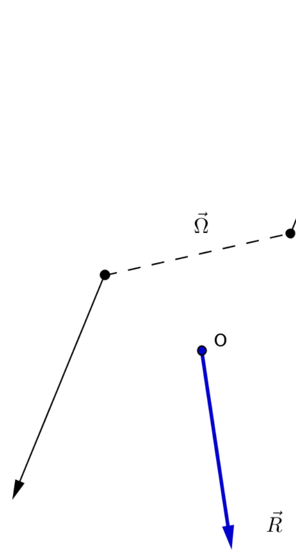

Figura 2.3: Risultato della riduzione di un qualunque sistema di forze dello spazio ordinario

Osservazione 13. Il punto O, chiamato *centro di riduzione* del sistema, è arbitrario; cambiandolo rimane invariato $\overrightarrow{F}$, ma cambia, oltre al punto di applicazione della forza, la coppia del nuovo sistema: in sostanza si sposta la forza parallelamente a se stessa, e ciò per l' Osservazione 12 equivale ad aggiungere una nuova coppia.

In particolare vale la seguente importante proprietà:

Proposizione 2.9. *Si può scegliere il centro di riduzione del sistema in modo che la forza e il momento della coppia siano paralleli, ovvero*

$$\overrightarrow{F} \parallel \overrightarrow{\Omega}, \tag{2.6}$$

o, in altre parole, che il piano della coppia sia normale alla forza. I centri di riduzione di questo tipo sono infiniti, e sono tutti e soli i punti appartenenti alla retta passante per uno di essi e parallela alla linea d'azione di $\overrightarrow{F}$*. Quindi per ogni sistema di forze esiste una retta tale che i suoi punti, e solo essi, considerati come centri di riduzione, determinano un sistema equivalente a una forza e una coppia con la proprietà (2.6).*

Dimostrazione. Si decomponga $\overrightarrow{\Omega}$, momento risultante del sistema rispetto ad un polo O, nelle componenti parallela e normale a $\overrightarrow{F}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Omega} &= \overrightarrow{\Omega_1} + \overrightarrow{\Omega_2} \\ \overrightarrow{\Omega_1} &\parallel \overrightarrow{F} \\ \overrightarrow{\Omega_2} &\perp \overrightarrow{F}. \end{aligned}$$

Il sistema considerato in partenza sarà equivalente alla forza $(\overrightarrow{F}, O)$ e a due coppie di momenti $\overrightarrow{\Omega_1}$ e $\overrightarrow{\Omega_2}$. Per l' Osservazione 12 il sistema composto da $(\overrightarrow{F}, O)$ e dalla coppia di momento $\overrightarrow{\Omega_2}$ è equivalente ad una sola forza di vettore $\overrightarrow{F}$ applicata in un altro punto dello spazio O_1. Allora il sistema si riduce ulteriormante a $(\overrightarrow{F}, O_1)$ e alla coppia di momento $\overrightarrow{\Omega_1}$, quest'ultima con momento parallelo a $\overrightarrow{F}$. Preso ora O_1 come centro di riduzione del sistema, è immediato verificare che tutti i punti della linea d' azione della forza $(\overrightarrow{F}, O_1)$ sono pure centri di riduzione. Sia infatti O_2 un punto della retta parallela a $\overrightarrow{F}$ e passante per O_1. Allora il sistema ridotto costituito dalla forza $(\overrightarrow{F}, O_1)$ e dalla coppia di momento $\overrightarrow{\Omega_1}$ è equivalente al sistema di forza $(\overrightarrow{F}, O_2)$ e coppia di momento $\overrightarrow{\Omega_1}$. Quindi esistono infiniti centri di riduzione, e sono tutti i punti della retta passante per uno di essi e paralleli al vettore $\overrightarrow{F}$. Inoltre solo i punti di tale retta sono i centri di riduzione che soddisfano la richiesta del parallelismo: sia O' un punto non appartenente alla retta, e considerato come centro di riduzione, si osserva che è possibile traslare $\overrightarrow{F}$ in O' aggiungendo una coppia di momento $\overrightarrow{\Omega'}$ normale ad $\overrightarrow{F}$ formata dalle forze $(\overrightarrow{F}, O_1), (-\overrightarrow{F}, O')$ come in Figura 2.4. Allora, quando il centro di riduzione è O', il momento risultante sarà $\overrightarrow{\Omega_1} + \overrightarrow{\Omega'}$, con $\overrightarrow{\Omega'} \perp \overrightarrow{F}$ e $\overrightarrow{\Omega_1} \parallel \overrightarrow{F}$, ovvero si dovrà aggiungere al momento parallelo alla forza, un'altro momento di vettore non nullo perpendicolare ad esso. La somma sarà un vettore né parallelo a $\overrightarrow{\Omega'}$ né a $\overrightarrow{\Omega_1}$, in particolare il nuovo momento non potrà più essere parallelo al vettore $\overrightarrow{F}$. □

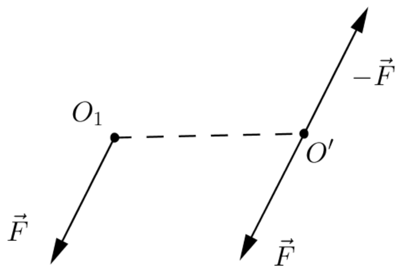

Figura 2.4: Cambio del centro di riduzione

Definizione 2.10. *La retta introdotta nella Proposizione 2.9 è chiamata asse centrale.*

Per quanto finora detto si può affermare che

Proposizione 2.11. *Per ogni sistema di forze esiste l'asse centrale.*

2.3 Invariante di un sistema di forze.

Si ricercano le condizioni per le quali dei sistemi generici di forze siano equivalenti a una sola forza oppure ad una sola coppia.

Teorema 2.12. *Il sistema equivale ad una coppia se il vettore risultante del sistema è nullo.*

Dimostrazione. Si tratta di un caso particolare del Teorema 2.8 sulla riduzione di sistemi di forze qualunque. □

Analogamente, il sistema sarà equivalente ad una forza se, rispetto ad un punto dello spazio, il momento risultante sia nullo. E' quindi molto utile avere un criterio per stabilire quando esistono punti di questo genere. A questo scopo è utile introdurre la nozione di *invariante* del sistema

Definizione 2.13. *Dato un sistema di forze, si definisce invariante del sistema la quantità*

$$I \;=\; \overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{\Omega}(O)\;, \quad \forall O \in \mathbb{R}^3 \tag{2.7}$$

ovvero il prodotto scalare del vettore risultante per il momento momento risultante rispetto ad un qualunque polo O.

Verifichiamo subito che la definizione è ben posta, cioè che come il nome lascia intendere, I non varia al variare di $O \in \mathbb{R}^3$. Infatti considerati due punti O e O_1, si ha

$$\overrightarrow{\Omega}(O_1) = \overrightarrow{\Omega}(O) + \overrightarrow{R} \times (O_1 - O). \tag{2.8}$$

Moltiplicando scalarmente per $\overrightarrow{R}$ si ha banalmente che

$$\overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{\Omega}(O_1) \;=\; \overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{\Omega}(O) + \overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{R} \times (O_1 - O) \;=\; \overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{\Omega}(O)$$

Quindi I è indipendente dalla scelta del polo in $\mathbb{R}^3$. Possiamo ora dimostrare il seguente teorema.

Teorema 2.14. *Un sistema di forze con invariante nullo e vettore risultante non nullo è equivalente ad una sola forza.*

Dimostrazione. Si consideri come centro di riduzione un punto O dell'asse centrale; allora $\overrightarrow{\Omega}(O)$ è parallelo a $\overrightarrow{R}$. Quindi se $I = 0$, dato che per ipotesi $\overrightarrow{R} \neq 0$, dovrà essere $\overrightarrow{\Omega}(O) = 0$. Allora il sistema è equivalente ad una sola forza applicata al punto O, ovvero ad un punto arbitrario dell'asse centrale. □

Definizione 2.15. *Sia dato un sistema di forze soddisfacenti l'ipotesi del Teorema 2.14. La forza ad esso equivalente è chiamata risultante del sistema.*

Applicando quanto detto alla definizione di sistemi di forze equivalenti, si ottiene il seguente

Teorema 2.16 (di Varignon)**.** [3] *Dato un sistema di forze, la somma dei momenti delle singole forze rispetto ad un polo fissato è uguale al momento della risultante calcolato rispetto allo stesso punto.*[4]

Osservazione 14. Un sistema di forze in un piano, avendo il momento risultante normale al piano delle forze (e quindi della risultante), ha invariante nullo. Allora il sistema è equivalente ad una sola forza se il vettore risultante è nullo, mentre è equivalente ad una coppia nel caso contrario.

[3]Pierre Varignon (Caen 1664-Parigi 1722), il teorema è contenuto nell'opera "Nouvelle mecanique ou statique".

[4]Il teorema è applicabile solo nel caso in cui si possa applicare il teorema 2.14

Capitolo 3

Forze parallele

Si utilizzano i risultati del capitolo precedente nello studio di sistemi di forze parallele. Premettiamo inanzitutto la seguente definizione

Definizione 3.1. *Due forze* $(\overrightarrow{F_1}, A_1)$ *e* $(\overrightarrow{F_2}, A_2)$ *si dicono parallele se i vettori* $\overrightarrow{F_1}$ *e* $\overrightarrow{F_2}$ *sono paralleli, ovvero hanno la stessa direzione. Le due forze si dicono poi cospiranti se* $\overrightarrow{F_1}$ *e* $\overrightarrow{F_2}$ *hanno anche lo stesso verso.*

Se $(\overrightarrow{F_1}, A_1)$,$(\overrightarrow{F_2}, A_2)$ sono due forze parallele cospiranti,appartenendo ad uno stesso piano ed avendo il vettore risultante diverso dal vettore nullo, sono equivalenti ad una sola forza (la risultante del sistema) di vettore $\overrightarrow{F}$ tale che

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2},$$

con modulo

$$F = F_1 + F_2.$$

Quindi si procede con il cercare la linea d'azione della risultante, il che è equivalente a cercare il suo punto d' applicazione A appartenente alla retta passante per A_1 e A_2. Per come si è definito il punto A, il momento di $\overrightarrow{F}$ rispetto ad esso è nullo (essendo tale polo un punto della linea d'azione della forza), quindi per il teorema di Varignon (Teorema 2.16) dovrà valere

$$\overrightarrow{\Omega_1} + \overrightarrow{\Omega_2} = 0$$

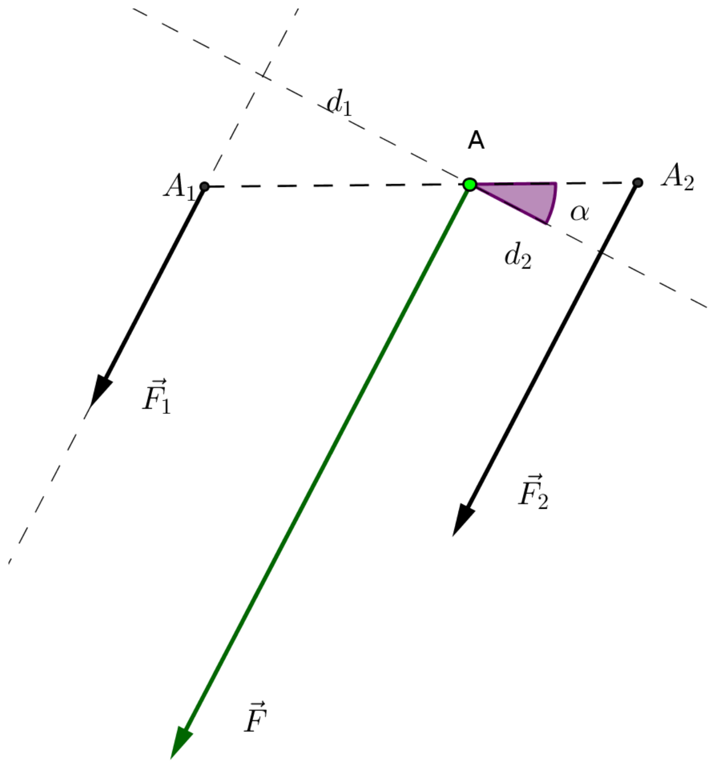

Figura 3.1: Riduzione di due forze parallele cospiranti

dove $\overrightarrow{\Omega_1}$ e $\overrightarrow{\Omega_2}$ sono i momenti di $(\overrightarrow{F_1}, A_1)$ e $(\overrightarrow{F_2}, A_2)$ calcolati rispetto ad A. Di conseguenza i due momenti dovranno essere tra loro uguali e contrari. Trattandosi di due forze complanari, affinché la condizione sia verificata è necessario che i *momenti statici* delle due forze siano uno l'opposto dell'altro. Quindi il punto A dovrà essere *interno* al segmento A_1A_2. Inoltre, se d_1 e d_2 sono le distanze di A dalle linee d' azione di $(\overrightarrow{F_1}, A_1)$ e $(\overrightarrow{F_2}, A_2)$ rispettivamente, come in Figura 3.1, si ha che:

$$F_1\ d_1 = F_2\ d_2. \tag{3.1}$$

Denotando con α l' angolo formato dalla retta perpendicolare ai vettori $\overrightarrow{F_1}$ e $\overrightarrow{F_2}$ con la retta A_1A_2, dividendo entrambi i membri di (3.1) per $\cos\alpha$ sarà

$$F_1\ AA_1 = F_2\ AA_2 \Longrightarrow \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{AA_2}{AA_1}, \tag{3.2}$$

relazione dalla quale si ottengono le coordinate di A. Si osserva inoltre che *il punto A divide il segmento congiungente i punti di applicazione delle due forze in parti inversamente proporzionali alle loro intensità.*

Osservazione 15. Ovviamente la risultante può essere applicata in un qualsiasi punto della sua linea d'azione, ovviamente parallela alle due forze, in modo equivalente, ma il punto A per come definito è univocamente determinato nell'equazione (3.2) che dipende dalle intensità delle forze e dalle posizioni dei punti A_1 e A_2. In particolar modo non dipende dalla direzione delle forze; quindi il punto A rimane fisso qualora le forze vengano ruotate in modo da rimanere sempre parallele tra loro.

Definizione 3.2. *Il punto A, centro di riduzione di due forze parallele cospiranti, viene chiamato centro delle forze parallele.*

Nel caso di due forze parallele con vettori di verso opposto (non cospiranti) e con risultante $\overrightarrow{R} \neq 0$, ovvero nel caso in cui le forze non costituiscano una coppia, il sistema sarà ancora equivalente alla sola forza di vettore
$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$, che ha come modulo la differenza dei moduli delle due forze, direzione parallela e verso uguale al verso della forza di intensità maggiore.
Sia A definito come nel caso precedente; allo stesso modo i momenti statici delle due forze rispetto ad A devono essere uguali e contrari per la condizione di equivalenza. Quindi si ha che in questo caso A deve essere "dalla stessa parte" rispetto alle due forze, e quindi *esterno* al segmento A_1A_2. Inoltre, vale ancora la relazione (3.2) da cui viene che *la linea d'azione di $(\overrightarrow{F}, A)$ divide,esternamente, il segmento A_1A_2 in parti inversamente proporzionali alle intensità delle due forze, quindi A sta dalla parte della forza maggiore.*
Anche in questo caso il punto A rimane invariato nel ruotare le due forze in modo da mantenere il parallelismo, quindi anche in questo caso si parla di *centro delle forze parallele.*
In generale si dimostra che un sistema di forze parallele e cospiranti equivalgono ad una unica forza, ottenuta componendo la prima forza con la seconda, il risultato ottenuto con la terza e così via.

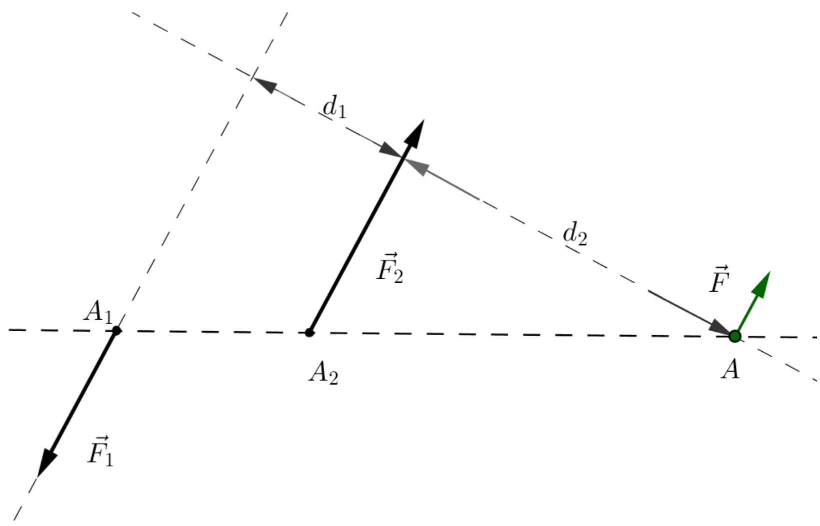

Figura 3.2: Riduzione di due forze parallele non cospiranti

Quindi nel caso in cui le forze parallele non siano tutte cospiranti, componendo tra loro tutte quelle nello stesso verso, ci si riconduce al caso di due forze parallele e non cospiranti; allora o si ha una coppia (nel caso in cui queste abbiano stessa intensità), o queste si compongono in una sola forza. Riassumendo quanto detto finora:

Proposizione 3.3. *Un sistema qualsiasi di forze parallele è equivalente a:*

- *una sola forza, se la risultante delle forze è diversa dal vettore nullo;*
- *una coppia se la risultante è il vettore nullo.*

Inoltre, se vale la prima ipotesi, esiste un punto C detto centro delle forze parallele, ovvero un punto in cui si può applicare forza la risultante e che resta invariato nel caso in cui tutte le forze ruotino rimanendo parallele e non variando le loro intensità.

Dimostrazione. Per quanto detto sopra, resta da dimostrare solo l'esistenza del centro delle forze parallele del sistema; la dimostrazione è costruttiva: nella composizione delle forze tra loro cospiranti si inizia con il comporre le prime due forze, che saranno equivalenti ad una forza parallela $\overrightarrow{R_1}$ che può

essere applicata in un centro delle forze A_1 invariante per rotazione delle due forze. Quindi si compone la $(\overrightarrow{R_1}, A_1)$ con la terza forza; si otterrà in questo modo una forza risultante $\overrightarrow{R_2}$ equivalente e parallela e un centro delle forze parallele A_2 invariante per rotazione della terza forza e di $(\overrightarrow{R_1}, A_1)$, e quindi invariante per rotazione delle prime tre forze.
Iterando il procedimento si ottiene l'esistenza del centro delle forze parallele del sistema C invariante per rotazione di tutte le forze considerate. $\square$

Osservazione 16. L'asse centrale (Definizione 2.10) di un sistema di forze parallele è la retta passante per il centro delle forze parallele e parallela alle linee d'azione delle forze.

3.1 Ricerca analitica del centro delle forze parallele

Dato un sistema di forze parallele $(\overrightarrow{F_1}, A_1), (\overrightarrow{F_2}, A_2), \ldots, (\overrightarrow{F_n}, A_n)$, considerato il versore $\overrightarrow{v}$ parallelo alle forze, si ha che:

$$\overrightarrow{F_1} = F_1\overrightarrow{v}, \quad \overrightarrow{F_2} = F_2\overrightarrow{v}, \ \ldots, \ \overrightarrow{F_n} = F_n\overrightarrow{v} \tag{3.3}$$

dove F_i è la quantità che corrisponde al modulo della i-esima forza qualora quest'ultima sia equiorientata con $\overrightarrow{v}$, oppure all' opposto del modulo nel caso contrario. Per il risultato ottenuto nella Proposizione 3.3, ha senso considerare il problema del centro delle forze solo qualora il vettore risultante non sia nullo. Osservando che

$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \ldots + \overrightarrow{F_n} = F_1\overrightarrow{v} + F_2\overrightarrow{v} + \ldots + F_n\overrightarrow{v} = (F_1 + F_2 + \ldots + F_n)\overrightarrow{v},$$

ciò equivale ad avere

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_n \neq 0. \tag{3.4}$$

A questo punto, chiamato C il centro delle forze parallele,il momento della forza equivalente al sistema rispetto a tale punto è nullo; equivalentemente è nullo il momento risultante del sistema rispetto a C:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F_1} \times (C - A_1) + \overrightarrow{F_2} \times (C - A_2) + \ldots + \overrightarrow{F_n} \times (C - A_n) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow F_1 \overrightarrow{v} \times (C - A_1) + F_2 \overrightarrow{v} \times (C - A_2) + \ldots + F_n \overrightarrow{v} \times (C - A_n) = \\ = \overrightarrow{v} \times [F_1 (C - A_1) + F_2 (C - A_2) + \ldots + F_n (C - A_n)] = 0. \end{aligned}$$

Poiché il centro delle forze parallele non cambia al variare della direzione delle forze, a patto che restino parallele, tale prodotto vettoriale si mantiene nullo per ogni vettore $\overrightarrow{v}$ considerato. Quindi

$$F_1 (C - A_1) + F_2 (C - A_2) + \ldots + F_n (C - A_n) = 0. \tag{3.5}$$

Fissato un sistema di coordinate (O, xyz), si trovano le coordinate di C [1]:

$$\begin{aligned} & F_1 (C - O + O - A_1) + F_2 (C - O + O - A_2) + \ldots + \\ & \qquad + F_n (C - O + O - A_n) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & F_1 (C - O) + F_1 (O - A_1) + F_2 (C - O) + F_2 (O - A_2) + \ldots + \\ & \qquad + F_n (C - O) + F_n (O - A_n) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (F_1 + F_2 + \ldots + F_n)(C - O) = F_1 (A_1 - O) + F_2 (A_2 - O) + \ldots + \\ & \qquad + F_n (A_n - O) \end{aligned}$$

Per ipotesi il vettore risultante è diverso dal vettore nullo. quindi si ha

$$C - O = \frac{\sum_{j=1}^{n} F_j \ (A_j - O)}{\sum_{j=1}^{n} F_j}. \tag{3.6}$$

In termini di coordinate di C, indicando con (x_j, y_j, z_j) le coordinate di A_j, $j = 1, \ldots, n$, si ottiene

$$x_c = \frac{\sum_{j=1}^{n} F_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} F_j}$$
$$y_c = \frac{\sum_{j=1}^{n} F_j y_j}{\sum_{j=1}^{n} F_j}$$
$$z_c = \frac{\sum_{j=1}^{n} F_j z_j}{\sum_{j=1}^{n} F_j}.$$

[1] le coordinate del vettore $C - O$

3.2 Decomposizione di una forza in forze parallele

Analizziamo ora il problema inverso: data una forza $(\overrightarrow{F}, A)$ si cercano sistemi equivalenti ad essa composti da due o tre forza parallele.
In primo luogo pensiamo di scomporre la forza in due forze parallele $(\overrightarrow{F_1}, A_1)$ e $(\overrightarrow{F_2}, A_2)$, complanari con $\overrightarrow{F}$ ed allineati con A come in figura:
Per fissare le idee sia A interno ad A_1A_2, allora le forze F_1 e F_2 hanno

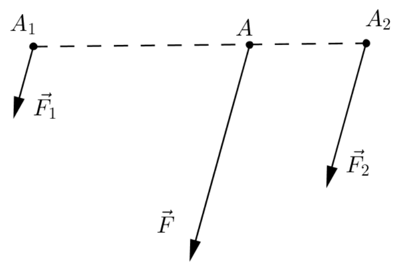

Figura 3.3: Scomposizione in due forze parallele

entrambe lo stesso verso di $\overrightarrow{F}$, e per quanto detto nella sezione precedente, equazione (3.2), si avrà

$$F_1 + F_2 = F, \qquad \frac{F_1}{F_2} = \frac{AA_2}{AA_1}. \tag{3.7}$$

La seconda realazione può essere riscritta

$$\frac{F_1}{F_1 + F_2} = \frac{AA_2}{AA_1 + AA_2}, \qquad \frac{F_2}{F_1 + F_2} = \frac{AA_1}{AA_1 + AA_2}$$

Quindi dato che $F_1 + F_2 = F$ si ha

$$F_1 = \frac{AA_2}{A_1A_2}F, \qquad F_2 = \frac{AA_2}{A_1A_2}\, F. \tag{3.8}$$

Se i punti A_1 e A_2 sono scelti in modo tale che A sia esterno al segmento si procede in maniera analoga. Allo stesso modo si può scomporre la forza $(\overrightarrow{F}, A)$ in tre forze parallele tra loro e ad $\overrightarrow{F}$, applicate in tre punti non

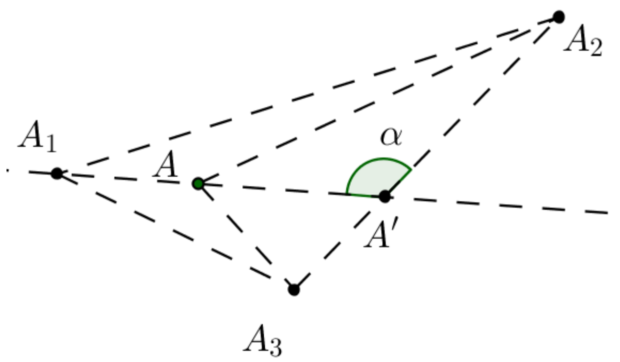

Figura 3.4: Scomposizione in tre vettori paralleli vista dall'alto

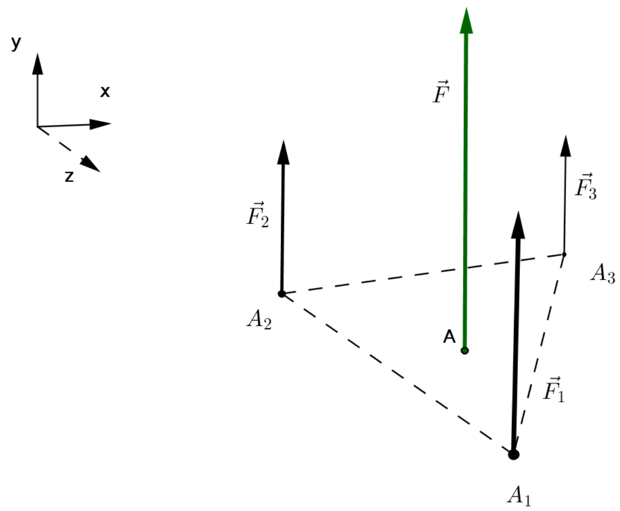

Figura 3.5: Scomposizione in tre forze parallele

allineati A_1, A_2, A_3 complanari con A ma non complanari con $\overrightarrow{F}$. Sia A' il punto di intersezione della retta per A_1 ed A con A_2A_3 come in Figura 3.4; si decompone $\overrightarrow{F}$ in $\overrightarrow{F_1}$ e $\overrightarrow{F'}$ applicate rispettivamente in A_1 e A' come visto sopra. Quindi si procede con lo scomporre $\overrightarrow{F'}$ in $\overrightarrow{F_2}$ ed $\overrightarrow{F_3}$ applicate in A_2 e A_3 in modo da avere un sistema di tre forze parallele ed equivalente alla forza originaria.

Osservazione 17. Se A è interno al triangolo $A_1A_2A_3$ allora A sarà interno al segmento A_1A' e A' interno a A_1A_3, quindi le tre forze trovate avranno vettori $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ orientati tutti nello stesso verso.

Proposizione 3.4. *Il sistema di forze trovato è l'unico sistema di forze parallele applicate nei punti A_1, A_2, A_3 equivalente a $(\overrightarrow{F}, A)$.*

Dimostrazione. Sia $(\overrightarrow{G_1}, A_1), (\overrightarrow{G_2}, A_2), (\overrightarrow{G_3}, A_3)$ un altro sistema equivalente a $(\overrightarrow{F}, A)$. Allora $(\overrightarrow{F_1} - \overrightarrow{G_1}, A_1), (\overrightarrow{F_2} - \overrightarrow{G_2}, A_2), (\overrightarrow{F_3} - \overrightarrow{G_3}, A_3)$ è un sistema in equilibrio e quindi le tre linee d' azione sono complanari, e ciò è possibile solo se uno dei tre vettori è nullo. Quindi rimangono soltanto due forze in equilibrio con diversa linea d'azione, e quindi dovranno essere anch'esse nulle. In definitiva si avrà che $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{G_1}, \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{G_2}, \quad \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{G_3}$, e ciò completa la dimostrazione. □

Si è provato allora che data una forza, esiste un unico modo di scomporla in tre forze parallele in modo equivalente, quindi le intensità delle forze sono ben definite.

Calcoliamo ora i moduli di $\overrightarrow{F_1}$,$\overrightarrow{F_2}$,$\overrightarrow{F_3}$, supposto A interno al triangolo. Dalla scomposizione in due forze parallele si ha in virtù della (3.7):

$$F_1 = \frac{AA'}{A_1A'}F. \tag{3.9}$$

Moltiplicando e dividendo per $A_2A_3 \sin\alpha$ dove $\alpha = \widehat{A_1A'A_2}$, si ha

$$F_1 = \frac{(AA') \cdot (A_2A_3) \sin\alpha}{(A_1A') \cdot (A_2A_3) \sin\alpha}F = \frac{(A_2A_3) \cdot h_1}{(A_2A_3) \cdot h}F = \frac{T_1}{T}F \tag{3.10}$$

dove T_1 e T sono le aree dei triangoli AA_2A_3 e $A_1A_2A_3$, e h_1 e h sono le rispettive altezze relative al lato A_2A_3. Analogamente

$$F_2 = \frac{T_2}{T}F, \qquad F_3 = \frac{T_3}{T} \tag{3.11}$$

dove T_2 e T_3 sono le aree di AA_1A_3 e AA_1A_2.

Capitolo 4

Applicazioni

4.1 Studio dei baricentri

Ogni punto materiale è soggetto alla *forza peso* di vettore $m\overrightarrow{g}$, dove m è la *massa* del punto e $\overrightarrow{g}$ il vettore *accelerazione di gravità*.Quindi i pesi dei singoli punti materiali di cui è formato un corpo costituiscono un sistema di forze parallele (alla verticale) applicate ai punti stessi.

Definizione 4.1. *Si definisce baricentro G di un corpo il centro del sistema delle forze parallele costituito dai pesi dei punti del corpo stesso.*

Il peso del corpo, quindi, si immagina come una forza applicata nel baricentro ed equivalente al sistema delle forze-peso dei singoli punti del corpo. Dalla formula (3.6), chiamato (π_k, P_k) la forza peso applicata al k-esimo punto, con $k = 1, 2, \ldots, N$, si ottiene

$$G - O = \frac{\sum_{k=1}^{N} \pi_k \ (P_k - O)}{\sum_{k=1}^{N} \pi_k} \tag{4.1}$$

Indicando con m_k la massa del punto P_k, $\quad k = 1, \ \ldots \ , N$, si ha

$$\overrightarrow{\pi_k} = m_k \overrightarrow{g} \qquad \text{e} \qquad \pi_k = m_k g$$

da cui

$$G - O = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k \ (P_k - O)}{\sum_{k=1}^{N} m_k}$$

Chiamando $m = \sum_{k=1}^{N} m_k$ la massa totale del corpo, avremo

$$G - O = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k \ (P_k - O)}{m} \tag{4.2}$$

che, in termini di coordinate del baricentro x_G, y_G, z_G ci dà

$$x_G = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k \ x_k}{m}, \quad y_G = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k \ y_k}{m}, \quad z_G = \frac{\sum_{k=1}^{N} m_k \ z_k}{m} \tag{4.3}$$

dove ovviamente x_k, y_k, z_k sono le coordinate del k-esimo punto materiale del corpo, P_k.

Osservazione 18. E' possibile, e in molti casi utile, considerare il baricentro di un corpo come origine del sistema di coordinate. Quindi dalla relazione (4.2) si ha

$$\frac{\sum_{k=1}^{N} m_k \ (P_k - O)}{m} = 0$$

e dalla (4.3)

$$\sum_{k=1}^{N} m_k \ x_k \ = \ \sum_{k=1}^{N} m_k \ y_k \ = \ \sum_{k=1}^{N} m_k \ z_k \ = \ 0,$$

formule molto utili in Dinamica.

4.1.1 Baricentri di corpi continui

Nel caso in cui il corpo preso in esame non sia composto da un numero finito (o ragionevolmente basso) di punti materiali, si può immaginare la materia distribuita nello spazio con continuità. Sia quindi dv un *elemento infinitesimo del corpo* centrato in un punto P. Indicando con dm la massa di dv si definisce la *densità del corpo* nel punto P, $\rho = \rho(P)$, mediante il rapporto

$$\rho(P) \ = \ \frac{dm}{dv}.$$

Definizione 4.2. *Un corpo è detto* omogeneo *se la sua densità è costante in ogni punto.*

Definizione 4.3. *La massa del corpo che occupa il volume V con densità ρ è data dall' integrale*

$$m = \int_V \rho \; dv. \tag{4.4}$$

Quindi nel caso di un corpo uniforme:

$$m = \int_V \rho \; dv = \rho \int_V \; dv = \rho \; V, \tag{4.5}$$

da cui

$$\rho \; = \; \frac{m}{V}. \tag{4.6}$$

Procedendo in maniera analoga per quanto riguarda la posizione del baricentro del baricentro, a partire dall'equazione (4.2) si ottiene

$$G - O = \frac{\int_V \; \rho \; (P - O) \; dv}{\int_V \rho \; dv} = \frac{\int_V \; \rho \; (P - O) \; dv}{m} \tag{4.7}$$

Nel caso omogeneo si avrà:

$$G - O = \frac{\rho \; \int_V (P - O) \; dv}{\rho \; \int_V \; dv} = \frac{\int_V \; (P - O) \; dv}{V} \tag{4.8}$$

e quindi le coordinate del baricentro non dipendono dalla densità (e quindi dalla massa), ma solamente dal volume del corpo e quindi dalla sua forma e dalle dimensioni.

Osservazione 19. Dalla (4.7) si ricavano le coordinate del baricentro:

$$x_G = \frac{\int_V \; \rho \; x \; dv}{m}, y_G = \frac{\int_V \; \rho \; y \; dv}{m}, z_G = \frac{\int_V \; \rho \; z \; dv}{m}, \tag{4.9}$$

che nel caso omogeneo diventano

$$x_G = \frac{\int_V \; x \; dv}{V}, \quad y_G = \frac{\int_V \; y \; dv}{V}, \quad z_G = \frac{\int_V \; z \; dv}{V}. \tag{4.10}$$

Corpi filiformi

Consideriamo corpi tridimensionali che abbiano due dimensioni trascurabili e quindi siano assimilabili ad una linea l.

Definizione 4.4. *Si definisce densità lineare nel punto P, centro dell'elemento infinitesimale di lunghezza dl e massa dm, il rapporto*

$$\rho_1 = \rho_1(P) = \frac{dm}{dl}. \tag{4.11}$$

Osservazione 20. La massa di un corpo filiforme è $m = \int_l \rho_1 dl$, che nel caso omogeneo è $m = \rho_1 l$, dove l è la lunghezza del filo.

Quindi, dividendo il corpo in elementi infinitesimali dl, ripetendo i passaggi fatti nel caso di un corpo che occupa un volume, si trova la posizione del baricentro:

$$G - O = \frac{\int_l \rho_1 \, (P - O) \, dl}{m},$$

che nel caso omogeneo diventa

$$G - O = \frac{\int_l (P - O) \, dl}{l}.$$

Allora il calcolo del baricentro di un corpo filiforme si riduce al calcolo di un integrale curvilineo.

Corpi laminari

Si considerano ora corpi con sole due dimensioni non trascurabili, quindi assimilabili ad una *superficie* σ nello spazio. Per semplicità di trattazione considereremo le *superfici piane*; si parlerà quindi di *corpi laminari.* Come per il caso precedente, si pensa di dividere la superficie in elementi di superficie infinitesimali $d\sigma$ di massa dm, e si definisce *densità superficiale* $\rho_2 = \rho_2(P)$ del corpo nel centro P di $d\sigma$ il rapporto

$$\rho_2 = \frac{dm}{d\sigma} \tag{4.12}$$

in maniera analoga a quanto detto finora si definisce la massa m della lamina

$$m = \int_\sigma \rho_2 \, d\sigma$$

che nel caso omogeneo diventa

$$m = \rho_2 \, \sigma,$$

essendo σ l'area della lamina. Quindi per il baricentro del corpo si ha

$$G-O=\frac{\int_\sigma \rho_2\,(P-O)\,d\sigma}{m}\quad \text{che nel caso omogeneo è } G-O=\frac{\int_\sigma (P-O)\,d\sigma}{\sigma}.$$

4.1.2 Teoremi sui baricentri

A volte il calcolo della posizione del baricentro attraverso gli integrali introdotti è superfluo, o può essere semplificato da utili teoremi.
Vista la natura di "media ponderata" del baricentro, vale il risultato seguente

Teorema 4.5. *Se un corpo di volume V si può suddividere in due parti di volumi V_1 e V_2, rispettivamente di masse m_1 e m_2 e baricentri G_1 e G_2, allora il baricentro G del corpo è il baricentro delle due masse m_1 e m_2 concentrate nei punti G_1 e G_2.*

Dimostrazione. Si distinguono i punti delle due parti ordinandoli: i punti di V_1 avranno indice $k=1,\dots,r-1$ e quelli di V_2 indice $k=r,\dots,N$. Allora:

$$\begin{aligned} G-O =& \frac{\sum_{k=1}^{r-1} m_k\,(P_k-O)+\ \sum_{k=r}^{N}\ m_k\,(P_k-O)}{m} = \\ =& \frac{m_1\frac{\sum_{k=1}^{r-1} m_k\ (P_k-O)}{m_1}+\ m_2\frac{\sum_{k=r}^{N} m_k\ (P_k-O)}{m_2}}{m} = \\ =& \frac{m_1\,(G_1-O)+\ m_2\,(G_2-O)}{m}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

$\square$

Osservazione 21. Il teorema può facilmente essere esteso al caso in cui si suddivida il corpo in più di due parti.

Diretta conseguenza del Teorema 4.5 è il seguente

Corollario 4.6. *Se il corpo ha un piano di simmetria, allora il baricentro giace in tale piano.*[1]

[1] il piano di simmetria non deve essere solo geometrico, ma anche materiale: punti simmetrici devono avere la stessa massa

Dimostrazione. Si suddivide il corpo con il piano di simmetria: le due parti hanno ugual massa $\frac{m}{2}$ e baricentri G_1 e G_2. Preso O come punto di intersezione tra il segmento G_1G_2 e il piano di simmetria, si ha che $G_1 - O = -(G_2 - O)$. Per la relazione (4.13) si ha che $G - O = 0$, ovvero il baricentro del corpo coincide con O, che è un punto del piano di simmetria. □

Osservazione 22. Se un corpo ha due piani di simmetria, applicando due volte il corollario, si ha che il baricentro appartiene alla retta di intersezione dei due piani, e quindi giace su un *asse di simmetria.*
Se un corpo ha tre piani di simmetria, non passanti per la stessa retta, allora il baricentro è nella loro intersezione.

Applicando questi risultati si può facilmente calcolare il baricentro di alcuni semplici corpi.

Sfera ed ellissoide omogenei

Il baricentro di una sfera omogenea è il suo centro: esistono infatti infiniti piani di simmetria incidenti solo nel centro. Anche per quanto riguarda l'ellissoide il baricentro si colloca nel centro, dato che è l'intersezione dei tre piani diametrali ortogonali che sono piani di simmetria dell'ellissoide.

Parallelepipedo omogeneo

Il bericentro di un parallelepipedo omogeneo per lo stesso motivo dei casi precedenti si trova nell'intersezione dei suoi piani diagonali.

Arco di circonferenza di apertura α e lunghezza l

Per il calcolo del baricentro si sceglie un sistema di coordinate centrato nel centro del cerchio a cui l'arco appartiene e con l'asse y bisettrice dell'angolo α e l'asse delle x sul piano contenente l'arco stesso, come in Figura 4.1. La curva è piana, quindi il baricentro apparterrà anch'esso al piano xy; in più l'asse delle y è l'asse di simmetria, quindi $x_G = 0$. Applicando le formule del

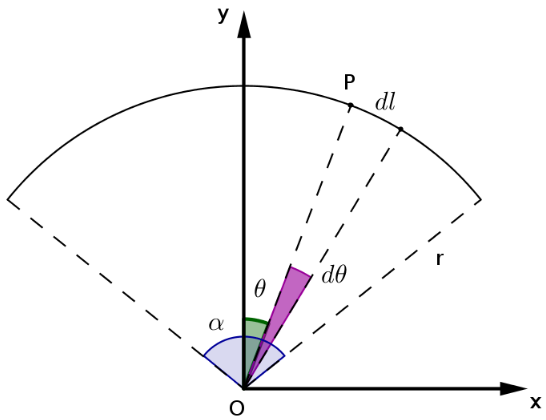

Figura 4.1: Arco di crconferenza di apertura α e lunghezza l

calcolo delle coordinate del baricentro G si ottiene

$$y_G = \frac{\int_l \ y \ dl}{l}. \tag{4.14}$$

Siano ora, come in figura, r il raggio del cerchio, θ l'angolo formato dal raggio PO con l'asse y, dl l'elemento infinitesimo d'arco centrato in P e $d\theta$ il rispettivo angolo al centro. Vale quindi:

$$l = r \ \alpha, \quad dl = r \ d\theta.$$

L'ordinata del punto P è $y = r \ \cos\theta$; sostituendo nella relazione (4.14) si ha

$$y_G = \frac{1}{r\alpha} \ r^2 \ \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \ \cos\theta \ d\theta = \frac{r}{\alpha} \ [\sin\theta]_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} = \frac{2r}{\alpha} \ \sin\frac{\alpha}{2} \tag{4.15}$$

Nel caso di $\alpha = \pi$ si ha che $y_G = \frac{2r}{\pi}$, mentre se $\alpha = \ 2\pi$ il centro coincide con l'origine, ovvero con il centro del cerchio.

Bibliografia

[1] D.Graffi, *Elementi di Meccanica razionale*, Pàtron, Bologna.

[2] T.Levi Civita, U.Amaldi, *Lezioni di meccanica razionale vol. I*, Zanichelli, Bologna.

[3] S.Graffi, *Appunti dalle lezioni di Fisica Matematica II*, disponibili su http://www.dm.unibo.it/fismat/didattica/html

[4] S.Siboni, *Dispense del corso di Meccanica Razionale 1*, disponibili su http://www.ing.unitn.it/ siboni/dispenseFMR/dinamicarigida.pdf

[5] D.De Tommasi, *Dispense sui vettori applicati*, disponibili su http://www.dica.poliba.it/02-Vettori%20Applicati.pdf