

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

---

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E  
NATURALI

Corso di Laurea Magistrale in Matematica  
Dipartimento di Matematica

**APPROSSIMAZIONE DI  
FUNZIONI REALI  
DI UNA VARIABILE**

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:  
Chiar.mo Prof.  
PAOLO NEGRINI

Candidato:  
IVAN CASALBONI

Sessione II

---

---

Anno Accademico 2011-2012

## Indice

Elenco delle figure	iii
<b>Introduzione</b>	1
Capitolo 1. <b>Teoria dell'approssimazione</b>	3
1. <i>Il problema di miglior approssimazione negli spazi lineari normati</i>	4
2. <i>Approssimazione polinomiale</i>	10
3. <i>Miglior approssimazione uniforme</i>	13
4. <i>Caratterizzazione della migliore approssimazione</i>	19
5. <i>Polinomi di Chebyshev e loro proprietà</i>	26
6. <i>Polinomi trigonometrici e approssimazione uniforme</i>	30
Capitolo 2. <b>Interpolazione</b>	39
1. <i>Interpolazione mediante polinomi di Lagrange e di Newton</i>	40
2. <i>Errore dell'interpolazione di Lagrange</i>	43
3. <i>Convergenza dell'interpolazione polinomiale</i>	46
4. <i>Interpolazione di Chebyshev</i>	49
5. <i>Interpolazione di Hermite e con funzioni spline</i>	52
6. <i>Approssimazione ai minimi quadrati discreta</i>	55
Capitolo 3. <b>Introduzione alle serie di Fourier</b>	61
1. <i>Il nucleo di Dirichlet</i>	64
2. <i>Cenni alle serie di Chebyshev</i>	68
3. <i>Il teorema di Fejér</i>	69
Capitolo 4. <b>I teoremi di Jackson</b>	75
1. <i>Teoremi diretti</i>	75
2. <i>Teoremi inversi</i>	79
Capitolo 5. <b>Polinomi ortogonali</b>	83
1. <i>Esempi</i>	85
2. <i>Proprietà</i>	88
3. <i>I polinomi di Legendre</i>	90
4. <i>L'identità di Christoffel-Darboux</i>	94
Capitolo 6. <b>Metodi di integrazione numerica</b>	97
1. <i>Formule di tipo interpolatorio</i>	97
2. <i>Formule di Newton-Côtes</i>	99
3. <i>Stima dell'errore di quadratura</i>	101

---

4. <i>Formule di quadratura composite</i>	102
5. <i>Quadratura gaussiana</i>	105
Capitolo 7. <b><i>Regolarizzazione e mollificatori</i></b>	113
1. <i>Gli spazi <math>L^p</math></i>	113
2. <i>Sottoinsiemi densi in <math>L^p</math></i>	117
3. <i>Convoluzione e regolarizzazione</i>	119
4. <i>Supporti e convoluzioni</i>	120
5. <i>Mollificatori ed approssimazioni</i>	123
6. <i>Approssimazione di funzioni localmente sommabili</i>	130
Capitolo 8. <b><i>Il teorema di Stone-Weierstrass</i></b>	133
1. <i>Applicazioni a <math>C^{2\pi}</math></i>	138
2. <i>Applicazioni alle funzioni lipschitziane</i>	141
Bibliografia	143

## Elenco delle figure

1.1 Polinomio di Taylor	11
1.2 Polinomio di Mac Laurin di $f(x) = \sin x$	12
1.3 Polinomio di minimax	23
2.1 Polinomio interpolatore di Newton	44
2.2 Fenomeno di Runge con nodi equispaziati	49
2.3 Fenomeno di Runge con nodi di Chebyshev	50
2.4 Spline lineari per $f(x) = \cos x$	54
2.5 Confronto tra interpolazione di Lagrange e spline cubica	56
2.6 Confronto tra approssimazioni: polinomi di regressione e spline cubica	58
2.7 Approssimazione ai minimi quadrati	59
5.1 Approssimazione tramite spline cubiche	87
5.2 Approssimazione tramite polinomi di Jacobi	88
5.3 Polinomi di L�egendre	93
6.1 Metodo del punto medio composito	101
6.2 Metodo dei trapezi composito	103
6.3 Metodo di Simpson composito	104
7.1 Funzione regolarizzata da un mollificatore	124
7.2 Mollificatore canonico	125



## *Introduzione*

La **teoria dell'approssimazione** presenta sia una direzione pratica, pragmatica, concentrata principalmente su applicazioni numeriche e computazionali, stime precise di errori e così via, sia una direzione teorica, spesso molto più attenta a problemi di esistenza e unicità e ad applicazioni ad altre questioni di carattere teorico.

In particolare, la questione dell'*approssimazione di funzioni*, cioè della rappresentazione approssimata di funzioni arbitrarie mediante funzioni che hanno una più semplice rappresentazione analitica, può essere affrontata da due prospettive:

1. una prospettiva 'pratica' in vista di applicazioni di analisi numerica: rappresentare un fenomeno reale mediante un modello matematico, quindi fundamentalmente tramite una funzione o una combinazione di funzioni che descrivano tale fenomeno; una volta fatto ciò, se ne cerca un'approssimazione, rispetto ad opportune norme, mediante funzioni più semplici per scopi di tabulazione dei valori assunti dalla funzione, differenziazione, integrazione, ecc. . .
2. una direzione 'teorica' avente, comunque, ripercussioni e applicazioni pratiche: la questione della migliore approssimazione in spazi normati astratti; il problema dell'approssimazione di funzioni continue mediante polinomi algebrici o trigonometrici (se anche periodiche); l'approssimazione di funzioni appartenenti a certi spazi funzionali astratti (spazi  $L^p$  ed  $L^p_{loc}$ ) mediante funzioni più regolari, ad esempio di classe  $C^\infty$ , in vista di uno studio della regolarità per soluzioni di equazioni differenziali alle derivate parziali, oppure più semplicemente perché per dimostrare certe proprietà delle funzioni negli spazi  $L^p$  è più conveniente farlo per funzioni più regolari, sfruttando il fatto che tali funzioni approssimano, rispetto alla norma di  $L^p$ , le funzioni di  $L^p$  con precisione arbitraria.



## CAPITOLO 1

### *Teoria dell'approssimazione*

La teoria dell'approssimazione di funzioni è quell'area dell'analisi che si occupa del problema della possibilità o meno di approssimare certe funzioni con altre più semplici e più facilmente calcolabili. La prima domanda che ci si pone in teoria dell'approssimazione riguarda l'effettiva possibilità di approssimare.

La famiglia delle funzioni 'buone' con le quali intendiamo approssimare deve essere densa nell'insieme delle funzioni che vogliamo approssimare, ossia deve poter approssimare ogni funzione del nostro insieme, tanto bene quanto si voglia, usando arbitrarie funzioni della famiglia data. La parte della teoria dell'approssimazione che si interessa di rispondere a questa domanda si chiama *approssimazione astratta*, in contrapposizione all'*approssimazione numerica*, che, una volta assicuratasi della possibilità di approssimare, si occupa dei metodi di approssimazione, facendo in modo che siano efficaci ed efficienti, e possibilmente ottimali. Naturalmente l'approssimazione astratta precede, necessariamente, quella numerica: infatti prima si deve essere sicuri che una cosa esista e poi, eventualmente, la si deve andare a cercare e, una volta trovata, utilizzarla per scopi pratici.

Uno dei problemi di maggiore interesse nel campo dell'approssimazione di funzioni è il seguente: qual è il 'miglior' polinomio  $p(x)$  di grado al più  $n$  che approssima una data funzione  $f(x)$  continua su un intervallo  $[a, b]$ ? Naturalmente dobbiamo specificare cosa intendiamo per 'miglior polinomio', e abbiamo diverse possibilità, a seconda di quale strumento adottiamo per misurare la distanza tra due funzioni. Scelta una distanza, o norma, ci domandiamo se tale polinomio, che per definizione dovrà soddisfare la condizione di minimizzare la distanza tra  $f(x)$  e tutti i polinomi di grado  $n$ , esista e sia unico, e, in caso di risposta affermativa, come effettivamente costruirlo.

In questo capitolo iniziamo ad affrontare il problema di migliore approssimazione negli spazi lineari normati, poi, successivamente, parleremo di approssimazione uniforme e ai minimi quadrati.

D'ora in avanti chiameremo *polinomi algebrici* i polinomi che tutti noi conosciamo, per distinguerli da altre tipologie di polinomi (*trigonometrici*, in particolare) che incontreremo nel nostro viaggio alla scoperta dei diversi strumenti di approssimazione di cui la matematica dispone.

### 1. Il problema di miglior approssimazione negli spazi lineari normati

DEFINIZIONE 1.1 (*Norma*). Una *norma*  $\|\cdot\|$  su uno spazio vettoriale (reale)  $V$  è una funzione non negativa su  $V$  che soddisfa le seguenti condizioni:

- (1)  $\|v\| \geq 0, \forall v \in V, \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ ;
- (2)  $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|, \forall v \in V \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}$ ;
- (3)  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|, \forall v, w \in V$ .

Ogni norma su  $V$  induce una metrica o distanza, ponendo:  $d(v, w) = \|v - w\|$ .

Consideriamo, allora,  $(V, \|\cdot\|)$  spazio lineare normato. Il problema di migliore approssimazione può venire così formulato: dato un sottoinsieme (o anche un sottospazio vettoriale)  $W$  di  $V$  e un elemento  $v \in V$ , esiste un elemento  $w \in W$  che sia *più vicino* a  $v$ ? Ossia: è possibile trovare un vettore  $w \in W$  tale che  $\|v - w\| = \min_{t \in W} \|v - t\|$ ? Se esiste una tale migliore approssimazione di  $v$  fra gli elementi di  $W$ , è unica?

Non è complicato osservare che una risposta soddisfacente a queste domande richiederà la scelta di un sottospazio vettoriale  $W$  che sia un insieme chiuso in  $V$ , perché, senza questa condizione, gli elementi appartenenti a  $\overline{W} \setminus W$ , cioè alla frontiera dell'insieme  $W$ , non avranno punti più vicini. Meno scontato è il fatto che, tipicamente, abbiamo bisogno di imporre richieste aggiuntive su  $W$  per garantire l'esistenza, e certamente l'unicità, di punti più vicini. Dunque considereremo il caso in cui  $W$  sia un sottospazio chiuso di uno spazio lineare normato  $(V, \|\cdot\|)$ .

Come vedremo più avanti nella trattazione, in  $V = \mathbb{R}^N$  con la usuale norma euclidea, ossia  $\|(x_k)_{k=1}^N\| = \sqrt{\sum_{k=1}^N |x_k|^2}$ , il problema ha completa soluzione per ogni sottospazio (in realtà per ogni insieme convesso e chiuso)  $W$ . Questo problema è detto di *approssimazione ai minimi quadrati* e lo affronteremo successivamente nei dettagli. Il problema cambia, invece, drammaticamente carattere se consideriamo su  $\mathbb{R}^N$  una norma diversa, come evidenziato da questo esempio:

OSSERVAZIONE 1.2. Consideriamo  $V = \mathbb{R}^2$  con la norma  $\|(x, y)\| = \max\{|x|, |y|\}$ , ed il suo sottospazio  $W = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$  (ossia l'asse  $y$ ). Allora il punto  $x = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$  possiede infiniti punti più vicini in  $W$ ; di più, ciascun punto della forma  $(0, y)$ , con  $-1 \leq y \leq 1$ , è un punto più vicino a  $x$ .

Nel caso particolare  $V = C[a, b]$  dotato di norma uniforme, o del  $\max \|f\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ , siamo interessati ad approssimazioni tramite elementi di  $W = \mathbb{P}_n$ , il sottospazio formato da tutti i polinomi algebrici di grado al più  $n$ . Notiamo che  $\mathbb{P}_n$  è un sottospazio di dimensione finita di  $C[a, b]$  pari esattamente a  $n + 1$ .

Attenzione perché se consideriamo il sottospazio  $W = \mathbb{P}$  costituito da tutti i polinomi in  $V = C[a, b]$ , allora l'esistenza di elementi di miglior approssimazione può rivelarsi problematica. È una conseguenza del primo teorema di approssimazione di Weierstrass (che enunceremo e dimosteremo successivamente), ad esempio, che ogni funzione  $f \in C[a, b]$  abbia distanza nulla da  $\mathbb{P}$ , tuttavia, poiché non tutte le funzioni  $f \in C[a, b]$  sono dei polinomi, non possiamo aspettarci che il polinomio di miglior approssimazione esista in ogni caso. Ad esempio, la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x \sin 1/x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è continua su  $[0, 1]$ , ma non coincide con nessun polinomio su questo intervallo. Il problema, in questa situazione, è che ogni elemento di  $C[a, b]$  è il limite uniforme di una successione di  $\mathbb{P}$ , in altre parole la chiusura di  $W$  è uguale a  $V$ :  $\overline{W} = V$ .

In pratica, se abbiamo  $W$  sottospazio di  $V$ , denso in  $V$ , ma con  $W \neq V$ , allora non esisterà un elemento di migliore approssimazione.

**1.1. Spazi vettoriali di dimensione finita.** La chiave del problema dell'approssimazione polinomiale è, allora, il fatto che ciascuno degli spazi  $\mathbb{P}_n$  sia di dimensione *finita*. Per vedere come la dimensione finita entri in gioco, sarà utile considerare il caso astratto di sottospazi di dimensione finita di spazi normati qualsiasi.

LEMMA 1.3. *Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita. Allora tutte le norme su  $V$  sono equivalenti, ossia, se  $\|\cdot\|$  e  $\|\|\cdot\|\|$  sono due norme su  $V$ , allora esistono due costanti positive  $A$  e  $B$  tali che:*

$$A \|v\| \leq \|\|v\|\| \leq B \|v\|, \quad \forall v \in V.$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che  $V$  sia  $N$ -dimensionale e che  $\|\cdot\|$  sia una norma su  $V$ . Fissiamo una base  $e_1, \dots, e_N$  su  $V$  e consideriamo la seguente norma:

$$\left\| \sum_{i=1}^N a_i e_i \right\|_1 = \sum_{i=1}^N |a_i| = \|(a_i)_{i=1}^N\|_1$$

per  $x = \sum_{i=1}^N a_i e_i \in V$ . Essendo  $e_1, \dots, e_N$  una base per  $V$ , non è difficile vedere che  $\|\cdot\|_1$  sia, effettivamente, una norma su  $V$ . Osserviamo che abbiamo costruito una corrispondenza tra  $\mathbb{R}^N$  e  $V$ ; in particolare, la mappa  $(a_i)_{i=1}^N \mapsto \sum_{i=1}^N a_i e_i$  è iniettiva e suriettiva: infatti tale corrispondenza è un'isometria tra  $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_1)$  e  $(V, \|\cdot\|_1)$ .

È ora sufficiente mostrare che  $\|\cdot\|$  e  $\|\cdot\|_1$  sono equivalenti.

Una disuguaglianza è semplice da provare, infatti:

$$\left\| \sum_{i=1}^N a_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^N |a_i| \|e_i\| \leq \left( \max_{1 \leq i \leq N} \|e_i\| \right) \sum_{i=1}^N |a_i| = B \left\| \sum_{i=1}^N a_i e_i \right\|_1.$$

La difficoltà consiste nello stabilire la disuguaglianza inversa. Ora: la prima disuguaglianza che abbiamo provato mostra che la funzione  $x \mapsto \|x\|$  è continua sullo spazio  $(V, \|\cdot\|_1)$ ; infatti:

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\| \leq B \|x - y\|_1$$

per ogni  $x, y \in V$ . Pertanto la funzione  $\|\cdot\|$  assume un valore minimo sul compatto di  $V$

$$S = \{x \in V : \|x\|_1 = 1\},$$

in quanto  $V$  è uno spazio vettoriale *di dimensione finita*, altrimenti questo non sarebbe vero: ecco perché è necessario introdurre questa ipotesi.

In particolare, esiste una costante  $A > 0$  tale che  $\|x\| \geq A$  ogniqualvolta  $\|x\|_1 = 1$ . Dunque la disuguaglianza che ci serve segue dall'omogeneità della norma:

$$\left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\| \geq A \Rightarrow \|x\| \geq A \|x\|_1.$$

□

**COROLLARIO 1.4.** *Ogni spazio normato  $V$  di dimensione finita è completo, cioè ogni successione di Cauchy converge in  $V$ . In particolare, se  $W$  è un sottospazio di dimensione finita di uno spazio lineare normato  $(V, \|\cdot\|)$ , allora  $W$  è un sottospazio chiuso di  $V$ .*

**COROLLARIO 1.5.** *Sia  $(W, \|\cdot\|)$  uno spazio lineare normato di dimensione finita, sia  $v \in W$ , e sia  $M > 0$ . Allora ogni palla chiusa  $\{w \in W : \|v - w\| \leq M\}$  è un insieme compatto.*

**TEOREMA 1.6 (*Esistenza della migliore approssimazione*).** *Siano  $(V, \|\cdot\|)$  uno spazio lineare normato,  $v \in V$  e  $W$  un suo sottospazio di dimensione finita. Allora esiste un (non necessariamente unico) vettore  $w^* \in W$  tale che:*

$$\|v - w^*\| = \min_{w \in W} \|v - w\|, \forall w \in W.$$

*Equivalentemente, esiste un elemento di migliore approssimazione di  $v$  tramite elementi di  $W$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Di certo  $0 \in W$ , essendo  $W$  un sottospazio vettoriale, quindi sappiamo che ogni elemento di migliore approssimazione  $w^*$  soddisferà la relazione:  $\|v - w^*\| \leq \|v - 0\| = \|v\|$ . Perciò, se esiste,  $w^*$  sta nella palla di elementi di  $W$  centrata in  $v$  e avente raggio pari a  $\|v\|$ , che denoteremo con  $\mathcal{B}_W(v, \|v\|) := \mathcal{B}(v, \|v\|) \cap W$ . Ma il sottospazio  $W$  ha dimensione finita, e quindi  $\mathcal{B}_W(v, \|v\|)$  è un insieme compatto, essendo tali tutti i sottoinsiemi chiusi e limitati di uno spazio normato di dimensione finita.

Per terminare la dimostrazione, rimane da vedere che la funzione  $f(w) = \|v - w\|$  è continua. Quindi basta mostrare che, per ogni  $\epsilon > 0$ , esiste  $\delta(\epsilon) > 0$  tale che  $\|v - w\| \leq \delta(\epsilon)$  implica  $|\|v\| - \|w\|| \leq \epsilon$ .

Supponiamo, dapprima, che sia  $\|v\| \geq \|w\|$ . Scrivendo  $v = w + (v - w)$  si ha, per la disuguaglianza triangolare:

$$\|v\| = \|w + (v - w)\| \leq \|w\| + \|v - w\|$$

$$0 \leq \|v\| - \|w\| \leq \|v - w\|$$

$$\| \|v\| - \|w\| \| \leq \| \|v - w\| \| = \|v - w\|.$$

Quindi, posto  $\delta(\epsilon) = \epsilon$ , se  $\|v - w\| \leq \epsilon$ , allora:

$$\| \|v\| - \|w\| \| \leq \|v - w\| \leq \epsilon.$$

Viceversa, se fosse  $\|w\| \geq \|v\|$  il ragionamento sarebbe il medesimo partendo questa volta da  $w = v + (w - v)$ . In tal modo abbiamo mostrato che  $f$  è una funzione continua.

Per il teorema di Weierstrass, poiché una funzione continua definita su un compatto di  $\mathbb{R}$  assume un valore minimo, si conclude che esiste un minimo per la funzione  $f(w) = \|v - w\|$  che sarà l'elemento di miglior approssimazione  $w^*$ .  $\square$

**COROLLARIO 1.7.** *Per ogni  $f \in C[a, b]$ , con  $\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ , ed ogni intero positivo  $n$ , esiste un (non necessariamente unico) polinomio di miglior approssimazione  $p_n^* \in \mathbb{P}_n$  tale che:*

$$\|f - p_n^*\| = \min_{p_n \in \mathbb{P}_n} \|f - p_n\|.$$

Nel corollario 1.7 non si afferma che  $p_n^*$  sarà un polinomio di grado esattamente pari ad  $n$ , ma piuttosto che sarà un polinomio di grado al massimo  $n$ . Per esempio, la migliore approssimazione di  $f(x) = x$  con un polinomio di grado al massimo 3 è, naturalmente,  $p(x) = x$ . Anche esempi di funzioni non polinomiali sono facili da proporre; per esempio, la miglior approssimazione lineare di  $f(x) = |x|$  su  $[-1, 1]$  è la funzione costante  $p(x) = 1/2$ .

Discutiamo, ora, il problema dell'unicità degli elementi di miglior approssimazione. Prima di tutto, vediamo perché potrebbe rivelarsi utile disporre di migliori approssimazioni che siano uniche.

**LEMMA 1.8.** *Sia  $W$  un sottospazio di dimensione finita di uno spazio lineare normato  $V$ , e supponiamo che ogni  $v \in V$  abbia un unico punto 'più vicino'  $w_v \in W$ . Allora la mappa di miglior approssimazione  $v \mapsto w_v$  è continua.*

**DIMOSTRAZIONE.** Indichiamo con  $P(v) = w_v$  la mappa di miglior approssimazione, e supponiamo che  $v_n \rightarrow v$  in  $V$ . Vogliamo provare che  $P(v_n) \rightarrow P(v)$ , e per fare questo è sufficiente mostrare che esiste una sottosuccessione di  $(P(v_n))$  convergente a  $P(v)$ .

Poiché la successione  $(v_n)$  è limitata in  $V$ , cioè  $\|v_n\| \leq M$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , abbiamo:

$$\|P(v_n)\| \leq \|P(v_n) - v_n\| + \|v_n\| \leq 2\|v_n\| \leq 2M.$$

Quindi  $(P(v_n))$  è una successione limitata in  $W$ , che è uno spazio di dimensione finita. Essendo tale, possiamo estrarre una sottosuccessione  $(P(v_n))$  convergente ad un certo  $P_0 \in W$ .

Ora dobbiamo mostrare che  $P_0 = P(v)$ . Infatti:

$$\|P(v_n) - v_n\| \leq \|P(v) - v_n\|$$

per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , pertanto, facendo tendere  $n \rightarrow \infty$ , si ottiene:

$$\|P_0 - v\| \leq \|P(v) - v\|.$$

Avendo supposto che gli elementi di miglior approssimazione in  $W$  siano unici, dobbiamo trarne, necessariamente, che  $P_0 = P(v)$ .  $\square$

Dovrebbe essere rimarcato che la mappa di miglior approssimazione è, in generale, non lineare e, come tale, può rivelarsi molto difficile da trattare. Nonostante le potenziali difficoltà che si incontrano con le mappe di miglior approssimazione, osserviamo adesso che l'insieme degli elementi di miglior approssimazione ha una struttura quasi lineare.

**TEOREMA 1.9.** *Sia  $W$  un sottospazio di uno spazio lineare normato  $V$ , e sia  $v \in V$ . Allora l'insieme  $W_v$ , costituito da tutti gli elementi di miglior approssimazione di  $v$  fra gli elementi di  $W$ , è un insieme convesso e limitato.*

**DIMOSTRAZIONE.** Abbiamo già visto come l'insieme  $W_v$  sia un sottoinsieme della palla  $\{w \in W : \|v - w\| \leq \|v\|\}$  e, come tale, sia limitato. Ora, ricordiamo che un sottoinsieme  $K$  di uno spazio vettoriale  $V$  si dice *convesso* se  $K$  contiene il segmento che unisce ciascuna coppia di suoi punti. Ossia,  $K$  è convesso se:

$$x, y \in K, 0 \leq \lambda \leq 1 \Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)y \in K.$$

Pertanto, dati  $w_1, w_2 \in W_v$  e  $0 \leq \lambda \leq 1$ , vogliamo mostrare che il vettore  $w^* = \lambda w_1 + (1 - \lambda)w_2 \in W_v$ . Ma il fatto che  $w_1, w_2 \in W_v$  significa che:

$$\|v - w_1\| = \|v - w_2\| = \min_{w \in W} \|v - w\|.$$

Da ciò deriva che:

$$\begin{aligned} \|v - w^*\| &= \|v - (\lambda w_1 + (1 - \lambda)w_2)\| \\ &= \|\lambda(v - w_1) + (1 - \lambda)(v - w_2)\| \\ &\leq \lambda \|v - w_1\| + (1 - \lambda) \|v - w_2\| \\ &= \min_{w \in W} \|v - w\|. \end{aligned}$$

Di conseguenza,  $\|v - w^*\| = \min_{w \in W} \|v - w\|$ ; cioè  $w^* \in W_v$ .  $\square$

**OSSERVAZIONE 1.10.** Se nel teorema 1.9 assumiamo anche che  $W$  sia di dimensione finita, allora l'insieme  $W_v$  è chiuso, e quindi si tratta di un insieme convesso e compatto.

Se  $W_v$  contiene più di un punto, allora conterrà un intero segmento. Quindi o  $W_v$  è vuoto, o contiene esattamente un punto oppure contiene infiniti punti. Questa osservazione ci fornisce una *condizione sufficiente per l'unicità* degli elementi di migliore approssimazione: se lo spazio normato  $V$  non contiene segmenti su ciascuna sfera  $\{v \in V : \|v\| = r\}$ , allora le migliori approssimazioni (fra gli elementi di un qualsiasi sottoinsieme convesso  $W$ ) saranno uniche.

**DEFINIZIONE 1.11** (*Norma strettamente convessa*). Una norma  $\|\cdot\|$  su uno spazio vettoriale  $V$  si dice *strettamente convessa* se, per ogni coppia di punti  $v \neq w \in V$  con  $\|v\| = r = \|w\|$ , si ha sempre:  $\|\lambda v + (1 - \lambda)w\| < r$ , per ogni  $\lambda$  tale che sia  $0 < \lambda < 1$ . Questo significa che il segmento che unisce ogni coppia di punti sulla sfera di raggio  $r$ , privato degli estremi, giace interamente all'interno della palla aperta di raggio  $r$ ; in altre parole solo gli estremi del segmento possono intersecare la sfera.

Per semplicità spesso si dice che lo spazio  $V$  è strettamente convesso, intendendo, tuttavia, che in realtà ci stiamo riferendo ad una proprietà della norma di  $V$ . In ciascuno di tali spazi, otteniamo un immediato corollario del nostro ultimo risultato.

**COROLLARIO 1.12.** *Se  $V$  ha una norma strettamente convessa, allora, per ogni sottospazio  $W$  di  $V$  e per ogni punto  $v \in V$ , ci può essere al più una migliore approssimazione di  $v$  fra gli elementi di  $W$ . In altre parole, o  $W_v$  è vuoto o consiste di un unico elemento.*

Per giungere ad una condizione che sia in qualche modo più semplice da verificare, traduciamo la nostra definizione originaria sulla stretta convessità di una norma in un'affermazione sulla disuguaglianza triangolare nello spazio  $V$ .

**LEMMA 1.13.** *Uno spazio normato  $V$  ha una norma strettamente convessa se e solo se la disuguaglianza triangolare è stretta per vettori non paralleli; ossia se e solo se:*

$$v \neq \alpha w, w \neq \alpha v, \forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \|v + w\| < \|v\| + \|w\|.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo, dapprima, che  $V$  sia strettamente convesso e siano  $v$  e  $w$  due vettori non paralleli in  $V$ . Allora, in particolare, i vettori  $v/\|v\|$  e  $w/\|w\|$  devono essere diversi. Quindi:

$$\left\| \left( \frac{\|v\|}{\|v\| + \|w\|} \right) \frac{v}{\|v\|} + \left( \frac{\|w\|}{\|v\| + \|w\|} \right) \frac{w}{\|w\|} \right\| < 1.$$

Il ché vuol dire che  $\|v + w\| < \|v\| + \|w\|$ .

Ora: supponiamo, invece, che la disuguaglianza triangolare sia stretta per vettori non paralleli, e sia  $v \neq w \in V$  con  $\|v\| = \|w\| = r$ . Se  $v$  e  $w$  fossero paralleli, allora si dovrebbe avere  $w = -v$ . In questo caso:

$$\|\lambda v + (1 - \lambda)w\| = |2\lambda - 1| \|v\| < r$$

in quanto  $-1 < 2\lambda - 1 < 1$  quando  $0 < \lambda < 1$ . Altrimenti,  $v$  e  $w$  non sono paralleli. Dunque, per ogni  $\lambda$  per cui si abbia  $0 < \lambda < 1$ , i vettori  $\lambda v$  e  $(1 - \lambda)w$  sono ancora non paralleli e si ha:

$$\|\lambda v + (1 - \lambda)w\| < \lambda \|v\| + (1 - \lambda) \|w\| = r.$$

□

La norma con cui è equipaggiato solitamente lo spazio  $C[a, b]$ , ossia la norma del max, o norma uniforme, o norma di Chebyshev, non è strettamente convessa, e quindi il problema dell'unicità degli elementi di miglior approssimazione è uno dei più interessanti da affrontare.

Per esempio, se  $f(x) = x$  e  $g(x) = x^2$  in  $C[0, 1]$ , allora  $f \neq g$  e  $\|f\| = 1 = \|g\|$ , mentre  $\|f + g\| = 2$ .

La norma che si considera usualmente in  $\mathbb{R}^N$ , cioè la norma euclidea o norma 2, è invece strettamente convessa, come pure ciascuna delle norme  $\|\cdot\|_p$  per  $1 < p < \infty$ . Al contrario, le norme  $\|\cdot\|_1$  e  $\|\cdot\|_\infty$  non sono strettamente convesse.

## 2. Approssimazione polinomiale

Dopo aver modellizzato matematicamente un fenomeno reale tramite una funzione o una combinazione di funzioni, spesso se ne cerca un'approssimazione mediante funzioni più semplici, spesso di tipo polinomiale. Infatti, nonostante siamo in grado di operare comunemente con funzioni del tipo  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $e^x$ ,  $\tanh x$ ,  $\sqrt{x}$ ,  $\dots$ , in quanto ne conosciamo molte proprietà che ci consentono di manipolarle e di metterle in relazione tra loro, la loro utilizzazione sul piano quantitativo può essere limitata dal fatto che esse possono essere definite attraverso un procedimento di passaggio al limite, in particolare con una serie convergente di potenze. Questo significa che non si può esprimere il valore di una di queste funzioni non polinomiali in termini finiti, ma è necessario ricorrere ad un procedimento di approssimazione. Ad esempio, per ogni punto  $x_0$ , è possibile ottenere un'approssimazione della funzione  $\cos x$ , con errore inferiore a qualunque tolleranza prefissata, attraverso un opportuno troncamento della sua serie di Taylor calcolata in un intorno di  $x_0$ . Infatti, scegliendo per esempio  $x_0 = 0$  e per  $n$  sufficientemente grande, il polinomio di Mac Laurin:

$$p_{2n}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

è in grado di approssimare  $\cos x$  al di sotto della tolleranza data su tutto il suo intervallo di periodicità  $[0, 2\pi]$ . Quest'ultimo fatto è garantito dalla convergenza uniforme sui compatti dello sviluppo in serie di Mac Laurin di tale funzione. Dunque il polinomio  $p_{2n}(x)$  rappresenta un concreto 'sostituto' della funzione  $\cos x$  a meno di quella tolleranza.

Più in generale, può accadere che per una funzione  $f(x)$  qualsiasi si desideri disporre di un'approssimazione uniforme di tipo polinomiale

che risulti più semplice da tabulare, da integrare, da derivare. Se tale funzione è sviluppabile in serie di Taylor, ancora una volta il polinomio:

$$p_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)$$

fornisce una possibile approssimazione a condizione che si disponga effettivamente delle sue derivate successive nel punto  $x_0$ .

Quest'ultima condizione limita notevolmente, sul piano numerico, l'uso dei **polinomi di Taylor** come polinomi approssimanti. Inoltre essi forniscono delle buone approssimazioni di  $f(x)$  soltanto in punti vicini ad  $x_0$  (si ha una *convergenza puntuale*).

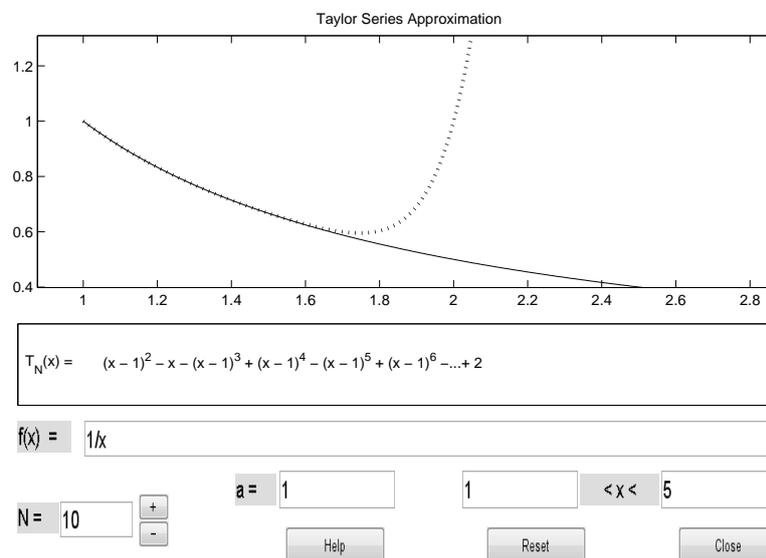


FIGURA 1.1. Confronto tra la funzione  $f(x) = 1/x$  (in linea piena) ed il suo polinomio di Taylor di grado 10 riferito al punto  $x_0 = 1$  (in tratteggio). L'espressione del polinomio di Taylor è riportata in figura: come si vede, più ci si allontana dal punto  $x_0$ , più il polinomio di Taylor si discosta dalla funzione.

Infatti il polinomio di Taylor è costruito soltanto sui valori della funzione e delle sue derivate in  $x_0$ , perciò risulta facilmente che in quel punto il polinomio  $p_n(x)$  e le sue derivate fino all'ordine  $n - 1$  coincidono con la funzione  $f(x)$  e le sue corrispondenti derivate, tuttavia per avere approssimazioni soddisfacenti su intervalli sufficientemente ampi bisogna prendere polinomi di grado troppo alto. Dunque la formula di Taylor è un utile strumento teorico, ma si rivela difficilmente utilizzabile nella pratica in quanto sfrutta le informazioni che si hanno sulla  $f(x)$  nel solo punto  $x_0$  e quindi può fornire un'approssimazione accettabile solo relativamente ad un piccolo intorno di  $x_0$ , ossia un'approssimazione di tipo *locale*.

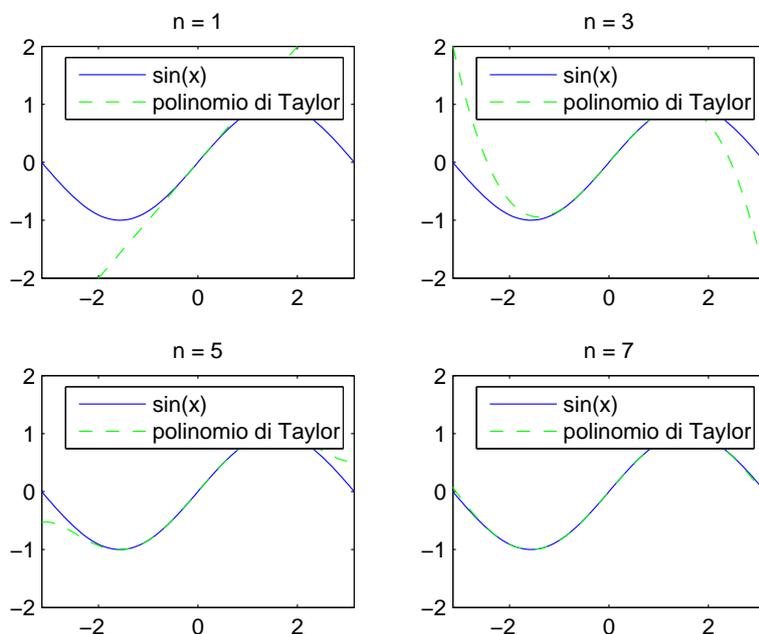


FIGURA 1.2. Approssimazione della funzione  $f(x) = \sin x$  attraverso polinomi di Taylor di diverso ordine, rispettivamente  $n = 1, 3, 5, 7$ , centrati in  $x_0 = 0$ . L'approssimazione migliora all'aumentare del grado del polinomio approssimante.

Un diverso tipo di approccio che consente di superare questi inconvenienti consiste nel considerare un generico polinomio

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

e determinare i suoi coefficienti imponendo dei vincoli di interpolazione su più punti, detti *nodi d'interpolazione*, distribuiti in tutto l'intervallo sul quale si intende approssimare la funzione. Su questi nodi si impone soltanto che il polinomio coincida con la funzione, così si ha anche il vantaggio di allargare la classe di funzioni approssimabili per le quali non è più richiesta la conoscenza delle derivate ma soltanto dei valori nei nodi. In questo modo si possono anche approssimare funzioni discontinue e dati sperimentali.

L'interesse per i polinomi algebrici come possibili approssimanti di funzioni continue su intervalli chiusi e limitati deriva dal seguente teorema:

**TEOREMA 1.14 (*Primo teorema di approssimazione di Weierstrass, 1885*).** *Sia data una funzione  $f \in C[a, b]$ . Allora,  $\forall \epsilon > 0$ , esiste un polinomio  $p \in \mathbb{P}_n$  di grado opportuno tale che:*

$$\|f - p\| < \epsilon.$$

Segue dal teorema di Weierstrass che, per qualche successione di polinomi  $(q_k)$ , si abbia  $\|f - q_k\| \rightarrow 0$ . Possiamo supporre che  $q_k \in \mathbb{P}_{n_k}$ , dove  $(n_k)$  è una successione crescente. Da ciò se ne trae che esiste una successione di polinomi  $p_n(x)$ , ciascuno di grado  $n$ , che converge uniformemente alla funzione  $f(x)$ .

Tale teorema garantisce, quindi, che l'insieme dei polinomi algebrici è denso nell'insieme delle funzioni continue, cioè che, per ogni funzione continua, esiste sempre un polinomio che la approssima con errore arbitrariamente piccolo; tuttavia nessuna indicazione viene data sul grado del polinomio approssimante che, fissato un  $\epsilon > 0$ , potrebbe anche essere eccessivamente elevato.

In altre parole, il teorema di Weierstrass afferma che *i polinomi algebrici sono densi nell'insieme  $C[a, b]$  rispetto alla norma  $\|f\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$* , detta anche norma lagrangiana.

### 3. Miglior approssimazione uniforme

Ci concentriamo, ora, sul problema della migliore approssimazione uniforme di una data funzione  $f \in C[a, b]$  mediante elementi di  $\mathbb{P}_n$ , il sottospazio dei polinomi algebrici di grado al più  $n$  in  $C[a, b]$ .

Sappiamo, quindi, che  $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$  è uno spazio di Banach (normato completo) e che  $\mathbb{P}_n$  è un suo sottospazio vettoriale.

Con riferimento al teorema 1.6, posti  $V = C[a, b]$  e  $W = \mathbb{P}_n$ , data una funzione continua  $f \in C[a, b]$  e fissato  $n$ , si cerca il polinomio  $p_n^* \in \mathbb{P}_n$  tale che  $\|f - p_n^*\|_\infty = \min_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\|_\infty$ , dove:

$$\|f - p\|_\infty := \max_{x \in [a, b]} |f(x) - p(x)|.$$

Questo problema, detto *di minimax* o *di miglior approssimazione uniforme*, non è in generale di facile soluzione. Sappiamo, tuttavia, che il problema ha una soluzione (può darsi anche più di una), che indichiamo con  $p_n^*(x)$ , che è detto *polinomio di minimo scarto* per la funzione  $f(x)$ , mentre lo scarto, detto *errore minimax*, viene denotato con:

$$E_n(f) := \|f - p_n^*\|_\infty = \min_{p \in \mathbb{P}_n} \left( \max_{x \in [a, b]} |f(x) - p(x)| \right).$$

Poiché  $p_n^*(x)$  minimizza il massimo dell'errore, è anche detto *polinomio minimax*. Poiché  $\mathbb{P}_n \subset \mathbb{P}_{n+1}$  per ogni  $n$ , è chiaro che  $E_n(f) \geq E_{n+1}(f)$  per ogni  $n$ . Il nostro obiettivo è di provare che  $E_n(f) \rightarrow 0$ , e faremo questo dopo aver provato il teorema di approssimazione di Weierstrass 1.14. Da esso segue che  $E_n(f) \rightarrow 0$  e quindi che la successione polinomiale approssimante converge uniformemente alla funzione  $f$ .

**3.1. Il teorema di Weierstrass.** La dimostrazione di tale teorema rappresenta un primo passo importante nel determinare l'esatta

natura di  $E_n(f)$  come funzione di  $f$  e di  $n$ . Esistono svariate dimostrazioni del teorema di Weierstrass, ma tutte partono compiendo una semplificazione iniziale: l'intervallo di definizione  $[a, b]$  non è essenziale.

**LEMMA 1.15.** *Se il teorema di Weierstrass vale per  $C[0, 1]$ , allora vale anche per  $C[a, b]$ , e viceversa. Infatti,  $C[0, 1]$  e  $C[a, b]$  sono, per tutti gli scopi pratici, identici: sono linearmente isometrici come spazi normati, isomorfi per l'ordine come reticoli e isomorfi perfino come algebre (anelli).*

**DIMOSTRAZIONE.** Ci limitiamo a provare la prima affermazione, le altre utilizzano argomenti simili.

Prima di tutto, osserviamo che la funzione:

$$\sigma(x) = a + (b - a)x, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

definisce una mappa continua ed iniettiva da  $[0, 1]$  in  $[a, b]$ . Data  $f \in C[a, b]$ , ne segue che  $g(x) = f(\sigma(x))$  definisce un elemento di  $C[0, 1]$ . Inoltre:

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |g(x)| = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|.$$

Ora, dato  $\epsilon > 0$ , supponiamo di poter trovare un polinomio  $p$  tale che sia  $\|g - p\| < \epsilon$ ; in altre parole, supponiamo che:

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |f(a + (b - a)x) - p(x)| < \epsilon.$$

Allora:

$$\max_{a \leq t \leq b} \left| f(t) - p\left(\frac{t - a}{b - a}\right) \right| < \epsilon.$$

Ma se  $p(x)$  è un polinomio in  $x$ , allora  $q(t) = p\left(\frac{t - a}{b - a}\right)$  è un polinomio in  $t$  che soddisfa la condizione  $\|f - q\| < \epsilon$ .

La dimostrazione dell'implicazione inversa è molto simile: se  $g(x)$  è un elemento di  $C[0, 1]$ , allora  $f(t) = g\left(\frac{t - a}{b - a}\right)$ , con  $a \leq t \leq b$ , definisce un elemento di  $C[a, b]$ . Inoltre, se  $q(t)$  è un polinomio in  $t$  che approssima  $f(t)$ , allora  $p(x) = q(a + (b - a)x)$  è un polinomio in  $x$  approssimante  $g(x)$ .  $\square$

La conseguenza più importante di questo risultato è che è sufficiente provare il teorema di Weierstrass per qualsiasi intervallo vogliamo;  $[0, 1]$  e  $[-1, 1]$  sono scelte tra le più comuni, ma è del tutto indifferente ai fini del risultato quale intervallo adoperiamo.

**3.2. Dimostrazione di Bernstein.** Vediamo la dimostrazione dovuta al matematico russo *Bernstein*, che risale al 1912. La sua dimostrazione è molto interessante per molti motivi, forse il più importante risiede nel fatto che Bernstein costruisce e presenta *realmente* una successione di polinomi che approssimano una data funzione  $f \in C[0, 1]$ . Oltretutto, la dimostrazione di Bernstein viene generalizzata per ottenere un potente teorema dal grande valore unificante, chiamato *teorema di Bohman-Korovkin*.

DEFINIZIONE 1.16 (*Polinomi di Bernstein*). Se  $f$  è una qualunque funzione limitata su  $[0, 1]$ , definiamo la successione dei *polinomi di Bernstein* per  $f$  in questo modo:

$$(B_n(f))(x) = \sum_{k=0}^n f(k/n) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Osserviamo che  $B_n(f)$  è un polinomio di grado al più  $n$ . Oltre a ciò, è semplice vedere che  $(B_n(f))(0) = f(0)$  e  $(B_n(f))(1) = f(1)$ . In generale,  $(B_n(f))(x)$  rappresenta una media dei numeri  $f(k/n)$ ,  $k = 0, \dots, n$ . Ecco l'enunciato del teorema di Bernstein:

TEOREMA 1.17 (**Bernstein**).  $B_n(f)$  converge uniformemente ad  $f$ , per ogni  $f \in C[0, 1]$ .

Sorprendentemente, la dimostrazione richiede solamente che si verifichino tre semplici casi:  $f_0(x) = 1$ ,  $f_1(x) = x$  e  $f_2(x) = x^2$ . Questo, e anche qualcosa di più, rappresenta il contenuto del prossimo lemma, di cui omettiamo la dimostrazione (cfr.[1], pagg.12 – 14).

LEMMA 1.18. Si dimostrano i seguenti fatti:

- (i)  $B_n(f_0) = f_0$  e  $B_n(f_1) = f_1$ ;
- (ii)  $B_n(f_2) = (1 - \frac{1}{n}) f_2 + \frac{1}{n} f_1$ , da cui deriva che  $B_n(f_2)$  converge uniformemente a  $f_2$ ;
- (iii)

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4n},$$

se  $0 \leq x \leq 1$ ;

- (iv) dato  $\delta > 0$  e  $0 \leq x \leq 1$ , supponiamo che  $F$  denoti l'insieme dei  $k$  in  $\{0, \dots, n\}$  per i quali valga:  $|\frac{k}{n} - x| \geq \delta$ . Allora:

$$\sum_{k \in F} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n\delta^2}.$$

Ora siamo pronti per la dimostrazione del teorema di Bernstein.

DIMOSTRAZIONE. (**Bernstein**) Sia  $f \in C[0, 1]$  e sia  $\epsilon > 0$ . Allora, essendo  $f$  uniformemente continua, esiste  $\delta > 0$  tale che:  $|f(x) - f(y)| < \epsilon/2$  quando  $|x - y| < \delta$ . Ora utilizziamo il lemma 1.18 per stimare  $\|f - B_n(f)\|$ . Innanzitutto, osserviamo che siccome i numeri  $\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$  sono non negativi e la loro somma dà 1 per il

teorema del binomio di Newton, abbiamo:

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(f)(x)| &= \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^n \left( f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}. \end{aligned}$$

Ora fissiamo  $n$  e supponiamo che  $F$  indichi l'insieme dei  $k$  in  $\{0, \dots, n\}$  per i quali  $\left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta$ . Allora  $|f(x) - f(k/n)| < \epsilon/2$  per  $k \notin F$ , mentre  $|f(x) - f(k/n)| \leq 2\|f\|$  per  $k \in F$ . Quindi:

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(f)(x)| &\leq \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} \sum_{k \notin F} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + 2\|f\| \sum_{k \in F} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &< \frac{\epsilon}{2} \cdot 1 + 2\|f\| \cdot \frac{1}{4n\delta^2}, \text{ per il punto (iv) del lemma 1.18} \\ &< \epsilon, \text{ a condizione che sia } n > \frac{\|f\|}{\epsilon\delta^2}. \end{aligned}$$

□

Il teorema di Bernstein mostra che i polinomi sono densi in  $C[0, 1]$  e, quindi, anche in  $C[a, b]$  per il lemma 1.15.

Esistono almeno altre 2 dimostrazioni del teorema di Weierstrass degne di nota: una dovuta a *Landau*, del 1908, il quale costruisce esplicitamente, come fatto da Bernstein, una successione di polinomi uniformemente convergente ad una funzione  $f \in C[0, 1]$  (cfr. [1], pagg. 14 – 15); l'altra è di *Lebesgue* e risale al 1898 ed è di un certo rilievo dal punto di vista storico in quanto ispirò la versione di *Stone* del teorema di Weierstrass, che vedremo successivamente.

**OSSERVAZIONE 1.19.** Sebbene i polinomi di Bernstein  $B_n(f)$  offrano una comoda ed esplicita approssimazione polinomiale della funzione  $f$ , certamente non costituiscono le migliori approssimazioni di  $f$  tra gli elementi di  $\mathbb{P}_n$ .

Infatti, ricordiamo che se  $f_1(x) = x$  e  $f_2(x) = x^2$ , allora  $B_n(f_2) = (1 - \frac{1}{n})f_2 + \frac{1}{n}f_1 \neq f_2$ . Chiaramente la migliore approssimazione di  $f_2$  tra gli elementi di  $\mathbb{P}_n$  dovrebbe essere  $f_2$  stesso quando  $n \geq 2$ . D'altro lato, poiché si ha sempre:

$$E_n(f) \leq \|f - B_n(f)\|,$$

una dettagliata comprensione della dimostrazione di Bernstein può condurre più in profondità all'interno del problema generale dell'approssimazione polinomiale.

**3.3. Stime migliori dell'errore di minimax.** Il nostro prossimo obiettivo è quello di migliorare la nostra stima dell'errore  $\|f - B_n(f)\|$  e, di conseguenza, anche dell'errore di minimax  $E_n(f)$ .

**DEFINIZIONE 1.20 (Modulo di continuità).** Si definisce *modulo di continuità* di una funzione limitata  $f$  sull'intervallo  $[a, b]$  la funzione:

$$\omega_f(\delta) = \omega_f([a, b], \delta) := \sup_{|x-y| \leq \delta} \{|f(x) - f(y)| : x, y \in [a, b]\}, \quad \forall \delta > 0.$$

Notiamo che  $\omega_f(\delta)$  è una misura dell' $\epsilon$  che accompagna il  $\delta$  nella definizione di uniforme continuità. Valgono alcuni semplici risultati riguardo al modulo di continuità:

1. vale sempre:  $|f(x) - f(y)| \leq \omega_f(|x - y|)$ , per ogni  $x \neq y \in [a, b]$ ;
2.  $f$  è *uniformemente continua* se e solo se  $\omega_f(\delta) \rightarrow 0$  quando  $\delta \rightarrow 0^+$ ;
3. si dice che  $f$  è *hölderiana* se  $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^\alpha$ , dove  $0 < \alpha \leq 1$  e  $K \geq 0$ , per ogni  $x, y$ . Se  $f$  è hölderiana, allora  $\omega_f(\delta) \leq K\delta^\alpha$ , per ogni  $\delta > 0$ .

Per i nostri scopi, ci serve soltanto un semplice fatto riguardo  $\omega_f(\delta)$ , espresso dal seguente lemma.

**LEMMA 1.21.** *Sia  $f$  una funzione limitata su  $[a, b]$  e sia  $\delta > 0$ . Allora  $\omega_f(n\delta) \leq n\omega_f(\delta)$ , per  $n = 1, 2, \dots$ . Di conseguenza:*

$$\omega_f(\lambda\delta) \leq (1 + \lambda)\omega_f(\delta),$$

per ogni  $\lambda > 0$ .

Ora dimostriamo nuovamente il teorema di Bernstein, effettuando alcune piccole modifiche e aggiustamenti qua e là.

**TEOREMA 1.22.** *Per ogni funzione limitata  $f$  su  $[0, 1]$ , si ha:*

$$\|f - B_n(f)\| \leq \frac{3}{2}\omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

In particolare, se  $f \in C[0, 1]$ , allora:

$$E_n(f) \leq \frac{3}{2}\omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

DIMOSTRAZIONE. Innanzitutto eseguiamo un certo riarrangiamento dei termini:

$$\begin{aligned}
|f(x) - B_n(f)(x)| &= \left| \sum_{k=0}^n \left( f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^n \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\leq \sum_{k=0}^n \omega_f \left( \left| x - \frac{k}{n} \right| \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\leq \omega_f \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \sum_{k=0}^n \left[ 1 + \sqrt{n} \left| x - \frac{k}{n} \right| \right] \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \omega_f \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \left[ 1 + \sqrt{n} \sum_{k=0}^n \left| x - \frac{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right],
\end{aligned}$$

dove la terza disuguaglianza segue dal lemma 1.21, prendendo  $\lambda = \sqrt{n} \left| x - \frac{k}{n} \right|$  e  $\delta = \frac{1}{\sqrt{n}}$ . Ciò che resta da fare è stimare la somma, e a questo scopo useremo la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e le nostre precedenti osservazioni sui polinomi di Bernstein.

Poiché ciascuno dei termini  $\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$  è non negativo, si ha:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^n \left| x - \frac{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \\
&= \sum_{k=0}^n \left| x - \frac{k}{n} \right| \left[ \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right]^{1/2} \cdot \left[ \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right]^{1/2} \\
&\leq \left[ \sum_{k=0}^n \left| x - \frac{k}{n} \right|^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right]^{1/2} \cdot \left[ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right]^{1/2} \\
&\leq \left[ \frac{1}{4n} \right]^{1/2} = \frac{1}{2\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

Finalmente otteniamo:

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq \omega_f \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \left[ 1 + \sqrt{n} \cdot \frac{1}{2\sqrt{n}} \right] = \frac{3}{2} \omega_f \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

□

**3.4. Il teorema di Bohman-Korovkin.** Il reale valore che ha per noi l'approccio di Bernstein è che la mappa  $f \mapsto B_n(f)$ , oltre a fornirci una semplice formula per un'approssimazione polinomiale, è anche *lineare* e *positiva*. In altre parole:

1.  $B_n(f + g) = B_n(f) + B_n(g)$ ;
2.  $B_n(\alpha f) = \alpha B_n(f)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ;

3.  $B_n(f) \geq 0$  quando  $f \geq 0$ .

Come accade sempre, ogni mappa lineare positiva  $T : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$  è automaticamente continua.

LEMMA 1.23. *Se  $T : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$  è sia positiva che lineare, allora  $T$  è continua.*

DIMOSTRAZIONE. Notiamo, dapprima, che una mappa lineare positiva è anche monotona. Questo significa che  $T$  soddisfa la condizione  $T(f) \leq T(g)$ , quando  $f \leq g$ . Quindi, per ogni  $f \in C[a, b]$ , abbiamo:

$$-f, f \leq |f| \Rightarrow -T(f), T(f) \leq T(|f|);$$

ossia:  $|T(f)| \leq T(|f|)$ . Ma ora  $|f| \leq \|f\| \cdot \mathbf{1}$ , dove  $\mathbf{1}$  denota la funzione costante 1, pertanto si ottiene:

$$|T(f)| \leq T(|f|) \leq \|f\| \cdot T(\mathbf{1}).$$

Da cui:

$$\|T(f)\| \leq \|f\| \|T(\mathbf{1})\|$$

per ogni  $f \in C[a, b]$ . Infine, essendo  $T$  lineare, ne segue che è lipschitziana con costante  $\|T(\mathbf{1})\|$ :

$$\|T(f) - T(g)\| = \|T(f - g)\| \leq \|T(\mathbf{1})\| \|f - g\|.$$

Di conseguenza,  $T$  è una mappa continua. □

Le applicazioni lineari positive abbondano in analisi, perciò questa è una fortunata serie di eventi. In realtà c'è di più, perché il teorema di Bernstein viene generalizzato molto elegantemente quando collocato in questo nuovo ambiente. Il prossimo teorema fu dimostrato, in maniera indipendente, da Bohman e Korovkin intorno al 1952.

TEOREMA 1.24 (**Bohman-Korovkin**). *Sia  $T_n : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$  una successione di applicazioni lineari positive e supponiamo che  $T_n(f) \rightarrow f$  uniformemente in ognuno dei tre casi seguenti:*

$$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x^2.$$

Allora  $T_n(f)$  converge ad  $f$  uniformemente per ogni  $f \in C[0, 1]$ .

La dimostrazione del teorema di Bohman-Korovkin è sostanzialmente identica a quella del teorema di Bernstein tranne, ovviamente, il fatto che scriviamo  $T_n(f)$  in luogo di  $B_n(f)$  (per maggiori dettagli, vedi [7]).

#### 4. Caratterizzazione della migliore approssimazione

Trattiamo, ora, della soluzione di *Chebyshev* del problema della migliore approssimazione polinomiale datata 1854. In quel momento storico non c'era ragione di credere che il problema potesse perfino avere una soluzione, figuriamoci un'unica soluzione! Dunque il risultato di Chebyshev non dovrebbe essere sottovalutato e probabilmente egli sarebbe

stato in grado di provare quanto ottenuto da Weierstrass 30 anni prima di lui se solo gli fosse passato per la mente.  
Incominciamo da una semplice osservazione.

LEMMA 1.25. *Sia  $f \in C[a, b]$  e sia  $p = p_n^*$  una migliore approssimazione di  $f$  fra gli elementi di  $\mathbb{P}_n$ . Allora esistono almeno due punti distinti  $x_1, x_2 \in [a, b]$  tali che:*

$$f(x_1) - p(x_1) = -(f(x_2) - p(x_2)) = \|f - p\|.$$

*Equivalentemente:  $f - p$  assume ciascuno dei valori  $\pm \|f - p\|$ .*

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con:  $E = E_n(f) = \|f - p\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p(x)|$ . Se, per assurdo, l'affermazione del lemma fosse falsa, allora potremmo anche supporre che  $f(x_1) - p(x_1) = E$ , per qualche  $x_1$ , ma che:

$$e = \min_{a \leq x \leq b} (f(x) - p(x)) > -E.$$

In particolare,  $E + e \neq 0$  da cui  $q = p + \frac{E+e}{2}$  risulta essere un elemento di  $\mathbb{P}_n$  con  $q \neq p$ . Facciamo vedere che  $q$  è una migliore approssimazione di  $f$  rispetto a  $p$  con queste posizioni. Infatti:

$$E - \left(\frac{E+e}{2}\right) \geq f(x) - p(x) - \left(\frac{E+e}{2}\right) \geq e - \left(\frac{E+e}{2}\right),$$

oppure:

$$\left(\frac{E-e}{2}\right) \geq f(x) - q(x) \geq -\left(\frac{E-e}{2}\right).$$

Ciò è equivalente a dire che:

$$\|f - q\| \leq \left(\frac{E-e}{2}\right) < E = \|f - p\|,$$

il che risulta essere una contraddizione.  $\square$

COROLLARIO 1.26. *Il miglior polinomio di grado 0, ossia la migliore costante che approssima una funzione  $f \in C[a, b]$  è:*

$$p_0^* = \frac{1}{2} \left[ \max_{a \leq x \leq b} f(x) + \min_{a \leq x \leq b} f(x) \right],$$

*inoltre vale:*

$$E_0(f) = \frac{1}{2} \left[ \max_{a \leq x \leq b} f(x) - \min_{a \leq x \leq b} f(x) \right].$$

Tutto questo è stato fatto con l'obiettivo di arrivare al caso generale, che nelle linee fondamentali itera l'osservazione del lemma 1.25 in maniera induttiva.

DEFINIZIONE 1.27 (*Punti (+) e (-)*). Data una funzione  $g \in C[a, b]$ , diremo che  $x \in [a, b]$  è un punto (+) per  $g$  (rispettivamente: un punto (-) per  $g$ ) se  $g(x) = \|g\|$  (rispettivamente:  $g(x) = -\|g\|$ ).

DEFINIZIONE 1.28 (*Insieme alternante*). Un insieme di punti distinti  $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$  sarà chiamato un insieme *alternante* per  $g$  se gli  $x_i$  sono alternativamente punti (+) e punti (-); ossia se:

$$|g(x_i)| = \|g\|, \quad i = 0, \dots, n;$$

e:

$$g(x_i) = -g(x_{i-1}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Facendo uso di questa notazione, saremo in grado di caratterizzare il polinomio di migliore approssimazione. Il prossimo risultato è cruciale per quanto segue, ma ne ometteremo la dimostrazione perché eccessivamente tecnica e laboriosa (cfr.[1], pagg.32 – 34).

TEOREMA 1.29. *Sia  $f \in C[a, b]$  e supponiamo che  $p = p_n^*$  sia la migliore approssimazione di  $f$  fra gli elementi di  $\mathbb{P}_n$ . Allora esiste un insieme alternante per  $f - p$  costituito da almeno  $n + 2$  punti.*

OSSERVAZIONE 1.30. Notiamo che il numero  $n + 2$ , in questo caso, è, in realtà,  $1 + \dim \mathbb{P}_n$ . Inoltre, se  $f - p_n^*$  cambia di segno  $n + 2$  volte, allora  $f - p_n^*$  deve possedere almeno  $n + 1$  zeri. Quindi  $p_n^*$  coincide con  $f$  (o interpola  $f$ ) in  $n + 1$  punti.

Siamo finalmente pronti per stabilire l'unicità del polinomio di migliore approssimazione. Non essendo la norma in  $C[a, b]$  strettamente convessa, questo si rivela essere un risultato inaspettato, ma benvenuto.

TEOREMA 1.31 (**Unicità della migliore approssimazione**). *Sia  $f \in C[a, b]$ . Allora il polinomio di migliore approssimazione di  $f$  fra gli elementi di  $\mathbb{P}_n$  è unico.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che  $p, q \in \mathbb{P}_n$  soddisfino entrambi:  $\|f - p\| = \|f - q\| = E_n(f) = E$ . Allora la loro media  $r = (p + q)/2 \in \mathbb{P}_n$  è anch'essa una migliore approssimazione, ossia:  $\|f - r\| = E$  in quanto  $f - r = (f - p)/2 + (f - q)/2$ .

Per il teorema 1.29,  $f - r$  possiede un insieme alternante  $x_0, \dots, x_{n+1}$  costituito da  $n + 2$  punti. Pertanto, per ogni  $i$ :

$$(f - p)(x_i) + (f - q)(x_i) = \pm 2E \quad (\text{alternanti}),$$

mentre, d'altronde, risulta:

$$-E \leq (f - p)(x_i), (f - q)(x_i) \leq E.$$

Ma allora questo significa che:

$$(f - p)(x_i) = (f - q)(x_i) = \pm E \quad (\text{alternanti})$$

per ogni  $i$ . Ossia,  $x_0, \dots, x_{n+1}$  risulta essere un insieme alternante sia per  $f - p$  sia per  $f - q$ . In particolare, il polinomio  $q - p = (f - p) - (f - q)$  possiede  $n + 2$  zeri. Ma poiché  $q - p \in \mathbb{P}_n$ , si deve necessariamente avere  $q = p$ .  $\square$

Finalmente possiamo chiudere il cerchio con il prossimo teorema.

**TEOREMA 1.32 (Teorema di equioscillazione di Chebyshev).** Sia  $f \in C[a, b]$  e sia  $p \in \mathbb{P}_n$ . Se  $f - p$  ha un insieme alternante contenente un numero pari (o superiore) a  $n + 2$  punti, allora  $p$  è la migliore approssimazione di  $f$  fra gli elementi di  $\mathbb{P}_n$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $x_0, \dots, x_{n+1}$  un insieme alternante per  $f - p$ , e supponiamo che un certo  $q \in \mathbb{P}_n$  sia una migliore approssimazione di  $f$  rispetto a  $p$ , cioè che si abbia:  $\|f - q\| < \|f - p\|$ . In particolare, allora, si dovrebbe avere quanto segue:

$$|f(x_i) - p(x_i)| = \|f - p\| > \|f - q\| \geq |f(x_i) - q(x_i)|,$$

per ogni  $i = 0, \dots, n + 1$ . Ma la disuguaglianza  $|a| > |b|$  implica che  $a$  e  $a - b$  abbiano lo stesso segno, perciò  $q - p = (f - p) - (f - q)$  cambia di segno  $n + 2$  volte, perché così fa  $f - p$ . Ma allora  $q - p$  avrebbe almeno  $n + 1$  zeri e, siccome  $q - p \in \mathbb{P}_n$ , si dovrebbe quindi avere  $q = p$ , che è una contraddizione. Dunque  $p$  è la migliore approssimazione di  $f$  fra gli elementi di  $\mathbb{P}_n$ .  $\square$

**OSSERVAZIONE 1.33.** Dovendo un insieme alternante per  $f - p_n^*$  essere formato da almeno  $n + 2$  punti, potrebbe anche avere più di  $n + 2$  punti; quindi gli insiemi alternanti non necessariamente sono unici. Per esempio (vedi [8]), se consideriamo la funzione  $f(x) = \sin 4x$  su  $[-\pi, \pi]$ , poiché vi sono 8 punti in cui la  $f$  passa alternativamente fra i valori  $\pm 1$ , ne segue che  $p_0^* = 0$  e che vi sono  $4 \times 4 = 16$  diversi insiemi alternanti costituiti esattamente da 2 punti, per non citare tutti quelli costituiti da più di 2 punti.

**TEOREMA 1.34 (De la Vallée-Poussin).** Sia  $f \in C[a, b]$  e sia  $q \in \mathbb{P}_n$ . Supponiamo che esistano  $n + 2$  punti  $a \leq x_0 < \dots < x_{n+1} \leq b$  nei quali  $f(x_i) - q(x_i)$  abbia segno alterno. Allora vale che:

$$E_n(f) \geq \min_{i=0, \dots, n+1} |f(x_i) - q(x_i)|.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Se la disuguaglianza fosse falsa, allora la migliore approssimazione  $p = p_n^*$  soddisferebbe:

$$\max_{0 \leq i \leq n+1} |f(x_i) - p(x_i)| \leq E_n(f) < \min_{0 \leq i \leq n+1} |f(x_i) - q(x_i)|.$$

Ora si può ripetere essenzialmente lo stesso argomento utilizzato nella dimostrazione del teorema 1.32 per giungere ad un assurdo.  $\square$

Questi teoremi caratterizzano  $p_n^*$ , ma non indicano come costruirlo. Anche per funzioni relativamente semplici, il problema di calcolare effettivamente il polinomio di miglior approssimazione è veramente complicato da risolvere, perfino a livello numerico-computazionale. Infatti, in generale, non sono molte le funzioni per le quali tale polinomio può essere calcolato in forma simbolica. Esistono piuttosto diversi algoritmi iterativi che, a partire da un polinomio che interpola  $f$  su  $n + 2$  punti  $x_0, \dots, x_{n+1}$  costruiscono una successione di polinomi che converge a  $p_n^*$ , fra questi, ad esempio, uno dei più noti è l'*algoritmo di Remez*.

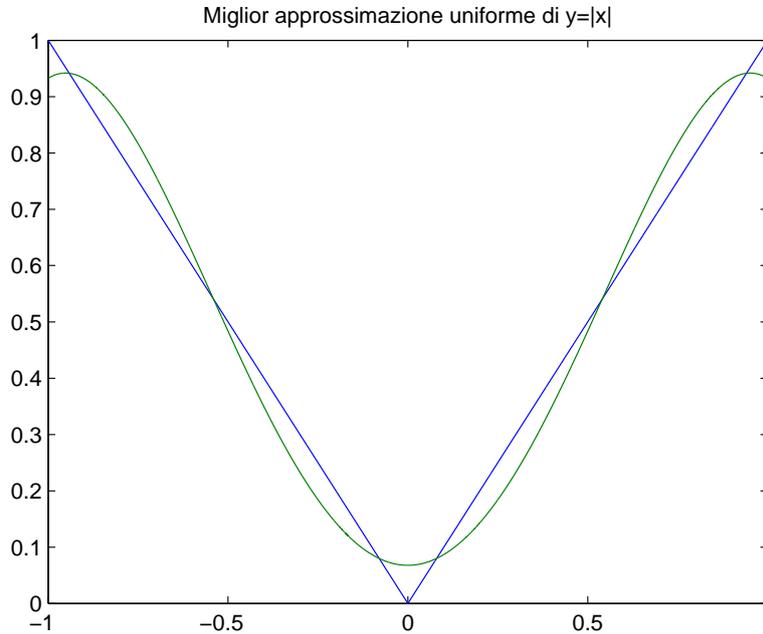


FIGURA 1.3. Grafico del polinomio di minimax o di miglior approssimazione uniforme (curva in verde) della funzione  $y = |x|$  (curva in blu) nell'intervallo  $[-1, 1]$ .

**4.1. Il problema di Chebyshev.** Discutiamo, brevemente, ora di uno di tali problemi, piuttosto importante, che Chebyshev fu capace di risolvere.

Il problema si può formulare in questo modo: trovare il polinomio  $p_{n-1}^* \in \mathbb{P}_{n-1}$  di grado al più  $n-1$  che meglio approssima la funzione  $f(x) = x^n$  sull'intervallo  $[-1, 1]$ . Poiché cercando  $p_{n-1}^*$  si vuole rendere minima la quantità  $\max_{|x| \leq 1} |x^n - p_{n-1}^*(x)|$ , questo è equivalente a cercare di trovare il polinomio monico di grado  $n$  che si allontana meno da 0 su  $[-1, 1]$ , oppure, in altre parole, *trovare il polinomio monico di grado  $n$  di minima norma in  $C[-1, 1]$ .*

Preliminarmente, sappiamo che questo problema ammette certamente un'unica soluzione. Prima di tutto, semplifichiamo la notazione scrivendo:

$$p(x) = x^n - p_{n-1}^*(x) \quad (\text{la soluzione})$$

e:

$$M = \|p\| = E_{n-1}(x^n; [-1, 1]).$$

Tutto ciò che conosciamo riguardo a  $p$  è che possiede un insieme alternante  $-1 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq 1$  contenente  $(n-1)+2 = n+1$  punti, il che significa che  $|p(x_i)| = M$  e  $p(x_{i+1}) = -p(x_i)$  per ogni  $i$ . Usando queste poche informazioni, Chebyshev fu in grado di confrontare i polinomi  $p^2$  e  $p'$ . Vediamo come.

**1.** Per ogni  $x_i \in (-1, 1)$ , si deve avere  $p'(x_i) = 0$ , essendo  $x_i$  un estremante relativo per  $p$ . Ma  $p'$  è un polinomio di grado  $n - 1$  e quindi può avere al massimo  $n - 1$  zeri. Quindi, preso  $x_i \in (-1, 1)$ , vale  $p'(x_i) = 0$ , per ogni  $i = 1, \dots, n - 1$ , in quanto  $x_1, \dots, x_{n-1}$  sono tutti gli zeri di  $p'$  e inoltre  $x_0 = -1, p'(x_0) \neq 0, x_n = 1, p'(x_n) \neq 0$ .

**2.** Ora consideriamo il polinomio  $M^2 - p^2 \in \mathbb{P}_{2n}$ . Sappiamo che  $M^2 - p^2(x_i) = 0$  per  $i = 0, \dots, n$  e che  $M^2 - p^2 \geq 0$  su  $[-1, 1]$ . Quindi  $x_1, \dots, x_{n-1}$  devono essere perlomeno radici doppie di  $M^2 - p^2$ . Ma questo vale già per  $2(n - 1) + 2 = 2n$  radici, dunque deve valere per tutte. Ne segue che  $x_1, \dots, x_{n-1}$  sono radici doppie, mentre  $x_0$  e  $x_n$  sono radici semplici, e queste sono tutte le radici di  $M^2 - p^2$ .

**3.** Successivamente consideriamo  $(p')^2 \in \mathbb{P}_{2(n-1)}$ . Sappiamo che  $(p')^2$  ha una radice doppia in ogni  $x_i, i = 1, \dots, n - 1$ , e nessun'altra radice, quindi  $(1 - x^2)(p'(x))^2$  ha  $x_1, \dots, x_{n-1}$  come radici doppie, mentre  $x_0$  e  $x_n$  come radici semplici. Essendo  $(1 - x^2)(p'(x))^2 \in \mathbb{P}_{2n}$ , abbiamo trovato tutte le sue radici.

**4.** Vediamo a cosa ci è servito calcolare tutte queste radici. Il punto essenziale sta nel riconoscere che, essendo  $M^2 - p^2(x)$  e  $(1 - x^2)(p'(x))^2$  polinomi dello stesso grado con le stesse radici, essi sono, a meno di una costante, il medesimo polinomio. È semplice trovare tale costante: il coefficiente direttore di  $p$  è 1, mentre quello di  $p'$  è  $n$ , da cui:

$$M^2 - p^2(x) = \frac{(1 - x^2)(p'(x))^2}{n^2}.$$

Dopo aver riordinato, si ottiene questa relazione:

$$\frac{p'(x)}{\sqrt{M^2 - p^2(x)}} = \frac{n}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

In realtà avremmo dovuto aggiungere un  $\pm$ , ma sappiamo che  $p'$  è positivo su un certo intervallo; semplicemente assumeremo che sia positivo su  $[-1, x_1]$ . Ora, dopo aver integrato, si ottiene:

$$\arccos\left(\frac{p(x)}{M}\right) = n \arccos x + C,$$

ossia:

$$p(x) = M \cos(n \arccos x + C).$$

Ma  $p(-1) = -M$  (essendo  $p'(-1) \geq 0$ ), quindi:

$$\cos(n\pi + C) = -1 \Rightarrow C = m\pi \quad (\text{con } n + m \text{ dispari})$$

e quindi, in definitiva:

$$(1) \quad p(x) = \pm M \cos(n \arccos x).$$

DEFINIZIONE 1.35 (*Polinomi di Chebyshev di prima specie*). I polinomi algebrici  $T_n(x)$  verificanti la relazione  $T_n(\cos x) = \cos(nx)$ , per  $n = 0, 1, 2, \dots$  sono chiamati *polinomi di Chebyshev di prima specie*.

Questa formula definisce in maniera univoca  $T_n$  come un polinomio di grado esattamente  $n$  con coefficiente direttore  $2^{n-1}$ , e dunque determina univocamente i valori di  $T_n(x)$  anche per  $|x| > 1$ . Scopriremo molte proprietà interessanti di questi polinomi in seguito nella trattazione, per ora ci è utile sapere che, dalla formula ricorsiva  $\cos(nx) = 2 \cos x \cos(n-1)x - \cos(n-2)x$ , si ottiene la relazione:

$$T_n(x) = 2x \cdot T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad n \geq 2.$$

Osserviamo che  $T_0(x) = 1$  e  $T_1(x) = x$ . Questa relazione ricorsiva, insieme alle condizioni iniziali su  $T_0$  e  $T_1$ , può venire considerata una definizione dei polinomi di Chebyshev di prima specie.

Sapendo ciò la relazione (1) appare familiare, in quanto essendo  $\cos(n \arccos x)$  un polinomio di grado  $n$  con coefficiente direttore pari a  $2^{n-1}$ , cioè l' $n$ -esimo polinomio di Chebyshev  $T_n$ , la soluzione del nostro problema è:

$$p(x) = 2^{-n+1}T_n(x).$$

Poiché  $|T_n(x)| \leq 1$ , per  $|x| \leq 1$ , la norma minima sarà  $M = 2^{-n+1}$ .

Diamo, infine, una soluzione alternativa al problema, basata sulla caratterizzazione delle migliori approssimazioni (teorema 1.32) e alcune semplici proprietà dei polinomi di Chebyshev.

TEOREMA 1.36. *Per ogni  $n \geq 1$ , la formula  $p(x) = x^n - 2^{-n+1}T_n(x)$  definisce un polinomio  $p \in \mathbb{P}_{n-1}$  per cui vale:*

$$2^{-n+1} = \max_{|x| \leq 1} |x^n - p(x)| < \max_{|x| \leq 1} |x^n - q(x)|$$

per ogni altro  $q \in \mathbb{P}_{n-1}$ .

DIMOSTRAZIONE. Sappiamo che  $2^{-n+1}T_n(x)$  ha coefficiente direttore 1, e così sarà anche per  $p \in \mathbb{P}_{n-1}$ . Ora poniamo:  $x_k = \cos((n-k)\pi/n)$ , per  $k = 0, \dots, n$ . Allora risulterà:  $-1 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$  e:

$$T_n(x_k) = T_n(\cos((n-k)\pi/n)) = \cos((n-k)\pi) = (-1)^{n-k}.$$

Poiché  $|T_n(x)| = |T_n(\cos \theta)| = |\cos(n\theta)| \leq 1$ , per  $|x| \leq 1$ , abbiamo trovato un insieme alternante per  $T_n$  costituito da  $n+1$  punti. Equivalentemente:  $x^n - p(x) = 2^{-n+1}T_n(x)$  soddisfa la relazione  $|x^n - p(x)| \leq 2^{-n+1}$  e, per ogni  $k = 0, \dots, n$ , si ha:

$$x_k^n - p(x_k) = 2^{-n+1}T_n(x_k) = (-1)^{n-k}2^{-n+1}.$$

Per la caratterizzazione della migliore approssimazione espressa dal teorema 1.32,  $p$  deve essere la migliore approssimazione di  $x^n$  fra gli elementi di  $\mathbb{P}_{n-1}$ .  $\square$

COROLLARIO 1.37. *Il polinomio monico di grado esattamente  $n$  avente minima norma nello spazio  $C[a, b]$  è:*

$$\frac{(b-a)^n}{2^n \cdot 2^{n-1}} \cdot T_n \left( \frac{2x - b - a}{b - a} \right).$$

### 5. Polinomi di Chebyshev e loro proprietà

Come abbiamo già anticipato, il polinomio di Chebyshev di prima specie  $T_n(x)$  è l'unico polinomio reale di grado  $n$ , avente coefficiente direttore 1 se  $n = 0$ , e  $2^{n-1}$  se  $n \geq 1$ , tale che  $T_n(\cos \theta) = \cos n\theta$ , per ogni  $\theta$  e per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . I polinomi di Chebyshev godono di svariate proprietà, vedremo di elencarne alcune tra le più importanti anche in vista di applicazioni in teoria dell'approssimazione.

1. Vale la relazione ricorsiva a tre termini:

$$T_n(x) = 2x \cdot T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \text{ per } n \geq 2.$$

DIMOSTRAZIONE. Segue dall'identità trigonometrica  $\cos n\theta = 2 \cos \theta \cos (n-1)\theta - \cos (n-2)\theta$  che  $T_n(\cos \theta) = 2 \cos \theta T_{n-1}(\cos \theta) - T_{n-2}(\cos \theta)$  per ogni  $\theta$ ; ossia l'equazione  $T_n(x) = 2x \cdot T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$  vale per ogni  $x \in [-1, 1]$ . Ma poiché entrambi i membri sono polinomiali, l'identità deve valere per ogni  $x$ .  $\square$

2. Poiché  $T_0(x) = 1$  e  $T_1(x) = x$ , si vede per induzione che, per ogni  $n$ ,  $T_n(x) \in \mathbb{P}_n$  ed inoltre il coefficiente principale di  $T_n(x)$  è  $k_n = 2^{n-1}$ . Infatti  $T_2(x) = 2x^2 - 1 = 2^{2-1}x^2 - 1$ ,  $T_3(x) = 4x^3 - 3x = 2^{3-1}x^3 - 3x$  e per induzione sul grado  $n$  si ottiene proprio  $k_n = 2^{n-1}$ .

3. Gli zeri di  $T_n$  sono

$$x_k^{(n)} = \cos \left( \frac{2k-1}{2n} \pi \right), \quad k = 1, \dots, n.$$

Essi sono reali, semplici e giacciono nell'intervallo aperto  $(-1, 1)$ .

DIMOSTRAZIONE. Poiché il coseno si annulla nei punti  $z_k = (2k-1)\frac{\pi}{2}$  con  $k \in \mathbb{Z}$ , la funzione  $\cos(n \arccos x)$  si annullerà nei punti  $x_k$  tali che:  $n \arccos x_k = z_k$ . Quindi, restringendoci ai valori dell'arccoseno in  $[0, \pi]$ :

$$\arccos x_k = \frac{(2k-1)}{n} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k = 1, \dots, n$$

da cui:

$$x_k^{(n)} = \cos \left( \frac{2k-1}{2n} \pi \right), \quad k = 1, \dots, n.$$

$\square$

4. Tra due zeri consecutivi di  $T_n$  vi è precisamente una sola radice di  $T_{n-1}$ .

DIMOSTRAZIONE. Deriva dalla disuguaglianza:

$$\frac{2k-1}{2n} < \frac{2k-1}{2(n-1)} < \frac{2k+1}{2n}, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

che significa  $x_k^{(n)} > x_k^{(n-1)} > x_{k+1}^{(n)}$ .  $\square$

5.  $T_n$  e  $T_{n-1}$  non hanno zeri in comune.

DIMOSTRAZIONE. Sebbene sia una diretta conseguenza della proprietà 4., esiste un altro modo per vederlo:  $T_n(x_0) = 0 = T_{n-1}(x_0)$  implica che anche  $T_{n-2}(x_0) = 0$  per la proprietà 1.; iterando questa osservazione, si dovrebbe avere  $T_k(x_0) = 0$  per ogni  $k < n$ , incluso  $k = 0$ . Questo è assurdo, in quanto  $T_0(x) = 1$  non ammette zeri.  $\square$

6. L'insieme  $\{x_k^{(n)} : 1 \leq k \leq n, n = 1, 2, \dots\}$  è denso nell'intervallo  $[-1, 1]$ .

DIMOSTRAZIONE. Essendo  $\cos x$  una funzione strettamente monotona su  $[0, \pi]$ , è sufficiente far vedere che l'insieme  $\{\frac{2k-1}{2n}\pi\}_{k,n}$  è denso in  $[0, \pi]$ , e per fare questo basta mostrare che l'insieme  $\{\frac{2k-1}{2n}\}_{k,n}$  è denso in  $[0, 1]$ . Ora, però:

$$\frac{2k-1}{2n} = \frac{k}{n} - \frac{1}{2n} \approx \frac{k}{n}$$

per  $n$  grande; ossia l'insieme  $\{\frac{2k-1}{2n}\}_{k,n}$  è denso tra i razionali in  $[0, 1]$ .  $\square$

È interessante notare che la distribuzione delle radici  $\{x_k^{(n)}\}_{k,n}$  può essere stimata (vedi [9], I volume, pagg.48 – 51). Infatti, per  $n$  grande, il numero delle radici di  $T_n$  che giacciono in un intervallo  $[x, x + \Delta x] \subset [-1, 1]$  è circa:

$$\frac{n\Delta x}{\pi\sqrt{1-x^2}}.$$

In particolare, per  $n$  grande, le radici di  $T_n$  si addensano maggiormente vicino ai punti di frontiera  $\pm 1$ .

In termini di probabilità, questo significa che se assegniamo identica probabilità a ciascuna delle radici  $x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$  (ossia se pensiamo ad ogni radice come alla posizione di un punto con massa  $1/n$ ), allora la densità di questa distribuzione di probabilità (o, equivalentemente, la densità del sistema di punti) in un punto  $x$  è all'incirca  $1/\pi\sqrt{1-x^2}$  per  $n$  grande. In altre parole, tutto questo ci dice che la probabilità che una radice di  $T_n$  giaccia nell'intervallo  $[a, b]$  è approssimativamente:

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

**7.** I polinomi di Chebyshev sono mutuamente *ortogonali* su  $[-1, 1]$  relativamente alla funzione peso  $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

DIMOSTRAZIONE. Per  $m \neq n$ , il cambiamento di variabile  $x = \cos \theta$  porta a:

$$\int_{-1}^1 T_m(x) T_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^\pi \cos m\theta \cos n\theta d\theta = 0,$$

mentre per  $m = n$  si ottiene:

$$\int_{-1}^1 T_n^2(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^\pi \cos^2 n\theta d\theta = \begin{cases} \pi & \text{se } n = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } n > 0 \end{cases}.$$

□

**8.**  $|T'_n(x)| \leq n^2$  per  $-1 < x < 1$ , e  $|T'_n(\pm 1)| = n^2$ .

DIMOSTRAZIONE. Per  $-1 < x < 1$  si ha:

$$\frac{d}{dx} T_n(x) = \frac{\frac{d}{d\theta} T_n(\cos \theta)}{\frac{d}{d\theta} \cos \theta} = \frac{n \sin n\theta}{\sin \theta}.$$

Pertanto  $|T'_n(x)| \leq n^2$  poiché  $|\sin n\theta| \leq n |\sin \theta|$  (cosa che si può facilmente verificare per induzione). Nei punti  $x = \pm 1$  interpretiamo questa formula di derivazione come limite (per  $\theta \rightarrow 0$  e  $\theta \rightarrow \pi$ ) e dunque risulta che  $|T'_n(\pm 1)| = n^2$ . □

**9.** Infine,  $T_n(x)$  risulta avere il maggior 'tasso di crescita' al di fuori dell'intervallo  $[-1, 1]$  fra tutti i polinomi di grado  $n$ . È ciò che afferma il seguente teorema.

**TEOREMA 1.38.** *Sia  $p \in \mathbb{P}_n$  e sia  $\|p\| = \max_{-1 \leq x \leq 1} |p(x)|$ . Allora, per ogni  $x_0$  tale che sia  $|x_0| \geq 1$  e per ogni  $k = 0, \dots, n$  si ha:*

$$|p^{(k)}(x_0)| \leq \|p\| |T_n^{(k)}(x_0)|,$$

dove  $p^{(k)}$  denota la derivata  $k$ -esima di  $p$ .

DIMOSTRAZIONE. Ci limitiamo a dimostrare solo il caso  $k = 0$ , ossia proveremo che:  $|p(x_0)| \leq \|p\| |T_n(x_0)|$ . Il caso più generale fa uso di una dimostrazione simile (vedi [8], Teorema 1.10, pag.31).

Poiché tutti gli zeri di  $T_n$  cadono in  $(-1, 1)$ , sappiamo che  $T_n(x_0) \neq 0$ . Quindi possiamo considerare il polinomio:

$$q(x) = \frac{p(x_0)}{T_n(x_0)} T_n(x) - p(x) \in \mathbb{P}_n.$$

Se la tesi fosse falsa, allora si avrebbe:

$$\|p\| < \left| \frac{p(x_0)}{T_n(x_0)} \right|.$$

Ora: in ognuno dei punti  $y_k = \cos(k\pi/n)$ ,  $k = 0, \dots, n$ , si ha  $T_n(y_k) = (-1)^k$  e di conseguenza:

$$q(y_k) = (-1)^k \frac{p(x_0)}{T_n(x_0)} - p(y_k).$$

Avendosi però  $|p(y_k)| \leq \|p\|$ , ne segue che  $q$  cambia di segno in questi  $n + 1$  punti. In particolare,  $q$  deve avere almeno  $n$  zeri in  $(-1, 1)$ . Ma  $q(x_0) = 0$ , per costruzione, e  $|x_0| \geq 1$ , il ché vuol dire che abbiamo trovato  $n + 1$  zeri per un polinomio di grado  $n$ . Pertanto  $q \equiv 0$ , ossia:

$$p(x) = \frac{p(x_0)}{T_n(x_0)} T_n(x).$$

Ma allora:

$$|p(1)| = \left| \frac{p(x_0)}{T_n(x_0)} \right| > \|p\|,$$

avendosi  $T_n(1) = T_n(\cos 0) = 1$ , che è una contraddizione.  $\square$

**5.1. I polinomi di Chebyshev nelle applicazioni.** Come abbiamo visto, i polinomi di Chebyshev possono essere generati tramite una relazione di ricorrenza. Invertendo il procedimento, potremmo esprimere  $x^n$  in termini di  $T_0, \dots, T_n$ . Qui di seguito sono tabulati i primi termini in ognuna di queste relazioni:

$$\begin{array}{ll} T_0(x) = 1 & 1 = T_0(x) \\ T_1(x) = x & x = T_1(x) \\ T_2(x) = 2x^2 - 1 & x^2 = (T_0(x) + T_2(x))/2 \\ T_3(x) = 4x^3 - 3x & x^3 = (3T_1(x) + T_3(x))/4 \\ T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 & x^4 = (3T_0(x) + 4T_2(x) + T_4(x))/8 \\ T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x & x^5 = (10T_1(x) + 5T_3(x) + T_5(x))/16 \end{array}$$

Notiamo la separazione tra termini pari e dispari in ciascun caso. Se si scrivono i polinomi, piuttosto che in forma ordinaria, nella loro forma equivalente di Chebyshev, in analisi numerica si hanno certi vantaggi. Vediamo quali e perché. Ad esempio si ha, dopo aver svolto qualche semplificazione:

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 = \frac{15}{8}T_0(x) - \frac{7}{4}T_1(x) + T_2(x) - \frac{1}{4}T_3(x) + \frac{1}{8}T_4(x).$$

Se guardiamo bene, notiamo che possiamo ottenere un'approssimazione cubica di  $1 - x + x^2 - x^3 + x^4$  su  $[-1, 1]$  con un errore al più di  $1/8$  semplicemente trascurando il termine  $T_4$ , in quanto  $|T_4(x)| \leq 1$ , mentre utilizzando semplicemente  $1 - x + x^2 - x^3$  come approssimazione cubica potremmo compiere un errore pari ad 1. Questo espediente di troncatura la forma polinomiale equivalente di Chebyshev è detto *economizzazione*.

Come ulteriore esempio, consideriamo il *polinomio di Taylor*

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^\xi,$$

dove  $-1 \leq x, \xi \leq 1$ . Prendendo  $n = 6$ , la serie troncata comporta un errore non più grande di  $e/7! \approx 0.0005$ . Ma se 'economizziamo' i primi sei termini, allora si ottiene:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^6 \frac{x^k}{k!} &= 1.26606T_0(x) + 1.13021T_1(x) + 0.27148T_2(x) + 0.04427T_3(x) \\ &\quad + 0.00547T_4(x) + 0.00052T_5(x) + 0.00004T_6(x). \end{aligned}$$

L'approssimazione iniziale possiede già un errore di circa 0.0005, perciò possiamo certamente trascurare il termine  $T_6$  senza alcun errore aggiuntivo. Anche trascurando il termine  $T_5$  si produce un errore pari a non più di 0.001 (o qualcosa di molto vicino ad esso). L'approssimazione risultante ha un errore molto inferiore rispetto a quello della corrispondente serie di Taylor troncata di grado 4, il quale è pari a  $e/5! \approx 0.023$ .

L'approccio utilizzato in questo esempio, tuttavia, ha il deciso svantaggio che dobbiamo prima stabilire dove troncare la serie di Taylor, la quale potrebbe convergere molto lentamente. Un approccio migliore sarebbe quello di sviluppare  $e^x$  in serie di polinomi di Chebyshev, coinvolgendoli direttamente nello sviluppo, e non soltanto a posteriori nell'approssimazione. Quindi, se possibile, vorremmo prima scrivere  $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k(x)$ . Se gli  $a_k$  fossero assolutamente sommabili, sarebbe molto facile stimare qualsiasi errore di troncamento. Vedremo di sviluppare qualche idea riguardo al modo di procedere lungo questa strada quando parleremo di approssimazione ai minimi quadrati. Una tale serie è semplice da trovare (è molto simile ad una serie di Fourier) e le sue somme parziali sono approssimazioni uniformi piuttosto buone. Infatti, se  $f$  è continua e se  $n < 400$ , dimostreremo successivamente che, facendo uso del polinomio di miglior approssimazione di grado  $n$  in luogo della ridotta  $n$ -esima di questa serie di Chebyshev, la nostra approssimazione migliora la sua accuratezza di un'ulteriore cifra decimale.

## 6. Polinomi trigonometrici e approssimazione uniforme

**6.1. Classi di funzioni approssimanti.** Certe caratteristiche della funzione da approssimare possono suggerire l'opportunità di considerare altre classi di funzioni approssimanti diverse dai polinomi algebrici. Per esempio se sappiamo che  $f(x)$  si annulla per  $x \rightarrow \infty$  allora i *polinomi esponenziali*  $e_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k e^{-kx}$  sono maggiormente adatti ad una sua approssimazione anche su un intervallo illimitato.

Se poi la funzione  $f(x)$  o una sua derivata presentano qualche discontinuità in un punto, allora i *polinomi a tratti* possono fornire dei risultati migliori. Per esempio la funzione  $f(x) = |\sin x|$  in  $[-1, 1]$  è approssimabile meglio con due tratti rettilinei a sinistra ed a destra di  $x = 0$  che non con una parabola su tutto l'intervallo.

Altre classi di funzioni approssimanti che si possono prendere in considerazione sono le *funzioni spline* e i *polinomi razionali* del tipo:

$$r_{n,m}(x) = \frac{p_n(x)}{p_m(x)} = \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0}$$

dove  $p_n(x)$  e  $p_m(x)$  sono polinomi algebrici di grado  $n$  ed  $m$  rispettivamente.

Se, infine, la funzione è periodica di periodo  $2\pi$  è naturale approssimarla con *polinomi trigonometrici* del tipo:

$$T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Le proprietà di periodicità e di ortogonalità rendono le funzioni  $\cos kx$  e  $\sin kx$  la classe ideale per approssimare funzioni periodiche; inoltre esse godono della caratteristica, importante nelle applicazioni, che le loro derivate e primitive sono ancora funzioni della stessa classe.

**6.2. Polinomi trigonometrici.** Focalizziamoci, ora, sui polinomi trigonometrici e sul loro legame con la teoria dell'approssimazione.

DEFINIZIONE 1.39 (*Polinomio trigonometrico*). Un *polinomio trigonometrico* (reale) è una funzione della forma:

$$(2) \quad T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

dove  $a_0, \dots, a_n$  e  $b_1, \dots, b_n$  sono numeri reali.

Compiendo un abuso di linguaggio, in quanto il termine che useremo è solitamente riservato ai polinomi algebrici, parleremo di *grado di un polinomio trigonometrico* in questo senso: diremo che il polinomio trigonometrico (2) ha grado  $n$  a condizione che uno fra  $a_n$  e  $b_n$  sia non nullo, ossia  $n$  denota l'indice massimo della sommatoria.

Indicheremo, poi, con  $\mathcal{T}_n$  l'insieme dei polinomi trigonometrici di grado al più  $n$ , e con  $\mathcal{T} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_n$ .

È conveniente considerare lo spazio delle funzioni continue  $2\pi$ -periodiche su  $\mathbb{R}$  come lo spazio contenente al suo interno  $\mathcal{T}_n$ ; tale spazio può venire indicato con  $C^{2\pi}$ . Lo spazio  $C^{2\pi}$  ha diverse descrizioni equivalenti, per esempio è chiaro che  $C^{2\pi}$  sia un sottospazio di  $C(\mathbb{R})$ , ossia lo spazio delle funzioni continue su  $\mathbb{R}$ . Ma potremmo anche considerare  $C^{2\pi}$  come un sottospazio di  $C[0, 2\pi]$  nel modo

seguinte: le funzioni continue  $2\pi$ -periodiche su  $\mathbb{R}$  possono essere identificate con l'insieme delle funzioni  $f \in C[0, 2\pi]$  verificanti le condizioni:  $f(0) = f(2\pi)$ . Ciascuna di queste  $f$  si estende ad un elemento  $2\pi$ -periodico di  $C(\mathbb{R})$  in maniera naturale, e non è troppo faticoso vedere che la condizione  $f(0) = f(2\pi)$  definisce un sottospazio chiuso di  $C[0, 2\pi]$ . Come terza rappresentazione, si rivela spesso molto utile identificare  $C^{2\pi}$  con l'insieme  $C(\mathbb{T})$  delle funzioni continue sul cerchio unitario  $\mathbb{T} = \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  nel piano complesso, in questo modo:

$$f \in C^{2\pi} \longleftrightarrow g \in C(\mathbb{T}), \text{ dove } g(e^{it}) = f(t).$$

Ad ogni modo, ogni  $f \in C^{2\pi}$  è uniformemente continua e uniformemente limitata su tutto  $\mathbb{R}$ , e viene completamente determinata mediante i valori da essa assunti su ogni intervallo di lunghezza  $2\pi$ . In particolare  $C^{2\pi}$  è solitamente equipaggiato con la norma del max (o uniforme, o lagrangiana):

$$\|f\| = \max_{0 \leq x \leq 2\pi} |f(x)| = \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$

Il nostro obiettivo è quello di provare quello che viene spesso chiamato *secondo teorema di Weierstrass*, anch'esso risalente al 1885 come il primo.

**TEOREMA 1.40 (Secondo teorema di approssimazione di Weierstrass, 1885).** *Sia  $f \in C^{2\pi}$ . Allora, per ogni  $\epsilon > 0$ , esiste un polinomio trigonometrico  $T$  tale che:  $\|f - T\| < \epsilon$ .*

In tutta questa trattazione ricaveremo diverse dimostrazioni differenti di questo teorema. Weierstrass diede una dimostrazione separata di questo risultato nello stesso scritto contenente il suo teorema di approssimazione tramite polinomi algebrici, ma successivamente fu messo in luce da Lebesgue (cfr.[11]) come i due teoremi siano, in realtà, equivalenti.

Iniziamo con il giustificare l'uso della parola 'polinomio' nell'espressione 'polinomio trigonometrico'.

**LEMMA 1.41.** *Le funzioni  $\cos nx$  e  $\frac{\sin(n+1)x}{\sin x}$  possono essere scritte come polinomi di grado esattamente  $n$  in  $\cos x$ , per ogni intero  $n \geq 0$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Usando la formula ricorsiva:

$$\cos kx + \cos(k-2)x = 2 \cos(k-1)x \cos x$$

non è difficile osservare che:  $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ ,  $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$  e  $\cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$ . Più in generale, per induzione,  $\cos nx$  è un polinomio di grado  $n$  in  $\cos x$  avente coefficiente direttore pari a  $2^{n-1}$ . Adoperando questo fatto e l'identità:

$$\sin(k+1)x - \sin(k-1)x = 2 \cos kx \sin x$$

insieme ad un altro semplice ragionamento induttivo, ne segue che  $\sin(n+1)x$  può essere scritto come  $\sin x$  moltiplicato per un polinomio di grado  $n$  in  $\cos x$  con coefficiente direttore  $2^n$ .  $\square$

È da questo risultato che si comprende la genesi dei *polinomi di Chebyshev di prima e di seconda specie*, sui quali ci soffermeremo meglio nel capitolo sui polinomi ortogonali, ma che in parte abbiamo già incontrato.

**COROLLARIO 1.42.** *Ogni polinomio trigonometrico reale (2) può esprimersi come  $P(\cos x) + Q(\cos x) \sin x$ , dove  $P$  e  $Q$  sono polinomi algebrici di grado al più  $n$  e  $n-1$ , rispettivamente. Se la somma (2) rappresenta una funzione pari, allora può essere scritta usando soltanto i coseni.*

**COROLLARIO 1.43.** *L'insieme  $\mathcal{T}$  costituito da tutti i polinomi trigonometrici è sia un sottospazio sia un sottoanello di  $C^{2\pi}$  (ossia,  $\mathcal{T}$  è chiuso sia per le combinazioni lineari che per i prodotti). In altre parole,  $\mathcal{T}$  è una sottoalgebra di  $C^{2\pi}$ .*

Non è complicato vedere che la procedura descritta sopra può venire invertita, cioè che ogni polinomio algebrico in  $\cos x$  e  $\sin x$  si può scrivere nella forma (2). Ad esempio:  $4 \cos^3 x = 3 \cos x + \cos 3x$ . Per vedere come ciò viene fatto, questa volta adoperiamo un pizzico di algebra lineare.

Innanzitutto, le  $2n+1$  funzioni:

$$\mathcal{A} = \{1, \cos x, \dots, \cos nx, \sin x, \dots, \sin nx\}$$

sono linearmente indipendenti e la maniera più semplice per vederlo è osservare che possiamo definire un *prodotto interno o prodotto scalare* su  $C^{2\pi}$  attraverso il quale queste funzioni risultano *ortogonali*. Nello specifico:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx = 0, \quad \langle f, f \rangle = \int_0^{2\pi} f^2(x) dx \neq 0$$

per ogni coppia di funzioni  $f \neq g \in \mathcal{A}$ . Inoltre, abbiamo già mostrato che ogni elemento di  $\mathcal{A}$  giace nello spazio generato dalle  $2n+1$  funzioni:

$$\mathcal{B} = \{1, \cos x, \dots, \cos^n x, \sin x, \cos x \sin x, \dots, \cos^{n-1} x \sin x\}.$$

Ossia:  $\mathcal{T}_n \equiv \text{span}(\mathcal{A}) \subset \text{span}(\mathcal{B})$ . Ora, confrontando le dimensioni, abbiamo:

$$2n+1 = \dim \mathcal{T}_n = \dim(\text{span}(\mathcal{A})) \leq \dim(\text{span}(\mathcal{B})) \leq 2n+1,$$

e quindi, necessariamente, deve aversi  $\text{span}(\mathcal{A}) = \text{span}(\mathcal{B})$ . Il punto cruciale, qui, è che  $\mathcal{T}_n$  è un sottospazio di dimensione finita di  $C^{2\pi}$  pari a  $2n+1$ , e possiamo usare ognuno di questi insiemi di funzioni  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  come base per  $\mathcal{T}_n$ .

Prima di ritornare alla teoria dell'approssimazione, facciamo il punto della situazione anche per polinomi trigonometrici *complessi*, cioè per il caso in cui ammettiamo coefficienti complessi nell'equazione (2). È chiaro che ogni somma della forma (2), sia che si usino coefficienti reali o complessi, può essere scritta nella forma:

$$(3) \quad \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx},$$

dove i  $c_k$  sono complessi; in altre parole un polinomio trigonometrico è in realtà un polinomio definito su  $\mathbb{C}$  in  $z = e^{ix}$  e  $\bar{z} = e^{-ix}$ :

$$\sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} = \sum_{k=-n}^n c_k z^k = \sum_{k=0}^n c_k z^k + \sum_{k=1}^n c_{-k} \bar{z}^k.$$

Inversamente, ogni somma della forma (3) può essere espressa nella forma (2), usando coefficienti complessi  $a_k$  e  $b_k$ . Pertanto i polinomi trigonometrici complessi di grado al più  $n$  formano uno spazio vettoriale di dimensione  $2n + 1$  su  $\mathbb{C}$ , e quindi di dimensione  $2(2n + 1)$  se considerato come spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ .

Tuttavia non tutti i polinomi in  $z$  e  $\bar{z}$  rappresentano un polinomio trigonometrico reale. Si vede che i polinomi trigonometrici reali sono le *parti reali* dei polinomi trigonometrici complessi.

Ora: poiché abbiamo identificato  $C^{2\pi}$  come un sottospazio di  $C[0, 2\pi]$ , ed essendo  $\mathcal{T}_n$  un sottospazio di dimensione finita di  $C^{2\pi}$ , abbiamo il seguente risultato.

**COROLLARIO 1.44.** *Ogni  $f \in C^{2\pi}$  possiede una migliore approssimazione (su tutto  $\mathbb{R}$ ) fra gli elementi di  $\mathcal{T}_n$ . Inoltre, se  $f$  è una funzione pari, allora ha una migliore approssimazione che è ancora pari.*

**DIMOSTRAZIONE.** Dobbiamo provare soltanto la seconda affermazione, perciò supponiamo che  $f \in C^{2\pi}$  sia pari e che  $T^* \in \mathcal{T}_n$  soddisfi la condizione:

$$\|f - T^*\| = \min_{T \in \mathcal{T}_n} \|f - T\|.$$

Allora, dato che  $f$  è pari,  $\tilde{T}(x) = T^*(-x)$  è pure una migliore approssimazione di  $f$  tra gli elementi di  $\mathcal{T}_n$ ; infatti:

$$\begin{aligned} \|f - \tilde{T}\| &= \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - T^*(-x)| \\ &= \max_{x \in \mathbb{R}} |f(-x) - T^*(x)| \\ &= \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - T^*(x)| = \|f - T^*\|. \end{aligned}$$

Ma ora, il polinomio trigonometrico pari:

$$\hat{T}(x) = \frac{\tilde{T}(x) + T^*(x)}{2} = \frac{T^*(-x) + T^*(x)}{2}$$

risulta anch'esso una migliore approssimazione di  $f$  fra gli elementi di  $\mathcal{T}_n$ , in quanto:

$$\begin{aligned} \|f - \hat{T}\| &= \left\| \frac{(f - \tilde{T}) + (f - T^*)}{2} \right\| \\ &\leq \frac{\|f - \tilde{T}\| + \|f - T^*\|}{2} \\ &= \min_{T \in \mathcal{T}_n} \|f - T\|. \end{aligned}$$

□

**6.3. Il secondo teorema di Weierstrass.** Ora dimostriamo il secondo teorema di Weierstrass seguendo la dimostrazione di Lebesgue (nella versione di de La Vallée-Poussin); in particolare dedurremo il secondo teorema dal primo.

**TEOREMA 1.45.** *Sia  $f \in C^{2\pi}$  e sia  $\epsilon > 0$ . Allora esiste un polinomio trigonometrico  $T$  tale che:*

$$\|f - T\| = \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - T(x)| < \epsilon.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Faremo vedere che il primo teorema di Weierstrass per  $C[-1, 1]$  implica la validità del secondo teorema per  $C^{2\pi}$ .

*Primo passo.* Se  $f \in C^{2\pi}$  è pari, allora  $f$  può essere approssimata uniformemente da polinomi trigonometrici pari.

Infatti: se  $f$  è pari, allora è sufficiente approssimare  $f$  sull'intervallo  $[0, \pi]$ . In questo caso, possiamo considerare la funzione  $g(y) = f(\arccos y)$ , con  $-1 \leq y \leq 1$ , in  $C[-1, 1]$ . Per il primo teorema di Weierstrass, esiste un polinomio algebrico  $p(y)$  tale che:

$$\max_{-1 \leq y \leq 1} |f(\arccos y) - p(y)| = \max_{0 \leq x \leq \pi} |f(x) - p(\cos x)| < \epsilon.$$

Ma  $T(x) = p(\cos x)$  è un polinomio trigonometrico pari, quindi:

$$\|f - T\| = \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - T(x)| < \epsilon.$$

Abbreviamo, per comodità, la scrittura  $\|f - T\| < \epsilon$  con  $f \approx T + \epsilon$ .

*Secondo passo.* Data  $f \in C^{2\pi}$ , esiste un polinomio trigonometrico  $T$  tale che  $2f(x) \sin^2 x \approx T(x) + 2\epsilon$ .

Infatti: ciascuna delle due funzioni  $f(x) + f(-x)$  e  $[f(x) - f(-x)] \sin x$  è pari. Perciò si possono scegliere polinomi trigonometrici pari  $T_1$  e  $T_2$  tali che:

$$f(x) + f(-x) \approx T_1(x) \quad \text{e} \quad [f(x) - f(-x)] \sin x \approx T_2(x).$$

Moltiplicando la prima espressione per  $\sin^2 x$  e la seconda per  $\sin x$ , e sommando, si trova:

$$2f(x) \sin^2 x \approx T_1(x) \sin^2 x + T_2(x) \sin x \equiv T_3(x),$$

in cui  $T_3$  è ancora un polinomio trigonometrico, e inoltre  $f \approx T_3 + 2\epsilon$  in quanto  $|\sin x| \leq 1$ .

*Terzo passo.* Data  $f \in C^{2\pi}$ , esiste un polinomio trigonometrico  $T$  tale che  $2f(x) \cos^2 x \approx T(x) + 2\epsilon$ .

Infatti: basta ripetere il passo due per  $f(x - \pi/2)$  e compiere una traslazione. Dunque scegliamo dapprima un polinomio trigonometrico  $T_4(x)$  tale che:

$$2f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sin^2 x \approx T_4(x),$$

ossia:

$$2f(x) \cos^2 x \approx T_5(x),$$

dove  $T_5$  è un nuovo polinomio trigonometrico.

Infine, combinando le conclusioni del secondo e del terzo passo, otteniamo che esiste un polinomio trigonometrico  $T_6(x)$  tale che  $f \approx T_6(x) + 2\epsilon$ .  $\square$

Per completezza, è bello chiudere il cerchio e mostrare che il secondo teorema di Weierstrass per  $C^{2\pi}$  implica il primo teorema per  $C[-1, 1]$ . Essendo il secondo teorema dimostrabile anche in maniera indipendente, questo rappresenta comunque uno sforzo significativo.

**TEOREMA 1.46.** *Data  $f \in C[-1, 1]$  ed  $\epsilon > 0$ , esiste un polinomio algebrico  $p$  tale che:*

$$\|f - p\| < \epsilon.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Considerata  $f \in C[-1, 1]$ , la funzione  $f(\cos x)$  è una funzione pari in  $C^{2\pi}$ . Seguendo la dimostrazione del secondo teorema di Weierstrass data in precedenza, in particolare il primo passo, possiamo approssimare  $f(\cos x)$  tramite un polinomio trigonometrico pari:

$$f(\cos x) \approx a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx.$$

Ma, come abbiamo visto,  $\cos kx$  può esprimersi come un polinomio algebrico in  $\cos x$ , quindi esiste un polinomio algebrico  $p$  tale che  $f(\cos x) \approx p(\cos x)$ . Equivalentemente:

$$\max_{0 \leq x \leq \pi} |f(\cos x) - p(\cos x)| = \max_{-1 \leq t \leq 1} |f(t) - p(t)| < \epsilon.$$

$\square$

**6.4. Approssimazione uniforme tramite polinomi trigonometrici.** Terminiamo riportando, senza dimostrazione, gli analoghi risultati dei teoremi 1.29-1.32 per l'uniforme approssimazione tramite polinomi trigonometrici. Scriveremo:

$$E_n^T(f) = \min_{T \in \mathcal{T}_n} \|f - T\|$$

per distinguerlo da  $E_n(f)$ .

1.  $f$  ha una migliore approssimazione  $T^* \in \mathcal{T}_n$ .
2.  $f - T^*$  ha un insieme alternante contenente un numero pari (o superiore) a  $2n + 2$  punti in  $[0, 2\pi)$  (Osserviamo che in questo caso  $2n + 2 = 1 + \dim \mathcal{T}_n$ ).
3.  $T^*$  è unico.
4. Se  $T \in \mathcal{T}_n$  è tale che  $f - T$  ha un insieme alternante contenente  $2n + 2$  o più punti in  $[0, 2\pi)$ , allora  $T = T^*$ .

Le dimostrazioni sono molto simili a quelle dei corrispondenti risultati validi per i polinomi algebrici, pertanto le salteremo e ci focalizzeremo su alcuni esempi interessanti.

**OSSERVAZIONE 1.47.** Per  $m > n$ , la migliore approssimazione di  $f(x) = A \cos mx + B \sin mx$  fra gli elementi di  $\mathcal{T}_n$  è 0.

**DIMOSTRAZIONE.** Possiamo scrivere  $f(x) = R \cos m(x - x_0)$  per certi  $R$  e  $x_0$ . Ora dobbiamo solo presentare un insieme alternante sufficientemente grande per  $f$ , in un qualsiasi intervallo di lunghezza  $2\pi$ .

Ponendo  $x_k = x_0 + k\pi/m$ ,  $k = 1, 2, \dots, 2m$ , otteniamo  $f(x_k) = R \cos k\pi = R(-1)^k$ , con  $x_k \in (x_0, x_0 + 2\pi]$ . Essendo  $m > n$ , ne segue che  $2m \geq 2n + 2$ .  $\square$

**OSSERVAZIONE 1.48.** La migliore approssimazione di

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n+1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

fra gli elementi di  $\mathcal{T}_n$  è:

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

mentre l'errore  $E_n^T(f) = \|f - T\| = \sqrt{a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Per l'osservazione 1.47, la migliore approssimazione di  $f - T$  fra gli elementi di  $\mathcal{T}_n$  è 0, quindi  $T$  deve essere la migliore approssimazione di  $f$ . La seconda affermazione è semplice

da verificare: poiché si può sempre scrivere  $A \cos mx + B \sin mx = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \cos m(x - x_0)$ , per un certo  $x_0$ , ne deriva che  $\|f - T\| = \sqrt{a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2}$ .  $\square$

Infine, mostriamo un semplice legame tra le due tipologie di approssimazione polinomiale.

**TEOREMA 1.49.** *Sia  $f \in C[-1, 1]$  e definiamo  $\varphi \in C^{2\pi}$  tramite  $\varphi(\theta) = f(\cos \theta)$ . Allora si ha:*

$$E_n(f) = \min_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\| = \min_{T \in \mathcal{T}_n} \|\varphi - T\| \equiv E_n^T(\varphi).$$

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo che  $p^*(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  sia la migliore approssimazione di  $f$  fra gli elementi di  $\mathbb{P}_n$ . Allora,  $\hat{T}(\theta) = p^*(\cos \theta)$  appartiene a  $\mathcal{T}_n$  e, chiaramente, risulta:

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - p^*(x)| = \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |f(\cos \theta) - p^*(\cos \theta)|.$$

Pertanto  $E_n(f) = \|f - p^*\| = \|\varphi - \hat{T}\| \geq \min_{T \in \mathcal{T}_n} \|\varphi - T\| = E_n^T(\varphi)$ .

D'altra parte, essendo  $\varphi$  pari, sappiamo che  $T^*$ , la sua migliore approssimazione fra gli elementi di  $\mathcal{T}_n$ , è anch'essa pari. Quindi:  $T^*(\theta) = q(\cos \theta)$ , per qualche polinomio algebrico  $q \in \mathbb{P}_n$ . Di conseguenza  $E_n^T(\varphi) = \|\varphi - T^*\| = \|f - q\| \geq \min_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\| = E_n(f)$ .  $\square$

## CAPITOLO 2

### *Interpolazione*

Un caso particolare di approssimazione è l'interpolazione.

DEFINIZIONE 2.1 (*Interpolazione*). Noti i valori  $f(x_i)$  che una funzione  $f$  definita su un intervallo  $A$  assume nei punti  $x_0, x_1, \dots, x_n$  di  $A$ , si dice che la funzione  $P(x)$  *interpola*  $f$  nei nodi  $x_i$  se risulta  $P(x_i) = f(x_i)$ ,  $\forall i = 0, 1, \dots, n$ .

Nel linguaggio della Geometria Analitica si usa dire: assegnati nel piano cartesiano  $n + 1$  punti  $(x_i, f(x_i))$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , si determini la curva  $y = P(x)$  che 'onora' tutti i punti assegnati.

Per la funzione interpolante è necessario:

- selezionare la classe di funzioni alla quale essa deve appartenere;
- scegliere un criterio per la selezione di una funzione tra quelle delle diverse classi (ossia un metodo di approssimazione).

Si hanno cinque grandi classi di funzioni di interpolazione:

**1.**  $\mathbb{P}_n$  - l'insieme dei polinomi algebrici  $p_n$  di grado al più  $n$  a coefficienti reali:

$$\mathbb{P}_n = \{p_n \mid p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0; a_k \in \mathbb{R}, \forall k\}.$$

Individuare un elemento di  $\mathbb{P}_n$  significa determinare  $n + 1$  parametri, ossia i coefficienti del polinomio  $a_k$ ,  $\forall k = 0, \dots, n$  se si usa la rappresentazione standard rispetto alla base canonica  $1, x, x^2, \dots, x^n$ .

**2.**  $\mathcal{T}_n$  - l'insieme dei polinomi trigonometrici  $T_n$  di grado al più  $n$  a coefficienti reali:

$$\mathcal{T}_n = \{T_n \mid T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n [a_k \cos kx + b_k \sin kx]; a_k, b_k \in \mathbb{R}, \forall k\}.$$

**3.**  $\mathcal{R}_{n,m}$  - l'insieme delle funzioni razionali o polinomi razionali:

$$\mathcal{R}_{n,m} = \{r_{n,m} \mid r_{n,m}(x) = \frac{p_n(x)}{p_m(x)}; p_n(x) \in \mathbb{P}_n, p_m(x) \in \mathbb{P}_m\}.$$

Ogni funzione razionale dipende da  $n + m + 1$  parametri. Infatti  $\frac{p_n(x)}{p_m(x)}$  non cambia se si dividono numeratore e denominatore per una costante non nulla: pertanto si fissa il coefficiente di  $x^m$  in  $p_m(x)$

uguale ad 1.

4.  $\mathbb{E}_n$  - l'insieme delle funzioni esponenziali o polinomi esponenziali:

$$\mathbb{E}_n = \{e_n \mid e_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k e^{b_k x}; a_k, b_k \in \mathbb{R}, \forall k\}.$$

5.  $\mathcal{S}_n([a, b], \Delta)$  - l'insieme delle funzioni spline di grado  $n$ , ovvero delle funzioni di  $C^{n-1}$  che si riducono a polinomi algebrici di grado  $n$  in ogni sottointervallo di misura  $\Delta$  di  $[a, b]$ ; quindi tali funzioni sono costituite da un'unione di tratti contigui di polinomi di grado non superiore ad  $n$  in modo che ogni funzione sia continua insieme alle sue derivate fino all'ordine  $n - 1$  sull'intervallo di definizione.

Sono di uso frequente soprattutto quelle di tipo polinomiale (polinomi algebrici e polinomi trigonometrici), in particolare i polinomi algebrici rappresentano la classe più ampia e più importante fra le funzioni di interpolazione.

Ovviamente la scelta della classe di funzioni approssimanti dipende, comunque, dal tipo di funzione da approssimare. Per funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato si possono usare polinomi algebrici, mentre polinomi trigonometrici si usano per funzioni continue e periodiche. Si adoperano poi funzioni razionali per approssimare funzioni che presentano singolarità, punti all'infinito o fenomeni non periodici; ove il fenomeno presenti un andamento esponenziale (applicazioni biologiche o biochimiche) si possono usare funzioni esponenziali. Infine per applicazioni grafiche, volendo evitare l'uso di polinomi algebrici o trigonometrici di grado alto per raggiungere la precisione richiesta, poiché questi sono eccessivamente oscillanti, si usano le funzioni spline, anche se esse presentano una soglia di regolarità.

**DEFINIZIONE 2.2** (*Interpolazione lineare*). Se la funzione  $P(x)$  che interpola la  $f$  è lineare rispetto ai parametri dai quali essa dipende, si parla di *interpolazione lineare*.

Esempi di interpolazione lineare sono l'interpolazione polinomiale, quella trigonometrica, quella con spline e funzioni esponenziali con esponenti assegnati; invece l'interpolazione razionale e quella con funzioni esponenziali con esponenti non assegnati sono di tipo non lineare.

### 1. *Interpolazione mediante polinomi di Lagrange e di Newton*

Abbiamo detto che il problema dell'interpolazione (polinomiale) si può esprimere nel modo seguente: noti i valori  $f(x_i)$  che una funzione  $f$

## 1 Interpolazione mediante polinomi di Lagrange e di Newton 41

definita su un intervallo  $A$  di  $\mathbb{R}$  assume nei punti  $x_0, x_1, \dots, x_n$  di  $A$ , si vuole determinare il polinomio  $P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  che interpola la  $f$  nei nodi  $x_i$ , ossia tale che soddisfi le condizioni di interpolazione:  $P_n(x_i) = f(x_i)$ ,  $\forall i = 0, 1, \dots, n$ , ossia il polinomio che coincide con la funzione nei nodi  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Quindi, utilizzando la base data dalle potenze di  $x$ , si tratta di determinare gli  $n + 1$  coefficienti  $a_0, a_1, \dots, a_n$  risolvendo un sistema di  $n + 1$  equazioni in  $n + 1$  incognite, ottenuto dai vincoli di interpolazione.

Vale, a tal proposito, questo importante risultato:

**TEOREMA 2.3 (Esistenza e unicità del polinomio interpolatore).** *Assegnata una funzione  $f(x)$  continua su un intervallo  $A \subseteq \mathbb{R}$  ed  $n + 1$  punti arbitrari di  $A$  (punti base o nodi)  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ , esiste ed è unico il polinomio interpolatore di grado non superiore ad  $n$  del tipo  $P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ , verificante le condizioni o vincoli d'interpolazione*

$$P_n(x_i) = f(x_i), \forall i = 0, \dots, n.$$

**DIMOSTRAZIONE.** *Unicità.* Segue facilmente osservando che le condizioni di interpolazione si traducono nel seguente sistema lineare nelle  $n + 1$  incognite  $a_0, a_1, \dots, a_n$  (sistema dei vincoli di interpolazione):

$$\begin{cases} P_n(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_n x_0^n = f(x_0) \\ P_n(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_1^n = f(x_1) \\ \dots \\ P_n(x_n) = a_0 + a_1 x_n + \dots + a_n x_n^n = f(x_n) \end{cases}$$

che ha come determinante della matrice dei coefficienti il *determinante di Vandermonde*:

$$V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq k < h \leq n} (x_h - x_k)$$

che risulta essere non nullo (di più, positivo) sotto la condizione  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ , cioè per ogni insieme di  $n + 1$  nodi distinti. Infatti la matrice di Vandermonde è non singolare  $\Leftrightarrow x_0, x_1, \dots, x_n$  sono distinti. In modo alternativo, l'unicità può essere provata ragionando per assurdo e supponendo che esistano due polinomi interpolatori distinti  $P_n(x)$  e  $Q_n(x)$  entrambi di grado non superiore ad  $n$  tali che  $f(x_i) = P_n(x_i) = Q_n(x_i)$ ,  $\forall i = 0, \dots, n$ .

Pertanto sarebbe possibile definire un polinomio  $D_n(x) = P_n(x) - Q_n(x)$  di grado non superiore ad  $n$  che verrebbe ad avere  $n + 1$  radici distinte (per gli  $n + 1$  vincoli di interpolazione) violando il teorema fondamentale dell'algebra. Ne consegue che necessariamente deve aversi  $P_n(x) = Q_n(x)$ , ossia il polinomio interpolatore deve essere unico.

*Esistenza.* Per quanto riguarda la dimostrazione dell'esistenza si procede in maniera costruttiva fornendo una rappresentazione esplicita

del polinomio di interpolazione. In tale direzione, una prima opzione potrebbe essere quella di effettuare il calcolo dei coefficienti del polinomio utilizzando la regola di Cramer. Tale soluzione, tuttavia, da un punto di vista numerico spesso non è praticabile, in quanto la matrice di Vandermonde è mal condizionata, ossia estremamente sensibile anche a piccole perturbazioni sui dati, perciò è opportuno costruire delle rappresentazioni del polinomio interpolatore diverse da quella canonica. Ad esempio si può utilizzare la seguente rappresentazione dovuta a Lagrange avente come coefficienti dei polinomi di grado  $n$ , detti *coefficienti di Lagrange* o *polinomi elementari di Lagrange*  $l_i(x) \in \mathbb{P}_n$ ,  $i = 0, \dots, n$ , della forma:

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

per i quali si ha:

$$l_i(x_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases} \quad (\delta_{i,j} \text{ è il } \textit{delta di Kronecker}).$$

Tali coefficienti sono esclusivamente funzioni dei nodi di interpolazione e sono tutti polinomi di grado  $n$ .

Il **polinomio di interpolazione di Lagrange** assume, quindi, la forma:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n l_i(x) f(x_i)$$

che risulta lineare rispetto ad  $f$ . Il polinomio interpolatore nella forma di Lagrange risulta particolarmente comodo da usare in tutti quei casi reali in cui la base di interpolazione rimane invariata e si fanno variare i valori  $f(x_i)$ . In tali situazioni, infatti, i coefficienti  $l_i$  vengono calcolati a priori una sola volta. Al contrario, se si interviene sulla base, ad esempio aggiungendo un nuovo nodo, tutti i coefficienti  $l_i$  devono essere ricalcolati.  $\square$

L'insieme  $\{l_i(x), i = 0, \dots, n\}$  costituisce una base (particolarmente conveniente) per i polinomi di grado  $n$ , detta *base di Lagrange*.

Osserviamo che il polinomio di interpolazione di grado  $n$  di un polinomio di grado minore o uguale ad  $n$  è esso stesso. Se infatti  $(x_i, f(x_i)), i = 0, 1, \dots, n$  sono i dati sui quali si basa il polinomio di interpolazione  $P_n(x)$ , esso coincide con il polinomio dato  $f(x)$ . Se così non fosse, esisterebbe un polinomio di grado  $n$ ,  $f(x) - P_n(x)$ , non nullo, che si annullerebbe in  $n + 1$  punti distinti, il ché è assurdo per il teorema fondamentale dell'algebra.

**1.1. Interpolazione polinomiale di Newton.** Un'ulteriore rappresentazione del polinomio interpolatore è dovuta a Newton e consente di calcolare il polinomio di Lagrange con una minore complessità e

di derivare da un polinomio di grado  $n$  uno di grado superiore se si aggiungono nuove coppie di dati usando i calcoli già effettuati.

DEFINIZIONE 2.4 (*Differenza divisa*). Si dice *differenza divisa* di  $f(x)$  relativa ai nodi  $x_0, x_1$  la quantità:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_1, x_0].$$

Detta differenza divisa di ordine 0 relativa all'argomento  $x_0$  di  $f(x)$  la quantità  $f[x_0] = f(x_0)$ , si definisce poi differenza divisa di ordine  $m$ ,  $m \geq 1$ , di  $f(x)$  relativa ad  $m + 1$  argomenti  $x_0, x_1, \dots, x_m$  la quantità:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_m] = \frac{f[x_0, x_1, \dots, x_{m-1}] - f[x_1, x_2, \dots, x_m]}{x_0 - x_m}.$$

Osserviamo che il concetto di differenza divisa è una generalizzazione della definizione di derivata.

TEOREMA 2.5. *Le differenze divise sono funzioni simmetriche dei loro argomenti, ossia se  $\{i_0, i_1, \dots, i_m\}$  è una permutazione di  $\{0, 1, \dots, m\}$ , si ha che:*

$$f[x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_m}] = f[x_0, x_1, \dots, x_m].$$

Il **polinomio interpolatore di Newton** può scriversi nella forma:

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}),$$

o, equivalentemente:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f[x_0, x_1, \dots, x_n] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j).$$

L'equivalenza fra le due notazioni utilizzate per esprimere le differenze divise segue immediatamente tenendo conto del teorema 2.5.

La rappresentazione di Newton consente agevolmente di ampliare la base d'interpolazione introducendo nuovi nodi. Infatti, non essendo necessario supporre alcun ordinamento nella scelta dei nodi, è possibile aggiungere i nuovi nodi in coda alla tabella delle differenze divise precedentemente predisposta. I calcoli effettuati rimangono validi e la rappresentazione finale del polinomio si ottiene aggiungendo un numero di termini pari al numero dei nuovi nodi.

## 2. Errore dell'interpolazione di Lagrange

Riprendiamo ed ampliamo la notazione necessaria a discutere i punti più delicati dell'interpolazione di Lagrange.

Dati  $n + 1$  punti distinti  $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ , detti *nodi*, dapprima costruiamo i polinomi:

$$W(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

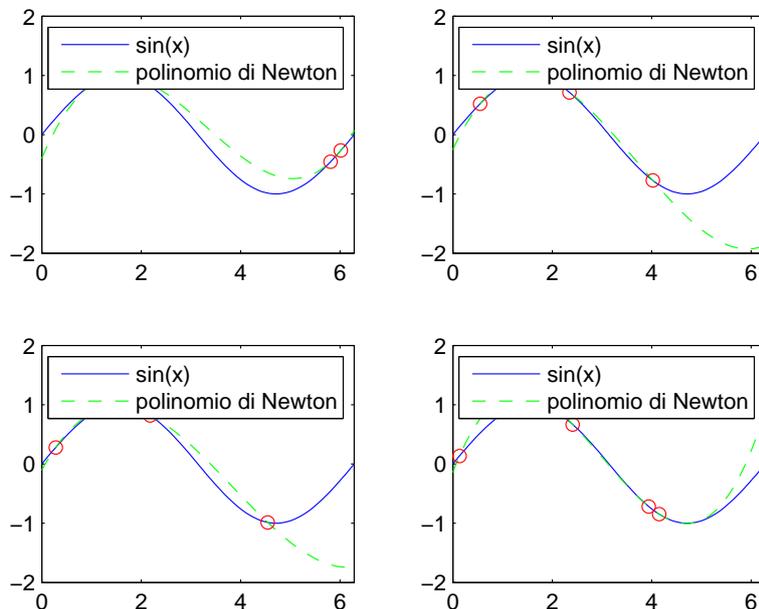


FIGURA 2.1. Approssimazione della funzione  $f(x) = \sin x$  nell'intervallo  $[0, 2\pi]$  attraverso 4 diversi polinomi cubici interpolanti, facendo uso dei polinomi di Newton.

e successivamente:

$$l_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{W(x)}{(x - x_i)W'(x)}.$$

La formula di interpolazione di Lagrange la indichiamo con:

$$L_n(f)(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)l_i(x).$$

$L_n(f)$  è l'unico polinomio appartenente a  $\mathbb{P}_n$  che coincide con  $f$  nei nodi  $x_i$ . In particolare, osserviamo che si deve avere  $L_n(p) = p$  per ogni  $p \in \mathbb{P}_n$ . Infatti  $L_n$  è una proiezione lineare da  $C[a, b]$  su  $\mathbb{P}_n$ , essendo  $L_n(f)$  lineare in  $f$ .

Solitamente si dispone di o si costruisce un insieme di nodi e si forma la corrispondente successione delle proiezioni. Una semplice, ma abbastanza inutile, osservazione è che, per una data funzione  $f \in C[a, b]$ , si può sempre trovare un insieme di nodi tale per cui  $L_n(f) = p_n^*$ , il polinomio di miglior approssimazione di  $f$  fra gli elementi di  $\mathbb{P}_n$ . Infatti, poiché  $f - p_n^*$  ha  $n + 1$  zeri, potremmo usare questi in qualità di nodi  $x_i$ . Quindi, in questo caso:

$$\|L_n(f) - f\| = E_n(f) \rightarrow 0.$$

Tuttavia, il problema della convergenza cambia drammaticamente carattere se prima scegliamo l'insieme dei nodi e poi consideriamo  $L_n(f)$ .

In generale, non vi è nessuna ragione di aspettarsi che  $L_n(f)$  converga a  $f$ . Anzi, è vero proprio il contrario:

**TEOREMA 2.6 (Faber, 1914).** *Dato un qualsiasi insieme  $X$  di nodi in  $[a, b]$ , esiste  $f \in C[a, b]$  per la quale la quantità  $\|L_n(f) - f\|$  non è limitata.*

Il problema ha poco a che vedere con l'interpolazione in sé, quanto piuttosto con le proiezioni.

**TEOREMA 2.7 (Kharshiladze, Lozinski, 1941).** *Per ogni  $n$ , sia  $L_n$  una proiezione lineare continua da  $C[a, b]$  su  $\mathbb{P}_n$ . Allora esiste  $f \in C[a, b]$  per la quale la quantità  $\|L_n(f) - f\|$  non è limitata.*

Evidentemente gli operatori  $L_n$  non sono positivi e monotoni, perché altrimenti il teorema di Bohman-Korovkin (teorema 1.24) ed il fatto che  $L_n$  sia una proiezione su  $\mathbb{P}_n$  implicherebbero la convergenza uniforme di  $L_n(f)$  a  $f$ , per ogni  $f \in C[a, b]$ .

Il punto è che non possiamo avere tutto: un risultato positivo sulla convergenza dell'interpolazione richiederà di imporre alcune condizioni aggiuntive sulle funzioni  $f$  che vogliamo approssimare. Come primo passo in questa direzione, proveremo ora che se  $f$  è sufficientemente regolare, ossia se possiede un numero sufficiente di derivate, allora l'errore  $\|L_n(f) - f\|$  può perlomeno essere stimato.

**TEOREMA 2.8.** *Supponiamo che  $f$  abbia  $n + 1$  derivate continue su  $[a, b]$ . Siano  $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ , sia  $W(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$  e sia  $L_n(f) \in \mathbb{P}_n$  un polinomio interpolante  $f$  nei punti  $x_i$ . Allora:*

$$|f(x) - L_n(f)(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\| |W(x)|,$$

per ogni  $x \in [a, b]$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Per comodità, indichiamo con  $p$  il polinomio interpolante  $L_n(f)$ . Dobbiamo mostrare che, dato  $x \in [a, b]$ , esiste  $\xi \in [a, b]$  tale per cui si abbia:

$$(4) \quad f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) W(x).$$

Se  $x$  è uno degli  $x_i$ , allora entrambi i membri della (4) valgono 0 e quindi non c'è nulla da dimostrare.

In caso contrario,  $W(x) \neq 0$  e possiamo porre  $\lambda = [f(x) - p(x)]/W(x)$ . Ora consideriamo

$$\varphi(t) = f(t) - p(t) - \lambda W(t).$$

Chiaramente  $\varphi(x_i) = 0$ , per ogni  $i = 0, \dots, n$  e, per la nostra scelta di  $\lambda$ , abbiamo anche che  $\varphi(x) = 0$ . È a questo punto che interviene il

teorema di Rolle. Poiché  $\varphi$  ammette  $n + 2$  zeri distinti in  $[a, b]$ , deve valere  $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$ , per qualche  $\xi \in (a, b)$ . Pertanto:

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - p^{(n+1)}(\xi) - \lambda W^{(n+1)}(\xi) \\ &= f^{(n+1)}(\xi) - \left( \frac{f(x) - p(x)}{W(x)} \right) \cdot (n + 1)! \end{aligned}$$

in quanto  $p$  ha grado al più  $n$  e  $W$  è monico e di grado  $n + 1$ .  $\square$

**OSSERVAZIONE 2.9.** Su ogni intervallo  $[a, b]$ , usando qualsiasi nodo, la successione dei polinomi di interpolazione di Lagrange per la funzione  $e^x$  converge uniformemente a  $e^x$ . In questo caso, infatti:

$$\|e^x - L_n(e^x)\| \leq \frac{c}{(n+1)!} (b-a)^n \rightarrow 0 \quad (\text{quando } n \rightarrow \infty),$$

dove  $c = \|e^x\|$  in  $C[a, b]$ . Un risultato simile rimarrebbe valido per ogni funzione infinitamente derivabile verificante la relazione:  $\|f^{(n)}\| \leq M^n$  (una qualsiasi funzione intera, ad esempio).

**OSSERVAZIONE 2.10.** Su  $[-1, 1]$ , la norma di  $W(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$  viene resa minima prendendo  $x_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , cioè gli zeri dell' $n$ -esimo polinomio di Chebyshev  $T_n$ . Essi rappresentano una scelta quasi ottimale per i nodi, se si desidera avere una buona approssimazione uniforme (vedi [8]). Approfondiremo questo discorso successivamente.

Nella pratica, tramite traslazioni e ridimensionamenti, l'interpolazione viene generalmente praticata su intervalli molto piccoli intorno a 0 della forma  $[-\delta, \delta]$ , dove  $\delta \approx 2^{-5}$  (o anche  $2^{-10}$ ). Questo ridimensionamento tipicamente genera polinomi interpolatori di grado più piccolo e, inoltre, facilita la stima dell'errore. In più è spesso conveniente richiedere che  $f(0)$  venga interpolato esattamente; infatti, in questo caso, potremmo cercare un interpolante polinomiale della forma:  $p_n(x) = f(0) + x^m p_{n-m}(x)$ , dove  $m$  è la molteplicità di zero come radice di  $f(x) - f(0)$ , mentre  $p_{n-m}$  è un polinomio di grado  $n - m$  che interpola  $(f(x) - f(0))/x^m$ . Per esempio, nel caso di  $f(x) = \cos x$ , potremmo andare alla ricerca di un polinomio della forma  $p_n(x) = 1 + x^2 p_{n-2}(x)$ .

### 3. Convergenza dell'interpolazione polinomiale

La questione della convergenza dell'interpolazione è strettamente collegata all'analoga questione della convergenza delle serie di Fourier, e la risposta in questa situazione è circa la stessa. Osserviamo che  $L_n$  è continua e limitata, questo fatto ci farà addentrare un po' più a fondo nel risultato negativo del teorema di Faber.

**LEMMA 2.11.** Vale:

$$(5) \quad \|L_n(f)\| \leq \|f\| \left\| \sum_{i=0}^n |l_i(x)| \right\|$$

per ogni  $f \in C[a, b]$ .

DEFINIZIONE 2.12 (*Funzioni di Lebesgue e numeri di Lebesgue*). Le quantità  $\lambda_n(x) = \sum_{i=0}^n |l_i(x)|$  sono chiamate *funzioni di Lebesgue* e le loro norme  $\Lambda_n = \left\| \sum_{i=0}^n |l_i(x)| \right\|$  sono dette *numeri di Lebesgue* associati a questo procedimento.

Non è complicato vedere che  $\Lambda_n$  è la costante più piccola possibile che funzionerà nella disuguaglianza (5), ossia:  $\|L_n\| = \Lambda_n$ . Infatti, se:

$$\left\| \sum_{i=0}^n |l_i(x)| \right\| = \sum_{i=0}^n |l_i(x_0)|,$$

allora si può trovare una funzione  $f \in C[a, b]$  con  $\|f\| = 1$  e  $f(x_i) = \text{sgn}(l_i(x_0))$ , per ogni  $i$ . Pertanto:

$$\|L_n(f)\| \geq |L_n(f)(x_0)| = \left| \sum_{i=0}^n \text{sgn}(l_i(x_0)) l_i(x_0) \right| = \sum_{i=0}^n |l_i(x_0)| = \Lambda_n \|f\|$$

Si può poi far vedere che, per ogni dato insieme di nodi  $X$ , vale sempre  $\Lambda_n(X) \geq c \cdot \log n$  per qualche costante positiva  $c$  (per maggiori dettagli, vedi [8] e [9]), e, in particolare,  $\Lambda_n(X) \rightarrow \infty$  per  $n \rightarrow \infty$ . Una volta provato questo, e il principio di uniforme limitatezza, il teorema di Faber (teorema 2.6) ora segue immediatamente.

Una semplice applicazione della disuguaglianza triangolare riporterà  $E_n(f)$  in scena:

TEOREMA 2.13 (**Lebesgue**). Per ogni  $f \in C[a, b]$ , si ha la seguente stima dell'errore d'interpolazione:

$$\|f - L_n(f)\| \leq (1 + \Lambda_n) E_n(f).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia  $p^*$  il polinomio di miglior approssimazione di  $f$  fra gli elementi di  $\mathbb{P}_n$ . Allora, essendo  $L_n(p^*) = p^*$ , abbiamo:

$$\begin{aligned} \|f - L_n(f)\| &\leq \|f - p^*\| + \|L_n(f - p^*)\| \\ &\leq (1 + \Lambda_n) \|f - p^*\| = (1 + \Lambda_n) E_n(f). \end{aligned}$$

□

COROLLARIO 2.14. Per ogni  $f \in C[a, b]$ , si ha:

$$\|f - L_n(f)\| \leq \frac{3}{2} (1 + \Lambda_n) \omega_f \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

Dal corollario 2.14 segue che  $L_n(f)$  converge uniformemente ad  $f$  a condizione che l'insieme di nodi  $X$  possa essere scelto in modo tale da soddisfare la relazione  $\Lambda_n(X) \omega_f \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

Consideriamo, tuttavia, il seguente avvilente risultato (cfr. [8], teorema 4.6): per un insieme di nodi equispaziati in  $[-1, 1]$ , che chiameremo  $E$ ,

esistono costanti positive  $k_1$  e  $k_2$  tali che:

$$k_1 \left(\frac{3}{2}\right)^m \leq \Lambda_{2m}(E) \leq k_2 2^m e^{2m}$$

per tutti gli  $m \geq 2$ . Ossia, i numeri di Lebesgue per questo procedimento crescono con un andamento esponenziale. Dunque non sarà troppo sorprendente osservare che esistono funzioni incredibilmente semplici per le quali l'interpolazione in nodi equispaziati non converge.

Ad esempio, come osservato da *Bernstein* nel 1918, sull'intervallo  $[-1, 1]$ , i polinomi interpolatori di Lagrange della funzione  $f(x) = |x|$  basati su un sistema di nodi equispaziati  $E$  soddisfano la relazione:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} L_n(f)(x) = +\infty$$

per  $|x| < 1$  con  $x \neq 0$ . In altre parole, la successione  $(L_n(f)(x))$  diverge per tutti gli  $x$  in  $[-1, 1]$  ad eccezione di  $x = \pm 1$  e di  $x = 0$ .

Un altro esempio notevole, e piuttosto celebre, è quello portato da *Runge* nel 1901: sull'intervallo  $[-5, 5]$ , i polinomi di Lagrange della funzione  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  basati su un sistema di nodi equispaziati  $E$  verificano:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} L_n(f)(x) = +\infty$$

per tutti gli  $x$  tali che  $|x| > 3.63$ . In questo caso si osserva che l'approssimazione migliora vicino a 0, ma peggiora in maniera radicale agli estremi dell'intervallo; tale comportamento è amplificato al crescere di  $n$ . Ciò è dovuto al fatto che  $\frac{1}{1+x^2}$  è una funzione continua su  $\mathbb{R}$ , mentre in  $\mathbb{C}$  presenta due singolarità nei punti  $\pm i$ , entrambi interni al cerchio di raggio 5.

Questo fenomeno è detto *fenomeno di Runge* ed è simile al cosiddetto *fenomeno di Gibbs* dell'analisi di Fourier, dove i polinomi approssimanti falliscono completamente il loro obiettivo.

Questo risultato indica che ad un aumento del grado dei polinomi interpolatori non corrisponde necessariamente un miglioramento nella ricostruzione di una funzione  $f$ .

Tale fenomeno non si riscontra, invece, se vengono utilizzati i nodi di Chebyshev, ossia gli zeri dei polinomi di Chebyshev  $T_n$ , che permettono di diminuire l'errore massimo all'aumentare del grado del polinomio. Un'altra alternativa è l'utilizzo dell'interpolazione con spline: tale tecnica prevede un aumento della suddivisione dell'intervallo mantenendo però basso il grado del polinomio d'interpolazione. In pratica si opera un'approssimazione polinomiale di grado basso su ogni sottointervallo. Nel confronto con l'interpolazione su tutto l'intervallo, l'interpolazione mediante spline, pur perdendo in regolarità, migliora la descrizione della funzione da approssimare. In particolare, l'interpolazione lineare a tratti genera una funzione che si presenta come un segmento di retta su ogni sottointervallo e come una spezzata sull'intero intervallo dove risulta continua, ma non necessariamente derivabile.

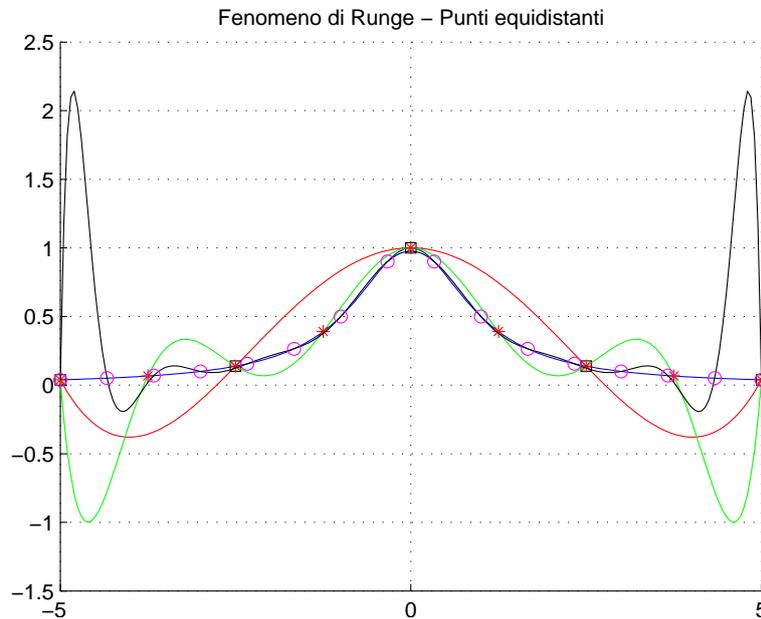


FIGURA 2.2. Il grafico è relativo ai polinomi di interpolazione di grado 4 (linea rossa), 8 (linea verde) e 15 (linea nera) individuati dalla funzione

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

(linea blu) con  $x \in [-5, 5]$ , e da un sistema di nodi equispaziati in  $[-5, 5]$ .

Dunque possiamo trovare un insieme di nodi  $T$  quasi ottimale, per il quale il procedimento di interpolazione converge per un'ampia classe di funzioni e, in aggiunta, presenta diversi vantaggi pratici. Si parla di *interpolazione tramite nodi di Chebyshev*.

#### 4. Interpolazione di Chebyshev

Focalizziamo, ora, la nostra attenzione sull'insieme di nodi in  $[-1, 1]$  generati dagli zeri dei polinomi di Chebyshev, insieme che indicheremo con  $T$ . Tali nodi si chiamano, appunto, nodi di Chebyshev e sono i punti:

$$x_k^{(n+1)} = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}\right), \quad k = 0, \dots, n; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

In particolare,  $(x_k^{(n+1)})_{k=0}^n$  sono gli zeri dell' $n+1$ -esimo polinomio di Chebyshev  $T_{n+1}$  e sono elencati in ordine decrescente.

Sappiamo che i numeri di Lebesgue per qualunque procedimento di interpolazione crescono almeno con un ritmo pari a quello di  $\log n$ , ma nel caso dell'interpolazione con i nodi di Chebyshev  $T$  questo è anche un

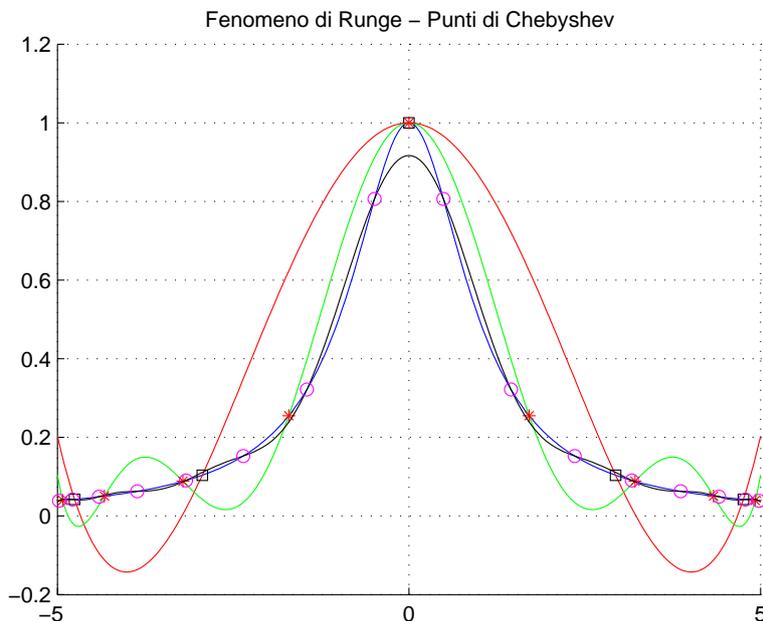


FIGURA 2.3. Il grafico è relativo ai polinomi di interpolazione di grado 4 (linea rossa), 8 (linea verde) e 15 (linea nera) individuati dalla funzione

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

(linea blu) con  $x \in [-5, 5]$ , e da un insieme di nodi di Chebyshev in  $[-5, 5]$ .

limite superiore, il che porta ulteriori conferme del fatto che questi nodi sono quasi ottimali, almeno per l'approssimazione uniforme. Il risultato seguente è dovuto essenzialmente a Bernstein (per la dimostrazione, vedi [8], teorema 4.5).

TEOREMA 2.15. *Per il sistema di nodi di Chebyshev  $T$  si ha:*

$$\Lambda_n(T) < \frac{2}{\pi} \log n + 4.$$

Se applichiamo l'interpolazione di Lagrange al sistema di nodi di Chebyshev, allora:

$$W(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k) = 2^{-n} T_{n+1}$$

e il polinomio interpolatore di Lagrange  $L_n(f)$ , che indicheremo ora con  $C_n(f)$  per distinguerlo dal caso generale, è dato da:

$$C_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \frac{T_{n+1}(x)}{(x - x_k) T'_{n+1}(x_k)}.$$

Ricordiamo ora che, per  $x = \cos \theta$ , abbiamo:

$$T'_n(x) = \frac{n \sin n\theta}{\sin \theta} = \frac{n \sin n\theta}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}} = \frac{n \sin n\theta}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Pertanto per  $x_i = \cos((2i - 1)\pi/2n)$ , cioè per  $\theta_i = (2i - 1)\pi/2n$ , ne segue che:

$$\sin n\theta_i = \sin\left(\frac{(2i - 1)\pi}{2}\right) = (-1)^{i-1}$$

e quindi:

$$\frac{1}{T'_n(x_i)} = \frac{(-1)^{i-1} \sqrt{1 - x_i^2}}{n}.$$

In definitiva, la formula di interpolazione di Chebyshev può scriversi in questo modo:

$$C_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \frac{(-1)^{k-1} T_{n+1}(x)}{(n+1)(x - x_k)} \sqrt{1 - x_k^2}.$$

Il prossimo risultato raffina l'enunciato del teorema 2.8 alla luce dell'osservazione 2.10.

**COROLLARIO 2.16.** *Supponiamo che  $f$  abbia  $n + 1$  derivate continue sull'intervallo  $[-1, 1]$ . Sia  $C_n(f) \in \mathbb{P}_n$  il polinomio che interpola  $f$  negli zeri dell' $n + 1$ -esimo polinomio di Chebyshev  $T_{n+1}$ . Allora:*

$$\begin{aligned} |f(x) - C_n(f)(x)| &\leq \frac{1}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\| |2^{-n} T_{n+1}(x)| \\ &= \frac{1}{2^n (n+1)!} \|f^{(n+1)}\|. \end{aligned}$$

**DIMOSTRAZIONE.** Come già osservato, il polinomio  $W(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$  è tale per cui  $W(x) = 2^{-n} T_{n+1}(x)$ ; infine, certamente, risulta  $|T_{n+1}(x)| \leq 1$ .  $\square$

Mentre i nodi di Chebyshev non sono del tutto ottimali per l'interpolazione, il polinomio interpolatore di Chebyshev basato sui nodi di Chebyshev è eccezionalmente vicino alla migliore approssimazione. Infatti, in accordo a un risultato di Powell (cfr.[12]), se poniamo  $\Theta_n(f) = \|f - C_n\|$ , allora vale:

$$E_n(f) \leq \Theta_n(f) \leq 4.037 E_n(f), \quad \text{per } 1 \leq n \leq 25,$$

dove, come al solito,  $E_n(f) = \|f - p_n^*\|$  è l'errore di minimax che si commette nell'approssimare  $f$  con un polinomio di grado al più  $n$ . Quindi, nella pratica, per approssimazioni con polinomi di grado basso, l'interpolazione di Chebyshev offre un'alternativa interessante ed efficiente nella ricerca della migliore approssimazione.

### 5. Interpolazione di Hermite e con funzioni spline

Abbiamo già osservato che, al crescere del grado del polinomio, l'interpolazione polinomiale di Lagrange non garantisce una maggiore accuratezza nell'approssimazione di una funzione. Questo problema può essere superato con l'interpolazione polinomiale composita (come, ad esempio, quella lineare a tratti o con funzioni spline).

Prima di parlare di funzioni spline, tuttavia, accenneremo all'*interpolazione di Hermite*. Questa si presenta come una generalizzazione dei polinomi di Taylor e di Lagrange (o Newton), in quanto si impongono sia condizioni sui valori che deve assumere un polinomio in punti prefissati (come accade per i polinomi interpolatori di Lagrange e Newton), sia condizioni sui valori delle derivate (come succede per i polinomi di Taylor e MacLaurin).

È essenziale che, se si impone il valore della derivata in un punto, siano assegnati anche i valori di tutte le derivate di ordine inferiore in quel punto, come pure il valore della funzione nel punto stesso. Soltanto se vale tale condizione, l'interpolazione di Hermite ha una ed una sola soluzione.

Dunque, si assume che la funzione  $f$  da approssimare sia sufficientemente regolare in  $[a, b]$ , cioè sia di classe  $C^m[a, b]$ , dove  $m$  rappresenta il massimo ordine delle derivate per cui si impongono le condizioni. Vale, a tal proposito, questo teorema.

**TEOREMA 2.17 (Interpolazione di Hermite).** *Considerati  $n + 1$  punti distinti  $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$  ed  $n + 1$  interi non negativi  $m_0, m_1, \dots, m_n$ , assegnati, inoltre,  $n + 1 + \sum_{i=0}^n m_i$  valori  $\{f_i^{(k)}, i = 0, \dots, n; k = 0, \dots, m_i\}$ , esiste uno ed un solo polinomio di grado  $M = n + \sum_{i=0}^n m_i$  tale che:*

$$p_M(x_i) = f_i^{(k)}, \quad i = 0, \dots, n; \quad k = 0, \dots, m_i.$$

*Tale polinomio si chiama polinomio di Hermite.*

Se  $n = 0$  ed  $m_0 = M$ , il polinomio di Hermite è il polinomio di Taylor di grado  $M$  in  $x_0$ .

Se  $m_i = 0, i = 0, \dots, n$ , il polinomio di Hermite è il polinomio di Lagrange di grado  $n = M$  nei punti  $x_0, \dots, x_n$ .

**5.1. Funzioni spline.** Dato l'intervallo  $[a, b]$ , consideriamo una successione finita di numeri reali (nodi) appartenenti a tale intervallo, tali che sia  $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_m < x_{m+1} \leq b$ . Si individua, in questo modo, una partizione dell'intervallo  $[a, b]$  in  $m + 1$  sottointervalli  $I_i = [x_i, x_{i+1})$ .

**DEFINIZIONE 2.18 (Funzione spline).** Si definisce *funzione spline* di grado  $n$  o di ordine  $n + 1$  relativa alla partizione  $\{x_i, i = 0, \dots, m + 1\}$  di  $[a, b]$  una funzione  $s(x)$  verificante le seguenti due proprietà:

- $s(x)$  è un polinomio  $s_i(x)$  di grado non superiore ad  $n$  in ciascun sottointervallo  $I_i$  della partizione,  $i = 0, \dots, m$ ;
- $s(x) \in C^{n-1}[a, b]$ , ossia la funzione e le sue derivate fino all'ordine  $n - 1$  sono continue su  $[a, b]$ : ciò significa che, per ogni nodo interno della partizione, valgono le condizioni:

$$(6) \quad s_i^{(k)}(x_{i+1}) = s_{i+1}^{(k)}(x_{i+1}), \quad i = 0, \dots, m - 1; \quad k = 0, \dots, n - 1.$$

In altre parole: una spline  $s(x)$  entro ciascun intervallo  $I_i$  è un polinomio di grado al più  $n$  che in ogni punto interno all'intervallo è di classe  $C^\infty$  (con valore diverso da zero fino alla derivata  $n$ -esima), e agli estremi coincide con il polinomio relativo all'intervallo precedente (se esiste) e con quello dell'intervallo successivo (se esiste) fino alla derivata  $(n - 1)$ -esima. Le condizioni (6) sono dette *condizioni di raccordo*.

L'insieme delle spline di grado  $n$  relative alla partizione  $\{x_i, i = 0, \dots, m + 1\}$  si denota con  $\mathcal{S}_n \{x_1, \dots, x_m\}$ . Tale insieme contiene al suo interno l'insieme dei polinomi algebrici di grado non superiore ad  $n$ .

Si osserva che la somma di funzioni spline è ancora una funzione spline e che il prodotto di un numero reale per una funzione spline rimane una funzione spline, pertanto l'insieme  $\mathcal{S}_n \{x_1, \dots, x_m\}$  è uno spazio funzionale lineare.

Inoltre la derivata di una spline di grado  $n$  è una spline di grado  $n - 1$  relativa alla medesima partizione e l'integrale di una spline di grado  $n$  è una spline di grado  $n + 1$  relativa, di nuovo, alla stessa partizione.

Infine, ogni spline dipende da  $(n + 1)(m + 1)$  parametri che devono soddisfare  $nm$  condizioni nei nodi interni, cioè l'uguaglianza dei valori della funzione e delle derivate fino all'ordine  $n - 1$ . Pertanto ogni spline dipende da  $m + n + 1$  parametri. Vale poi il seguente risultato:

**TEOREMA 2.19.** *Lo spazio delle funzioni spline  $\mathcal{S}_n \{x_1, \dots, x_m\}$  è uno spazio lineare di dimensione  $m + n + 1$  ed ogni funzione spline  $s(x)$  è univocamente rappresentabile nella forma:*

$$s(x) = p_n(x) + \sum_{j=1}^m \alpha_j (x - x_j)_+^n$$

dove  $p_n(x)$  è un polinomio di grado  $n$ , mentre  $(x - x_j)_+^n$  si chiama *potenza troncata* ed è definita come segue:

$$(x - x_j)_+^n = \begin{cases} (x - x_j)^n & \text{se } x > x_j \\ 0 & \text{se } x \leq x_j \end{cases}.$$

Dunque ogni spline si scrive come il polinomio di grado  $n$  che rappresenta la spline nel primo sottointervallo più una combinazione di potenze troncate.

Concludiamo caratterizzando alcune tipologie di funzioni spline e le loro proprietà di approssimazione.

DEFINIZIONE 2.20 (*Spline periodica*). Una funzione spline di grado  $n$  relativa ai nodi  $x_0, \dots, x_{m+1}$  si dice *periodica* di periodo  $x_{m+1} - x_0$  se è una spline che soddisfa le ulteriori  $n$  condizioni:

$$s^{(k)}(x_0) = s^{(k)}(x_{m+1}), \quad k = 0, \dots, n - 1.$$

Lo spazio delle funzioni spline periodiche è uno spazio lineare di dimensione pari ad  $m$ .

DEFINIZIONE 2.21 (*Spline naturale*). Una funzione spline di grado dispari,  $n = 2k - 1$ , relativa ai nodi  $x_0, \dots, x_{m+1}$  si dice *naturale* se è una spline che negli intervalli  $[x_0, x_1]$  e  $[x_m, x_{m+1}]$  diventa un polinomio di grado  $k - 1$ . Di conseguenza risulterà:

$$s^{(j)}(x_0) = s^{(j)}(x_{m+1}) = 0, \quad j = k, k + 1, \dots, 2k - 2.$$

Si dimostra che anche una spline naturale è univocamente rappresentabile nella forma:

$$s(x) = p_{k-1}(x) + \sum_{j=1}^m \alpha_j (x - x_j)_+^n$$

con  $p_{k-1}(x)$  polinomio di grado  $k - 1$  e  $(x - x_j)_+^n$  come nel teorema 2.19.

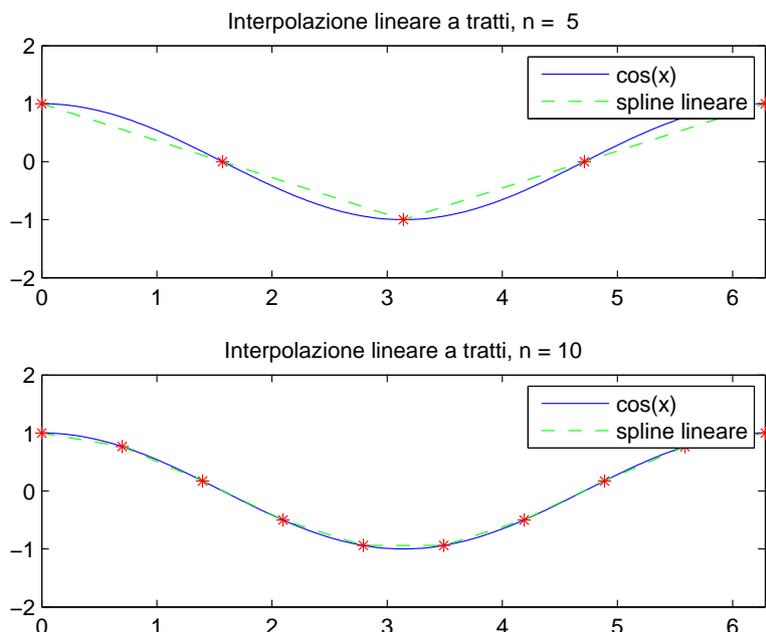


FIGURA 2.4. Spline lineari per la funzione  $f(x) = \cos x$  in  $[0, 2\pi]$  con  $n = 5$  e  $n = 10$  nodi, rispettivamente.

Valgono questi importanti teoremi sulle spline, in particolare sulle spline cubiche (ossia di grado 3).

**TEOREMA 2.22 (Esistenza e unicità della spline interpolante).**  
Sia data  $\{x_i, i = 0, \dots, n+1\}$  una partizione dell'intervallo chiuso e limitato  $[a, b]$ , con  $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} \leq b$  e siano assegnati i valori  $\{y_i, i = 0, \dots, n+1\}$ .

Allora esiste una ed una sola spline interpolante in  $\mathcal{S}_n \{x_1, \dots, x_n\}$  tale che  $s(x_i) = y_i$ , per  $i = 0, \dots, n+1$  per cui valga una delle seguenti tre condizioni:

1.  $s'(x_0) = z_0, s'(x_{n+1}) = z_{n+1}$ , con  $z_0$  e  $z_{n+1}$  assegnati (spline cubica);
2.  $s''(x_0) = s''(x_{n+1}) = 0$  (spline naturale);
3.  $y_0 = y_{n+1} = s(x_0) = s(x_{n+1})$ , inoltre  $s'(x_0) = s'(x_{n+1})$  e  $s''(x_0) = s''(x_{n+1})$  (spline periodica di periodo  $x_{n+1} - x_0$ ).

**TEOREMA 2.23 (Proprietà di minimo per le spline cubiche).**  
Tra tutte le funzioni  $f \in C^2[a, b]$  tali che:

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n+1, \quad x_0 \equiv a, \quad x_{n+1} \equiv b$$

per cui valga una di queste condizioni:

- $f'(x_0) = z_0, f'(x_{n+1}) = z_{n+1}$ ;
- $f''(x_0) = f''(x_{n+1}) = 0$ ;
- $f^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_{n+1}), k = 0, 1, 2$

la spline cubica interpolante per cui valga una di queste tre condizioni è quella per cui vale la proprietà di minimo:

$$\int_a^b (s''(x))^2 dx \leq \int_a^b (f''(x))^2 dx$$

e l'uguaglianza vale se e solo se  $f \equiv s$ .

**TEOREMA 2.24.** Sia  $f \in C^2[a, b]$  e sia  $s(x)$  la spline cubica interpolante  $f$ . Allora risulta:

$$|f(x) - s(x)| \leq h^{3/2} \left( \int_a^b (f''(x))^2 dx \right)^{1/2}$$

e:

$$|f'(x) - s'(x)| \leq h^{1/2} \left( \int_a^b (f''(x))^2 dx \right)^{1/2}$$

con  $x \in [a, b]$  ed  $h = \max_{i=0, \dots, n} (x_{i+1} - x_i)$ .

## 6. Approssimazione ai minimi quadrati discreta

La tecnica dell'interpolazione (polinomiale), per sua natura, non si presta ad essere utilizzata per estrapolare informazioni da dati noti, cioè per generare nuove valutazioni in punti che giacciono al di fuori dell'intervallo di interpolazione.

Supponiamo di disporre di un insieme di dati  $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ , dove gli  $y_i$  sono i valori  $f(x_i)$  che una funzione assume nei nodi  $x_i$ .

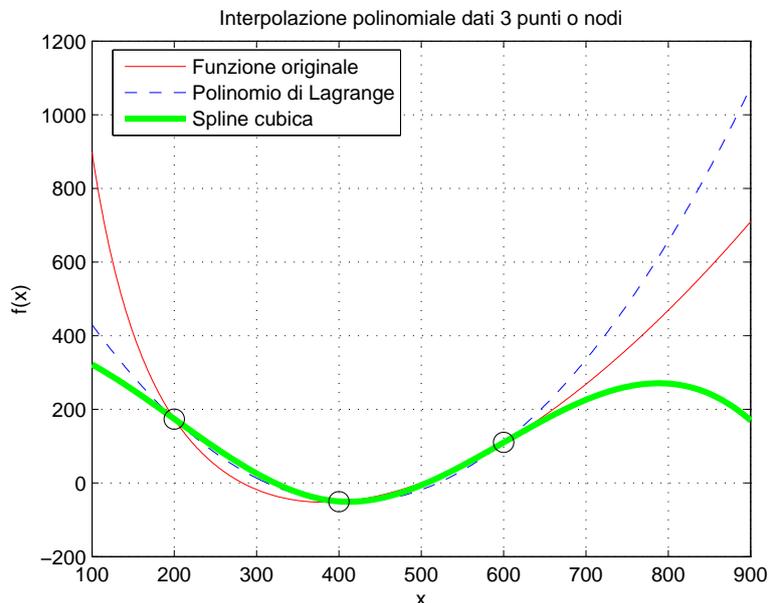


FIGURA 2.5. Confronto tra funzione originale, interpolazione attraverso il polinomio di interpolazione di Lagrange per tre nodi e interpolazione tramite una spline cubica passante per gli stessi nodi.

Dato  $m \geq 1$  (in genere sarà  $m \ll n$ ), si cerca un polinomio  $\tilde{f} \in \mathbb{P}_m$  che soddisfi la seguente disuguaglianza:

$$(7) \quad \sum_{i=0}^n [y_i - \tilde{f}(x_i)]^2 \leq \sum_{i=0}^n [y_i - p_m(x_i)]^2$$

per ogni polinomio  $p_m \in \mathbb{P}_m$ . Quando esiste, diremo che  $\tilde{f}$  è l'*approssimazione nel senso dei minimi quadrati* di grado  $m$  (ovvero in  $\mathbb{P}_m$ ) dei dati  $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ .

Dunque nell'approssimazione nel senso dei minimi quadrati (che, in pratica, è un'approssimazione in norma 2) si cerca un polinomio  $\tilde{f}$  di grado  $m$  (solitamente  $m \ll n$ ) tale da minimizzare la somma degli scarti quadratici  $\sum_{i=0}^n [y_i - \tilde{f}(x_i)]^2$ . In pratica, stiamo imponendo dei vincoli variazionali.

Se  $m < n$  non sarà ora più possibile garantire che  $\tilde{f}(x_i) = y_i, \forall i = 0, \dots, n$  (condizioni di interpolazione). Ponendo:

$$\tilde{f}(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$$

dove i coefficienti  $a_0, \dots, a_m$  sono incogniti, il problema (7) si può riformulare in questo modo: determinare  $a_0, \dots, a_m$  tali che:

$$\Phi(a_0, a_1, \dots, a_m) = \min_{b_i, i=0, \dots, m} \Phi(b_0, b_1, \dots, b_m)$$

dove:

$$\Phi(b_0, b_1, \dots, b_m) = \sum_{i=0}^n [y_i - (b_0 + b_1 x_i + \dots + b_m x_i^m)]^2.$$

Risolviamo tale problema nel caso particolare  $m = 1$ . Essendo:

$$\Phi(b_0, b_1) = \sum_{i=0}^n [y_i^2 + b_0^2 + b_1^2 x_i^2 + 2b_0 b_1 x_i - 2b_0 y_i - 2b_1 x_i y_i],$$

il grafico della funzione  $\Phi$  è un paraboloide convesso il cui punto di minimo  $(a_0, a_1)$  si trova imponendo le condizioni:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b_0}(a_0, a_1) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial b_1}(a_0, a_1) = 0,$$

dove  $\frac{\partial \Phi}{\partial b_j}$  denota la derivata parziale di  $\Phi$  rispetto a  $b_j$ . Calcolando esplicitamente le due derivate parziali troviamo le seguenti 2 equazioni nelle incognite  $a_0$  ed  $a_1$ :

$$\sum_{i=0}^n [a_0 + a_1 x_i - y_i] = 0, \quad \sum_{i=0}^n [a_0 x_i + a_1 x_i^2 - x_i y_i] = 0,$$

da cui:

$$\begin{cases} a_0(n+1) + a_1 \sum_{i=0}^n x_i = \sum_{i=0}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^2 = \sum_{i=0}^n x_i y_i \end{cases}$$

Posto  $D = (n+1) \sum_{i=0}^n x_i^2 - (\sum_{i=0}^n x_i)^2$  si ricava la coppia soluzione  $(a_0, a_1)$ :

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{D} \left[ \sum_{i=0}^n y_i \sum_{j=0}^n x_j^2 - \sum_{j=0}^n x_j \sum_{i=0}^n x_i y_i \right] \\ a_1 = \frac{1}{D} \left[ (n+1) \sum_{i=0}^n x_i y_i - \sum_{j=0}^n x_j \sum_{i=0}^n y_i \right] \end{cases}$$

Il corrispondente polinomio  $\tilde{f}(x) = a_0 + a_1 x$  è noto come *retta dei minimi quadrati*, o anche come *retta di regressione*.

L'approccio precedente può essere generalizzato in vari modi, in particolare in due direzioni.

La prima generalizzazione riguarda il caso in cui  $m$  sia un intero arbitrario. Si arriva ad un sistema lineare quadrato di dimensione  $m+1$  simmetrico, che avrà la forma seguente:

$$\begin{cases} a_0(n+1) + a_1 \sum_{i=0}^n x_i + \dots + a_m \sum_{i=0}^n x_i^m & = \sum_{i=0}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^2 + \dots + a_m \sum_{i=0}^n x_i^{m+1} & = \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ \vdots & \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i^m + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^{m+1} + \dots + a_m \sum_{i=0}^n x_i^{2m} & = \sum_{i=0}^n x_i^m y_i \end{cases}$$

Quando  $m = n$ , il polinomio dei minimi quadrati  $\tilde{f}$  coincide con il polinomio interpolatore di Lagrange.

Un'ulteriore generalizzazione dell'approssimazione nel senso dei minimi quadrati consiste nell'adoperare funzioni di tipo non polinomiale nella (7). Più precisamente, nel problema di minimizzazione (7), sia  $\tilde{f}$  che  $p_m$

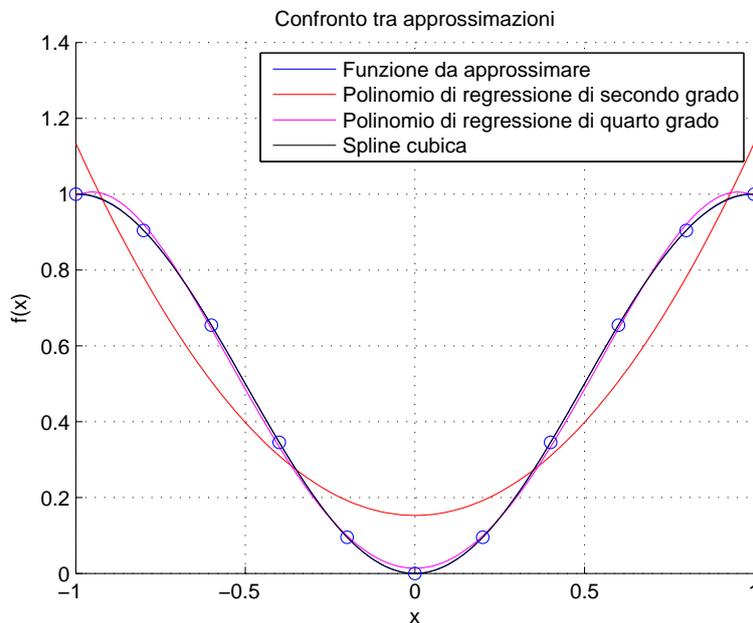


FIGURA 2.6. Esempio di funzione da approssimare:  $f(x) = \sin(\frac{\pi x}{2})^2$ ; confronto tra vari metodi di approssimazione, prima con un polinomio di regressione di grado 2, poi con uno di grado 4, infine con una spline cubica interpolante.

sono funzioni di uno spazio  $V_m$  i cui elementi si ottengono combinando linearmente  $m + 1$  funzioni indipendenti  $\{\phi_j\}_{j=0}^m$ . Esempi sono dati dalle funzioni goniometriche  $\phi_j(x) = \cos(\gamma j x)$ , per un dato parametro  $\gamma > 0$ , da quelle esponenziali  $\phi_j(x) = e^{\delta j x}$ , per un opportuno parametro  $\delta > 0$  oppure da un conveniente insieme di funzioni spline.

La scelta del miglior insieme di funzioni  $\{\phi_j\}$  è guidata, generalmente, da una qualche congettura sulla natura della legge che si cela dietro l'insieme dei dati che si vuole approssimare, come abbiamo già osservato in precedenza.

Si verifica che i coefficienti incogniti  $a_j$  che compaiono nell'espressione di  $\tilde{f}$ ,

$$\tilde{f}(x) = \sum_{j=0}^m a_j \phi_j(x)$$

sono le soluzioni del sistema di equazioni normali:

$$(8) \quad B^t B a = B^t y$$

dove  $B$  è una matrice rettangolare di ordine  $(n + 1) \times (m + 1)$  di coefficienti  $b_{ij} = \phi_j(x_i)$ ,  $a$  è il vettore dei coefficienti incogniti, mentre  $y$  è il vettore dei dati.

Il sistema (8) è un sistema di equazioni lineari che può essere risolto in maniera efficiente mediante la fattorizzazione  $QR$  o, in alternativa, tramite una decomposizione in valori singolari della matrice  $B$ .

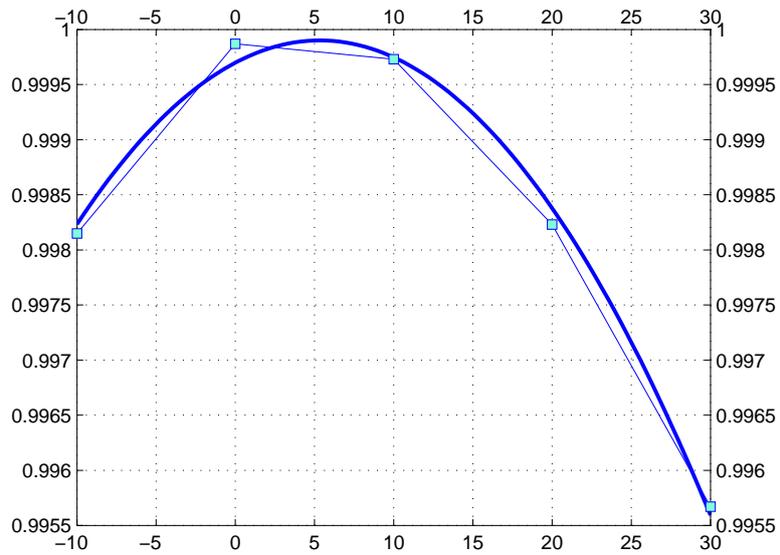


FIGURA 2.7. Approssimazione ai minimi quadrati di dati sperimentali con un polinomio di secondo grado.



## CAPITOLO 3

### *Introduzione alle serie di Fourier*

DEFINIZIONE 3.1 (*Serie di Fourier*). La *serie di Fourier* di una funzione  $f$  limitata, integrabile e  $2\pi$ -periodica è:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

dove i coefficienti  $a_k$  e  $b_k$  sono definiti in questo modo:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt \quad \text{e} \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt.$$

( $a_k$ ) e ( $b_k$ ) sono chiamati *coefficienti di Fourier* di  $f$ .

Notiamo che se  $f$  è Riemann-integrabile su  $[-\pi, \pi]$ , allora ciascuno di questi integrali è ben definito e a valore finito; infatti:

$$|a_k| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| \, dt$$

e la stessa maggiorazione vale per  $|b_k|$ , dunque, per esempio, avremmo  $|a_k| \leq 2 \|f\|$ , per  $f \in C^{2\pi}$ .

Indichiamo le *somme parziali di ordine  $n$*  (o *ridotta di ordine  $n$* ) della serie di Fourier con:

$$s_n(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Ora: mentre  $s_n(f)$  non necessariamente converge puntualmente a  $f$  (infatti potrebbe perfino divergere in un dato punto) e non è nemmeno solitamente una buona approssimazione uniforme a  $f$ , rimane comunque una scelta molto naturale per una approssimazione alla funzione  $f$  nel senso dei ‘minimi quadrati’, che preciseremo a breve. In altre parole, la serie di Fourier di  $f$  fornirà un’utile rappresentazione di  $f$  anche se non convergerà puntualmente a  $f$  stessa.

DEFINIZIONE 3.2 (*Prodotto scalare in  $C^{2\pi}$* ). È possibile definire il *prodotto interno* o *prodotto scalare* di due elementi  $f, g \in C^{2\pi}$  come:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) \, dx.$$

Precisiamo che è possibile scegliere anche altre costanti di normalizzazione al posto di  $\frac{1}{\pi}$ , ad esempio la costante  $\frac{1}{2\pi}$  è una scelta molto

gettonata dai libri di testo, tuttavia ciò non altera la sostanza della definizione e dell'intera teoria dell'analisi di Fourier.

Notiamo che vale:  $\langle f, s_n(f) \rangle = \langle s_n(f), s_n(f) \rangle$ , per ogni  $n$ .

Facciamo, ora, alcune osservazioni.

OSSERVAZIONE 3.3. Le funzioni  $\{1, \cos x, \cos 2x, \dots, \sin x, \sin 2x, \dots\}$  risultano *ortogonali* su  $[-\pi, \pi]$ , ossia:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0$$

per ogni  $m \neq n$  (e l'ultima equazione vale anche per  $m = n$ ), inoltre:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx \, dx = \pi$$

per ogni  $m \neq 0$ , e infine, ovviamente:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dx = 2\pi.$$

Questo significa che se  $T(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$ , allora:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(x) \cos mx \, dx = \frac{\alpha_m}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx \, dx = \alpha_m$$

per  $m \neq 0$ , mentre:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(x) \, dx = \frac{\alpha_0}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dx = \alpha_0.$$

Pertanto, se  $T \in \mathcal{T}_n$ , allora  $T$  è proprio uguale al suo sviluppo in serie di Fourier.

Essendo  $C^{2\pi}$  uno spazio dotato di prodotto scalare, se  $T(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$  è un polinomio trigonometrico di grado  $n$ , allora:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) T(x) \, dx &= \frac{\alpha_0}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx + \\ &+ \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \\ (9) \qquad \qquad \qquad &= \frac{\alpha_0 a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k a_k + \beta_k b_k). \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 3.4. Se  $f \in C^{2\pi}$  è tale che  $a_k = b_k = 0$  per ogni  $k$ , allora  $f \equiv 0$ .

DIMOSTRAZIONE. A ben guardare, per la relazione (9) e la linearità dell'integrale, le ipotesi sulla  $f$  dicono che:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) T(x) \, dx = 0$$

per ogni polinomio trigonometrico  $T$ . Ma dal secondo teorema di Weierstrass sappiamo che  $f$  è il limite uniforme di una certa successione di polinomi trigonometrici  $(T_n)$ . Quindi:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) T_n(x) dx = 0.$$

Essendo  $f$  continua, questo facilmente implica che sia  $f \equiv 0$ .  $\square$

**OSSERVAZIONE 3.5.** Se  $f, g \in C^{2\pi}$  hanno la stessa serie di Fourier, allora  $f \equiv g$ . Quindi, la serie di Fourier per una funzione  $f \in C^{2\pi}$  fornisce una *rappresentazione univoca* per  $f$ , anche se la serie non converge ad  $f$ .

**OSSERVAZIONE 3.6.** I coefficienti  $a_0, \dots, a_n$  e  $b_1, \dots, b_n$  minimizzano la quantità:

$$\varphi(a_0, a_1, \dots, b_n) = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - s_n(f)(x)]^2 dx.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Non è complicato vedere, ad esempio, che:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_k} = \int_{-\pi}^{\pi} 2[f(x) - s_n(f)(x)] \cos kx dx = 0$$

precisamente quando  $a_k$  soddisfa la relazione:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx.$$

$\square$

**OSSERVAZIONE 3.7 (*Approssimazione ai minimi quadrati: caso continuo*).** Data  $f$  limitata, integrabile e  $2\pi$ -periodica e la ridotta  $n$ -esima di  $f$ ,  $s_n(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ , allora  $s_n(f)$  è la migliore approssimazione di  $f$  tra gli elementi di  $\mathcal{T}_n$  relativamente alla norma dello spazio  $L^2$  (*norma euclidea o dei minimi quadrati*):

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \right)^{1/2}.$$

Equivalentemente:

$$\|f - s_n(f)\|_2 = \min_{T \in \mathcal{T}_n} \|f - T\|_2.$$

Inoltre, dalla relazione (9), risulta:

$$\begin{aligned} \|f - s_n(f)\|_2^2 &= \langle f - s_n(f), f - s_n(f) \rangle \\ &= \langle f, f \rangle - 2 \langle f, s_n(f) \rangle + \langle s_n(f), s_n(f) \rangle \\ &= \|f\|_2^2 - \|s_n(f)\|_2^2 \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2). \end{aligned}$$

Questa relazione ricorda molto il *teorema di Pitagora*.

OSSERVAZIONE 3.8. Segue dall'osservazione 3.7 che:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n(f)^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

o, equivalentemente:  $\|s_n(f)\|_2 \leq \|f\|_2$  (*disuguaglianza di Bessel*). In particolare, i coefficienti di Fourier  $(a_k)$  e  $(b_k)$  di ogni funzione  $f \in C^{2\pi}$  sono di quadrato sommabile, ossia  $\in l^2$ .

OSSERVAZIONE 3.9. Se  $f \in C^{2\pi}$ , allora i suoi coefficienti di Fourier  $(a_k)$  e  $(b_k)$  tendono a zero al tendere di  $k \rightarrow \infty$ .

OSSERVAZIONE 3.10.  $s_n(f) \rightarrow f$  nella norma di  $L^2$  quando  $f \in C^{2\pi}$ .

DIMOSTRAZIONE. Segue da quanto osservato in precedenza e dal secondo teorema di Weierstrass. Infatti, dato  $\epsilon > 0$ , scegliamo un polinomio trigonometrico  $T$  tale che  $\|f - T\| < \epsilon$ . Allora, poiché  $s_n(T) = T$  per  $n$  abbastanza grande, risulta:

$$\begin{aligned} \|f - s_n(f)\|_2 &\leq \|f - T\|_2 + \|s_n(T - f)\|_2 \\ &\leq 2\|f - T\|_2 \\ &\leq 2\sqrt{2}\|f - T\| < 2\sqrt{2}\epsilon, \end{aligned}$$

dove la penultima disuguaglianza segue dal fatto che  $\|f\|_2 \leq \sqrt{2}\|f\|$  per ogni  $f \in C^{2\pi}$ .  $\square$

### 1. Il nucleo di Dirichlet

Incominciamo dando un esempio di una semplice classe di funzioni le cui somme parziali di Fourier forniscono buone approssimazioni uniformi.

TEOREMA 3.11. Se  $f \in C^{2\pi}$  è tale che  $f'' \in C^{2\pi}$ , allora la serie di Fourier di  $f$  converge assolutamente ed uniformemente a  $f$ .

DIMOSTRAZIONE. Innanzitutto notiamo che l'integrazione per parti porta a dare una stima dell'ordine di crescita dei coefficienti di Fourier di  $f$ . Infatti:

$$\begin{aligned} \pi a_k &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) d\left(\frac{\sin kx}{k}\right) = -\frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin kx dx \end{aligned}$$

essendo  $f$   $2\pi$ -periodica. Perciò  $|a_k| \leq 2\|f'\|/k \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Ora, integrando nuovamente per parti, si ottiene:

$$\begin{aligned} -\pi k a_k &= \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin kx dx = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) d\left(\frac{\cos kx}{k}\right) = \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos kx dx \end{aligned}$$

essendo  $f'$   $2\pi$ -periodica. Pertanto  $|a_k| \leq 2\|f''\|/k^2 \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Inoltre, e anche come conseguenza più importante, questa disuguaglianza (insieme al test M di Weierstrass) implica che la serie di Fourier di  $f$  è sia uniformemente sia assolutamente convergente, infatti:

$$\left| \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right| \leq \left| \frac{a_0}{2} \right| + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Ma per quale motivo tale serie dovrebbe realmente convergere alla funzione  $f$ ? Se chiamiamo la somma:

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

allora  $g \in C^{2\pi}$  ed ha gli stessi coefficienti di Fourier di  $f$ . Quindi, per l'osservazione 3.5,  $g = f$ .  $\square$

Il nostro prossimo obiettivo è quello di trovare una forma più compatta per  $s_n(f)$ . Per fare ciò avremo bisogno di alcune identità trigonometriche, due delle quali sono immediate. Infatti si verifica facilmente che:

1.  $\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx = \cos k(t - x)$ ;
2.  $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$ .

Vale anche una terza identità.

LEMMA 3.12.  $\frac{1}{2} + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\theta}{2 \sin \frac{1}{2}\theta}$ .

DIMOSTRAZIONE.

$$\begin{aligned} & \sin \frac{1}{2}\theta + \sum_{k=1}^n 2 \cos k\theta \sin \frac{1}{2}\theta = \\ & = \sin \frac{1}{2}\theta + \sum_{k=1}^n \left[ \sin \left( k + \frac{1}{2} \right) \theta - \sin \left( k - \frac{1}{2} \right) \theta \right] = \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) \theta. \end{aligned}$$

$\square$

DEFINIZIONE 3.13 (*Nucleo di Dirichlet*). La funzione:

$$D_n(t) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2}t}$$

è chiamata *nucleo di Dirichlet* e gioca un ruolo importante nell'analisi di Fourier.

Infatti, a conferma di ciò, possiamo riscrivere, in funzione di  $D_n(t)$ , l'espressione delle somme parziali della serie di Fourier di  $f$ ,  $s_n(f)$ :

$$\begin{aligned}
 s_n(f)(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx \right] dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) \right] dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(t-x)}{2 \sin \frac{1}{2}(t-x)} dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t-x) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt.
 \end{aligned}$$

Ne segue facilmente che  $s_n(f)$  è lineare in  $f$ , in quanto l'integrazione del fattore  $D_n$  è lineare, inoltre  $s_n(f) \in \mathcal{T}_n$ , essendo  $D_n \in \mathcal{T}_n$ , e, infine, che  $s_n(\mathcal{T}_m) = \mathcal{T}_{\min(m,n)}$ . Questo significa che l'operatore somma parziale  $s_n(f)$  è una proiezione lineare di  $C^{2\pi}$  sull'insieme dei polinomi trigonometrici di grado al più  $n$   $\mathcal{T}_n$ .

Sebbene sappiamo già che  $s_n(f)$  rappresenta una buona approssimazione di  $f$  nella norma di  $L^2$ , una migliore comprensione della sua efficacia in qualità di approssimazione uniforme richiede, necessariamente, una migliore comprensione e uno studio più approfondito delle proprietà del nucleo di Dirichlet  $D_n$ .

LEMMA 3.14. *Valgono i seguenti fatti:*

(1)  $D_n$  è pari;

(2)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(t) dt = 1;$$

(3)

$$|D_n(t)| \leq n + \frac{1}{2} \quad e \quad D_n(0) = n + \frac{1}{2};$$

(4)

$$\frac{|\sin(n + \frac{1}{2})t|}{t} \leq |D_n(t)| \leq \frac{\pi}{2t} \quad \text{per } 0 < t < \pi;$$

(5) *Posto:*

$$\lambda_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt,$$

*allora si ha:*

$$\frac{4}{\pi^2} \log n \leq \lambda_n \leq 3 + \log n.$$

Tralasciamo la dimostrazione dei fatti (4) e (5) perché richiedono stime abbastanza elaborate (per maggiori dettagli vedi [1], pag.66), mentre per quanto riguarda i punti (1), (2) e (3), essi seguono dall'identità:

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \dots + \cos nt$$

e il punto (2) segue anche dal fatto che  $s_n(1) = 1$ .

I numeri  $\lambda_n = \|D_n\|_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt$  sono chiamati *numeri di Lebesgue* associati a questo procedimento. La terminologia è simile a quella usata per l'interpolazione:  $\lambda_n$  fornisce la norma dell'operatore somma parziale (proiezione) su  $C^{2\pi}$  e, proprio come per l'interpolazione,  $\lambda_n \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Notiamo che, come conseguenza dell'osservazione 3.8, la norma di  $s_n$  come operatore su  $L^2$  è uguale a 1.

**COROLLARIO 3.15.** *Se  $f \in C^{2\pi}$ , allora:*

$$(10) \quad |s_n(f)(x)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)| |D_n(t)| dt \leq \lambda_n \|f\|.$$

*In particolare,  $\|s_n(f)\| \leq \lambda_n \|f\| \leq (3 + \log n) \|f\|$ .*

Se approssimiamo la funzione  $\operatorname{sgn} D_n$  con una funzione continua  $f$  di norma unitaria, allora si avrà:

$$s_n(f)(0) \approx \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt = \lambda_n.$$

Quindi  $\lambda_n$  è la più piccola costante che soddisfa la disuguaglianza (10). Il fatto che gli operatori somme parziali non siano uniformemente limitati su  $C^{2\pi}$ , insieme al teorema di uniforme limitatezza, ci dice che deve esistere qualche  $f \in C^{2\pi}$  per la quale  $\|s_n(f)\|$  non rimanga limitata. Tuttavia, come abbiamo già visto, questo ha più a che vedere con le proiezioni che con le serie di Fourier; infatti anche in quest'ambito è valida una versione del teorema di Kharshiladze-Lozinski (teorema 2.7).

**TEOREMA 3.16 (Kharshiladze, Lozinski).** *Per ogni  $n$ , sia  $L_n$  una proiezione lineare continua da  $C^{2\pi}$  su  $\mathcal{T}_n$ . Allora esiste  $f \in C^{2\pi}$  per cui  $\|L_n(f) - f\|$  non sia limitata.*

Sebbene il corollario 3.15 possa non apparire utile, ci fornisce delle informazioni riguardo all'efficacia di  $s_n(f)$  in qualità di approssimazione uniforme a  $f$ . Nello specifico vale questo risultato.

**TEOREMA 3.17 (Lebesgue).** *Se  $f \in C^{2\pi}$  e se poniamo  $E_n^T(f) = \min_{T \in \mathcal{T}_n} \|f - T\|$ , allora:*

$$E_n^T(f) \leq \|f - s_n(f)\| \leq (4 + \log n) E_n^T(f).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia  $T^*$  la migliore approssimazione di  $f$  fra gli elementi di  $\mathcal{T}_n$ . Allora, avendosi  $s_n(T^*) = T^*$ , otteniamo:

$$\|f - s_n(f)\| \leq \|f - T^*\| + \|s_n(T^* - f)\| \leq (4 + \log n) \|f - T^*\|.$$

□

## 2. Cenni alle serie di Chebyshev

Come applicazione del teorema di Lebesgue, parliamo brevemente delle *serie di Chebyshev*, una nozione che si colloca in maniera naturale fra l'approssimazione tramite polinomi algebrici e quella mediante polinomi trigonometrici.

TEOREMA 3.18. *Sia  $f \in C^2[-1, 1]$ , ossia derivabile 2 volte con derivata continua su  $[-1, 1]$ . Allora  $f$  può scriversi come sviluppo in serie di Chebyshev uniformemente ed assolutamente convergente, ossia:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k(x), \quad \text{con} \quad \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty,$$

dove  $T_k(x)$  denota il  $k$ -esimo polinomio di Chebyshev di prima specie.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo  $\varphi(\theta) = f(\cos \theta) \in C^{2\pi}$ . Essendo  $\varphi$  una funzione pari e doppiamente differenziabile, la sua serie di Fourier è una serie di coseni assolutamente ed uniformemente convergente:

$$f(\cos \theta) = \varphi(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos k\theta = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k(\cos \theta),$$

in cui  $|a_k| \leq 2 \|\varphi''\| / k^2$ . Pertanto:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k(x).$$

□

Se indichiamo con  $S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n a_k T_k(x)$ , otteniamo un interessante conseguenza di questo teorema. Dapprima osserviamo che  $S_n(f)(\cos \theta) = s_n(\varphi)(\theta)$ , e dunque, dal teorema di Lebesgue, ne deriva:

$$\begin{aligned} E_n(f) &\leq \|f - S_n(f)\|_{C[-1,1]} = \|\varphi - s_n(\varphi)\|_{C^{2\pi}} \\ &\leq (4 + \log n) E_n^T(\varphi) = (4 + \log n) E_n(f). \end{aligned}$$

Per  $n < 400$ , questo significa che:

$$E_n(f) \leq \|f - S_n(f)\| \leq 10 E_n(f).$$

Da ciò deriva che, per scopi numerici, l'errore generato usando  $\sum_{k=0}^n a_k T_k(x)$  per approssimare  $f$  sta entro una cifra decimale di precisione rispetto alla migliore approssimazione (vedi pag.30). Osserviamo, inoltre, che  $E_n(f)$  in questa situazione sarebbe molto semplice da

valutare, in quanto:

$$E_n(f) \leq \|f - S_n(f)\| = \left\| \sum_{k>n} a_k T_k \right\| \leq \sum_{k>n} |a_k| \leq 2 \|\varphi''\| \sum_{k>n} \frac{1}{k^2}.$$

Il teorema di Lebesgue richiama la seconda versione che abbiamo dato del teorema di Bernstein: se sapessimo che  $E_n^T(f) \log n \rightarrow 0$  al tendere di  $n \rightarrow \infty$ , allora concluderemmo che  $s_n(f)$  convergerebbe uniformemente a  $f$ .

### 3. Il teorema di Fejér

Il nostro obiettivo, ora, è di migliorare le nostre stime di  $E_n^T(f)$ , e l'idea che vi sta dietro è quella di *sostituire il nucleo di Dirichlet  $D_n$  con un nucleo migliore* (dove 'migliore' si intende rispetto all'approssimazione uniforme). Dunque, prima di proseguire oltre, concentriamoci su come ottenere un semplice e utile nucleo sostitutivo.

Poiché la successione delle somme parziali  $(s_n)$  non necessariamente converge a  $f$ , potremmo essere tentati di considerare le loro medie aritmetiche, o *somme di Cesàro*:

$$\sigma_n = \frac{s_0 + \dots + s_{n-1}}{n}.$$

Queste medie tipicamente presentano migliori proprietà di convergenza rispetto alle somme parziali  $s_n$ . In particolare, si pone:

$$\begin{aligned} \sigma_n(f)(x) &= \frac{1}{n} [s_0(f)(x) + \dots + s_{n-1}(f)(x)] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left[ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(t) \right] dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) K_n(t) dt, \end{aligned}$$

dove  $K_n = \frac{D_0 + \dots + D_{n-1}}{n}$  è chiamato *nucleo di Fejér*. Le stesse tecniche che abbiamo usato in precedenza possono applicarsi per ottenere una forma più compatta per  $\sigma_n(f)$ , il che si riduce a semplificare la scrittura  $\frac{D_0 + \dots + D_{n-1}}{n}$  facendo uso di identità trigonometriche. Infatti, avendosi:

$$\begin{aligned} 2 \sin \theta \sum_{k=0}^{n-1} \sin(2k+1)\theta &= \sum_{k=0}^{n-1} [\cos 2k\theta - \cos(2k+2)\theta] \\ &= 1 - \cos 2n\theta = 2 \sin^2 n\theta, \end{aligned}$$

possiamo scrivere:

$$K_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(2k+1)t/2}{2 \sin t/2} = \frac{\sin^2(nt/2)}{2n \sin^2(t/2)}.$$

Osserviamo che il nucleo  $K_n$  è pari, *non negativo*, inoltre vale  $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) dt = 1$ .

Pertanto  $\sigma_n(f)$  è una mappa lineare positiva definita su  $C^{2\pi}$  a valori in  $\mathcal{T}_n$ , verificante la relazione  $\|\sigma_n(f)\|_2 \leq \|f\|_2$ .

Si vede, poi, che l'operatore media aritmetica  $\sigma_n(f)$  è ancora una volta una buona approssimazione di  $f$  per la norma di  $L^2$ , infatti:

$$\|f - \sigma_n(f)\|_2 = \frac{1}{n} \left\| \sum_{k=0}^{n-1} (f - s_k(f)) \right\|_2 \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|f - s_k(f)\|_2 \rightarrow 0$$

al tendere di  $n \rightarrow \infty$ , in quanto  $\|f - s_k(f)\|_2 \rightarrow 0$ . Ma, fatto che è ben più importante e che ci riporta al nocciolo della questione,  $\sigma_n(f)$  è davvero una buona approssimazione uniforme di  $f$ , risultato che è chiamato *teorema di Fejér*.

**TEOREMA 3.19 (Fejér, 1900).** *Se  $f \in C^{2\pi}$ , allora  $\sigma_n(f)$  converge uniformemente a  $f$  quando  $n \rightarrow \infty$ .*

Osserviamo che, poiché  $\sigma_n(f) \in \mathcal{T}_n$ , dal teorema di Fejér segue automaticamente il secondo teorema di Weierstrass. Curiosamente Fejér aveva solo 19 anni quando provò questo risultato, mentre Weierstrass aveva 75 anni al tempo in cui dimostrò i suoi teoremi di approssimazione. Tuttavia è bene sottolineare la differenza esistente fra il teorema di Weierstrass e quello di Fejér: entrambi riguardano funzioni  $f \in C^{2\pi}$  ed entrambi stabiliscono l'esistenza di una successione di polinomi trigonometrici convergente uniformemente ad  $f$ , ma solo il teorema di Fejér stabilisce una precisa relazione fra la successione dei polinomi approssimanti e la serie di Fourier di  $f$ . Proporremo due dimostrazioni del teorema di Fejér, una nei dettagli, una a grandi linee, tuttavia entrambe le prove seguono da considerazioni piuttosto generali e dal seguente teorema.

**TEOREMA 3.20.** *Supponiamo che  $k_n \in C^{2\pi}$  soddisfi le seguenti condizioni:*

(1)  $k_n \geq 0$ ;

(2)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} k_n(t) dt = 1;$$

(3)

$$\int_{\delta \leq |t| \leq \pi} k_n(t) dt \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow \infty, \text{ per ogni } \delta > 0.$$

Allora si ha che:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) k_n(t) dt$$

converge uniformemente a  $f(x)$ , per ogni  $f \in C^{2\pi}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\epsilon > 0$ . Essendo  $f$  uniformemente continua, possiamo scegliere  $\delta > 0$  in modo tale per cui  $|f(x) - f(x+t)| < \epsilon$  per

ogni  $x$ , quando  $|t| < \delta$ . Ora usiamo il fatto che  $k_n$  sia non negativo ed il suo integrale faccia 1 per poter scrivere:

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) k_n(t) dt \right| &= \frac{1}{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x+t)] k_n(t) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x+t)| k_n(t) dt \\ &\leq \frac{\epsilon}{\pi} \int_{|t| < \delta} k_n(t) dt + \frac{2 \|f\|}{\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} k_n(t) dt \\ &< \epsilon + \epsilon = 2\epsilon \end{aligned}$$

per  $n$  abbastanza grande.  $\square$

Si vede facilmente che il nucleo di Fejér soddisfa le condizioni del teorema 3.20: nello specifico, la (3) segue dal fatto che  $K_n(t)$  converge uniformemente a zero sull'insieme  $\delta \leq |t| \leq \pi$ . Infatti, poiché  $\sin(t/2)$  cresce su  $\delta \leq |t| \leq \pi$ , si ha:

$$K_n(t) = \frac{\sin^2(nt/2)}{2n \sin^2(t/2)} \leq \frac{1}{2n \sin^2(\delta/2)} \rightarrow 0.$$

Per quanto riguarda la traccia di una possibile seconda dimostrazione del teorema di Fejér, essa si basa su una variante del teorema di Bohman-Korovkin per  $C^{2\pi}$  dovuta a Korovkin. In questo spazio, i tre casi test sono  $f_0(x) = 1$ ,  $f_1(x) = \cos x$  e  $f_2(x) = \sin x$ .

**TEOREMA 3.21 (Korovkin).** *Sia  $(L_n)$  una successione di mappe lineari positive definite su  $C^{2\pi}$ . Se  $L_n(f)$  converge uniformemente a  $f$  per ognuna delle tre funzioni  $f_0(x) = 1$ ,  $f_1(x) = \cos x$  e  $f_2(x) = \sin x$ , allora  $L_n(f)$  converge uniformemente a  $f$ , per ogni  $f \in C^{2\pi}$ .*

Invece che dimostrare questo teorema, verifichiamo che  $\sigma_n(f)$  converge uniformemente a  $f$  in ciascuno dei tre casi test. Essendo  $s_n$  una proiezione, questo si dimostra essere un esercizio abbastanza semplice, infatti:

$$\begin{aligned} \sigma_n(f_0) &= \frac{1}{n}(f_0 + f_0 + \dots + f_0) = f_0; \\ \sigma_n(f_1) &= \frac{1}{n}(0 + f_1 + \dots + f_1) = \frac{n-1}{n} \cdot f_1; \\ \sigma_n(f_2) &= \frac{1}{n}(0 + f_2 + \dots + f_2) = \frac{n-1}{n} \cdot f_2, \end{aligned}$$

e, poiché  $\frac{n-1}{n} \cdot f_i$  converge uniformemente a  $f_i$ , per  $i = 1, 2$ , la verifica è completa.

Gli operatori nucleo abbondano in analisi: altri esempi, dopo quelli di Dirichlet e di Fejér, sono il *nucleo di Landau*  $L_n(x) = c_n(1-x^2)^n$  (che può servire a dimostrare il primo teorema di Weierstrass), e quello di *Jackson*,  $J_n(t) = c_n \sin^4 nt/n^3 \sin^4 t$ , che, sostanzialmente, è il quadrato

del nucleo di Fejér. La chiave della loro utilità risiede nel fatto che sono non negativi.

Per concludere questo capitolo, dedicheremo alcune righe alle serie di Fourier a coefficienti complessi. Se si considera il caso di funzioni  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $2\pi$ -periodiche e integrabili, allora si può definire la serie di Fourier di  $f$  anche in questo modo:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt},$$

dove, in questo caso, abbiamo una sola formula per i coefficienti di Fourier  $c_k$ :

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt,$$

con i  $c_k$  che possono essere numeri complessi. Questo approccio in qualche modo più semplice presenta anche altri vantaggi, per esempio gli esponenziali  $e^{ikt}$  formano un *sistema ortonormale* rispetto al prodotto scalare di due funzioni  $f, g \in C^{2\pi}$ :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Se poi rimaniamo coerenti con questa scelta e definiamo la norma dello spazio  $L^2$  come:

$$\|f\|_2 = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2},$$

allora otteniamo la semplice stima  $\|f\|_2 \leq \|f\|$ , per ogni  $f \in C^{2\pi}$ .

I nuclei di Dirichlet e di Fejér rimangono essenzialmente gli stessi in questo caso, tranne per il fatto che adesso dovremmo indicare le somme parziali della serie di Fourier  $s_n(f)(x)$  come:

$$s_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx},$$

pertanto i nuclei di Dirichlet e di Fejér si scriverebbero in questo modo:

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \sum_{k=-n}^n e^{ikx} = 1 + \sum_{k=1}^n (e^{ikx} + e^{-ikx}) \\ &= 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\sin \left( n + \frac{1}{2} \right) x}{\sin \frac{1}{2} x}; \end{aligned}$$

mentre:

$$\begin{aligned} K_n(x) &= \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} D_m(x) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\sin \left( m + \frac{1}{2} \right) x}{\sin \frac{1}{2} x} \\ &= \frac{\sin^2 \left( nt/2 \right)}{n \sin^2 \left( t/2 \right)}. \end{aligned}$$

Questo significa che ciascuno è due volte la sua controparte a coefficienti reali. In ogni caso le costanti di normalizzazione  $\frac{1}{\pi}$  e  $\frac{1}{2\pi}$ , oppure anche  $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$  e  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ , producono solo un lieve effetto di cambiamento su queste formule, ma non compromettono in nessun modo la validità della teoria che vi sta dietro.



## CAPITOLO 4

### *I teoremi di Jackson*

Proseguiamo il nostro studio tra approssimazione algebrica e trigonometrica presentando alcuni risultati dovuti al matematico americano *Jackson*, risalenti agli anni 1911 – 1912.

#### 1. *Teoremi diretti*

Incominciamo con i cosiddetti *teoremi diretti*, i quali, date certe proprietà di una funzione  $f$ , ci dicono qualcosa riguardo all'errore  $E_n(f)$ . Il primo di questi risultati ci fornisce la stima migliore possibile di  $E_n(f)$  in termini di  $\omega_f$  (modulo di continuità della funzione  $f$ ) e di  $n$ .

**TEOREMA 4.1 (*Jackson*).** *Se  $f \in C^{2\pi}$ , allora:*

$$E_n^T(f) \leq 6\omega_f \left( [-\pi, \pi]; \frac{1}{n} \right).$$

Il teorema 4.1 può essere considerato come un miglioramento della stima data dal teorema di Bernstein (teorema 1.22), che affermava che  $E_n(f) \leq \frac{3}{2}\omega_f \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ , per  $f \in C[-1, 1]$ . Come vedremo, non soltanto la dimostrazione del teorema 4.1 ricalca la dimostrazione del risultato di Bernstein, ma fa anche uso di alcune idee di cui abbiamo discusso nel capitolo precedente, a proposito delle varie tipologie di nuclei. Prima di occuparci della dimostrazione, elenchiamo diversi corollari importanti di questo teorema.

**COROLLARIO 4.2.** *Il secondo teorema di Weierstrass (vedi teorema 1.40 pag.32)*

**DIMOSTRAZIONE.**  $\omega_f \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \rightarrow 0$  per ogni  $f \in C^{2\pi}$ . □

**COROLLARIO 4.3 (*Teorema di Dini-Lipschitz*).** *Se  $\omega_f \left( \frac{1}{n} \right) \log n \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$ , allora lo sviluppo in serie di Fourier di  $f$  converge uniformemente a  $f$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Per il teorema di Lebesgue (teorema 3.17) risulta:

$$\|f - s_n(f)\| \leq (4 + \log n)E_n^T(f) \leq 6(4 + \log n)\omega_f \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \rightarrow 0.$$

□

**TEOREMA 4.4.** *Se  $f \in C[-1, 1]$ , allora  $E_n(f) \leq 6\omega_f \left( [-1, 1]; \frac{1}{n} \right)$ .*

DIMOSTRAZIONE. Poniamo  $\varphi(\theta) = f(\cos \theta)$ . Allora, come abbiamo visto:

$$E_n(f) = E_n^T(\varphi) \leq 6\omega_\varphi\left([-\pi, \pi]; \frac{1}{n}\right) \leq 6\omega_f\left([-1, 1]; \frac{1}{n}\right),$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dal fatto che:

$$\begin{aligned} |\varphi(\alpha) - \varphi(\beta)| &= |f(\cos \alpha) - f(\cos \beta)| \\ &\leq \omega_f(|\cos \alpha - \cos \beta|) \leq \omega_f(|\alpha - \beta|). \end{aligned}$$

□

COROLLARIO 4.5. Se  $f$  è hölderiana su  $[-1, 1]$ , allora  $E_n(f) \leq 6Kn^{-\alpha}$ .

COROLLARIO 4.6. Se  $f \in C[-1, 1]$  è dotata di derivata prima limitata, allora  $E_n(f) \leq \frac{6}{n} \|f'\|$ .

COROLLARIO 4.7. Se  $f \in C[-1, 1]$  è dotata di derivata prima continua, allora  $E_n(f) \leq \frac{6}{n} E_{n-1}(f')$ .

DIMOSTRAZIONE. Sia  $p^* \in \mathbb{P}_{n-1}$  la migliore approssimazione uniforme di  $f'$ . Consideriamo allora:

$$p(x) = \int_{-1}^x p^*(t) dt \in \mathbb{P}_n.$$

Grazie al corollario 4.6 ne deriva che:

$$E_n(f) = E_n(f - p) \leq \frac{6}{n} \|f' - p^*\| = \frac{6}{n} E_{n-1}(f').$$

□

Iterando quest'ultima disuguaglianza, otteniamo il seguente risultato:

COROLLARIO 4.8. Se  $f \in C^k[-1, 1]$ , ossia è differenziabile  $k$ -volte in maniera continua, allora:

$$E_n(f) \leq \frac{6^{k+1}}{n(n-1)\cdots(n-k+1)} \omega_k\left(\frac{1}{n-k}\right),$$

dove  $\omega_k$  denota il modulo di continuità di  $f^{(k)}$ .

Dopo una panoramica su questi risultati, focalizziamoci sulla dimostrazione del teorema di Jackson 4.1.

L'approccio di Jackson consisteva nel far vedere che:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \cdot c_n\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right) dt$$

convergesse uniformemente a  $f(x)$ , dove  $J_n(t) = c_n\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4$  è il cosiddetto *nucleo di Jackson*, il quale, essenzialmente, è il quadrato del nucleo di Fejér. L'approccio di cui faremo uso, dovuto a Korovkin, dimostra l'esistenza di un nucleo appropriato senza, tuttavia, dare una formula esplicita per esso. D'altra parte è relativamente semplice delineare tale idea. La chiave, in questo caso, è che  $J_n(t)$  dovrebbe essere un

polinomio trigonometrico di grado  $n$ , pari e non negativo, che soddisfi la relazione:

$$\int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) dt = 1.$$

In altre parole, la funzione  $J_n(t)$  dovrebbe essere della forma:

$$(11) \quad J_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \rho_{k,n} \cos kt,$$

dove  $\rho_{1,n}, \dots, \rho_{n,n}$  devono essere scelti in maniera tale da far sì che  $J_n(t) \geq 0$ . Supponendo di poter effettivamente trovare tali coefficienti  $\rho_{k,n}$ , ecco che cosa otteniamo.

LEMMA 4.9. *Se  $f \in C^{2\pi}$ , allora:*

$$(12) \quad \left| f(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) J_n(t) dt \right| \leq \omega_f \left( \frac{1}{n} \right) \cdot \left[ 1 + n\pi \sqrt{\frac{1 - \rho_{1,n}}{2}} \right].$$

DIMOSTRAZIONE. Innanzitutto, possiamo scrivere:

$$(13) \quad \begin{aligned} \left| f(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) J_n(t) dt \right| &= \frac{1}{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x+t)] J_n(t) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x+t)| J_n(t) dt \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \omega_f(|t|) J_n(t) dt. \end{aligned}$$

Ora ci serviamo di un piccolo stratagemma pensato da Bernstein. Sostituiamo  $\omega_f(|t|)$  con:

$$\omega_f(|t|) = \omega_f \left( n|t| \cdot \frac{1}{n} \right) \leq (1 + n|t|) \omega_f \left( \frac{1}{n} \right),$$

in questo modo l'integrale della formula (13) è maggiorato da:

$$\omega_f \left( \frac{1}{n} \right) \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + n|t|) J_n(t) dt = \omega_f \left( \frac{1}{n} \right) \cdot \left[ 1 + \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t) dt \right].$$

Rimane soltanto da stimare  $\int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t) dt$ , e per fare ciò utilizzeremo la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t) dt &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t)^{1/2} J_n(t)^{1/2} dt \\ &\leq \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t|^2 J_n(t) dt \right)^{1/2} \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} J_n(t) dt \right)^{1/2} \\ &= \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t|^2 J_n(t) dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Ma:

$$|t|^2 \leq \left[ \pi \sin \left( \frac{t}{2} \right) \right]^2 = \frac{\pi^2}{2} (1 - \cos t),$$

pertanto:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| J_n(t) dt \leq \left( \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos t) J_n(t) dt \right)^{1/2} = \pi \sqrt{\frac{1 - \rho_{1,n}}{2}}.$$

□

Resta, però, ancora da provare che possiamo scegliere degli scalari adatti  $\rho_{1,n}, \dots, \rho_{n,n}$ . Siamo già consapevoli del fatto che dobbiamo scegliere i  $\rho_{k,n}$  in modo tale che  $J_n(t)$  sia non negativo, ma ora è chiaro che vorremmo anche che lo scalare  $\rho_{1,n}$  fosse molto vicino a 1.

Vediamo, innanzitutto, come generare polinomi non negativi nella funzione coseno. Dati i numeri reali  $c_0, \dots, c_n$ , osserviamo che:

$$\begin{aligned} 0 \leq \left| \sum_{k=0}^n c_k e^{ikx} \right|^2 &= \left( \sum_{k=0}^n c_k e^{ikx} \right) \left( \sum_{j=0}^n c_j e^{-ijx} \right) \\ &= \sum_{k,j} c_k c_j e^{i(k-j)x} \\ &= \sum_{k=0}^n c_k^2 + \sum_{k>j} c_k c_j (e^{i(k-j)x} + e^{i(j-k)x}) \\ &= \sum_{k=0}^n c_k^2 + 2 \sum_{k>j} c_k c_j \cos(k-j)x \\ &= \sum_{k=0}^n c_k^2 + 2 \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{k+1} \cos x + \dots + 2c_0 c_n \cos nx. \end{aligned}$$

In particolare, ci servono  $c_0, \dots, c_n$  tali che:

$$\sum_{k=0}^n c_k^2 = \frac{1}{2} \text{ e } \rho_{1,n} = 2 \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{k+1} \approx 1.$$

Ciò che ci apprestiamo a fare, dunque, è di trovare  $c_k$  per cui  $\sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{k+1} \approx \sum_{k=0}^n c_k^2$ , e poi normalizzare.

In realtà non troveremo nulla - semplicemente esibiremo una scelta di  $c_k$  che può funzionare per i nostri scopi. Consideriamo, a tal proposito:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^n \sin \left( \frac{k+1}{n+2} \pi \right) \sin \left( \frac{k+2}{n+2} \pi \right) + \sum_{k=0}^n \sin \left( \frac{k+1}{n+2} \pi \right) \sin \left( \frac{k}{n+2} \pi \right) \\ (14) \quad &= \sum_{k=0}^n \left[ \sin \left( \frac{k}{n+2} \pi \right) + \sin \left( \frac{k+2}{n+2} \pi \right) \right] \sin \left( \frac{k+1}{n+2} \pi \right). \end{aligned}$$

Ora riscriviamo l'ultima somma (14), usando l'identità trigonometrica  $\sin A + \sin B = 2 \cos \left( \frac{A+B}{2} \right) \sin \left( \frac{A-B}{2} \right)$ , ed otteniamo:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left[ \sin \left( \frac{k}{n+2} \pi \right) + \sin \left( \frac{k+2}{n+2} \pi \right) \right] \sin \left( \frac{k+1}{n+2} \pi \right) \\ = 2 \cos \left( \frac{\pi}{n+2} \right) \sum_{k=0}^n \sin^2 \left( \frac{k+1}{n+2} \pi \right). \end{aligned}$$

Poiché  $\cos \left( \frac{\pi}{n+2} \right) \approx 1$  per  $n$  sufficientemente grande, ce l'abbiamo fatta! Se definiamo ora:  $c_k = c \cdot \sin \left( \frac{k+1}{n+2} \pi \right)$ , dove  $c$  è scelto in modo tale che  $\sum_{k=0}^n c_k^2 = \frac{1}{2}$ , e se definiamo  $J_n(x)$  usando (11), dove  $\rho_{k,n} = c_k$ , allora  $J_n(x) \geq 0$  e  $\rho_{1,n} = \cos \left( \frac{\pi}{n+2} \right)$ .

A questo punto la conclusione del lemma 4.9, ossia il secondo membro della disuguaglianza (12), può essere ritoccata in questo modo:

$$\sqrt{\frac{1 - \rho_{1,n}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \cos \left( \frac{\pi}{n+2} \right)}{2}} = \sin \left( \frac{\pi}{2n+4} \right) \leq \frac{\pi}{2n},$$

il che ci permette di concludere che:

$$E_n^T(f) \leq \left( 1 + \frac{\pi^2}{2} \right) \omega_f \left( \frac{1}{n} \right) < 6\omega_f \left( \frac{1}{n} \right).$$

Ciò prova il teorema 4.1.

## 2. Teoremi inversi

I teoremi di Jackson sono quelli che potremmo chiamare *teoremi diretti*: sapendo qualcosa sulle proprietà della  $f$ , sappiamo inferire qualcosa sull'errore  $E_n(f)$ . Ma esiste anche la nozione di *teoremi inversi*, con il significato che se conosciamo qualcosa riguardo a  $E_n(f)$ , allora dovremmo essere in grado di poter dire qualcosa sulla  $f$ . In altre parole ci aspetteremmo che un teorema inverso fosse, all'incirca, il viceversa di qualche teorema diretto.

I teoremi inversi solitamente sono molto più difficili da provare rispetto a quelli diretti, ma per avere comunque un'idea di cosa tali teoremi potrebbero dirci, mostriamo a titolo di esempio uno dei più semplici fra i teoremi inversi, dovuto a Bernstein. Tale risultato si configura come un parziale viceversa del corollario 4.5.

**TEOREMA 4.10 (Bernstein).** *Se  $f \in C^{2\pi}$  soddisfa la condizione  $E_n^T(f) \leq An^{-\alpha}$ , per certe costanti  $A$  e  $0 < \alpha < 1$ , allora  $f$  è hölderiana, per una certa costante  $K \geq 0$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Per ogni  $n$ , scegliamo  $S_n \in \mathcal{T}_n$  tale per cui  $\|f - S_n\| \leq An^{-\alpha}$ . Allora, in particolare,  $(S_n)$  convergerà uniformemente a  $f$ . Ora, se poniamo  $V_0 = S_1$  e  $V_n = S_{2^n} - S_{2^{n-1}}$  per  $n \geq 1$ ,

allora  $V_n \in \mathcal{T}_{2^n}$  e  $f = \sum_{n=0}^{\infty} V_n$ . Infatti:

$\|V_n\| \leq \|S_{2^n} - f\| + \|f - S_{2^{n-1}}\| \leq A(2^n)^{-\alpha} + A(2^{n-1})^{-\alpha} = B \cdot 2^{-n\alpha}$ ,  
che è sommabile, quindi la serie telescopica  $\sum_{n=0}^{\infty} V_n$  converge uniformemente a  $f$ .

Successivamente si stima  $|f(x) - f(y)|$  usando un numero finito di  $V_n$ , il cui valore preciso sarà specificato in seguito. Ora, facendo uso del teorema del valor medio e della *disuguaglianza di Bernstein* (la quale afferma che, se  $S \in \mathcal{T}_n$  e se  $|S(\theta)| \leq 1$ , allora  $|S'(\theta)| \leq n$ ), otteniamo:

$$\begin{aligned}
 |f(x) - f(y)| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |V_n(x) - V_n(y)| \\
 &\leq \sum_{n=0}^{m-1} |V_n(x) - V_n(y)| + 2 \sum_{n=m}^{\infty} \|V_n\| \\
 &= \sum_{n=0}^{m-1} |V'_n(\xi_n)| |x - y| + 2 \sum_{n=m}^{\infty} \|V_n\| \\
 (15) \quad &\leq |x - y| \sum_{n=0}^{m-1} 2^n \|V_n\| + 2 \sum_{n=m}^{\infty} \|V_n\| \\
 &\leq |x - y| \sum_{n=0}^{m-1} B \cdot 2^{n(1-\alpha)} + 2 \sum_{n=m}^{\infty} B \cdot 2^{-n\alpha} \\
 (16) \quad &\leq C [|x - y| \cdot 2^{m(1-\alpha)} + 2^{-m\alpha}],
 \end{aligned}$$

dove abbiamo usato, in (15), il fatto che  $V_n \in \mathcal{T}_{2^n}$  e, in (16), stime che valgono usualmente per le serie geometriche. Ora vogliamo fare in modo che il membro di destra sia maggiorato da una costante moltiplicata per  $|x - y|^\alpha$ , per ritrovare la condizione di lipschitzianità. Equivalentemente, se poniamo  $|x - y| = \delta$ , allora vogliamo che:

$$\delta \cdot 2^{m(1-\alpha)} + 2^{-m\alpha} \leq D \cdot \delta^\alpha,$$

ossia che:

$$(17) \quad (2^m \delta)^{(1-\alpha)} + (2^m \delta)^{-\alpha} \leq D.$$

Pertanto dovremmo scegliere  $m$  in modo tale che  $2^m \delta$  sia da un lato limitato superiormente e dall'altro limitato inferiormente ma lontano da zero. Per esempio, se fosse  $0 < \delta < 1$ , potremmo scegliere  $m$  in modo tale che valga  $1 \leq 2^m \delta < 2$ .  $\square$

Per spiegare meglio cosa si intende dire con l'espressione 'all'incirca il viceversa di qualche teorema diretto', mostriamo come il precedente risultato non valga più prendendo  $\alpha = 1$ . Nonostante fosse auspicabile il fatto che  $E_n^T(f) \leq A/n$  implicasse la lipschitzianità di  $f$  di ordine 1, in realtà questo non succede: vediamo, a questo proposito, che cosa non funziona più. Anche questo risultato è dovuto a Bernstein.

TEOREMA 4.11 (**Bernstein**). Se  $f \in C^{2\pi}$  soddisfa la condizione  $E_n^T(f) \leq A/n$ , allora  $\omega_f(\delta) \leq K\delta |\log \delta|$  per qualche costante  $K$  e per ogni  $\delta$  sufficientemente piccolo.

DIMOSTRAZIONE. Se ripetessimo la dimostrazione del teorema precedente 4.10, ponendo  $\alpha = 1$ , cambierebbero soltanto poche righe. In particolare, la conclusione di quella lunga serie di disuguaglianze, che termina con la (16), adesso si leggerebbe:

$$|f(x) - f(y)| \leq C [|x - y| \cdot m + 2^{-m}] = C [m\delta + 2^{-m}].$$

Chiaramente la parte di destra non può maggiorarsi con una costante moltiplicata per  $\delta$ , come avremmo sperato, perché questo obbligherebbe  $m$  ad essere limitato (indipendentemente da  $\delta$ ), cosa che a sua volta limita  $\delta$  ad essere lontano da zero. Tuttavia, se considerassimo la quantità  $2^m\delta$  come la ‘variabile’ in questa disuguaglianza, come suggerito d'altronde dalla formula (17) e dalle righe finali della dimostrazione precedente, allora il termine  $m\delta$  indicherebbe che il corretto ordine di grandezza della parte di destra sia  $\delta |\log \delta|$ . Perciò potremmo cercare di trovare una costante  $D$  tale che:

$$m\delta + 2^{-m} \leq D \cdot \delta |\log \delta|,$$

che è come dire:

$$m(2^m\delta) + 1 \leq D \cdot (2^m\delta) |\log \delta|.$$

Adesso se consideriamo  $0 < \delta < 1/2$ , allora  $\log 2 < -\log \delta = |\log \delta|$ . Quindi, se scegliamo ancora  $m \geq 1$  in maniera tale che sia  $1 \leq 2^m\delta < 2$ , otteniamo:

$$m \log 2 + \log \delta < \log 2 \Rightarrow m < \frac{\log 2 - \log \delta}{\log 2} < \frac{2}{\log 2} |\log \delta|$$

e, finalmente:

$$m(2^m\delta) + 1 \leq 2m + 1 \leq 3m \leq \frac{6}{\log 2} |\log \delta| \leq \frac{6}{\log 2} (2^m\delta) |\log \delta|.$$

□



## CAPITOLO 5

### *Polinomi ortogonali*

Nel caso di norme dedotte da un prodotto scalare, la teoria della miglior approssimazione prende il nome di *approssimazione ai minimi quadrati* o *approssimazione di Fourier*.

Data una *funzione peso*  $\omega(x)$  Riemann-integrabile e positiva (eccetto al più per un numero finito di punti) sull'intervallo  $[a, b]$ , l'espressione:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) \omega(x) dx$$

definisce un prodotto interno (o prodotto scalare) su  $C[a, b]$ , e

$$\|f\|_2 = \left( \int_a^b f^2(x) \omega(x) dx \right)^{1/2} = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

definisce una *norma strettamente convessa* su  $C[a, b]$ . Pertanto, dato un sottospazio  $E$  di  $C[a, b]$  di dimensione finita e un elemento  $f \in C[a, b]$ , esiste un'unica  $g \in E$  tale che:

$$\|f - g\|_2 = \min_{h \in E} \|f - h\|_2.$$

Si dice che  $g$  è l'*approssimazione ai minimi quadrati* di  $f$  tra gli elementi di  $E$ , relativa a  $\omega$ .

Se applichiamo, ora, il *procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt* alla successione  $1, x, x^2, \dots$ , arriveremo ad una successione  $(Q_n)$  di *polinomi ortogonali* relativa al prodotto interno definito sopra. In questo caso particolare, tuttavia, il procedimento di Gram-Schmidt si semplifica in maniera significativa.

**TEOREMA 5.1 (Gram-Schmidt).** *Il seguente procedimento definisce una successione  $(Q_n)$  di polinomi ortogonali relativa alla funzione peso  $\omega$ . Si pone:*

$$Q_0(x) = 1, \quad Q_1(x) = x - a_0 = (x - a_0)Q_0(x),$$

e:

$$(18) \quad Q_{n+1}(x) = (x - a_n)Q_n(x) - b_n Q_{n-1}(x),$$

per  $n \geq 1$ , dove si è posto:

$$a_n = \frac{\langle xQ_n, Q_n \rangle}{\langle Q_n, Q_n \rangle} \quad e \quad b_n = \frac{\langle xQ_n, Q_{n-1} \rangle}{\langle Q_{n-1}, Q_{n-1} \rangle},$$

e dove la scrittura  $xQ_n$  è la scrittura abbreviata usata per indicare il polinomio  $xQ_n(x)$ .

DIMOSTRAZIONE. È semplice vedere da queste formule che  $Q_n$  è un polinomio monico di grado esattamente pari a  $n$ ; in particolare i  $Q_n$  sono linearmente indipendenti e non nulli.

Ora si verifica facilmente che  $Q_0, Q_1$  e  $Q_2$  sono mutuamente ortogonali, perciò proviamo per induzione che  $Q_{n+1}$  è ortogonale ad ogni  $Q_k$ , per ogni  $k \leq n$ . In primo luogo si ha che:

$$\langle Q_{n+1}, Q_n \rangle = \langle xQ_n, Q_n \rangle - a_n \langle Q_n, Q_n \rangle - b_n \langle Q_{n-1}, Q_n \rangle = 0$$

e, inoltre:

$$\langle Q_{n+1}, Q_{n-1} \rangle = \langle xQ_n, Q_{n-1} \rangle - a_n \langle Q_n, Q_{n-1} \rangle - b_n \langle Q_{n-1}, Q_{n-1} \rangle = 0,$$

in quanto  $\langle Q_{n-1}, Q_n \rangle = 0$ . Se poi consideriamo  $k < n - 1$  e utilizziamo la formula ricorsiva (18) per due volte, otteniamo:

$$\begin{aligned} \langle Q_{n+1}, Q_k \rangle &= \langle xQ_n, Q_k \rangle - a_n \langle Q_n, Q_k \rangle - b_n \langle Q_{n-1}, Q_k \rangle \\ &= \langle xQ_n, Q_k \rangle = \langle Q_n, xQ_k \rangle \\ &= \langle Q_n, Q_{k+1} + a_k Q_k + b_k Q_{k-1} \rangle = 0, \end{aligned}$$

essendo  $k + 1 < n$ . □

OSSERVAZIONE 5.2. 1. Usando la stessa strategia vista sopra, si vede che:

$$b_n = \frac{\langle xQ_n, Q_{n-1} \rangle}{\langle Q_{n-1}, Q_{n-1} \rangle} = \frac{\langle Q_n, Q_n \rangle}{\langle Q_{n-1}, Q_{n-1} \rangle} > 0.$$

2. Ogni polinomio algebrico  $p \in \mathbb{P}_n$  può scriversi in maniera unica come:

$$p = \sum_{i=0}^n \alpha_i Q_i, \quad \text{con } \alpha_i = \frac{\langle p, Q_i \rangle}{\langle Q_i, Q_i \rangle}.$$

3. Se  $q$  è un qualsiasi polinomio monico di grado esattamente  $n$ , allora:

$$Q = Q_n + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i Q_i$$

e quindi:

$$\|Q\|_2^2 = \|Q_n\|_2^2 + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i^2 \|Q_i\|_2^2 > \|Q_n\|_2^2,$$

a meno che sia  $Q = Q_n$ . Questo significa che  $Q_n$  ha la più piccola  $\|\cdot\|_2$  fra tutti i polinomi monici di grado  $n$ .

4. I polinomi ortogonali  $Q_n$  sono *unic* nel senso seguente: se  $(P_n)$  fosse un'altra successione di polinomi ortogonali tali che  $P_n$  avesse grado esattamente pari a  $n$ , allora si avrebbe  $P_n = \alpha_n Q_n$ , per qualche  $\alpha_n \neq 0$ . Di conseguenza, non si perde di generalità se ci si riferisce ai  $(Q_n)$  come *alla successione* (e non ad una successione) di polinomi ortogonali relativa alla funzione peso  $\omega$ .

5. Per  $n \geq 1$ , osserviamo infine che:

$$\int_a^b Q_n(t) \omega(t) dt = \langle Q_0, Q_n \rangle = 0.$$

### 1. *Esempi*

1. Ricordiamo che i polinomi algebrici  $T_n(x)$  verificanti la relazione:

$$T_n(\cos x) = \cos nx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

sono chiamati *polinomi di Chebyshev di prima specie*. Mediante questa formula  $T_n$  viene definito come un polinomio di grado esattamente pari a  $n$  con coefficiente direttore uguale a  $2^{n-1}$ .

Su  $[-1, 1]$  i polinomi di Chebyshev di prima specie ( $T_n$ ) sono ortogonali relativamente alla funzione peso  $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ , pertanto:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 T_m(x) T_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int_0^\pi \cos m\theta \cos n\theta d\theta \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ \pi, & \text{se } m = n = 0 \\ \pi/2, & \text{se } m = n \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Osserviamo, inoltre, che  $\frac{1}{\sqrt{2}}T_0, T_1, T_2, \dots$ , sono *ortonormali* relativamente al peso  $\frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ .

In termini del procedimento induttivo dato nel teorema 5.1, si deve avere  $Q_0 = T_0 = 1$  e  $Q_n = 2^{-n+1}T_n$  per  $n \geq 1$ . Da questo segue che  $a_n = 0, b_1 = 1/2$  e  $b_n = 1/4$  per  $n \geq 2$ , quindi la formula ricorsiva del teorema 5.1 si riduce alla familiare relazione:

$$T_{n+1}(x) = 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Curiosamente,  $Q_n = 2^{-n+1}T_n$  minimizza sia

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |p(x)| \quad \text{sia} \quad \left( \int_{-1}^1 p^2(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right)^{1/2}$$

fra tutti i polinomi monici di grado esattamente pari a  $n$ .

I polinomi di Chebyshev di prima specie soddisfano anche l'equazione differenziale  $(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0$ . Essendo questa un'identità polinomiale, è sufficiente verificare la sua validità per  $x = \cos \theta$ . In tal caso si ha:

$$T_n'(x) = \frac{n \sin n\theta}{\sin \theta}$$

e

$$T_n''(x) = \frac{n^2 \cos n\theta \sin \theta - n \sin n\theta \cos \theta}{\sin^2 \theta},$$

da cui si trae:

$$\begin{aligned} (1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) &= \\ = -n^2 \cos n\theta + n \sin n\theta \cot \theta - n \sin n\theta \cot \theta + n^2 \cos n\theta &= 0. \end{aligned}$$

2. I polinomi algebrici  $U_n(x)$  verificanti la relazione:

$$U_n(\cos x) = \frac{\sin(n+1)x}{\sin x}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

sono chiamati *polinomi di Chebyshev di seconda specie*. Attraverso tale formula  $U_n$  viene definito come un polinomio di grado esattamente pari a  $n$  con coefficiente direttore uguale a  $2^n$ .

Su  $[-1, 1]$  i polinomi di Chebyshev di seconda specie ( $U_n$ ) sono ortogonali relativamente alla funzione peso  $\omega(x) = \sqrt{1-x^2}$ . Infatti:

$$\int_{-1}^1 U_m(x) U_n(x) (1-x^2) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^\pi \frac{\sin(m+1)\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} \cdot \sin^2\theta d\theta = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ \pi/2, & \text{se } m = n \end{cases}$$

Per essi vale poi la relazione ricorsiva  $U_0(x) = 1$ ,  $U_1(x) = 2x$  e in generale:

$$U_{n+1}(x) = 2x \cdot U_n(x) - U_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

Notiamo, incidentalmente, che

$$T'_n(x) = \frac{n \sin n\theta}{\sin\theta} = nU_{n-1}(x).$$

Più in generale si vede che le derivate di una successione di polinomi ortogonali sono ancora polinomi ortogonali, ma relativamente ad una funzione peso differente.

3. Sull'intervallo  $[-1, 1]$  con la funzione peso  $\omega(x) \equiv 1$ , i *polinomi di Légendre* ( $P_n$ ) sono ortogonali e vengono solitamente normalizzati tramite  $P_n(1) = 1$ . A breve dimostreremo che per essi vale la relazione ricorsiva  $P_0(x) = 1$ ,  $P_1(x) = x$  e in generale:

$$P_{n+1}(x) = \left(\frac{2n+1}{n+1}\right) x \cdot P_n(x) - \left(\frac{n}{n+1}\right) P_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

4. Sull'intervallo  $[-1, 1]$  i polinomi di Légendre e di Chebyshev rappresentano un caso particolare di una famiglia più generale di polinomi ortogonali, associata alla funzione peso  $\omega(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ , con  $\alpha, \beta > -1$ , chiamati *polinomi di Jacobi*  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ . Essi vengono normalizzati richiedendo che si abbia:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{\alpha} \equiv \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}{n!}.$$

Osserviamo che per  $\alpha = \beta = 0$  si ottengono i polinomi di Légendre, per  $\alpha = \beta = -1/2$  i polinomi di Chebyshev di prima specie e per  $\alpha = \beta =$

$1/2$  i polinomi di Chebyshev di seconda specie, infatti:  $P_n^{(0,0)} = P_n$ ,

$$P_n^{(-1/2,-1/2)} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n n!} T_n,$$

e:

$$P_n^{(1/2,1/2)} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{2^n (n+1)!} U_n.$$

I polinomi  $P_n^{(\alpha,\alpha)}$  sono detti *polinomi ultrasferici*.

**5.** Esistono anche diversi esempi classici di polinomi ortogonali definiti su intervalli illimitati, in particolare:

- su  $(0, +\infty)$  con la funzione peso  $\omega(x) = e^{-x}$  i *polinomi di Laguerre*;
- su  $(0, +\infty)$  con la funzione peso  $\omega(x) = x^\alpha e^{-x}$  i *polinomi di Laguerre generalizzati*;
- su  $(-\infty, +\infty)$  con la funzione peso  $\omega(x) = e^{-x^2}$  i *polinomi di Hermite*.

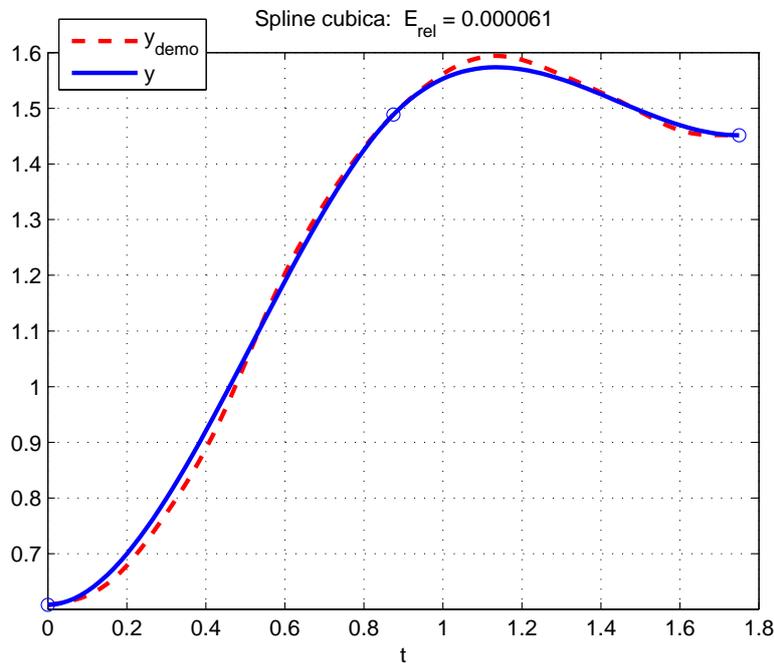


FIGURA 5.1. Approssimazione di una funzione campione appartenente a  $L^2$  mediante spline cubiche, ossia polinomi a tratti di terzo grado.

I polinomi ortogonali hanno svariate applicazioni nel campo dell'approssimazione di funzioni (quello sul quale noi ci focalizzeremo), ma

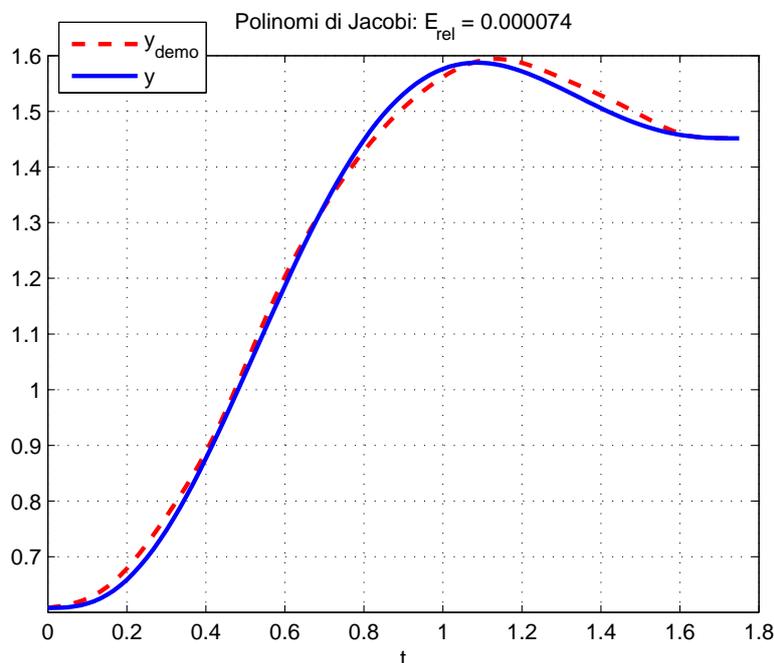


FIGURA 5.2. Approssimazione di una funzione campione appartenente a  $L^2$  mediante la somma parziale della serie di tale funzione in polinomi di Jacobi.

anche in ambito fisico (in particolare di meccanica quantistica) e ingegneristico. Esiste, infatti, una teoria generale di problemi agli autovalori per equazioni differenziali ordinarie che porta a costruire sistemi ortonormali completi di  $L^2[a, b]$  costituiti da sistemi di autofunzioni. Uno di questi problemi è il cosiddetto *problema di Sturm-Liouville*, se si considera il quale le successioni di autofunzioni corrispondenti formano un sistema ortonormale completo di  $L^2[a, b]$ . Alcuni di questi problemi di Sturm-Liouville singolari aventi applicazioni importanti comportano la risoluzione delle equazioni differenziali dette di *Légendre*, *Laguerre* e *Hermite*, che hanno come soluzione, sotto certe condizioni, proprio i polinomi di *Légendre*, *Laguerre* e *Hermite*, rispettivamente. Altre applicazioni dei polinomi ortogonali riguardano problemi ai limiti per equazioni alle derivate parziali.

## 2. Proprietà

Essendo  $Q_n$  ortogonale ad ogni elemento di  $\mathbb{P}_{n-1}$ , una migliore comprensione delle proprietà della famiglia dei polinomi ortogonali ( $Q_n$ ) seguirà dalla caratterizzazione del *complemento ortogonale* di  $\mathbb{P}_{n-1}$ . Innanzitutto, dimostriamo un risultato a proposito dell'approssimazione ai minimi quadrati negli spazi a prodotto interno.

LEMMA 5.3. Sia  $E$  un sottospazio di dimensione finita di uno spazio  $X$  dotato di prodotto interno, e sia  $x \in X \setminus E$ . Allora  $y^* \in E$  è l'approssimazione ai minimi quadrati di  $x$  fra gli elementi di  $E$ , cioè il punto più vicino a  $x$  in  $E$  o anche la proiezione ortogonale di  $x$  su  $E$ , se e solo se  $\langle x - y^*, y \rangle = 0$  per ogni  $y \in E$ , ossia se e solo se  $(x - y^*) \perp E$ .

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo, preliminarmente, che abbiamo scelto  $E$  sottospazio di dimensione finita di  $X$  e quindi è garantita l'esistenza degli elementi di migliore approssimazione (vedi teorema 1.6); essendo poi  $X$  uno spazio a prodotto interno si può dimostrare che vale anche l'unicità, in quanto sostanzialmente la norma di ciascuno di tali spazi è strettamente convessa e dunque si può applicare il risultato del teorema 1.12.

( $\Leftarrow$ ) Supponiamo, dapprima, che sia  $(x - y^*) \perp E$ . Allora, per ogni  $y \in E$ , si ha:

$$\|x - y\|_2^2 = \|(x - y^*) + (y^* - y)\|_2^2 = \|x - y^*\|_2^2 + \|y^* - y\|_2^2,$$

poiché  $(y^* - y) \in E$  e dunque  $(x - y^*) \perp (y^* - y)$ . Perciò  $\|x - y\| > \|x - y^*\|$  a meno che non sia  $y = y^*$ ; in altre parole  $y^*$  è l'unico elemento di miglior approssimazione di  $x$  in  $E$ .

( $\Rightarrow$ ) Supponiamo, ora, che  $x - y^*$  non sia ortogonale a  $E$ . Allora esiste un certo  $y \in E$  con  $\|y\| = 1$  tale che  $\alpha = \langle x - y^*, y \rangle \neq 0$ . Ne deriva che  $y^* + \alpha y \in E$  è un'approssimazione migliore di  $x$  rispetto a  $y^*$  (e certamente  $y^* + \alpha y \neq y^*$ ), ossia  $y^*$  non è l'approssimazione ai minimi quadrati di  $x$ . Infatti si avrebbe:

$$\begin{aligned} \|x - (y^* + \alpha y)\|_2^2 &= \|(x - y^*) - \alpha y\|_2^2 = \langle (x - y^*) - \alpha y, (x - y^*) - \alpha y \rangle \\ &= \|x - y^*\|_2^2 - 2\alpha \langle x - y^*, y \rangle + \alpha^2 \\ &= \|x - y^*\|_2^2 - \alpha^2 < \|x - y^*\|_2^2. \end{aligned}$$

Quindi è necessario che sia  $\langle x - y^*, y \rangle = 0$ , per ogni  $y \in E$ .  $\square$

LEMMA 5.4 (**Integrazione per parti**).

$$\int_a^b u^{(n)} v = \sum_{k=1}^n [(-1)^{k-1} u^{(n-k)} v^{(k-1)}]_a^b + (-1)^n \int_a^b u v^{(n)}.$$

Ora: se  $v$  è un polinomio di grado  $< n$ , allora  $v^{(n)} = 0$  e otteniamo il seguente risultato.

LEMMA 5.5.  $f \in C[a, b]$  soddisfa la relazione  $\int_a^b f(x) p(x) \omega(x) dx = 0$  per tutti i polinomi  $p \in \mathbb{P}_{n-1}$  se e solo se esiste una funzione  $u$   $n$ -volte differenziabile su  $[a, b]$  verificante le condizioni:  $f\omega = u^{(n)}$  e  $u^{(k)}(a) = u^{(k)}(b) = 0$ , per ogni  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

DIMOSTRAZIONE. Una direzione segue facilmente come diretta conseguenza del lemma 5.4: data  $u$  come sopra, si avrebbe

$$\int_a^b f p \omega = \int_a^b u^{(n)} p = (-1)^n \int_a^b u p^{(n)} = 0.$$

Perciò supponiamo di avere  $\int_a^b f p \omega = 0$ , per ogni  $p \in \mathbb{P}_{n-1}$ . Integrando  $f\omega$  ripetutamente, scegliendo costanti appropriate, potremmo definire una funzione  $u$  che soddisfi  $f\omega = u^{(n)}$  e  $u^{(k)}(a) = 0$  per ogni  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . Vogliamo far vedere che le ipotesi su  $f$  necessariamente implicano che sia anche  $u^{(k)}(b) = 0$  per ogni  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . Ora, il lemma 5.4 ci dice che:

$$0 = \int_a^b f p \omega = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} u^{(n-k)}(b) p^{(k-1)}(b)$$

per ogni  $p \in \mathbb{P}_{n-1}$ . Ma i numeri  $p(b), p'(b), \dots, p^{(n-1)}(b)$  sono del tutto arbitrari; ossia (ancora integrando ripetutamente, scegliendo le costanti a piacimento) possiamo trovare polinomi  $p_k$  di grado  $k < n$  tali che  $p_k^{(k)}(b) \neq 0$  e  $p_k^{(j)}(b) = 0$  per  $j \neq k$ . Ad esempio  $p_k(x) = (x-b)^k$  funziona bene! In ogni caso, deve aversi  $u^{(k)}(b) = 0$ , per tutti i  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .  $\square$

Il teorema di Rolle ci dice qualcosa in più riguardo alle funzioni ortogonali a  $\mathbb{P}_{n-1}$ .

LEMMA 5.6. *Se  $\omega(x) > 0$  in  $(a, b)$  e se  $f \in C[a, b]$  appartiene al complemento ortogonale di  $\mathbb{P}_{n-1}$  (relativamente a  $\omega$ ); ossia se  $f$  soddisfa la condizione:*

$$\int_a^b f(x) p(x) \omega(x) dx = 0$$

*per tutti i polinomi  $p \in \mathbb{P}_{n-1}$ , allora  $f$  possiede almeno  $n$  zeri distinti sull'intervallo aperto  $(a, b)$ .*

DIMOSTRAZIONE. Scriviamo  $f\omega = u^{(n)}$ , dove  $u^{(k)}(a) = u^{(k)}(b) = 0$  per tutti i  $k = 0, \dots, n-1$ . In particolare, essendo  $u(a) = u(b) = 0$ , il teorema di Rolle ci dice che  $u'$  avrebbe almeno uno zero in  $(a, b)$ , sia  $c$ . Ma allora  $u'(a) = u'(c) = u'(b) = 0$ , e così  $u''$  dovrebbe avere almeno due zeri in  $(a, b)$ . Iterando il ragionamento, si vede che  $f\omega = u^{(n)}$  deve avere almeno  $n$  zeri in  $(a, b)$ . Poiché  $\omega > 0$ , segue subito il risultato.  $\square$

COROLLARIO 5.7. *Sia  $(Q_n)$  la successione dei polinomi ortogonali associata a un dato peso  $\omega$ , con  $\omega > 0$  in  $(a, b)$ . Allora le radici di  $Q_n$  sono reali, semplici e cadono tutte in  $(a, b)$ .*

### 3. I polinomi di Légendre

Ci concentriamo, ora, sui polinomi di Légendre e di Chebyshev e, in particolare, ritorniamo al problema di trovare una formula esplicita per i polinomi di Légendre, che finora abbiamo dato senza dimostrare.

Il lemma 5.5, prendendo  $\omega \equiv 1$  e  $[a, b] = [-1, 1]$ , dice che se vogliamo trovare un polinomio  $f$  di grado  $n$  che sia ortogonale a  $\mathbb{P}_{n-1}$ , allora dovremo prendere un polinomio come funzione  $u$ , e questo  $u$  dovrà essere divisibile per  $(x-1)^n(x+1)^n$ . In altre parole, dobbiamo avere

$P_n(x) = c_n \cdot D^n [(x^2 - 1)^n]$ , dove  $D$  denota l'operatore di derivazione, mentre la costante  $c_n$  è scelta in modo tale che  $P_n(1) = 1$ .

LEMMA 5.8 (**Formula di Leibniz o derivata del prodotto**).

$$D^n(fg) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k(f) D^{n-k}(g).$$

DIMOSTRAZIONE. Lo si vede per induzione e usando la formula:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

□

Di conseguenza:

$$Q(x) = D^n [(x-1)^n(x+1)^n] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k(x-1)^n D^{n-k}(x+1)^n,$$

e inoltre  $Q(1) = 2^n n!$  e  $Q(-1) = (-1)^n 2^n n!$ . Questo, infine, ci dà la formula scoperta da Rodrigues nel 1814:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} D^n [(x^2 - 1)^n].$$

La *formula di Rodrigues* per i polinomi di Légendre è molto utile e si generalizza facilmente ai polinomi di Jacobi.

OSSERVAZIONE 5.9. 1. Per il corollario 5.7 le radici dei polinomi di Légendre  $P_n$  sono reali, distinte e cadono nell'intervallo aperto  $(-1, 1)$ .

2. Dal teorema del binomio di Newton, possiamo anche scrivere:

$$(x^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} x^{2n-k}.$$

Se vi applichiamo  $\frac{1}{2^n n!} D^n$  e semplifichiamo, otteniamo una nuova formula per i polinomi di Légendre:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n-2k}{n} x^{n-2k}.$$

In particolare, se  $n$  è pari (rispettivamente: dispari), allora  $P_n$  è pari (rispettivamente: dispari). Notiamo, anche, che se supponiamo che  $\tilde{P}_n$  denoti il polinomio costruito con il procedimento standard di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, allora deve risultare:  $P_n = 2^{-n} \binom{2n}{n} \tilde{P}_n$ .

3. In termini della nostra formula ricorsiva standard (18), si vede che  $a_n = 0$ , in quanto  $xP_n^2(x)$  è sempre dispari, dunque rimane da calcolare  $b_n$ . Innanzitutto, integrando per parti, si ha:

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = [xP_n^2(x)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 x \cdot 2P_n(x) P_n'(x) dx,$$

o, equivalentemente:  $\langle P_n, P_n \rangle = 2 - 2 \langle P_n, xP'_n \rangle$ . Ma  $xP'_n = nP_n +$  termini di grado più basso; perciò  $\langle P_n, xP'_n \rangle = n \langle P_n, P_n \rangle$ . Quindi  $\langle P_n, P_n \rangle = 2/(2n + 1)$ . Usando ciò ed il fatto che  $P_n = 2^{-n} \binom{2n}{n} \tilde{P}_n$ , otteniamo che  $b_n = n^2/(4n^2 - 1)$ . Pertanto:

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= 2^{-n-1} \binom{2n+2}{n+1} \tilde{P}_{n+1} \\ &= 2^{-n-1} \binom{2n+2}{n+1} \left[ x \tilde{P}_n - \frac{n^2}{(4n^2-1)} \tilde{P}_{n-1} \right] \\ &= \frac{2n+1}{n+1} x \cdot P_n - \frac{n}{n+1} P_{n-1}. \end{aligned}$$

I polinomi di Légendre soddisfano, dunque, la relazione ricorsiva:

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)x \cdot P_n(x) - nP_{n-1}(x).$$

4. Segue dai calcoli del punto 3. che la successione  $\hat{P}_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n$  è ortonormale sull'intervallo  $[-1, 1]$ .
5. I polinomi di Légendre soddisfano l'equazione differenziale:

$$(1-x^2)P''_n(x) - 2xP'_n(x) + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

Infatti, posto  $u = (x^2-1)^n$ , cioè  $u^{(n)} = 2^n n! P_n$ , osserviamo che  $(x^2-1)u' = 2nxu$ . Ora applichiamo l'operatore differenziale  $D^{n+1}$  a entrambi i lati di questa equazione, usando la formula di Leibniz, e semplifichiamo:

$$\begin{aligned} u^{(n+2)}(x^2-1) + (n+1)u^{(n+1)}2x + \frac{(n+1)n}{2}u^{(n)} \cdot 2 &= \\ &= 2n [u^{(n+1)}x + (n+1)u^{(n)}] \\ \Rightarrow (1-x^2)u^{(n+2)} - 2xu^{(n+1)} + n(n+1)u^{(n)} &= 0. \end{aligned}$$

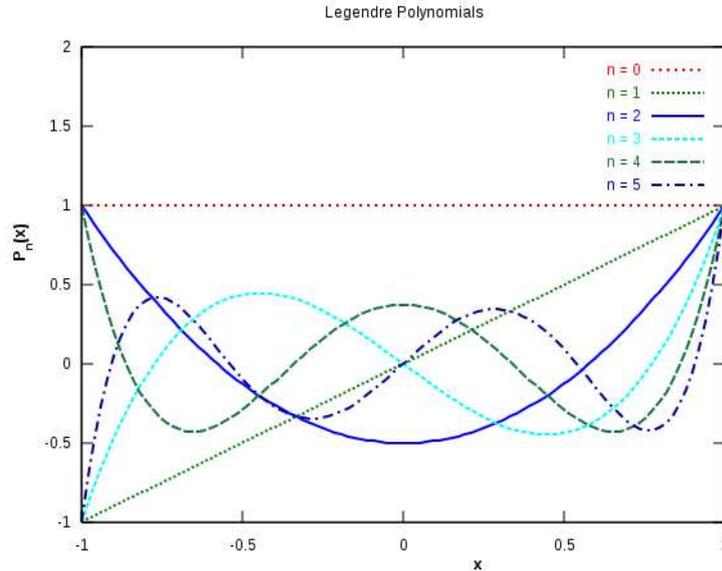
Data, ora, una successione di polinomi ortogonali, ha senso considerare le *serie di Fourier generalizzate* relative a tale successione e trovare gli analoghi del nucleo di Dirichlet, del teorema di Lebesgue e così via. Nel caso dei polinomi di Légendre, vale il seguente risultato.

**TEOREMA 5.10.** *La serie di Fourier-Légendre per  $f \in C[-1, 1]$  è data da  $\sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \hat{P}_k \rangle \hat{P}_k$ , dove:*

$$\hat{P}_k = \sqrt{\frac{2k+1}{2}} P_k \quad e \quad \langle f, \hat{P}_k \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \hat{P}_k(x) dx.$$

L'operatore somma parziale  $S_n(f) = \sum_{k=0}^n \langle f, \hat{P}_k \rangle \hat{P}_k$  è una proiezione lineare su  $\mathbb{P}_n$  e può scriversi come:

$$S_n(f)(x) = \int_{-1}^1 f(t) K_n(t, x) dt,$$

FIGURA 5.3. Polinomi di Légendre, per  $n = 0, 1, \dots, 5$ .

dove:

$$K_n(t, x) = \sum_{k=0}^n \hat{P}_k(t) \hat{P}_k(x).$$

Poiché i polinomi  $\hat{P}_k$  sono ortonormali, si ha che:

$$\sum_{k=0}^n \left| \langle f, \hat{P}_k \rangle \right|^2 = \|S_n(f)\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \left| \langle f, \hat{P}_k \rangle \right|^2,$$

pertanto i *coefficienti di Fourier generalizzati*  $\langle f, \hat{P}_k \rangle$  sono di quadrato sommabile, in particolare  $\langle f, \hat{P}_k \rangle \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Come accade nel caso delle serie di Fourier, il fatto che i polinomi (cioè il sottospazio generato dai  $\hat{P}_k$ ) siano densi in  $C[a, b]$  implica che  $S_n(f)$  converga proprio alla funzione  $f$  in norma  $\|\cdot\|_2$ . Queste medesime osservazioni restano valide per qualunque successione di polinomi ortogonali. Il reale problema resta, proprio come per le serie di Fourier, se la ridotta  $n$ -esima  $S_n(f)$  costituisca una buona approssimazione uniforme, o perlomeno puntuale, di  $f$ .

Dal fatto che  $|P_n(x)| \leq 1$  su  $[-1, 1]$ , si ottiene:

$$|K_n(t, x)| \leq \sum_{k=0}^n \sqrt{\frac{2k+1}{2}} \sqrt{\frac{2k+1}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (2k+1) = \frac{(n+1)^2}{2}.$$

Quindi  $\|S_n(f)\| \leq (n+1)^2 \|f\|$ , e allora i numeri di Lebesgue per questo procedimento sono al massimo  $(n+1)^2$ . L'analogo del teorema

di Lebesgue in questo caso si esprimerebbe in questo modo:

$$\|f - S_n(f)\| \leq Cn^2 E_n(f).$$

Pertanto  $S_n(f)$  converge uniformemente a  $f$  ogniqualevolta  $n^2 E_n(f) \rightarrow 0$ , e il teorema di Jackson ci dice che accadrà questo: *se  $f$  è derivabile 2 volte con derivata continua, allora la serie di Fourier-Légendre di  $f$  converge uniformemente a  $f$  su  $[-1, 1]$ .*

#### 4. L'identità di Christoffel-Darboux

Sarebbe piuttosto interessante disporre di una forma più compatta per  $K_n(t, x)$ : il fatto che questo sia effettivamente sempre possibile, per ogni successione di polinomi ortogonali, è un risultato notevole.

Utilizzando la nostra notazione originaria, sia  $(Q_n)$  la successione dei polinomi monici ortogonali corrispondenti a un dato peso  $\omega$ , e sia  $(\hat{Q}_n)$  la controparte ortonormale di  $(Q_n)$ , ossia  $Q_n = \lambda_n \hat{Q}_n$ , dove  $\lambda_n = \sqrt{\langle Q_n, Q_n \rangle}$ . Ricordiamo che, per l'osservazione 5.2 punto 1., si ha  $\lambda_n^2 = b_n \lambda_{n-1}^2$ . Come per i polinomi di Légendre, ogni  $f \in C[a, b]$  è rappresentabile tramite una serie di Fourier generalizzata  $\sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \hat{Q}_k \rangle \hat{Q}_k$ , con operatore somma parziale

$$S_n(f)(x) = \int_a^b f(t) K_n(t, x) \omega(t) dt,$$

dove  $K_n(t, x) = \sum_{k=0}^n \hat{Q}_k(t) \hat{Q}_k(x)$ . Come prima  $S_n$  risulta una proiezione sullo spazio  $\mathbb{P}_n$ , in particolare  $S_n(1) = 1$ , per ogni  $n$ .

**TEOREMA 5.11 (Christoffel-Darboux).** *Il nucleo  $K_n(t, x)$  può scriversi in questo modo:*

$$K_n(t, x) = \sum_{k=0}^n \hat{Q}_k(t) \hat{Q}_k(x) = \lambda_{n+1} \lambda_n^{-1} \frac{\hat{Q}_{n+1}(t) \hat{Q}_n(x) - \hat{Q}_n(t) \hat{Q}_{n+1}(x)}{t - x}.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Incominciamo ricordando le formule ricorsive standard del procedimento di Gram-Schmidt:

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(t) &= (t - a_n)Q_n(t) - b_n Q_{n-1}(t) \\ Q_{n+1}(x) &= (x - a_n)Q_n(x) - b_n Q_{n-1}(x) \end{aligned}$$

nelle quali  $b_0 = 0$ . Moltiplicando la prima per  $Q_n(x)$ , la seconda per  $Q_n(t)$ , e calcolando la differenza tra la prima e la seconda otteniamo quanto segue:

$$\begin{aligned} &Q_{n+1}(t)Q_n(x) - Q_n(t)Q_{n+1}(x) = \\ &= (t - x)Q_n(t)Q_n(x) + b_n [Q_n(t)Q_{n-1}(x) - Q_n(x)Q_{n-1}(t)] \end{aligned}$$

e ancora  $b_0 = 0$ . Se dividiamo, ora, entrambi i membri di quest'equazione per  $\lambda_n^2$ , risulta:

$$\begin{aligned} & \lambda_n^{-2} [Q_{n+1}(t)Q_n(x) - Q_n(t)Q_{n+1}(x)] = \\ & = (t-x)\hat{Q}_n(t)\hat{Q}_n(x) + \lambda_{n-1}^{-2} [Q_n(t)Q_{n-1}(x) - Q_n(x)Q_{n-1}(t)]. \end{aligned}$$

Possiamo dunque iterare questo procedimento, giungendo infine a questa scrittura:

$$\lambda_n^{-2} [Q_{n+1}(t)Q_n(x) - Q_n(t)Q_{n+1}(x)] = (t-x) \sum_{k=0}^n \hat{Q}_k(t)\hat{Q}_k(x).$$

L'identità di Christoffel-Darboux segue ora scrivendo  $Q_n = \lambda_n \hat{Q}_n$  e così via.  $\square$

Ora abbiamo anche un risultato di convergenza puntuale, che risulta essere una versione più blanda del teorema di Dini-Lipschitz (vedi teorema 4.3 pag.75), il quale fornisce un risultato di convergenza uniforme, quindi un risultato più forte.

**TEOREMA 5.12.** *Sia  $f \in C[a, b]$  e supponiamo che esista un punto  $x_0 \in [a, b]$  tale per cui valgano le seguenti condizioni:*

- (i)  *$f$  sia lipschitziana in  $x_0$ , ossia  $|f(x_0) - f(x)| \leq K|x_0 - x|$ , per una certa costante  $K$  e per ogni  $x \in [a, b]$ ;*
- (ii) *la successione  $(\hat{Q}_n(x_0))$  sia limitata.*

*Allora la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \hat{Q}_k \rangle \hat{Q}_k(x_0)$  converge a  $f(x_0)$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Osserviamo, dapprima, che la successione  $\lambda_{n+1}\lambda_n^{-1}$  è limitata: infatti, usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1}^2 &= \langle Q_{n+1}, Q_{n+1} \rangle = \langle Q_{n+1}, xQ_n \rangle \\ &\leq \|Q_{n+1}\|_2 \cdot \|x\| \cdot \|Q_n\|_2 = \max\{|a|, |b|\} \lambda_{n+1} \lambda_n. \end{aligned}$$

Pertanto  $\lambda_{n+1}\lambda_n^{-1} \leq c = \max\{|a|, |b|\}$ . Ora, utilizzando l'identità di Christoffel-Darboux, otteniamo:

$$\begin{aligned} S_n(f)(x_0) - f(x_0) &= \int_a^b [f(t) - f(x_0)] K_n(t, x_0) \omega(t) dt \\ &= \lambda_{n+1} \lambda_n^{-1} \int_a^b \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} \left[ \hat{Q}_{n+1}(t)\hat{Q}_n(x_0) - \hat{Q}_n(t)\hat{Q}_{n+1}(x_0) \right] \omega(t) dt \\ &= \lambda_{n+1} \lambda_n^{-1} \left[ \langle h, \hat{Q}_{n+1} \rangle \hat{Q}_n(x_0) - \langle h, \hat{Q}_n \rangle \hat{Q}_{n+1}(x_0) \right], \end{aligned}$$

dove  $h(t) = \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0}$ . Ma  $h$  è limitata e continua dappertutto tranne, al più, nel punto  $x_0$ , per l'ipotesi (i),  $\lambda_{n+1}\lambda_n^{-1}$  è limitata anch'essa e infine  $\hat{Q}_n(x_0)$  è limitata per l'ipotesi (ii). Tutto ciò che resta da fare è osservare che i numeri  $\langle h, \hat{Q}_n \rangle$  sono i coefficienti di Fourier generalizzati della funzione limitata e Riemann-integrabile  $h$ , e dunque devono tendere a zero in quanto sono di quadrato sommabile.  $\square$

Terminiamo con un risultato negativo che comunque è giusto enunciare, perché non sempre le cose vanno come si spera.

**TEOREMA 5.13 (Nikolaev).** *Non esiste alcun peso  $\omega$  tale per cui ogni funzione  $f \in C[a, b]$  abbia uno sviluppo in serie di polinomi ortogonali che sia uniformemente convergente. Infatti, dato un qualsiasi peso  $\omega$ , esiste  $f$  per cui la quantità  $\|f - S_n(f)\|$  non sia limitata.*

## CAPITOLO 6

### *Metodi di integrazione numerica*

In questo capitolo parleremo di approssimazione in riferimento all'utilizzo di formule cosiddette di *quadratura* per calcolare numericamente il valore di un integrale.

Dunque il problema che si presenta è quello di calcolare il valore dell'integrale definito  $\int_a^b f(x) dx$  nel caso in cui non si conosca una primitiva della funzione integranda  $f(x)$ , oppure in molti casi può accadere che funzioni semplici abbiano primitive tanto complicate che spesso le formule approssimate sono più facilmente calcolabili di quelle esatte e con maggiore precisione. In tutti questi casi si possono utilizzare delle *formule di quadratura lineari*, ossia approssimazioni dell'integrale che fanno uso dei valori della funzione solo in alcuni punti:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n \omega_i f(x_i),$$

dove gli  $x_i$  sono detti *nodi di quadratura*, i coefficienti  $\omega_i$ , che sono numeri reali, *pesi* della formula di quadratura, ed entrambi i membri della formula sono lineari in  $f$ .

Nel seguito ci limiteremo allo studio di integrali definiti del tipo  $\int_a^b \omega(x) f(x) dx$ , dove  $\omega(x)$  è una funzione positiva su  $[a, b]$  detta *funzione peso* (l'abbiamo già incontrata nei capitoli precedenti). Faremo una panoramica delle diverse tipologie di formule di quadratura, da quelle di tipo interpolatorio costruite su nodi equispaziati, a quelle implementate su nodi coincidenti con gli zeri di polinomi ortogonali sull'intervallo  $[a, b]$  relativamente alla funzione peso  $\omega(x)$ . Ovviamente le formule 'migliori' saranno quelle che convergeranno al valore vero dell'integrale il più velocemente possibile.

#### **1. Formule di tipo interpolatorio**

Siano dati  $n + 1$  punti distinti  $x_0, \dots, x_n$  dell'intervallo  $[a, b]$ . Sia  $p_n(x) = \sum_{i=0}^n l_i(x) f(x_i)$  l'unico polinomio di grado  $n$  che interpola  $f$  nei punti  $x_i$ , e sia  $E_n(f)$  l'errore di interpolazione.

Allora, per la proprietà di linearità dell'integrale, si ha:

$$\int_a^b \omega(x) f(x) dx = \sum_{i=0}^n \left( \int_a^b \omega(x) l_i(x) dx \right) f(x_i) + \int_a^b \omega(x) E_n(f(x)) dx.$$

Posto, quindi:

$$\omega_i = \int_a^b \omega(x) l_i(x) dx; \quad R_n(f) = \int_a^b \omega(x) E_n(f(x)) dx,$$

allora ne deriva che:

$$(19) \quad \int_a^b \omega(x) f(x) dx = \sum_{i=0}^n \omega_i f(x_i) + R_n(f).$$

DEFINIZIONE 6.1 (*Formule di quadratura interpolatorie*). Le formule di quadratura del tipo (19) sono chiamate *interpolatorie*, poiché si basano sul polinomio d'interpolazione della funzione  $f$ .

DEFINIZIONE 6.2 (*Formule di quadratura esatte*). Si dice che una formula di quadratura di tipo interpolatorio è *esatta* con ordine di esattezza pari ad  $n$  se integra esattamente i polinomi di grado  $n$ .

Questa definizione dice che, se  $f(x) \in \mathbb{P}_n$ , allora  $E_n(f) = 0$  e quindi anche  $R_n(f) = 0$ .

Inoltre, dice anche che, se  $f(x) = 1, x, x^2, \dots, x^n$  e la formula (19) è esatta di ordine  $n$ , allora è possibile scrivere:

$$(20) \quad \begin{cases} \omega_0 + \dots + \omega_n = \int_a^b \omega(x) dx \\ \omega_0 x_0 + \dots + \omega_n x_n = \int_a^b \omega(x) x dx \\ \vdots \\ \omega_0 x_0^n + \dots + \omega_n x_n^n = \int_a^b \omega(x) x^n dx \end{cases}$$

dove gli integrali  $\mu_k = \int_a^b \omega(x) x^k dx$ ,  $k = 0, \dots, n$  si chiamano *momenti* di ordine  $k$  di  $\omega$ . In termini fisici, se pensiamo a  $\omega(x)$  come alla densità di un'asta sottile posizionata sull'intervallo  $[a, b]$ , allora  $\mu_0$  è la massa dell'asta,  $\mu_1/\mu_0$  è il suo centro di massa,  $\mu_2$  è il suo momento d'inerzia intorno all'origine e così via. In termini probabilistici, se  $\mu_0 = 1$ , allora  $\omega$  rappresenta la funzione densità di probabilità per una certa variabile aleatoria,  $\mu_1$  rappresenta il valor medio di tale v.a. e  $\mu_2 - \mu_1^2$  la sua varianza (per una trattazione più approfondita del *problema dei momenti*, cfr.[1], pagg.96 – 99).

Il sistema (20) è un sistema di ordine  $n+1$  con matrice di Vandermonde, la quale è non singolare in quanto  $x_i \neq x_j$ . Dunque possiamo risolvere tale sistema per determinare univocamente i pesi  $\omega_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ . L'unicità dei pesi di quadratura, oltretutto, garantisce che non esistono altre formule per i pesi che producano formule di quadratura di tipo interpolatorio (19).

Osserviamo che, essendo la matrice di Vandermonde mal condizionata, ci aspettiamo che, per  $n \rightarrow \infty$ , queste formule siano instabili. Vedremo successivamente come evitare questi problemi di instabilità.

Una ragionevole richiesta per le nostre formule di quadratura è che siano *esatte* per polinomi di grado basso.

DEFINIZIONE 6.3 (*Formule di quadratura convergenti*). Una formula di quadratura di tipo interpolatorio si dice *convergente* se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \omega_i f(x_i) = \int_a^b f(x) dx.$$

## 2. Formule di Newton-Côtes

Le *formule di quadratura di Newton-Côtes* (N-C) sono caratterizzate in primo luogo dalla scelta di nodi equispaziati  $x_i = a + ih$ , dove  $h = \frac{b-a}{n}$  si chiama *passo* della formula. Dunque i nodi sono fissati in progressione aritmetica di ragione  $h = \frac{b-a}{n}$ . Le formule di N-C si dividono fondamentalmente in due tipologie:

- *formule chiuse*, nelle quali  $x_0 = a$ ,  $x_n = b$  e  $x_i = x_0 + ih$ , con  $i = 1, \dots, n-1$  e  $h = \frac{b-a}{n}$ ,  $n > 0$ ;
- *formule aperte*, nelle quali, invece  $x_0 = a + h$ ,  $x_n = b - h$  e  $x_i = x_0 + ih$ , con  $i = 1, \dots, n-1$  e  $h = \frac{b-a}{n+2}$ ,  $n > 0$ .

Quindi le formule chiuse valutano il valore della funzione in tutti i punti, mentre le formule aperte non considerano i valori della funzione negli estremi dell'intervallo.

I pesi di quadratura  $\omega_i$  delle formule di N-C hanno la proprietà di dipendere solo da  $n$  e  $h$ , ma non dall'intervallo di quadratura.

Infatti, nel caso di formule chiuse e con  $\omega(x) = 1$ , posto  $x = a + th$ , con  $0 \leq t \leq n$ , i pesi diventano:

$$\omega_i = \int_a^b l_i(x) dx = h \int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t-j}{i-j} dt.$$

Poniamo:

$$\alpha_i = \int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t-j}{i-j} dt, \quad i = 0, \dots, n$$

dove osserviamo che gli  $\alpha_i$  dipendono da  $i$  e da  $n$ , ma non dai nodi  $x_i$ . Con questa posizione, la formula di quadratura diventa:

$$I_n(f) = h \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i).$$

I pesi  $\alpha_i$  sono noti anche come *numeri di Côtes* ed hanno due interessanti proprietà, ossia sono tali che  $\alpha_i = \alpha_{n-i}$  e  $\sum_{i=0}^n \alpha_i = n$ , dovute alla proprietà dei coefficienti di Lagrange  $l_i(x)$  di formare una partizione dell'unità.

Anche nel caso di formule aperte sono calcolabili i pesi  $\alpha_i$ , e si verifica che essi sono uguali a:

$$\alpha_i = \int_{-1}^{n+1} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t-j}{i-j} dt, \quad i = 0, \dots, n.$$

Consideriamo, ora, alcuni casi particolari notevoli.

**1.** Se prendiamo come grado  $n = 1$  e scegliamo le formule di N-C chiuse, essendo  $x_0 = a$ ,  $x_1 = b$  e  $h = b - a$  si trova:

$$\alpha_0 = \int_0^1 (1-t) dt = \frac{1}{2} = \alpha_1,$$

e la formula di quadratura corrispondente è la *formula dei trapezi*, ossia:

$$I_1(f) = \frac{b-a}{2} [f(x_0) + f(x_1)].$$

Fondamentalmente la regola dei trapezi consiste nell'approssimare la regione sottesa al grafico della funzione come un trapezoide e calcolarne l'area.

**2.** Nel caso  $n = 2$  sempre con formule chiuse, invece, la funzione  $f$  viene approssimata con un polinomio di secondo grado costruito usando i nodi  $x_0 = a$ ,  $x_1 = \frac{a+b}{2}$  e  $x_2 = b$ , in quanto  $h = \frac{b-a}{2}$ . Pertanto per i numeri di Cotes si hanno i valori:

$$\alpha_0 = \int_0^2 \frac{1}{2}(t-1)(t-2) dt = \frac{1}{3}; \quad \alpha_1 = \int_0^2 t(2-t) dt = \frac{4}{3}; \quad \alpha_2 = \alpha_0.$$

Si ottiene, allora, la *formula di (Cavalieri)-Simpson*:

$$I_2(f) = \frac{b-a}{6} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)].$$

La regola di (Cavalieri)-Simpson prevede, in sostanza, la suddivisione dell'intervallo d'integrazione in sottointervalli e la sostituzione in questi sottointervalli della funzione integranda mediante archi di parabola, cioè mediante polinomi quadratici.

**3.** L'ultimo caso degno di nota delle formule di N-C chiuse è quello per cui  $n = 3$ , si trovano  $\alpha_0 = \alpha_3 = \frac{3}{8}$  e  $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{9}{8}$  e la formula corrispondente è nota con il nome di *formula dei 3/8* o '*pulcherrima*':

$$I_3(f) = \frac{b-a}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)].$$

4. Tra le formule di Newton-Côtes aperte, è utile segnalare il caso  $n = 1$ : è la cosiddetta *regola dei rettangoli* o *del punto medio*:

$$I_1(f_a) = (b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right).$$

Tale formula approssima l'integrale (e quindi l'area sottesa dalla funzione) come un rettangolo di base  $b - a$  e di altezza  $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ , dove  $a$  e  $b$  sono gli estremi di integrazione e  $\frac{a+b}{2}$  è il punto medio dell'intervallo.

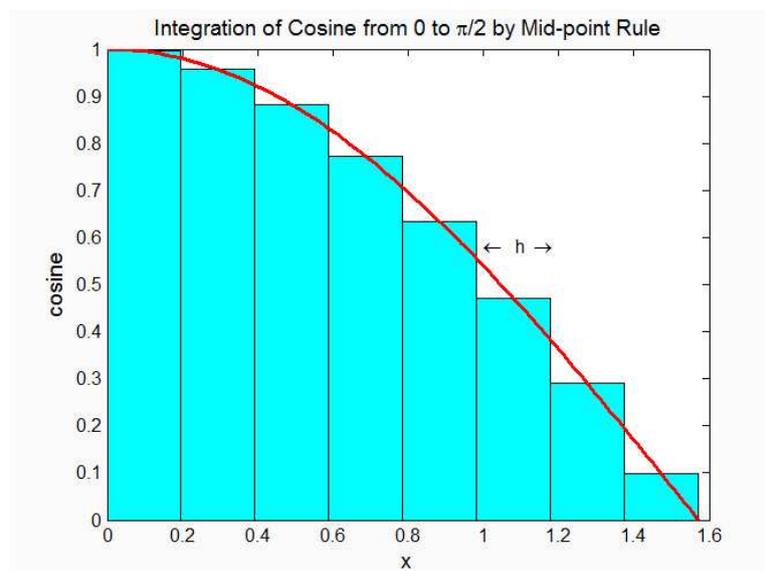


FIGURA 6.1. Integrazione della funzione  $\cos x$  nell'intervallo  $[0, \pi/2]$  utilizzando la formula del punto medio, in questo caso composta o generalizzata, ottenuta suddividendo l'intervallo d'integrazione  $[0, \pi/2]$  in tanti sottointervalli tramite nodi equispaziati ed applicando la formula del punto medio a ciascun intervallino, per diminuire il passo d'integrazione.

### 3. Stima dell'errore di quadratura

Si dimostra il seguente risultato:

TEOREMA 6.4. Sia  $f \in C^k[a, b]$ . Sotto quest'ipotesi di regolarità della funzione, posto  $h = \frac{b-a}{n}$ , vale:

$$(21) \quad R_n(f) = I_n(f) - \int_a^b f(x) dx = \gamma_n h^{k+1} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}, \quad \xi \in [a, b]$$

dove:

- per  $n$  pari si ha:  $k = n + 2$  e  $\gamma_n = \int_0^n t \pi_n(t) dt$
- per  $n$  dispari, invece:  $k = n + 1$  e  $\gamma_n = \int_0^n \pi_n(t) dt$

con  $\pi_n(t) = t(t-1)\cdots(t-n)$ .

Se riprendiamo i casi particolari precedenti,  $n = 1$ ,  $n = 2$  ed  $n = 3$ , nella prima situazione, essendo  $n$  dispari, allora  $k = 2$ , quindi  $\gamma_1 = \int_0^1 t(t-1) dt = -\frac{1}{6}$ , da cui possiamo ricavare l'errore di quadratura per la formula dei trapezi:

$$R_1(f) = -\frac{h^3}{6} \frac{f''(\xi)}{2!} = -\frac{h^3}{12} f''(\xi), \quad \xi \in [a, b].$$

Nei casi  $n = 2$  (formula di Simpson) ed  $n = 3$  (formula dei 3/8), invece, svolgendo direttamente i conti otteniamo, rispettivamente:

$$R_2(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) \quad \text{e} \quad R_3(f) = -\frac{3}{80} h^5 f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in [a, b].$$

L'esame dell'errore di quadratura indica due situazioni: quando  $n$  è pari, le formule di Newton-Côtes sono esatte per polinomi aventi grado  $n + 1$ ; se  $n$  è dispari, invece, tali formule sono esatte per polinomi di grado pari ad  $n$ . Pertanto, ai fini dell'errore, se ne ricava che sono preferibili le formule per  $n$  pari, ovvero con  $n + 1$  punti d'interpolazione.

#### 4. Formule di quadratura composite

Continuando a calcolare i valori dei coefficienti  $\alpha_i$ , e conseguentemente anche dei pesi  $\omega_i$ , ad esempio fino ad  $n = 8$ , si verifica che alcuni fra questi pesi  $\omega_i$  risultano negativi, e questa situazione può generare instabilità negli algoritmi dovuta al fenomeno della cancellazione numerica, rendendo in questa maniera le formule inutilizzabili per gradi elevati. In pratica la loro capacità di amplificare gli errori di arrotondamento aumenta.

Per ovviare al problema, una prima alternativa alle formule di Newton-Côtes sono quelle *composite* o *generalizzate*. Esse si utilizzano, di solito, quando il passo d'integrazione  $h = \frac{b-a}{n}$  risulta troppo ampio. In questo caso, allora, si considera l'intervallo  $[a, b]$  e lo si suddivide in  $N$  sottointervalli mediante i nodi equispaziati  $x_k$ , con  $k = 0, \dots, N$ , in cui  $x_0 = a$  e  $x_N = b$ . Per la proprietà di additività dell'integrale possiamo scrivere:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \dots + \int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x) dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx.$$

Ora: in ognuno dei sottointervalli  $I_k = [x_k, x_{k+1}]$  applichiamo una formula di N-C di grado  $n$  e indichiamo con  $I_n^k(f)$  il valore dell'integrale di  $f$  sul  $k$ -esimo intervallino  $I_k$ . Ne deriverà questa scrittura:

$$I(f) = \sum_{k=0}^{N-1} I_n^k(f).$$

Avendo applicato una stessa formula di N-C a  $n + 1$  punti per ognuno degli  $N$  integrali, si avranno  $nN + 1$  nodi con un passo  $h = \frac{b-a}{nN}$ .

Limitiamoci a considerare i casi  $n = 1$  e  $n = 2$ , i quali corrispondono, rispettivamente, alla *formula dei trapezi composta* e alla *formula di Simpson composta*, che costituiscono le formule composite più usate.

1. Quando  $n = 1$ , su ciascun intervallo  $I_k = [x_k, x_{k+1}]$  applichiamo la formula dei trapezi, ottenendo:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f(x_k) + f(x_{k+1})], \quad h = \frac{b-a}{N}.$$

Sommando tutti i contributi dati da questi integrali, otteniamo la formula dei trapezi composta:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \frac{b-a}{2N} [f(x_0) + f(x_1)] + \dots + \frac{b-a}{2N} [f(x_{N-1}) + f(x_N)] \\ &= \frac{b-a}{2N} \left[ f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + f(x_N) \right]. \end{aligned}$$

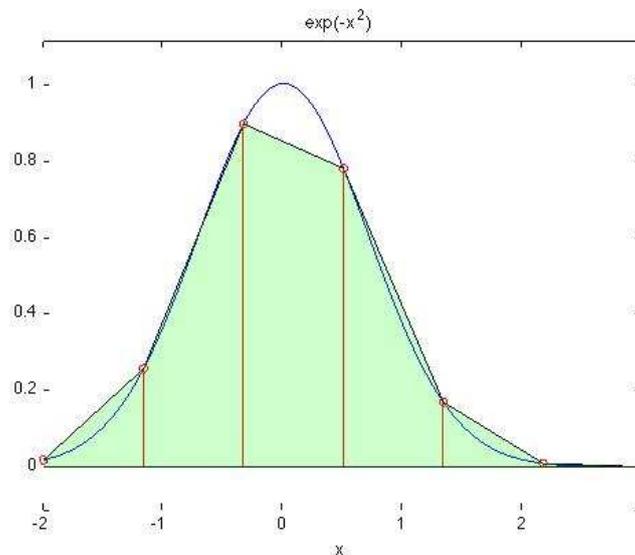


FIGURA 6.2. Integrazione della funzione  $e^{-x^2}$  nell'intervallo  $[-2, 3]$  con il metodo dei trapezi composto: in questo caso si sono ottenuti 6 trapezoidi, utilizzando 7 nodi equispaziati.

2. Quando  $n = 2$ , su ciascun intervallo  $I_k = [x_k, x_{k+1}]$  applichiamo, questa volta, la formula di Simpson, per avere:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f(x_k) + 4f(x'_k) + f(x_{k+1})],$$

dove:

$$x'_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2} \text{ e } h = \frac{b-a}{2N}.$$

Osservando che su ogni intervallino  $I_k$  abbiamo introdotto il punto medio  $x'_k$ , possiamo considerare i nodi  $z_k$ , con  $k = 0, \dots, 2N$ . La formula di Simpson composta è, dunque, la seguente:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6N} [f(z_0) + 4f(z_1) + 2f(z_2) + 4f(z_3) + \dots] + \\ + \frac{b-a}{6N} [\dots + 4f(z_{2N-1}) + f(z_{2N})],$$

dove abbiamo posto  $z_0 = a$  e  $z_{2N} = b$ .

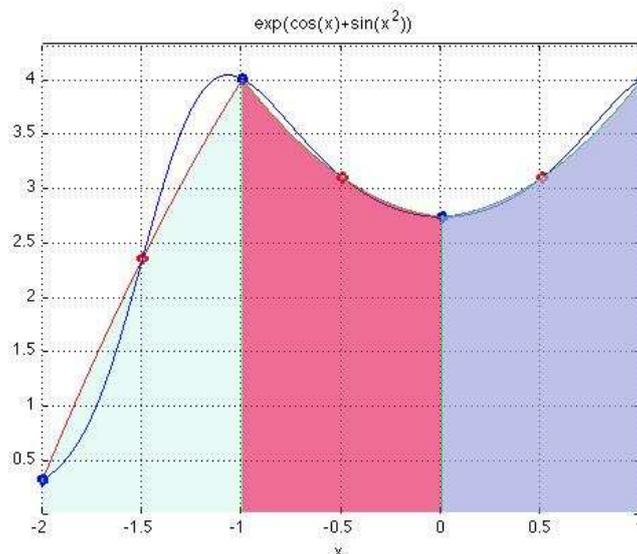


FIGURA 6.3. Integrazione della funzione  $e^{\cos x + \sin(x^2)}$  nell'intervallo  $[-2, 1]$  con il metodo di Simpson composto, che prevede l'utilizzo di parabole per approssimare la funzione integranda.

Rimane da vedere come si comporta l'errore di quadratura di una formula composta.

Supponiamo che  $f \in C^s[a, b]$ : ricordando che l'errore commesso nel  $k$ -esimo sottointervallo  $I_k$  per la relazione (21) è pari a:

$$r_n^{(k)} = \gamma_n h^{s+1} \frac{f^{(s)}(\xi_k)}{s!}, \quad \xi_k \in (x_k, x_{k+1}), \quad h = \frac{b-a}{N}$$

possiamo calcolarci l'errore totale in questo modo:

$$R_n(f) = \sum_{k=0}^{N-1} r_n^{(k)} = \sum_{k=0}^{N-1} \gamma_n h^{s+1} \frac{f^{(s)}(\xi_k)}{s!} = \gamma_n \frac{h^{s+1}}{s!} \sum_{k=0}^{N-1} f^{(s)}(\xi_k).$$

Questa espressione può essere migliorata, infatti si dimostra che l'errore di quadratura composito  $R_n(f)$  si esprime anche come:

$$(22) \quad R_n(f) = \gamma_n (b-a)^{s+1} \frac{f^{(s)}(\xi)}{s!N^s}, \quad \xi \in (a, b).$$

Nei due casi precedentemente affrontati, vale a dire trapezi e Simpson compositi, valgono allora le seguenti formule per gli errori:

$$R_1(f) = -\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\xi), \quad R_2(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880N^4} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

Osserviamo, infine, che, per la (22), poiché  $N$  dipende da  $n$ , se  $f \in C^s[a, b]$  allora:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |R_N(f)| = 0,$$

quindi, fissato  $\epsilon > 0$ , possiamo trovare  $N$  tale che sia  $|R_{N+1}| < \epsilon$ . Se ne deduce che queste formule generalizzate presentano il vantaggio di un errore che tende a zero al crescere di  $N$ .

Concludiamo dicendo che un'ulteriore possibilità di scelta come alternativa alle formule di Newton-Côtes è quella delle routine adattative per la quadratura, che consiste nell'usare punti di integrazione dove serve, ovvero dove la funzione presenta maggiori oscillazioni o punti di discontinuità. La tecnica adattativa ha lo scopo di variare la posizione dei nodi secondo il comportamento locale della funzione integranda, garantendo in questo modo un risparmio nel numero di valutazioni di tale funzione.

### 5. *Quadratura gaussiana*

Concludiamo la panoramica sulle formule di quadratura parlando di *formule di quadratura gaussiane*.

Sia dato l'intervallo  $[a, b]$  e la funzione peso  $\omega(x)$ , siano poi  $x_i, i = 1, \dots, n$ , gli zeri del corrispondente polinomio ortogonale di grado  $n$ . Allora possiamo scrivere:

$$(23) \quad \int_a^b f(x) \omega(x) dx \approx \sum_{i=1}^n A_i f(x_i),$$

dove i pesi  $A_i$  dipendono dalla particolare formula di quadratura gaussiana utilizzata.

Dunque, per  $f \in C[a, b]$ , definiamo la nostra formula di quadratura come  $I_n(f) = \sum_{i=1}^n A_i f(x_i)$ , dove  $A_i = \int_a^b l_i(x) \omega(x) dx$ , in cui gli  $l_i(x), i = 1, \dots, n$ , sono i polinomi elementari di Lagrange di grado  $n-1$  associati ai nodi  $x_1, \dots, x_n$ . Infatti l'integrazione che consideriamo è lineare, e in particolare, se ci restringiamo a  $\mathbb{P}_{n-1}$ , l'integrazione è completamente determinata dalla sua azione su una base di  $\mathbb{P}_{n-1}$ .

Vi è anche un modo alternativo di esprimere tale formula: infatti, se  $L_{n-1}(f)(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) l_i(x)$  è il polinomio interpolatore di Lagrange

di  $f$  di grado  $n - 1$  basato sui nodi  $x_1, \dots, x_n$ , allora:

$$\int_a^b (L_{n-1}(f))(x) \omega(x) dx = \sum_{i=1}^n f(x_i) \int_a^b l_i(x) \omega(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i f(x_i).$$

In sintesi  $I_n(f) = I(L_{n-1}(f)) \approx I(f)$ , ossia:

$$\begin{aligned} I_n(f) &= \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) = \\ &= \int_a^b (L_{n-1}(f))(x) \omega(x) dx \approx \int_a^b f(x) \omega(x) dx = I(f). \end{aligned}$$

Questa formula è certamente esatta per  $f \in \mathbb{P}_{n-1}$ .

È semplice dare una limitazione al valore di  $|I_n(f)|$  in funzione di  $\|f\|$ , infatti:

$$(24) \quad |I_n(f)| \leq \sum_{i=1}^n |A_i| |f(x_i)| \leq \|f\| \left( \sum_{i=1}^n |A_i| \right).$$

Considerando una funzione continua  $f$  rispetto alla norma  $\|\cdot\|_1$ , verificante le condizioni  $f(x_i) = \text{sgn}(A_i)$ , per ogni  $i = 1, \dots, n$ , si vede che  $\sum_{i=1}^n |A_i|$  è la più piccola costante che soddisfa la disuguaglianza (24). In altre parole,  $\lambda_n = \sum_{i=1}^n |A_i|$  sono i *numeri di Lebesgue* per questo procedimento. Come in tutti gli altri ambiti che abbiamo affrontato, desideriamo che questi numeri siano uniformemente limitati.

Se  $\omega(x) \equiv 1$  ed  $f$  è differenziabile  $n$  volte in modo continuo, si ha una stima dell'errore per la formula di quadratura:

$$\left| \int_a^b f - \int_a^b L_{n-1}(f) \right| \leq \int_a^b |f - L_{n-1}(f)| \leq \frac{1}{n!} \|f^{(n)}\| \int_a^b \prod_{i=1}^n |x - x_i| dx$$

che richiama quella per l'errore di interpolazione del teorema 2.8. Si dimostra che il valore dell'integrale sulla destra è minimizzato quando gli  $x_i$  sono gli zeri dei polinomi di Chebyshev, in questo caso di seconda specie,  $U_n$  (cfr. [8], pag.72).

Il fatto che una formula di quadratura sia esatta per polinomi di grado basso non garantisce per sua natura che la formula risulti molto accurata. Il problema è che  $\sum_{i=1}^n A_i f(x_i)$  potrebbe stimare una quantità molto piccola cancellando, tuttavia, quantità molto grandi. Quindi, ad esempio, una funzione  $f$  positiva potrebbe generare un valore negativo per questa espressione. Questo non avverrebbe se i pesi  $A_i$  fossero tutti positivi. Dunque il nostro obiettivo è quello di migliorare la nostra formula di quadratura affinché abbia questa proprietà. Ma prima dobbiamo effettivamente controllare che i nodi  $x_i$  siano a nostra disposizione. È quanto affermato dal seguente teorema, dovuto a Gauss.

**TEOREMA 6.5 (Gauss).** *Sia assegnata una funzione peso  $\omega(x)$  su  $[a, b]$  e sia  $(Q_n)$  la successione canonica dei polinomi ortogonali relativa al peso  $\omega$ . Dato  $n$ , siano  $x_1, \dots, x_n$  gli zeri di  $Q_n$  (essi cadono tutti in  $(a, b)$ , come sappiamo). Scegliamo i pesi  $A_1, \dots, A_n$  in modo tale che la formula  $\sum_{i=1}^n A_i f(x_i) \approx \int_a^b f(x) \omega(x) dx$  sia esatta per polinomi di*

grado minore di  $n$ . Allora tale formula è esatta per tutti i polinomi di grado minore di  $2n$ .

DIMOSTRAZIONE. Dato un polinomio  $P$  di grado minore di  $2n$ , possiamo dividere:  $P = Q_n R + S$ , dove  $R$  e  $S$  sono polinomi di grado minore di  $n$ . Pertanto:

$$\begin{aligned} \int_a^b P(x) \omega(x) dx &= \int_a^b Q_n(x) R(x) \omega(x) dx + \int_a^b S(x) \omega(x) dx \\ &= \int_a^b S(x) \omega(x) dx, \quad \text{poiché } \deg R < n \\ &= \sum_{i=1}^n A_i S(x_i), \quad \text{poiché } \deg S < n. \end{aligned}$$

Ma  $P(x_i) = Q_n(x_i)R(x_i) + S(x_i) = S(x_i)$ , essendo  $Q_n(x_i) = 0$ . Dunque:

$$\int_a^b P(x) \omega(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i P(x_i),$$

per tutti i polinomi  $P$  di grado minore di  $2n$ .  $\square$

Questo risultato appare sorprendente, ma in realtà non lo è così tanto. Infatti lo spazio  $\mathbb{P}_{2n-1}$  ha dimensione  $2n$ , e avevamo  $2n$  numeri  $x_1, \dots, x_n$  e  $A_1, \dots, A_n$  da scegliere in modo adatto. Detto in altro modo, l'algoritmo di divisione euclidea ci dice che  $\mathbb{P}_{2n-1} = Q_n \mathbb{P}_{n-1} \oplus \mathbb{P}_{n-1}$ . Poiché  $Q_n \mathbb{P}_{n-1} \subset \ker(I_n)$ , l'azione della formula di quadratura  $I_n$  su  $\mathbb{P}_{2n-1}$  è la medesima che eseguirebbe su una 'copia' di  $\mathbb{P}_{n-1}$ , dove sappiamo essere esatta.

Non è sorprendente nemmeno il fatto che questa particolare scelta dei nodi  $x_i$  sia unica.

LEMMA 6.6. *Supponiamo che  $a \leq x_1 < \dots < x_n \leq b$  e  $A_1, \dots, A_n$  siano dati in maniera tale che l'equazione*

$$\int_a^b P(x) \omega(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i P(x_i)$$

*sia soddisfatta per tutti i polinomi  $P$  di grado minore di  $2n$ . Allora gli  $x_i, i = 1, \dots, n$  sono gli zeri del polinomio ortogonale  $Q_n$ .*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $Q(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$ . Allora, per  $k < n$ , il polinomio  $Q \cdot Q_k$  ha grado  $n + k < 2n$ , quindi:

$$\int_a^b Q(x) Q_k(x) \omega(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i Q(x_i) Q_k(x_i) = 0.$$

Essendo  $Q$  un polinomio monico di grado  $n$  ortogonale ad ogni  $Q_k$ , per  $k < n$ , deve aversi  $Q = Q_n$ . Perciò gli  $x_i$  sono proprio gli zeri di  $Q_n$ .  $\square$

Volendo essere precisi, l'espressione *quadratura gaussiana* è solitamente riservata alla formula di quadratura specifica nella quale  $\int_{-1}^1 f(x) dx$  è approssimato da  $\int_{-1}^1 L_{n-1}(f)(x) dx$ , dove  $L_{n-1}(f)$  denota il polinomio interpolatore di Lagrange di  $f$  che utilizza gli zeri dell' $n$ -esimo polinomio di Légendre come nodi. Dunque quella che stiamo descrivendo è una *quadratura di tipo gaussiano*.

Prima dell'avvento dei computer, la quadratura gaussiana era poco più di una curiosità; infatti le radici di  $Q_n$  sono di solito irrazionali e certamente non facili da trovare manualmente. Oggigiorno, invece, è considerata una tecnica di quadratura standard.

Il risultato fondamentale, dovuto a Stieltjes, è che l' $n$ -esima formula di quadratura  $I_n(f)$  sia positiva. Ciò deriva dal fatto che i pesi  $A_i$  siano a loro volta positivi, e questa è una caratteristica molto favorevole delle formule di quadratura gaussiane, che rappresenta uno dei motivi per i quali esse vengono preferite alle formule di Newton-Côtes.

LEMMA 6.7 (**Stieltjes**).  $A_1^{(n)}, \dots, A_n^{(n)} > 0$  e  $\sum_{i=1}^n A_i^{(n)} = \int_a^b \omega(x) dx$ .

DIMOSTRAZIONE. La seconda affermazione è ovvia, in quanto  $I_n(1) = I(1)$ . Per quanto riguarda la prima, fissiamo  $1 \leq j \leq n$  e osserviamo che  $(l_j^{(n-1)})^2$  è di grado  $2(n-1) < 2n$ . Quindi:

$$\begin{aligned} 0 &< \langle l_j^{(n-1)}, l_j^{(n-1)} \rangle = \int_a^b [l_j^{(n-1)}(x)]^2 \omega(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^n A_i^{(n)} [l_j^{(n-1)}(x_i^{(n)})]^2 = A_j^{(n)}, \end{aligned}$$

in quanto  $l_j^{(n-1)}(x_i^{(n)}) = \delta_{i,j}$ . □

Ciò che abbiamo appena mostrato è che:

$$A_j^{(n)} = \int_a^b l_j^{(n-1)}(x) \omega(x) dx = \int_a^b [l_j^{(n-1)}(x)]^2 \omega(x) dx.$$

Sostanzialmente lo stesso calcolo prova anche che:

COROLLARIO 6.8.  $\langle l_i^{(n-1)}, l_j^{(n-1)} \rangle = 0$ , per  $i \neq j$ .

Essendo i pesi  $A_1^{(n)}, \dots, A_n^{(n)} > 0$  ne segue che  $I_n(f)$  è positiva, ossia  $I_n(f) \geq 0$  quando  $f \geq 0$ . La seconda affermazione del lemma 6.7 ci dice anche che le  $I_n$  sono *uniformemente limitate*:

$$|I_n(f)| \leq \|f\| \sum_{i=1}^n A_i^{(n)} = \|f\| \int_a^b \omega(x) dx,$$

e questo è lo stesso limite che vale per  $I(f) = \int_a^b f(x) \omega(x) dx$ . Alla luce di tutto ciò, dimostrare che  $I_n(f) \rightarrow I(f)$  diviene molto semplice. Il seguente risultato è ancora dovuto a Stieltjes (e a Lebesgue).

TEOREMA 6.9 (*Stieltjes-Lebesgue*). Vale la seguente relazione:

$$|I(f) - I_n(f)| \leq 2 \left( \int_a^b \omega(x) dx \right) E_{2n-1}(f).$$

In particolare,  $I_n(f) \rightarrow I(f)$  per ogni  $f \in C[a, b]$ , ossia le formule di quadratura gaussiane sono convergenti.

DIMOSTRAZIONE. Sia  $p^*$  il polinomio di miglior approssimazione uniforme di  $f$  fra gli elementi di  $\mathbb{P}_{2n-1}$ . Allora, poiché  $I_n(p^*) = I(p^*)$ , risulta:

$$\begin{aligned} |I(f) - I_n(f)| &\leq |I(f - p^*)| + |I_n(f - p^*)| \\ &\leq \|f - p^*\| \int_a^b \omega(x) dx + \|f - p^*\| \sum_{i=1}^n A_i^{(n)} \\ &= 2 \|f - p^*\| \int_a^b \omega(x) dx = 2E_{2n-1}(f) \int_a^b \omega(x) dx. \end{aligned}$$

□

**5.1. Esempi.** Consideriamo tre casi particolari notevoli, corrispondenti, rispettivamente, ai polinomi di Chebyshev di prima specie, di seconda specie e a quelli di Légendre.

**1.** Abbiamo  $[a, b] = [-1, 1]$ ,  $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ . La corrispondente formula di quadratura si dice di *Gauss-Chebyshev di prima specie* e la si indica con *GC1*. I pesi sono:

$$A_i^{(GC1)} = \frac{\pi}{n}, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

la cui somma è, ovviamente,  $\pi$ . Incredibilmente questi pesi non dipendono da  $i$ ! I nodi sono gli zeri dei polinomi di Chebyshev di prima specie, quindi:

$$x_i^{(GC1)} = \cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right), \quad i = 1, \dots, n.$$

La formula (23) diviene:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) dx \approx \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right)\right).$$

(Per maggiori dettagli, cfr.[9], Volume III).

**2.** Ci troviamo sempre nell'intervallo  $[-1, 1]$ , questa volta, però, la funzione peso è  $\omega(x) = \sqrt{1-x^2}$ . La corrispondente formula di quadratura si dice di *Gauss-Chebyshev di seconda specie* e la si indica con *GC2*. I pesi sono:

$$A_i^{(GC2)} = \frac{\pi}{n+1} \sin^2\left(\frac{i\pi}{n+1}\right), \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Per trovare un'espressione della somma dei pesi di quadratura  $A_i^{(GC2)}$ , osserviamo che:

$$\sum_{i=1}^n \left[ \sin^2 \left( \frac{i\pi}{n+1} \right) \right] = \frac{n+1}{2},$$

da cui se ne trae che:

$$\sum_{i=1}^n A_i^{(GC2)} = \frac{\pi}{2}.$$

I nodi, che sono gli zeri dei polinomi di Chebyshev di seconda specie, sono allora:

$$x_i^{(GC2)} = \cos \left( \frac{i\pi}{n+1} \right), \quad i = 1, \dots, n;$$

mentre la formula (23) assume questa forma:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} f(x) dx \approx \frac{\pi}{n+1} \sum_{i=1}^n \sin^2 \left( \frac{i\pi}{n+1} \right) f \left( \cos \left( \frac{i\pi}{n+1} \right) \right).$$

**3.** Nell'ultimo caso che consideriamo, quello dei polinomi di Légendre, abbiamo l'intervallo  $[-1, 1]$  e la funzione peso  $\omega(x) = 1$ : la corrispondente formula di quadratura si dice di *Gauss-Légendre* e la si indica con *GL*; i pesi sono:

$$A_i = \frac{2}{(1-x_i^2)(P'_{n+1}(x_i))^2}, \quad i = 0, \dots, n,$$

dove  $P_{n+1}$  indica l' $n+1$ -esimo polinomio di Légendre.

Osserviamo che abbiamo, questa volta,  $n+1$  nodi, poiché, per un dato  $n$ , calcoliamo  $i = 0, \dots, n$  nodi e pesi. Sempre a proposito della formula di quadratura di Gauss-Légendre, va segnalato che talvolta conviene includere anche gli estremi dell'intervallo, ovvero  $\{-1, 1\}$ . Si parla, in tal caso, di formule di quadratura di *Gauss-Légendre-Lobatto* (GLL). Mentre i nodi  $x_0 = -1$  e  $x_n = 1$  sono fissati, gli altri  $n-1$  sono scelti come gli zeri di  $P'_n(x)$ , e allora si ricava per i pesi  $A_i$  una nuova espressione:

$$A_i = \frac{2}{n(n+1)} \cdot \frac{1}{(P_n(x_i))^2}, \quad i = 0, \dots, n.$$

Pertanto, il grado di esattezza delle formule di Gauss-Légendre-Lobatto sarà pari a  $2n-1$ .

Infine, per quanto riguarda l'errore di quadratura con formule di Gauss-Légendre e Gauss-Légendre-Lobatto rispettivamente, valgono le seguenti stime, che per essere valide richiedono una certa regolarità della

funzione integranda:

$$I(f) - I_{GL}(f) = \frac{2^{2n+3}((n+1)!)^4}{(2n+3)((2n+2)!)^3} f^{(2n+2)}(\xi), \quad \xi \in (-1, 1);$$

$$I(f) - I_{GLL}(f) = \frac{2^{2n+1}n^3(n+1)((n-1)!)^4}{(2n+1)((2n)!)^3} f^{(2n)}(\xi), \quad \xi \in (-1, 1).$$

Osserviamo, per concludere la trattazione di questo argomento, che, per ragioni di convenienza, per gli integrali estesi ad un intervallo limitato  $[a, b]$  si usano polinomi ortogonali definiti su  $[-1, 1]$ . Infatti ogni intervallo di integrazione  $a \leq t \leq b$  può essere ricondotto all'intervallo  $-1 \leq x \leq 1$  attraverso la trasformazione  $t = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}$  e la funzione peso  $\omega(x)$  può essere comunque introdotta. Risulta, a prova di ciò:

$$\int_a^b g(t) dt = \int_{-1}^1 \omega(x) f(x) dx,$$

dove basta porre:

$$f(x) = \frac{b-a}{2\omega(x)} \cdot g\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}\right).$$

Notiamo, da ultimo, che l'integrazione gaussiana basata sui polinomi ortogonali di Laguerre e di Hermite permette di approssimare integrali anche su intervalli non limitati, a condizione, tuttavia, che l'integrale esista finito.



## *Regolarizzazione e mollificatori*

Lo scopo di questo capitolo è quello di vedere come il concetto di approssimazione si possa anche applicare, sotto certe condizioni, agli spazi funzionali astratti (vedremo, come esempio notevole, gli spazi  $L^p$ ) nel senso di approssimazione di funzioni appartenenti a tali spazi con altre che presentano proprietà di maggior regolarità (si parla, infatti, a questo proposito, di *regolarizzazione*). Vedremo come i cosiddetti *mollificatori* si prestino bene a questo scopo. Vedremo anche come il concetto di *approssimazione* sia, in maniera naturale, collegato ai concetti di *convergenza* e di *densità*.

### 1. *Gli spazi $L^p$*

Preliminarmente, ricordiamo alcuni risultati fondamentali come gli enunciati dei teoremi di Fubini e di Tonelli ed il teorema della convergenza dominata di Lebesgue perché ci saranno utili nelle dimostrazioni successive.

**TEOREMA 7.1 (*Teorema di Fubini o di disintegrazione e scambio dell'ordine di integrazione*).** *Siano  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  due aperti di  $\mathbb{R}^N$ . Se  $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$ , allora:*

- (1) *per q.o.  $x \in \Omega_1$ ,  $F(x, \cdot) \in L^1(\Omega_2)$  e  $\int_{\Omega_2} F(x, y) dy \in L^1(\Omega_1)$ ;*
- (2) *per q.o.  $y \in \Omega_2$ ,  $F(\cdot, y) \in L^1(\Omega_1)$  e  $\int_{\Omega_1} F(x, y) dx \in L^1(\Omega_2)$ .*

*Inoltre:*

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x, y) dx dy = \int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x, y) dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x, y) dx.$$

**TEOREMA 7.2 (*Teorema di Tonelli o di assoluta integrabilità*).** *Se  $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  è misurabile nella  $\sigma$ -algebra prodotto, e se:*

$$(25) \quad \int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} |F(x, y)| dy < \infty$$

*allora  $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$ .*

Osserviamo che l'applicazione consecutiva dei teoremi di Tonelli e di Fubini consente di affermare che se una funzione misurabile ha un integrale ripetuto assolutamente convergente (cioè se vale la (25)), allora essa è sommabile e si può scambiare l'ordine di integrazione.

TEOREMA 7.3 (**Teorema di Lebesgue, della convergenza dominata**). Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^N$  misurabile e sia  $f_n : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  una successione di funzioni sommabili su  $E$ , con  $n \in \mathbb{N}$ . Supponiamo che:

(1) per quasi ogni  $x \in E$ , sia:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x);$$

(2) esista una funzione  $g$  sommabile su  $E$  tale che  $|f_n(x)| \leq g(x)$ , per quasi ogni  $x \in \mathbb{R}$  e per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

Allora:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E |f_n(x) - f(x)| dx = 0.$$

In particolare:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

DEFINIZIONE 7.4 (*Funzioni misurabili*). Una funzione  $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  è misurabile se, per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , è misurabile l'insieme di livello  $L_+(g, t) = \{x \in \mathbb{R}^N : g(x) > t\}$ .

Dunque ogni funzione continua è misurabile, in quanto  $L_+(g, t) = g^{-1}((t, +\infty))$  è sempre un aperto.

DEFINIZIONE 7.5 (*Spazi  $L^p$* ). Sia  $p \in \mathbb{R}$  tale che  $0 < p < +\infty$  e sia  $E \subseteq \mathbb{R}^N$  misurabile. Si dice che  $f \in L^p(E)$  se  $f$  è misurabile in  $E$  e se  $|f|^p$  è sommabile in  $E$ , quindi:

$$L^p(E) = \{f : E \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ misurabile, } |f|^p \in L^1(E)\}.$$

DEFINIZIONE 7.6 (*Estremo superiore essenziale*). Se  $g$  è una funzione misurabile in un insieme misurabile  $E$  (di misura positiva), l'estremo superiore essenziale di  $g$  in  $E$  è definito da:

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in E} g(x) = \inf \{t \in \mathbb{R} : m[L_+(g, t)] = 0\},$$

dove  $m$  sta per misura.

Indichiamo con  $L^\infty(E)$  l'insieme di tutte le funzioni  $f$  misurabili in  $E$  tali che:

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in E} |f(x)| < \infty,$$

ossia l'insieme delle funzioni essenzialmente limitate su  $E$ .

Equivalentemente:

$$L^\infty(E) = \left\{ f : E \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ è misurabile ed esiste una costante } C \right. \\ \left. \text{ tale che: } |f(x)| \leq C \text{ quasi ovunque in } E \right\}.$$

Ricordiamo, ora, le disuguaglianze di Hölder e di Minkowski, che ci serviranno talvolta, in seguito, nelle dimostrazioni.

**TEOREMA 7.7 (Disuguaglianza di Hölder).** Sia  $E$  un sottoinsieme misurabile di  $\mathbb{R}^N$  e siano  $p, p' > 1$  tali che:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

( $p$  e  $p'$  si dicono esponenti coniugati). Se  $|f|^p$  e  $|g|^{p'}$  sono sommabili su  $E$ , allora anche  $fg$  è sommabile su  $E$  e si ha:

$$\int_E |f(x)g(x)| dx \leq \left( \int_E |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left( \int_E |g(x)|^{p'} dx \right)^{1/p'}.$$

Inoltre, il segno di uguaglianza vale se e solo se esiste  $\lambda > 0$  tale che:  $|g| = \lambda |f|^{p-1}$  quasi ovunque in  $E$ .

Osserviamo che la disuguaglianza di Hölder si può anche esprimere in questo modo:

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}, \text{ con } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Tale disuguaglianza si può estendere al caso in cui  $f$  o  $g \in L^\infty(E)$  (e quindi,  $g$  o  $f \in L^1(E)$  rispettivamente).

**TEOREMA 7.8 (Disuguaglianza di Minkowski).** Sia  $1 \leq p \leq \infty$ . Siano  $f$  e  $g$  definite su un sottoinsieme misurabile  $E$  di  $\mathbb{R}^N$  a valori in  $\mathbb{R}$ .

Allora vale:

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Si verifica facilmente che  $L^p(E)$  è uno spazio vettoriale, per ogni  $p \in [1, \infty]$ .

**DEFINIZIONE 7.9 (Seminorma in  $L^p$ ).** Se  $1 \leq p \leq +\infty$ , possiamo definire in  $L^p(E)$  una seminorma in questo modo:

$$(26) \quad \|f\|_p = \left( \int_E |f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

se  $1 \leq p < +\infty$ , e:

$$(27) \quad \|f\|_\infty = \text{ess sup}_{x \in E} |f(x)|.$$

Infatti, con queste definizioni, si ha chiaramente che:

$$\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p,$$

per ogni  $p \in [1, \infty]$ . Inoltre la disuguaglianza di Minkowski, per  $p \in [1, \infty)$ , e quella triangolare, per  $p = \infty$ , implicano che:

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p,$$

per ogni  $f, g \in L^p(E)$ .

L'applicazione che  $f \mapsto \|f\|_p$  definita da (26) e (27) non è, però, una norma non essendo definita positiva. Infatti  $\|f\|_p = 0$  se e solo se

$f \equiv 0$  q.o. in  $E$ , ma non è detto che  $f$  sia identicamente nulla. Possiamo, tuttavia, dotare l'insieme  $L^p(E)$  di una struttura di spazio normato, decidendo di identificare le funzioni che coincidono q.o. in  $E$ ; d'ora in avanti, dunque,  $L^p(E)$  indicherà, in realtà, lo spazio quoziente  $L^p(E)/\sim$ , dove  $\sim$  è la relazione di equivalenza definita in questo modo:  $f \sim g$  se e solo se  $f = g$  q.o. in  $E$ , cioè se e solo se esiste  $Z \subset E$ :  $m(Z) = 0$ , e vale  $f(x) = g(x), \forall x \in E \setminus Z$ . Con questo accorgimento  $L^p(E)$  è uno spazio normato con la norma definita dalle relazioni (26) e (27). I suoi elementi sono classi di equivalenza i cui rappresentanti sono funzioni definite quasi ovunque.

È naturale che  $L^p(E)$ , come ogni spazio normato, sia uno spazio metrico.

**DEFINIZIONE 7.10** (*Convergenza in media di ordine  $p$* ). Si dice che una successione di funzioni  $\{f_n, n \in \mathbb{N}\} \subset L^p(E)$  converge in  $L^p(E)$  o in media di ordine  $p$  ad una funzione  $f \in L^p(E)$  se  $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ , per  $n \rightarrow \infty$ .

**DEFINIZIONE 7.11** (*Successioni di Cauchy in  $L^p$* ). Si dice, poi, che  $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$  è una successione di Cauchy in  $L^p(E)$  quando, per ogni  $\epsilon > 0$ , esiste  $\nu$  tale che, per ogni  $n, m > \nu$ , vale:  $\|f_n - f_m\|_p < \epsilon$ .

Per gli spazi  $L^p$ , enunciamo questo importante teorema, per la cui dimostrazione vedi, ad esempio, [2] o [4].

**TEOREMA 7.12 (Riesz-Fischer)**. Sia  $1 \leq p \leq \infty$ . Allora ogni successione di Cauchy  $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$  in  $L^p(E)$  converge in  $L^p(E)$  ad una funzione  $f \in L^p(E)$ .

Pertanto, ne deriva che  $L^p(E)$  è uno spazio metrico completo.

**DEFINIZIONE 7.13** (*Spazio di Banach*). Sia  $(X, \|\cdot\|)$  uno spazio normato. Allora  $(X, \|\cdot\|)$  è uno spazio di Banach se è anche completo rispetto alla topologia generata dalla sua norma.

Dunque il teorema di Riesz-Fischer ci dice che lo spazio  $L^p(E)$  è uno spazio di Banach, per ogni  $p$  tale che sia  $1 \leq p \leq \infty$ .

**DEFINIZIONE 7.14** (*Spazio di Hilbert*). Diciamo che  $H$  è uno spazio di Hilbert se  $H$  è uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare  $\langle x, y \rangle$  che sia completo rispetto alla norma  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .

Si può allora facilmente dimostrare che  $L^2(E)$  è uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare definito da:

$$\langle f, g \rangle = \int_E f(x) \overline{g(x)} dx,$$

per ogni  $f, g \in L^2(E)$ .

2. Sottoinsiemi densi in  $L^p$ 

Come già anticipato in precedenza, una strategia molto fruttuosa per dimostrare proprietà delle funzioni negli spazi  $L^p$  consiste nel dimostrare tali proprietà per funzioni più regolari, sfruttando poi il fatto che tali funzioni approssimano le funzioni di  $L^p$ , rispetto alla norma di  $L^p$ , con precisione arbitraria. Ecco dove interviene il concetto di approssimazione in questi spazi.

Ricordiamo, preliminarmente, alcune definizioni.

**DEFINIZIONE 7.15 (Funzione semplice).** Una funzione  $s : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  si dice *semplice* se è misurabile ed assume un numero finito di valori.

Se  $c_1, c_2, \dots, c_n$  sono i valori distinti assunti da una funzione semplice  $s$ , allora, posto  $E_k = \{x \in \mathbb{R}^N : s(x) = c_k, k = 1, \dots, n\}$ , gli  $E_k$  sono tutti insiemi misurabili e disgiunti a due a due, e dunque possiamo esprimere  $s$  in questo modo:

$$s(x) = \sum_{k=1}^n c_k \mathcal{X}_{E_k}(x), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

dove  $\mathcal{X}_{E_k}$  è la *funzione caratteristica* di  $E_k$ , che vale 1 su  $E_k$  e 0 altrove. Vale poi questo teorema sulle funzioni semplici:

**TEOREMA 7.16 (Approssimazione di una funzione misurabile mediante funzioni semplici).** Sia data una funzione  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty]$  misurabile. Allora esiste una successione crescente di funzioni semplici  $s_n$  convergente puntualmente ad  $f$ .

Se poi  $f$  è anche limitata, allora le funzioni semplici  $s_n$  convergono ad  $f$  uniformemente.

Il prossimo teorema ci dice che le funzioni semplici sono dense in  $L^p$ .

**TEOREMA 7.17 (Densità delle funzioni semplici in  $L^p$ ).** Sia  $E$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^N$  misurabile e sia  $f \in L^p(E)$ , con  $1 \leq p < \infty$ . Allora, per ogni  $\epsilon > 0$ , esiste una funzione semplice  $s \in L^p(E)$  tale che sia:

$$\|f - s\|_p < \epsilon.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Senza perdere di generalità, possiamo supporre che sia  $f \geq 0$ , in quanto  $f = f^+ - f^-$ . Poiché  $f$  è misurabile e non negativa, esiste una successione crescente di funzioni semplici e non negative  $s_n$  che converge ad  $f$  puntualmente q.o. in  $E$ .

Sia  $1 \leq p < \infty$ , allora  $(f - s_n)^p \rightarrow 0$  q.o. in  $E$  e  $(f - s_n)^p \leq f^p$ , con  $f^p$  sommabile in  $E$ . Per il teorema della convergenza dominata di Lebesgue, si ha che:  $\|f - s_n\|_p^p = \int_E (f - s_n)^p dx \rightarrow 0$  se  $n \rightarrow \infty$ .

Se  $p = \infty$ , indichiamo con  $E_* = \{x \in E : |f(x)| > \|f\|_\infty\}$ : allora risulta che  $m(E_*) = 0$ , inoltre  $f$  è limitata in  $E \setminus E_*$ . Per costruzione,

la successione di funzioni semplici  $s_n$  converge uniformemente ad  $f$  in  $E \setminus E_*$ , perciò:

$$\|f - s_n\|_\infty = \sup_{E \setminus E_*} (f - s_n) \rightarrow 0$$

se  $n \rightarrow \infty$ . Il teorema risulta dunque provato per  $1 \leq p \leq \infty$ .  $\square$

**TEOREMA 7.18 (*Densità delle funzioni continue a supporto compatto in  $L^p$* )**. Sia  $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ , con  $1 \leq p < \infty$ . Allora, per ogni  $\epsilon > 0$ , esiste una funzione  $g$  continua a supporto compatto in  $\mathbb{R}^N$  tale che:

$$\|f - g\|_p < \epsilon.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Preliminarmente, come prima, possiamo supporre che  $f$  sia non negativa. Inoltre, possiamo anche supporre che  $f$  sia nulla al di fuori di una pallina, dato che la successione  $f\mathcal{X}_{B(0,n)}$  converge ad  $f$  in  $L^p(\mathbb{R}^N)$ . Infine possiamo ulteriormente supporre che  $f$  sia semplice, quindi  $f = \sum_{k=1}^n c_k \mathcal{X}_{E_k}$ , dove gli insiemi misurabili  $E_k$  sono a due a due disgiunti e limitati. L'affermazione del teorema si riduce, quindi, a costruire, per ogni  $k$ , una funzione continua avente supporto compatto  $g_k$  che approssimi  $\mathcal{X}_{E_k}$  in  $L^p(\mathbb{R}^N)$  a meno di  $\epsilon$  piccolo a piacere.

Infatti la funzione  $g = \sum_{k=1}^n c_k g_k$  approssimerà  $f$  in  $L^p(\mathbb{R}^N)$  in questo modo:

$$\|f - g\|_p = \left\| \sum_{k=1}^n c_k (\mathcal{X}_{E_k} - g_k) \right\|_p \leq \sum_{k=1}^n |c_k| \|\mathcal{X}_{E_k} - g_k\|_p < \epsilon \sum_{k=1}^n |c_k|.$$

Ora: poiché  $E_k$  è misurabile e limitato, per ogni  $\epsilon > 0$ , esistono un chiuso  $K \subseteq E_k$  ed un aperto limitato  $A \supseteq E_k$  tali che:  $m(A) - m(K) < \epsilon$ .

Consideriamo, allora,  $g_k : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  definita, per ogni  $x \in \mathbb{R}^N$ , in questo modo:

$$g_k(x) = \frac{d(x, \mathbb{R}^N \setminus A)}{d(x, \mathbb{R}^N \setminus A) + d(x, K)},$$

dove  $d$  sta per distanza.

Tale funzione così definita è continua, inoltre  $0 \leq g_k \leq 1$ ,  $g_k \equiv 1$  su  $K$  e  $g_k \equiv 0$  al di fuori di  $A$ . Allora risulta:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{X}_{E_k} - g_k\|_p^p &= \int_A |\mathcal{X}_{E_k} - g_k|^p dx \\ &= \int_{A \setminus K} |\mathcal{X}_{E_k} - g_k|^p dx \leq m(A \setminus K) \\ &= m(A) \setminus m(K) < \epsilon. \end{aligned}$$

$\square$

### 3. Convoluzione e regolarizzazione

La convoluzione è una strategia usata per regolarizzare ed approssimare delle funzioni in  $L^p(E)$ , con  $E$  sottoinsieme misurabile di  $\mathbb{R}^N$ .

Definiamo il *prodotto di convoluzione* di una funzione  $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$  con una funzione  $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ .

**TEOREMA 7.19.** *Siano  $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$  e  $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ , con  $1 \leq p \leq \infty$ . Allora valgono i seguenti fatti:*

- (1) *la funzione  $y \mapsto f(x-y)g(y)$  è integrabile su  $\mathbb{R}^N$  per q.o.  $x \in \mathbb{R}^N$ , e per tali valori si pone:*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y) dy.$$

- (2) *inoltre  $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$  e*

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

**DIMOSTRAZIONE.** La conclusione è ovvia se  $p = \infty$ . Consideriamo, allora, due casi:

1.  $p = 1$ ;

2.  $1 < p < \infty$ .

1. Poniamo  $F(x, y) = f(x-y)g(y)$ . Allora, per quasi ogni  $y \in \mathbb{R}^N$  si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |F(x, y)| dx &= |g(y)| \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)| dx = \\ &= |g(y)| \|f\|_1 < \infty, \end{aligned}$$

e inoltre risulta:

$$\int_{\mathbb{R}^N} dy \int_{\mathbb{R}^N} |F(x, y)| dx = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty.$$

Si deduce dal teorema di Tonelli che  $F \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ . Applicando successivamente il teorema di Fubini, si vede che:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |F(x, y)| dy < \infty$$

per quasi ogni  $x \in \mathbb{R}^N$ , ed infine si ottiene precisamente l'affermazione del teorema per  $p = 1$ , ossia:

$$\int_{\mathbb{R}^N} dx \int_{\mathbb{R}^N} |F(x, y)| dy = \int_{\mathbb{R}^N} dy \int_{\mathbb{R}^N} |F(x, y)| dx = \|f\|_1 \|g\|_1.$$

2. Per il punto 1. sappiamo che, per q.o. fissato  $x \in \mathbb{R}^N$ , la funzione  $y \mapsto |f(x-y)| |g(y)|^p$  è integrabile su  $\mathbb{R}^N$ , cioè  $|f(x-y)|^{1/p} |g(y)| \in L^p_y(\mathbb{R}^N)$ .

Poiché  $|f(x-y)|^{1/p'} \in L^{p'}_y(\mathbb{R}^N)$ , dalla disuguaglianza di Hölder segue che:

$$|f(x-y)| |g(y)| = |f(x-y)|^{1/p'} |f(x-y)|^{1/p} |g(y)| \in L^1_y(\mathbb{R}^N)$$

e che:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)| |g(y)| dy \leq \|f\|_1^{1/p'} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)| |g(y)|^p dy \right)^{1/p},$$

ossia:

$$|(f * g)(x)|^p \leq \|f\|_1^{p/p'} (|f| * |g|^p)(x).$$

Per il punto 1. concludiamo dunque che  $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$  e che:

$$\|f * g\|_p^p \leq \|f\|_1^{p/p'} \|f\|_1 \|g\|_p^p,$$

equivalentemente:

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

□

Osserviamo che, effettuando il cambiamento di variabile  $x - y = t$ , risulta:  $f * g = g * f$ , dunque il prodotto di convoluzione è commutativo. Euristicamente, una convoluzione è una somma pesata di traslazioni: se, per  $y \in \mathbb{R}^N$ , definiamo la traslata di una funzione  $\tau_y : L^p(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$  tramite la relazione:

$$(\tau_y f)(x) = f(x - y),$$

ne deriva che:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} (\tau_y f)(x) g(y) dy.$$

Possiamo sempre definire la convoluzione di funzioni definite su un qualsiasi insieme misurabile  $E \subseteq \mathbb{R}^N$ . Infatti, se  $f \in L^1(E)$  e  $g \in L^p(E)$ , poniamo:

$$f * g = f * (g \mathcal{X}_E).$$

Con questa definizione, si può verificare che vale il teorema 7.19 anche se  $g \in L^p(E)$ .

#### 4. Supporti e convoluzioni

La nozione di supporto di una funzione è nota:  $\text{supp}(f)$  è il complemento del più grande aperto sul quale  $f$  si annulla, equivalentemente  $\text{supp}(f)$  è la chiusura dell'insieme  $\{x : f(x) \neq 0\}$ . Tale nozione, tuttavia, non è adeguata quando si ha a che fare con classi di equivalenza, come nel caso degli spazi  $L^p$ . Occorre dare una nuova definizione che sia intrinseca, cioè  $\text{supp}(f_1)$  e  $\text{supp}(f_2)$  dovrebbero coincidere, o differire per un insieme trascurabile, se  $f_1 = f_2$  q.o.

DEFINIZIONE 7.20 (*Supporto essenziale*). Sia  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  e sia  $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{R}^N : A \text{ aperto e } f = 0 \text{ q.o. in } A\}$ . Definiamo il *supporto essenziale* di  $f$  il seguente insieme:

$$\text{supp}(f) = \mathbb{R}^N \setminus \left( \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A \right).$$

D'ora in avanti, dunque,  $\text{supp}(f)$  indicherà il supporto essenziale di  $f$  che, se  $f$  è continua su  $\mathbb{R}^N$ , coincide con il supporto ordinario. Osserviamo che  $\text{supp}(f)$  è ben definito: infatti, anche se la famiglia  $\mathcal{F}$  non fosse numerabile, esiste una base numerabile di aperti  $O_n$  tale che, se  $A \in \mathcal{F}$ , allora  $A = \bigcup_{n \in J_A} O_n$ , per qualche sottoinsieme  $J_A$  di  $\mathbb{N}$ . Se  $f = 0$  q.o. in  $A$ , allora  $f = 0$  q.o. in  $O_n$ , con  $n \in J_A$ , pertanto:

$$\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} \bigcup_{n \in J_A} O_n = \bigcup_{n \in J} O_n,$$

dove  $J = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} J_A$  è numerabile, essendo  $J_A \subseteq \mathbb{N}$ , per ogni  $A \in \mathcal{F}$ .

TEOREMA 7.21. (1) Se  $f_1 = f_2$  q.o. in  $\mathbb{R}^N$ , allora  $\text{supp}(f_1) = \text{supp}(f_2)$ .

(2) Se  $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$  e  $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ , con  $1 \leq p \leq \infty$ , allora:

$$\text{supp}(f * g) \subseteq \overline{\text{supp}(f) + \text{supp}(g)}.$$

DIMOSTRAZIONE. (1) È chiaro che  $f_1 = 0$  q.o. in  $A$  se e solo se  $f_2 = 0$  q.o. in  $A$  e quindi  $\text{supp}(f_1) = \text{supp}(f_2)$ . Perciò possiamo parlare del  $\text{supp}(f)$  per una funzione  $f \in L^p$  senza precisare quale rappresentante scegliamo nella classe di equivalenza.

(2) Sia  $A$  il complementare di  $\text{supp}(f) + \text{supp}(g)$ .  $A$  è aperto e, se  $x \in A$ , risulta che  $(x - \text{supp}(f)) \cap \text{supp}(g) = \emptyset$ . Pertanto:

$$f * g(x) = \int_{(x - \text{supp}(f)) \cap \text{supp}(g)} f(x - y) g(y) dy = 0$$

quindi  $\text{supp}(f * g)$  è contenuto nel complementare di  $A$ .  $\square$

Se entrambe le funzioni  $f$  e  $g$  hanno supporto compatto, allora anche  $f * g$  ha supporto compatto. In generale, in ogni caso,  $f * g$  non ha supporto compatto se una sola di esse ha supporto compatto.

DEFINIZIONE 7.22 (*Spazi  $L^p_{loc}$* ). Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un aperto e sia  $1 \leq p \leq \infty$ . Una funzione  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  appartiene a  $L^p_{loc}(\Omega)$  se  $f|_K \in L^p(K)$ , per ogni insieme compatto  $K$  contenuto in  $\Omega$ . Quindi, più in generale, se  $1 \leq p \leq \infty$ :

$$L^p_{loc}(\mathbb{R}^N) = \left\{ f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ è misurabile con la proprietà che ogni punto } x \in \mathbb{R}^N \text{ possiede un intorno } V : f|_V \in L^p(V) \right\}.$$

Equivalentemente:  $f \in L^p(K)$ , per ogni compatto  $K$  di  $\mathbb{R}^N$ .

Vediamo, ora, di mostrare che il prodotto di convoluzione ha senso anche per  $f \in C_0(\mathbb{R}^N)$  e  $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ , dove  $C_0$  denota l'insieme di tutte le funzioni continue il cui supporto sia un insieme compatto.

**TEOREMA 7.23.** *Siano  $f \in C_0(\mathbb{R}^N)$  e  $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ . Allora  $(f * g)(x)$  è ben definito, per ogni  $x \in \mathbb{R}^N$ , inoltre si ha che  $f * g \in C(\mathbb{R}^N)$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Innanzitutto, osserviamo che, per ogni  $x \in \mathbb{R}^N$ , la funzione  $y \mapsto f(x - y)g(y)$  è integrabile su  $\mathbb{R}^N$ , perciò  $(f * g)(x)$  è ben definito per ogni  $x \in \mathbb{R}^N$ .

Consideriamo, ora, una successione  $x_n \rightarrow x$  e fissiamo un compatto  $K$  di  $\mathbb{R}^N$  tale che  $(x_n - \text{supp}(f)) \subset K, \forall n$ . Si ha che  $f(x_n - y) = 0, \forall n, \forall y \notin K$ . Dall'uniforme continuità di  $f$  segue che:

$$|f(x_n - y) - f(x - y)| \leq \epsilon_n \chi_K(y), \quad \forall n, \quad \forall y \in \mathbb{R}^N$$

con  $\epsilon_n \rightarrow 0$ , per cui:

$$|(f * g)(x_n) - (f * g)(x)| \leq \epsilon_n \int_K |g(y)| dy \rightarrow 0.$$

□

Introduciamo, ora, qualche notazione che ci servirà nel seguito e che, in parte, abbiamo già utilizzato.

Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^N$ .

$C(\Omega)$  è lo spazio delle funzioni continue su  $\Omega$ , ossia:

$$C(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ continua su } \Omega\};$$

$C^k(\Omega)$  è lo spazio delle funzioni  $k$ -volte differenziabili con continuità su  $\Omega$  ( $k \geq 1$  è un intero), ossia:

$$C^k(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ k-volte differenziabile con continuità su } \Omega\};$$

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\Omega);$$

$C_0(\Omega)$  è lo spazio delle funzioni continue su  $\Omega$  che si annullano al di fuori di un compatto  $K \subset \Omega$ , ossia:

$$C_0(\Omega) = \{f \in C(\Omega) : f = 0 \text{ al di fuori di qualche compatto } K \subset \Omega\};$$

$$C_0^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_0(\Omega);$$

$$C_0^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega).$$

Infine, diciamo che  $\alpha$  è un *multi-indice* se  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{Z}^N$ , con  $\alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, N$ . Si pone allora:  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$ ,  $|\alpha|$  è detto *altezza* di  $\alpha$ . Se  $f \in C^\infty(\Omega)$ , si può allora definire una qualunque derivata parziale di  $f$  di ordine  $|\alpha|$  come:

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}, \quad x \in \Omega.$$

## 5. Mollificatori ed approssimazioni

Iniziamo con un risultato di regolarizzazione che ci dice, a grandi linee, che la convoluzione di due funzioni non è meno regolare della più regolare dei fattori.

**TEOREMA 7.24 (Regolarizzazione).** *Sia  $k \in \mathbb{N}$ . Se  $\varphi \in C_0^k(\mathbb{R}^N)$  ed  $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$  allora la convoluzione  $\varphi * f \in C^k(\mathbb{R}^N)$  e si possono scaricare le derivate sul fattore regolare:*

$$D^\alpha(\varphi * f) = (D^\alpha \varphi) * f, \quad \forall |\alpha| \leq k.$$

*In particolare,  $\varphi * f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$  se  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^N)$ . Proviamo che la funzione  $\varphi * f$  è continua. Infatti, se  $x_h$  è una successione in  $\mathbb{R}^N$  convergente ad  $x$ , essendo  $\varphi$  uniformemente continua in  $\mathbb{R}^N$ , le funzioni  $\varphi(x_h - y)$  convergono a  $\varphi(x - y)$  uniformemente, al variare di  $y$  in  $\mathbb{R}^N$ . Inoltre, indicati con  $r_1$  il raggio di una palla contenente il supporto di  $\varphi$  e con  $r_2$  il raggio di una palla contenente i punti  $x$  e  $x_h$  per ogni  $h$ , si verifica facilmente che i supporti delle funzioni  $y \mapsto \varphi(x_h - y)$  e  $y \mapsto \varphi(x - y)$  sono tutti contenuti in  $B_r$ , dove  $r = r_1 \cup r_2$ . Dunque, essendo  $f$  sommabile in  $B_r$ , si può passare al limite sotto il segno di integrale e si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow \infty} (\varphi * f)(x_h) &= \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{B_r} \varphi(x_h - y) f(y) dy \\ &= \int_{B_r} \varphi(x - y) f(y) dy = (\varphi * f)(x). \end{aligned}$$

Supponiamo, ora, che  $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$  e fissiamo  $x \in \mathbb{R}^N$  e  $i = 1, \dots, N$ . Indicato con  $e_i$  l' $i$ -esimo elemento della base canonica di  $\mathbb{R}^N$ , si ha, per ogni  $h \neq 0$ :

$$(28) \quad \frac{(\varphi * f)(x + he_i) - (\varphi * f)(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\varphi(x + he_i - y) - \varphi(x - y)}{h} f(y) dy.$$

Con un ragionamento analogo a quanto fatto sopra si verifica anche in questo caso che, per  $0 < |h| < 1$ , le funzioni  $y \mapsto [\varphi(x + he_i - y) - \varphi(x - y)]/h$  hanno tutte supporto equilimitato e convergono uniformemente in  $\mathbb{R}^N$ . Si può quindi passare al limite sotto il segno di integrale nella (28) ottenendo:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(x - y) f(y) dy,$$

provando così l'affermazione del teorema. Il caso generale segue da quanto appena provato con un ovvio ragionamento per induzione.  $\square$

Indichiamo con  $B(0, 1)$  la palla di centro l'origine e raggio 1 in  $\mathbb{R}^N$ .

DEFINIZIONE 7.25 (*Mollificatore*). Un *mollificatore* o *nucleo regolarizzante* è una funzione a supporto compatto  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  tale che soddisfi queste proprietà:

$$(29) \quad \begin{aligned} \text{supp}(\varphi) &\subseteq \overline{B(0, 1)}, \\ \varphi &\geq 0, \\ \|\varphi\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) dx = 1. \end{aligned}$$

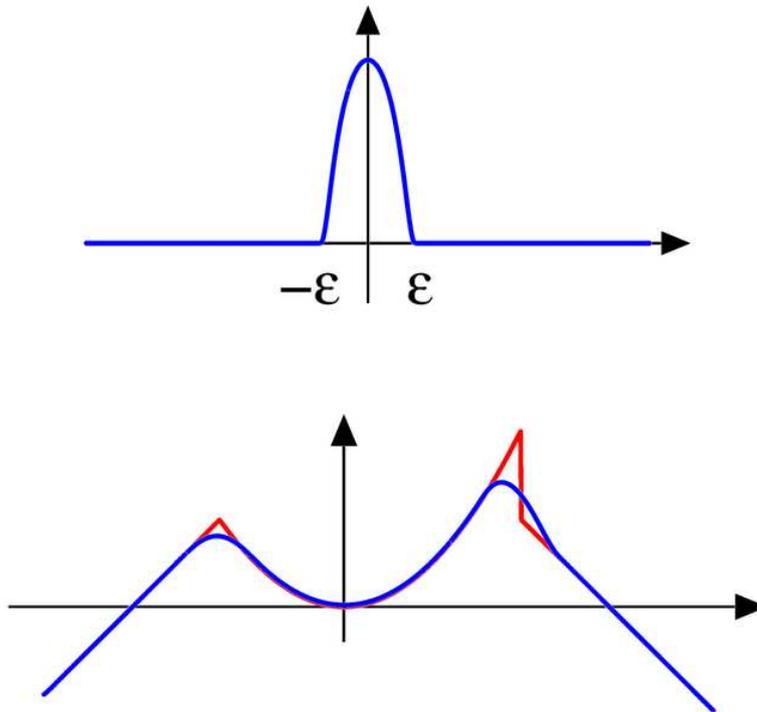


FIGURA 7.1. In alto è rappresentato un mollificatore in dimensione 1; in basso, invece, in rosso è possibile osservare una funzione non derivabile in alcuni punti, mentre in blu la sua versione mollificata, ossia resa liscia e regolare.

Un esempio di funzione  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  che soddisfi tutte le condizioni (29) della definizione è la seguente, detta *mollificatore canonico*:

$$\varphi(x) = \begin{cases} C \cdot e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}.$$

Si può scegliere la costante  $C$  in modo che:  $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) dx = 1$ .  
Ora facciamo questa osservazione sui mollificatori.

OSSERVAZIONE 7.26. Sia  $\varphi$  un mollificatore. Definiamo la famiglia di funzioni  $\varphi_\epsilon$ , per  $\epsilon > 0$ , in questo modo:

$$\varphi_\epsilon(x) := \epsilon^{-N} \varphi(x/\epsilon), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

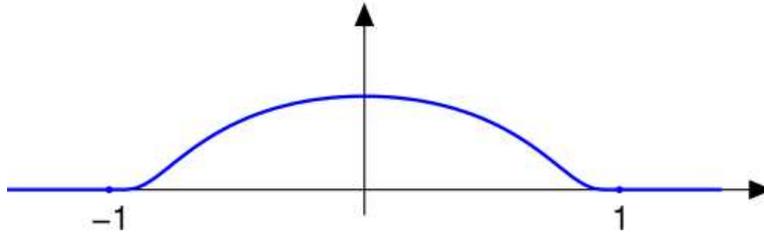


FIGURA 7.2. Rappresentazione del mollificatore canonico  $\varphi(x)$  in dimensione 1.

Allora si ha, per ogni  $\epsilon > 0$ , che:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\epsilon(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) dx \text{ e } \|\varphi_\epsilon\|_1 = \|\varphi\|_1;$$

inoltre, per ogni  $\delta > 0$  fissato:

$$\int_{|x|>\delta} |\varphi_\epsilon(x)| dx \rightarrow 0 \text{ per } \epsilon \rightarrow 0^+.$$

Questo dice che  $\varphi_\epsilon(x)$  definisce una *famiglia di mollificatori*, ossia, per ogni  $\epsilon > 0$ ,  $\varphi_\epsilon$  è un mollificatore poiché soddisfa le proprietà (29). Inoltre, vale che: se  $\text{supp}(\varphi) \subset \overline{B(0,1)}$ , allora  $\text{supp}(\varphi_\epsilon) \subset \overline{B(0,\epsilon)} \rightarrow \{0\}$  per  $\epsilon \rightarrow 0^+$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Dimostriamo alcune affermazioni, ad esempio le prime due, le quali seguono facilmente dal cambiamento di variabile  $y = x/\epsilon$ . Per quanto riguarda la prima, si ha che:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\epsilon(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \epsilon^{-N} \varphi(x/\epsilon) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(y) dy.$$

In modo analogo, fissiamo  $\delta > 0$  e scegliamo  $y = x/\epsilon$  per trovare:

$$\int_{|x|>\delta} |\varphi_\epsilon(x)| dx = \int_{|y|>\delta/\epsilon} |\varphi(y)| dy.$$

Essendo  $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^N)$  e poiché  $\delta/\epsilon \rightarrow +\infty$ , segue la seconda proprietà.  $\square$

I mollificatori sono molto utili per costruire approssimazioni regolari di funzioni in  $L^p$ . A tale proposito, iniziamo con questo lemma.

**LEMMA 7.27.** *Sia  $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Allora:*

$$\sup_{|h|<\delta} \|\tau_h f - f\|_p \rightarrow 0 \text{ se } \delta \rightarrow 0^+.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Preliminarmente: consideriamo  $f \in C_0(\mathbb{R}^N)$ ; per ogni  $x \in \mathbb{R}^N$  si ha che:

$$|\tau_h f(x) - f(x)|^p = |f(x-h) - f(x)|^p \rightarrow 0 \text{ se } |h| \rightarrow 0.$$

Inoltre:

$$|\tau_h f(x) - f(x)|^p \leq (|\tau_h f(x)| + |f(x)|)^p \leq 2^p \|f\|_\infty^p$$

e, se  $K = \text{supp}(f)$  e  $|h| < \delta$ , si ha che  $|\tau_h f - f|^p$  è nulla al di fuori dell'insieme  $K_\delta = K + \overline{B(0, \delta)}$ . Pertanto:

$$|\tau_h f - f|^p \leq 2^p \|f\|_\infty^p \chi_{K_\delta}$$

e la funzione a secondo membro è sommabile in  $\mathbb{R}^N$ : per il teorema della convergenza dominata di Lebesgue si conclude.

Ora: per la densità di  $C_0(\mathbb{R}^N)$  in  $L^p(\mathbb{R}^N)$ , presa  $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ , per ogni  $\epsilon > 0$ , esiste  $g \in C_0(\mathbb{R}^N)$  tale che  $\|f - g\|_p < \epsilon/3$ . Scelto  $\delta > 0$  tale che  $\|\tau_h g - g\|_p < \epsilon/3$  per  $|h| < \delta$ , ne deriva che:

$$\|\tau_h f - f\|_p \leq \|\tau_h f - \tau_h g\|_p + \|\tau_h g - g\|_p + \|g - f\|_p < \epsilon$$

per ogni  $h$  tale che sia  $|h| < \delta$ , in quanto  $\|\tau_h f - \tau_h g\|_p = \|\tau_h(f - g)\|_p = \|f - g\|_p$ .  $\square$

Il prossimo ingrediente consiste nella capacità di approssimare  $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$  mediante una successione di convoluzioni di  $f$  con una famiglia di funzioni in  $L^1(\mathbb{R}^N)$  che diventano più concentrate e più 'a picco' al variare di un piccolo parametro.

La famiglia di operatori di convoluzione associata si chiama *approssimazione dell'identità* perché si riproduce la  $f$  nel limite rispetto alla norma di  $L^p$ .

**TEOREMA 7.28 (Approssimazione in norma).** *Supponiamo che le funzioni  $\varphi_\epsilon$  soddisfino le proprietà (29).*

- (1) *Sia  $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$  per qualche  $p \in [1, \infty)$ .  
Allora:  $\varphi_\epsilon * f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ ,  $\|\varphi_\epsilon * f\|_p \leq \|f\|_p$ .*
- (2) *Sia  $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$  per qualche  $p \in [1, \infty)$ .  
Allora:  $\varphi_\epsilon * f \rightarrow f$  in  $L^p(\mathbb{R}^N)$  per  $\epsilon \rightarrow 0^+$ .*
- (3) *Sia  $f$  uniformemente continua e limitata in  $\mathbb{R}^N$ .  
Allora:  $\varphi_\epsilon * f \rightarrow f$  per  $\epsilon \rightarrow 0^+$  uniformemente in  $\mathbb{R}^N$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** (1) La prima affermazione deriva dalla disuguaglianza di Hölder e dai teoremi di Fubini e di Tonelli. Infatti:

$$\begin{aligned} |(\varphi_\epsilon * f)(x)| &\leq \int |\varphi_\epsilon(x-y)f(y)| dy \\ &= \int \varphi_\epsilon(x-y)^{1/p'} \varphi_\epsilon(x-y)^{1/p} |f(y)| dy \\ &\leq \left( \int \varphi_\epsilon(x-y) dy \right)^{1/p'} \left( \int \varphi_\epsilon(x-y) |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \end{aligned}$$

e, poiché il primo integrale a secondo membro è uguale a 1 (basta eseguire il cambiamento di variabile  $x - y = y$ ), allora:

$$\int |(\varphi_\epsilon * f)(x)|^p dx \leq \int \left( \int \varphi_\epsilon(x-y) |f(y)|^p dy \right) dx.$$

Scambiando l'ordine di integrazione a secondo membro si ottiene:

$$\begin{aligned} \int \left( \int \varphi_\epsilon(x-y) |f(y)|^p dx \right) dy &= \int |f(y)|^p \left( \int \varphi_\epsilon(x-y) dx \right) dy \\ &= \|f\|_p^p < +\infty, \end{aligned}$$

e la tesi segue dall'applicazione consecutiva dei teoremi di Tonelli e Fubini.

(2) Poiché  $C_0(\mathbb{R}^N)$  è denso in  $L^p(\mathbb{R}^N)$  allora, per ogni  $\epsilon > 0$ , esiste una funzione  $g \in C(\mathbb{R}^N)$  avente supporto compatto contenuto in  $\mathbb{R}^N$  tale che  $\|g - f\|_p < \epsilon$ . Si ha quindi, usando anche la prima affermazione, che:

$$\begin{aligned} \|\varphi_\epsilon * f - f\|_p &\leq \|\varphi_\epsilon * f - \varphi_\epsilon * g\|_p + \|\varphi_\epsilon * g - g\|_p + \|g - f\|_p \\ &\leq 2\|g - f\|_p + \|\varphi_\epsilon * g - g\|_p < 2\epsilon + \|\varphi_\epsilon * g - g\|_p, \end{aligned}$$

pertanto basta dimostrare il risultato nel caso in cui si abbia  $f \in C_0(\mathbb{R}^N)$ . Ora: osserviamo che, poiché  $\int \varphi_\epsilon(x-y) dy = 1$ , allora vale:

$$\begin{aligned} |(\varphi_\epsilon * f)(x) - f(x)| &= \left| \int \varphi_\epsilon(x-y) f(y) dy - f(x) \right| \\ &= \left| \int \varphi_\epsilon(x-y) [f(y) - f(x)] dy \right| \\ &\leq \int_{|x-y| < \epsilon} \varphi_\epsilon(x-y) |f(y) - f(x)| dy, \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è utilizzato il fatto che  $\varphi_\epsilon(x-y) = 0$  ogni volta che  $|x-y| \geq \epsilon$ .

Supponiamo che sia  $f$  uniformemente continua. Allora, per ogni  $\eta > 0$ , esiste un  $\delta_\eta > 0$  tale che:

$$|x-y| < \delta_\eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \eta.$$

Da ciò, adoperando la stima precedente, ne deriva che:

$$|(\varphi_\epsilon * f)(x) - f(x)| \leq \eta \int_{|x-y| < \epsilon} \varphi_\epsilon(x-y) dy \leq \eta, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Dato che  $\delta_\eta$  è indipendente da  $x$ , questo prova che  $\varphi_\epsilon * f \rightarrow f$  uniformemente per  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , quindi in particolare risulta provata la terza affermazione. Ne deriva che risulta provata anche la convergenza in  $L^p$ , cioè la seconda affermazione del teorema stesso.

(3) Già provata nel corso del punto precedente. □

Osserviamo che, se  $f \in L^p(E)$ , possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \|\varphi_\epsilon * f - f\|_{p,E}^p &= \int_E |\varphi_\epsilon * (f\chi_E) - f|^p dx \\ &= \int_E |\varphi_\epsilon * (f\chi_E) - f\chi_E|^p dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi_\epsilon * (f\chi_E) - f\chi_E|^p dx \\ &= \|\varphi_\epsilon * (f\chi_E) - f\chi_E\|_{p,\mathbb{R}^N}^p, \end{aligned}$$

e questo tende a zero se  $\epsilon \rightarrow 0^+$  dato che  $f\chi_E \in L^p(\mathbb{R}^N)$ . Inoltre, se  $\Omega$  è aperto ed  $f \in L^p(\Omega)$ , allora  $\varphi_\epsilon * (f\chi_\Omega) \in C^\infty(\Omega)$  per il teorema 7.24.

Questa osservazione ed i teoremi 7.24 e 7.28 implicano il seguente notevole risultato.

**COROLLARIO 7.29 (Approssimazione con funzioni  $C^\infty$ ).** *Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un aperto di  $\mathbb{R}^N$ . Allora l'insieme  $C^\infty(\mathbb{R}^N)$  è denso in  $L^p(\mathbb{R}^N)$  nella topologia della norma.*

Ora dimostriamo questo ulteriore importante teorema.

**TEOREMA 7.30 (Approssimazione con funzioni  $C_0^\infty$ ).** *Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un aperto di  $\mathbb{R}^N$ . Allora lo spazio  $C_0^\infty(\Omega)$  è denso in  $L^p(\Omega)$  per ogni  $p$  tale che sia  $1 \leq p < \infty$ .*

*In altre parole: fissata una funzione  $f \in L^p(\Omega)$ , per ogni  $\epsilon > 0$ , esiste  $g \in C_0^\infty(\Omega)$  tale che:  $\|f - g\|_p < \epsilon$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  un mollificatore. Fissato  $n \in \mathbb{N}$ , sia  $\varphi_n(x) = n^N \varphi(nx)$ . Si ha che  $\text{supp}(\varphi_n) \subseteq \overline{B(0, 1/n)}$ . Data  $f \in L^p(\Omega)$ , consideriamo  $g_n = f\chi_{\Omega_n}$ , dove

$$\Omega_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : d(x, \partial\Omega) \geq \frac{2}{n} \text{ e } |x| \leq n \right\};$$

allora risulta che  $\text{supp}(g_n) \subseteq \Omega_n$ . Posto  $f_n = \varphi_n * g_n$ , abbiamo che  $f_n \in C^\infty(\Omega)$  per il teorema 7.19, ed inoltre  $\text{supp}(f_n) \subseteq \overline{B(0, 1/n)} + \Omega_n \subset \Omega$  per il teorema 7.21. Dunque  $f_n \in C_0^\infty(\Omega)$  e si ha che:

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{p,\Omega} &= \|f_n - f\chi_\Omega\|_{p,\mathbb{R}^N} \\ &\leq \|\varphi_n * g_n - \varphi_n * (f\chi_\Omega)\|_{p,\mathbb{R}^N} + \|\varphi_n * (f\chi_\Omega) - f\chi_\Omega\|_{p,\mathbb{R}^N} \\ &\leq \|g_n - f\chi_\Omega\|_{p,\mathbb{R}^N} + \|\varphi_n * (f\chi_\Omega) - f\chi_\Omega\|_{p,\mathbb{R}^N}. \end{aligned}$$

Il primo addendo converge a zero per il teorema della convergenza dominata di Lebesgue, mentre il secondo converge a zero per il teorema 7.19, dato che  $f\chi_\Omega \in L^p(\mathbb{R}^N)$ .  $\square$

Con idee analoghe a quelle espresse finora, dimostriamo il seguente teorema di approssimazione uniforme.

TEOREMA 7.31 (**Approssimazione uniforme**). Sia  $f \in C_0(\mathbb{R}^N)$ . Allora esiste una successione di polinomi  $P_n$  che convergono ad  $f$  uniformemente sul supporto di  $f$ .

DIMOSTRAZIONE. A meno di traslazioni e dilatazioni, possiamo supporre che il supporto  $S$  di  $f$  sia contenuto in  $Q_{1/2}(0)$ , il cubo di centro l'origine e semilato lungo  $1/2$ , avente i lati paralleli agli assi coordinati.

Per  $n \in \mathbb{N}$ , definiamo:

$$p_n(y) = \alpha_n^{-N} \prod_{i=1}^N (1 - y_i^2)^n, \text{ con } \alpha_n = \int_{-1}^1 (1 - t^2)^n dt.$$

Le funzioni  $p_n$  sono polinomi e sono non negative in  $Q_1(0)$ , dunque:

$$\int_{Q_1(x)} p_n(x - y) dy = \int_{Q_1(0)} p_n(y) dy = 1$$

per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e per ogni  $x \in \mathbb{R}^N$ .

Definiamo, ora, i *polinomi di Stieltjes* relativi ad  $f$  come:

$$P_n(x) := \int_{Q_1(0)} p_n(x - y) f(y) dy;$$

allora risulta:

$$P_n(x) - f(x) = \int_{Q_1(0)} p_n(x - y) f(y) dy - \int_{Q_1(x)} p_n(x - y) f(x) dy.$$

Per ogni  $x \in S$ , scegliendo  $\delta > 0$  tale che  $Q_\delta(x) \subset Q_1(0)$ , possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} |P_n(x) - f(x)| &\leq \int_{Q_\delta(x)} p_n(x - y) |f(y) - f(x)| dy + \\ &+ \left| \int_{Q_1(0) \setminus Q_\delta(x)} p_n(x - y) f(y) dy \right| + \left| \int_{Q_1(x) \setminus Q_\delta(x)} p_n(x - y) f(x) dy \right| \end{aligned}$$

da cui:

$$|P_n(x) - f(x)| \leq \omega(f, \delta\sqrt{N}) +$$

$$+ \max_{\mathbb{R}^N} |f| \left( \left| \int_{Q_1(0) \setminus Q_\delta(x)} p_n(x - y) dy \right| + \left| \int_{Q_1(x) \setminus Q_\delta(x)} p_n(x - y) dy \right| \right).$$

dove  $\omega$  è il modulo di continuità di  $f$ .

I due integrali a secondo membro si maggiorano tenendo conto che  $x - y \notin Q_\delta(0)$  in quanto  $y \notin Q_\delta(x)$ : esiste quindi  $i \in \{1, \dots, N\}$  tale che  $|x_i - y_i| \geq \delta/\sqrt{N}$ , pertanto:

$$p_n(x - y) \leq \alpha_n^{-N} (1 - \delta^2/N)^n \leq 2^{-N} (n + 1)^N (1 - \delta^2/N)^n,$$

essendo

$$\alpha_n \geq 2 \int_0^1 (1-t)^n dt = 2/(n+1).$$

In conclusione:

$$|P_n(x) - f(x)| \leq \omega(f, \delta\sqrt{N}) + 2 \max_{\mathbb{R}^N} |f| (n+1)^N (1 - \delta^2/N)^n$$

con  $x \in S$ ; questa disuguaglianza implica che  $P_n$  converge ad  $f$  uniformemente in  $S$ .  $\square$

Il teorema appena dimostrato è un caso particolare del più generale *teorema di approssimazione di Weierstrass*, che abbiamo già enunciato e dimostrato precedentemente.

**TEOREMA 7.32 (Weierstrass).** *Sia  $E$  un sottoinsieme limitato di  $\mathbb{R}^N$  e sia  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione uniformemente continua su  $E$ .*

*Esiste, allora, una successione di polinomi  $P_n$  che converge uniformemente ad  $f$  su  $E$ .*

### 6. Approssimazione di funzioni localmente sommabili

Fissato un mollificatore  $\varphi$  tale che  $\text{supp}(\varphi) = \overline{B(0,1)}$ , e ponendo, per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e per ogni  $x \in \mathbb{R}^N$  come fatto nel corso della dimostrazione del teorema 7.30:

$$(30) \quad \varphi_n(x) = n^N \varphi(nx),$$

si ottiene una *successione di mollificatori* tali che:

$$(31) \quad \begin{aligned} \varphi_n(x) &\geq 0, \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}^N; \\ \text{supp}(\varphi_n) &\subseteq \overline{B(0,1/n)}; \\ \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_n(x) dx &= 1. \end{aligned}$$

**DEFINIZIONE 7.33 (Funzioni regolarizzate o mollificate).** Sia  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$  e sia data una successione di mollificatori  $\varphi_n(x) = n^N \varphi(nx)$ , dove  $\varphi$  è un mollificatore. Le funzioni  $\varphi_n * f$  prendono il nome di *regolarizzate* o *mollificate* della funzione  $f$ .

Dal teorema 7.24 segue allora che  $\varphi_n * f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$  per ogni  $n$ , e che, per ogni multi-indice  $\alpha$ :

$$D^\alpha(\varphi_n * f)(x) = (D^\alpha \varphi_n * f)(x) = n^{N+|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^N} (D^\alpha \varphi)(n(x-y)) f(y) dy.$$

Le regolarizzate di una funzione  $f$  forniscono un modo semplice per approssimare una funzione localmente sommabile con funzioni più regolari, come risulta chiaro dall'enunciato del teorema seguente.

**TEOREMA 7.34 (Mollificazione in spazi locali).** *Siano  $\varphi_n$  una successione di mollificatori verificanti (30) e (31) e sia  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ .*

- (1) *Se  $f \in C(\mathbb{R}^N)$ , allora  $\varphi_n * f \rightarrow f$  uniformemente sui compatti di  $\mathbb{R}^N$ ;*

(2) Se  $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , allora  $\varphi_n * f \rightarrow f$  in  $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ .

DIMOSTRAZIONE. (1) Fissato un compatto  $K$ , essendo  $f$  uniformemente continua sugli insiemi limitati, e quindi in particolare sull'insieme  $\{z \in \mathbb{R}^N : d(z, K) < 1\}$ , per ogni  $\epsilon > 0$ , esiste un  $\delta \in (0, 1)$  tale che, se  $x \in K$  e  $|y| < \delta$ , risulta:

$$|f(x - y) - f(x)| < \epsilon.$$

Da questa relazione, per ogni  $N > 1/\delta$  e  $x \in K$  si ha allora, ricordando che  $\varphi_n * f = f * \varphi_n$ , che  $\text{supp}(\varphi_n) \subseteq B(0, 1/n)$ , e che  $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi_n = 1$ ,

$$\begin{aligned} |(\varphi_n * f)(x) - f(x)| &= \left| \int_{B(0, 1/n)} [f(x - y) - f(x)] \varphi_n(y) dy \right| \\ &\leq \int_{B(0, 1/n)} |f(x - y) - f(x)| \varphi_n(y) dy \\ &< \epsilon \cdot \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_n(y) dy = \epsilon, \end{aligned}$$

da cui segue la tesi.

(2) Fissato  $r > 1$ , poiché  $f(y) = (f\mathcal{X}_{B_r})(y)$  per ogni  $y \in B_r$ , si ha anche che  $(\varphi_n * f)(x) = (\varphi_n * (f\mathcal{X}_{B_r}))(x)$  per ogni  $n$  e per ogni  $x \in B_{r-1}$ . Essendo  $f\mathcal{X}_{B_r}$  una funzione di  $L^p(\mathbb{R}^N)$ , e poiché, data una funzione  $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ , con  $1 \leq p < \infty$ , allora  $\varphi_n * g \rightarrow g$  in  $L^p(\mathbb{R}^N)$  per quanto dimostrato nel teorema 7.28, segue in particolare che  $\varphi_n * f \rightarrow f$  in  $L^p(B_r)$  e quindi la tesi.  $\square$

Ci sono tante altre varianti di questi processi di approssimazione, dove il punto è che si possono scegliere dei nuclei diversi da  $K(x, y) = \varphi_\epsilon(x - y)$  in una trasformazione integrale del tipo:

$$Tf(x) := \int_{\mathbb{R}^N} K(x, y) f(y) dy.$$

Varie tipologie di nuclei sono di uso comune nell'analisi di Fourier, e alcuni di questi li abbiamo visti all'opera nei capitoli precedenti (il nucleo di Dirichlet, il nucleo di Fejér e quello di Jackson, ad esempio).



## CAPITOLO 8

### *Il teorema di Stone-Weierstrass*

Affrontiamo, in quest'ultimo capitolo, alcuni sviluppi della teoria dell'approssimazione realizzati nel corso del XX secolo, ossia la versione di Stone del teorema di Weierstrass e alcune sue applicazioni all'analisi.

**DEFINIZIONE 8.1** (*Algebra*). Un'algebra è uno spazio vettoriale  $A$  su un campo  $\mathbb{K}$  sul quale è definita un'operazione di prodotto definita su  $A \times A$  a valori in  $A$ ,  $(f, g) \mapsto fg$ , che soddisfa le seguenti proprietà:

- (i)  $(fg)h = f(gh)$ , per ogni  $f, g, h \in A$ ;
- (ii)  $f(g+h) = fg + fh$  e  $(f+g)h = fh + gh$ , per ogni  $f, g, h \in A$ ;
- (iii)  $\alpha(fg) = (\alpha f)g = f(\alpha g)$ , per tutti gli scalari  $\alpha \in \mathbb{K}$  e per ogni  $f, g, h \in A$ .

In altre parole, un'algebra è un anello per le operazioni di addizione fra vettori e di prodotto, insieme ad un'operazione compatibile di moltiplicazione per scalari.

**DEFINIZIONE 8.2** (*Algebra commutativa, elemento neutro di un'algebra*). Un'algebra si dice *commutativa* se  $fg = gf$ , per ogni  $f, g \in A$ . Diciamo poi che  $A$  è dotata di *elemento neutro* se esiste un vettore  $e \in A$  tale che  $fe = ef = f$ , per ogni  $f \in A$ .

**DEFINIZIONE 8.3** (*Algebra normata, algebra di Banach, sottoalgebra*). Se  $A$  è uno spazio vettoriale normato, richiediamo che la norma soddisfi la condizione  $\|fg\| \leq \|f\| \|g\|$ , e in questo caso parliamo di *algebra normata*. Se tale algebra normata è anche completa, viene chiamata *algebra di Banach*. Infine, se  $B$  è un sottoinsieme di un'algebra  $A$ , allora  $B$  si dice *sottoalgebra* di  $A$  se  $B$  è esso stesso un'algebra per le operazioni che eredita da  $A$ , ossia se  $B$  è un sottospazio vettoriale di  $A$  chiuso per l'operazione di prodotto o moltiplicazione.

Se  $A$  è un'algebra normata, allora tutte le operazioni definite su  $A$ , o su  $A \times A$ , sono continue. Ad esempio, poiché:

$$\|fg - hk\| = \|fg - fk + fk - hk\| \leq \|f\| \|g - k\| + \|k\| \|f - h\|,$$

ne deriva che l'operazione di moltiplicazione è continua. In particolare, se  $B$  è un sottospazio (rispettivamente: una sottoalgebra) di  $A$ , allora la chiusura di  $B$ ,  $\overline{B}$ , è ancora un sottospazio (rispettivamente: una sottoalgebra) di  $A$ .

Vediamo alcuni esempi di algebre e sottoalgebre.

1. Se definiamo l'operazione di moltiplicazione coordinata per coordinata, allora  $\mathbb{R}^N$  è un'algebra di Banach commutativa con elemento neutro la  $N$ -upla  $(1, 1, \dots, 1)$ , equipaggiata con la norma infinito:  $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} |x_i|$ .
2. Tra i sottospazi di  $\mathbb{R}^2$ , le sue sottoalgebre sono  $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ ,  $\{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ ,  $\{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ , insieme con  $\{(0, 0)\}$  e  $\mathbb{R}^2$ .
3. Dato un insieme  $X$ , indichiamo con  $B(X)$  lo spazio di tutte le funzioni limitate a valori reali su  $X$ . Se dotiamo  $B(X)$  della norma del max, e se definiamo le operazioni tra funzioni punto per punto, allora  $B(X)$  è un'algebra di Banach commutativa con elemento neutro la funzione costante 1. Le funzioni costanti in  $B(X)$  costituiscono una sottoalgebra isomorfa a  $\mathbb{R}$ .
4. Se  $X$  è uno spazio metrico, o anche uno spazio topologico, allora possiamo considerare  $C(X)$ , lo spazio delle funzioni continue a valori reali su  $X$ . Se definiamo nuovamente le operazioni tra funzioni punto per punto, allora  $C(X)$  risulta essere un'algebra commutativa con elemento neutro la funzione costante 1. Le funzioni continue e limitate su  $X$ , indicate con  $C_b(X) = C(X) \cap B(X)$ , formano una sottoalgebra chiusa di  $B(X)$ . Se  $X$  è compatto, allora  $C_b(X) = C(X)$ , in altre parole in questo caso  $C(X)$  è esso stesso una sottoalgebra chiusa di  $B(X)$  e, in particolare,  $C(X)$  è un'algebra di Banach dotata di elemento neutro.
5. *I polinomi algebrici formano una sottoalgebra densa di  $C[a, b]$ . I polinomi trigonometrici formano una sottoalgebra densa di  $C^{2\pi}$ .* Queste due affermazioni riassumono i due risultati classici di Weierstrass in linguaggio moderno e costituiscono la base per la versione di Stone di tale teorema.

Facendo uso di questo nuovo linguaggio, possiamo enunciare il classico teorema di Weierstrass in un nuovo modo: *Se una sottoalgebra  $A$  di  $C[a, b]$  contiene le funzioni  $e(x) = 1$  e  $f(x) = x$ , allora  $A$  è densa in  $C[a, b]$ .*

Senza dubbio ogni sottoalgebra di  $C[a, b]$  contenente le funzioni 1 e  $x$  contiene tutti i polinomi; quindi la nostra ridefinizione dell'enunciato del teorema di Weierstrass si riduce all'osservazione che ogni sottoalgebra contenente un insieme denso è essa stessa densa in  $C[a, b]$ . Il nostro scopo, per ora, è di dimostrare un analogo di questa nuova versione del teorema di Weierstrass per le sottoalgebre di  $C(X)$ , dove  $X$  è uno spazio metrico compatto. Nello specifico, vogliamo cogliere l'essenza delle funzioni 1 e  $x$  da questa affermazione, ossia cercheremo delle condizioni su una sottoalgebra  $A$  di  $C(X)$  che farà sì che  $A$

debba essere densa in  $C(X)$ . Il ruolo chiave giocato da 1 e  $x$ , nel caso di  $C[a, b]$ , è insito nel fatto che una sottoalgebra contenente queste due funzioni deve certamente contenere un insieme molto più ampio di funzioni. Tuttavia, non essendoci garantita la presenza di qualcosa di lontanamente simile ai polinomi nei più generali spazi  $C(X)$ , abbiamo bisogno di cambiare prospettiva: ciò di cui abbiamo bisogno è di esigere la soddisfazione di qualche richiesta ad una sottoalgebra  $A$  di  $C(X)$  che ci permetta di costruire una grande varietà di funzioni in  $A$ , e se  $A$  conterrà una gamma sufficientemente ricca di funzioni, potrebbe diventare possibile dimostrare la densità di  $A$  in  $C(X)$ .

**DEFINIZIONE 8.4** (*Famiglia di funzioni che separa i punti*). Sia  $A$  una famiglia di funzioni a valori reali definite su un certo insieme  $X$ . Diciamo che  $A$  separa i punti in  $X$  se, dati  $x \neq y \in X$ , esiste  $f \in A$  tale che  $f(x) \neq f(y)$ . Diciamo, inoltre, che  $A$  non si annulla in alcun punto di  $X$  se, dato  $x \in X$ , esiste  $f \in A$  tale che  $f(x) \neq 0$ .

Diamo nuovamente alcuni esempi di queste definizioni.

**1.** La funzione  $f(x) = x$  chiaramente separa i punti in  $[a, b]$ , e la funzione  $e(x) = 1$ , invece, non si annulla in alcun punto in  $[a, b]$ . Ogni sottoalgebra  $A$  contenente queste due funzioni, allo stesso modo, separerà i punti e non si annullerà in alcun punto in  $[a, b]$ .

**2.** L'insieme  $E$  delle funzioni pari in  $C[-1, 1]$  non separa i punti in  $C[-1, 1]$ ; infatti vale:  $f(x) = f(-x)$ , per ogni funzione pari. Tuttavia, poiché le funzioni costanti sono pari,  $E$  non si annulla in alcun punto in  $[-1, 1]$ . Non è difficile vedere che  $E$  è una sottoalgebra propria chiusa di  $C[-1, 1]$ . D'altro lato, l'insieme delle funzioni dispari separerà i punti, in quanto la funzione  $f(x) = x$  è dispari, ma le funzioni dispari si annulleranno tutte in 0. L'insieme delle funzioni dispari risulterà, allora, un sottospazio proprio chiuso di  $C[-1, 1]$ , ma non una sottoalgebra.

**3.** Come costruire esempi di sottoalgebre chiuse non banali di  $C(X)$ ? Dato un qualsiasi sottoinsieme chiuso  $X_0$  di  $X$ , l'insieme  $A(X_0) = \{f \in C(X) : f \text{ si annulla su } X_0\}$  costituisce una sottoalgebra propria, non vuota, di  $C(X)$ . Risulta chiusa in ogni ragionevole topologia di  $C(X)$  essendo chiusa per limite puntuale. Le sottoalgebre del tipo  $A(X_0)$  sono interessanti in quanto sono in realtà degli *ideali* dell'anello  $C(X)$ , ossia se  $f \in C(X)$  e  $g \in A(X_0)$ , allora  $fg \in A(X_0)$ .

Come questi esempi mostrano, nessuna di queste nuove condizioni, considerata singolarmente, è sufficiente a fare in modo che una sottoalgebra di  $C(X)$  risulti densa, ma entrambe le condizioni si rivelano essere sufficienti. Vediamo un po' meglio cosa permettono di fare in un'algebra di funzioni queste due condizioni.

LEMMA 8.5. *Sia  $A$  un'algebra di funzioni a valori reali su un insieme  $X$ . Supponiamo che  $A$  separi i punti in  $X$  e non si annulli in alcun punto di  $X$ . Allora, presi due qualsiasi elementi  $x \neq y \in X$  e  $a, b \in \mathbb{R}$ , esiste  $f \in A$  tale che  $f(x) = a$  e  $f(y) = b$ .*

DIMOSTRAZIONE. Considerata una qualunque coppia di punti distinti  $x \neq y \in X$ , l'insieme  $\tilde{A} = \{(f(x), f(y)) : f \in A\}$  è una sottoalgebra di  $\mathbb{R}^2$ . Se  $A$  separa i punti in  $X$ , allora  $\tilde{A}$ , evidentemente, non è né  $\{(0, 0)\}$  né  $\{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ . Se  $A$  non si annulla in alcun punto, allora  $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$  e  $\{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$  sono entrambi esclusi. Dunque  $\tilde{A} = \mathbb{R}^2$ . Il che significa che, per ogni  $a, b \in \mathbb{R}$ , esiste  $f \in A$  tale per cui  $(f(x), f(y)) = (a, b)$ .  $\square$

Finalmente possiamo enunciare la versione di Stone del teorema di Weierstrass (per spazi metrici compatti). Da notare che il teorema, così come è enunciato, vale anche in  $C(X)$ , dove  $X$  è uno spazio topologico compatto di Hausdorff (o separabile), con la stessa dimostrazione, mentre non è valido per le algebre di funzioni a valori complessi su  $\mathbb{C}$ , che tratteremo successivamente.

TEOREMA 8.6 (**Stone-Weierstrass, scalari reali**). *Sia  $X$  uno spazio metrico compatto e sia  $A$  una sottoalgebra di  $C(X)$ . Se  $A$  separa i punti in  $X$  e non si annulla in alcun punto di  $X$ , allora  $A$  è denso in  $C(X)$ .*

Una prima versione 'embrionale' di questo teorema apparve nel 1937; le successive versioni del 1948 e 1962 beneficiarono del lavoro del grande matematico giapponese *Kakutani* e risultarono un po' più appetibili per il pubblico matematico (per ulteriori dettagli vedi, ad esempio, [13] e [14]).

Un primo passo per attaccare la dimostrazione del teorema di Stone consiste nell'osservare che, se  $A$  soddisfa le condizioni del teorema 8.6, così fa anche la sua chiusura  $\overline{A}$ . Pertanto, senza perdere di generalità, possiamo supporre che  $A$  sia una sottoalgebra chiusa di  $C(X)$  e dimostrare, allora, che  $A = C(X)$ . Le sottoalgebre chiuse di  $C(X)$  ereditano molte più strutture di quanto si possa pensare.

TEOREMA 8.7. *Se  $A$  è una sottoalgebra di  $C(X)$ , e se  $f \in A$ , allora  $|f| \in \overline{A}$ . Ne segue che  $\overline{A}$  è un sottoreticolo di  $C(X)$ .*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\epsilon > 0$  e consideriamo la funzione  $|t|$  sull'intervallo  $[-\|f\|, \|f\|]$ . Per il teorema di Weierstrass, esiste un polinomio  $p(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$  tale che:  $||t| - p(t)| < \epsilon$ , per ogni  $|t| \leq \|f\|$ . In particolare, osserviamo che si ha:  $|p(0)| = |a_0| < \epsilon$ .

Ora, avendosi  $|f(x)| \leq \|f\|$ , per ogni  $x \in X$ , ne segue che:  $||f(x)| - p(f(x))| < \epsilon$ , per ogni  $x \in X$ . Ma  $p(f(x)) = (p(f))(x)$ , dove  $p(f) = a_0 1 + a_1 f + \dots + a_n f^n$ , e la funzione  $g = a_1 f + \dots + a_n f^n \in A$ ,

poiché  $A$  è un'algebra. Quindi:

$$||f(x)| - g(x)| \leq |a_0| + \epsilon < 2\epsilon,$$

per ogni  $x \in X$ . Equivalentemente, per ogni  $\epsilon > 0$ , è possibile trovare un elemento  $g \in A$  tale che  $||f| - g| < 2\epsilon$ . Questo dice che  $|f| \in \overline{A}$ . Per quanto riguarda l'affermazione che  $\overline{A}$  sia un sottoreticolo di  $C(X)$ , questo si riduce a provare che, dati  $f, g \in \overline{A}$ , allora sia  $\max\{f, g\}$  sia  $\min\{f, g\} \in \overline{A}$ . Ma questa è un'affermazione che concerne dei numeri reali. Infatti, essendo:

$$2 \max\{a, b\} = a + b + |a - b| \quad \text{e} \quad 2 \min\{a, b\} = a + b - |a - b|$$

ne segue che un sottospazio di  $C(X)$  è un sottoreticolo di  $C(X)$  precisamente quando contiene il valore assoluto di tutti i suoi elementi, cosa che abbiamo appena dimostrato valere.  $\square$

Da questo risultato ciò che teniamo a sottolineare è che, data una sottoalgebra chiusa  $A$  di  $C(X)$ , allora  $A$  è chiusa in ogni senso della parola: somme, prodotti, valori assoluti, massimi e minimi di elementi di  $A$ , e perfino limiti di successioni di questi, ritornano tutti in  $A$ . Questo è proprio il grado di libertà di cui abbiamo bisogno per tentare di dimostrare che  $A = C(X)$ .

Prima di incominciare tale dimostrazione, osserviamo che nel teorema 8.7 avremmo anche potuto evitare di appellarci al teorema di Weierstrass. Infatti, dovevamo soltanto fornire un'approssimazione polinomiale per la funzione  $|x|$  su  $[-1, 1]$ , e questo può essere fatto direttamente appellandosi, ad esempio, al teorema del binomio, usando  $|x| = \sqrt{1 - (1 - x^2)}$ ; la serie che ne risulta si dimostra convergere uniformemente su  $[-1, 1]$ . Evitando di usare il classico teorema di Weierstrass, esso diviene un corollario della versione data da Stone, piuttosto che il contrario.

**DIMOSTRAZIONE. (*Stone-Weierstrass, scalari reali*)** Come già osservato, possiamo supporre che  $A$  sia una sottoalgebra (sottospazio e sottoreticolo) chiusa di  $C(X)$  e vogliamo mostrare che  $A = C(X)$ .

*Primo passo.* Data  $f \in C(X)$ ,  $x \in X$  e  $\epsilon > 0$ , esiste un elemento  $g_x \in A$ , con  $g_x(x) = f(x)$  e  $g_x(y) > f(y) - \epsilon$ , per ogni  $y \in X$ .

Infatti: dal lemma 8.5 sappiamo che, per ogni  $y \in X$ ,  $y \neq x$ , si può trovare un elemento  $h_y \in A$  tale che risulti  $h_y(x) = f(x)$  e  $h_y(y) = f(y)$ . Poiché  $h_y - f$  è continua e si annulla sia in  $x$  sia in  $y$ , l'insieme  $U_y = \{t \in X : h_y(t) > f(t) - \epsilon\}$  è aperto e contiene sia  $x$  sia  $y$ . Perciò gli insiemi  $(U_y)_{y \neq x}$  formano un ricoprimento aperto di  $X$ . Essendo  $X$  uno spazio compatto, gli  $U_y$  saranno in numero finito, quindi scriveremo:

$$X = U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_n}.$$

Sia, ora,  $g_x = \max\{h_{y_1}, \dots, h_{y_n}\}$ . Essendo  $A$  un reticolo, succede che  $g_x \in A$ . Osserviamo che  $g_x(x) = f(x)$  poiché ciascun  $h_{y_i}$  coincide con

$f$  nel punto  $x$ . Inoltre  $g_x > f - \epsilon$  perché, dato  $y \neq x$ , si ha che  $y \in U_{y_i}$  per qualche  $i$ , e dunque  $g_x(y) \geq h_{y_i}(y) > f(y) - \epsilon$ .

*Secondo passo.* Data  $f \in C(X)$  ed  $\epsilon > 0$ , esiste  $h \in A$  tale che  $\|f - h\| < \epsilon$ .

Infatti: dal passo precedente, per ogni  $x \in X$ , si può trovare  $g_x \in A$  tale che  $g_x(x) = f(x)$  e  $g_x(y) > f(y) - \epsilon$ , per tutti gli  $y \in X$ . Ora capovolgiamo il procedimento utilizzato nel primo passo: per ogni  $x$ , l'insieme  $V_x = \{y \in X : g_x(y) < f(y) + \epsilon\}$  è aperto e contiene  $x$ . Di nuovo, essendo  $X$  uno spazio compatto:

$$X = V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_m},$$

per certi  $x_1, \dots, x_m$ . Questa volta poniamo  $h = \min \{g_{x_1}, \dots, g_{x_m}\} \in A$ . Come prima,  $h(y) > f(y) - \epsilon$  per ogni  $y$ , poiché ogni  $g_{x_i}$  soddisfa la stessa disuguaglianza e  $h$  è il minimo; inoltre  $h(y) < f(y) + \epsilon$  per ogni  $y$ , dato che almeno un  $g_{x_i}$  soddisfa tale disuguaglianza.

Si conclude che  $A$  è denso in  $C(X)$  ma, essendo  $A$  chiuso, questo significa che  $A = C(X)$ .  $\square$

**COROLLARIO 8.8.** *Se  $X$  e  $Y$  sono spazi metrici compatti, allora il sottospazio di  $C(X \times Y)$  generato dalle funzioni della forma  $f(x, y) = g(x)h(y)$ ,  $g \in C(X)$ ,  $h \in C(Y)$ , è denso in  $C(X \times Y)$ .*

**COROLLARIO 8.9.** *Se  $K$  è un sottoinsieme compatto di  $\mathbb{R}^N$ , allora i polinomi (in  $N$  variabili) sono densi in  $C(K)$ .*

### 1. Applicazioni a $C^{2\pi}$

Il teorema di Stone-Weierstrass può essere utilizzato per mostrare che i polinomi trigonometrici sono densi in  $C^{2\pi}$ . Uno dei possibili approcci potrebbe essere quello di identificare  $C^{2\pi}$  con la sottoalgebra chiusa di  $C[0, 2\pi]$  costituita dalle funzioni  $f$  verificanti le condizioni  $f(0) = f(2\pi)$ . Tuttavia appare più semplice identificare  $C^{2\pi}$  con l'insieme  $C(\mathbb{T})$  delle funzioni continue sul cerchio unitario  $\mathbb{T} = \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  nel piano complesso, tramite l'identificazione seguente:

$$(32) \quad f \in C^{2\pi} \longleftrightarrow g \in C(\mathbb{T}), \text{ dove } g(e^{it}) = f(t).$$

Mediante tale corrispondenza, i polinomi trigonometrici in  $C^{2\pi}$  si accordano con certi polinomi in  $z = e^{it}$  e  $\bar{z} = e^{-it}$ . Ma, come abbiamo già visto, anche se partiamo da polinomi trigonometrici a coefficienti reali, arriveremo ad avere polinomi in  $z$  e  $\bar{z}$  a coefficienti complessi.

Alla luce di ciò, conviene considerare le funzioni continue su  $\mathbb{T}$  a valori complessi. Indichiamo con  $C_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$  tali funzioni, mentre con  $C_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$  le funzioni continue su  $\mathbb{T}$  a valori reali. In maniera del tutto analoga,  $C_{\mathbb{C}}^{2\pi}$  denota lo spazio delle funzioni  $2\pi$ -periodiche su  $\mathbb{R}$  a valori complessi, mentre  $C_{\mathbb{R}}^{2\pi}$  le stesse funzioni a valori reali.

Ora, mediante l'identificazione (32), risulta  $C_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}) = C_{\mathbb{C}}^{2\pi}$  e  $C_{\mathbb{R}}(\mathbb{T}) = C_{\mathbb{R}}^{2\pi}$ . I polinomi trigonometrici a valori complessi in  $C_{\mathbb{C}}^{2\pi}$  ora si accordano con tutto l'insieme dei polinomi, a coefficienti complessi, in  $z = e^{it}$  e  $\bar{z} = e^{-it}$ . Adopereremo il teorema di Stone-Weierstrass per far vedere che questi polinomi sono densi in  $C_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ .

I polinomi in  $z$ , ovviamente, separano i punti in  $\mathbb{T}$  e non si annullano in alcun punto di  $\mathbb{T}$ . Tuttavia, i polinomi in  $z$  considerati singolarmente *non* sono densi in  $C_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ . Per vedere per quale motivo, diamo una dimostrazione del fatto che  $f(z) = \bar{z}$  non può essere approssimata in modo uniforme tramite polinomi in  $z$ .

Innanzitutto supponiamo che sia assegnato il polinomio  $p(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k$ . Allora:

$$\int_0^{2\pi} \overline{f(e^{it})} p(e^{it}) dt = \int_0^{2\pi} e^{it} p(e^{it}) dt = \sum_{k=0}^n c_k \int_0^{2\pi} e^{i(k+1)t} dt = 0,$$

e quindi:

$$2\pi = \int_0^{2\pi} \overline{f(e^{it})} f(e^{it}) dt = \int_0^{2\pi} \overline{f(e^{it})} [f(e^{it}) - p(e^{it})] dt,$$

avendosi  $\overline{f(z)}f(z) = |f(z)|^2 = 1$ . Ora, considerando i valori assoluti, risulta:

$$2\pi \leq \int_0^{2\pi} |f(e^{it}) - p(e^{it})| dt \leq 2\pi \|f - p\|.$$

Equivalentemente:  $\|f - p\| \geq 1$ , per ogni polinomio  $p$ .

Generalizziamo il discorso. Dato uno spazio metrico compatto  $X$ , scriveremo  $C_{\mathbb{C}}(X)$  per indicare l'insieme di tutte le funzioni continue a valori complessi  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ , equipaggiando  $C_{\mathbb{C}}(X)$  con  $\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)|$ , dove  $|f(x)|$  è inteso nel senso di modulo del numero complesso  $f(x)$ .  $C_{\mathbb{C}}(X)$  è un'algebra di Banach su  $\mathbb{C}$ . Per rendere chiaro quale campo di scalari sia coinvolto, indicheremo con  $C_{\mathbb{R}}(X)$  l'insieme degli elementi di  $C_{\mathbb{C}}(X)$  a valori reali, anche se  $C_{\mathbb{R}}(X)$  non è altro che  $C(X)$  con un nuovo nome.

In modo più generale, denoteremo con  $A_{\mathbb{C}}$  un'algebra su  $\mathbb{C}$  di funzioni a valori complessi, e con  $A_{\mathbb{R}}$  gli elementi di  $A_{\mathbb{C}}$  a valori reali. Con questa scrittura  $A_{\mathbb{R}}$  è allora un'algebra, su  $\mathbb{R}$ , di funzioni a valori reali.

**OSSERVAZIONE 8.10.** Se  $f$  è un elemento di  $C_{\mathbb{C}}(X)$ , lo è anche la funzione  $\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$ , ossia il complesso coniugato di  $f(x)$ . Da ciò deriva che:

$$\Re f = \frac{1}{2}(f + \bar{f}) \quad e \quad \Im f = \frac{1}{2i}(f - \bar{f}),$$

le parti reali e immaginarie di  $f$ , rispettivamente, appartengono anche a  $C_{\mathbb{R}}(X)$ . Inversamente, se  $g, h \in C_{\mathbb{R}}(X)$ , allora  $g + ih \in C_{\mathbb{C}}(X)$ .

Questa semplice osservazione ci fornisce un suggerimento riguardo a come si potrebbe applicare il teorema di Stone-Weierstrass alle sottoalgebre di  $C_{\mathbb{C}}(X)$ . Data, infatti, una sottoalgebra  $A_{\mathbb{C}}$  di  $C_{\mathbb{C}}(X)$ , supponiamo di essere in grado di provare che  $A_{\mathbb{R}}$  sia denso in  $C_{\mathbb{R}}(X)$ . Allora, data una qualsiasi funzione  $f \in C_{\mathbb{C}}(X)$ , potremmo approssimare  $\Re f$  e  $\Im f$  con elementi  $g, h \in A_{\mathbb{R}}$ . Ma, essendo  $A_{\mathbb{R}} \subset A_{\mathbb{C}}$ , questo significa che  $g + ih \in A_{\mathbb{C}}$ , e quindi che  $g + ih$  approssima  $f$ . Ossia,  $A_{\mathbb{C}}$  è denso in  $C_{\mathbb{C}}(X)$ . Perfetto! Dunque ciò che abbiamo utilizzato in questo ragionamento, e di cui avremo necessariamente bisogno, è che  $A_{\mathbb{R}}$  contenga le parti reali e immaginarie della ‘maggiorparte’ delle funzioni di  $C_{\mathbb{C}}(X)$ .

Se assumiamo che  $A_{\mathbb{C}}$  separi i punti e non si annulli in alcun punto, allora  $A_{\mathbb{R}}$  conterrà ‘la maggiorparte’ di  $C_{\mathbb{R}}(X)$  e, per essere certi di prendere sia la parte reale sia la parte immaginaria di ciascun elemento di  $A_{\mathbb{C}}$ , assumeremo che  $A_{\mathbb{C}}$  contenga i coniugati di ognuno dei suoi elementi:  $\bar{f} \in A_{\mathbb{C}}$  ogniqualvolta  $f \in A_{\mathbb{C}}$ . In altre parole, richiederemo che  $A_{\mathbb{C}}$  sia *auto-aggiunta*.

**TEOREMA 8.11 (Stone-Weierstrass, scalari complessi).** *Sia  $X$  uno spazio metrico compatto e sia  $A_{\mathbb{C}}$  una sottoalgebra, su  $\mathbb{C}$ , di  $C_{\mathbb{C}}(X)$ . Se  $A_{\mathbb{C}}$  separa i punti in  $X$ , non si annulla in alcun punto di  $X$  ed è auto-aggiunta, allora  $A_{\mathbb{C}}$  è densa in  $C_{\mathbb{C}}(X)$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Indichiamo, di nuovo, con  $A_{\mathbb{R}}$  l’insieme degli elementi di  $A_{\mathbb{C}}$  a valori reali. Essendo  $A_{\mathbb{C}}$  auto-aggiunta,  $A_{\mathbb{R}}$  contiene le parti reali e immaginarie di ogni  $f \in A_{\mathbb{C}}$ :

$$\Re f = \frac{1}{2}(f + \bar{f}) \in A_{\mathbb{R}} \quad \text{e} \quad \Im f = \frac{1}{2i}(f - \bar{f}) \in A_{\mathbb{R}}.$$

Inoltre  $A_{\mathbb{R}}$  è una sottoalgebra, su  $\mathbb{R}$ , di  $C_{\mathbb{R}}(X)$ , separa i punti in  $X$  e non si annulla in alcun punto di  $X$ . Infatti, dati  $x \neq y \in X$  e  $f \in A_{\mathbb{C}}$  con  $f(x) \neq f(y)$ , deve risultare che almeno una tra  $\Re f$  e  $\Im f$  soddisfa:  $\Re f(x) \neq \Re f(y)$  o  $\Im f(x) \neq \Im f(y)$ . In modo analogo,  $f(x) \neq 0$  implica che deve valere almeno una tra  $\Re f(x) \neq 0$  o  $\Im f(x) \neq 0$ . In altre parole:  $A_{\mathbb{R}}$  soddisfa le ipotesi della versione del teorema di Stone-Weierstrass valida per scalari reali; di conseguenza  $A_{\mathbb{R}}$  è denso in  $C_{\mathbb{R}}(X)$ .

Ora, data  $f \in C_{\mathbb{C}}(X)$  e  $\epsilon > 0$ , prendiamo  $g, h \in A_{\mathbb{R}}$  con  $\|g - \Re f\| < \epsilon/2$  e  $\|h - \Im f\| < \epsilon/2$ . Allora  $g + ih \in A_{\mathbb{C}}$  e  $\|f - (g + ih)\| < \epsilon$ . Quindi  $A_{\mathbb{C}}$  è denso in  $C_{\mathbb{C}}(X)$ .  $\square$

**COROLLARIO 8.12.** *I polinomi a coefficienti complessi in  $z$  e  $\bar{z}$  sono densi in  $C_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ . Equivalentemente: i polinomi trigonometrici complessi sono densi in  $C_{\mathbb{C}}^{2\pi}$ .*

Osserviamo che, dalla dimostrazione del teorema 8.11, segue che le parti reali dei polinomi in  $z$  e  $\bar{z}$ , ossia i polinomi trigonometrici reali, sono densi in  $C_{\mathbb{R}}(\mathbb{T}) = C_{\mathbb{R}}^{2\pi}$ .

**COROLLARIO 8.13.** *I polinomi trigonometrici reali sono densi in  $C_{\mathbb{R}}^{2\pi}$ .*

## 2. Applicazioni alle funzioni lipschitziane

Vediamo, infine, ulteriori applicazioni del teorema di Stone-Weierstrass. Mentre il teorema classico di Weierstrass viene utilizzato per provare che  $C[a, b]$  è uno spazio separabile, allo stesso modo il teorema di Stone-Weierstrass può usarsi per mostrare che  $C(X)$  è separabile, dove  $X$  denota uno spazio metrico compatto. Sebbene non avremo a nostra disposizione qualcosa di così comodo come i polinomi, tuttavia disporremo, almeno, di una famiglia di funzioni abbastanza familiare con cui lavorare.

**DEFINIZIONE 8.14** (*Funzioni lipschitziane*). Dato uno spazio metrico  $(X, d)$  e un numero  $K \geq 0$ , scriveremo  $\text{lip}_K(X)$  per indicare la famiglia delle funzioni lipschitziane su  $X$  a valori reali con costante al più  $K$ , ossia  $f : X \rightarrow \mathbb{R} \in \text{lip}_K(X)$  se  $|f(x) - f(y)| \leq Kd(x, y)$ , per ogni  $x, y \in X$ . Scriveremo, poi,  $\text{lip}(X)$  per indicare l'insieme delle funzioni appartenenti a  $\text{lip}_K(X)$  per qualche  $K$ . In altre parole:

$$\text{lip}(X) = \bigcup_{K=1}^{\infty} \text{lip}_K(X).$$

Si vede facilmente che  $\text{lip}(X)$  è un sottospazio di  $C(X)$ ; inoltre, se  $X$  è compatto, allora  $\text{lip}(X)$  è perfino una sottoalgebra di  $C(X)$ . Infatti, date  $f \in \text{lip}_K(X)$  e  $g \in \text{lip}_M(X)$ , si ha:

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &\leq |f(x)g(x) - f(y)g(x)| + |f(y)g(x) - f(y)g(y)| \\ &\leq K \|g\| |x - y| + M \|f\| |x - y|. \end{aligned}$$

**LEMMA 8.15.** *Se  $X$  è uno spazio metrico compatto, allora  $\text{lip}(X)$  è denso in  $C(X)$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Chiaramente  $\text{lip}(X)$  contiene le funzioni costanti e quindi non si annulla in alcun punto di  $X$ . Per vedere che  $\text{lip}(X)$  separa i punti in  $X$ , usiamo il fatto che la metrica  $d$  sia lipschitziana: dato  $x_0 \neq y_0 \in X$ , la funzione  $f(x) = d(x, y_0)$  soddisfa  $f(x_0) > 0 = f(y_0)$ ; inoltre  $f \in \text{lip}_1(X)$  in quanto

$$|f(x) - f(y)| = |d(x, y_0) - d(y, y_0)| \leq d(x, y).$$

Quindi, per il teorema di Stone-Weierstrass,  $\text{lip}(X)$  è denso in  $C(X)$ .  $\square$

**TEOREMA 8.16.** *Se  $X$  è uno spazio metrico compatto, allora  $C(X)$  è separabile.*

**DIMOSTRAZIONE.** È sufficiente mostrare che  $\text{lip}(X)$  è separabile. Per vederlo, osserviamo dapprima che  $\text{lip}(X) = \bigcup_{K=1}^{\infty} E_K$ , dove:

$$E_K = \{f \in C(X) : \|f\| \leq K \text{ e } f \in \text{lip}_K(X)\}.$$

Gli insiemi  $E_K$  sono uniformemente limitati ed equicontinui. Quindi, per il teorema di Ascoli-Arzelà, ogni  $E_K$  risulta compatto in  $C(X)$ . Ma,

essendo gli insiemi compatti separabili, così come le unioni numerabili di insiemi compatti, ne segue che  $\text{lip}(X)$  è separabile.  $\square$

Si può dimostrare (cfr.[15]) che vale anche il viceversa del teorema 8.16, il ché rende questo risultato notevole.

**TEOREMA 8.17.** *Se  $C(X)$  è separabile, dove  $X$  denota uno spazio topologico compatto di Hausdorff (o separabile), allora  $X$  è metrizzabile.*

## Bibliografia

- [1] N.L. Carothers, *A Short Course on Approximation Theory*, Department of Mathematics and Statistics Bowling Green State University.
- [2] W.Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1986.
- [3] H.Brezis, *Analisi funzionale - Teoria e applicazioni*, Liguori Editore, 1986.
- [4] R.Magnanini, *Dispense del Corso di Istituzioni di Analisi Superiore*, Dipartimento di Matematica U.Dini Università di Firenze.
- [5] A.Quarteroni-F.Saleri, *Calcolo Scientifico - Esercizi e problemi risolti con MATLAB e Octave*, Springer-Verlag, 2008.
- [6] S.De Marchi, *Appunti di Calcolo Numerico con codici in Matlab/Octave*, Dipartimento di Informatica Università di Verona.
- [7] E. W. Cheney, *Introduction to Approximation Theory*, Chelsea, New York, 1982.
- [8] T. J. Rivlin, *An Introduction to the Approximation of Functions*, Dover, New York, 1981.
- [9] I. Natanson, *Constructive Function Theory*, 3 volumi, Frederick Ungar, New York, 1964-1965.
- [10] L. Fox-I. B. Parker, *Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis*, Oxford University Press, New York, 1968.
- [11] H. Lebesgue, *Sur l'approximation des fonctions*, Bulletin des Sciences Mathématique **22** (1898), 278-287.
- [12] M. J. D. Powell, *On the maximum errors of polynomial approximations defined by interpolation and by least squares criteria*, The Computer Journal **9** (1967), 404-407.
- [13] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, Terza Edizione, McGraw-Hill, New York, 1976.
- [14] G. F. Simmons, *Introduction to Topology and Modern Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1963.
- [15] G. Folland, *Real Analysis*, Seconda Edizione, Wiley-Interscience, New York, 1999.