ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

# Schemi di punti grassi in $\mathbb{P}^3$ e loro risoluzioni minimali

**Tesi di Laurea in Geometria Algebrica**

**Relatore:**
**Monica Idà**

**Presentata da:**
**Davide Vanzo**

**II Sessione**
**Anno Accademico 2011/2012**

# Indice

# Introduzione

Nel seguito lavoriamo sul campo complesso.

Lo studio delle equazioni che definiscono una varietà proiettiva è un tema classico, di evidente interesse, che si è sviluppato in molte direzioni. Se $X$ è una varietà proiettiva di $\mathbb{P}^n$, le prime domande che vengono spontanee sono: in quante ipersuperfici di grado $k$ è contenuta? Che tipo di relzioni esistono tra ipersuperfici di qualunque grado che la contengono?

Rispondere a queste domande porta a capire la struttura dell'ideale omogeneo (saturo) della varietà $I_X := \oplus_{k\geq 0} H^0(\mathfrak{I}_{X,\mathbb{P}^n}(k))$, dove $\mathfrak{I}_X$ denota il fascio di ideali $\mathfrak{I}_{X,\mathbb{P}^n}$ di $X$ in $\mathbb{P}^n$.

Rispondere alla prima domanda significa infatti conoscere le dimensioni degli spazi vettoriali $H^0(\mathfrak{I}_{X,\mathbb{P}^n}(k))$ per ogni $k$ (diremo in tal caso che la postulazione di $X$ è nota); rispondere alla seconda domanda significa comprendere meglio la struttura moltiplicativa dell'ideale $I_X$, cioè le mappe di moltiplicazione:

$$\mu_k : H^0(\mathfrak{I}_X(k)) \otimes H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \to H^0(\mathfrak{I}_X(k+1)).$$

Queste mappe sono obbligate a diventare suriettive da un certo punto in poi; prendendo una base per ogni $coker \mu_k$ non nullo, e fecendone l'unione, si ottiene un sistema minimale di generatori (necessariamente finito) per l'ideale, che fornisce il primo passo della risoluzione libera minimale di $I_X$ come $\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$-modulo:

$$L_0 \xrightarrow{f} I_X \to 0$$

Per approfondire ulteriormente la struttura di questo ideale, è allora naturale cercare di procedere cosi', cercando un sistema minimale di generatori per il $\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$-modulo $K := ker f$ ed ottenendo un ulteriore passo della risoluzione libera minimale:

$$\begin{tikzcd}
L_1 \arrow[r] & L_0 \arrow[rr] \arrow[dr] & & I_X \arrow[r] & 0 \\
& & K \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
& 0 \arrow[ur] & & 0 &
\end{tikzcd}$$

E così via. Nel primo capitolo della tesi si richiamano brevemente alcune proprietà dei moduli, si introducono i concetti di moduli graduati e risoluzioni libere minimali, e si descrive questo procedimento.

Naturalmente è possibile considerare, anziché solo varietà, anche strutture non ridotte; nel capitolo 2 si approfondiscono alcune proprietà degli ideali omogenei in $\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$, si parla di ideali saturi e viene poi introdotto il concetto di sottoschema chiuso di $\mathbb{P}^n$.

Nel seguito con punto grasso di molteplicità $m$ in $\mathbb{P}^n$ con supporto in $P$ intendiamo lo schema 0-dimensionale, denotato con $mP$, definito dall'ideale omogeneo $(I_P)^m$, dove come già detto $I_P$ è l'ideale omogeneo (saturo) del punto $P$ nell'anello $\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ delle coordinate omogenee di $\mathbb{C}^n$, cioè l'ideale generato da tutti i polinomi omogenei dell'anello che si annullano su $P$.

Diremo che $X$ è uno schema di punti grassi in $\mathbb{P}^n$ se $X$ è lo schema unione di $r$ punti grassi $m_1P_1, \ldots, m_rP_r$, con $P_1, \ldots, P_r$ generali in $\mathbb{P}^n$, e scriveremo $X = m_1P_1 + \cdots + m_rP_r$; dunque $I_X = \cap_i (I_{P_i})^{m_i}$, e $(I_X)_k = H^0(\mathfrak{I}_X(k))$ consiste di tutti i polinomi omogenei di grado $k$ che si annullano in ogni $P_i$ con tutte le derivate fino all'ordine $m_i - 1$.

In generale assai poco è noto sia sulla postulazione che sulla risoluzione libera minimale degli schemi di punti grassi; già in $\mathbb{P}^2$ per quanto riguarda la postulazione c'è solo una congettura per il caso generale (si veda [**S** ], [**Hi2** ], [**Ha4** ], [**Gi** ]), avvallata da conferme per quanto riguarda particolari scelte di $r$ e di $m_1, \ldots, m_r$; si veda per esempio [**N** ], [**Ha3** ], [**Hi1** ], [**CCMO** ], [**Mi** ], [**Y** ], [**E** ], [**HR** ]. Sempre in $\mathbb{P}^2$, per quanto riguarda la risoluzione ci sono alcune congetture ([**Ha2** ], [**HHF** ], [**GHI1** ], [**GHI2** ], [**GHI3** ]) e alcuni risultati per particolari scelte di $r$ e di $m_1, \ldots, m_r$: si veda [**GM** ], [**I** ], [**GI** ],[**BI** ],[**Ca** ],[**F3** ],[**Ha6** ],[**FHH** ].

In spazi proiettivi di dimensione maggiore di 2 si sa ancora meno. In una serie di lavori J.Alexander e A.Hirschowitz (si veda [**AH** ]) hanno determinato la postulazione degli schemi di punti grassi di $\mathbb{P}^n$ unione di un qualsiasi numero di punti doppi (i.e. punti grassi di molteplicità 2). In $\mathbb{P}^n$ ci sono poi risultati asintotici per la risoluzione libera minimale di unioni di punti semplici ([**HS** ]), e per la postulazione di schemi di punti grassi ([**AH1** ]), e alcuni risultati particolari, ma ad esempio già in $\mathbb{P}^3$ non è nota è la risoluzione libera minimale per schemi di punti tutti doppi.

In questa tesi gli schemi considerati sono appunto schemi di punti grassi del tipo $Z = 2P_1 + \cdots + 2P_t + P_{t+1} + \cdots + P_r$ in $\mathbb{P}^3$, cioè unioni generiche di punti doppi e semplici in $\mathbb{P}^3$.

Se per esempio $t = r$, conoscere la postulazione di $Z$ in grado $k$ vuol dire quindi sapere quante superfici di grado $k$ hanno singolarità in $r$ punti generali; riletto nell'affine, questo significa stabilire quanti sono i polinomi in $n$ variabili di grado al più $k$ che si annullano insieme alle loro derivate prime in $r$ punti generali di $\mathbb{C}^n$. Conoscere tutta la risoluzione libera minimale di $Z$ significa conoscere le relazioni algebriche tra tali polinomi, le relazioni tra le relazioni, e così via.

Questa tesi si propone di essere un'introduzione al problema, e cerca inoltre di illustrare diverse tecniche per il calcolo di risoluzioni libere minimali di schemi $0-$dimensionali. Per fare ciò verranno studiati i primi casi, cioè schemi di punti grassi doppi e semplici supportati su pochi punti.

I metodi utilizzati per gli esempi variano gradualmente durante la tesi. L'approccio iniziale è puramente algebrico; in questa parte tutti i passaggi sono subordinati alla conoscenza di un sistema minimale di generatori del

modulo di cui si vuole calcolare la risoluzione. Questo è possibile perché lavorando con pochi punti è possibile scegliere punti coordinati, così l'ideale dello schema è fissato, e risulta essere monomiale, quindi di relativamente facile gestione (manuale; non si è fatto ricorso a strumenti tipo CoCoA). Naturalmente non appena questo non sia più possibile e l'ideale, pur essendo noto, non sia più monomiale, i calcoli diventano immediatamente molto complessi.
Quindi in questa prima fase si evidenziano i limiti di tecniche esclusivamente algebriche. Per un solo punto doppio i calcoli sono molto semplici, ma già per due punti doppi si complicano, ragione per cui vengono introdotti alcuni primi risultati di coomologia che facilitano il calcolo; nello stesso tempo però viene mostrato come sia possibile il calcolo esplicito delle sizigie solo con metodi di algebra lineare.
Infine, negli ultimi casi esaminati, si passa da metodi algebrici a metodi di geometria algebrica, e quindi si determina la risoluzione di un generico schema del tipo scelto (ad esempio l'unione di 5 punti doppi generici, e poi l'unione generica di 5 punti doppi e 4 semplici) senza scegliere coordinate e quindi senza dare l'ideale, ma utilizzando risultati generali (ad esempio il Lemma di Castelnuovo-Mumford) e tecniche molto particolari come ad esempio la Méthode d'Horace, utilizzata anche per fibrati di rango 2 e 3 (fibrato tangente e fibrato cotangente dello spazio proiettivo ambiente e di un piano di $\mathbb{P}^3$), e le trasformazioni elementari.

Un problema preliminare al calcolo delle risoluzioni libere minimali di un sottoschema è il calcolo della sua postulazione. Come detto precedentemente, per i particolari sottoschemi che vengono analizzati in questa tesi il calcolo della postulazione è un problema risolto (il caso dei 5 punti doppi e 4 semplici discende per semicontinuità dai 6 punti doppi); tuttavia nel terzo capitolo si sono volute mostrare varie tecniche per il calcolo della postulazione, anche in questo caso iniziando col privilegiare l'algebra e finendo per accantonarla quasi completamente. Qui si introduce ad esempio La Métode d'Horace nella sua forma più semplice, cioè per fibrati di rango 1, il che ne facilita la comprensione quando viene usata nel successivo capitolo per fibrati di rango più alto.

# Capitolo 1

# Risoluzioni libere di moduli

## 1.1 Risoluzioni libere

**Definizione 1.1.1.** Sia $A$ un anello commutativo unitario e sia $I \subseteq \mathbb{Z}$, sia $\{M_i\}_{i \in I}$ una famiglia di $A$-moduli e sia $\left\{f_i :\ M_{i-1} \to M_i\right\}_{i \in I}$ una famiglia di morfismi.
La successione di $A$-moduli

$$\cdots \quad M_{i-2} \overset{f_{i-1}}{\to} M_{i-1} \overset{f_i}{\to} M_i \quad \cdots$$

è detta complesso di $A$-moduli se vale $f_i \circ f_{i-1} = 0$, o equivalentemente $Im(f_{i-1}) \subseteq \ker(f_i)$
La stessa successione è detta esatta se vale $Im(f_{i-1}) = \ker(f_i)\ \forall i \in I$

Richiamiamo ora il concetto di somma diretta

**Definizione 1.1.2.** Sia $I$ un insieme di indici e sia $\{M_i\}_{i \in I}$ una famiglia di $A-$moduli. La somma diretta degli $M_i$ è l'$A-$modulo dato dall'insieme

$$\oplus_{i \in I} M_i := \left\{\{m_i\}_{i \in I},\ m_i \in M_i,\ m_i = 0 \text{ tranne al massimo un numero finito di } i\right\}$$

Se inoltre vale che $M_i = A$ per ogni $i$, scriviamo

$$A^{(I)} := \oplus_{i \in I} M_i.$$

Infine diciamo che un $A-$modulo $M$ è libero se esiste un insieme di indici $J$ per cui vale $M \cong A^{(J)}$.

**Osservazione 1.1.3.** Siano $\{G_i\}_{i\in I}$ una famiglia di gruppi abeliani: in particolare ogni $(G_i, *_i)$ è uno $\mathbb{Z}-$modulo con l'azione naturale

$$na := \underbrace{a *_i \ldots *_i a}_{\text{n volte}} \ \forall n \in Z, \ \forall a \in G_i.$$

Quindi in particolare la somma diretta di gruppi $\oplus_{i\in I} G_i$ è una somma diretta di $\mathbb{Z}-$moduli.

Richiamiamo ancora alcuni concetti per poter definire la base canonica di un modulo libero.

**Definizione 1.1.4.** Sia $M$ un $A-$modulo e sia $X$ un suo sottoinsieme.
Diciamo che $X$ è un insieme linearmente indipendente se per ogni numero finito di elementi $x_1 \ldots, x_n$ di $X$ vale

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = 0 \ \Rightarrow \ a_j = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, n.$$

Si dice inoltre che $X$ è una base di $M$ se $X$ è un insieme linearmente indipendente di generatori per $M$.

**Osservazione 1.1.5.** L'$A-$modulo libero $A^{(I)}$ ammette sempre una base, che chiameremo base canonica, formata dagli elementi $\{e_i\}_{i\in I}$ dove

$$e_i := \{\delta_{i=j}\}_{j\in I}$$

dove $\delta_{i=j}$ è la delta di Kronecker.

Introduciamo ora il concetto di risoluzione libera di un $A$-modulo:

**Definizione 1.1.6.** Si dice risoluzione di un $A$-modulo $M$ una successione esatta della forma

$$\cdots \ \to \ E_d \ \to \ E_{d-1} \ \to \ \cdots \ \to \ E_0 \ \to \ M \ \to \ 0$$

dove gli $E_i$ sono $A$-moduli.
Se inoltre tutti gli $E_i$ sono $A$-moduli liberi la risoluzione si dice libera, mentre se vi sono solo un numero finito di indici $i$ per cui $E_i \neq 0$ la risoluzione si dice finita.

**Proposizione 1.1.7.** *Ogni A-modulo ammette una risoluzione libera.*

*Dimostrazione.* Dato un $A$-modulo M e data $\{x_i\}_{i \in I_0}$ una sua famiglia di generatori si può costruire il morfismo di $A$-moduli

$$\begin{array}{rccc} f_0 : & A^{(I_0)} & \to & M \\ & e_i & \to & x_i \end{array}$$

definito sugli elementi di una base ed esteso per linearità; cioé una somma finita $\sum_i a_i e_i$, con $a_i \in A$, viene mandata in $\sum_i a_i x_i$ . Questo è ovviamente un morfismo suriettivo.
Detto $M_1 = \ker f_0$, si può riapplicare il procedimento e si ottengono

$$A^{(I_1)} \to M_1 \to 0 \qquad\qquad A^{(I_0)} \to M \to 0$$

successioni esatte, e dunque questa successione

$$A^{(I_1)} \to A^{(I_0)} \to M \to 0$$

è esatta.
Procedendo induttivamente si ottiene la successione esatta ricercata.

□

## 1.2 Moduli graduati e risoluzioni minimali

In questa parte focalizzeremo la nostra attenzione su una particolare categoria di moduli: i moduli graduati.

**Definizione 1.2.1.** Sia $R$ un anello commutativo con unità, $R$ si dice graduato se è data una sua decomposizione come gruppo del tipo $R = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} R_i$ con $R_i$ gruppo abeliano per ogni $i \in \mathbb{Z}$ e per cui valga la proprietà aggiuntiva che $R_i R_j \subseteq R_{i+j}$.
Un elemento $x \in R_d$ si dice omogeneo di grado $d$.

**Definizione 1.2.2.** Siano $R$ ed $S$ due anelli commutativi unitari graduati, e sia $f : R \to S$ un morfismo di anelli. $f$ si dice morfismo graduato di anelli se ha la proprietà $f(R_d) \subseteq S_d$ per ogni $d$.

In questa tesi gli anelli graduati che consideremo avranno la proprietà che $R_i = 0$ per quasi tutti gli $i < 0$, cioé se $i < 0$, $R_i = 0$ tranne al più un numero finito di indici. Se $R_i = 0$ $\forall i < i_0$ scriveremo anche $R = \oplus_{i \geq i_0} R_i$ e se $i_0 = 0$, $R = \oplus_{i \in \mathbb{N}} R_i$.

**Esempio 1.2.3.** L'esempio standard è $k[x_0, \ldots, x_n]$ con $k$ campo; la graduazione è data così: $k[x_0, \ldots, x_n] = \oplus_{i \in \mathbb{N}} R_i$ con $R_0 = k$, ovvero i polinomi costanti, e $R_i$ i polinomi omogenei di grado $i$.

Il passo successivo è dare una definizione di $R$-modulo graduato che tenga in considerazione la graduazione dell'anello.

**Definizione 1.2.4.** Dati $R$ anello graduato e $M$ $R$-modulo, si dice che $M$ è un $R$-modulo graduato se valgono le seguenti due proprietà:

1. esiste una decomposizione di $M$ come gruppo del tipo $M = \oplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$.

2. $R_i M_j \subseteq M_{i+j}$

**Definizione 1.2.5.** Sia $M = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ un $R$-modulo graduato, e sia $n$ un intero fissato.
Definiano un nuovo $R$-modulo graduato $M(n)$, detto "$M$ torto di $n$" o "$M$ twistato di $n$", il modulo

$$M(n) = \oplus_{j \in \mathbb{Z}} M(n)_j \quad con \quad M(n)_j = M_{n+j}.$$

**Definizione 1.2.6.** Dati $M$ ed $N$ $R$-moduli graduati, un morfismo $f$ di $R$-moduli si dice morfismo omogeneo di grado $d$ se ha la proprietà
$f(M_n) \subset N_{n+d}$ per ogni $n$.

Possiamo ora dare la definizione di risoluzione libera relativa ai moduli graduati

**Definizione 1.2.7.** Una risoluzione libera graduata di un $R-$modulo $M$ è una successione esatta della forma

$$\cdots \to L_d \stackrel{u_d}{\to} L_{d-1} \to \cdots \to L_0 \stackrel{u_0}{\to} M \to 0$$

dove ogni $L_i$ è un modulo libero graduato, ovvero della forma $\oplus_{j=1,\dots,r} R(n_j)$, e gli $u_i$ sono morfismi omogenei di grado 0.

Aggiungendo alcune ipotesi abbiamo la seguente

**Proposizione 1.2.8.** *Sia $R$ un anello graduato noetheriano.*
*Allora ogni $R$-modulo graduato $M$ finitamente generato ammette una risoluzione libera graduata.*

*Dimostrazione.* Siano $x_1, \dots, x_r$ un sistema finito di generatori omogenei di $M$ di gradi rispettivamente $m_1, \dots, m_r$.
Sia ora $L_0 := \oplus_{j=1,\dots,r} R(-m_j)$. Dunque la mappa:

$$\begin{array}{cccc} u_0 : & L_0 & \to & M \\ & (a_1, \dots, a_r) & \to & \sum_{i=1}^{r} a_i x_i \end{array}$$

è un morfismo omogeneo suriettivo di grado 0.
Poiché $R$ è noetheriano il nucleo del morfismo, essendo un sottomodulo, è anch'esso finitamente generato (si veda [**Sa** ] cor.III.2). Agendo quindi analogamente alla dimostrazione di 1.1.7 si ottiene il risultato. □

**Definizione 1.2.9.** Sia $0 \to L_d \to \cdots \to L_0 \to M \to 0$ una risoluzione libera finita di $M$. Se $L_d \neq 0$ l'intero $d$ è detto lunghezza della risoluzione.
Si chiama dimensione proiettiva di $M$, e si indica con $dp(M)$, il più piccolo intero per cui esista una risoluzione libera di quella lunghezza. Si pone $dp(0) = -1$.

**Notazione 1.2.10.** Nel seguito indicheremo con $R$ l'anello graduato dei polinomi a coefficienti nel campo dei complessi $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$. Inoltre ogni modulo sarà inteso graduato, così come i morfismi e le risoluzioni libere.

In questo specifico caso abbiamo un teorema più forte

**Teorema 1.2.11** (delle sizigie di Hilbert)**.** *Sia $M$ un $R$-modulo graduato finitamente generato, allora $M$ ammette una risoluzione libera graduata finita della forma*

$$0 \to L_{n+1} \to L_n \to \cdots \to L_0 \to M \to 0$$

*Dimostrazione.* Si veda [**LA** ] p 862. □

**Proposizione 1.2.12.**

- *Sia* $f: R(-m) \to R(-n)$ *un morfismo omogeneo di grado 0 di R-moduli. Assegnato il valore* $f(1) \in R(-n)$ *il morfismo diventa unico. Inoltre* $f(1)$ *in* $R$ *è un polinomio omogeneo di grado* $m-n$.

- *Sia ora* $f: \oplus_{j=1,\dots,s} R(-m_j) \to \oplus_{i=1,\dots,r} R(-n_i)$ *un morfismo omogeneo di grado 0 di R-moduli. Allora* $f$ *si può rappresentare, rispetto alle basi canoniche, con una matrice* $(a_{ij})_{i=1,\dots,r,j=1,\dots,s}$ *che come elemento* $a_{ij}$ *ha un polinomio omogeneo di grado* $m_j - n_i$.

*Dimostrazione.* $\forall x \in R$, $f(x1) = xf(1)$ e quindi $f$ risulta essere il prodotto per $f(1)$. Inoltre, poiché il morfismo è di grado 0, $f(1)$ è un polinomio omogeneo di grado in $R$ uguale a $m-n$, quindi in particolare una costante se $m=n$ e $f(1)=0$ se $m<n$.
Il secondo enunciato discende immediatamente dal caso precedente.

□

**Esempio 1.2.13.** Sia $S = \mathbb{C}[x,y,z]$ e si $f: S(-3) \oplus S(-4) \to S(-2) \oplus S(-3)$ un morfismo omogeneo di grado 0. Supponiamo che

$$f \equiv \begin{pmatrix} x+y & x^2 \\ 2 & x+y \end{pmatrix}$$

Mostriamo ad esempio l'immagine dell'elemento omogeneo di grado 5 $(x^2, y) \in S(-3) \oplus S(-4)$:

$$\begin{pmatrix} x+y & x^2 \\ 2 & x+y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2(x+y) + x^2 y \\ 2x^2 + y(x+y) \end{pmatrix}$$

E infatti notiamo che il risultato è un elemento omogeneo di grado 5 poiché $x^2(x+y) + x^2 y \in S(-2)_5 = S_3$ e $2x^2 + y(x+y) \in S(-3)_5 = S_2$.

**Definizione 1.2.14** (risoluzione minimale)**.** Un morfismo come nella proposizione 1.2.12 è detto minimale se tutte le costanti che compaiono nella

matrice associata sono nulle.
Una risoluzione libera di un $R$-modulo $M$ è detta minimale se tutti i morfismi sono minimali.

**Osservazione 1.2.15.** Chiedere che la risoluzione libera sia minimale equivale a chiedere che ad ogni passo, seguendo le notazioni nella dimostrazione fatta in 1.2.8, il sistema di generatori $x_1, \ldots, x_r$ sia minimale. Vediamolo meglio su un esempio:
Sia $J = (x, y)$ ideale contenuto in $\mathbb{C}[x, y]$. In questo caso $x$ e $y$ sono un sistema minimale di generatori per $J$. Aggiungiamo quindi il polinomio $x+y$ all'insieme di generatori e troviamo la risoluzione libera di J=(x,y,x+y).
Il primo passo sarà

$$\ldots \overset{u_1}{\rightarrow} \mathbb{C}[x,y](-1)^{\oplus 3} \overset{u_0}{\rightarrow} J \rightarrow 0$$

con

$$u_0 = \begin{pmatrix} x & y & x+y \end{pmatrix}$$

Cerchiamo ora degli elementi appartenenti a $\mathbb{C}[x, y](-1)^{\oplus 3}$ che siano un sistema di generatori per $\ker u_0$. Due elementi che appartengono al nucleo di $u_0$ sono

$$\begin{matrix} ( & -y & x & 0 & ) \\ ( & 1 & 1 & -1 & ) \end{matrix}$$

Si dimostra facilmente che in realtà questi due elementi sono un sistema minimale di generatori per $\ker u_0$ e quindi la risoluzione libera di $J$ che abbiamo costruito è

$$0 \rightarrow \mathbb{C}[x,y](-2) \oplus \mathbb{C}[x,y](-1) \overset{u_1}{\rightarrow} \mathbb{C}[x,y](-1)^{\oplus 3} \overset{u_0}{\rightarrow} J \rightarrow 0$$

con

$$u_1 = \begin{pmatrix} -y & 1 \\ x & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

In questa matrice in effetti compaiono costanti non nulle. Se non avessimo incluso $x + y$ nell'insieme di generatori di $J$ avremmo ottenuto la seguente risoluzione libera

$$0 \;\rightarrow\; \mathbb{C}[x,y](-2) \;\overset{u_1}{\rightarrow}\; \mathbb{C}[x,y](-1)^{\oplus 2} \;\overset{u_0}{\rightarrow}\; J \;\rightarrow\; 0$$

con

$$u_0 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}, \qquad u_1 = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

che è minimale.

**Osservazione 1.2.16.** I morfismi di una risoluzione minimale non possono essere matrici che presentano una colonna nulla. Questa condizione è abbastanza naturale che sia rispettata, perché se così non fosse un modulo del dominio non darebbe alcun contributo in quel morfismo, e questo non sarebbe coerente con la ricerca di una risoluzione minimale. Il motivo per cui non si può verificare questa situazione è il seguente: prima di tutto tale morfismo non può essere il primo della successione in quanto iniettivo. Inoltre, detto $\oplus_j M_j$ il dominio, con $M_j$ $R-$moduli graduati, e detta $i$ la colonna nulla, si avrebbe che $M_i$ è contenuto nel nucleo del morfismo, quindi nell'immagine del morfismo precedente. Ma questo significa che al passo precedente deve esserci lo stesso modulo $M_i$ e il morfismo precedente per forza deve avere una costante non nulla che faccia corrispondere isomorficamente i due moduli.

Una delle interessanti proprietà della risoluziona libera minimale di un $R$-modulo è descritta nel seguente

**Teorema 1.2.17.** *La risoluzione libera minimale di $M$, $R$-modulo finitamente generato, esiste sempre ed è unica (a meno di isomorfismi di complessi). Inoltre la lunghezza di tale risoluzione è $pd(M)$.*

*Dimostrazione.* si veda [**Ei** ] paragrafo 19.1 cor 19.5

# Capitolo 2

# Ideali e sottoschemi chiusi di $\mathbb{P}^n$

I moduli graduati che ci interessa studiare sono gli ideali omogenei dell'anello graduato $R = \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$.
Nella prima parte di questo capitolo studieremo meglio alcune proprietà degli ideali omogenei in un generico anello graduato.
Nella seconda parte invece introdurremo e caratterizzeremo i sottoschemi chiusi di $\mathbb{P}^n$ =Proj $\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ e i loro legami con gli ideali omogenei. Per le nozioni di cui non si dà qui una definizione, ad esempio per la nozione di schema, e in generale per le notazioni usate, si rimanda al capitolo II di [**Hr** ].

## 2.1 Definizione e proprietà

**Definizione 2.1.1.** Un ideale $I$ contenuto in un anello graduato $A = \oplus_{d\geq 0} A_d$ è detto omogeneo se $I = \oplus_{d\geq 0}(I \cap A_d)$, ovvero se $\forall x \in I$ anche le componenti omogenee di $x$ appartengono ad $I$.

**Notazione 2.1.2.** Sia $f$ un qualunque elemento dell'anello graduato $A$. Allora $f$ si scrive in modo unico come somma delle sue componenti omogenee che indicheremo come $f_p \in A_p$.

Vediamo di caratterizzare maggiormente questi ideali:

**Proposizione 2.1.3.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché $I \subseteq A$ sia omogeneo è che possieda un sistema di generatori omogenei.*

*Dimostrazione.*

$\Rightarrow$ Sia $\{f^{(q)}\}$ una famiglia di generatori dell'ideale $I$. Poiché l'ideale è omogeneo $\forall p, q\ f_p^{(q)} \in I$ e dunque $\{f_p^{(q)}\}$ è ancora una famiglia di generatori.

$\Leftarrow$ Sia $\{p^{(\lambda)}\}$ un sistema di generatori omogenei per $I$ e sia $f \in I$. Vale allora $f = \sum_\lambda g^{(\lambda)} p^{(\lambda)}$, dove $g^{(\lambda)} \in A$. Sostituendo ogni $g^{(\lambda)}$ con la sua somma in componenti omogenee si ha $f = \sum_\lambda \sum_q g_q^{(\lambda)} p^{(\lambda)}$. Da questa somma si ha che le componenti omogenee di $f$ sono $f_m = \sum_{q+d(\lambda)=m} g_q^{(\lambda)} p^{(\lambda)}$ dove $d(\lambda) = deg(p^{(\lambda)})$. Dunque $f_m \in I$.

□

La classe degli ideali omogenei è chiusa rispetto alle operazioni classiche; più precisamente si ha

**Proposizione 2.1.4.** *Siano $I, J$ due ideali omogenei di un anello graduato $A$. Allora gli ideali $I \cap J$, $I + J$, $IJ$, $(I : J)$ e $\sqrt{I}$ sono omogenei.*

*Dimostrazione.* $I \cap J$ è omogeneo perché, per ogni elemento $f$ che contiene, $f \in I,\ f \in J$ e quindi nell'intersezione ci sono anche le componenti omogenee visto che i due ideali sono omogenei.
$I + J$ e $IJ$ sono omogenei per la proposizione 2.1.3; infatti detti $\tilde{I}$ e $\tilde{J}$ sistemi di generatori omogenei rispettivamente di $I$ e $J$, l'ideale $I+J$ ha come sistema di generatori $\tilde{I} \cup \tilde{J}$ mentre $IJ$ ha come sistema di generatori $\tilde{I}\tilde{J} = \{ab :\ a \in \tilde{I},\, b \in \tilde{J}\}$.
Per mostrare che $(I : J)$ è omogeneo occorre prendere un sistema omogeneo di generatori $\{J^{(\lambda)}\}$ di $J$. Sia $f = \sum_i f_i \in (I : J)$; questo significa che per ogni $\lambda$ vale $\sum_i f_i J^{(\lambda)} \in I$. La sommatoria è composta da elementi omogenei tutti di grado diverso, ed essendo $I$ omogeneo vale che $f_i J^{(\lambda)} \in I$ per ogni

$i, \lambda$. Essendo $J^{(\lambda)}$ un sistema di generatori si conclude che $f_i \in (I : J)$.
Infine sia $f \in \sqrt{I}$, dunque sia $f_n + \sum_{q>n} f_q$ la somma in componenti omogenee di $f$ dove $n$ rappresenta il più piccolo intero per cui $f_n \neq 0$. Per un certo $r$ vale che $f^r \in I$. Dunque $f^r = f_n^r$+termini di grado maggiore a $nr$ appartiene ad $I$. Poiché $I$ è omogeneo $f_n^r \in I$ e quindi $f_n \in \sqrt{I}$. Ne viene che $f - f_n \in \sqrt{I}$. Riapplicando questo ragionamento a $f - f_n$ si ottiene che tutte le componenti omogenee di $f$ appartengono a $\sqrt{I}$. $\square$

Un'altra utile proprietà è la seguente

**Proposizione 2.1.5.** *Un ideale omogeneo $I$ è primo se e solo se per ogni $f, g$ omogenei, se $fg \in I$ allora $f \in I$ o $g \in I$.*

*Dimostrazione.* Se $I$ è primo per definizione la proprietà vale.
Viceversa, basta mostrare che presi due $f, g \notin I$ non necessariamente omogenei allora vale anche $fg \notin I$. Siano $h, k$ i minimi interi per cui vale $f_h, g_k \notin I$; $h$ e $k$ devono esistere altrimenti si avrebbe $f, g \in I$. Dunque $\sum_{i<h} f_i \in I$ e analogamente $\sum_{j<k} g_j \in I$. Poiché la componente omogenea di grado minimo di $(f - \sum_{i<h} f_i)(g - \sum_{j<k} g_j)$, ovvero $f_h g_k$, non appartiene ad $I$, vale allora che $(f - \sum_{i<h} f_i)(g - \sum_{j<k} g_j) \notin I$ dato che $I$ è omogeneo. D'altra parte

$$\left(f - \sum_{i<h} f_i\right)\left(g - \sum_{j<k} g_j\right) = fg - \underbrace{\left(\sum_{i<h} f_i\right)g - \left(\sum_{j<k} g_j\right)f + \left(\sum_{i<h} f_i\right)\left(\sum_{j<k} g_j\right)}_{\in I}$$

e quindi si può concludere che $fg \notin I$.

$\square$

## 2.2 Quozienti

Un'altra importante proprietà degli ideali omogenei è che consentono di dare una struttura naturale di anello graduato al quoziente. Infatti vale

**Proposizione 2.2.1.** *Sia $I$ un ideale omogeneo dell'anello graduato $A = \oplus_{d\geq 0} A_d$, allora l'anello ${}^{A}/_{I}$ ha una struttura sia di anello graduato che di $A-$modulo graduato indotta da $A$; precisamente, ${}^{A}/_{I} = \oplus_{d\geq 0}\pi(A_d)$. Inoltre $\pi : A \to {}^{A}/_{I}$ è un morfismo graduato di grado 0.*

*Dimostrazione.* Detto $\pi$ il morfismo di proiezione sul quoziente, mostriamo che ${}^{A}/_{I} = \oplus_{d\geq 0}\pi(A_d)$, il che implica che un qualunque elemento $[f]$ del quoziente ha una e una sola scrittura del tipo $[f] = [f_{i_1}] + \ldots + [f_{i_r}]$ con $[f_{i_j}] \in \pi(A_{i_j})$, $i_1, \ldots, i_r$ distinti a due a due. Intanto è chiaro che ${}^{A}/_{I} = \sum_{d\geq 0}\pi(A_d)$. Per quanto riguarda l'unicità, basta provarla per lo 0 di ${}^{A}/_{I}$. Sia $[0] = [a_{i_1}] + \ldots + [a_{i_s}]$, questo significa che $a_{i_1} + \ldots + a_{i_s} \in I$. Essendo $I$ omogeneo vale $a_{i_j} \in I$ per ogni $j = 1, \ldots, s$ e dunque $[a_{i_j}] = [0]$. Notiamo inoltre che il morfismo $\pi$ ha la proprietà di preservare i gradi e dunque risulta un morfismo graduato di anelli graduati.

□

Per gli ideali omogenei contenuti in $R$ vale un teorema che caratterizza ulteriormente la loro risoluzione libera minimale:

**Teorema 2.2.2.** *Sia $I \subseteq R$ ideale omogeneo, allora vale che $dp(I) \leq n$. Inoltre se l'ideale è saturo vale $dp(I) \leq n-1$.*

*Dimostrazione.* Si veda [**P** ] cor X.1.9.

## 2.3 Sottoschemi chiusi di $\mathbb{P}^n$

**Notazione 2.3.1.** Indicheremo spesso lo schema $(X, \mathcal{O}_X)$ semplicemente come $X$, per indicare invece lo spazio topologico privo di ulteriori strutture scriveremo $sp(X)$; $\mathcal{O}_X$ è detto il fascio strutturale di $X$.

**Definizione 2.3.2.** Sia $f : Y \to X$ un morfismo di schemi. Diciamo che $f$ è un'immersione chiusa se induce un omeomorfismo tra $sp(Y)$ e un chiuso di $sp(X)$, e se il morfismo di fasci $f^{\#} : \mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Y$ è suriettivo.
Un sottoschema chiuso di $X$ è una classe di equivalenza di immersioni chiuse,

dove due immersioni chiuse $f : Y \to X$ e $f' : Y' \to X$ sono equivalenti se esiste un isomorfismo $i : Y' \to Y$ tale che $f' = f \circ i$.

Cerchiamo di capire meglio come possono essere le immersioni chiuse, e quindi i sottoschemi chiusi:

**Immersioni chiuse di schemi 2.3.3.** Siano $S$ e $T$ due anelli graduati e sia $\varphi : S \to T$ un morfismo suriettivo graduato di grado 0.
Detti $X = \text{Proj } S$ e $Y = \text{Proj } T$, il morfismo $\varphi$ induce un morfismo di schemi di cui la mappa tra gli spazi topologici è così definita:

$$\begin{array}{rccc} f: & Y & \to & X \\ & I & \to & \varphi^{-1}(I) \end{array}$$

Il morfismo $f$ risulta essere un'immersione chiusa. Il chiuso di $sp(X)$ omeomorfo a $sp(Y)$ è $V(\ker \varphi)$, ovvero tutti gli ideali primi omogenei di $S$ che contengono $\ker \varphi$.
La mappa indotta sui germi invece è la seguente

$$\begin{array}{rccc} \forall I \in X,\ f_I^{\#}: & S_{(I)} & \to & T_{(\varphi(I))} \\ & \frac{\alpha}{\beta} & \to & \frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(\beta)} \end{array}$$

dove per $S_{(I)}$ intendiamo il sottoanello degli elementi di grado 0 nella localizzazione di $S$ rispetto all'insieme formato dagli elementi omogenei non in $I$. Questo morfismo risulta essere suriettivo grazie alla suriettività di $\varphi$.

**Osservazione 2.3.4.** Questo esempio ci permette grazie a 2.2.1 di avere una immersione chiusa nello schema Proj $S$ prendendo un qualunque ideale omogeneo $I \subseteq S$ e considerando il morfismo di schemi indotto da
$\pi : S \to S/I$.

Nel caso che tratteremo, ovvero quando l'anello graduato è $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$, vale il seguente

**Teorema 2.3.5.** *Ogni sottoschema chiuso di $\mathbb{P}^n$ si ottiene da un ideale omogeneo in $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ come descritto in 2.3.4.*

*Dimostrazione.* Si veda [**Hr** ] capitolo II cor 5.16.

□

Noi restringeremo il nostro studio a particolari ideali:

**Definizione 2.3.6.** Un ideale omogeneo $I \subseteq \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ si dice saturo se vale $(I : \mathfrak{m}) = I$, con $\mathfrak{m} = (x_0, \ldots, x_n)$.
Chiamiamo saturazione di un ideale omogeneo $J$ l'ideale

$$J^{sat} := \bigcup_{k \geq 0} (J : \mathfrak{m}^k)$$

Una caratterizzazione degli ideali saturi è data dalla seguente

**Proposizione 2.3.7.** *$I$ è un ideale saturo se e solo se preso $f \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$, $fx_i \in I$ $\forall i = 0, \ldots, n$ implica $f \in I$.*

*Dimostrazione.*

$\Rightarrow$ Se per un certo $f$ accade che $fx_i \in I$ per ogni $i$, allora $f \in (I : \mathfrak{m})$ poiché per ogni $g \in \mathfrak{m}$, $g = h_0x_0 + \ldots + h_nx_n$, vale che $fg \in I$. Dunque si conclude.

$\Leftarrow$ In generale vale $I \subseteq (I : \mathfrak{m})$. Mostriamo l'inclusione inversa:
sia $p \in (I : \mathfrak{m})$, allora in particolare $px_i \in I$ per ogni $i$. Dunque $p \in I$.

□

Inoltre vale il seguente

**Lemma 2.3.8.** *Se $J \subseteq \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ è un ideale omogeneo, $J^{sat}$ è il più piccolo ideale omogeneo saturo che contiene $J$.*

*Dimostrazione.* Per ogni $k$, $\mathfrak{m}^k$ è omogeneo, dunque $(J : \mathfrak{m}^k)$ è omogeneo (si veda 2.1.4). Si ha che $(J : \mathfrak{m}^k) \subseteq (J : \mathfrak{m}^{k+1})$ $\forall k$, quindi l'unione è un ideale. Se $f = f_0 + \ldots + f_d$ appartiene alla saturazione di $J$, allora esiste un $k$ tale che $f \in (J : \mathfrak{m}^k)$, essendo quest'ideale omogeneo vale $f_0, \ldots, f_d \in (J : \mathfrak{m}^k) \subseteq J^{sat}$.

Sia ora $gx_0, \ldots, gx_n \in J^{sat}$ e sia $\overline{k} = \max_{i=0,\ldots,n}\{\min\{k : \; gx_i \in (J : \mathfrak{m}^k)\}\}$
Allora $gx_0, \ldots, gx_n \in (J : \mathfrak{m}^{\overline{k}})$, quindi $g \in (J : \mathfrak{m}^{\overline{k}+1}) \subseteq J^{sat}$.

□

Facciamo ora la seguente

**Osservazione 2.3.9.** Sia $I$ un ideale di $R$. Allora esiste un $\tilde{k} > 0$ tale che $(I^{sat})_k = (I)_k$ per ogni $k \geq \tilde{k}$. Infatti basta osservare che, essendo $R$ noetheriano, $I^{sat} = (f_1, \ldots, f_t)$ con $f_i$ polinomi omogenei e con $\tilde{k_1} = \max_i\{\deg f_i\}$.
Sia poi $\tilde{k_2} = \max_i\{q^{(i)}\}$ dove $q^{(i)} = \min\{k : f_i \in (I : \mathfrak{m}^k)\}$; quindi $f_i\mathfrak{m}^{\tilde{k_2}} \subseteq I$, $\forall i = 1, \ldots, t$.
Posto $\tilde{k} = \tilde{k_1} + \tilde{k_2}$ si ha che per ogni $q \geq \tilde{k}$, se $f \in (I^{sat})_q$ allora

$$f = \alpha_1 f_1 + \ldots \alpha_t f_t$$

dove gli $\alpha_i$ sono polinomi omogenei di grado maggiore o uguale $\tilde{k_2}$ e quindi per ogni $i$ $\alpha_i f_i \in I$.

Quest'ultima osservazione, unita ad [**Hr** ] Ex. 3.12 Capitolo II, ci assicura che due ideali che hanno la stessa saturazione danno luogo allo stesso sottoschema chiuso. Dunque si può introdurre la seguente

**Definizione 2.3.10.** Sia $Z$ un sottoschema chiuso di $\mathbb{P}^n$.
D'ora in poi chiamiamo ideale omogeneo di $Z$ l'unico ideale saturo che, tramite 2.3.4, dà luogo a $Z$, e lo denoteremo con $I_Z$. Se $X$, $Y$ sono due sottoschemi chiusi di $\mathbb{P}^n$, definiamo l'intersezione (schematica) di $X$ e $Y$ come il sottoschema chiuso di ideale omogeneo $(I_X + I_Y)^{sat}$, e l'unione (schematica) di $X$ e $Y$ come il sottoschema chiuso di ideale omogeneo $(I_X \cap I_Y)^{sat}$.

**Definizione 2.3.11.** Con punto grasso di molteplicità $m$ in $\mathbb{P}^n$ con supporto in $P$ intendiamo lo schema, denotato con $mP$, definito dall'ideale omogeneo saturo $((I_P)^m$, dove $I_P$ è l'ideale omogeneo (saturo) del punto $P$

Diremo che $X$ è uno schema di punti grassi in $\mathbb{P}^n$ se $X$ è lo schema unione di $r$ punti grassi $m_1P_1, \ldots, m_rP_r$, con $P_1, \ldots, P_r$ generali in $\mathbb{P}^n$, e scriveremo

$X = m_1P_1 + \cdots + m_rP_r$; dunque $I_X = \left(\cap_i (I_{P_i})^{m_i}\right)^{sat}$. Questo ideale consiste di tutti i polinomi omogenei che si annullano in ogni $P_i$ con tutte le derivate di ordine $m_i - 1$ e quindi tutte quelle di ordine più basso.
Quindi nell'ideale sono contenute tutte le ipersuperfici singolari in ogni $P_i$ e con molteplicità in $P_i$ uguale a $m_i$.

Ove non altrimenti specificato con unione di $m$ punti doppi e $t$ semplici intendiamo unione generica di tali punti, cioè assumiamo che i punti supporto dello schema siano generali in $\mathbb{P}^n$.
Nel seguito considereremo solo sottoschemi chiusi di $\mathbb{P}^n$, e spesso ometteremo l'aggettivo chiuso.

# Capitolo 3

# Postulazione di schemi di punti grassi

In questo capitolo vedremo diverse tecniche per studiare la postulazione di alcuni sottoschemi chiusi di $\mathbb{P}^3$. Nel seguito tutti i sottoschemi che studieremo saranno formati da unioni di schemi $0-$dimensionali con supporto su punti generici. In primo luogo facciamo la seguente

**Osservazione 3.0.12.** Per ogni $d \in \mathbb{N}$, $R_d = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_d$ ha una naturale struttura di $\mathbb{C}-$spazio vettoriale e la sua dimensione è data dal coefficiente binomiale $\binom{n+d}{d}$.

**Definizione 3.0.13.** Sia $X$ un sottoschema chiuso di $\mathbb{P}^n$.
Chiameremo *postulazione* di $X$ la famiglia di interi non negativi $\{\dim(I_X)_d\}_{d \in \mathbb{N}}$. Notiamo che conoscere la postulazione di un sottoschema chiuso $X$ di $\mathbb{P}^n$ significa sapere il numero di ipersuperfici indipendenti di grado $d$ che contengono $X$.

Nel seguito vedremo le postulazioni di sottoschemi formati da uno, due o tre punti doppi generici in $\mathbb{P}^3$ e le otterremo in modo puramente algebrico.

## 3.1 Postulazione di un punto doppio di $\mathbb{P}^3$

Sia $P = [0, 0, 0, 1] \in \mathbb{P}^3$. L'ideale associato al punto doppio con supporto su $P$ è $I = J^2$ dove $J = (x_0, x_1, x_2)$ è l'deale associato al punto semplice $P$. Dunque si ha

$$I = (x_0^2, x_1^2, x_2^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2)$$

Si nota immediatamente che per $d = 0, 1$ la dimensione di $(I)_d$ è uguale a 0. Per $d = 2$ si ha che $\dim(I)_2 = 6$. Questo numero si può ottenere anche sottraendo al numero totale di elementi della base monomiale $\{x_0^{i_0} - x_3^{i_3}\}_{i_0+\ldots+i_3=d}$ di $\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_3]_d$ il numero di elementi della base che non appartengono ad $(I)_d$ (questo perché l'ideale stesso è generato da monomi). In questo caso i monomi $x_3^2$, $x_0x_3$, $x_1x_3$ e $x_2x_3$ non appartengono ad $I$ e quindi si ha ugualmente che $\dim(I)_2 = \binom{3+2}{2} - 4$.
Con lo stesso ragionamento si ottiene l'intera postulazione notando che, per ogni $d \geq 2$, i monomi di $\mathbb{C}[x_0 \ldots, x_3]_d$ della base monomiale che non appartengono ad $I$ sono del tipo: $x_0^{\alpha_0}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}$ tali che $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = d$ e con $\alpha_3 = d$ oppure $\alpha_3 = d - 1$.
Infatti se l'esponente di $x_3$ fosse minore di $d-1$ si avrebbe che $\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2 \geq 2$. Quindi $x_3^{\alpha_3}$ verrebbe moltiplicato per un monomio in $x_0, x_1, x_2$ di grado maggiore o uguale a 2, dunque appartenente all'ideale $I$.
D'altra parte si vede che i monomi in cui $\alpha_3 \geq d - 1$ non appartengono all'ideale.
Dunque la postulazione del punto doppio $P$ è

$$\begin{array}{ll} \dim(I)_d = 0 & 0 \leq d \leq 1 \\ \dim(I)_d = \binom{3+d}{d} - 4 & d \geq 2 \end{array}$$

## 3.2 Postulazione dell'unione di due punti doppi di $\mathbb{P}^3$

Prendendo i punti doppi con supporto su $P = [0, 0, 0, 1]$ e $Q = [1, 0, 0, 0]$, e quindi caratterizzati rispettivamente dagli ideali

$$I_1 = (x_0^2, x_1^2, x_2^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2) \quad I_2 = (x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3),$$

prendiamo il sottoschema chiuso unione di questi due sottoschemi, e quindi caratterizzato dall'ideale saturazione $I = I_1 \cap I_2$.
Cerchiamo un insieme di generatori di $I$. Si nota immediatamente che i monomi $x_1^2, x_2^2$ e $x_1x_2$ appartengono ad entrambi gli ideali e dunque anche ad $I$, e questi generano i polinomi omogenei di grado 2 contenuti nell'ideale. In grado 3 i monomi della base monomiale che appartengono ad $I$ e che non sono divisibili per $x_1^2, x_2^2$ o $x_1x_2$ sono: $x_0x_1x_3$ e $x_0x_2x_3$. Analogamente per il grado 4 si ottiene l'unico monomio $x_0^2x_3^2$.
Dunque si ha

$$I = (x_1^2, x_2^2, x_1x_2, x_0x_1x_3, x_0x_2x_3, x_0^2x_3^2)$$

che risulta essere saturo.
Anche in questo caso se $0 \leq d \leq 1$ si ha $\dim(I)_d = 0$.
$(I)_2$ invece è generato, come detto precedentemente, dai polinomi $x_1^2, x_2^2$ e $x_1x_2$ quindi la dimensione di $(I)_2$ è 3.
Per $d = 3$ i monomi di terzo grado che non appartengono ad $I$ sono quelli che presentano esponente di $x_0$ maggiore di 2 o esponente di $x_3$ maggiore di 2. Questo perché l'ideale $I$ ha come generatori anche i monomi di terzo grado $x_0x_1x_3$ e $x_0x_2x_3$.
In generale per $d > 2$ notiamo che gli unici monomi di grado $d$ che non appartengono ad $I$ sono del tipo $f = x_0^{\alpha_0}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}$ con $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = d$ tali che $\alpha_0 > d - 2$ o $\alpha_3 > d - 2$. Per vederlo facciamo la seguente tabella:

$\alpha_0 = 0$ In questo caso il monomio è del tipo $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}$ con $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 3$ e quindi, poiché $\alpha_3 \leq d - 2$ (se così non fosse, o $\alpha_3 = d - 1$, e allora si avrebbe che i possibili monomi sono $x_1x_3^{d-1}$ oppure $x_2x_3^{d-1}$, che non appartengono ad $I$, o $\alpha_3 = d$ e quindi l'unico monomio $x_3^d$ che non appartiene ad $I$), si ha che il monomio è diviso o da $x_1^2$, o da $x_2^2$ o da $x_1x_2$, in ogni caso appartiene ad $I$.

$0 < \alpha_0 < d-1$ In questo caso si ha invece che $x_0^{\alpha_0}$ è moltiplicato per un monomio di grado maggiore o uguale a 2 in $x_1, x_2, x_3$. Se due di queste variabili hanno esponente positivo allora $f \in I$. Se solo $\alpha_1$ è diversa da 0 allora si ha che $\alpha_1 > 1$ e quindi $f \in I$, analogo per $\alpha_2$. Infine se $\alpha_3 \neq 0$ si ha che $d \geq 4$ e che $f$ è diviso da $x_0^2x_3^2$ e quindi appartiene all'ideale.

Dunque la postulazione è:

$$\begin{aligned} \dim(I)_d &= 0 & 0 \leq d \leq 1 \\ \dim(I)_d &= 3 & d = 2 \\ \dim(I)_d &= \tbinom{3+d}{d} - 8 & d \geq 3 \end{aligned}$$

## 3.3 Postulazione dell'unione di tre punti doppi generici di $\mathbb{P}^3$

Come ultimo esempio studiamo la postulazione del sottoschema formato dall'unione dei tre seguenti punti doppi: $[0,0,0,1]$, $[0,0,1,0]$ e $[0,1,0,0]$. L'ideale associato è

$$I = (x_0^2, x_0x_1x_2, x_0x_1x_3, x_0x_2x_3, x_1x_2x_3, x_1^2x_2^2, x_1^2x_3^2, x_2^2x_3^2)$$

Con calcoli analoghi ai due esempi precedenti si ottiene

$$\begin{aligned} \dim(I)_d &= 0 & 0 \leq d \leq 1 \\ \dim(I)_d &= 1 & d = 2 \\ \dim(I)_d &= \tbinom{3+d}{d} - 12 & d \geq 3 \end{aligned}$$

**Osservazione 3.3.1.** Notiamo che nei tre esempi precedenti la scelta fatta dei punti non è restrittiva. Infatti è sempre possibile trovare una proiettività

di $\mathbb{P}^3$ che mandi $n$ punti, con $n \leq 4$, nei punti fondamentali. Questa proiettività dello spazio corrisponde ad un automorfismo graduato di grado 0 dell'anello dei polinomi, e quindi la struttura algebrica degli ideali corrispondenti viene preservata, quindi schemi che si corrispondono in una proiettività hanno la stessa postulazione, e in genere le stesse proprietà che dipendono dalla struttura dell'ideale.
Dunque gli esempi rappresentano rispettivamente la postulazione di un generico punto doppio, dell'unione di due generici punti doppi e dell'unione di tre generici punti doppi.

Si nota facilmente che il metodo utilizzato per calcolare la postulazione nei tre esempi precedenti risulta difficile da generalizzare. Fino all'unione di 4 punti doppi in $\mathbb{P}^3$ possiamo supporre, senza perdita di generalità, che i punti siano $[1,0,0,0], \ldots, [0,0,0,1]$ e quindi gli ideali che otteniamo sono monomiali. Però se il numero di punti aumenta, gli ideali non saranno più generati solo da monomi, e quindi il calcolo risulterà molto più complesso.

## 3.4 Qualche richiamo sulla coomologia

Analizziamo quindi lo stesso problema utilizzando la coomologia dei fasci. Prima di farlo però ricordiamo alcuni risultati che verranno ampiamente usati in seguito.
Data una successione esatta corta di fasci

$$0 \rightarrow \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{H} \rightarrow 0$$

si ottiene la seguente successione esatta lunga di coomologia:

$$0 \rightarrow H^0(\mathfrak{F}) \rightarrow H^0(\mathfrak{G}) \rightarrow H^0(\mathfrak{H}) \rightarrow H^1(\mathfrak{F}) \rightarrow H^1(\mathfrak{G}) \rightarrow \ldots \tag{3.1}$$

Inoltre dato $X$, sottoschema chiuso di $\mathbb{P}^n$, il suo fascio di ideali, denotato con $\mathfrak{I}_X$, è un fascio di $\mathcal{O}_X$-moduli associato all' $R-$modulo $I_X$, quindi in

particolare vale $I_X = \oplus_{d\geq 0} H^0(\mathfrak{I}_X(d))$.
La seguente successione è esatta (qui $i$ denota l'inclusione)

$$0 \;\rightarrow\; \mathfrak{I}_X \;\xrightarrow{i}\; \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \;\rightarrow\; \mathcal{O}_X \;\rightarrow\; 0 \tag{3.2}$$

**Definizione 3.4.1.** Sia C una classe di $R-$moduli e sia $\lambda$ una funzione su C a valori in $\mathbb{Z}$; $\lambda$ si dice additiva se per ogni successione esatta corta del tipo

$$0 \;\rightarrow\; M' \;\rightarrow\; M \;\rightarrow\; M'' \;\rightarrow\; 0$$

con $M, M'$ e $M''$ appartenenti a C, vale

$$\lambda(M') - \lambda(M) + \lambda(M'') = 0.$$

**Notazione 3.4.2.** Sia $\mathfrak{F}$ un fascio; scriveremo

$$h^i(\mathfrak{F}) = \dim_{\mathbb{C}} H^i(\mathfrak{F})$$

Notiamo che la funzione $h^i$ è additiva ([**AM** ] p 23-24).

Infine, prima di passare all'esempio, scriviamo la coomologia di $\mathbb{P}^n$ (si veda [**OSS** ]):

$$h^q(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)) = \begin{cases} \binom{n+k}{k} & \textit{se } q = 0,\ k \geq 0 \\ \binom{-k-1}{-k-1-n} & \textit{se } q = n,\ k \leq -n-1 \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

## 3.5 Postulazione dell'unione di due punti doppi rivisitata. Il Lemma di Castelnuovo-Mumford e l'$m-$regolarità di un fascio

Sia quindi $X$ il sottoschema dell'unione di due punti doppi come nell'esempio 3.2 (a meno di una proiettività). Abbiamo per ogni $k \in \mathbb{Z}$ la seguente successione esatta di fasci

$$0 \rightarrow \mathfrak{I}_X(k) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(k) \rightarrow \mathcal{O}_X(k) \rightarrow 0$$

che ci fornisce una successione esatta di coomologia

$$0 \to H^0(\mathfrak{I}_X(k)) \to H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(k)) \to H^0(\mathcal{O}_X(k)) \to H^1(\mathfrak{I}_X(k)) \to 0 \qquad (3.3)$$

Perciò si ottiene

$$h^0(\mathfrak{I}_X(k)) - \binom{k+3}{3} + h^0(\mathcal{O}_X(k)) - h^1(\mathfrak{I}_X(k)) = 0$$

Notiamo che ottenendo i valori di $h^0(\mathcal{O}_X(k))$ e di $h^1(\mathfrak{I}_X(k))$ riusciremmo a determinare il valore $h^0(\mathfrak{I}_X(k))$ e quindi l'intera postulazione del sottoschema $X$. Analizziamo prima $h^0(\mathcal{O}_X(k))$:
poiché $X$ è uno schema 0-dimensionale si può prendere una carta affine che lo contenga. Così facendo possiamo limitarci a studiare $Y \subseteq \mathbb{A}^3$ dove $Y$ è il sottoschema chiuso associato all'ideale $\mathfrak{b} = (x,y,z)^2 \cap (x-1,y,z)^2$, ovvero il sottoschema unione dei due punti doppi con supporto su $(0,0,0)$ e $(1,0,0)$.
Scriviamo anzitutto l'anello delle coordinate affini dello schema formato da un solo punto doppio, che è una $\mathbb{C}-$algebra, come somma diretta di sottospazi vettoriali:

$$\mathbb{C}[x,y,z]/(x,y,z)^2 = \overline{1} \oplus \overline{x} \oplus \overline{y} \oplus \overline{z}$$

Dunque la sua dimensione su $\mathbb{C}$ è 4.
Attraverso facili passaggi si mostra che la $\mathbb{C}-$algebra delle coordinate affini dell'unione dei due punti doppi si decompone nella seguente somma diretta di sottospazi vettoriali:

$$\mathbb{C}[x,y,z]/\mathfrak{b} = \overline{1} \oplus \overline{x} \oplus \overline{y} \oplus \overline{z} \oplus \overline{x^2} \oplus \overline{xy} \oplus \overline{xz} \oplus \overline{x^3}$$

e quindi la sua dimensione come $\mathbb{C}-$spazio vettoriale è 8, ovvero il doppio della dimensione nel caso di un punto doppio.
Cerchiamo di vederlo anche da un altro punto di vista:
siano $\mathfrak{a}_1 = \pi((x,y,z)^2)$, $\mathfrak{a}_2 = \pi((x-1,y,z)^2)$ e $A = \mathbb{C}[x,y,z]/\mathfrak{b}$ dove $\pi : \mathbb{C}[x,y,z] \to \mathbb{C}[x,y,z]/\mathfrak{b}$.
Consideriamo ora il morfismo di anelli

$$\begin{array}{cccc} \phi : & A & \to & A/\mathfrak{a}_1 \times A/\mathfrak{a}_2 \\ & f+\mathfrak{b} & \to & \big((f+\mathfrak{b})+\mathfrak{a}_1, (f+\mathfrak{b})+\mathfrak{a}_2\big) \end{array}$$

Grazie a [**AM** ] (prop 1.10), per mostrare la suriettività di $\phi$ è necessario e sufficiente mostrare che $\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2 = (\overline{1})$. Basta quindi mostrare che $\overline{1}$ appartiene a $\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2$. In effetti si ha $(\overline{x-1})^2 - \overline{x^2} = \overline{-2x+1}$ e quindi $\overline{-2x+1} \in \mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2$. Da qui si ha quindi

$$\underbrace{(\overline{2x-1})^2}_{\in\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2} + \underbrace{\overline{2}(\overline{-2x+1})}_{\in\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2} - \underbrace{\overline{4x^2}}_{\in\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2} = \overline{1}$$

e quindi $\overline{1} \in \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$.
Inoltre la mappa è anche iniettiva in quanto $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{b}A = 0$. Dunque i due anelli sono isomorfi.
Ma $A/\mathfrak{a}_1 \cong \mathbb{C}[x,y,z]/(x,y,z)^2$ e quindi, ragionando analogamente per $A/\mathfrak{a}_2$, si ha

$$A \cong {}^{\mathbb{C}[x,y,z]}\big/_{(x,y,z)^2} \times {}^{\mathbb{C}[x,y,z]}\big/_{(x-1,y,z)^2} \tag{3.4}$$

Il motivo principale per cui questi due spazi sono isomorfi è il seguente: lo schema di partenza è $0-$dimensionale ed è unione di schemi con supporti disgiunti.
Il risultato ottenuto in 3.4 visto come isomorfismo tra spazi vettoriali ci dice che $A$ è somma diretta dei due spazi vettoriali e quindi che la dimensione di $A$ è la somma delle dimensioni delle due $\mathbb{C}-$algebre relative ad uno e all'altro dei due punti doppi.

**Definizione 3.5.1.** Sia $T$ uno schema $0-$dimensionale. Si chiama lunghezza di $T$, indicata con $l(T)$, la dimensione su $\mathbb{C}$ dell'anello delle coordinate affini dello schema $T$.

Analogamente a quanto visto per due punti doppi, si prova che se $Z$ è l'unione di $n$ punti doppi in $\mathbb{P}^3$ a supporti a due a due distinti, allora vale

$$h^0(\mathcal{O}_Z) = l(Z) = 4n.$$

Più in generale, in modo analogo, se $Z$ è unione di $Z_1, \dots, Z_n$ dove ogni $Z_i$ è uno schema $0-$dimensionale supportato su un punto, $P_i$, e dove $P_i = P_j$

solo se $i = j$, allora

$$h^0(\mathcal{O}_Z) = l(Z) = \sum_{i=1}^{n} l(Z_i).$$

Studiamo ora $h^1(\mathfrak{I}_X(k))$. Per farlo occorre richiamare alcune cose:

**Definizione 3.5.2.** Sia $\mathfrak{F}$ un fascio coerente su $\mathbb{P}^n$. Si dice che $\mathfrak{F}$ è $m-$regolare se per ogni $i > 0$ vale $H^i(\mathbb{P}^n, \mathfrak{F}(m-i)) = 0$.

**Teorema 3.5.3** (Lemma di Castelnuovo-Mumford)**.** *Sia $\mathfrak{F}$ un fascio coerente $m-$regolare su $\mathbb{P}^n$; allora:*

- $h^i(\mathbb{P}^n, \mathfrak{F}(k)) = 0 \ \forall i > 0, \ \forall k \geq m - i.$
- $H^0(\mathfrak{F}(k-1)) \otimes H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \to H^0(\mathfrak{F}(k))$ *è suriettiva se* $k > m$.

*Dimostrazione.* [**MU** ] p 99.

**Osservazione 3.5.4.** Nel seguito utilizzeremo spesso il Teorema di Semicontinuità, per il quale rimandiamo a [**Hr** ] Th III 12.8. Il teorema ci permette di affermare che se $\overline{X}$ è un sottoschema di $\mathbb{P}^n$, specializzazione di un sottoschema $X$, allora $h^1(\mathfrak{I}_{\overline{X}}(k)) \geq h^1(\mathfrak{I}_X(k))$ per ogni $i$ e per ogni $k$.
Un risultato analogo vale più in generale anche in una varietà.

Torniamo al nostro esempio e osserviamo la seguente tabella in cui sono riportati i valori noti per la successione di coomologia associata alla successione 3.2 torta di $k$ per $k = 1, \ldots, 4$:

| $k$ | $h^0(\mathfrak{I}_X(k))$ | $\binom{k+3}{3}$ | $l(X)$ | $h^1(\mathfrak{I}_X(k))$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 4 | 8 | 4 |
| 2 | 3 | 10 | 8 | 1 |
| 3 | 12 | 20 | 8 | 0 |
| 4 | 27 | 35 | 8 | 0 |

La prima colonna è stata riempita con i valori ottenuti dall'esempio 3.2, mentre l'ultima colonna tramite l'additività della dimensione.
La postulazione dello schema sarà completamente nota grazie alla seguente

**Proposizione 3.5.5.** *Sia $Z$ un sottoschema $0-$dimensionale di $\mathbb{P}^3$, e sia $q = \min\{k \geq 0 : h^1(\mathfrak{I}_Z(k)) = 0\}$. Allora $\mathfrak{I}_Z$ è $(q+1)-$regolare.*

*Dimostrazione.* $H^1(\mathfrak{I}_Z((q+1)-1)) = 0$ per ipotesi, mentre $H^2(\mathfrak{I}_Z(q-1))$ e $H^3(\mathfrak{I}_Z(q-2))$ si ottengono considerando la successione esatta lunga di coomologia associata alla successione 3.2 torta di $q-1$ e di $q-2$ :

$$\to \underbrace{H^1(\mathcal{O}_Z(q-1))}_{=0} \to H^2(\mathfrak{I}_Z(q-1)) \to \underbrace{H^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(q-1))}_{=0} \to$$

dove il primo modulo è nullo perché $Z$ è $0-$dimensionale. Analogamente

$$\to \underbrace{H^2(\mathcal{O}_Z(q-2))}_{=0} \to H^3(\mathfrak{I}_Z(q-2)) \to H^3(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(q-2)) \to$$

dove invece l'ultimo modulo è uguale a 0 solo se $q-2 \geq -3$ e quindi $q \geq -1$. Ma sapendo per ipotesi che $q \geq 0$, il risultato è provato.

□

Quindi, tornando allo schema $X$ unione di due punti doppi, sfruttando il primo punto del lemma di Castelnuovo-Mumford abbiamo che $h^1(\mathfrak{I}_X(k)) = 0$ $\forall k \geq 4$ e quindi otteniamo la stessa formula ottenuta nell'esempio 3.2, ovvero:

$$\dim(I_X)_k = h^0(\mathfrak{I}_X(k)) = \binom{k+3}{3} - 8 \qquad \forall k \geq 4.$$

Diamo ora la seguente

**Definizione 3.5.6.** Sia $Z$ un sottoschema $0-$dimensionale di $\mathbb{P}^3$. Si dice che $Z$ postula bene se per ogni $k \in \mathbb{Z}$ accade almeno una delle seguenti cose:

- $h^0(\mathfrak{I}_Z(k)) = 0$
- $h^1(\mathfrak{I}_Z(k)) = 0$

Quindi un sottoschema $Z$ che postula bene ha $\dim(I_Z)_k = 0$ se $\binom{k+3}{3} - h^0(\mathcal{O}_Z(k)) \leq 0$ e $\dim(I_Z)_k = \binom{k+3}{3} - h^0(\mathcal{O}_Z(k))$ se $\binom{k+3}{3} - h^0(\mathcal{O}_Z(k)) \geq 0$. Si dimostra che gli unici schemi formati da un unione finita di punti doppi generali che non postulano bene in $\mathbb{P}^3$ sono (si veda [**AH1** ]):

- unione di due punti doppi con $k = 2$
- unione di tre punti doppi con $k = 2$
- unione di nove punti doppi con $k = 4$

Per esempio studiando l'ultimo caso si ha che il numero di quartiche indipendenti passanti per nove punti doppi generali è uno invece di zero. Questo perché esiste una (sola) quadrica passante per nove punti generali e dunque, prendendo la quadrica doppia, abbiamo una quartica passante per quei nove punti doppi, mentre $\binom{4+3}{3} - 4 * 9$, quindi se lo schema postulasse bene si dovrebbe avere $\dim(I_Z)_4 = 0$.

## 3.6 La Métode d'Horace e il caso dei quattro punti doppi

Introduciamo in questa sezione un metodo geometrico per ottenere la postulazione di sottoschemi chiusi.
Sia $Z$ il sottoschema formato dall'unione di 4 punti doppi in $\mathbb{P}^3$. Troviamo $I_Z$ anche se cercheremo di dare la postulazione del sottoschema senza sfruttare l'ideale.
Cerchiamo $I_Z = (x_0, x_1, x_2)^2 \cap (x_0, x_1, x_3)^2 \cap (x_0, x_2, x_3)^2 \cap (x_1, x_2, x_3)^2$.
E conoscendo l'ideale relativo al sottoschema formato da 3 punti doppi abbiamo

$$I_Z = (x_0^2, x_1x_2x_3, x_0x_1x_2, x_0x_1x_3, x_0x_2x_3, x_1^2x_2^2, x_1^2x_3^2, x_2^2x_3^2) \cap (x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3)$$

e quindi

$$I_Z = (x_0x_1x_2, x_0x_1x_3, x_0x_2x_3, x_1x_2x_3, x_0^2x_1^2, x_0^2x_2^2, x_0^2x_3^2, x_1^2x_2^2, x_1^2x_3^2, x_2^2x_3^2)$$

Dall'ideale risulta chiaro che la postulazione iniziale di $Z$ è

| $k$ | $h^0(\mathfrak{I}_Z(k))$ | $\binom{k+3}{3}$ | $l(Z)$ | $h^1(\mathfrak{I}_Z(k))$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 4 | 16 | 12 |
| 2 | 0 | 10 | 16 | 6 |
| 3 | 4 | 20 | 16 | 0 |

e grazie al lemma di Castelnuovo-Mumford è già possibile completarla.

Vediamo ora come poter ottenere gli stessi risultati senza $I_Z$.
Come precedentemente osservato il valore $h^0(\mathfrak{I}_Z(2))$ indica il numero di quadriche indipendenti contenenti $Z$. Ma se una quadrica contenesse i 4 punti doppi allora dovrebbe essere singolare in quei punti. E questo non può accadere poiché una quadrica di $\mathbb{P}^n$ ha come luogo singolare una varietà lineare: quindi in $\mathbb{P}^3$ può avere un punto (cono di rango 3), una retta (due piani diversi) o un piano (piano doppio).
Si è così dimostrato che $h^0(\mathfrak{I}_Z(2)) = 0$. Abbiamo quindi questa prima parte di postulazione:

| $k$ | $h^0(\mathfrak{I}_Z(k))$ | $\binom{k+3}{3}$ | $l(Z)$ | $h^1(\mathfrak{I}_Z(k))$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 4 | 16 | 12 |
| 2 | 0 | 10 | 16 | 6 |
| 3 | | 20 | 16 | |

Se la mappa $\rho_3 : H^0\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3)\big) \to H^0\big(\mathcal{O}_Z(3)\big)$ fosse suriettiva, allora avremmo $h^0(\mathfrak{I}_Z(3)) = 4$ e allo stesso tempo $h^1(\mathfrak{I}_Z(3)) = 0$, e quindi tutta la postulazione nota.
Mostrare che $h^0(\mathfrak{I}_Z(3)) = 4$ equivale a mostrare che preso lo schema $X = Z\cup$ 4 punti generali di $\mathbb{P}^3$, esso è tale che $h^0(\mathfrak{I}_X(3)) = 0$
(si veda [**Hi1** ]). Mostriamo quindi quest'ultima cosa, e per fare ciò utilizziamo la Méthode d'Horace ( d'ora in poi denotato brevemente con m.H.) per la quale rimandiamo a [**Hi1** ]:
Sia $H$ il piano passante per il supporto di 3 dei punti doppi contenuti in $X$.

Abbiamo la seguente successione esatta

$$0 \;\to\; \mathfrak{I}_{res_H X}(2) \;\to\; \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3) \otimes \mathfrak{I}_X \;\to\; \mathcal{O}_H(3) \otimes \mathfrak{I}_{X\cap H,H} \;\to\; 0 \qquad (3.5)$$

dove $res_H X$ è il sottoschema $T$ di $X$ che rimane fuori dal piano $H$, cioè, più precisamente, $I_T = (I_X : h)$ dove $h = 0$ è l'equazione di $H$, mentre $\mathfrak{I}_{X\cap H,H}$ è il fascio d'ideali del sottoschema $X \cap H$ in $H$.

**Osservazione 3.6.1.** Si osservi che se $V$ è un punto doppio in $\mathbb{P}^2$ ed $L$ una retta che contiene il supporto di $V$, $res_L V$ è un punto semplice; analogamente, se $W$ è un punto doppio di $\mathbb{P}^3$ e $K$ un piano contenente il supporto di $W$, $res_K W$ è un punto semplice.
Infatti in coordinate affini si ha $\big((x,y)^2 : x\big) = (x,y)$ e $\big((x,y,z)^2 : x\big) = (x,y,z)$.

Specializziamo ora un punto semplice di $X$ su $H$ e sia $\overline{X}$ questa specializzazione. Scriviamo la successione di coomologia per l'analoga di 3.5 applicata a $\overline{X}$.

$$0 \;\to\; \mathfrak{I}_{res_H \overline{X}}(2) \;\to\; \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3) \otimes \mathfrak{I}_{\overline{X}} \;\to\; \mathcal{O}_H(3) \otimes \mathfrak{I}_{\overline{X}\cap H,H} \;\to\; 0$$

Possiamo ora studiare $\overline{X}$, poiché $h^0(\mathfrak{I}_X(k)) \leq h^0(\mathfrak{I}_{\overline{X}}(k))$ (grazie a 3.5.4), così si ha che l'intersezione tra $H$ ed $\overline{X}$ è formata da tre punti doppi del piano e un punto semplice, e poiché $n$ punti doppi in $\mathbb{P}^2$ postulano bene se $n \neq 2$ e $n \neq 5$ si ha $h^0\big(\mathcal{O}_H(3) \otimes \mathfrak{I}_{\overline{X}\cap H,H}\big) = 0$.
Dunque per provare che $h^0\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3) \otimes \mathfrak{I}_{\overline{X}}\big) = 0$ basta provare che $h^0\big(\mathfrak{I}_{res_H \overline{X}}(2)\big) = 0$.
Dato che il residuo rispetto ad $H$ di un punto doppio di $\mathbb{P}^3$ con supporto su $H$ è un punto semplice, occorre studiare lo schema $Y = res_H \overline{X}$ formato dall'unione generica di un punto doppio e sei punti semplici in $\mathbb{P}^3$, in particolare vogliamo mostrare che $h^0(\mathfrak{I}_Y(2)) = 0$. Riapplichiamo la m.H.

$$0 \;\to\; \mathfrak{I}_{res_H \overline{Y}}(1) \;\to\; \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2) \otimes \mathfrak{I}_{\overline{Y}} \;\to\; \mathcal{O}_H(2) \otimes \mathfrak{I}_{\overline{Y}\cap H,H} \;\to\; 0$$

dove $\overline{Y}$ è la specializzazione di $Y$ ottenuta specializzando su $H$ il punto doppio.
Un punto doppio in $\mathbb{P}^2$ postula bene perciò $h^0\big(\mathfrak{I}_{\overline{Y}\cap H,H}(2)\big) = 0$. Allora occorre provare che $h^0\big(\mathfrak{I}_{res_H\overline{Y}}(1)\big) = 0$, ma $res_H\overline{Y}$ è il sottoschema formato da quattro punti generali in $\mathbb{P}^3$ e dunque è vero. E quindi siamo riusciti a dimostrare che $h^0(\mathfrak{I}_Z(3)) = 4$ ottenendo così tutta la postulazione di $Z$.

## 3.7 Altri esempi dell'uso della Métode d'Horace

Vediamo ora altri esempi di sottoschemi la cui postulazione può essere ottenuta con la m.H.
Sia quindi $Z$ il sottoschema formato da tre punti doppi e un punto semplice in $\mathbb{P}^3$.
Abbiamo visto in 3.3 che esiste una sola quadrica indipendente contenente tre punti doppi, e questa quadrica è l'unico piano passante per quei tre punti doppiato. Dunque se aggiungiamo un punto generico questo non apparterrà al piano. Quindi abbiamo che $h^0(\mathfrak{I}_Z(2)) = 0$.
Sappiamo inoltre che $l(Z) = 13$, scriviamoci quindi una tabella parziale:

| $k$ | $h^0(\mathfrak{I}_Z(k))$ | $\binom{k+3}{3}$ | $l(Z)$ | $h^1(\mathfrak{I}_Z(k))$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 4 | 13 | 9 |
| 2 | 0 | 10 | 13 | 3 |
| 3 | | 20 | 13 | |

Quindi se fosse $h^0(\mathfrak{I}_Z(3)) = 7$ avremmo finito.
Ragionando analogamente a quanto fatto prima mostriamo che il sottoschema $X$ formato da tre punti doppi e otto semplici è tale che $h^0(\mathfrak{I}_X(3)) = 0$.
Prendiamo un piano $H$ passante per due punti doppi e un punto semplice. Specializziamo (sottoschema che indicheremo come $\overline{X}$) tre punti semplici su $H$ così da avere che l'intersezione con $H$ è formata da due punti doppi del

piano e quattro punti semplici. Scriviamo la successione esatta:

$$0 \;\to\; \mathfrak{I}_{res_H\overline{X}}(2) \;\to\; \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3)\otimes\mathfrak{I}_{\overline{X}} \;\to\; \mathcal{O}_H(3)\otimes\mathfrak{I}_{\overline{X}\cap H,H} \;\to\; 0$$

Il sottoschema $\overline{X}\cap H$ postula bene in $\mathbb{P}^2$ in grado tre e cioé $h^0\big(\mathfrak{I}_{\overline{X}\cap H,H}(3)\big)=0$. Vediamo questo passaggio in dettaglio:
per dimostrare che $h^0\big(\mathfrak{I}_{\overline{X}\cap H,H}(3)\big)=0$ utilizziamo sempre m.H. con una retta $r$ su $H$ che passi per un punto doppio e un punto semplice di $\overline{X}\cap H$. Specializziamo un altro punto su $r$ in modo da avere $\overline{X}\cap r$ formato da un punto doppio della retta e due punti semplici. In questo modo otteniamo $h^0(\mathfrak{I}_{\overline{X}\cap r,r}(3))=0$.
Detto $U=res_r\overline{X}\cap H$, si ha che $U$ è formato da un punto doppio e tre punti semplici, di cui uno su $r$. Specializzando su $r$ un punto doppio e indicando con $\overline{U}$ il relativo sottoschema si ha che $h^0(\mathfrak{I}_{\overline{U}\cap r,r}(2))=0$, inoltre anche $h^0(\mathfrak{I}_{res_r\overline{U}}(1))=0$ poiché è formato da tre punti semplici, dunque il risultato è provato.

Abbiamo quindi ridotto il problema a mostrare che $h^0(\mathfrak{I}_{res_H\overline{X}}(2))=0$ dove $Y=res_H\overline{X}$ è lo schema formato dall'unione di un punto doppio e sei punti semplici. Ma questo è appena stato provato nell'esempio precedente.

**Tre punti doppi ed $n$ punti semplici in $\mathbb{P}^3$, con $n\leq 23$ 3.7.1.** Notiamo inoltre che se volessimo trattare il caso del sottoschema $Z$, unione di tre punti doppi e $n$ punti semplici generali in $\mathbb{P}^3$, con $1\leq n\leq 8$, questo si farebbe analogamente al caso appena svolto:
infatti, preso $n$ come sopra, si ha che la lunghezza dello schema è $12+n$, e quindi noi vorremmo provare che $h^0(\mathfrak{I}_Z(3))=20-(12+n)=8-n$. E quindi provare che $h^0(\mathfrak{I}_{\overline{Z}}(3))=0$ dove $\overline{Z}$ è il sottoschema formato dall'unione di tre punti doppi e $n+(8-n)=8$ punti semplici.
Dunque la postulazione del sottoschema unione di tre punti doppi e $n$ punti

semplici, con $1 \leq n \leq 8$, è

| $k$ | $h^0(\mathfrak{I}_Z(k))$ | $\binom{k+3}{3}$ | $l(Z)$ | $h^1(\mathfrak{I}_Z(k))$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 4 | 12+n | 8+n |
| 2 | 0 | 10 | 12+n | 2+n |
| 3 | 8-n | 20 | 12+n | 0 |

Vediamo ora cosa succede se il numero di punti semplici è maggiore di 8. Analizziamo quindi il caso del sottoschema $Z$ unione generica di tre punti doppi e nove punti semplici. Avendo appena visto che non esistono cubiche passanti per tre punti doppi e otto punti semplici generali allora sicuramente $h^0(\mathfrak{I}_Z(3)) = 0$. Scriviamo quindi la postulazione parziale

| $k$ | $h^0(\mathfrak{I}_Z(k))$ | $\binom{k+3}{3}$ | $l(Z)$ | $h^1(\mathfrak{I}_Z(k))$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 4 | 21 | 17 |
| 2 | 0 | 10 | 21 | 11 |
| 3 | 0 | 20 | 21 | 1 |
| 4 | | 35 | 21 | |

Quello che vogliamo provare è che $h^0(\mathfrak{I}_Z(4)) = 14$. Per farlo mostriamo che $h^0(\mathfrak{I}_Y(4)) = 0$, dove $Y$ è l'unione generica del sottoschema $Z$ e di 14 punti semplici, e cioé tre punti doppi e ventitre punti semplici.
Prendiamo un piano $H$ e specializziamo $Y$ in modo da avere un intersezione con $H$ formata da un punto doppio nel piano e dodici punti semplici, e indichiamo questa specializzazione con $\overline{Y}$. In questo modo otteniamo che $h^0\big(\mathfrak{I}_{\overline{Y}\cap H,H}(4)\big) = 0$, e quindi dobbiamo mostrare che $T = res_H\overline{Y}$, ovvero il sottoschema formato da due punti doppi e dodici punti semplici generali, è tale che $h^0(\mathfrak{I}_T(3)) = 0$.
Specializziamo quindi $T$ (in $\overline{T}$) in modo che $\overline{T} \cap H$ sia formato da un punto doppio e sette punti semplici. Anche in questo caso non esistono cubiche in $\mathbb{P}^2$ contenenti $\overline{T} \cap H$.
Quindi ora occorre studiare $X = res_H\overline{T}$, sottoschema formato da un punto doppio e sei punti semplici. In particolare mostriamo che $h^0(\mathfrak{I}_X(2)) = 0$. Per farlo specializziamo su $H$ un punto doppio e tre punti semplici: otteniamo

cos? che, con le usuali notazioni, $h^0\big(\mathfrak{I}_{\overline{X}\cap H,H}(2)\big) = 0$, inoltre $h^0\big(\mathfrak{I}_{res_H\overline{X}}(1)\big) = 0$ poiché $res_H\overline{X}$ è il sottoschema formato da quattro punti semplici, dunque abbiamo concluso.
Notiamo inoltre che, utilizzando lo stesso ragionamento fatto in 3.7.1, per $9 \le n \le 23$, si ha la seguente postulazione

| $k$ | $h^0(\mathfrak{I}_Z(k))$ | $\binom{k+3}{3}$ | $l(Z)$ | $h^1(\mathfrak{I}_Z(k))$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 4 | 12+n | 8+n |
| 2 | 0 | 10 | 12+n | 2+n |
| 3 | 0 | 20 | 12+n | n-8 |
| 4 | 23-n | 35 | 12+n | 0 |

## 3.8 Postulazione dell'unione generica di sei punti doppi di $\mathbb{P}^3$

Concludiamo il capitolo con un ulteriore esempio:
$Z$ sottoschema formato dall'unione di 6 punti doppi in $\mathbb{P}^3$.
Scriviamo una parte della postulazione:

| $k$ | $h^0(\mathfrak{I}_Z(k))$ | $\binom{k+3}{3}$ | $l(Z)$ | $h^1(\mathfrak{I}_Z(k))$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 4 | 24 | 20 |
| 2 | 0 | 10 | 24 | 14 |
| 3 | | 20 | 24 | |
| 4 | | 35 | 24 | |

Utilizzando m.H. mostriamo anzitutto che $h^0(\mathfrak{I}_Z(3)) = 0$:
Prendiamo un piano $H$ passante per il supporto di 3 punti doppi di $Z$ e specializziamo un altro punto su $H$ (chiamando $\overline{Z}$ il nuovo sottoschema). Così facendo otterremo che $h^0(\mathfrak{I}_{\overline{Z}\cap H,H}) = 0$; dunque basta mostrare $h^0(\mathfrak{I}_{res_H\overline{Z}}(2)) = 0$.
Detto $T = res_H\overline{Z}$, questo schema è formato dall'unione di due punti doppi e quattro punti semplici su $H$. Riapplichiamo m.H. e specializzando un punto doppio su $H$ otteniamo $h^0(\mathfrak{I}_{\overline{T}\cap H,H}(2)) = 0$ così da avere $Y = res_H\overline{T}$ schema formato da un punto doppio unito a un punto semplice in $\mathbb{P}^3$, dunque

non ci sono piani in $\mathbb{P}^3$ che lo contengono, quindi $h^0(\mathfrak{I}_Y(2)) = 0$. Possiamo aggiungere una riga alla postulazione:

| $k$ | $h^0(\mathfrak{I}_Z(k))$ | $\binom{k+3}{3}$ | $l(Z)$ | $h^1(\mathfrak{I}_Z(k))$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 4 | 24 | 20 |
| 2 | 0 | 10 | 24 | 14 |
| 3 | 0 | 20 | 24 | 4 |
| 4 | | 35 | 24 | |

Quindi per concludere questo esempio sarebbe sufficiente provare che
$h^0(\mathfrak{I}_Z(4)) = 11$, così da avere $h^1(\mathfrak{I}_Z(4)) = 0$.
Anche questo risultato si può ottenere facilmente con m.H.
Detto $X$ il sottoschema formato dall'unione di $Z$ e di undici punti semplici, mostriamo che $h^0(\mathfrak{I}_X(4)) = 0$. Prendiamo un piano $H$ che passi per tre punti doppi di $X$, e specializziamo $X$ in modo che il nuovo sottoschema $\overline{X}$ si intersechi con $H$ anche in sei punti semplici. Così facendo, dato che tre punti doppi del piano postulano bene in grado 4, si ottiene che $h^0(\mathfrak{I}_{\overline{X}\cap H,H}(4)) = 0$, quindi abbiamo ridotto il problema a mostrare che, posto $T = res_H\overline{X}$, $h^0(\mathfrak{I}_T(3)) = 0$. $T$ è il sottoschema formato dall'unione di tre punti doppi e otto semplici, di cui tre che giacciono su $H$. Specializziamo ora su $H$ due punti doppi e un punto semplice, in modo che l'intersezione tra $\overline{T}$ e $H$ sia di due punti doppi e quattro semplici e che quindi venga $h^0(\mathfrak{I}_{\overline{T}\cap H,H}(3)) = 0$.
Sia ora $Y = res_H\overline{T}$, e cioé il sottoschema formato da un punto doppio e sei punti semplici, di cui due su $H$. Per ottenere $h^0(\mathfrak{I}_{\overline{Y}\cap H,H}(2)) = 0$ occorre specializzare su $H$ un punto doppio e uno semplice. Possiamo quindi concludere visto che $res_H\overline{Y}$ è uno schema formato dall'unione di quattro punti, e dunque $h^0(\mathfrak{I}_{res_H\overline{Y}}(1)) = 0$.

Dunque la postulazione completa di $Z$ è

| $k$ | $h^0(\mathfrak{I}_Z(k))$ | $\binom{k+3}{3}$ | $l(Z)$ | $h^1(\mathfrak{I}_Z(k))$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 4 | 24 | 20 |
| 2 | 0 | 10 | 24 | 14 |
| 3 | 0 | 20 | 24 | 4 |
| 4 | 11 | 35 | 24 | 0 |

# Capitolo 4

# Risoluzioni libere minimali di schemi di punti grassi

In questo capitolo agiremo analogamente a quanto fatto per la postulazione, cioè daremo prima un esempio di risoluzione libera minimale per uno schema molto semplice sfruttando metodi puramente algebrici, poi cercheremo, su altri esempi di schemi di punti grassi più complessi, di integrare tecniche di coomologia al fine di risolvere problemi più generali di quanto un approccio solo algebrico possa permettere.

**Notazione 4.0.1.** Nel seguito se $M$ è un modulo ed $\mathfrak{F}$ un fibrato, $M^k$ e $\mathfrak{F}^k$ denotano rispettivamente $M^{\oplus k}$ e $\mathfrak{F}^{\oplus k}$.

D'ora in poi $R$ denota $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$.

## 4.1 Un punto doppio

Sia $I = (x_0^2, x_1^2, x_2^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2)$ l'ideale associato al sottoschema formato dal punto doppio $[0, 0, 0, 1]$ in $\mathbb{P}^3$. Vediamo di costruire una risoluzione libera minimale di $I$.

Avendo un insieme minimale di generatori di $I$ il primo passo è il seguente

$$R(-2)^6 \stackrel{\tilde{u}_0}{\to} I \to 0$$

con

$$\tilde{u}_0 = \begin{pmatrix} x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & x_0x_1 & x_0x_2 & x_1x_2 \end{pmatrix}.$$

Ora occorre trovare un sistema minimale di generatori per il sottomodulo $\ker \tilde{u}_0$.

Vediamo le sizigie:

$$\begin{array}{c}
\begin{pmatrix} -x_1 & 0 & 0 & x_0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} -x_2 & 0 & 0 & 0 & x_0 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & -x_0 & 0 & x_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & -x_2 & 0 & 0 & 0 & x_1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & -x_0 & 0 & x_2 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & -x_1 & 0 & 0 & x_2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x_2 & -x_1 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x_2 & 0 & -x_0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Si dimostra che questi vettori sono effettivamente un sistema minimale di generatori. Dunque possiamo continuare la risoluzione minimale di $I$:

$$R(-3)^8 \stackrel{\tilde{u}_1}{\to} R(-2)^6 \stackrel{\tilde{u}_0}{\to} I \to 0$$

dove

$$\tilde{u}_1 = \begin{pmatrix}
-x_1 & -x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -x_0 & -x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -x_0 & -x_1 & 0 & 0 \\
x_0 & 0 & x_1 & 0 & 0 & 0 & x_2 & x_2 \\
0 & x_0 & 0 & 0 & x_2 & 0 & -x_1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & x_1 & 0 & x_2 & 0 & -x_0
\end{pmatrix}$$

Cerchiamo quindi vettori di $R(-3)^8$ che appartengano al $\ker \tilde{u}_1$:

$$\begin{array}{c}
\begin{pmatrix} x_2 & -x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_0 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & x_2 & -x_0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 & x_0 & -x_2 & x_2 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Anche in questo caso questi vettori rappresentano un sistema minimale di generatori di $\ker \tilde{u}_1$ e quindi abbiamo concluso: infatti il passo seguente della risoluzione è

$$R(-4)^3 \stackrel{\tilde{u}_2}{\rightarrow} R(-3)^8 \stackrel{\tilde{u}_1}{\rightarrow} R(-2)^6 \stackrel{\tilde{u}_0}{\rightarrow} I \rightarrow 0$$

con

$$\tilde{u}_2 = \begin{pmatrix} x_2 & 0 & 0 \\ -x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & -x_0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_1 \\ 0 & 0 & x_0 \\ -x_0 & 0 & -x_2 \\ 0 & -x_1 & x_2 \end{pmatrix}$$

ma poiché $\tilde{u}_2$ risulta essere iniettiva si ha che la risoluzione libera minimale di $I$ è

$$0 \rightarrow R(-4)^3 \stackrel{\tilde{u}_2}{\rightarrow} R(-3)^8 \stackrel{\tilde{u}_1}{\rightarrow} R(-2)^6 \stackrel{\tilde{u}_0}{\rightarrow} I \rightarrow 0$$

In questo primo esempio si è evitato di esplicitare i calcoli per dimostrare che le sizigie trovate sono in effetti un insieme di generatori per il nucleo, anche se questo passaggio risulta essere la parte più complicata del calcolo della risoluzione, e quella meno generalizzabile a casi con sottoschemi formati da più punti. Questo risultato verrà dimostrato esplicitamente in seguito grazie ad alcune tecniche di coomologia, le quali evitano di affrontare il problema in modo computazionale.
Prima di passare al prossimo esempio enunciamo alcuni teoremi che sfrutteremo ampiamente.

## 4.2 Alcuni risultati generali sulla risoluzione di uno schema 0−dimensionale in $\mathbb{P}^3$

**Notazione 4.2.1.** Sia $Z$ un sottoschema chiuso di $\mathbb{P}^3$ e sia

$$0 \;\to\; \mathcal{L}_2 \;\to\; \mathcal{L}_1 \;\to\; \mathcal{L}_0 \;\to\; \mathfrak{I}_Z \;\to\; 0$$

la sua risoluzione libera minimale.
Nel seguito diremo *successione esatta di sinistra* quando vorremo intendere

$$0 \;\to\; \mathcal{L}_2 \;\to\; \mathcal{L}_1 \;\to\; \mathcal{K} \;\to\; 0$$

mentre *successione esatta di destra* per

$$0 \;\to\; \mathcal{K} \;\to\; \mathcal{L}_0 \;\to\; \mathfrak{I}_Z \;\to\; 0$$

dove $\mathcal{K}$ indica il nucleo del morfismo tra $\mathcal{L}_0$ e $\mathfrak{I}_Z$

Il primo risultato che enunciamo mette in relazione la coomologia del modulo di cui vogliamo calcolare la risoluzione con la coomologia del nucleo della mappa del primo passo della risoluzione: abbiamo la seguente

**Proposizione 4.2.2.** *Sia $Z$ un sottoschema chiuso di $\mathbb{P}^3$ e siano $f_1, \dots, f_t$ un sistema minimale di generatori per $I_Z$, di gradi rispettivamente $d_1, \dots, d_t$. Consideriamo la risoluzione libera minimale*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
0 \arrow[r] & \mathcal{L}_2 \arrow[r] & \mathcal{L}_1 \arrow[r] \arrow[dr] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-d_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-d_t) \arrow[r, "F"] & \mathfrak{I}_Z \arrow[r] & 0 \\
 & & 0 \arrow[r] & \mathcal{K} \arrow[u] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{4.1}$$

*dove $\mathcal{K} = \ker F$. Allora vale*

- $h^1(\mathcal{K}(q)) = 0 \ \forall q \in \mathbb{Z}$
- $h^2(\mathcal{K}(q)) = h^1(\mathfrak{I}_Z(q)) \ \forall q \in \mathbb{Z}$

- $h^3(\mathcal{K}(q)) = h^2(\mathfrak{I}_Z(q))\ \forall q \geq \max_i\{d_i\} - 3$

*Dimostrazione.* Consideriamo la successione esatta di destra torta di $q$:

$$0 \ \rightarrow \ \mathcal{K}(q) \ \rightarrow \ \bigoplus_{i=1}^t \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(q-d_i) \ \overset{F(q)}{\rightarrow} \ \mathfrak{I}_Z(q) \ \rightarrow \ 0$$

e prendiamo la coomologia

$$0 \ \rightarrow \ H^0\big(\mathcal{K}(q)\big) \ \rightarrow \ H^0\big(\bigoplus_{i=1}^t \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(q-d_i)\big) \ \overset{H^0(F(q))}{\rightarrow} \ H^0\big(\mathfrak{I}_Z(q)\big) \ \rightarrow \ H^1\big(\mathcal{K}(q)\big) \ \rightarrow \ 0$$

Ma $H^0(F(q))$ è suriettiva per costruzione, dato che $f_1, \ldots, f_t$ è un sistema minimale di generatori, per cui si ha $H^1(\mathcal{K}(q)) = 0\ \forall q \in \mathbb{Z}$.
Proseguendo con la successione esatta di coomologia si ha

$$0 \ \rightarrow \ H^1\big(\mathfrak{I}_Z(q)\big) \ \overset{\cong}{\rightarrow} \ H^2\big(\mathcal{K}(q)\big) \ \rightarrow \ 0$$

Infine, andando ancora avanti

$$0 \ \rightarrow \ H^2\big(\mathfrak{I}_Z(q)\big) \ \rightarrow \ H^3\big(\mathcal{K}(q)\big) \ \rightarrow \ \bigoplus_{i=1}^t H^3\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(q-d_i)\big)$$

e poiché vale $H^3\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(q-d_i)\big) = 0$ se $q - d_i \geq -3$, si ottiene che, per $q \geq \max_i\{d_i\} - 3$,

$$h^3(\mathcal{K}(q)) = h^2(\mathfrak{I}_Z(q))$$

□

La proposizione seguente assicura che un fascio di ideali relativo ad uno schema 0−dimensionale di $\mathbb{P}^3$ è regolare nel grado successivo a quello del suo primo $h^1$ nullo. Infatti si ha

**Proposizione 4.2.3.** *$Z$ sottoschema 0−dimensionale di $\mathbb{P}^3$, e sia $\beta = \min_k\{k \geq 0 :\ h^1(\mathfrak{I}_Z(k)) = 0\}$.
Allora $\mathfrak{I}_Z$ è $(\beta+1)$−regolare.*

*Dimostrazione.* Si ha per ipotesi che $H^1(\mathfrak{I}_Z(\beta + 1 - 1)) = 0$. Inoltre prendendo la successione esatta lunga di coomologia a partire da

$$0 \ \rightarrow \ \mathfrak{I}_Z(k) \ \rightarrow \ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(k) \ \rightarrow \ \mathcal{O}_Z(k) \ \rightarrow \ 0$$

abbiamo, per $k = \beta - 1$,

$$\to \; H^1(\mathcal{O}_Z(\beta-1)) \; \to \; H^2(\mathfrak{I}_Z(\beta-1)) \; \to \; \underbrace{H^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\beta-1))}_{=0}$$

dove anche $H^1(\mathcal{O}_Z(\beta-1)) = 0$ poiché lo schema è $0-$dimensionale. Analogamente, per $k = \beta - 2$, e andando avanti nella successione esatta

$$\to \; \underbrace{H^2(\mathcal{O}_Z(\beta-2))}_{=0} \; \to \; H^3(\mathfrak{I}_Z(\beta-2)) \; \to \; H^3(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\beta-2)) \; \to$$

mentre l'ultimo termine è nullo solo se $\beta - 2 \geq -3$, e cioé $\beta \geq -1$, ma poiché avevamo preso $\beta \geq 0$ il risultato è provato.

$\square$

E mantenendo le stesse notazioni si può dare un secondo risultato:

**Proposizione 4.2.4.** *Sia $Z$ un sottoschema $0-$dimensionale di $\mathbb{P}^3$, siano $d_1, \ldots, d_t$ come in proposizione 4.2.2, e sia $\beta = \min\{q \geq 0, h^1(\mathfrak{I}_Z(q)) = 0\}$. Si ha allora*

$$h^2(\mathcal{K}(q)) = h^1(\mathfrak{I}_Z(q)) = 0 \quad \forall q \geq \beta$$

$$h^3(\mathcal{K}(q)) = h^2(\mathfrak{I}_Z(q)) = 0 \quad q \geq \max_i\{d_i\} - 3$$

*Dimostrazione.* Basta unire il lemma di Castelnuovo-Mumford con quanto detto nella proposizione 4.2.2 e nella dimostrazione di proposizione 4.2.3

$\square$

Anche la prossima proposizione è una importante conseguenza del lemma di Castelnuovo-Mumford, e ci permette di ottenere informazioni sulla famiglia di generatori di un modulo:

**Proposizione 4.2.5.** *Sia $Z$ sottoschema di $\mathbb{P}^3$, e sia $\mathfrak{I}_Z$ $m-$regolare. Allora $I_Z$ è generato in gradi minori o uguali ad $m$. In particolare, se $Z$ è $0-$dimensionale e $\beta = \min\{q \geq 0, h^1(\mathfrak{I}_Z(q)) = 0\}$, allora $I_Z$ è generato in gradi minori o uguali a $\beta + 1$.*

*Dimostrazione.* La $m-$regolarità del fascio ci garantisce che

$$H^0\big(\mathfrak{I}_Z(k-1)\big) \otimes H^0\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)\big) \xrightarrow{\mu_{k-1}} H^0\big(\mathfrak{I}_Z(k)\big)$$

è suriettiva per $k \geq m+1$. E cioé

$$(I_Z)_s \otimes R_1 \xrightarrow{\mu_s} (I_Z)_{s+1}$$

è suriettiva per $s \geq m$.
Ma $\mu_s$ è definita così sui generatori: $\mu_s(f \otimes l) = fl$.
Quindi dire che questa mappa è suriettiva per ogni $s \geq m$ significa dire che $I_Z$ è generato dalle sue componenti di grado al più $m$.

□

Cerchiamo ora di dare maggiori informazioni sui morfismi minimali delle risoluzioni. Da 1.2.12 sappiamo che sono rappresentabili come matrici di polinomi che non presentano costanti non nulle. Inoltre

**Proposizione 4.2.6.** *Dato il morfismo minimale*

$$u : \bigoplus_{j=1}^{t} R(-a_j) \to \bigoplus_{i=1}^{r} R(-b_i)$$

*con $a_1 \leq \ldots \leq a_t$ e $b_1 \leq \ldots \leq b_r$. Sia $G = (g_{ij})$ la matrice associata ad $u$. Allora $a_j > b_i$ oppure $g_{ij} = 0$. In particolare $a_1 > b_1$.*

*Dimostrazione.* Discende da 1.2.12. In particolare se $a_1 \leq b_1$, si avrebbe che $a_1 \leq b_i$ per ogni $i$. Per quanto detto la matrice $G = (g_{ij})$ associata ad $u$ avrebbe $g_{i1} = 0$ per ogni $i$. Dunque la prima colonna della matrice sarebbe nulla e quindi, per 1.2.16, il morfismo non sarebbe minimale.

□

Sfruttiamo ora questi risultati con altri esempi (per i quali i metodi finora usati sarebbero risultati difficilmente applicabili).

## 4.3 Due punti doppi: l'uso della coomologia nel calcolo della risoluzione e calcolo esplicito delle sizigie

Sia $X$ il sottoschema di $\mathbb{P}^3$ relativo all'unione dei due punti doppi $[0,0,1,0]$ e [0,0,0,1], con $I_X = (x_0^2, x_1^2, x_0x_1, x_0x_2x_3, x_1x_2x_3, x_2^2x_3^2)$.
Possiamo già scrivere il primo passo della risoluzione, sfruttando anche il teorema 2.2.2:

$$0 \to L_2 \xrightarrow{u_2} L_1 \xrightarrow{u_1} R(-2)^3 \oplus R(-3)^2 \oplus R(-4) \xrightarrow{u_0} I_X \to 0 \tag{4.2}$$

Intanto possiamo subito osservare che deve essere $rkL_2 = rkL_1 - 5$.
Scriviamo la risoluzione esplicitando $K = \ker u_1$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] 0 \arrow[r] & L_2 \arrow[r] & L_1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & R(-2)^3 \oplus R(-3)^2 \oplus R(-4) \arrow[r] & I_X \arrow[r] & 0 \\ & & & K \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\ & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & \end{tikzcd} \tag{4.3}$$

Nel seguito denotiamo con $\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_1$ e $\mathcal{K}$ i fasci associati rispettivamente ai moduli $L_2, L_1$ e $K$.
Da quanto detto in 4.2.2 abbiamo

- $h^1(\mathcal{K}(q)) = 0 \ \forall q \in \mathbb{Z}$
- $h^2(\mathcal{K}(q)) = 0 \ \forall q \geq 3$
- $h^3(\mathcal{K}(q)) = 0 \ \forall q \geq 1$

e quindi, per $m \geq 5$, vale

$$h^1(\mathcal{K}(m-1)) = h^2(\mathcal{K}(m-2)) = h^3(\mathcal{K}(m-3)) = 0.$$

Cioé $\mathcal{K}$ è $5-$regolare, dunque (si vede come in proposizione 4.2.5) $K$ generato in gradi minori o uguali a 5.

Quindi $L_1 = \bigoplus_i R(-b_i)$ con $b_i \leq 5$.
Osserviamo inoltre che, sfruttando quanto detto in 4.2.6, $\min_i b_i > 2$ e quindi

$$L_1 = R(-3)^a \oplus R(-4)^b \oplus R(-5)^c.$$

Inoltre se

$$L_2 = \bigoplus_j R(-a_j),$$

si ha $\min_j\{a_j\} \geq 4$.
Analizziamo ora la successione di sinistra di 4.8 torta di $q$, ovvero

$$0 \;\to\; \bigoplus_j \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(q-a_j) \;\to\; \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(q-3)^a \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(q-4)^b \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(q-5)^c \;\to\; \mathcal{K}(q) \;\to\; 0 \tag{4.4}$$

da cui otteniamo

$$0 \;\to\; h^2(\mathcal{K}(q)) \;\to\; h^3\big(\bigoplus_j \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(q-a_j)\big) \;\to$$

$$\to\; h^3\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(q-3)^a \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(q-4)^b \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(q-5)^c\big) \;\to\; 0$$

Dunque, sapendo che per $q \geq 3$ si ha $h^2(\mathcal{K}(q)) = 0$, la successione esatta precedente, nel caso $q = 3$, si riduce a

$$0 \;\to\; \textstyle\sum_j h^3(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3-a_j)) \;\to\; 0$$

e cioé $h^3(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3-a_j)) = 0$ per ogni $j$. Quindi per ogni $j$ si ha $3 - a_j \geq -3$ ovvero $a_j \leq 6$.
Possiamo allora scrivere $L_2 = R(-4)^d \oplus R(-5)^e \oplus R(-6)^f$.
Vediamo ora il caso $q = 2$ in 4.4:

$$0 \;\to\; \underbrace{h^2(\mathcal{K}(2))}_{=1} \;\to\; \underbrace{h^3(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)^d \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3)^e \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)^f)}_{=f} \;\to$$

$$\to\; \underbrace{h^3\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)^a \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)^b \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3)^c\big)}_{=0} \;\to\; 0$$

e quindi $f = 1$.
Procedendo in modo analogo con $q = 1$ si ottiene la condizione $e = c$ e

sfruttando la condizione sui ranghi si ha $d = a + b - 6$.
Siamo quindi arrivati a scrivere la risoluzione libera minimale di $I_X$:

$$\begin{aligned} 0 \;\to\; & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(q-4)^{a+b-6} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(q-5)^c \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(q-6) \;\to \\ \to\; & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(q-3)^a \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(q-4)^b \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(q-5)^c \;\to\; \mathcal{K}(q) \;\to\; 0 \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$0 \;\to\; \mathcal{K}(q) \;\to\; \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(q-2)^3 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(q-3)^2 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(q-4) \;\to\; \mathfrak{I}_X(q) \;\to\; 0 \tag{4.6}$$

Cerchiamo ora di estrarre informazioni anche da $h^0$. Consideriamo la successione esatta di 4.5 twistata per $q = 3$ e prendiamone la coomologia:

$$0 \;\to\; a \;\to\; h^0(\mathcal{K}(3)) \;\to\; 0$$

e quindi $a = h^0(\mathcal{K}(3))$. Per ottenerne il valore usiamo la successione esatta 4.6 prendendone la coomologia

$$0 \;\to\; h^0(\mathcal{K}(3)) \;\to\; h^0\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)^3 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^2 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)\big) \;\to\; h^0(\mathfrak{I}_Z(3)) \;\to\; 0$$

ottenendo $a = h^0(\mathcal{K}(3)) = 2$.

**Osservazione 4.3.1.** Prima di proseguire notiamo che con gli stessi metodi applicati in questo esempio si sarebbe potuta calcolare completamente la risoluzione libera minimale dell'ideale di un punto doppio, ovvero l'esempio precedente: infatti, con le stesse notazioni, si ha che

- $h^1(\ker \tilde{u}_1(q)) = 0 \ \forall q$
- $h^2(\ker \tilde{u}_1(q)) = 0 \ \forall q \geq 1$
- $h^3(\ker \tilde{u}_1(q)) = 0 \ \forall q \geq 0$

e quindi $\ker \tilde{u}_1$ è $3-$regolare, dunque $\tilde{L}_1$ è del tipo $R(-3)^\alpha$.
Detto $\tilde{L}_2 = \bigoplus_j R(-\beta_j)^{\gamma_j}$, scriviamo una parte della successione esatta di coomologia:

$$0 \;\to\; h^2(\ker \tilde{u}_1(q)) \;\to\; h^3\big(\textstyle\bigoplus_j \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(q-\beta_j)^{\gamma_j}\big) \;\to\; h^3(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(q-3)^\alpha) \;\to\; 0$$

torcendo di $q = 1$ si ottiene $1 - \beta_j \geq -3$ cioé $\beta_j \leq 4$. Dunque sappiamo anche che $\tilde{L}_2 = R(-4)^\gamma$.
Sapendo inoltre che $h^2(\ker \tilde{u}_1) = 3$, sempre dalla stessa successione per $q = 0$ otteniamo

$$0 \;\to\; h^2(\ker \tilde{u}_1) \;\to\; h^3(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)^\gamma) \;\to\; 0$$

e quindi $\gamma = 3$. Infine dalla condizione sui ranghi risulta $\alpha = 8$.

Torniamo ora al sottoschema relativo all'unione di due punti doppi. Finora abbiamo ottenuto che la risoluzione libera minimale è

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)^{b-4} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-5)^c \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-6) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3)^2 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)^b \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-5)^c \to$$

$$\to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)^3 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3)^2 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4) \overset{u_0}{\to} \mathfrak{I}_Z \to 0 \tag{4.7}$$

con ancora $b$ e $c$ da determinare.
Cerchiamo tramite conti di determinare $b$: $b$ rappresenta il numero minimo di generatori in grado 4 di $K$. Poiché $K$ è un sottomodulo di $L_0 = R(-2)^3 \oplus R(-3)^2 \oplus R(-4)$ i suoi elementi saranno del tipo $g = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta_1 & \beta_2 & \gamma \end{pmatrix}$.
La condizione che questo elemento soddisfa per appartenere a $K$ è la seguente:

$$u_0(g) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 x_0^2 + \alpha_2 x_1^2 + \alpha_3 x_0 x_1 + \beta_1 x_0 x_2 x_3 + \beta_2 x_1 x_2 x_3 + \gamma x_2^2 x_3^2 = 0$$

Vediamo cosa significa chiedere che un elemento di $K$ sia di grado $d$:

$$K = \bigoplus_i K_i, \quad K_i \subset \big(R(-2)^3 \oplus R(-3)^2 \oplus R(-4)\big)_i = R_{i-2}^3 \oplus R_{i-3}^2 \oplus R_{i-4}$$

quindi

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta_1 & \beta_2 & \gamma \end{pmatrix} \in K_d \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R_{d-2} \\ \beta_1, \beta_2 \in R_{d-3} \\ \gamma \in R_{d-4} \end{cases}$$

Dunque ponendo $d = k + 2$ si ha che i polinomi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sono omogenei di grado $k$, $\beta_1$ e $\beta_2$ omogenei di grado $k-1$ e $\gamma$ di grado $k-2$. Scrivendo la successione dei gradi, cioé ponendo $\widetilde{\deg}\, g = \begin{pmatrix} k, & k, & k, & k-1, & k-1, & k-2 \end{pmatrix}$, si ha che per cercare il numero di generatori in grado 4 (ovvero $b$) bisogna trovare gli elementi $g$ di grado quattro in $K$, dove:

$$\deg\ g = 4 \Leftrightarrow \widetilde{\deg}\ g = \begin{pmatrix} 2, & 2, & 2, & 1, & 1, & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque $\gamma = 0$ poiché vogliamo che la risoluzione sia minimale.
Intanto se ne vedono 4:

$$\begin{array}{rcccccccc} S = & ( & x_2x_3 & 0 & 0 & -x_0 & 0 & 0 & ) \\ T = & ( & 0 & x_2x_3 & 0 & 0 & -x_1 & 0 & ) \\ U = & ( & 0 & 0 & x_2x_3 & -x_1 & 0 & 0 & ) \\ V = & ( & 0 & 0 & 0 & x_1 & -x_0 & 0 & ) \end{array}$$

E questi sono tutti linearmente indipendenti, dunque $b \geq 4$.
Poniamo quindi

$$\alpha_j = a_jx_0^2+b_jx_1^2+c_jx_2^2+d_jx_3^2+e_jx_0x_1+f_jx_0x_2+g_jx_0x_3+h_jx_1x_2+i_jx_1x_3+l_jx_2x_3,$$

per $j = 1,\ 2,\ 3$, generico polinomio di secondo grado, e

$$\beta_k = m_kx_0 + n_kx_1 + o_kx_2 + p_kx_3,$$

per $k = 1, 2$ generico polinomio di primo grado. Sostiutiamo ora queste espressioni nella condizione già espressa precedentemente, ovvero $u_0(g) = 0$.
Ciò che otteniamo è la seguente equazione

$$\begin{gathered} x_0^2(a_1x_0^2 + b_1x_1^2 + c_1x_2^2 + d_1x_3^2 + e_1x_0x_1 + f_1x_0x_2 + g_1x_0x_3 + h_1x_1x_2 + i_1x_1x_3 + l_1x_2x_3)+ \\ +x_1^2(a_2x_0^2 + b_2x_1^2 + c_2x_2^2 + d_2x_3^2 + e_2x_0x_1 + f_2x_0x_2 + g_2x_0x_3 + h_2x_1x_2 + i_2x_1x_3 + l_2x_2x_3)+ \\ +x_0x_1(a_3x_0^2 + b_3x_1^2 + c_3x_2^2 + d_3x_3^2 + e_3x_0x_1 + f_3x_0x_2 + g_3x_0x_3 + h_3x_1x_2 + i_3x_1x_3 + l_3x_2x_3)+ \\ +x_0x_2x_3(m_1x_0 + n_1x_1 + o_1x_2 + p_1x_3)+ \\ +x_1x_2x_3(m_2x_0 + n_2x_1 + o_2x_2 + p_2x_3) = 0 \end{gathered}$$

Raccogliendo e uguagliando a zero i coefficienti del polinomio omogeneo di quarto grado in $x_0, x_1, x_2, x_3$ così ottenuto, si ha un sistema lineare di ventisei equazioni in trentotto incognite:

$$\begin{cases} a_1 = c_1 = d_1 = f_1 = g_1 = 0 \\ b_2 = c_2 = d_2 = h_2 = i_2 = 0 \\ c_3 = d_3 = 0 \\ o_1 = p_1 = 0 \\ o_2 = p_2 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} b_1 + a_2 + c_3 = 0 \\ e_1 + a_3 = 0 \\ h_1 + f_3 = 0 \\ i_1 + g_3 = 0 \\ e_2 + b_3 = 0 \\ f_2 + h_3 = 0 \\ g_2 + i_3 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} l_1 + m_1 = 0 \\ l_2 + n_2 = 0 \\ l_3 + n_1 + m_2 = 0 \end{cases}$$

Poiché il sistema lineare ha rango massimo, ci sono 12 variabili libere, per esempio

$$\begin{matrix} b_1 & e_1 & h_1 & i_1 \\ a_2 & e_2 & f_2 & g_2 \\ m_1 & n_1 & m_2 & n_2 \end{matrix}$$

Riscriviamo quindi le componenti di $g$ con queste variabili

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= b_1x_1^2 + e_1x_0x_1 + h_1x_1x_2 + i_1x_1x_3 - m_1x_2x_3 \\ \alpha_2 &= a_2x_0^2 + e_2x_0x_1 + f_2x_0x_2 + g_2x_0x_3 - n_2x_2x_3 \\ \alpha_3 &= -e_1x_0^2 - e_2x_1^2 - (b_1 + a_2)x_0x_1 - h_1x_0x_2 - i_1x_0x_3 - f_2x_1x_2 - g_2x_1x_3 - (n_1 + n_2)x_2x_3 \\ \beta_1 &= m_1x_0 + n_1x_1 \\ \beta_2 &= m_2x_0 + n_2x_1 \end{aligned}$$

Quindi per trovare una base per le sizigie di grado quattro poniamo a turno una delle variabili libere uguale ad uno e le altre uguali a zero. Ciò che si ottiene sono gli elementi (tralasciando di scrivere $\gamma = 0$)

| | | |
|---|---|---|
| A | $(x_1^2, 0, -x_0x_1, 0, 0)$ | $b_1 = 1$ |
| B | $(x_0x_1, 0, -x_0^2, 0, 0)$ | $c_1 = 1$ |
| C | $(x_1x_2, 0, -x_0x_2, 0, 0)$ | $h_1 = 1$ |
| D | $(x_1x_3, 0, -x_0x_3, 0, 0)$ | $i_1 = 1$ |
| E | $(0, x_0^2, -x_0x_1, 0, 0)$ | $a_2 = 1$ |
| F | $(0, x_0x_1, -x_1^2, 0, 0)$ | $e_2 = 1$ |
| G | $(0, x_0x_2, -x_1x_2, 0, 0)$ | $f_2 = 1$ |
| H | $(0, x_0x_3, -x_1x_3, 0, 0)$ | $g_2 = 1$ |
| I | $(-x_2x_3, 0, 0, x_0, 0)$ | $m_1 = 1$ |
| L | $(0, 0, -x_2x_3, 0, x_0)$ | $n_1 = 1$ |
| M | $(0, 0, -x_2x_3, 0, x_0)$ | $m_2 = 1$ |
| N | $(0, -x_2x_3, 0, 0, x_1)$ | $n_2 = 1$ |

Questa è una base per tutti i generatori di $K$ in grado 4, ma bisogna vedere quanti provengono da quelli in grado 3, che sappiamo essere di dimensione 2, ad esempio (anche in questo caso per comodità eliminiamo l'ultima componente) una base è:

$$\begin{aligned} P = &\quad (x_1, 0, -x_0, 0, 0) \\ Q = &\quad (0, x_0, -x_1, 0, 0) \end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\begin{array}{llll} A = Px_1 & B = Px_0 & C = Px_2 & D = Px_3 \\ E = Qx_0 & F = Qx_1 & G = Qx_2 & H = Qx_3 \end{array}$$

Questo fatto ci dice inoltre che la mappa:

$$\begin{array}{ccc} K_3 \otimes R_1 & \to & K_4 \\ h \otimes l & \mapsto & hl \end{array}$$

è iniettiva, infatti la dimensione dell'immagine è 8, esattamente come $\dim(K_3 \otimes R_1)$.

Per concludere: i generatori di grado 4 di un sistema minimale per $K$ sono $I, L, M$ e $N$: confrontandoli con quelli che avevamo visto vale $S = I$, $U = L$, $T = N$ e $V = L - M$. Dunque $b = 4$.

## 4.4 Un altro esempio con cattiva postulazione: Tre punti doppi

Nei due casi precedenti il primo passo della risoluzione veniva immediato conoscendo un insieme minimale di generatori dell'ideale $I_Z$. Nei prossimi due esempi utilizzeremo ancora la conoscenza diretta dell'ideale, ma cercheremo di capire meglio sull'esempio quali mappe vadano studiate, in un caso in cui i calcoli algebrici siano troppo complicati e non si diano quindi coordinate ai punti, per capire come è fatto un sistema minimale di generatori. Il primo esempio è un caso di cattiva postulazione, il secondo invece di buona postulazione.

**Notazione 4.4.1.** In entrambi gli esempi useremo le seguenti notazioni già adottate in precedenza: con $\mathcal{L}_i$ e $\mathcal{K}$ indicheremo i fasci associati ai moduli $L_i$ e $K$ rispettivamente

Ricordiamo che in 3.3 abbiamo trovato, denotando con $Z$ l'unione in $\mathbb{P}^3$ di tre punti doppi con supporto in $[0,0,0,1]$, $[0,0,1,0]$ e $[0,1,0,0]$, quindi in posizione generale,

$$I = I_Z = (x_0^2, x_0x_1x_2, x_0x_1x_3, x_0x_2x_3, x_1^2x_2^2, x_1^2x_3^2, x_2^2x_3^2)$$

In primo luogo scriviamo la postulazione dello schema $Z$, unione di tre punti doppi, che possiamo prendere da 3.3, oppure ottenere utilizzando i metodi precedentemente visti (m.H.), senza scegliere coordinate per i punti.

| $k$ | $h^0(\mathfrak{I}_Z(k))$ | $\binom{k+3}{3}$ | $l(Z)$ | $h^1(\mathfrak{I}_Z(k))$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 4 | 12 | 8 |
| 2 | 1 | 10 | 12 | 3 |
| 3 | 8 | 20 | 12 | 0 |
| 4 | 23 | 35 | 12 | 0 |

Dove $h^0(\mathfrak{I}_Z(2)) = 1$ si riferisce al piano doppio in accordo con le scelte dei punti fatti in 3.3.

Vogliamo ora capire la struttura moltiplicativa di questo ideale, cosa che ci servirà da guida quando studieremo esempi in cui l'ideale, e quindi un suo sistema minimale di generatori, non sia dato esplicitamente, al contrario di ora.
Analizziamo quindi la mappa di moltiplicazione:

$$\begin{array}{rccc} \mu_2 : & I_2 \otimes R_1 & \to & I_3 \\ & q \otimes l & \mapsto & ql \end{array}$$

Questo morfismo è per forza iniettivo poiché $\dim I_2 = 1$.
Quindi Im $\mu_2 = x_0^2 R_1 \subseteq I_3$ e vale dim(Im $\mu_2$) $= 4$.
Leggendo la postulazione si vede che $\dim I_3 = 8$, quindi scrivendo
$I_3 = x_0^2 R_1 \oplus W$ si ha che $\dim W = 4$.
Questo primo passaggio ci consente di sapere che per generare minimalmente l'ideale in grado 3 servono esattamente quattro cubiche.
Troviamo quindi quattro vettori di $W$ linearmente indipendenti, per esempio $W =< x_0x_1x_2, x_0x_1x_3, x_0x_2x_3, x_1x_2x_3, >$.

Agiamo analogamente analizzando $\mu_3 :\ I_3 \otimes R_1 \to I_4$.
Prima però notiamo che, poiché vale $h^1(\mathfrak{I}_Z(3)) = 0$, tutte le mappe $\mu_i$ con $i \geq 4$ sono suriettive per Castelnuovo-Mumford, e quindi in un insieme minimale di generatori omogenei per $I_Z$ non ci saranno elementi di grado maggiore di 4.
Vediamo se $\mu_3$ è suriettiva: potrebbe esserlo in quanto le dimensioni lo consentirebbero, poiché $4 \cdot 8 > 23$; scriviamo quindi

$$\text{Im}\ \mu_3 = I_3R_1 = (x_0^2R_1 \oplus W)R_1 = x_0^2R_2 + WR_1$$

Sviluppando i calcoli si ha

$$x_0^2R_2 : \quad x_0^4,\ x_0^2x_1^2,\ x_0^2x_2^2,\ x_0^2x_3^2,\ x_0^3x_1,\ x_0^3x_2,\ x_0^3x_3,\ \widetilde{x_0^2x_1x_2},\ \widehat{x_0^2x_1x_3},\ \underline{x_0^2x_2x_3}$$

$$\begin{array}{ll} WR_1 : & \overline{x_0x_1x_2x_3},\ x_1^2x_2x_3,\ x_1x_2^2x_3,\ x_1x_2x_3^2,\ \widehat{x_0^2x_1x_3},\ x_0x_1^2x_3,\ \overline{x_0x_1x_2x_3},\ x_0x_1x_3^2 \\ & \widetilde{x_0^2x_1x_2},\ x_0x_1x_2^2,\ x_0x_1x_2^2,\ \overline{x_0x_1x_2x_3},\ \underline{x_0^2x_2x_3},\ \overline{x_0x_1x_2x_3},\ x_0x_2^2x_3,\ x_0x_2x_3^2 \end{array}$$

Dunque ci sono 6 monomi linearmente dipendenti dagli altri. Quindi

$$\dim(\mathrm{Im}\ \mu_3) = \dim x_0^2 R_2 + \dim W R_1 - 6 = 10 + 16 - 6 = 20.$$

Ne segue che $\mu_3$ non è suriettiva, poiché $\dim(\mathrm{coker}\, \mu_3) = 3$, e, in effetti, guardando l'ideale si vede che $I$ è generato anche da $x_1^2 x_2^2,\ x_1^2 x_3^2,\ x_2^2 x_3^2$.

Esplicitiamo ora il primo passaggio della risoluzione:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L_2 \arrow[r] & L_1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & R(-2)\oplus R(-3)^4 \oplus R(-4)^3 \arrow[r] & I \arrow[r] & 0 \\
& & & K \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd} \tag{4.8}$$

con

$$L_1 = \bigoplus_{i=1}^{r} R(-b_i) \quad L_2 = \bigoplus_{j=1}^{s} R(-a_j)$$

dove $a_1 \leq \ldots \leq a_s$ e $b_1 \leq \ldots \leq b_r$.

Notiamo che, per quanto riguarda i gradi, e a meno degli esponenti, il primo passo della risoluzione è identico al caso dei due punti doppi, e i fasci di ideali relativi a questi due sottoschemi sono entrambi $4-$regolari. Ne segue quindi, ripercorrendo i passaggi fatti in 4.3, che $\mathcal{K}$ è $5-$regolare, e quindi $b_r \leq 5$, inoltre da proposizione 4.2.6

$$\begin{array}{c} a_1 > b_1 \\ b_1 > 2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} b_1 \geq 3 \\ a_1 \geq 4 \end{array}$$

Cioé

$$\begin{aligned} 0 \ \rightarrow \ \oplus_{a_1 \geq 4} R(-a_j) \ &\rightarrow \ R(-3)^a \oplus R(-4)^b \oplus R(-5)^c \ \rightarrow \\ &\rightarrow \ R(-2) \oplus R(-3)^4 \oplus R(-4)^3 \ \rightarrow \ I \ \rightarrow \ 0 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Inoltre, da 4.2.2, abbiamo

- $h^1(\mathcal{K}(q)) = 0 \ \forall q \in \mathbb{Z}$
- $h^2(\mathcal{K}(1)) = h^1(\mathfrak{I}_Z(1)) = 8, \qquad h^2(\mathcal{K}(2)) = h^1(\mathfrak{I}_Z(2)) = 3$
- $h^2(\mathcal{K}(q)) = 0 \ q \geq 3$
- $h^3(\mathcal{K}(q)) = 0 \ q \geq 1$

Per $q = 3$, studiando la succesione di sinistra di 4.9, si ha

$$0 \ \to \ \underbrace{h^2(\mathcal{K}(3))}_{=0} \ \to \ h^3(\oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3 - a_j)) \ \to \ 0$$

e quindi $a_j \leq 6$, cioé la 4.9 diventa:

$$0 \ \to \ R(-4)^d \oplus R(-5)^e \oplus R(-6)^f \ \to \ R(-3)^a \oplus R(-4)^b \oplus R(-5)^c \ \to$$
$$\to \ R(-2) \oplus R(-3)^4 \oplus R(-4)^3 \ \to \ I \ \to \ 0$$

Studiando la stessa parte di succesione, per $q = 2$ si ha

$$0 \ \to \ \underbrace{h^2(\mathcal{K}(2))}_{=3} \ \to \ h^3(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)^f) \ \to \ 0$$

e per $q = 1$

$$0 \ \to \ \underbrace{h^2(\mathcal{K}(1))}_{=8} \ \to \ \underbrace{h^3(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)^e \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-5)^f)}_{=e+4f} \ \to \ \underbrace{h^3(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)^c)}_{=c} \ \to \ 0$$

e quindi $f = 3$ e $c = e + 4$.
Vediamo ora la condizione imposta dai ranghi

$$0 \ \to \ R(-4)^d \oplus R(-5)^e \oplus R(-6)^3 \ \to \ R(-3)^a \oplus R(-4)^b \oplus R(-5)^{e+4} \ \to$$
$$\to \ R(-2) \oplus R(-3)^4 \oplus R(-4)^3 \ \to \ I \ \to \ 0$$

Dunque $d + e + 3 + 1 + 4 + 3 = a + b + e + 4 + 1$, e quindi $d = a + b - 6$.
Sfruttiamo ora la succesione di destra per ottenere il valore al variare di $q$ di $h^0(\mathcal{K}(q))$; per ogni $q \in \mathbb{Z}$ si ha:

$$0 \ \to \ h^0(\mathcal{K}(q)) \ \to \ h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(q-2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(q-3)^4 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(q-4)^3) \ \to \ h^0(\mathfrak{I}_Z(q)) \ \to \ 0$$

e quindi $h^0(\mathcal{K}(q)) = h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(q-2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(q-3)^4 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(q-4)^3) - h^0(\mathfrak{I}_Z(q))$. Dunque per $q = 3$ $h^0(\mathcal{K}(3)) = 8 - 8 = 0$. Guardando ora la successione di sinistra si ha, sempre per $q = 3$,

$$0 \;\rightarrow\; a \;\rightarrow\; h^0(\mathcal{K}(3)) \;\rightarrow\; 0$$

e quindi $a = 0$. Dunque necessariamente anche $d = 0$, in accordo con 4.2.6, e quindi $b = 6$.
A questo punto ci rimane da determinare solo $c$:

$$0 \;\rightarrow\; R(-5)^{c-4} \oplus R(-6)^3 \;\rightarrow\; R(-4)^6 \oplus R(-5)^c \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; R(-2) \oplus R(-3)^4 \oplus R(-4)^3 \;\rightarrow\; I \;\rightarrow\; 0$$

e questo può essere fatto con lo stesso metodo adoperato in 4.3 per i due punti doppi.

## 4.5 Risoluzione di uno schema con buona postulazione. Il caso dei quattro punti doppi

Vediamo ora un esempio di risoluzione libera minimale di uno schema che postula bene. Prima però vediamo il seguente risultato generale:

**Proposizione 4.5.1.** *Sia $X$ un sottoschema $0-$dimensionale di $\mathbb{P}^3$ che postula bene, allora un sistema minimale di generatori per $I_X$ è dato in due gradi.*

*Dimostrazione.* Basta osservare che, detto $\tilde{n}$ il primo intero non negativo tale che $h^0(\mathfrak{I}_X(\tilde{n})) \neq 0$, accade che $h^1(\mathfrak{I}_X(\tilde{n})) = 0$, dunque, $\beta = \{k : \; h^1(\mathfrak{I}_X(k)) = 0\} \leq \tilde{n}$ e quindi $\mathfrak{I}_X$ è almeno $(\tilde{n}+1)-$regolare (si veda 4.2.3). Il lemma di Castelnuovo-Mumford assicura quindi che $\mu_i : \; (I_X)_i \otimes R_1 \rightarrow (I_X)_{i+1}$ è suriettiva almeno per $i \geq \tilde{n}+1$. Quindi si può concludere chel'ideale è generato da $\oplus_{d\leq\tilde{n}+1}(I_X)_d$; ma essendo $(I_X)_d = 0$ per $d \leq \tilde{n}-1$, si ha che un sistema di generatori minimali è di grado $\tilde{n}$ ed eventualmente $\tilde{n}+1$. Se infatti risulta essere $\mu_{\tilde{n}}$ suriettiva i generatori minimali sono solo di grado $\tilde{n}$

□

Scriviamo allora la postulazione del sottoschema $Z$ formato dall'unione generica di quattro punti doppi ottenuta in 3.6; ricordiamo che in 3.6 avevamo trovato, prendendo come supporto i punti $[1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,0,1,0]$ e $[0,0,0,1]$, che l'ideale di $Z$ è

$$I = I_Z = (x_0x_1x_2, x_0x_1x_3, x_0x_2x_3, x_1x_2x_3, x_0^2x_1^2, x_0^2x_2^2, x_0^2x_3^2, x_1^2x_2^2, x_1^2x_3^2, x_2^2x_3^2).$$

| $k$ | $h^0(\mathfrak{I}_Z(k))$ | $\binom{k+3}{3}$ | $l(Z)$ | $h^1(\mathfrak{I}_Z(k))$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 4 | 16 | 12 |
| 2 | 0 | 10 | 16 | 6 |
| 3 | 4 | 20 | 16 | 0 |
| 4 | 19 | 35 | 16 | 0 |

Di nuovo si vede subito che il nostro $I$ è dato esplicitamente tramite un sistema minimale di generatori; tuttavia anche qui, come nell'esempio precedente, studiamo la struttura moltiplicativa dell'ideale per ritrovare che i generatori di grado quattro sono proprio sei, per capire come funziona il metodo generale, che prescinde dalla conoscenza algebrica dello schema, ed utilizza solo la sua conoscenza geoemtrica, come vedremo nell'ultimo capitolo.

Dalla postulazione si vede che ci sono quattro generatori in grado tre. Osserviamo quindi

$$\begin{array}{rccc} \mu_3: & I_3 \otimes R_1 & \to & I_4 \\ & q \otimes \alpha & \mapsto & q\alpha \end{array}$$

ci aspettiamo dei generatori minimali anche in grado quattro, poiché $\dim(I_Z)_4 = 19$ mentre al massimo $\dim(\mathrm{Im}\ \mu_3) = 4*4 = 16$.

Quattro possibili cubiche linearmente indipendenti che contengono $Z$ sono $x_0x_1x_2$, $x_0x_1x_3$, $x_0x_2x_3$, $x_1x_2x_3$ e quindi generano $I_3$. Sviluppiamo $I_3R_1$:

$x_0x_1x_2R_1$: $\quad x_0^2x_1x_2,\ x_0x_1^2x_2,\ x_0x_1x_2^2,\ \underline{x_0x_1x_2x_3}$

$x_0x_1x_3R_1$: $\quad x_0^2x_1x_3,\ x_0x_1^2x_3,\ \underline{x_0x_1x_2x_3},\ x_0x_1x_3^2$

$x_0x_2x_3R_1$: $\quad x_0^2x_2x_3,\ \underline{x_0x_1x_2x_3},\ x_0x_2^2x_3,\ x_0x_2x_3^2$

$x_1x_2x_3R_1$: $\quad \underline{x_0x_1x_2x_3},\ x_1^2x_2x_3,\ x_1x_2^2x_3,\ x_1x_2x_3^2$

Dunque, avendo tre monomi linearmente dipendenti dagli altri, si ha $\dim \mathrm{Im}\mu_3 = 13$, quindi $\mu_3$ non è iniettiva e $\dim(\mathrm{coker}\ \mu_3) = 19 - 13 = 6$. Possiamo quindi iniziare la risoluzione:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & L_2 & \to & L_1 & \to & R(-3)^4 \oplus R(-4)^6 & \to & I_Z & \to & 0 \\ & & & & & \searrow \quad \nearrow & & & & & \\ & & & & & K & & & & & \\ & & & & & \nearrow \quad \searrow & & & & & \\ & & & & 0 & & 0 & & & & \end{array} \tag{4.10}$$

Utilizzando quanto detto nella proposizione 4.2.2, abbiamo

- $h^1(\mathcal{K}(q)) = 0\ \forall q \in \mathbb{Z}$

- $h^2(\mathcal{K}(1)) = h^1(\mathfrak{I}_Z(1)) = 12$, $h^2(\mathcal{K}(2)) = h^1(\mathfrak{I}_Z(2)) = 6$

- $h^2(\mathcal{K}(q)) = 0\ q \geq 3$

- $h^3(\mathcal{K}(q)) = 0\ q \geq 1$

Dunque $h^1(\mathcal{K}(5-1)) = h^2(\mathcal{K}(5-2)) = h^3(\mathcal{K}(5-3)) = 0$, quindi $\mathcal{K}$ è $5-$regolare. Possiamo già caratterizzare maggiormente la risoluzione scrivendo

$$L_1 = R(-4)^a \oplus R(-5)^b, \quad L_2 = \bigoplus_j R(-a_j)$$

con $a_j > 4$.

Consideriamo la successione di sinistra di 4.10 twistata di $q$ e, passando ai fasci, prendiamo la coomologia:

$$0 \ \to \ h^2(\mathcal{K}(q)) \ \to \ h^3\big(\bigoplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(q-a_j)\big) \ \to \ h^3\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(q-4)^a \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(q-5)^b\big) \ \to \ 0$$

Per $q = 3$ la condizione che si ottiene è $h^3(\bigoplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3 - a_j)) = 0$, e quindi $a_j < 7$.

Possiamo dunque scrivere

$$0 \to R(-5)^c \oplus R(-6)^d \to R(-4)^a \oplus R(-5)^b \to R(-3)^4 \oplus R(-4)^6 \to I_Z \to 0$$

Continuiamo ad analizzare la successione precedente, per $q = 2$ si ha

$$0 \to \underbrace{h^2(\mathcal{K}(2))}_{=6} \to \underbrace{h^3\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3)^c \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)^d\big)}_{=d} \to 0$$

mentre per $q = 1$

$$0 \to \underbrace{h^2(\mathcal{K}(1))}_{=12} \to \underbrace{h^3\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)^c \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-5)^d\big)}_{=c+4d} \to \underbrace{h^3\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3)^a \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)^b\big)}_{=b} \to 0$$

e quindi $d = 6$ e $b = c + 12$.

Vediamo ora la condizione sui ranghi

$$c + 6 - +6 + 4 = a + c + 12 + 1 \quad \Rightarrow \quad a = 3$$

Abbiamo quindi ottenuto fino ad ora

$$0 \to R(-5)^c \oplus R(-6)^6 \to R(-4)^3 \oplus R(-5)^{c+12} \to R(-3)^4 \oplus R(-4)^6 \to I_Z \to 0$$

con $c$ ancora da determinare; e questo può essere fatto con lo stesso metodo adoperato in 4.3 (per i due punti doppi).

Osserviamo che siamo partiti da uno schema con buona postulazione ed abbiamo ottenuto una risoluzione in cui i gradi sono due ad ogni passo, mentre nei casi di due e tre punti doppi, dove la postulazione non è buona, ci sono passi con tre gradi.

## 4.6 Schemi $0-$dimensionali di $\mathbb{P}^3$ con risoluzioni lineari

Il prossimo esempio che vedremo, ovvero il sottoschema $Z$ formato dall'unione di cinque punti doppi, tratta di un caso abbastanza particolare: infatti

non solo $Z$ postula bene, ma ha l'ulteriore proprietà di avere $h^0(\mathfrak{I}_Z(3)) = h^1(\mathfrak{I}_Z(3)) = 0$.
Scriviamo quindi la postulazione di $Z$ utilizzando il fatto che $Z$ postula bene ([**Hi1** ])

| $k$ | $h^0(\mathfrak{I}_Z(k))$ | $\binom{k+3}{3}$ | $l(Z)$ | $h^1(\mathfrak{I}_Z(k))$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 4 | 20 | 16 |
| 2 | 0 | 10 | 20 | 10 |
| 3 | 0 | 20 | 20 | 0 |
| 4 | 15 | 35 | 20 | 0 |

Dunque, grazie al lemma di Castelnuovo-Mumford, $I_Z$ è generato completamente in grado 4, perché $\mu_4 : (I_Z)_4 \otimes R_1 \to (I_Z)_5$ è suriettiva e d'altra parte $I_Z$ non ha niente in grado minore di 4.
Iniziamo la risoluzione

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \to & L_2 & \to & L_1 & & \to & & R(-4)^{15} & \to & I_Z & \to & 0 \\
& & & & & \searrow & & \nearrow & & & & & \\
& & & & & & K & & & & & & \\
& & & & & \nearrow & & \searrow & & & & & \\
& & & & 0 & & & & 0 & & & &
\end{array}
$$

Analizzando la coomologia di $\mathcal{K}$, sfruttando come al solito 4.2.2, abbiamo

- $h^1(\mathcal{K}(q)) = 0 \ \forall q \in \mathbb{Z}$
- $h^2(\mathcal{K}(1)) = h^1(\mathfrak{I}_Z(1)) = 16$, $h^2(\mathcal{K}(2)) = h^1(\mathfrak{I}_Z(2)) = 10$
- $h^2(\mathcal{K}(q)) = 0 \ q \geq 3$
- $h^3(\mathcal{K}(q)) = 0 \ q \geq 1$

e quindi $\mathcal{K}$ è $5-$regolare. Dunque sappiamo già che $L_1 = R(-5)^a$.
Detto $L_2 = \oplus_j R(-a_j)^{b_j}$, si ha $a_j > 5$ e abbiamo la seguente successione esatta

$$0 \ \to \ \oplus_{a_j \geq 6} R(-a_j) \ \to \ R(-5)^a \ \to \ R(-4)^{15} \ \to \ I_Z \ \to \ 0$$

da cui, passando ai fasci e prendendo la coomologia della successione esatta di sinistra:

$$0 \ \to \ h^2(\mathcal{K}(q)) \ \to \ h^3\big(\bigoplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(q-a_j)^{b_j}\big) \ \to \ h^3\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(q-5)^a\big) \ \to \ 0$$

da cui, ponendo $q = 3$, si ottiene la condizione $3 - a_j > -4$ e cioé $a_j < 7$.
Allora deve accadere che $L_2 = R(-6)^b$.
Ponendo $q = 2$ invece si ha

$$0 \ \to \ \underbrace{h^2(\mathcal{K}(2))}_{10} \ \to \ \underbrace{h^3\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)^b\big)}_{b} \ \to \ 0$$

e quindi $b = 10$.
L'ultima condizione per esplicitare completamente la risoluzione si ottiene

dai ranghi: infatti deve valere $b - a + 15 - 1 = 0$, sostituendo si ottiene $a = 24$. In definitiva abbiamo

$$0 \;\rightarrow\; R(-6)^{10} \;\rightarrow\; R(-5)^{24} \;\rightarrow\; R(-4)^{15} \;\rightarrow\; I_Z \;\rightarrow\; 0$$

Prima di proseguire vediamo che Il procedimento appena applicato si può generalizzare a qualunque tipo di sottoschema $X$ 0−dimensionale di $\mathbb{P}^3$ che abbia la proprietà per cui esista $\tilde{n} > 0$ tale che $h^0(\mathfrak{I}_X(\tilde{n})) = h^1(\mathfrak{I}_X(\tilde{n})) = 0$

**Proposizione 4.6.1.** *Sia $X$ uno schema 0−dimensionale per cui esista $\tilde{n} > 0$ tale che $h^0(\mathfrak{I}_X(\tilde{n})) = h^1(\mathfrak{I}_X(\tilde{n})) = 0$.*
*Allora la risoluzione libera minimale di $X$ sarà della forma*

$$0 \;\rightarrow\; R(-\tilde{n}-3)^{\gamma} \;\rightarrow\; R(-\tilde{n}-2)^{\beta} \;\rightarrow\; R(-\tilde{n}-1)^{\alpha} \;\rightarrow\; I_X \;\rightarrow\; 0$$

*Dimostrazione.* Innanzi tutto notiamo che $I_X$ è generato solo in un grado, ovvero $\tilde{n}+1$. Iniziamo a scrivere la risoluzione libera minimale di $X$:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
0 \arrow[r] & L_2 \arrow[r] & L_1 \arrow[r] \arrow[dr] & R(-\tilde{n}-1)^{\alpha} \arrow[r] & I_X \arrow[r] & 0 \\
 & & & K \arrow[u] \arrow[dr] & & \\
 & & 0 \arrow[ur] & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Dunque possiamo ottenere le seguenti informazioni sulla coomologia di $\mathcal{K}$:

- $h^1(\mathcal{K}(q)) = 0 \;\forall q \in \mathbb{Z}$
- $h^2(\mathcal{K}(q)) = 0 \; q \geq \tilde{n}$
- $h^3(\mathcal{K}(q)) = h^2(\mathfrak{I}_X(q)) \; q \geq \tilde{n} - 2$

Il caso $q = \tilde{n} + 2$ ci dice che $h^1(\mathcal{K}(\tilde{n}+1)) = h^2(\mathcal{K}(\tilde{n})) = h^3(\mathcal{K}(\tilde{n}-1)) = 0$, quindi $\mathcal{K}$ è $(\tilde{n}+2)-$regolare. Ne viene necessariamente che $L_1 = R(-\tilde{n}-2)^{\beta}$. Scriviamo ora un pezzo della successione di coomologia data dalla successione esatta sinistra scritta precedentemente.

$$0 \;\rightarrow\; h^2(\mathcal{K}(q)) \;\rightarrow\; h^3\big(\bigoplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(q-a_j)^{b_j}\big) \;\rightarrow\; h^3(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-\tilde{n}-2)) \;\rightarrow\; 0 \tag{4.11}$$

Ponendo ora $q = \tilde{n}$ si ottiene $h^3\big(\bigoplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(q-a_j)^{b_j}\big)$, e cioé $a_j < \tilde{n}+4$. Abbiamo così ottenuto che la risoluzione libera minimale è

$$0 \;\to\; R(-\tilde{n}-3)^{\gamma} \;\to\; R(-\tilde{n}-2)^{\beta} \;\to\; R(-\tilde{n}-1)^{\alpha} \;\to\; I_X \;\to\; 0$$

Inoltre possiamo esplicitare i tre esponenti:
$\alpha$ rappresenta il numero di generatori indipendenti di $I_X$ e quindi è uguale ad $h^0(\mathfrak{I}_X(\tilde{n}+1))$. Da 4.11, per $q = \tilde{n}-1$ si ottiene che $\gamma = h^2(\mathcal{K}(\tilde{n}-1)) = h^1(\mathfrak{I}_X(\tilde{n}-1))$. Infine $\beta = \gamma + \alpha - 1$ grazie alla condizione sui ranghi.

□

# Capitolo 5

# L'uso delle trasformazioni elementari nella Méthode d'Horace

In questo capitolo illustreremo ulteriori tecniche necessarie ad affrontare risoluzioni di schemi per i quali i metodi utilizzati finora risulterebbero inefficaci.
Per illustrare queste nuove tecniche approfondiremo un solo esempio: il sottoschema di $\mathbb{P}^3$ formato dall'unione generica di cinque punti doppi e quattro punti semplici, che indicheremo con $Z$.
Questo schema, avendo supporto su nove punti, non ha certo un ideale monomiale, quindi non faremo neanche il tentativo di scrivere esplicitamente l'ideale.

## 5.1 Uno schema $0-$dimensionale con supporto su nove punti

Notiamo preliminarmente che $Z$ è uno schema più generale dello schema $X$ formato dall'unione di sei punti doppi. Intuitivamente si ha in effetti che la lunghezza degli schemi è la stessa ma le condizioni presenti in $X$ sono

meno generiche.
Geometricamente si può vedere un punto doppio di $\mathbb{P}^3$ come specializzazione di quattro punti semplici generali di $\mathbb{P}^3$, di cui tre vanno a collidere nel quarto da tre direzioni indipendenti di $\mathbb{P}^3$.
Quindi per il teorema di semicontinuità

$$0 = h^0(\mathfrak{I}_X(3)) \geq h^0(\mathfrak{I}_Z(3))$$

$$0 = h^1(\mathfrak{I}_X(4)) \geq h^1(\mathfrak{I}_Z(4))$$

da cui $h^0(\mathfrak{I}_Z(3)) = h^1(\mathfrak{I}_Z(4)) = 0$.

Quindi la postulazione di $Z$ è data dalla tabella seguente:

| $k$ | $h^0(\mathfrak{I}_Z(k))$ | $\binom{k+3}{3}$ | $l(Z)$ | $h^1(\mathfrak{I}_Z(k))$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 4 | 24 | 20 |
| 2 | 0 | 10 | 24 | 14 |
| 3 | 0 | 20 | 24 | 4 |
| 4 | 11 | 35 | 24 | 0 |
| 5 | 32 | 56 | 24 | 0 |

(5.1)

## 5.2 Fibrato cotangente e proiettivizzazione di un fascio

Con la postulazione nota iniziamo ad analizzare il primo passo della risoluzione minimale.
Lo schema $Z$ postula bene, dunque per quanto visto $I_Z$ è generato in gradi quattro e cinque al più (si veda 4.5.1 ).
Sicuramente saranno necessari undici generatori in grado quattro.
Per sapere se servono anche degli elementi di grado cinque in un sistema di generatori minimali dobbiamo studiare la mappa $\mu_4 : \ (I_Z)_4 \times R_1 \to (I_Z)_5$.
Non avendo l'ideale $I_Z$ in forma esplicita è ovviamente impossibile trovare undici elementi indipendenti di $I_Z$ in grado quattro per esplicitare $\ker \mu_4$, ricorriamo quindi all'uso del fibrato cotangente di $\mathbb{P}^3$, indicato con $\Omega_{\mathbb{P}^3}$. Prima

di tutto scriviamo la successione di Eulero:

$$0 \ \to \ \Omega_{\mathbb{P}^3}(1) \ \to \ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \otimes R_1 \ \to \ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \ \to \ 0$$

Tensorizzandola per $\mathfrak{I}_Z(k)$ la successione rimane esatta; prendendone la coomologia otteniamo la seguente successione esatta

$$0 \ \to \ H^0(\Omega_{\mathbb{P}^3}(k+1) \otimes \mathfrak{I}_Z) \ \to \ H^0(\mathfrak{I}_Z(k)) \otimes R_1 \ \stackrel{\mu_k}{\to} \ H^0(\mathfrak{I}_Z(k+1)) \ \to \ \dots$$

Si evince quindi che studiare $\dim(\ker \mu_4)$ equivale a studiare $h^0(\Omega_{\mathbb{P}^3}(5) \otimes \mathfrak{I}_Z)$. Osserviamo preliminarmente che sicuramente $h^0(\Omega_{\mathbb{P}^3}(5) \otimes \mathfrak{I}_Z) \geq 12$ in quanto $\dim(I_4 \otimes R_1) = 44$ e $\dim(I_5) = 32$.

**Notazione 5.2.1.** D'ora in avanti con $\Omega$ indicheremo il fibrato cotangente di $\mathbb{P}^3$, ovvero $\Omega_{\mathbb{P}^3}$.

Per studiare il fibrato cotangente, in quanto fibrato di rango tre, conviene non lavorare in $\mathbb{P}^3$, bensì in $\mathbb{P}(\Omega_{\mathbb{P}^3})$ con il fascio invertibile $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Omega_{\mathbb{P}^3})}(1)$. Denotiamo inoltre con $\pi : \ \mathbb{P}(\Omega_{\mathbb{P}^3}) \to \mathbb{P}^3$ la proiezione canonica, e con $\mathcal{E}_k = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Omega_{\mathbb{P}^3})}(1) \otimes \pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(k))$ il fascio da studiare, dove $\pi^*$ indica il pull-back. Infine indicheremo con $\tilde{T}$ lo schema in $\mathbb{P}(\Omega_{\mathbb{P}^3})$ immagine inversa di $Z$, ossia $\pi^{-1}(Z)$, che ha come fascio di ideali l'immagine inversa del fascio di $I_Z$.
Il nostro problema ora risulta verificare che $h^0(\mathcal{E}_5 \otimes \mathfrak{I}_{\tilde{T}}) = 12$, cioè $h^0(\mathcal{E}_5 \otimes \mathfrak{I}_X) = 0$, dove con $X$ indichiamo lo schema $\tilde{T}$ unito a dodici punti dello spazio $\mathbb{P}(\Omega_{\mathbb{P}^3})$ denominati $s-$punti. Per il fatto che $h^0(\mathcal{E}_5 \otimes \mathfrak{I}_{\tilde{T}}) = 12$ sia equivalente a $h^0(\Omega(5) \otimes \mathfrak{I}_Z) = 12$ e in genere per tutto quanto qui non esplicitamente dimostrato riguardo alle generalità di questo metodo, si rimanda ad [**I1** ] e [**I2** ].

**Notazione 5.2.2.** Per semplicità le notazioni utilizzate saranno le medesime di quando si lavora in $\mathbb{P}^3$ ma dovranno intendersi in $\mathbb{P}(\Omega_{\mathbb{P}^3})$. Per esempio, quando si utilizzerà il piano $H$ di $\mathbb{P}^3$, in realtà si starà utilizzando $\pi^{-1}(H)$; punto doppio e punto semplice indicano le loro controimmagini in $\mathbb{P}(\Omega_{\mathbb{P}^3})$, mentre come si è detto un punto di $\mathbb{P}(\Omega_{\mathbb{P}^3})$ viene chiamato $s-$punto. Se $H$ è un piano in $\mathbb{P}^3$ e $\Omega_H$ il suo fibrato cotangente, $\Omega$ e $\Omega_H$ denotano anche $\mathcal{E}_0$ e $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Omega_H)}(1)$ rispettivamente.

Al fine di non appesantire maggiormente la dimostrazione principale enunceremo alcuni lemmi prima di iniziare, così da alleggerire i passaggi successivi:

**Lemma 5.2.3.** *Sia $U$ lo schema contenuto in un piano $H$ di $\mathbb{P}^3$ formato da un punto doppio del piano, quattro punti semplici e un $s-$punto.*
*Allora vale $h^0(\Omega_H(4) \otimes \mathfrak{I}_U) = 0$*

*Dimostrazione.* Scriviamo la seguente successione esatta per usare m.H.

$$0 \to H^0(\Omega_H(3) \otimes \mathfrak{I}_{res_L \tilde{U}}) \to H^0(\Omega_H(4) \otimes \mathfrak{I}_{\tilde{U}}) \to H^0(\Omega_H(4)_{|L} \otimes \mathfrak{I}_{\tilde{U} \cap L, L}) \to \dots$$

dove $L$ è una retta passante per un punto doppio e un punto semplice di $U$, e su cui abbiamo specializzato un $s-$punto (indicando con $\tilde{U}$ la specializzazione).
Sapendo che $\Omega_L \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$, vale $\Omega_H(4)_{|L} = \Omega_L(4) \oplus \mathcal{O}_L(3) = \mathcal{O}_L(2) \oplus \mathcal{O}_L(3)$.
E dunque $h^0(\Omega_H(4)_{|L} \otimes \mathfrak{I}_{\tilde{U} \cap L, L}) = 0$: infatti un punto doppio e un punto semplice sono sufficienti ad annullare tutte le sezioni globali di $\mathcal{O}_L(2)$, mentre aggiungendo anche l'$s-$punto si annullano anche quelle di $\mathcal{O}_L(3)$.
Detto $V = res_L \tilde{U}$, e quindi lo schema formato da quattro punti semplici generali del piano $H$, dobbiamo mostrare che $h^0(\Omega_H(3) \otimes \mathfrak{I}_V) = 0$.
Per farlo prendiamo $C$ una conica liscia passante per i quattro punti e scriviamo la seguente successione esatta

$$0 \to \Omega_H(1) \to \Omega_H(3) \to \Omega_H(3)_{|C} \to 0$$

Poiché sappiamo che $h^0(\Omega_H(1)) = 0$ per concludere è sufficiente mostrare che $h^0(\Omega_H(3)_{|C} \otimes \mathfrak{I}_V) = 0$.
Poiché abbiamo che $\Omega_{H\,|C} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-3)^2$ e $\mathcal{O}_H(3)_{|C} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(6)$, allora dimostrare $h^0(\Omega_H(3)_{|C} \otimes \mathfrak{I}_{\tilde{V}}) = 0$ equivale a mostrare $h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(3)^2 \otimes \mathfrak{I}_{\tilde{V}}) = 0$, ma questo è vero e dunque si può concludere.

□

**Lemma 5.2.4.** *Sia $U$ lo schema contenuto in un piano $H$ formato da un punto semplice e un $s-$punto generali.*
*Allora vale $h^0(\Omega_H(2)\otimes\mathfrak{I}_U)=0$.*

*Dimostrazione.* Per vederlo utilizziamo m.H. e scriviamo direttamente la successione di coomologia dove $L$ rappresenta la retta passante per il punto e l'$s-$punto di $U$:

$$0 \to \underbrace{H^0(\Omega_H(1)\otimes\mathfrak{I}_{res_L U})}_{=0} \to H^0(\Omega_H(2)\otimes\mathfrak{I}_U) \to H^0(\Omega_H(2)_{|L}\otimes\mathfrak{I}_{U\cap L,L}) \to \dots$$

Dunque basta mostrare che l'ultima parte della successione è nulla, e, poiché $\Omega_H(2)_{|L}=\Omega_L(2)\oplus\mathcal{O}_L(1)=\mathcal{O}_L\oplus\mathcal{O}_L(1)$ si può concludere osservando che il punto semplice annulla le sezioni globali di $\mathcal{O}_L$, mentre il punto semplice e l'$s-$punto annullano le sezioni globali di $\mathcal{O}_L(1)$.

□

Sia quindi $X\subseteq\mathbb{P}(\Omega_{\mathbb{P}^3})$ lo schema formato dall'unione di cinque punti doppi, quattro punti semplici e dodici $s-$punti. Mostriamo con m.H. che $h^0(\Omega(5)\otimes\mathfrak{I}_X)=0$, sfruttando la seguente successione esatta

$$0 \to \Omega(4)\otimes\mathfrak{I}_{res_H\tilde{X}} \to \Omega(5)\otimes\mathfrak{I}_{\tilde{X}} \to \Omega(5)_{|H}\otimes\mathfrak{I}_{\tilde{X}\cap H,H} \to 0$$

dove $H$ è un piano passante per tre punti doppi di $X$, mentre $\tilde{X}$ è la specializzazione di $X$ tale che l'intersezione con $H$ sia formata da quattro punti doppi di $H$ e tre $s-$punti.
Ora, poiché $\Omega(5)_{|H}=\Omega_H(5)\oplus\mathcal{O}_H(4)$, si ha che quattro punti doppi sono sufficienti ad annullare le sezioni di $\Omega_H(5)$ (si veda [**I2** ]), mentre quattro punti doppi e tre $s-$punti postulano bene in $\mathbb{P}^2$, quindi anche $h^0(\mathcal{O}_H(4)\otimes\mathfrak{I}_{\tilde{X}\cap H,H})$ è nullo.
Detto $Y=res_H\tilde{X}$, e cioé lo schema formato da un punto doppio, otto punti semplici (di cui quattro su $H$) e nove $s-$punti, ci rimane da dimostrare che $h^0(\Omega(4)\otimes\mathfrak{I}_Y)=0$ per concludere.
Riapplichiamo m.H. a $\tilde{Y}$, dove $\tilde{Y}$ è ottenuto specializzando opportunamente il punto doppio e quattro $s-$punti su $H$:

$$0 \to \Omega(3)\otimes\mathfrak{I}_{res_H\tilde{Y}} \to \Omega(4)\otimes\mathfrak{I}_{\tilde{Y}} \to \Omega(4)_{|H}\otimes\mathfrak{I}_{\tilde{Y}\cap H,H} \to 0$$

Analogamente a quanto detto precedentemente, poiché $\Omega(4)_{|H} = \Omega_H(4) \oplus \mathcal{O}_H(3)$ dobbiamo mostrare che le sezioni globali di $\Omega_H(4)$ e $\mathcal{O}_H(3)$ si annullano per opportuni schemi:
la seconda condizione è soddisfatta utilizzando un punto doppio, quattro punti semplici e tre $s-$punti. Ciò che rimane utilizzabile per annullare le sezioni di $\Omega_H(4)$ sono un punto doppio, quattro punti semplici e un $s-$punto; ma questa condizione è stata verificata precedentemente nel lemma 5.2.3.
La nostra dimostrazione quindi si riduce a verificare che $h^0(\Omega(3) \otimes \mathfrak{I}_V) = 0$, dove $V = res_H \tilde{Y}$, ovvero lo schema formato da cinque punti semplici e cinque $s-$punti.
Scriviamo la successione esatta

$$0 \rightarrow \Omega(2) \otimes \mathfrak{I}_{res_H \tilde{V}} \rightarrow \Omega(3) \otimes \mathfrak{I}_{\tilde{V}} \rightarrow \Omega(3)_{|H} \otimes \mathfrak{I}_{\tilde{V} \cap H, H} \rightarrow 0$$

indicando con $\tilde{V}$ la specializzazione di $V$, in modo da avere l'intersezione con $H$ formata da quattro punti e due $s-$punti. Sviluppando l'ultima parte si ha $\Omega(3)_{|H} = \Omega_H(3) \oplus \mathcal{O}_H(2)$ e quindi quattro punti sono sufficienti ad annullare le sezioni di $\Omega_H(3)$ (parte finale della dimostrazione del lemma 5.2.3), mentre per $\mathcal{O}_H(2)$ sono necessari anche i due $s-$punti.
Proseguiamo quindi la dimostrazione col mostrare che $h^0(\Omega(2) \otimes \mathfrak{I}_W) = 0$, dove $W$ è lo schema formato da un punto e tre $s-$punti. Anche in questo caso riapplichiamo m.H. a $\tilde{W}$, schema ottenuto specializzando $W$ tutto su $H$:

$$0 \rightarrow \Omega(1) \otimes \mathfrak{I}_{res_H \tilde{W}} \rightarrow \Omega(2) \otimes \mathfrak{I}_{\tilde{W}} \rightarrow \Omega(2)_{|H} \otimes \mathfrak{I}_{\tilde{W} \cap H, H} \rightarrow 0$$

Ma $res_H \tilde{W} = \emptyset$ e $h^0(\Omega(1)) = 0$, quindi per concludere la prova occorre mostrare che $h^0(\Omega(2)_{|H} \otimes \mathfrak{I}_{\tilde{W} \cap H, H}) = 0$. Per farlo notiamo che $\Omega(2)_{|H} = \Omega_H(2) \oplus \mathcal{O}_H(1)$. Il punto semplice e due $s-$punti sono sufficienti per annullare le sezioni di $\mathcal{O}_H(1)$, mentre il punto semplice e il restante $s-$punto assolvono la seconda condizione, come mostrato nel lemma 5.2.4.

Tornando alle notazioni usuali, abbiamo dimostrato in $\mathbb{P}(\Omega_{\mathbb{P}^3})$ che $h^0(\mathcal{E}_5 \otimes \mathfrak{I}_{\tilde{T}}) = 12$, questo in $\mathbb{P}^3$ significa che $h^0(\Omega(5) \otimes \mathfrak{I}_Z) = 12$. Dunque la dimensione del nucleo di $\mu_4$ è dodici, quindi $I_Z$ non ha generatori in grado cinque, ma è generato da undici elementi in grado quattro. Possiamo esplicitare il primo passo della risoluzione minimale:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
0 \arrow[r] & L_2 \arrow[r] & L_1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & R(-4)^{11} \arrow[r] & I_Z \arrow[r] & 0 \\
& & & K \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd} \tag{5.2}$$

Adesso utilizziamo i metodi già applicati precedentemente per ottenere più informazioni possibile sulla risoluzione.
Applicando 4.2.2 si ha

- $h^1(\mathcal{K}(q)) = 0 \; \forall q \in \mathbb{Z}$
- $h^2(\mathcal{K}(q)) = 0$ per $q \geq 4$, mentre $h^2(\mathcal{K}(3)) = 4$ e $h^2(\mathcal{K}(2)) = 14$
- $h^3(\mathcal{K}(q)) = h^2(\mathfrak{I}_X(q))$ per $q \geq 4 - 3 = 1$ e quindi $h^3(\mathcal{K}(q)) = 0 \; \forall q \geq 1$

In questo modo si ottiene che $\mathcal{K}$ è $6-$regolare, dunque

$$L_1 = R(-5)^a \oplus R(-6)^b.$$

Scrivendo $L_2 = \bigoplus_j R(-a_j)$, sappiamo che $a_j \geq 6$, inoltre, scrivendo la successione esatta di coomologia della successione sinistra di 5.2 torta di quattro, si ottiene che $a_j \leq 7$, e quindi

$$L_2 = R(-6)^c \oplus R(-7)^d.$$

Infatti

$$0 \;\to\; h^2(\mathcal{K}(q)) \;\to\; h^3\big(\textstyle\bigoplus_j \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(q-a_j)\big) \;\to\; h^3(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(q-5)^a \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(q-6)^b \;\to\; 0$$

per $q = 4$ si ottiene proprio $4 - a_j \geq -3$.
Per $q = 3$ invece si ottiene

$$0 \;\to\; \underbrace{h^2(\mathcal{K}(3))}_{=4} \;\to\; \underbrace{h^3(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3)^c \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)^d)}_{=d} \;\to\; 0$$

e dunque $d = 4$.

Sfruttando sempre la stessa successione, per $q = 2$

$$0 \rightarrow \underbrace{h^2(\mathcal{K}(2))}_{=14} \rightarrow \underbrace{h^3(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)^c \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-5)^4)}_{=c+16} \rightarrow \underbrace{h^3(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3)^a \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)^b}_{=b} \rightarrow 0$$

e quindi $c = b - 2$.

Infine dalla condizione sui ranghi $b - 2 + 4 + 11 = a + b + 1$ e quindi $a = 12$.

Altre analisi sulle successioni di coomologia, sia di destra che di sinistra, non forniscono ulteriori informazioni.

Abbiamo dunque ottenuto

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-6)^{b-2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-7)^4 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-5)^{12} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-6)^b \rightarrow$$
$$\rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)^{11} \rightarrow \mathfrak{I}_Z \rightarrow 0 \tag{5.3}$$

Potremmo calcolare $b$ con i metodi mostrati nel caso di due punti doppi, risolvendo cioè enormi sistemi lineari; quello che invece facciamo è fare ricorso, anche qui, ad un metodo geometrico, che oltre ad evitare calcoli complessi ha il pregio di poter essere utilizzato per dimostrazioni di casi generali (ad esempio, schemi di punti grassi in $\mathbb{P}^n$ con supporto su un numero qualsiasi di punti).

Per poter concludere mostriamo dunque l'ultima tecnica descritta in questa tesi

## 5.3 Fibrato tangente e trasformazioni elementari

Prima di iniziare diamo alcuni risultati generali che giustificano il nostro interesse per il fibrato tangente.

**Definizione 5.3.1.** Sia $X$ uno schema 0−dimensionale di $\mathbb{P}^3$ con buona postulazione. Si dice che la risoluzione libera minimale di $X$ è quella attesa se non ci sono fibrati di rango uno che compaiono in due differenti passi della risoluzione libera minimale di $X$.

Quindi ad esempio $Z$ ha la risoluzione libera minimale attesa se in 5.3 si ha $b = 2$.

**Notazione 5.3.2.** D'ora in poi con $T$ indicheremo il fibrato tangente di $\mathbb{P}^3$, ovvero $T_{\mathbb{P}^3}$.

Il prossimo teorema (si veda [**HS** ]), fornisce una condizione necessaria e sufficiente affinché uno schema come $Z$ abbia la risoluzione minimale attesa:

**Teorema 5.3.3.** *Sia $X \subset \mathbb{P}^3$ schema $0-$dimensionale, e sia $k > 0$ il più piccolo intero per cui valga $l(X) \leq \binom{k+3}{3}$.*
*$X$ ha la risoluzione minimale attesa se e solo se si verificano le seguenti condizioni*

- *$X$ postula bene;*
- *$h^0(\Omega(k+1) \otimes \mathfrak{I}_X) = 0$ se $3l(X) \geq k(k+2)(k+3)/2 = h^0(\Omega(k+1))$ o $h^1(\Omega(k+1) \otimes \mathfrak{I}_X) = 0$ se $3l(X) \leq k(k+2)(k+3)/2$,*
- *$h^0(T(k-2) \otimes \mathfrak{I}_X) = 0$ se $3l(X) \geq k(k+1)(k+3)/2 = h^0(T(k-2))$ o $h^1(T(k-2) \otimes \mathfrak{I}_X) = 0$ se $3l(X) \leq k(k+1)(k+3)/2$.*

Vediamo di sfruttare questo teorema per lo schema $Z$:
abbiamo già mostrato che $Z$ postula bene calcolandone l'intera postulazione; $l(Z) = 24$, dunque il valore critico è $k = 4$. Per soddisfare il secondo punto, poiché $3l(Z) = 72 \leq 84 = h^0(\Omega(5))$, bisogna mostrare che $h^1(\Omega(5) \otimes \mathfrak{I}_Z) = 0$, ma questa è una conseguenza immediata di quanto mostrato nella sezione precedente, scrivendo infatti la seguente successione esatta

$$0 \rightarrow H^0(\Omega(5) \otimes \mathfrak{I}_Z) \rightarrow$$

$$\rightarrow H^0(\mathfrak{I}_Z(4)) \otimes R_1 \overset{\mu_4}{\rightarrow} H^0(\mathfrak{I}_Z(5)) \rightarrow H^1(\Omega(5) \otimes \mathfrak{I}_Z) \rightarrow \underbrace{H^1(\mathfrak{I}_Z(4))}_{=0} \otimes R_1 \rightarrow$$

avevamo visto che $\mu_4$ risultava suriettiva e quindi necessariamente $h^1(\Omega(5) \otimes \mathfrak{I}_Z) = 0$.
Infine, poiché $72 \geq 70 = h^0(T(2))$, ci rimane da mostrare che $h^0(T(2) \otimes \mathfrak{I}_Z) = 0$ per rientrare nelle ipotesi del teorema e poter quindi affermare che $Z$ ha la risoluzione minimale attesa.
Mostriamo quindi che $h^0(T(2) \otimes \mathfrak{I}_Z) = 0$. Per farlo premettiamo alcuni lemmi, necessari, anche in questo caso, a rendere più fluida la dimostrazione principale.

**Notazione 5.3.4.** Analogamente a quanto fatto per il fibrato cotangente, lo spazio in cui lavoreremo sarà $\mathbb{P}(T)$, dunque stabiliamo una convenzione analoga a 5.2.2; le notazioni in $\mathbb{P}^3$ saranno da intendersi in realtà in $\mathbb{P}(T)$.

Già all'interno dei lemmi si farà uso delle trasformazioni elementari, metodo che caratterizza quest'ultima sezione, per approfondimenti riguardo a tali tecniche si rimanda a [**I1** ] e [**M** ].

**Lemma 5.3.5.** *Sia $U$ lo schema formato da tre punti doppi e tre punti semplici contenuto in un piano $H$ di $\mathbb{P}^3$. Allora vale $h^0(T_H(2) \otimes \mathfrak{I}_U) = 0$.*

*Dimostrazione.* Per mostrare il risultato usiamo le trasformazioni elementari unite a m.H. Sia $L$ una retta contenuta in $H$ passante per due punti doppi di $U$.
Scriviamo la successione esatta:

$$0 \rightarrow T_H(1) \rightarrow T_H(2) \rightarrow T_H(2)_{|L} \rightarrow 0$$

Poiché sappiamo che $T_H(2)_{|L} \cong \mathcal{O}_L(4) \oplus \mathcal{O}_L(3)$ si ha il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
0 & \to & \mathcal{O}_L(4) & \to & T_H(2)_{|L} & \to & \mathcal{O}_L(3) & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \| & & \\
0 & \to & F & \to & T_H(2) & \to & \mathcal{O}_L(3) & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
 & & T_H(1) & = & T_H(1) & & & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

dove $F$ è il nucleo della mappa da $T_H(2)$ a $\mathcal{O}_L(3)$, che risulta essere un fibrato di rango due.
La prima trasformazione elementare è

$$T_H(2) \;\to\; \mathcal{O}_L(3) \;\to\; 0$$

e due punti doppi sono sufficienti ad annullare le sezioni globali di $\mathcal{O}_L(3)$, quindi basta provare $h^0(F \otimes \mathfrak{I}_R) = 0$, dove $R$ è lo schema residuo di questa prima trasformazione elementare (per i dettagli di questo passaggio vedere [**I1** ]). Per farlo specializzo un punto $P$ su $L$ e uso la seconda trasformazione elementare:

$$0 \;\to\; T_H(1) \;\to\; F \;\to\; \mathcal{O}_L(4) \;\to\; 0$$

In questo modo, poiché su $L$ ci sono due punti doppi e uno semplice, annullo tutte le sezioni globali di $\mathcal{O}_L(4)$.
Dunque il problema ora diventa mostrare $h^0(T_H(1) \otimes \mathfrak{I}_V) = 0$ dove $V$ è lo schema residuo di quest'ultima trasformazione, ovvero lo schema formato da un punto doppio, quattro punti semplici (di cui due su $L$) e un $s-$punto su $L$.
Intuitivamente quello che è accaduto in questa parte di dimostrazione è aver specializzato il punto $P$ su $L$ solo dopo la prima trasformazione elementare, in modo da non aggiungere condizioni superflue nel primo passaggio: in questo modo nello schema residuo sarà presente anche un $s-$punto che sta nella

fibra $\mathbb{P}(T_H)_P$, utilizzabile nei passaggi seguenti della dimostrazione.
Per mostrare $h^0(T_H(1) \otimes \mathfrak{I}_V) = 0$ usiamo nuovamente le trasformazioni elementari:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
0 & \to & \mathcal{O}_{\tilde{L}}(3) & \to & T_H(1)_{|\tilde{L}} & \to & \mathcal{O}_{\tilde{L}}(2) & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \| & & \\
0 & \to & F(-1) & \to & T_H(1) & \to & \mathcal{O}_{\tilde{L}}(2) & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
 & & T_H & = & T_H & & & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

dove $\tilde{L}$ è una retta passante per il punto doppio e un punto semplice, non appartenente ad $L$, di $V$.
Prima trasformazione elementare:

$$T_H(1) \;\to\; \mathcal{O}_{\tilde{L}}(2) \;\to\; 0$$

La condizione $h^0(\mathcal{O}_{\tilde{L}}(2)\otimes\mathfrak{I}_V) = 0$ è così soddisfatta. Ora specializzo l'$s-$punto (che sta su $L$) su $L\cap\tilde{L}$ in modo da soddisfare anche la condizione della seconda trasformazione elementare:

$$F(-1) \;\to\; \mathcal{O}_{\tilde{L}}(3) \;\to\; 0$$

Quello che rimane da mostrare quindi è $h^0(T_H \otimes \mathfrak{I}_W) = 0$, con $W$ schema formato da quattro punti semplici.
Ricorriamo dunque ad un nuovo utilizzo delle trasformazioni elementari,

sapendo che $T_{H\,|L} = \mathcal{O}_L(2) \oplus \mathcal{O}_L(1)$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
0 & \to & \mathcal{O}_L(2) & \to & T_{H\,|L} & \to & \mathcal{O}_L(1) & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \| & & \\
0 & \to & F(-2) & \to & T_H & \to & \mathcal{O}_L(1) & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
 & & T_H(-1) & = & T_H(-1) & & & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

Ricordando che su $L$ c'erano già due punti dello schema $W$ studiando la prima trasformazione elementare

$$T_H \;\to\; \mathcal{O}_L(1) \;\to\; 0$$

si osserva che $h^0(\mathcal{O}_L(1)\otimes\mathfrak{I}_{W\cap L}) = 0$. Specializziamo ora un punto su $L$ in modo da soddisfare anche la condizione ottenuta dalla seconda trasformazione elementare,

$$F(-2) \;\to\; \mathcal{O}_L(2) \;\to\; 0$$

ovvero annullare tutte le sezioni globali di $\mathcal{O}_L(2)$.
Lo schema residuo $G$ è quindi formato da un punto e da un $s-$punto su $L$.
Per concludere la dimostrazione dobbiamo mostrare che $h^0(T_H(-1) \otimes \mathfrak{I}_P)$.
Prendiamo una retta $L'$ che passi per il punto di $G$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
0 & \to & \mathcal{O}_{L'}(1) & \to & T_H(-1)_{|L'} & \to & \mathcal{O}_{L'} & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \| & & \\
0 & \to & K & \to & T_H(-1) & \to & \mathcal{O}_{L'} & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
 & & T_H(-2) & = & T_H(-2) & & & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

Per la prima trasformazione elementare

$$T_H(-1) \;\to\; \mathcal{O}_{L'} \;\to\; 0$$

è sufficiente il punto di $G$ che giace su $L'$ per avere $h^0(\mathcal{O}_{L'} \otimes \mathfrak{I}_G \cap L') = 0$. Specializziamo poi l'$s-$punto su $L'$ così da annullare le sezioni globali di $\mathcal{O}_{L'}(1)$, ovvero quelle della seconda trasformazione elementare

$$K \;\to\; \mathcal{O}_{L'}(1) \;\to\; 0$$

Possiamo quindi concludere la dimostrazione osservando che $h^0(T_H(-2)) = 0$. □

**Lemma 5.3.6.** *Sia $U$ lo schema formato da due punti doppi, un punto semplice e un $s-$punto contenuto in un piano $H$. Allora vale* $h^0(T_H(1) \otimes \mathfrak{I}_U) = 0$.

*Dimostrazione.* Sia $L$ una retta passante per un punto doppio e un punto semplice di $U$, scriviamo il diagramma

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
0 & \to & \mathcal{O}_L(3) & \to & T_H(1)_{|L} & \to & \mathcal{O}_L(2) & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \| & & \\
0 & \to & F(-1) & \to & T_H(1) & \to & \mathcal{O}_L(2) & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
 & & T_H & = & T_H & & & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

Dalla prima trasformazione elementare

$$T_H(1) \;\to\; \mathcal{O}_L(2) \;\to\; 0$$

si ha che $h^0(\mathcal{O}_L(2) \otimes \mathfrak{I}_{U \cap L}) = 0$, mentre per la seconda trasformazione elementare

$$F(-1) \;\to\; \mathcal{O}_L(3) \;\to\; 0$$

occorre specializzare un $s-$punto su $L$ per annullare tutte le sezioni globali. Dopo questo primo passaggio abbiamo ridotto il problema a mostrare $h^0(T_H \otimes \mathfrak{I}_V) = 0$, con $V$ schema residuo formato da un punto doppio e un punto semplice.
Applichiamo nuovamente le trasformazioni elementari prendendo $L'$ retta passante per il punto doppio di $V$ e contenuta in $H$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{O}_{L'}(2) & \rightarrow & T_{H\,|L'} & \rightarrow & \mathcal{O}_{L'}(1) & \rightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \| & & \\ 0 & \rightarrow & G & \rightarrow & T_H & \rightarrow & \mathcal{O}_{L'}(1) & \rightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\ & & T_H(-1) & = & T_H(-1) & & & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\ & & 0 & & 0 & & & & \end{array}$$

In tal modo per la prima trasformazione elementare

$$T_H \;\rightarrow\; \mathcal{O}_{L'}(1) \;\rightarrow\; 0$$

si ha $h^0(\mathcal{O}_{L'}(1) \otimes \mathfrak{I}_{V\cap L'}) = 0$. Specializzando ora il punto semplice su $L'$ si annullano le sezioni di $\mathcal{O}_{L'}(2)$ e quindi grazie alla seconda trasformazione elementare

$$F(-2) \;\rightarrow\; \mathcal{O}_{L'}(2) \;\rightarrow\; 0$$

il problema si riduce a dimostrare che $h^0(T_H(-1) \otimes \mathfrak{I}_W) = 0$, con $W$ schema formato da un punto semplice e un $s-$punto. Ma questo è già stato mostrato all'interno della dimostrazione del lemma 5.3.5.

$\square$

Possiamo ora passare a provare il risultato principale, ovvero

$$h^0(T(2) \otimes \mathfrak{I}_Z) = 0.$$

Prendiamo un piano $H$ passante per tre punti doppi di $Z$ e specializziamo su $H$ uno dei punti semplici, chiamando $\tilde{Z}$ il nuovo schema. Sapendo che $T(2)_{|H} \cong T_H(2) \oplus \mathcal{O}_H(3)$ possiamo scrivere il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
0 & \to & T_H(2) & \to & T(2)_{|H} & \to & \mathcal{O}_H(3) & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \| & & \\
0 & \to & G & \to & T(2) & \to & \mathcal{O}_H(3) & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
 & & T(1) & = & T(1) & & & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

dove $G$ è un fibrato di rango tre su $\mathbb{P}^3$.
Dalla prima trasformazione elementare

$$T(2) \ \to \ \mathcal{O}_H(3) \ \to \ 0$$

si ha che $h^0(\mathcal{O}_H(3) \otimes \mathfrak{I}_{\tilde{Z}\cap H}) = 0$.
Per la seconda trasformazione elementare

$$G \ \to \ T_H(2) \ \to \ 0$$

specializziamo altri due punti semplici su $H$, il lemma 5.3.5 ci assicura che le sezioni globali di $T_H(2)$ si annullano.
Sia quindi $Y$ lo schema residuo, ovvero lo schema formato da due punti doppi, quattro punti (di cui tre su $H$) e due $s-$punti su $H$. Dobbiamo mostrare che $h^0(T(1) \otimes \mathfrak{I}_Y) = 0$. A tale scopo prendiamo un altro piano $H'$ passante per

i due punti doppi di $Y$ e per un $s-$punto. Si ha

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
0 & \to & T_{H'}(1) & \to & T(1)_{|H'} & \to & \mathcal{O}_{H'}(2) & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \| & & \\
0 & \to & G' & \to & T(1) & \to & \mathcal{O}_{H'}(2) & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
 & & T & = & T & & & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

Due punti doppi non postulano bene, ma con l'aggiunta dell'$s-$punto si ottiene $h^0(\mathcal{O}_{H'}(2) \otimes \mathfrak{I}_{Y \cap H'}) = 0$. Quindi possiamo sfruttare la prima trasformazione

$$T(1) \ \to \ \mathcal{O}_{H'}(2) \ \to \ 0.$$

Specializziamo ora l'altro $s-$punto e il punto semplice non appartenente ad $H$ su $H'$, grazie alla seconda trasformazione

$$G' \ \to \ T_{H'}(1) \ \to \ 0$$

dobbiamo mostrare che le sezioni globali di $T_{H'}(1)$ sono annullate dallo schema formato da due punti doppi, un punto semplice e un $s-$punto, risultato mostrato in 5.3.6.

Lo schema residuo, che indicheremo con $V$, è formato da cinque punti generali, tre su $H$ e due su $H'$. Rimane quindi da mostrare che $h^0(T \otimes \mathfrak{I}_V) = 0$.

Per farlo proseguiamo con m.H. e le trasformazioni elementari

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\ 0 & \to & T_H & \to & T_{|H} & \to & \mathcal{O}_H(1) & \to & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \| & & \\ 0 & \to & G(-2) & \to & T & \to & \mathcal{O}_H(1) & \to & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\ & & T(-1) & = & T(-1) & & & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\ & & 0 & & 0 & & & & \end{array}$$

Considerando la prima trasformazione elementare

$$T \;\to\; \mathcal{O}_H(1) \;\to\; 0$$

abbiamo che $h^0(\mathcal{O}_H(1) \otimes \mathfrak{I}_{V\cap H}) = 0$. Quindi utilizzando la seconda trasformazione elementare

$$G(-2) \;\to\; T_H \;\to\; 0$$

e specializziamo un punto su $H$; abbiamo già visto, com pasaggio della dimostrazione di 5.3.5, che le sezioni di $T_H$ nulle su quattro punti sono nulle, quindi ci siamo ridotti a mostrare $h^0(T(-1) \otimes \mathfrak{I}_W) = 0$ dove $W$ è formato da un punto semplice e da un $s-$punto.
Concludiamo la dimostrazione mostrando proprio quest'ultima cosa

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\ 0 & \to & T_K(-1) & \to & T(-1)_{|K} & \to & \mathcal{O}_K & \to & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \| & & \\ 0 & \to & Q & \to & T(-1) & \to & \mathcal{O}_K & \to & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\ & & T(-2) & = & T(-2) & & & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\ & & 0 & & 0 & & & & \end{array}$$

dove $K$ è un piano passante per il punto semplice. Nella prima trasformazione elementare:

$$T(-1) \rightarrow \mathcal{O}_K \rightarrow 0$$

per annullare le sezioni globali di $\mathcal{O}_K$ basta il punto, infine specializzando l'$s-$punto su $K$ abbiamo anche che le sezioni globali di $T_H(-1)$ si annullano, come visto prima. La condizione $h^0(T(-2)) = 0$ fa concludere l'intera dimostrazione.

Scriviamo quindi la risoluzione libera minimale di $Z$, che è quella aspettata, ottenuta senza aver esplicitato in alcun modo il suo ideale associato:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-7)^4 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-5)^{12} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-6)^2 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)^{11} \rightarrow \mathfrak{I}_Z \rightarrow 0$$

# Bibliografia

[AH] J. Alexander and A. Hirschowitz, *Polynomial interpolation in several variables*, J. Alg. Geom. 4 (1995), 201-222.

[AH1] J. Alexander and A. Hirschowitz, *An asymptotic vanishing theorem for generic unions of multiple points*, Invent. math. 140 (2000), 303-325

[AM] M. F. Atiyah - I. G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley publishing company, 1969

[BI] E. Ballico and M. Idà, *On the minimal free resolution for fat point schemes of multiplicity at most 3 in* $\mathbb{P}^2$, preprint 2006.

[Ca] M.V. Catalisano, *Fat points on a conic*, Comm. Algebra 19 (1991), 2153-2168.

[CCMO] C. Ciliberto, F. Cioffi, R. Miranda and F. Orecchia. *Bivariate Hermite interpolation and linear systems of plane curves with base fat points*, in: Computer mathematics, 87-102, Lecture Notes Ser. Comput., 10, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2003.

[E] L. Evain, *Computing limit linear series with infinitesimal methods*, preprint 2004 (arXiv:math.AG/0407143).

[Ei] D. Eisenbud, *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, graduate text in Math. Springer-Verlag, 1995.

[F3] S. Fitchett, *Maps of linear systems on blow ups of the Projective Plane*, J. Pure Appl. Algebra 156 (2001), 1-14.

[FHH] S. Fitchett, B. Harbourne and S. Holay, *Resolutions of Fat Point Ideals Involving Eight General Points of* $\mathbb{P}^2$, J. Algebra 244 (2001), 684-705.

[GM] A.V. Geramita and P. Maroscia, *The ideal of forms vanishing at a finite set of points in* $\mathbb{P}^n$, J.Algebra 90 (1984), 528-555.

[Gi] A. Gimigliano, *On linear systems of plane curves*, Thesis, Queen's University, Kingston (1987).

[GHI1] A. Gimigliano, B. Harbourne and M. Idà, *Betti numbers for fat point ideals in the plane: a geometric approach*, ArXiv:math.AG/0706.2588. Transactions of the American Mathematical Society 361 (2009), no. 2, 1103–1127.

[GHI2] A. Gimigliano, B. Harbourne and M. Idà, *The role of the cotangent bundle in resolving ideals of fat points in the plane.* ArXiv:math.AG/0706.2144. J. Pure Appl. Algebra 213 (2009) pp. 203–214.

[GHI3] A. Gimigliano, B. Harbourne and M. Idà, *Stable postulation and stable ideal generation: conjectures for fat points in the plane.* Proceedings of the Workshop on Linear Systems and Subschemes (Ghent 2007). Bulletin of the Belgian Math. Soc. Simon Stevin 16 (2009), pp. 1– 8.

[GI] A. Gimigliano and M. Idà, *The ideal resolution for generic 3-fat points in* $\mathbb{P}^2$, J. Pure Appl. Algebra 187 (2004), no. 1-3, 99-128.

[HJ] J. Harris, *Algebraic Geometry. A first course*, New York, Springer, 1992.

[Ha2] B. Harbourne, *The Ideal Generation Problem for Fat Points*, J. Pure Appl. Alg. 145(2), 165-182 (2000).

[Ha3] B. Harbourne, *Anticanonical rational surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 349, 1191-1208 (1997).

[Ha4] B. Harbourne, *The Geometry of rational surfaces and Hilbert functions of points in the plane*. Can. Math. Soc. Conf. Proc., vol. 6 (1986), 95-111.

[Ha6] B. Harbourne, *An Algorithm for Fat Points on* $\mathbb{P}^2$, Can. J. Math. 52 (2000), 123-140.

[Hr] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, New York, Springer, 1977.

[HR] B. Harbourne and J. Roé. *Linear systems with multiple base points in* $\mathbb{P}^2$, Adv. Geom. 4 (2004), 41-59.

[HHF] B. Harbourne, S. Holay and S. Fitchett, *Resolutions of ideals of quasiuniform fat point subschemes of* $\mathbb{P}^2$, Trans. Amer. Math. Soc. 355 (2003), no. 2, 593-608.

[Hi1] A. Hirschowitz, *La Méthode d'Horace pour l'interpolation à plusieurs variables*, Manuscripta Math. **50** (1985), 337-388.

[Hi2] A. Hirschowitz, *Une conjecture pour la cohomologie des diviseurs sur les surfaces rationelles génériques*, Journ. Reine Angew. Math. 397 (1989), 208-213.

[HS] A.Hirschowitz and C. Simpson, *La resolution minimale de l'ideal d'une arrangement general d'un grand nombre de points dans* $\mathbb{P}^n$, Invent. Math. 126 (1996), 467-503.

[I1] M. Idà, *On the homogeneous ideal of the generic union of lines in* $\mathbb{P}^3$, J.Reine Angew.Math. 403 (1990), 67-153.

[I2] M. Idà, *The minimal free resolution for the first infinitesimal neighborhoods of n general points in the plane*, J. Alg. 216 (1999), 741-753.

[I3] M. Idà, *Generators for the generic rational space curve: low degree cases.* Lecture Notes in Pure and Applied Math. Dekker 206 (1999), 169-210.

[LA] S. Lang, *Algebra 3rd edition*, New York, Springer, 2002

[M] M. Maruyama, *Elementary transformation in the theory of algebraic vector bundles*, Algebraic Geometry, Proc. La Rabida 1981, Lect. Notes in Math. 961, Berlin-Heidelberg-New York 1982.

[Mi] T. Mignon, *Systèmes de courbes planes à singularités imposées: le cas des multiplicités inférieures ou égales à quatre*, J. Pure Appl. Algebra 151 (2000), no. 2, 173-195.

[Mu2] D. Mumford, *Lectures on curves on an algebraic surface*, Princeton 1966.

[N] M. Nagata, *On rational surfaces, II*, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A Math. 33 (1960), 271-293.

[OSS] C. Okonek, M. Schneider, H. Spindler, *Vector bundles on Complex Projective Spaces*, Progress in Mathematics, No. 3. Birkhauser, Boston, Basel, Stuttgart 1980.

[P] D. Perrin, *Géométrie algébrique. Une Introduction* , InterEditions et CNRS Editions, 1995.

[S] B. Segre, *Alcune questioni su insiemi finiti di punti in Geometria Algebrica*, Atti del Convegno Internaz. di Geom. Alg., Torino (1961).

[Sa] P. Samuel,*Théorie algébrique des nombres*, Hermann, 1967.

[SH] I. R. Shafarevich,*Basic Algebraic Geometry*, New York, Springer, 1977.

[Y] S. Yang, *Linear systems in* $\mathbb{P}^2$ *with base points of bounded multiplicity*, J. Algebraic Geometry 16 (2007), 19-38 (arXiv:math.AG/0406591).

[ZS] O. Zariski - P. Samuel, *Commutative Algebra vol. 2*, D. Van Nostrand Company Inc, 1960