ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Soluzioni classiche e viscose dell'equazione di curvatura di Gauss-Levi

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Ermanno Lanconelli

Presentata da:
Valentina Franceschi

Seconda Sessione
Anno Accademico 2011/2012

Al mio piccolo genio,
A nonno Sergio.

"Sapere che esiste qualcosa di impenetrabile,
conoscere le manifestazioni dell'intelletto più profondo
e della bellezza più luminosa,
che sono accessibili alla nostra ragione solo nelle forme primitive,
questa conoscenza e questo sentimento, ecco la vera devozione."
(A. Einstein)

Introduzione

Sia D aperto di $\mathbb{C}^{n+1}$ con $n \geq 1$, sottoinsieme di livello di una funzione $f : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{R}$ di classe (almeno) C^2:

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C}^{n+1} \, / f(z) < 0 \right\}.$$

Supponiamo $\partial_z f \neq 0$ in ogni punto $z \in \mathbb{C}^{n+1}$ tale che $f(z) = 0$. Allora

$$\partial D := \left\{ z \in \mathbb{C}^{n+1} \, / f(z) = 0 \right\}$$

è la frontiera topologica di D ed è una varietà reale $(2n+1)-$dimensionale di $\mathbb{R}^{2n+2}$. Qui, e nel seguito, identifichiamo $\mathbb{C}^{n+1}$ con $\mathbb{R}^{2n+2}$ ed indichiamo con $\partial_z f$ il gradiente complesso di f nel punto z:

$$\partial_z f := \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}(z), \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_{n+1}}(z) \right).$$

Il punto z di $\mathbb{C}^{n+1}$ viene e verrà indicato con $(z_1, \ldots, z_{n+1})$, $z_j = x_j + iy_j$ per $j = 1, \ldots, n+1$.
Fissato $z \in \partial D$, si considera la matrice Hessiana complessa di f in z

$$\mathscr{H}_f(z) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial_{\partial z_j \partial \overline{z_k}}}(z) \right)_{j,k=1,\ldots n+1}, \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z_k}} = \overline{\frac{\partial f}{\partial z_k}}.$$

Si chiama spazio tangente complesso a ∂D in z lo spazio vettoriale

$$T_z^{\mathbb{C}}(\partial D) := \left\{ h \in \mathbb{C}^{n+1} \Bigg/ \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial f}{\partial z_j} h_j = 0 \right\}$$

Si riconosce senza difficoltà che

$$T_z^{\mathbb{C}}(\partial D) = T_z^{\mathbb{R}}(\partial D) \cap i T_z^{\mathbb{R}}(\partial D)$$

ove $T_z^{\mathbb{R}}(\partial D)$ indica lo spazio tangente reale alla varietà ∂D nel punto z.
Lo spazio tangente $T_z^{\mathbb{C}}(\partial D)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ di dimensione (complessa) n.
Sia ora $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ una base ortonormale di $T_z^{\mathbb{C}}(\partial D)$. Se indichiamo con $\langle\ ,\ \rangle$ il prodotto Hermitiano ordinario in $\mathbb{C}^{n+1}$, $\langle w, z\rangle = \sum_{j=1}^{n+1} w_j \overline{z_j}$, la matrice

$$L_z(\partial D) := \left(\langle \mathscr{H}_f(z) u_j, u_k\rangle\right)_{j,k=1,\dots,n}$$

è una matrice Hermitiana, chiamata matrice di Levi di f in z. Gli autovalori di $L_z(\partial D)$ sono tutti reali. Se li indichiamo con $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, si pone

$$k_z(\partial D) = \text{ curvatura di Gauss-Levi di } \partial D = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n.$$

Si dimostra che $k_z(\partial D)$ è indipendente dalla scelta della base B e della funzione definente f di D. Essa è quindi un numero reale dipendente esclusivamente dal bordo del dominio D e dal punto $z \in D$.
Questa nozione di curvatura è stata introdotta fra la fine degli anni '70 e i primi anni '80, da Bedford e Gaveau, e da Slodkowski e Tomassini, si veda, per esempio [10]. Nella forma qui presentata, la definizione di curvatura di Gauss-Levi è stata data da Montanari e Lanconelli in [7].
Nella presente Tesi ci siamo occupati di soluzioni viscose per operatori ellittici, in particolare per l'equazione di curvatura di Gauss-Levi.
Nel Capitolo I abbiamo anzitutto definito la classe degli operatori ellittici degeneri. Occupandoci di studiare le proprietà delle loro sottosoluzioni classiche, abbiamo individuato la nozione che ci ha portato a definire il concetto di sottosoluzione e di soluzione viscosa. Successivamente abbiamo dimostrato il Principio del Confronto per le soluzioni viscose di operatori propri, importante risultato che ci ha permesso di dimostrare attraverso il Metodo di Perron l'esistenza ed unicità della soluzione viscosa per il Problema di Dirichlet ad essi correlato. Infine, abbiamo riportato alcuni esempi di operatori ellittici a cui si applica il concetto di soluzione viscosa, evidenziando, in alcuni casi, analogie con tipi di soluzione già note. Per i risultati riportati in questo capitolo si è per lo più fatto riferimento al lavoro *User's guide to*

viscosity solutions of second order partial differential equations di Crandall, Ishii e Lions.
Nel Capitolo II ci siamo dapprima occupati di fornire gli strumenti per definire la forma di Levi e la matrice di Levi dell'ipersuperficie reale ∂D di $\mathbb{C}^{n+1}$, bordo del dominio D. Trovando un risultato di indipendenza della matrice di Levi dalla funzione definente, siamo quindi riusciti a definire la nozione di curvatura totale o curvatura di Gauss-Levi in un punto $k_z(\partial D)$. Una sua caratterizzazione, che coinvolge una particolare espressione degli autovalori della forma di Levi, ci ha permesso di introdurre un'equazione differenziale totalmente non lineare, corrispondente alla ricerca di un dominio di $\mathbb{C}^{n+1}$ con curvatura di Gauss-Levi assegnata. Tale equazione prende il nome di equazione di curvatura di Gauss-Levi o equazione di Levi Monge-Ampere per l'analogia con l'equazione di Monge-Ampere legata alle curvature euclidee. Grazie ad una riscrittura della matrice di Levi abbiamo potuto riconoscere l'equazione di curvatura come un'equazione ellittica degenere, considerazione che ci ha portato a definire anche in questo caso le soluzioni in senso viscoso. Come nel capitolo precedente dimostriamo il Principio del Confronto per una soprasoluzione ed una sottosoluzione viscose del Problema di Dirichlet legato all'equazione di Levi Monge-Ampère, che sfrutta in questo caso una proprietà chiamata perdita di condizioni al bordo. Grazie a tale principio e al Metodo di Perron siamo stati di nuovo in grado di garantire esistenza ed unicità della soluzione viscosa del Problema di Dirichlet per l'equazione di curvatura di Levi. Per i risultati di questo capitolo si è principalmente fatto riferimento ai lavori *Pseudoconvex fully nonlinear partial differential operators. Strong comparison theorems* di Montanari e Lanconelli e *Existence and Uniqueness of Lipschitz continuous graphs with prescribed Levi curvature* di Da Lio e Montanari.
Nel Capitolo III riportiamo invece risultati inerenti alla regolarità delle soluzioni viscose per l'equazione di curvatura di Levi. In particolare si impone una netta differenza tra $n = 1$ e $n \geq 2$: nel primo caso infatti è valido un risultato di regolarità C^∞ per le soluzioni viscose, che negli altri casi risulta

falso. Per i risultati riportati in questo capitolo si è infine fatto riferimento ai lavori *The Levi Monge-Ampère equation: smooth regularity of strictly Levi convex solutions* di Montanari e Lascialfari e *Nonsmooth hypersurfaces with smooth Levi curvature* di Gutiérrez, Lanconelli e Montanari.

Indice

Capitolo 1

Soluzioni viscose di PDE del second'ordine

1.1 Nozione di soluzione viscosa

Consideriamo l'equazione differenziale

$$F(x, u, Du, D^2u) = 0 \tag{1.1}$$

con $F : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathscr{S}(N) \to \mathbb{R}$ dove $\mathscr{S}(N)$ è l'insieme delle matrici reali simmetriche $N \times N$. In (1.1) u è una funzione definita su un sottoinsieme $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^N$, Du indica il suo gradiente e D^2u la matrice delle sue derivate seconde. Attraverso la nozione di soluzione viscosa, consentiremo ad una funzione solo continua di risolvere l'equazione (1.1).
Considereremo operatori F per cui valgano le ipotesi:

$$F(x, r, p, X) \leq F(x, s, p, X) \;\forall\, r \leq s \tag{H1}$$

$$F(x, r, p, X) \leq F(x, r, p, Y) \;\forall\, Y \leq X \tag{H2}$$

L'ipotesi (H2) è detta di ellitticità degenere. In essa per $X \leq Y$ si intende che la matrice simmetrica $X - Y$ è semidefinita positiva. Nel caso in cui valgano entrambe le ipotesi si dice che F è propria (o che è un operatore proprio).

Un modo per definire una soluzione debole è quello di trovare proprietà delle soluzioni classiche e poi usarle come definizione. Consideriamo in quest'ottica il caso $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$.

Richiamiamo la seguente notazione:

$$f(x) \leq o(|x|^k) \text{ per } x \to 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \omega \in C([0,+\infty)\,,[0,+\infty)) \text{ tale che } \omega(0)=0, \\ \sup_{x\in B_r\setminus\{0\}} \dfrac{f(x)}{|x|^k} \leq \omega(r)\ \forall r>0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Osservazione 1.1. Sia $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ sottosoluzione classica di $F=0$ in $\mathbb{R}^N$ (i.e. $F(x,u(x),Du(x),D^2u(x)) \leq 0\ \forall x \in \mathbb{R}^N$). Siano poi $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^N)$ e $\hat{x} \in \mathbb{R}^N$ punto di massimo locale per $u-\varphi$, allora $D(u-\varphi)(\hat{x})=0$ e $D^2(u-\varphi)(\hat{x}) \leq 0$, cioè $Du(\hat{x}) = D\varphi(\hat{x})$ e $D^2u(\hat{x}) = D^2\varphi(\hat{x})$. Applicando l'ipotesi (H2) risulta dunque:

$$F(\hat{x},u(\hat{x}),D\varphi(\hat{x}),D^2\varphi(\hat{x})) \leq F(\hat{x},u(\hat{x}),Du(\hat{x}),D^2u(\hat{x})) \leq 0.$$

In definitiva, se $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ è sottosoluzione classica di $F=0$ in $\mathbb{R}^N$, allora $\forall \varphi \in C^2(\mathbb{R}^N)$, $\forall \hat{x}$ punto di massimo locale per $u-\varphi$ in $\mathbb{R}^N$, vale $F(\hat{x},u(\hat{x}),D\varphi(\hat{x}),D^2\varphi(\hat{x})) \leq 0$.
Di più, essendo $\hat{x}$ punto di massimo locale di $u-\varphi$, in un intorno di $\hat{x}$ in $\mathbb{R}^N$, vale $u(x) \leq u(\hat{x}) - \varphi(\hat{x}) + \varphi(x)$ e sviluppando al second'ordine il membro di destra otteniamo:

$$u(x) \leq u(\hat{x}) + \langle D\varphi(\hat{x}), x-\hat{x}\rangle + \frac{1}{2}\langle D^2\varphi(\hat{x})(x-\hat{x}), x-\hat{x}\rangle + o(|x-\hat{x}|^2) \text{ per } x \to \hat{x} \tag{1.3}$$

dove $\langle\cdot,\cdot\rangle$ indica il prodotto scalare usuale in $\mathbb{R}^N$.
Consideriamo ora $p \in \mathbb{R}^N$, $X \in \mathscr{S}(N)$ tali che valga

$$u(x) \leq u(\hat{x}) + \langle p, x-\hat{x}\rangle + \frac{1}{2}\langle X(x-\hat{x}), x-\hat{x}\rangle + o(|x-\hat{x}|^2) \text{ per } x \to \hat{x}. \tag{1.4}$$

Si ha, poiché $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$:

- $p = Du(\hat{x})$. Infatti, fissiamo $j = 1,\dots,N$ (indicheremo con e_j il j-mo vettore della base canonica, $e_j = (0,\dots,\overset{j\downarrow}{1},\dots,0)$ e con p_j la j-ma componente del vettore p). Osservando che $\hat{x} \pm te_j \to \hat{x}$ per $0 < t \to 0$, da (1.4) si ha, per $t \to 0^+$

$$\begin{aligned} u(\hat{x}+te_j) - u(\hat{x}) &\leq \langle p, te_j\rangle + o(|\hat{x}+te_j-\hat{x}|) = tp_j + o(t) \\ u(\hat{x}-te_j) - u(\hat{x}) &\leq \langle p, -te_j\rangle + o(|\hat{x}+te_j-\hat{x}|) = -tp_j + o(t) \end{aligned}$$

da cui, dividendo ambo i membri per $t > 0$ ed osservando che u differenziabile in $\hat{x}$ implica $\frac{u(\hat{x}+te_j)-u(\hat{x})}{t}, \frac{u(\hat{x})-u(\hat{x}-te_j)}{t} \overset{t\to 0^+}{\to} \frac{\partial u}{\partial x_j}(\hat{x})$, si ricava $\frac{\partial u}{\partial x_j}(\hat{x}) = p_j$.

- $D^2u(\hat{x}) \leq X$. Infatti, sviluppando in $\hat{x}$ il primo membro di (1.4) fino al second'ordine, si ottiene per $x \to \hat{x}$:

$$u(\hat{x}) + \langle Du(\hat{x}), x-\hat{x}\rangle + \frac{1}{2}\langle D^2u(\hat{x})(x-\hat{x}), x-\hat{x}\rangle + o(|x-\hat{x}|^2) \leq$$
$$u(\hat{x}) + \langle p, x-\hat{x}\rangle + \frac{1}{2}\langle X(x-\hat{x}), x-\hat{x}\rangle + o(|x-\hat{x}|^2).$$

  Applicando il punto precedente ($p = Du(\hat{x})$), otteniamo la tesi.

In definitiva, applicando l'ipotesi (H2), se $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ è sottosoluzione classica di $F = 0$ in $\mathbb{R}^N$, allora $\forall (p, X) \in \mathbb{R}^N \times \mathscr{S}(N)$ tale che valga (1.4), vale $F(\hat{x}, u(\hat{x}), p, X) \leq 0$.

L'idea è quella di usare il risultato trovato nell'osservazione (1.1) per definire la nozione di soluzione viscosa per funzioni solo continue. A tale scopo diamo le seguenti definizioni:

Definizione 1.1. (Superjet e Subjet.) Siano $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^N$, $u : \mathscr{O} \to \mathbb{R}$, $\hat{x} \in \mathscr{O}$. Definiamo gli insiemi:

$$J^{2,+}_{\mathscr{O}}u(\hat{x}) := \left\{ (p,X)\in\mathbb{R}^N\times\mathscr{S}(N) \middle/ \begin{array}{l} u(x) \leq u(\hat{x}) + \langle p, x-\hat{x}\rangle + \\ +\frac{1}{2}\langle X(x-\hat{x}), x-\hat{x}\rangle + o(|x-\hat{x}|^2) \end{array} \text{ per } \mathscr{O} \ni x \to \hat{x}, \right\}$$

detto Superjet di second'ordine di u in $\hat{x}$ e

$$J^{2,-}_{\mathscr{O}}u(\hat{x}) := \left\{ (p,X)\in\mathbb{R}^N\times\mathscr{S}(N) \middle/ \begin{array}{l} u(x) \geq u(\hat{x}) + \langle p, x-\hat{x}\rangle + \\ +\frac{1}{2}\langle X(x-\hat{x}), x-\hat{x}\rangle + o(|x-\hat{x}|^2) \end{array} \text{ per } \mathscr{O} \ni x \to \hat{x}, \right\}$$

detto Subjet di second'ordine di u in $\hat{x}$.

Osservazione 1.2. Se $\hat{x}$ è un punto interno ad $\mathscr{O}$ ed Ω contemporaneamente, allora $J^{2,+}_{\mathscr{O}}u(\hat{x}) = J^{2,+}_{\Omega}u(\hat{x})$.

Dimostrazione. Esiste per ipotesi $\varepsilon > 0$ tale che $B(\hat{x},\varepsilon) \subset \mathscr{O} \cap \Omega$. Fare il limite $\mathscr{O} \ni x \to \hat{x}$ è quindi come fare il limite $B(\hat{x},\varepsilon) \ni x \to \hat{x}$, che allo stesso modo è equivalente a $\Omega \ni x \to \hat{x}$. □

Possiamo quindi definire $J^{2,+}u(\hat{x})$ come l'insieme $J^{2,+}_{\mathscr{O}}u(\hat{x})$ con $\hat{x}$ interno ad $\mathscr{O}$.

Proposizione 1.3.

$$J^{2,+}_{\mathscr{O}}u(\hat{x}) = \left\{ (D\varphi(\hat{x}), D^2\varphi(\hat{x})) \middle/ \begin{array}{l} \varphi \in C^2 \textit{ tale che } u - \varphi \textit{ ha massimo locale} \\ \textit{relativamente a } \mathscr{O} \textit{ in } \hat{x} \end{array} \right\}$$

Dimostrazione. ($\supset$) Sia $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^N)$ tale che $u - \varphi$ ha massimo relativamente a $\mathscr{O}$ in $\hat{x}$. Essendo $\hat{x}$ massimo locale relativamente ad $\mathscr{O}$, esiste un intorno U di $\hat{x}$ in $\mathscr{O}$, tale che $u(x) \leq u(\hat{x}) - \varphi(\hat{x}) + \varphi(x)$ per $x \in U$. D'altra parte, sviluppando il secondo membro, di classe C^2 su U, si ottiene:

$$u(x) \leq u(\hat{x}) + \langle D\varphi(\hat{x}), (x-\hat{x})\rangle + \langle D^2\varphi(\hat{x})(x-\hat{x}), (x-\hat{x})\rangle + o(|x-\hat{x}|^2)$$
$$\text{per } x \to \hat{x} \text{ in } \mathscr{O}.$$

($\subset$) Sia $(p, X) \in J^{2,+}_{\mathscr{O}}u(\hat{x})$, allora per $x \to \hat{x}$

$$u(x) \leq u(\hat{x}) + \langle p, (x-\hat{x})\rangle + \langle X(x-\hat{x}), x-\hat{x}\rangle + o(|x-\hat{x}|^2).$$

Per la definizione di opiccolo data dalla relazione (1.2), possiamo trovare una funzione continua crescente $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ tale che

$$u(x) \leq u(\hat{x}) + \langle p, (x-\hat{x})\rangle + \langle X(x-\hat{x}), x-\hat{x}\rangle + |x-\hat{x}|^2\omega(|x-\hat{x}|).$$

Infatti, esiste $\omega_0(r)$ continua tale che

$$\omega_0(r) \geq \sup_{B_r(\hat{x})\setminus\hat{x}} \frac{u(x) - u(\hat{x}) - \langle p, (x-\hat{x})\rangle - \langle X(x-\hat{x}), x-\hat{x}\rangle}{|x-\hat{x}|^2}$$

e ponendo $\omega(r) := \sup_{0\le\rho\le r}\omega_0(\rho)$ si ottiene la relazione cercata.
Poniamo dunque

$$\varphi(x) := \langle p, (x-\hat{x})\rangle + \langle X(x-\hat{x}), x-\hat{x}\rangle + o(|x-\hat{x}|^2) + \psi(|x-y|)$$

ove $\psi(r) := \int_r^{\sqrt{3}r}\int_s^{2s}\omega(\rho)\,d\rho \ge r^2\omega(r)$. Tale φ è C^2 e verifica:

$$(D\varphi(\hat{x}), D^2\varphi(\hat{x})) = (p, X)\ u(x) - \varphi(x) \le u(\hat{x}) - \varphi(\hat{x}).$$

□

Definiamo la chiusura del superjet come segue:

$$\overline{J^{2,+}_{\mathscr{O}}u(x)} = \left\{ (p,X)\in\mathbb{R}^N\times\mathscr{S}(N) \Big/ \begin{array}{l} \exists(x_n,p_n,X_n)\in\mathscr{O}\times\mathbb{R}^N\times\mathscr{S}(N)\ : \\ (p_n,X_n)\in J^{2,+}_{\mathscr{O}}u(x_n), \\ (x_n,u(x_n),p_n,X_n)\to(x,u(x),p,X) \end{array} \right\} \tag{1.5}$$

e analogamente quella del subjet.

Denotiamo nella maniera seguente le funzioni superiormente semicontinue e inferiormente semicontinue rispettivamente:

$$\begin{aligned} USC(\mathscr{O}) &:= \left\{ f:\mathscr{O}\to\mathbb{R} \Big/ \limsup_{x\to x_0} f(x)\le f(x_0) \right\} \\ LSC(\mathscr{O}) &:= \left\{ f:\mathscr{O}\to\mathbb{R} \Big/ \liminf_{x\to x_0} f(x)\ge f(x_0) \right\} \end{aligned}$$

Definizione 1.2. (Soluzione (Sopra-, Sotto-) viscosa.) Siano $\mathscr{O}\subset\mathbb{R}^N$ e $F:\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\times\mathscr{S}(N)\to\mathbb{R}$ un operatore proprio (valgono cioè le ipotesi (H1) e (H2)). Una sottosoluzione (risp. soprasoluzione) viscosa di $F=0$ in $\mathscr{O}$ è una funzione $u\in USC(\mathscr{O})$ (risp. $v\in LSC(\mathscr{O})$) tale che valga

$$F(x,u(x),p,X)\le 0\ \forall(p,X)\in J^{2,+}_{\mathscr{O}}u(x)\ \forall x\in\mathscr{O}.$$

(risp. $F(x,u(x),p,X)\ge 0\ \forall(p,X)\in J^{2,-}_{\mathscr{O}}v(x)\ \forall x\in\mathscr{O}$.)
Diciamo che $u:\mathscr{O}\to\mathbb{R}$ è soluzione viscosa di $F=0$ in $\mathscr{O}$ se è contemporaneamente soprasoluzione e sottosoluzione.

Proposizione 1.4. *Siano u sottosoluzione viscosa e v soprasoluzione viscosa di $F = 0$ in $\mathscr{O}$.*

- *Se $F \in LSC(\mathscr{O})$, allora $F(x, u(x), p, X) \leq 0$ $\forall (p, X) \in \overline{J^{2,+}_{\mathscr{O}} u(x)}$ $\forall x \in \mathscr{O}$*
- *Se $F \in USC(\mathscr{O})$, allora $F(x, v(x), p, X) \geq 0$ $\forall (p, X) \in \overline{J^{2,-}_{\mathscr{O}} v(x)}$ $\forall x \in \mathscr{O}$*

Dimostrazione. Dimostriamo il primo punto, essendo il secondo analogo. Fissiamo $x \in \mathscr{O}$, $(p, X) \in \overline{J^{2,+}_{\mathscr{O}} u(x)}$ e scegliamo (x_n, p_n, X_n) come nella (1.5). Così, usando prima la semicontinuità inferiore di F poi la definizione di sottosoluzione viscosa (1.2), possiamo scrivere:

$$F(x, u(x), p, X) \leq \liminf_{n \to \infty} F(x_n, u(x_n), p_n, X_n) \leq F(x_n, u(x_n), p_n, X_n) \leq 0$$

dove la penultima disuguaglianza vale per ogni n. □

Proposizione 1.5. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto e $u \in C^2(\Omega)$. Allora u è sottosoluzione (rispettivamente soprasoluzione, soluzione) viscosa di $F = 0$ in Ω se e solo se u è sottosoluzione (rispettivamente soprasoluzione, soluzione) classica.*

Dimostrazione. Il fatto che una (sopra-, sotto-)soluzione classica sia una (sopra-, sotto-)soluzione viscosa è giustificato nell'osservazione 1.1. Dimostriamo il viceversa. Sia $\hat{x} \in \Omega$ fissato.
Osserviamo dapprima che u è due volte differenziabile in $\hat{x}$ se e solo se $J^2 u(\hat{x}) := J^{2,+} u(\hat{x}) \cap J^{2,-} u(\hat{x}) \neq \emptyset$ e in questo caso

$$J^2 u(\hat{x}) = \left\{ (Du(\hat{x}), D^2 u(\hat{x})) \right\}. \tag{1.6}$$

Infatti:

($\Rightarrow$) ovvio perché, sviluppando u in $\hat{x}$ fino al second'ordine, si vede $(Du(\hat{x}), D^2 u(\hat{x})) \in J^2 u(\hat{x})$.

($\Leftarrow$) esiste $(p, X) \in J^{2,+} u(\hat{x}) \cap J^{2,-} u(\hat{x})$ quindi tale che

$$\begin{aligned} u(x) &\leq u(\hat{x}) + \langle p, x - \hat{x} \rangle + \frac{1}{2} \langle X(x - \hat{x}), x - \hat{x} \rangle + o(|x - \hat{x}|^2) \\ u(x) &\geq u(\hat{x}) + \langle p, x - \hat{x} \rangle + \frac{1}{2} \langle X(x - \hat{x}), x - \hat{x} \rangle + o(|x - \hat{x}|^2) \end{aligned}$$

quindi dal calcolo elementare: $p = Du(\hat{x})$ e $X \geq D^2u(\hat{x})$ dalla prima, $X \leq D^2u(\hat{x})$ dalla seconda, quindi $X = D^2u(\hat{x})$.

Torniamo a dimostrare la proposizione. Poiché u è sottosoluzione viscosa e $\hat{x} \in \Omega$, $F(\hat{x}, u(\hat{x}), p, X) \leq 0 \, \forall (p, X) \in J^{2,+}_{\Omega} u(\hat{x})$, ma per (1.6), $\{(Du(\hat{x}), D^2u(\hat{x}))\} = J^2u(\hat{x}) \subset J^{2,+}u(\hat{x})$ e quindi, $F(\hat{x}, u(\hat{x}), Du(\hat{x}), D^2u(\hat{x})) \leq 0$. $\square$

1.2 Principio del confronto

Sia F un operatore proprio su $\mathbb{R}^N$ e sia Ω aperto limitato in $\mathbb{R}^N$. Vogliamo trovare un risultato di questo tipo:

$$\left.\begin{array}{r} u \in USC(\overline{\Omega}) \text{ sottosoluzione viscosa di } F = 0 \text{ in } \Omega \\ v \in LSC(\overline{\Omega}) \text{ soprasoluzione viscosa di } F = 0 \text{ in } \Omega \\ u \leq v \text{ in } \partial\Omega \end{array}\right\} \Rightarrow \; u \leq v \text{ in } \overline{\Omega}.$$

Occupiamoci dapprima del caso $u, v \in C^2(\Omega)$. Osserviamo anzitutto che per la proposizione (1.5), u e v sono rispettivamente sottosoluzione e soprasoluzione classiche di $F = 0$ in Ω. Definiamo $w := u - v$: vogliamo vedere $w \leq 0$ in $\overline{\Omega}$, sapendo $w \leq 0$ in $\partial\Omega$.
Poiché w è continua sul compatto $\overline{\Omega}$, esiste $\max_{\overline{\Omega}} w = w(\hat{x})$. Se $\hat{x} \in \partial\Omega$ allora $w \leq 0$ perché $w \leq 0$ in $\partial\Omega$. Supponiamo quindi $\hat{x} \in \Omega$, ne viene $Du(\hat{x}) = Dv(\hat{x})$ e $D^2u(\hat{x}) \leq D^2v(\hat{x})$. Mettiamo tutto insieme sfruttando anche l'ipotesi (H2) di ellitticità degenere di F

$$\begin{aligned} F(\hat{x}, u(\hat{x}), Du(\hat{x}), D^2u(\hat{x})) \leq 0 \;\; &\leq \;\; F(\hat{x}, v(\hat{x}), Dv(\hat{x}), D^2v(\hat{x})) \\ &\leq \;\; F(\hat{x}, v(\hat{x}), Du(\hat{x}), D^2u(\hat{x})). \end{aligned}$$

Da cui $F(\hat{x}, u(\hat{x}), Du(\hat{x}), D^2u(\hat{x})) - F(\hat{x}, v(\hat{x}), Du(\hat{x}), D^2u(\hat{x})) \leq 0$. Per l'ipotesi (H1) di monotonia di F, vale quindi $w(\hat{x}) \leq 0$, ma $\hat{x}$ è di massimo per w quindi $w \leq 0$ in $\overline{\Omega}$.

Supponiamo ora che $u \in USC(\overline{\Omega})$, $v \in LSC(\overline{\Omega})$ e dimostriamo il seguente teorema:

Teorema 1.6 (Principio del confronto). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto limitato. Supponiamo $F \in C(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathscr{S}(N))$ e propria (valgono cioè le ipotesi (H1), (H2)). Supponiamo poi:*

$$\begin{array}{l} \exists \gamma > 0 : \gamma(r-s) \leq F(x,r,p,X) - F(x,s,p,X) \\ \forall r \geq s, x \in \Omega, p \in \mathbb{R}^N, X \in \mathscr{S}(N) \end{array} \tag{H3}$$

$$\begin{array}{l} \exists \omega : [0,+\infty] \to [0,+\infty], \omega(0^+) = 0 : \text{ per ogni } \alpha > 0 \\ F(y,r,\alpha(x-y),Y) - F(x,r,\alpha(x-y),X) \leq \omega(\alpha|x-y|^2 + |x-y|) \\ \forall x,y \in \Omega \ r \in \mathbb{R}, X,Y \in \mathscr{S}(N) \text{ tali che} \end{array} \tag{H4}$$

$$-3\alpha \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq 3\alpha \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}.$$

Allora, se $u \in USC(\overline{\Omega})$ e $v \in LSC(\overline{\Omega})$ sono rispettivamente una sottosoluzione ed una soprasoluzione di $F = 0$ in Ω, tali che $u \leq v$ in $\partial\Omega$, si può concludere $u \leq v$ in Ω.

Osservazione 1.7.

- (H3) $\Rightarrow$ F monotona strettamente crescente in r. Infatti, fissati $r > s$, vale

$$0 < \gamma(r-s) \leq F(x,r,p,X) - F(x,s,p,X).$$

- (H4) $\Rightarrow$ F ellittica degenere. Infatti, siano X, $Y \in \mathscr{S}(N)$ tali che $X \leq Y$. Siano poi $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$ ed $\varepsilon > 0$. Allora:

$$\begin{aligned} \langle X\xi,\xi\rangle - \langle Y\eta,\eta\rangle &\leq \langle Y\xi,\xi\rangle - \langle Y\eta,\eta\rangle = 2\langle Y\eta, \xi-\eta\rangle + \langle Y(\xi-\eta), \xi-\eta\rangle \\ &\leq \varepsilon|\eta|^2 + \left(1 + \frac{||Y||}{\varepsilon}\right)||Y|||\xi-\eta|^2. \end{aligned}$$

Guardando il primo e l'ultimo membro dell'uguaglianza possiamo scrivere

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -(Y+\varepsilon I) \end{pmatrix} \leq \left(1 + \frac{||Y||}{\varepsilon}\right)||Y|| \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}$$

Così, se $\alpha > \frac{1}{3}\max\left\{||X||, ||Y||, \left(1+\frac{||Y||}{\varepsilon}\right)||Y||\right\}$ ed ε è sufficientemente piccolo, la coppia X, $Y+\varepsilon I$ soddisfa la relazione matriciale dell'ipotesi (H4).
Fissiamo $x \in \Omega, r \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}^N$: se poniamo $y := x - \frac{p}{\alpha}$ in (H4), otteniamo

$$F\left(x-\frac{p}{\alpha}, r, p, Y+\varepsilon I\right) - F(x,r,p,X) \leq \omega\left(\frac{1}{\alpha}(|p|^2+|p|)\right)$$

e mandando α a $+\infty$ e ε a 0, otteniamo la condizione di ellitticità degenere (H2).

Per dimostrare il Teorema (1.6) abbiamo bisogno del seguente lemma.

Lemma 1.8. *Sia* $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^N$. *Siano* $u \in USC(\overline{\Omega})$ *e* $v \in LSC(\overline{\Omega})$ *e* $M_\alpha := \sup\limits_{\mathscr{O}\times\mathscr{O}}(u(x) - v(y) - \frac{\alpha}{2}|x-y|^2)$ *per* $\alpha > 0$.
Supponiamo che $M_\alpha < +\infty$ *per* α *grande e si possa scegliere una successione* (x_α, y_α) *tale che*

$$\lim_{\alpha\to\infty}\left(M_\alpha - \left(u(x_\alpha) - v(y_\alpha) - \frac{\alpha}{2}|x-y|^2\right)\right) = 0. \tag{1.7}$$

Allora

(i) $\lim_{\alpha\to\infty}\alpha|x_\alpha - y\alpha|^2 = 0$*;*

(ii) $\lim_{\alpha\to\infty} M_\alpha = u(\hat{x}) - v(\hat{x}) = \sup_{\mathscr{O}} u(x) - v(x)$ *per* $\hat{x} \in \mathscr{O}$ *punto limite di* x_α *per* $\alpha \to \infty$.

Il lemma (1.8) si può ricavare dalla seguente proposizione:

Proposizione 1.9. *Siano* $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^M$, $\Phi \in USC(\mathscr{O})$, $\Psi \in LSC(\mathscr{O})$, $\Psi \geq 0$ *e* $M_\alpha := \sup_{\mathscr{O}}(\Phi(x) - \alpha\Psi(x))$ *per* $\alpha > 0$.
Supponiamo che $-\infty < \lim\limits_{\alpha\to\infty} M_\alpha < \infty$[1] *e si possa scegliere* x_α *tale che*

$$\lim_{\alpha\to\infty}(M_\alpha - (\Phi(x_\alpha) - \alpha\Psi(x_\alpha))) = 0.$$

Allora:

[1]Osserviamo che l'esistenza di $\lim_{\alpha\to\infty} M_\alpha$ è garantita dal fatto che, essendo $\Psi \geq 0$, M_α è decrescente in α ed ammette quindi limite.

(i) $\lim_{\alpha\to\infty} \alpha\Psi(x_\alpha) = 0$

(ii) $\Psi(\hat{x}) = 0$ *e* $\lim_{\alpha\to\infty} M_\alpha = \Phi(\hat{x}) = \sup_{\{\Psi(x)=0\}} \Phi(x)$ *con* $\hat{x} \in \mathscr{O}$ *punto limite di* x_α *per* $\alpha \to \infty$.

Dimostrazione. (della Proposizione 1.9) Poniamo $\delta_\alpha := M_\alpha - (\Phi(x_\alpha) - \alpha\Psi(x_\alpha))$, così, per ipotesi $\delta_\alpha \to 0$ per $\alpha \to \infty$.
Vediamo (i): osserviamo che, poiché M_α è estremo superiore su $\mathscr{O}$ e $x_alpha \in \mathscr{O}$, vale:

$$M_{\alpha/2} \geq \Phi(x_\alpha) - \frac{\alpha}{2}\Psi(x_\alpha) = \Phi(x_\alpha) - \alpha\Psi(x_\alpha) + \frac{\alpha}{2}\Psi(x_\alpha) = M_\alpha - \delta_\alpha + \frac{\alpha}{2}\Psi(x_\alpha)$$

da cui $0 \leq \alpha\Psi(x_\alpha) \leq 2\left(M_{\alpha/2} - M_\alpha + \delta_\alpha\right)$. Sfruttando le ipotesi $-\infty < \lim_{\alpha\to\infty} M_\alpha < +\infty$ e $\delta_\alpha \overset{\alpha\to\infty}{\to} 0$, si ricava la tesi.
Vediamo ora (ii): sia $\hat{x} \in \mathscr{O}$ punto limite di x_α per $\alpha \to \infty$. Sia ora $\alpha_n \overset{n\to\infty}{\to} \infty$. Allora, da (i), $\Psi(x_{\alpha_n}) \to 0$, ma Ψ è inferiormente semicontinua, quindi $0 = \lim_{n\to\infty} \Psi(x_{\alpha_n}) = \liminf_{n\to\infty} \Psi(x_{\alpha_n}) \geq \Psi(\hat{x}) \geq 0$, cioè $\Psi(\hat{x}) = 0$. Scriviamo infine

$$\Phi(x_{\alpha_n}) - \alpha_n\Psi(x_{\alpha_n}) = M_{\alpha_n} - \delta_{\alpha_n} \geq \sup_{\{\Psi=0\}} \Phi(x) - \delta_{\alpha_n}$$

Poiché Φ è superiormente semicontinua e valgono $\delta_{\alpha_n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$ e (i), possiamo concludere al limite per $n \to \infty$: $\Phi(\hat{x}) \geq \lim_{\alpha\to\infty} M_\alpha \geq \sup_{\{\Psi=0\}} \Phi = \Phi(\hat{x})$. □

Dimostrazione. (del Lemma 1.8) Si ricava dalla proposizione (1.9) con le sostituzioni $2N \to M$, $\mathscr{O} \times \mathscr{O} \to \mathscr{O}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^M$, $\Phi(x, y) = u(x) - v(y) \in USC(\mathscr{O} \times \mathscr{O})$, $\Psi(x, y) = |x - y|^2 \in LSC(\mathscr{O} \times \mathscr{O})$. □

Dimostrazione. (del Teorema 1.6) Vogliamo provare $u - v \leq 0$ su Ω. Supponiamo per contraddizione che esista $z \in \Omega$ tale che $u(z) > v(z)$ da cui viene subito, per ogni $\alpha > 0$

$$M_\alpha = \sup_{\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}} \left(u(x) - v(y) - \frac{\alpha}{2}|x - y|^2\right) \geq u(z) - v(z) =: M > 0. \tag{1.8}$$

I) Vediamo che valgono le ipotesi del lemma (1.8). Infatti $M_\alpha < \infty$ è vero per ogni $\alpha > 0$ perchè $u \in USC(\overline{\Omega}), v \in LSC(\overline{\Omega}) \Rightarrow u - v - \frac{\alpha}{2}|x - y|^2 \in$

$USC(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$ e $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$ compatto, quindi

$$\exists \max_{\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}} \big(u(x) - v(y) - (\alpha/2)|x-y|^2\big) = M_\alpha < +\infty.$$

Definiamo quindi per ogni $\alpha > 0$

$$(x_\alpha, y_\alpha) \in \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \text{ il punto che realizza il massimo di } u - v - \frac{\alpha}{2}|x-y|^2. \quad (1.9)$$

In questo modo per ogni α vale $M_\alpha - (u(x_\alpha) - v(y_\alpha) - (\alpha/2)|x_\alpha - y_\alpha|^2) = 0$. Possiamo dunque applicare il lemma, ottenendo

$$\begin{cases} \text{(i)} \ \lim\limits_{\alpha\to\infty} \alpha|x_\alpha - y_\alpha|^2 = 0 \\ \text{(ii)} \ \lim\limits_{\alpha\to\infty} M_\alpha = u(\hat{x}) - v(\hat{x}) = \sup\limits_{\overline{\Omega}} u(x) - v(x) \end{cases}$$

II) Risulta $(x_\alpha, y_\alpha) \in \Omega \times \Omega$ per α grande.
Procediamo per contraddizione. Osserviamo che, per (i), $x_\alpha \in \Omega$ per α grande se e solo se $y_\alpha \in \Omega$ per α grande. Così per escludere $(x_\alpha, y_\alpha) \in \Omega \times \Omega$ per α grande, dobbiamo supporre che esista una successione $(x_{\alpha_k}, y_{\alpha_k}) \in \partial\Omega \times \partial\Omega$ ($\alpha_k \overset{t\to\infty}{\to} \infty$). In questo caso, poichè $u - v \le 0$ su $\partial\Omega$ si avrebbe, applicando (i) e (ii):

$$\begin{array}{ccccc} M_{\alpha_k} & = & u(x_{\alpha_k}) - v(y_{\alpha_k}) - \frac{\alpha_k}{2}|x_{\alpha_k} - y_{\alpha_k}|^2 & \le -\frac{\alpha_k}{2}|x_{\alpha_k} - y_{\alpha_k}|^2 \\ \downarrow & & {\scriptstyle k\to\infty} & \downarrow \\ \sup\limits_{\overline{\Omega}} u(x) - v(x) & & \le & 0 \end{array}$$

Ma, da (1.8), per ogni α, $M_\alpha \ge M > 0$, quindi il suo limite è positivo.

III) Vogliamo ora contraddire $u(z) - v(z) > 0$.
Per capire come procedere supponiamo dapprima che u e v siano due volte differenziabili rispettivamente intorno a x_α e y_α. Poichè $(x_\alpha, y_\alpha) \in \Omega \times \Omega$ è di massimo per $(x, y) \mapsto u(x) - v(y) - (\alpha/2)|x-y|^2$, risulta, chiamando $X = D^2u(x_\alpha)$, $Y = D^2v(y_\alpha)$ e $\varphi(x, y) = (\alpha/2)|x-y|^2$:

$$Du(x_\alpha) = D_x\varphi(x_\alpha, y_\alpha), \qquad Dv(y_\alpha) = -D_y\varphi(x_\alpha, y_\alpha),$$

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq D^2\varphi(x_\alpha, y_\alpha),$$

dove

$$D_x\varphi(x_\alpha, y_\alpha) = -D_y\varphi(x_\alpha, y_\alpha) = \alpha(x_\alpha - y_\alpha),\ D^2\varphi(x_\alpha, y_\alpha) = \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}.$$

Poichè u e v sono rispettivamente una sottosoluzione e una soprasoluzione di $F = 0$ intorno a x_α e y_α (si può equivalentemente dire classica o viscosa poiché sto esaminando il caso u, v due volte differenziabili - cfr. Proposizione 1.5), si ha anche

$$F(x_\alpha, u(x_\alpha), \alpha(x_\alpha - y_\alpha), X) \leq 0 \leq F(y_\alpha, v(y_\alpha), \alpha(x_\alpha - y_\alpha), Y). \tag{1.10}$$

Cercheremo una contraddizione a partire dal calcolo seguente (i numeri sopra gli operatori di relazione indicano le espressioni che giustificano il passaggio):

$$\begin{aligned} 0 &< \gamma M \leq \gamma M_\alpha \leq \gamma(u(x_\alpha) - v(y_\alpha)) \overset{(H3)}{\leq} \\ &\leq F(x_\alpha, u(x_\alpha), \alpha(x_\alpha - y_\alpha), X) - F(x_\alpha, v(y_\alpha), \alpha(x_\alpha - y_\alpha), X) = \\ &= F(x_\alpha, u(x_\alpha), \alpha(x_\alpha - y_\alpha), X) - F(y_\alpha, v(x_\alpha), \alpha(x_\alpha - y_\alpha), Y) + \\ &\quad + F(y_\alpha, v(y_\alpha), \alpha(x_\alpha - y_\alpha), Y) - F(x_\alpha, v(y_\alpha), \alpha(x_\alpha - y_\alpha), X) \overset{(1.10)}{\leq} \\ &\leq F(y_\alpha, v(y_\alpha), \alpha(x_\alpha - y_\alpha), Y) - F(x_\alpha, v(y_\alpha), \alpha(x_\alpha - y_\alpha), X) \end{aligned} \tag{1.11}$$

Arrivati a questo punto l'idea sarebbe di concludere sfruttando l'ipotesi (H4). Consideriamo ora $u \in USC(\overline{\Omega})$, $v \in LSC(\overline{\Omega})$. In questo caso non possiamo svolgere i calcoli con X e Y matrici delle derivate seconde di u e v e dobbiamo quindi cercare $X, Y \in \mathscr{S}(N)$ tali che valga comunque la relazione (1.10) e si riesca a sfruttare l'ipotesi (H4), proseguendo il calcolo (1.11) per arrivare ad una contraddizione. A tale scopo citiamo il teorema seguente[2]:

Teorema 1.10. *Siano $\mathscr{O}_i \subset \mathbb{R}^{N_i}$ localmente compatti, $u_i \in USC(\mathscr{O}_i)$ per $i = 1, \ldots, k$, φ due volte differenziabile in un intorno di $\mathscr{O}$. Siano poi $\mathscr{O} :=$*

[2]Una dimpstrazione si può trovare in [4], Appendice (dimostrazione Teorema 3.2)

$\mathscr{O}_1 \times \cdots \times \mathscr{O}_k$, $w(x) := u_1(x_1) + \dots u_k(x_k)$ per $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathscr{O}$. Supponiamo $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k)$ massimo locale di $w - \varphi$ relativamente ad $\mathscr{O}$. Allora per ogni $i = 1, \dots, k$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists X_i \in \mathscr{S}(N_i)$ tale che:

(a) $(D_{x_i}\varphi(\hat{x}), X_i) \in \overline{J^{2,+}_{\mathscr{O}_i} u_i(\hat{x}_i)}$;

(b) $-\left(\dfrac{1}{\varepsilon} + ||A||\right) I \leq \begin{pmatrix} X_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & X_k \end{pmatrix} \leq A + \varepsilon A^2$ *ove* $A = D^2\varphi(\hat{x}) \in \mathscr{S}(N)$ *con* $N = N_1 + \cdots + N_k$ *e* $||A|| := \sup\{|\langle A\xi, \xi\rangle| : |\xi| = 1\}$ *è la norma matriciale data come il massimo dei moduli degli autovalori di* A.

Applichiamo il teorema 1.10 con $k = 2$, $\mathscr{O}_i = \Omega$, $u_1 = u$, $u_2 = -v \in USC(\overline{\Omega})$, $\varphi(x, y) = \frac{\alpha}{2}|x - y|^2$, da cui $A = \alpha \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}$, $||A|| = 2\alpha$, $A^2 = 2\alpha A$. Osserviamo inoltre che vale $\overline{J^{2,-}_{\Omega} u(x_\alpha)} = -\overline{J^{2,+}_{\Omega} v(y_\alpha)}$ Per ogni $\alpha > 0$ fissato, otteniamo dunque:

$$\begin{aligned}
&\forall \varepsilon > 0\ \exists X, Y \in \mathscr{S}(N) \text{ tali che} \\
&(\alpha(x_\alpha, y_\alpha), X) \in \overline{J^{2,+}_{\Omega} u(x_\alpha)}, (\alpha(x_\alpha, y_\alpha), -Y) \in \overline{J^{2,-}_{\Omega} v(y_\alpha)} \\
&-\left(\tfrac{1}{\varepsilon} + 2\alpha\right) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq \alpha(1 + 2\varepsilon\alpha) \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Così, scegliendo $\varepsilon = \frac{1}{\alpha}$ si ha $-3\alpha \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq 3\alpha \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}$. Poiché F è continua, come visto nella proposizione 1.4, la relazione (1.10) continua a valere. Possiamo dunque proseguire il calcolo (1.11) sfruttando l'ipotesi (H4) come segue:

$$\begin{aligned}
\gamma\delta &\leq F(y_\alpha, v(y_\alpha), \alpha(x_\alpha - y_\alpha), Y) - F(x_\alpha, v(y_\alpha), \alpha(x_\alpha - y_\alpha), X) \leq \\
&\leq \omega(\alpha|x_\alpha - y_\alpha|^2 + |x_\alpha - y_\alpha|)
\end{aligned}$$

Ma, dal risultato (i) del Lemma 1.8, $\alpha|x_\alpha - y_\alpha|^2 + |x_\alpha - y_\alpha| \stackrel{\alpha\to\infty}{\to} 0$, quindi mandando la disuguaglianza al limite per $\alpha \to \infty$, si ottiene $\delta \leq 0$, che è contraddittorio. $\square$

Definizione 1.3. Diciamo che u è soluzione (risp. sottosoluzione, soprasoluzione) viscosa del Problema di Dirichlet

$$\text{(PD)} \begin{cases} F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0 & \text{in } \Omega \quad \text{(I)} \\ u = 0 & \text{in } \partial\Omega \quad \text{(II)} \end{cases}$$

se $u \in C(\overline{\Omega})$ (risp. $u \in USC(\overline{\Omega})$, $u \in LSC(\overline{\Omega})$), u è soluzione (risp. sottosoluzione, soprasoluzione) viscosa di (I) e vale $u(x) = 0\ \forall x \in \partial\Omega$ (risp. $u \leq 0$, $u \geq 0$).

Corollario 1.11 (Unicità della soluzione viscosa)**.** *Supponiamo che valgano le ipotesi del Teorema 1.6. Se esiste $u \in C(\overline{\Omega})$ soluzione viscosa di (PD), essa è unica.*

Dimostrazione. Sia $v \in C(\overline{\Omega})$ una soluzione viscosa di (PD). In particolare u è sottosoluzione di $F = 0$ in Ω, v è soprasoluzione di $F = 0$ in Ω e vale $u = v$ su $\partial\Omega$. Allora, per il principio del confronto $u \leq v$ in $\overline{\Omega}$. Scambiando i ruoli di u e v si ottiene $u = v$ in $\overline{\Omega}$. □

1.3 Metodo di Perron ed Esistenza

In questo paragrafo indicheremo con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato.

Denotiamo nella maniera seguente gli inviluppi rispettivamente superiormente semicontinuo e inferiormente semicontinuo di una funzione generica $u : \mathscr{O} \to [-\infty, +\infty]$ con $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^N$:

$$u^*(x) := \lim_{r \to 0} \sup_{y \in B(x,r) \cap \mathscr{O}} u(y), \qquad u_*(x) := \lim_{r \to 0} \inf_{y \in B(x,r) \cap \mathscr{O}} u(y).$$

Il principio del confronto ci garantisce l'esistenza di una soluzione viscosa di (PD), combinato con il metodo di Perron.

Teorema 1.12 (Esistenza di una soluzione viscosa. Metodo di Perron)**.** *Sia F propria (valgono (H1) e (H2)) e continua.*
Supponiamo che valga il principio del confronto per (PD) e cioè che se w è

sottosoluzione viscosa di (PD) e v è soprasoluzione viscosa di (PD), allora $w \leq v$ in $\overline{\Omega}$.
Supponiamo poi che esistano $\underline{u}$ e $\overline{u}$ rispettivamente una sottosoluzione ed una soprasoluzione viscose di (PD) tali che

$$\underline{u}_* = \overline{u}^* = 0 \text{ in } \partial\Omega. \tag{1.13}$$

Allora la funzione

$$W(x) := \sup \{w(x) \,/ \underline{u} \leq w \leq \overline{u} \ w \text{ è sottosoluzione di (PD)}\}$$

è soluzione viscosa di (PD).

Per dimostrare il Metodo di Perron sfrutteremo i risultati di due Lemmi 1.13 e 1.15.

Lemma 1.13. *Sia $\mathscr{O}$ localmente compatto. Supponiamo $F \in LSC(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathscr{S}(N))$. Sia $\mathscr{F}$ una famiglia di sottosoluzioni viscose di $F = 0$ in $\mathscr{O}$ e sia*

$$w(x) := \sup_{u \in \mathscr{F}} u(x).$$

Se $w^*(x) < \infty$ per $x \in \mathscr{O}$, allora w^* è sottosoluzione viscosa di $F = 0$ in $\mathscr{O}$.

A sua volta, il Lemma 1.13, sfrutta il risultato della seguente proposizione.

Proposizione 1.14. *Sia $\mathscr{O}$ localmente compatto. Siano $v \in USC(\mathscr{O}), z \in \mathscr{O}, (p, X) \in J^{2,+}_{\mathscr{O}} v(z)$. Supponiamo che $u_n \in USC(\mathscr{O})$ sia una successione di funzioni tale che:*

(a) $\exists x_n \in \mathscr{O} : (x_n, u_n(x_n)) \to (z, v(z))$;

(b) Se $z_n \in \mathscr{O}$ *e* $z_n \to x \in \mathscr{O}$, *allora* $\limsup_{n\to\infty} u_n(z_n) \leq v(x)$.

Allora $\exists \hat{x}_n \in \mathscr{O}$, $(p_n, X_n) \in J^{2,+}_{\mathscr{O}} u_n(\hat{x}_n)$ tali che

$$(\hat{x}_n, u_n(\hat{x}_n), p_n, X_n) \overset{n\to\infty}{\to} (z, v(z), p, X). \tag{1.14}$$

Dimostrazione. (della Proposizione 1.14) Senza perdere di generalità si pone $z = 0$. Poiché $\mathscr{O}$ è localmente compatto e $(p, X) \in J^{2,+}_{\mathscr{O}} v(0)$, $\forall \delta > 0\ \exists r > 0$: $B_r := \{x \in \mathscr{O} / |x| \leq r\}$ è compatto e

$$v(x) \leq v(0) + \langle p, x\rangle + \frac{1}{2}\langle X \cdot x, x\rangle + \delta|x|^2 \text{ per } x \in B_r \tag{1.15}$$

Sia ora, per ogni n, $\hat{x}_n \in B_r$ punto di massimo per

$$u_n - \left(\langle p, x\rangle + \frac{1}{2}\langle X \cdot x, x\rangle + 2\delta|x|^2\right), \text{ cioè}$$

$$u_n(x) \leq u_n(\hat{x}_n) + \langle p, x - \hat{x}_n\rangle + \tfrac{1}{2}(\langle X \cdot x, x\rangle - \langle X \cdot \hat{x}_n, \hat{x}_n\rangle) + 2\delta(|x|^2 - |\hat{x}_n|^2) \\ \text{per } x \in B_r. \tag{1.16}$$

Poiché B_r è compatto, eventualmente passando ad una sottosuccessione $\exists y \in B_r$ tale che $\hat{x}_n \to y$. Dobbiamo vedere $y = 0$.
Da (a), $\exists x_n \in \mathscr{O} : (x_n, u_n(x_n)) \to (0, v(0))$, quindi $x_n \in B_r$ almeno da un certo n in poi. Sostituendo $x \mapsto x_n$ in (1.16) si ottiene

$$u_n(x_n) \leq u_n(\hat{x}_n) + \langle p, x_n - \hat{x}_n\rangle + \frac{1}{2}(\langle X \cdot x_n, x_n\rangle - \langle X \cdot \hat{x}_n, \hat{x}_n\rangle) + 2\delta(|x_n|^2 - |\hat{x}_n|^2),$$

così, passando al limite inferiore si ha

$$\begin{aligned} v(0) &\leq \liminf_{n\to\infty} u_n(\hat{x}_n) - \langle p, y\rangle - \frac{1}{2}\langle X \cdot y, y\rangle - 2\delta|y|^2 \overset{(b)}{\leq} \\ &\leq v(y) - \langle p, y\rangle - \frac{1}{2}\langle X \cdot y, y\rangle - 2\delta|y|^2 \overset{(1.15)}{\leq} \\ &\leq v(0) - \delta|y|^2 \end{aligned}$$

Da $v(0) \leq v(0) - \delta|y|^2\ \forall\delta > 0$ ricaviamo subito $y = 0$.
Vediamo $\exists \lim u_n(\hat{x}_n) = v(0)$. Questo è vero perché, per ipotesi, $\limsup_{n\to\infty} u_n(\hat{x}_n) \leq v(0)$ inoltre, dalla precedente catena di disuguaglianze, essendo $y = 0$, si ha $v(0) \leq \liminf_{n\to\infty} u_n(\hat{x}_n)$, possiamo quindi concludere.
Rimane da vedere che $\exists(p_n, X_n) \in J^{2,+}_{\mathscr{O}} u(\hat{x}_n)$ tale che $(p_n, X_n) \to (p, X)$. Questo è vero perché $(p + 4\delta x_n + X x_n, X + 4\delta I) \in J^{2,+}_{\mathscr{O}} u_n(\hat{x}_n)$ per n grande e l'insieme

$$\left\{ (q, Y) \in \mathbb{R}^N \mathscr{S}(N) \middle/ \begin{array}{l} \exists z_n \in \mathscr{O},\ (p_n, X_n) \in J^{2,+}_{\mathscr{O}} u_n(z_n) \text{ tale che} \\ (z_n, u_n(z_n), p_n, X_n) \to (0, v(0), q, Y) \end{array} \right\}$$

è chiuso e contiene $(p, X + 4\delta I)$ per $\delta > 0$ dall'alto. $\square$

Dimostrazione. (del Lemma 1.13) Devo vedere:

- $w^* \in USC(\mathscr{O})$, vero per definizione di inviluppo superiormente semicontinuo.
- $F(z, w^*(z), p, X) \leq 0)$ $\forall (p, X) \in J^{2,+}_{\mathscr{O}} w^*(z)$ $\forall z \in \mathscr{O}$.

Fissiamo dunque ad arbitro $z \in \mathscr{O}$ e $(p, X) \in J^{2,+}_{\mathscr{O}} w^*(z)$. Essendo

$$w^*(z) = \lim_{r \to 0^+} \sup_{y \in B_r(z) \cap \mathscr{O}} w(y) = \lim_{r \to 0^+} \sup_{y \in B_r(z) \cap \mathscr{O}} \left(\sup_{u \in \mathscr{F}} u(y) \right),$$

possiamo scegliere una successione $x_n \in \mathscr{O} : w(x_n) \to w^*(z)$ ed una $u_n \in \mathscr{F}$: $u_n(y) \to w(y)$ per ogni y fissato in $\mathscr{O}$. Ne viene che

$$\exists (x_n, u_n) \in \mathscr{O} \times \mathscr{F} : u_n(x_n) \to w^*(z).$$

Inoltre, se $\mathscr{O} \ni z_n \to x \in \mathscr{O}$, essendo per ogni $u \in \mathscr{F}$, $u(y) \leq w(y) \leq w^*(y)$ per ogni $y \in \mathscr{O}$, allora $u_n(z_n) \leq w^*(z_n)$, così $\limsup_{n \to \infty} u_n(z_n) \leq \limsup_{n \to \infty} w^*(z_n) \leq w^*(x)$.
Sono quindi verificate le ipotesi della Proposizione 1.14, ne viene

$$\exists \hat{x}_n \in \mathscr{O}, (p_n, X_n) \in J^{2,+}_{\mathscr{O}} u_n(\hat{x}_n) : (\hat{x}_n, u_n(\hat{x}_n), p_n, X_n) \overset{n \to \infty}{\to} (z, w^*(z), p, X)$$

Così, poichè ogni $u_n \in \mathscr{F}$ e quindi è sottosoluzione, vale $F(\hat{x}_n, u_n(\hat{x}_n), p_n, X_n) \leq 0$ $\forall n$, ed essendo F inferiormente semicontinua vale

$$F(z, u(z), p, X) \leq \liminf_{n \to \infty} F(\hat{x}_n, u_n(\hat{x}_n), p_n, X_n) \leq 0.$$

$\square$

Lemma 1.15. *Sia u sottosoluzione viscosa di $F = 0$ in Ω. Se u_* non è soprasoluzione di $F = 0$ in qualche punto $\hat{x} \in \Omega$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ piccolo, esiste una sottosoluzione viscosa di U_ε di $F = 0$ in Ω, tale che*

$$\begin{cases} U_\varepsilon(x) \geq u(x) \text{ e } \sup_\Omega (U_\varepsilon - u) > 0 & \text{per } x \in \Omega,\ |x - \hat{x}| < \varepsilon \\ U_\varepsilon(x) = u(x) & \text{per } x \in \Omega,\ |x - \hat{x}| \geq \varepsilon \end{cases} \tag{1.17}$$

Dimostrazione. Senza perdere in generalità supponiamo $\hat{x} = 0 \in \Omega$. Per ipotesi vale che $F(0, u_*(0), p, X) < 0$ per qualche $(p, X) \in J^{2,-}_\Omega u_*(0)$. Allora, per continuità di F,

$$u_{\delta,\gamma}(x) := u_*(0) + \delta + \langle p, x\rangle + \frac{1}{2}\langle Xx, x\rangle - \gamma|x|^2$$

è sottosoluzione classica di $F = 0$ in un intorno $B_r(0) \subset \Omega$ per $\delta, \gamma, r > 0$ piccoli (i.e. $F(y, u_*(0)+\delta+\langle p, y\rangle+\frac{1}{2}\langle Xy, y\rangle-\gamma|y|^2, p+Xy-2\gamma y, X-2\gamma) \leq 0$ per $y \in B_r(0)$ con r, δ, γ piccoli). Siccome $(p, X) \in J^{2,-}_\Omega u_*(0)$, vale poi

$$u(x) \geq u_*(x) \geq u_*(0) + \langle p, x\rangle + \frac{1}{2}\langle Xx, x\rangle + o(|x|^2),$$

così, scegliendo $\delta := \frac{r}{2}\gamma$, posso concludere $u_{\delta,\gamma} \leq u$ per $\frac{r}{2} \leq |x| \leq r$, in quanto:

$$u_{\delta,\gamma}(x) \leq u_*(0)+\langle p, x\rangle+\frac{1}{2}\langle Xx, x\rangle-\frac{1}{2}\gamma|x|^2 = u_*(0)+\langle p, x\rangle+\frac{1}{2}\langle Xx, x\rangle+o(|x|^2).$$

Per ogni punto $x \in B_r(0)$ l'inviluppo superiore w delle due sottosoluzioni u e $u_{\delta,\gamma}$, $w(x) = \max\{u(x), u_{\delta,\gamma}(x)\}$ risulta a sua volta sottosoluzione viscosa di $F = 0$ per il Lemma 1.13. In particolare, la funzione $U : \Omega \to \mathbb{R}$

$$U(x) := \begin{cases} \max\{u(x), u_{\delta,\gamma}(x)\} & \text{per } |x| < r \\ u(x) & \text{per } |x| \geq r \end{cases}$$

è una sottosoluzione viscosa di $F = 0$ in Ω per cui vale $\sup_\Omega U - u > 0$. Infatti, per definizione di inviluppo inferiore di una funzione esiste una sequenza $x_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$ tale che $u(x_n) \overset{n\to\infty}{\to} u_*(0)$, così

$$\lim_{n\to\infty} (U(x_n) - u(x_n)) = u_{\delta,\gamma}(0) - u_*(0) = u_*(0) + \delta - u_*(0) > 0.$$

Scegliendo r, γ sufficientemente piccoli si ottiene la tesi. □

Dimostrazione. (del Teorema 1.12) Osserviamo anzitutto che sotto le ipotesi del teorema 1.6 il principio del confronto vale per (PD).
Ricordiamo che abbiamo per ipotesi $\underline{u}$ e $\overline{u}$ rispettivamente sottosoluzione e soprasoluzione di $F = 0$ in Ω e $\underline{u}_* = \overline{u}^* = 0$ in $\partial\Omega$. Chiamiamo

$$\mathscr{F} := \{w \text{ sottosoluzione di (PD)} \, / \underline{u} \leq w \leq \overline{u}\}.$$

Sarà $W(x) := \sup_{w\in\mathscr{F}} w(x)$. Per il Lemma 1.13, W^* è sottosoluzione viscosa di $F = 0$ in Ω. Per ogni fissato $x \in \overline{\Omega}$, vale $\underline{u}(x) \le w(x)\ \forall w \in \mathscr{F}$, da cui $\underline{u}(x) \le W(x)$ ed infine $\underline{u}_*(x) \le W_*(x)$. Con un ragionamento analogo si conclude $\overline{u}^*(x) \ge W^*(x)$, così possiamo scrivere

$$\underline{u}_*(x) \le W_*(x) \le W(x) \le W^*(x) \le \overline{u}^*(x)$$

da cui si deduce $W_* = W = W^* = 0$ in $\partial\Omega$.
Applichiamo il principio del confronto ($\overline{u}$ soprasoluzione, W^* sottosoluzione, $\overline{u} = W^*$ in $\partial\Omega$) e otteniamo $W^* \le \overline{u}$ in Ω. Allora $W^* \in \mathscr{F}$, quindi per definizione di W si ha $W^* \le W$, quindi $W = W^*$.
Supponiamo per assurdo che la sottosoluzione $W = W_*$ non sia soprasoluzione viscosa di (PD) in un punto $\hat{x} \in \Omega$. Fissiamo allora $\varepsilon > 0$ e definiamo la sottosoluzione U_ε come nel Lemma 1.15, così si ha, per ε piccolo a sufficienza da tenere $\partial\Omega$ fuori dalla palla $B_\varepsilon(\hat{x})$,

$$\begin{aligned}&U_\varepsilon \ge W \ge \underline{u} \text{ in } \Omega \text{ con } \sup_{\overline{\Omega}}(U_\varepsilon - W) > 0\\ &U_\varepsilon = W = 0 \text{ in } \partial\Omega.\end{aligned}$$

Applicando di nuovo il principio del confronto ($\overline{u}$ soprasoluzione, U_ε sottosoluzione, $\overline{u} = U_\varepsilon$ in $\partial\Omega$) si ottiene $U_\varepsilon \le \overline{u}$ in $\overline{\Omega}$. Questo significa che $U_\varepsilon \in \mathscr{F}$ e quindi che $U_\varepsilon \le W$. Dovrebbe quindi essere $U_\varepsilon = W$ su $\overline{\Omega}$, ma questo va contro $\sup_{\overline{\Omega}}(U_\varepsilon - W) > 0$. In definitiva, W_* è soprasoluzione nulla al bordo. Per il principio del confronto (essendo W sottosoluzione) si ha quindi $W \le W_*$, da cui si deduce

$$W_* = W = W^* \text{ soluzione viscosa di (PD).}$$

□

1.4 Esempi

Vediamo ora alcuni esempi di equazioni alle derivate parziali che rientrano nel caso studiato.

Esempio 1.1 (Equazioni del prim'ordine)**.** Chiaramente un operatore del prim'ordine $F(x, u, Du)$ è sempre ellittico degenere poiché non dipende dalle derivate seconde. F è proprio se è monotono crescente in r.

Esempio 1.2 (Equazione di Laplace)**.**

$$-\Delta u + c(x)u = f(x) \tag{1.18}$$

La F corrispondente è data da $F(x, r, p, X) = -trace(X) + c(x)r - f(x)$ e rispetta:

(H1) se $c \geq 0$;

(H2) è verificata perché prese $X, Y \in \mathscr{S}(N)$, allora $Y \leq X \;\Rightarrow trace(Y) \leq trace(X) \iff F(x, r, p, X) \leq F(x, r, p, Y)$

Si osserva che nel caso del Laplaciano, corrispondente a $F = -trace(X)$, la nozione di sottosoluzione viscosa è equivalente a quella di funzione subarmonica, data come segue: $u \in USC(\overline{\Omega})$ è subarmonica su Ω se

$$\begin{gathered} \forall \text{ palla chiusa } \overline{B} \subset \Omega \ \forall h \in C^2 : \Delta h = 0 \text{ in } \overline{B}, \text{ allora} \\ \text{se } u \leq h \text{ su } \partial B, \text{ vale } u \leq h \text{ su } \overline{B}. \end{gathered} \tag{1.19}$$

Vale a dire che, preso Ω aperto limitato, allora:

$u \in USC(\Omega)$ è sottosol. vis. di $-\Delta u = 0$ $(F = 0)$ su $\Omega \Leftrightarrow u$ è subarm. su Ω

Vediamo, come esempio, l'implicazione da sinistra a destra. Supponiamo per assurdo che u sia una sottosoluzione viscosa, ma non subarmonica. Questo vuole dire che esiste $\overline{B}$ palla chiusa contenuta in Ω ed esiste $h \in C^2$ con $\Delta h = 0$ su $\overline{B}$ tale che $u - h \leq 0$ su ∂B e $\sup_B(u - h) > 0$. Considerando per $\varepsilon > 0$ la funzione $x \mapsto u(x) - h(x) + \varepsilon|x|^2 =: g_\varepsilon(x)$, continua su $\overline{B}$ compatto, possiamo fissare $\hat{x}_\varepsilon \in \overline{B}$ punto di massimo per g_ε. Si può scegliere ε piccolo a sufficienza perché $g_\varepsilon(x) \leq 0$ su ∂B. D'altra parte, $\sup_B(u - h) > 0$, quindi $\hat{x}_\varepsilon \in B$. Fissiamo dunque un tale ε e definiamo il polinomio quadratico

$$q(x) = u(\hat{x}_\varepsilon) + \langle Dh(\hat{x}_\varepsilon), (x - \hat{x}_\varepsilon)\rangle + \frac{1}{2}\langle D^2h(\hat{x}_\varepsilon)(x - \hat{x}_\varepsilon), x - \hat{x}_\varepsilon\rangle + \frac{1}{2}\varepsilon|x - \hat{x}_\varepsilon|^2 + \varepsilon|\hat{x}_\varepsilon|^2 - \varepsilon|x|^2.$$

Risulta che $\hat{x}_\varepsilon$ è di massimo locale per $u-q$. Infatti, sapendo che $u(x) - h(x) + \varepsilon|x|^2 \leq u(\hat{x}_\varepsilon) - h(\hat{x}_\varepsilon) + \varepsilon|\hat{x}_\varepsilon|^2$, se sviluppiamo h intorno a $\hat{x}_\varepsilon$ vale

$$\begin{aligned} u(x) + \varepsilon|x|^2 &\leq u(\hat{x}_\varepsilon) + (h(x) - h(\hat{x}_\varepsilon)) + \varepsilon|\hat{x}_\varepsilon|^2 = \\ &= u(\hat{x}_\varepsilon) + \langle Dh(\hat{x}_\varepsilon), (x-\hat{x}_\varepsilon)\rangle + \frac{1}{2}\langle D^2h(\hat{x}_\varepsilon)(x-\hat{x}_\varepsilon), (x-\hat{x}_\varepsilon)\rangle + \\ &\quad + o(|x-\hat{x}_\varepsilon|^2) + \varepsilon|\hat{x}_\varepsilon|^2 \end{aligned}$$

Ne ricaviamo

$$\begin{aligned} u(x) &\leq u(\hat{x}_\varepsilon) + \langle Dh(\hat{x}_\varepsilon), (x-\hat{x}_\varepsilon)\rangle + \frac{1}{2}\langle D^2h(\hat{x}_\varepsilon)(x-\hat{x}_\varepsilon), (x-\hat{x}_\varepsilon)\rangle + \\ &\quad + o(|x-\hat{x}_\varepsilon|^2) + \varepsilon|\hat{x}_\varepsilon|^2 - \varepsilon|x|^2 \leq \\ &\leq q(x) - \frac{1}{2}\varepsilon|x-\hat{x}_\varepsilon|^2 + o(|x-\hat{x}_\varepsilon|^2) \leq \\ &\leq q(x) + |x-\hat{x}_\varepsilon|^2\left(-\varepsilon/2 + o(1)\right) \end{aligned}$$

da cui

$$u(x) - q(x) \leq 0 = u(\hat{x}_\varepsilon) - q(\hat{x}_\varepsilon) \text{ per } x \text{ in un intorno di } \hat{x}_\varepsilon$$

D'altra parte, per ogni x vale

$$D^2q(x) = \begin{pmatrix} \partial_{11}h(\hat{x}_\varepsilon) + \varepsilon - 2\varepsilon & \dots & \partial_{1N}h(\hat{x}_\varepsilon) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{N1}h(\hat{x}_\varepsilon) & \dots & \partial_{NN}h(\hat{x}_\varepsilon) + \varepsilon - 2\varepsilon \end{pmatrix} = D^2h(\hat{x}_\varepsilon) - \varepsilon I,$$

allora $-\Delta q(x) = -\Delta h(\hat{x}_\varepsilon) + N\varepsilon > 0$, in contraddizione con l'ipotesi che u sia sottosoluzione viscosa di $\Delta u = 0$.

Ricordiamo che un'equazione alle derivate parziali $F(x, u, Du, D^2u) = 0$ è detta:

- lineare se è della forma $\sum_{|\alpha|\leq 2} a_\alpha(x)D^\alpha u = f(x)$ con α multiindice e a_α funzioni assegnate;
- semilineare se è della forma $\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x)D^\alpha u + a_0(x, u, Du) = 0$;

- quasilineare se è della forma $\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x,u,Du)D^\alpha u + a_0(x,u,Du) = 0$;
- nonlineare se non rientra in nessuno dei casi precedenti.

Esempio 1.3 (Equazioni Ellittiche Degeneri Lineari)**.**

$$-\sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u(x) = f(x) \tag{1.20}$$

dove la matrice $A := (a_{i,j})$ è simmetrica. La F corrispondente è data da:

$$F(x,r,p,X) = -trace(A(x)X) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)p_i + c(x)r - f(x).$$

In questo caso F è

(H1) monotono se $c \geq 0$;

(H2) ellittico degenere se e solo se $A(x) \geq 0$ per ogni x. Infatti, se $A(x) \geq 0$ per ogni x, ricordando che se M, N sono matrici simmetriche semidefinite positive, allora $trace(MN) \geq 0$, (H2) risulta verificata. Per il viceverrsa dimostriamo che se $trace(MN) \geq 0$ $\forall N \geq 0$ allora $M \geq 0$. Sia $\xi \in \mathbb{R}^N$ un vettore colonna. La matrice $\xi \cdot \xi^T$ è semidefinita positiva e vale

$$0 \leq trace(M(\xi \cdot \xi^T)) = trace(\xi^T M \xi) = \langle M\xi, \xi\rangle.$$

Esempio 1.4 (Equazioni Ellittiche Degeneri Quasilineari)**.** Studiamo separatamente i due casi seguenti:

- in forma di Divergenza. Consideriamo l'equazione

$$-\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i(x,Du)) + b(x,u,Du) = 0 \tag{1.21}$$

scritta anche come $-div(a(x,Du)) + b(x,u,Du) = 0$ dove $a(x,p)$ è il campo $(a_1(x,p),\ldots,a_N(x,p))$. (1.21) è generalmente ellittica se il campo $a(x,p)$ è monotono crescente in p come una mappa da $\mathbb{R}^N$ a $\mathbb{R}^N$, ossia se

$$\langle a(x,p) - a(x,q), p - q)\rangle \geq 0 \ \forall p, q \in \mathbb{R}^N. \tag{1.22}$$

Se a è differenziabile, (1.21) diventa

$$-\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial a_i}{\partial p_j}(x, Du)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j} + b(x,u,Du) - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial a_i}{\partial p_i}(x, Du) = 0,$$

così la F corrispondente è data da

$$F(x,r,p,X) := -trace(D_p a(x,p)X) + b(x,r,p) - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial a_i}{\partial p_i}(x,p) = 0.$$

Vediamo le condizioni necessarie perchè F sia propria:

(H1) è verificata se b è monotona crescente in r;

(H2) è sempre verificata perchè a è monotono in p. Infatti: fissiamo $q, \xi \in \mathbb{R}^N$, poniamo in (1.22), $p = q + h\xi$ con $h \neq 0$ e dividiamo per h^2. Ne viene:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{a_i(x, q+h\xi) - a_i(x,q)}{h}\xi_i \geq 0.$$

Mandando $h \to 0$

$$\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial a_i}{\partial p_j}(q)\xi_i\xi_j \geq 0 \ \forall q, \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Così, per ogni $X, Y \in \mathscr{S}(N)$: $X - Y \geq 0$, $trace(D_p a(x,p)(X - Y)) \geq 0$.

Due esempi di operatori di questo tipo sono dati dall'equazione delle superfici minime in forma non parametrica (1.23) e dall'm-laplaciano (1.24).

$$F(x,r,p,X) = -(1+|p|^2)^{-\frac{1}{2}} trace(X) + (1+|p|^2)^{-\frac{3}{2}} trace(p \otimes p)X + b(x,r) \tag{1.23}$$

ottenuta per $a(x,p) = (1+|p|^2)^{-\frac{1}{2}}p$.

$$F(x,r,p,X) = -|p|^{m-2}trace(X) - (m-2)|p|^{m-4}trace(p\otimes p)X + b(x,r) \tag{1.24}$$

ottenuta per $a(x,p) = |p|^{m-2}p$.

- in forma di non-Divergenza

$$-\sum_{i=1}^{N} a_{i,j}(x,Du)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + b(x,u,Du) = 0 \tag{1.25}$$

con $A(x,p) = (a_{i,j}(x,p))_{i,j} \in \mathscr{S}(N)$. La F corrispondente è data da $F(x,r,p,X) = -trace(A(x,p)X) + b(x,r,p)$ che soddisfa

(H1) se b è cresente rispetto a r;

(H2) se $A \geq 0$.

Due esempi sono dati dall'equazione

$$-\nu\Delta u + f(x,u,Du) = 0$$

con $\nu > 0$ e f crescente in u e dall'equazione di Lévi, che compare nella formulazione del problema di trovare una ipersuperficie di $\mathbb{C}^2$ con forma di Levi nulla (cfr. Paragrafo 2.1 per le definizioni a riguardo):

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)\left(1+\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2\right) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right) +$$

$$+2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_3}\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3}\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) = 0$$

L'operatore corrispondente si può scrivere come $F(x,r,p,X) = -trace(A(p)X)$ con

$$A(p) := \begin{pmatrix} 1+p_3^2 & 0 & p_1p_3 - p_2 \\ 0 & 1+p_3^2 & p_2p_3 + p_1 \\ p_1p_3 - p_2 & p_2p_3 + p_1 & p_1^2 + p_2^2 \end{pmatrix}$$

che è semidefinita positiva (si può vedere con la regola dei minori principali), ma ha determinante nullo per ogni p.

Esempio 1.5 (Equazione di Monge-Ampere)**.** Il problema da risolvere è

$$u \text{ convessa} \quad \det(D^2u) = f(x, u, Du) \tag{MA}$$

con $f(x, r, p) \geq 0$. La F corrispondente è discontinua:

$$F(x, r, p, X) := \begin{cases} -\det(X) + f(x, r, p) & \text{se } X \geq 0 \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In questo caso

(H1) è verificata se f è crescente in r;

(H2) Vediamo che F è ellittico degenere. Siano $X, Y \in \mathscr{S}(N)$ tali che $X - Y \geq 0$

- se né X né Y sono semidefinite positive, $F(x, r, p, X) = F(x, r, p, Y) = \infty$;
- se $Y \geq 0$, necessariamente anche $X \geq 0$ perché $X = (X - Y) + Y$ somma di matrici semidefinite positive. In questo caso dunque $F(x, r, p, X) = -\det(X) + f(x, r, p) \leq -\det(Y) + f(x, r, p) = F(x, r, p, Y)$.
- se $X \geq 0$ e Y non è semidefinita positiva, $F(x, r, p, X) = -\det(X) + f(x, r, p) \leq +\infty = F(x, r, p, Y)$.

Sia Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^N$. In questo caso, in accordo con la Definizione 1.2 e sfruttando la proposizione 1.3, $u \in C(\Omega)$ è soluzione viscosa di (MA) in Ω se $\forall \varphi \in C^2$, $\hat{x} \in \Omega$ punto di massimo relativo di $u - \varphi$ in Ω, si ha

$$\det(D^2\varphi(\hat{x})) \geq f(\hat{x}, u(\hat{x}), D\varphi(\hat{x}), D^2\varphi(\hat{x})).$$

Introduciamo la nozione di soluzione di Alexandrov per $F = 0$ in Ω, aperto e convesso. Si potrà vedere che è analoga a quella di soluzione viscosa.

Chiamiamo sottodifferenziale di $u : \Omega \to \mathbb{R}$ in $\hat{x} \in \Omega$ l'insieme

$$\partial u := \left\{ p \in \mathbb{R}^N \,/ u(x) \geq u(\hat{x}) + \langle p, x - \hat{x} \rangle \ \forall x \in \Omega \right\}$$

e, dato $E \subset \Omega$, poniamo $\partial u(E) := \bigcup_{x \in E} \partial u(x)$. Come Gutiérrez dimostra in [6] (Teorema 1.1.13) è possibile definire una misura finita sui compatti sulla σ-algebra $\mathcal{S} := \{E \subset \Omega \,/ \partial u(E)$ è misurabile secondo Lebesgue$\}$, data da

$$Mu(E) := |\partial u(E)|$$

detta misura di Monge-Ampère associata a u. A questo punto, diciamo che u è soluzione di Alexandrov di $\det D^2 u = f$ se

$$Mu(E) = \int_E f(x)dx.$$

Si dimostra che, se f è continua, la nozione di soluzione viscosa per $F = 0$ in Ω è equivalente a quella di soluzione di Alexandrov (cfr [6], Proposizione 1.3.4).

Capitolo 2

Soluzioni viscose per l'operatore di Levi-Monge-Ampère

2.1 Forma di Levi e curvatura totale di Levi

Riprendiamo le nozioni dell'Introduzione.
Per una funzione $f : \mathbb{C}^{n+1} \to R$ utilizziamo le seguenti notazioni:

$$f_l \equiv f_{z_l} = \frac{\partial f}{\partial z_l}, \ f_{\overline{z}} \equiv f_{\overline{z}_l} = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_l}$$

$$p \in \mathbb{C}^{n+1}, \ \partial_p f := (f_{z_1}(p), \dots, f_{z_{n+1}}(p)), \ \overline{\partial}_p f := (f_{\overline{z}_1}(p), \dots, f_{\overline{z}_{n+1}}(p)).$$

Consideriamo $\partial D := \{z \in \mathbb{C}^{n+1} / f(z) = 0\}$ varietà reale, bordo del dominio $D = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} / f(z) < 0\}$, ove $f : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{R}$ è una funzione reale di classe (almeno) C^2 e tale che

$$\partial_p f \neq 0 \ \forall p \in \partial D.$$

In questo caso si dice che f è funzione definente per D.
Osserviamo che la matrice Hessiana complessa definita nell'Introduzione $\mathscr{H}_p(f)$ è una matrice Hermitiana infatti

$$f_{j,\overline{k}} = \frac{\partial}{\partial z_j}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_k} = \frac{\partial}{\partial z_j}\overline{\frac{\partial \overline{f}}{\partial z_k}} = \overline{\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}\frac{\partial f}{\partial z_k}} = \overline{f_{k,\overline{j}}}.$$

Sotto queste ipotesi diamo la seguente definizione.

Definizione 2.1. La forma Hermitiana

$$\zeta \mapsto \Lambda_p(f,\zeta) := \langle \mathscr{H}_p^T(f)\zeta, \zeta\rangle = \sum_{j,k=1}^{n+1} f_{j,\bar{k}}\zeta_j\bar{\zeta}_k$$

ristretta al piano tangente complesso $T_p^{\mathbb{C}}(\partial D)$ è detta forma di Levi della funzione f nel punto p.
Definiamo anche la forma di Levi normalizzata

$$\zeta \mapsto L_p(f,\zeta) := \frac{\Lambda_p(f,\zeta)}{|\partial_p f|}.$$

Osservazione 2.1. La forma di Levi normalizzata non dipende dalla scelta della funzione definente f ma solo dal dominio D.
Più in generale, fissata $B = \{u_1,\dots,u_n\}$ base ortonormale di $T_p^{\mathbb{C}}(\partial D)$, chiamiamo matrice di Levi B-normalizzata di ∂D in $p \in \partial D$ la matrice Hermitiana

$$L_p(f,B) := \left(\frac{1}{|\partial_p f|}\langle \mathscr{H}_p^T(f)u_j, u_k\rangle\right)_{j,k=1,\dots,n}.$$

Allora, indicando con $\lambda(A)$ lo spettro di una matrice A, se f' e $B' = \{v_1,\dots,v_n\}$ sono rispettivamente un'altra funzione definente D e un'altra base ortonormale di $T_p^{\mathbb{C}}(\partial D)$, vale:

$$\lambda(L_p(f,B)) = \lambda(L_p(f',B')).$$

Dimostrazione. (vedi [7], Proposizione A.1) Siano $U = (u_1,\dots,u_n)$, $V = (v_1,\dots,v_n)$ e R la matrice ortonormale tale che $V = UR$. Indichiamo con $A(U) := \left(\langle \mathscr{H}_p^T(f)u_j, u_k\rangle\right)_{j,k=1}^n$. Allora vale

$$A^T(U) = U^*\mathscr{H}_p^T(f)U \quad A^T(V) = R^*U^*\mathscr{H}_p^T(f)UR = R^*A^T(U)R$$

quindi $A(U)$ e $A(V)$ hanno gli stessi autovalori.
Poichè f ed f' sono funzioni definenti D, si ha che esiste $\sigma > 0$ $\sigma \in C^1$ tale che $f' = \sigma f$ in un intorno di p (per una dimostrazione si veda [9], Capitolo II,

Lemma 2.5). ne segue $f'_{j,k}(p) = \sigma(p) f_{\overline{j},k}(p) + \sigma_{\overline{j}}(p) f_k(p) + \sigma_k(p) f_{\overline{j}}(p)$, quindi, per ogi $\zeta \in T_p^{\mathbb{C}}(\partial D)$,

$$\begin{aligned}\langle \mathscr{H}_p^T(f')\zeta, \zeta\rangle &= \sigma(p)\langle \mathscr{H}_p^T(f)\zeta,\zeta\rangle + \sum_{j,k=1}^{n+1} \sigma_{\overline{j}}(p) f_k(p)\overline{\zeta}_j \zeta_k + \sum_{j,k=1}^{n+1} \sigma_k(p) f_{\overline{j}}(p)\overline{\zeta}_j\zeta_k = \\ &= \sigma(p)\langle \mathscr{H}_p^T(f)\zeta,\zeta\rangle + 2Re(\langle \zeta, \overline{\partial}_p f\rangle \langle \overline{\partial}_p \sigma, \zeta\rangle) = \sigma(p)\langle \mathscr{H}_p^T(f)\zeta,\zeta\rangle\end{aligned}$$

D'altra parte $\partial_p f' = \sigma(p)\partial_p f$, così

$$L_p(f',\zeta) = \frac{1}{|\partial_p f'|}\langle \mathscr{H}_p^T(f')\zeta,\zeta\rangle = \frac{1}{|\partial_p f|}\langle \mathscr{H}_p^T(f)\zeta,\zeta\rangle = L_p(f,\zeta).$$

□

Conveniamo di chiamare autovalori di una forma Hermitiana $\langle Q\zeta, \zeta\rangle$ definita sul $\mathbb{C}$-spazio vettoriale V, gli autovalori della sua matrice associata $(\langle Qu_j, u_k\rangle)_{j,k}$ con $\{u_1, \dots u_n\}$ base di V e $n = dimV$. Grazie all'osservazione 2.1 possiamo dare la seguente definizione per D, con B arbitraria base di $T_p^{\mathbb{C}}(f)$.

Definizione 2.2 (Curvatura di Gauss-Levi o curvatura totale)**.** Si chiama curvatura totale di D in $p \in \partial D$ il prodotto degli autovalori della forma di Levi normalizzata

$$k_p(\partial D) := \prod_{\lambda_j \in \lambda(L_p(f,B))} \lambda_j = \det(L_p(f,B))$$

Proposizione 2.2. *Vale la seguente relazione*

$$k_p(\partial D) = -\frac{1}{|\partial_p f|^{n+2}} \det\begin{pmatrix} 0 & f_{\overline{1}} & \cdots & f_{\overline{n+1}} \\ f_1 & f_{1,\overline{1}} & \cdots & f_{1,\overline{n+1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n+1} & f_{n+1,\overline{1}} & \cdots & f_{n+1,\overline{n+1}} \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

dove tutte le derivate sono calcolate in p.

Dimostrazione. Sia $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ base ortonormale di $T_p^{\mathbb{C}}(f)$. Sia poi $A := (\langle \mathscr{H}_p^T(f)u_j, u_k\rangle)_{j,k}$. Poiché per definizione $T_p^{\mathbb{C}}(f) = (\overline{\partial}_p f)^{\perp}$, ponendo

$u_{n+1} := \dfrac{\partial_p f}{|\partial_p f|}$, otteniamo $\{u_1, \dots, u_n, u_{n+1}\}$ base ortonormale di $\mathbb{C}^{n+1}$. Chiamiamo U la sua matrice unitaria associata, $U = [u_1, \dots, u_n, u_{n+1}]$. Vale la relazione $A = \overline{U}^{-1}\mathscr{H}_p(f)\overline{U}$.
Consideriamo ora una base di $\mathbb{C}^{n+2}$ data come $\{v_0, \dots, v_{n+1}\}$ dove $v_0 = (1, 0, \dots, 0)$ e $v_j = (0, u_j)$ e definiamo la matrice Hermitiana

$$C := \begin{pmatrix} 0 & u_{n+1} \\ \overline{u_{n+1}} & \mathscr{H}_p(f) \end{pmatrix},$$

di dimensione $(n+2) \times (n+2)$. Coniughiamo C con la matrice unitaria $V := [v_0, \dots, v_{n+1}]$ e otteniamo la matrice M tale che $\det(M) = \det(C)$,

$$M := \overline{V}^{-1} C \overline{V} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & & \\ 0 & & A & \\ 1 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & & \\ 0 & & (\langle \mathscr{H}_p^T(f) u_j, u_k \rangle)_{j,k} & \\ 1 & & & \end{pmatrix}.$$

Ora sviluppiamo $\det(M)$ prima rispetto all'ultima riga, poi rispetto all'ultima colonna. Si ottiene, ricordando la definizione di forma di Levi normalizzata:

$$\begin{aligned} \det(M) &= (-1)^{(n+3)+(n+2)} \det((\langle \mathscr{H}_p^T(f) u_j, u_k \rangle)_{j,k}) = \\ &= -\det(|\partial_p f| L_p(f, B)) = \\ &= -|\partial_p f|^n k_p(\partial D) \end{aligned}$$

D'altra parte, esplicitando i coefficienti di C vale

$$\det(C) = \frac{1}{|\partial_p f|^2} \det \begin{pmatrix} 0 & f_{\overline{1}} & \dots & f_{\overline{n+1}} \\ f_1 & f_{1,\overline{1}} & \dots & f_{1,\overline{n+1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n+1} & f_{n+1,\overline{1}} & \dots & f_{n+1,\overline{n+1}} \end{pmatrix}$$

Eguagliando le ultime due equivalenze si ottiene la tesi. □

Vediamo ora un'altra maniera per poter esprimere la curvatura di Gauss-Levi. Dalla relazione che troveremo potremo impostare un problema differenziale legato a tale curvatura di tipo ellittico degenere. Definiamo

$$A_{j,\overline{k}}(f) := \langle \mathscr{H}_p^T(f) u_j, u_k \rangle$$

dove $B = \{u_1 \dots u_n\}$ è la base di $T_p^{\mathbb{C}}(\partial D)$ fissata nella maniera seguente: siccome $\partial_p f \neq 0$, assumiamo $\partial_{n+1} f(p) \neq 0$ e poniamo

$$u_j := e_j - \frac{\partial_j f(p)}{\partial_{n+1} f(p)} e_{n+1}$$

dove $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ è una base canonica di $\mathbb{C}^{n+1}$. Gli u_j risultano linearmente indipendenti perché lo sono gli e_j, di più appartengono al piano tangente complesso perché

$$\langle u_j, \overline{\partial}_p f\rangle = \sum_{k=1}^{n+1} \langle e_j - \frac{\partial_j f(p)}{\partial_{n+1} f(p)} e_{n+1}, f_{\overline{k}}(p) e_k\rangle = \partial_j f(p) - \frac{\partial_j f(p)}{\partial_{n+1} f(p)} \partial_{n+1} f(p) = 0.$$

Con tale scelta di B, risulta quindi:

$$A_{j,\overline{k}} = f_{j,\overline{k}} - \frac{\partial_{\overline{k}} f(p)}{\partial_{n+1} f(p)} f_{j,\overline{n+1}} - \frac{\partial_j f(p)}{\partial_{n+1} f(p)} f_{n+1,\overline{k}} + \frac{\partial_j f(p) \partial_{\overline{k}} f(p)}{|\partial_{n+1} f(p)|^2} f_{n+1,\overline{n+1}},$$

cioè, per ogni $j, k \in 1, \dots, n$

$$A_{j,\overline{k}} = -\frac{1}{|\partial_{n+1} f(p)|^2} \det \begin{pmatrix} 0 & f_{\overline{k}} & f_{\overline{n+1}} \\ f_j & f_{j,\overline{k}} & f_{j,\overline{n+1}} \\ f_{n+1} & f_{n+1,\overline{k}} & f_{n+1,\overline{n+1}} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Gli autovalori della forma di Levi normalizzata, che per l'osservazione 2.1 non dipendono dalla scelta della base B, possono essere scritti in funzione della matrice $n \times n$ complessa

$$A(f) := (A_{j,\overline{k}}(f))_{j,k=1 \dots n}.$$

Infatti

Proposizione 2.3. *Gli autovalori della forma di Levi normalizzata di ∂D nel punto $p \in \partial D$ sono gli autovalori della matrice*

$$C(f) := \frac{1}{|\partial_p f|} A(f) H(f)$$

dove

$$H(f) := I_n - \frac{\alpha \cdot \alpha^*}{1 + |\alpha|^2}$$

e $\alpha \cdot \alpha^*$ indica il prodotto delle matrici $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$ e $\alpha^* = (\overline{\alpha}_1, \dots, \overline{\alpha}_n)$, con $\alpha_j = \frac{f_j(p)}{f_{n+1}(p)}$.

Dimostrazione. Una dimostrazione è fornita in [7], Proposizione 2.1. □

Come prima osservazione di questa proposizione, vediamo come si può scrivere la curvatura totale in termini della matrice $A(f)$. Si ha, siccome $\det H(f) = \frac{1}{1+|\alpha|^2} = \dfrac{|f_{n+1}|^2}{|\partial_p f|^2}$:

$$k_p(\partial D) = \frac{|f_{n+1}|^2}{|\partial_p f|^{n+2}} \det A(f). \tag{2.3}$$

Diamo una definizione che risulterà utile in seguito.

Definizione 2.3 (Dominio pdeudoconvesso.)**.** Diciamo che un dominio $D \subset \mathbb{C}^{n+1}$ è pseudoconvesso (fortemente) se, detta f una funzione definente per D, la sua forma di Levi normalizzata è semidefinita positiva (definita positiva).

2.2 Nozione di soluzione viscosa per l'operatore LMA

Con la relazione (2.3) siamo pronti per introdurre il problema differenziale equivalente a trovare un dominio di $\mathbb{C}^{n+1}$ con curvatura di Gauss-Levi assegnata.
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ aperto limitato e $u \in C^2(\Omega)$. Chiamiamo

$$D = epi(u) = \big\{(z,t,s) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,/\, s > u(z,t)\big\} \text{ l'epigrafico di } u$$

$$\partial D = \big\{(z,t,s) \in \mathbb{C}^{n+1} \,/\, s = u(z,t)\big\}$$

Una funzione definente D è data da $f(z,t,s) = u(z,t) - s$. Ricordando

$$\partial_{z_j} = \frac{1}{2}\left(\partial_{x_j} - i\partial_{y_j}\right) \qquad \partial_{\overline{z_j}} = \frac{1}{2}\left(\partial_{x_j} + i\partial_{y_j}\right)$$

dove $z_j = x_j + iy_j = (x_j, y_j)$, osserviamo che valgono le relazioni:

$$\begin{array}{ll} f_j = \frac{1}{2}(u_{x_j} - iu_{y_j}) \ j = 1 \dots n & f_{\overline{k}} = \frac{1}{2}(u_{x_k} + iu_{y_k}), \ j = 1 \dots n \\ f_{n+1} = \frac{1}{2}(u_t + i) & f_{\overline{n+1}} = \frac{1}{2}(u_t - i), \\ f_{j,\overline{k}} = \frac{1}{4}(u_{x_j x_k} + u_{y_j y_k}) + i(u_{x_j y_k} - u_{x_k y_j}) & f_{n+1,\overline{n+1}} = \frac{1}{4}(u_{t,t}), \\ f_{j,\overline{n+1}} = \frac{1}{4}(u_{x_j t} - iu_{y_j t}) & f_{n+1,\overline{k}} = \frac{1}{4}(u_{x_k t} + iu_{y_k t}), \end{array} \tag{2.4}$$

$$\partial_p f = (u_{z_1}, \dots, u_{z_n}, \tfrac{1}{2}(\partial_t u + i)) = \tfrac{1}{2}(\partial_{x_1} u, -\partial_{y_1} u, \dots, \partial_{x_n} u, -\partial_{y_n} u, \partial_t u, 1).$$

Indichiamo $A(Du, D^2u) = A(f)$ e $k_\xi(u) = k_{(\xi, u(\xi))}(\partial D)$. Utilizzando la caratterizzazione data dalla relazione (2.3), si ottiene quindi

$$k_\xi(u) = \frac{1 + (u_t)^2}{2^{n+2}(1 + |Du|^2)^{\frac{n+2}{2}}} \det A(Du, D^2u) \tag{2.5}$$

Chiamiamo operatore di Levi-Monge-Ampere l'operatore del second'ordine

$$u \mapsto LMA(u) := \det A(Du, D^2u)$$

ed equazione di curvatura di Gauss-Levi la seguente:

$$\det(A(Du, D^2u)) = k(\xi, u) f(Du). \tag{2.6}$$

dove k è una funzione assegnata, $k > 0$ e $f(Du) = 2^n \dfrac{(1 + |Du|^{\frac{n+2}{2}})}{1 + (\partial_t u)^2}$.
Vorremo trovare soluzioni del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} LMA(u) = k(\xi, u) f(Du) & \xi \in \Omega \\ u = g & \xi \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.7}$$

dove $k > 0$ e $g \in C(\partial\Omega)$.

Avendo assegnato $k > 0$, l'equazione di curvatura ha senso solo quando la matrice $A(Du, D^2u)$ è semidefinita positiva. Per questo definiamo l'operatore associato all'equazione di curvatura in questo modo

$$F(\xi, r, p, X) := \begin{cases} k^{1/n}(\xi, p) f^{1/n}(p) - \det(A(p, X))^{1/n} & \text{se } A(p, X) \geq 0 \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Definizione 2.4 (funzione Levi convessa.)**.** Diciamo che $u \in C^2(\overline{\Omega})$ è Levi convessa in $\hat{\xi} \in \Omega$ se $L_{\hat{\xi}}(u) \equiv L_{(\hat{\xi}, u(\hat{\xi}))}(f) \geq 0$ $(f(\xi, s) = u(\xi) - s)$. Diciamo poi che è Levi convessa in Ω se lo è per ogni $\hat{\xi} \in \Omega$.

Proposizione 2.4. *u è Levi convessa se e solo se $A(Du, D^2u)$ è semidefinita positiva*

Dimostrazione. Una dimostrazione si può trovare in [8]. □

Indaghiamo sulle proprietà di F. Indichiamo con $\Re(A_{j,\overline{k}})$ e $\Im(A_{j,\overline{k}})$ rispettivamente la parte reale e immaginaria di $A_{j,\overline{k}}$. Dalle relazioni (2.4) e dalla (2.2) si ricava

$$\Re(A_{j,\overline{k}}) = u_{x_j x_k} + u_{y_j y_k} + a_j u_{x_k t} + a_k u_{x_j t} + b_j u_{y_k t} + b_k u_{y_j t} + (a_j a_k + b_j b_k) u_{tt} \quad (2.8)$$

$$\Im(A_{j,\overline{k}}) = u_{x_j y_k} - u_{x_k y_j} + a_j u_{y_k t} - a_k u_{y_j t} - b_j u_{x_k t} + b_k u_{y_j t} + (a_j b_k - b_j a_k) u_{tt} \quad (2.9)$$

dove

$$a_j = \frac{u_{y_j} - u_{x_j} u_t}{1 + (u_t)^2} \qquad b_j = \frac{-u_{x_j} - u_{y_j} u_t}{1 + (u_t)^2}.$$

Indichiamo con a e b rispettivamente i vettori di lunghezza n con componenti a_j e b_j. Possiamo quindi riscrivere la matrice $A(Du, D^2u)$ come

$$A(Du, D^2u) = \Sigma D^2 u \overline{\Sigma}^T \quad (2.10)$$

dove Σ è la matrice $n \times (2n+1)$

$$\Sigma = (I_n, -iI_n, a - ib).$$

Dalla relazione (2.10) possiamo ricavare subito che, se X, Y sono matrici simmetriche tali che $Y \leq X$, vale, per ogni $p \in \mathbb{R}^{2n+1}$

$$A(p, Y) \leq A(p, X). \quad (2.11)$$

Infatti se $X - Y \geq 0$, allora, per ogni fissato $\eta \in \mathbb{C}^n$ $\langle \Sigma(X - Y)\overline{\Sigma}^T \eta, \eta \rangle = \langle (X - Y)\overline{\Sigma}^T \eta, \overline{\Sigma}^T \eta \rangle \geq 0$. Quindi $\Sigma(X - Y)\overline{\Sigma}^T \geq 0$, cioè $\Sigma Y \overline{\Sigma}^T \leq \Sigma X \overline{\Sigma}^T$.

La relazione (2.11) implica l'ellitticità degenere dell'equazione di Levi Monge-Ampère ($k > 0$) sull'insieme delle funzioni Levi convesse. Verifichiamo infatti che l'operatore F è ellittico degenere, osservando che risolvere l'equazione (2.5) sulle funzioni Levi convesse è equivalente a risolvere $F = 0$. Siano dunque X e Y matrici simmetriche tali che $Y \leq X$. Allora, dalla (2.11), vale $A(p, X) \geq A(p, Y)$. Si presentano i seguenti casi:

- né $A(p, X)$ né $A(p, Y)$ sono semidefinite positive, allora $F(\xi, r, p, X) = F(\xi, r, p, Y) = \infty$;
- se $A(p, Y) \geq 0$, necessariamente anche $A(p, X) \geq 0$. In questo caso dunque, $F(\xi, r, p, X) = k^{1/n}(\xi, r) f^{1/n}(p) - \det^{1/n}(A(p, X)) \leq k^{1/n}(\xi, r) f^{1/n}(p) - \det^{1/n}(A(p, Y)) = F(\xi, r, p, Y)$.
- $A(p, X) \geq 0$ e $A(p, Y)$ non è semidefinita positiva, allora $F(\xi, r, p, X) = k^{1/n}(\xi, r) f^{1/n}(p) - \det^{1/n}(A(p, X)) \leq \infty = F(\xi, r, p, Y)$,

dunque $F(\xi, r, p, X) \leq F(\xi, r, p, Y)$.

Osserviamo che anche gli elementi diagonali A_{jj} sono operatori ellittici. Infatti

$$A_{jj}(Du, D^2u) = u_{x_jx_j} + u_{y_jy_j} + 2a_j u_{x_jt} + 2b_j u_{y_jt} + (a_j^2 + b_j^2) u_{tt}. \qquad (2.12)$$

Scriviamo gli operatori (2.12) come $-trace(M(p)X)$ dove

$$M(p) := \begin{pmatrix} 0 & & & \cdots & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & \vdots \\ & & 0 & & & & & 0 \\ & & & 1 & & & & a_j(p) \\ \vdots & & & & 1 & & & b_j(p) \\ & & & & & 0 & & 0 \\ & & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & 0 & \\ 0 & \dots & 0 & a_j & b_j & 0 & \dots \; 0 & a(p)^2 + b(p)^2 \end{pmatrix}$$

è una matrice $(2n+1) \times (2n+1)$ semidefinita positiva. Vale infatti

$$\langle M(p)\xi, \xi \rangle = (\xi_{2j-1} + a_j \xi_{2n+1})^2 + (\xi_{2j} + b_j \xi_{2n+1})^2 \geq 0.$$

Possiamo dunque concludere che l'operatore A_{jj} è ellittico degenere per quanto visto nell'esempio 1.4, operatore (1.25).

La definizione di soluzione viscosa per l'equazione di curvatura di Gauss-Levi (2.6) ricalca quella data nel capitolo 1 di soluzione viscosa per operatori ellittici degeneri. Poiché l'ellitticità degenere è garantita solo sull'insieme delle funzioni Levi-convesse, ci occuperemo di risolvere in maniera viscosa (vedi Capitolo 1) il problema

$$u \text{ Levi convessa in } \Omega \text{ e } \begin{cases} F(\xi, u, Du, D^2u) = 0 & \xi \in \Omega \\ u = g & \xi \in \partial\Omega \end{cases} \tag{PD2}$$

Definizione 2.5 (Levi convessità in senso viscoso.)**.** Diciamo che una funzione $u \in USC(\overline{\Omega})$ è (strettamente) Levi convessa in senso viscoso in $\hat{\xi} \in \Omega$ se per ogni $\varphi \in C^2(\Omega)$ tale che $u - \varphi$ ha massimo locale in $\hat{\xi}$ si ha $L_{\hat{\xi}}\varphi \geq 0$ (> 0). Diciamo che è Levi convessa in Ω se è Levi convessa in ogni punto di Ω.

Definizione 2.6 (Sopra-, Sotto- Soluzione dell'equazione di Levi-Monge-Ampère in senso viscoso.)**.** Diciamo che $u \in USC(\overline{\Omega})$ è una sottosoluzione viscosa dell'equazione (2.6) se

$$\forall \varphi \in C^2(\overline{\Omega}),\ \forall \hat{\xi} \text{ punto di massimo locale per } u - \varphi \text{ vale}$$

$$\begin{aligned} &\det(A(D\varphi(\hat{\xi}), D^2\varphi(\hat{\xi}))) \geq k(\hat{\xi}, u(\hat{\xi}))f(D\varphi(\hat{\xi})) && \text{in } \Omega \\ &\text{e } L_{\hat{\xi}}\varphi \geq 0 && \text{in } \Omega \end{aligned}$$

Diciamo che $v \in LSC(\Omega)$ è soprasoluzione in Ω se

$$\forall \varphi \in C^2(\overline{\Omega}),\ \forall \hat{\xi} \text{ punto di minimo locale per } u - \varphi \text{ vale}$$

$$L_{\hat{\xi}}\varphi \text{ non è semidefinita positiva, oppure}$$

$$\begin{aligned} &\det(A(D\varphi(\hat{\xi}), D^2\varphi(\hat{\xi}))) \leq k(\hat{\xi}, u(\hat{\xi}))f(D\varphi(\hat{\xi})) && \text{in } \Omega \\ &\text{e } L_{\hat{\xi}}\varphi \geq 0 && \text{in } \Omega \end{aligned}$$

Diciamo infine che $u \in C(\Omega)$ è soluzione viscosa in Ω se è contemporaneamente soprasoluzione e sottosoluzione.

Possiamo notare l'analogia con il problema di Dirichlet legato all'equazione di Monge-Ampère, ellittica sulle funzioni convesse, vista nell'Esempio 1.5.
Diamo ora la definizione di soluzione viscosa del problema di Dirichlet, senza sfruttare però la nozione di soluzione dell'equazione appena data nella Definizione 2.6, ma una ad essa equivalente (vedi Proposizione 2.6). Indichiamo con

$$F^*(\xi, r, p, X) := \limsup_{(x,s,q,Y)\to(\xi,r,p,X)} F((x,s,q,Y))$$
$$F_*(\xi, r, p, X) := \liminf_{(x,s,q,Y)\to(\xi,r,p,X)} F((x,s,q,Y))$$

rispettivamente gli inviluppi superiormente ed inferiormente semicontinui di F, discontinua.

Definizione 2.7 (Soluzione viscosa in senso generalizzato.)**.** Diciamo che $u \in USC(\overline{\Omega})$ è una sottosoluzione viscosa in senso generalizzato del problema (PD2) riscritto come

$$\begin{cases} F(\xi, u, Du, D^2u) = 0 & \xi \in \Omega \\ u(\xi) = g(\xi) & \xi \in \partial\Omega \end{cases}$$

se

$$\forall \varphi \in C^2(\overline{\Omega}),\ \forall \hat{\xi} \in \overline{\Omega} \text{ punto di massimo relativo per } u - \varphi \text{ in } \Omega \text{ si ha}$$

$$F_*(\hat{\xi}, u(\hat{\xi}), D\varphi(\hat{\xi}), D^2\varphi(\hat{\xi})) \leq 0 \text{ se } \hat{\xi} \in \Omega \tag{2.13}$$
$$\min\left\{F_*(\hat{\xi}, u(\hat{\xi}), D\varphi(\hat{\xi}), D^2\varphi(\hat{\xi})), u(\hat{\xi}) - g(\hat{\xi})\right\} \leq 0 \text{ se } \hat{\xi} \in \partial\Omega \tag{2.14}$$

Diciamo che $v \in LSC(\overline{\Omega})$ è soprasoluzione viscosa in senso generalizzato del problema (PD2) se

$$\forall \varphi \in C^2(\overline{\Omega}),\ \forall \hat{\xi} \in \overline{\Omega} \text{ punto di minimo relativo per } u - \varphi \text{ in } \Omega \text{ si ha}$$

$$F^*(\hat{\xi}, u(\hat{\xi}), D\varphi(\hat{\xi}), D^2\varphi(\hat{\xi})) \geq 0 \text{ se } \hat{\xi} \in \Omega \tag{2.15}$$
$$\max\left\{F_*(\hat{\xi}, u(\hat{\xi}), D\varphi(\hat{\xi}), D^2\varphi(\hat{\xi})), u(\hat{\xi}) - g(\hat{\xi})\right\} \geq 0 \text{ se } \hat{\xi} \in \partial\Omega \tag{2.16}$$

Osservazione 2.5. Le condizioni al bordo usuali $u - \varphi \leq 0$ ($\geq$ per soprasoluzioni) sono in questo caso rilassate. Le condizioni (2.14) e (2.16) sono da intendere nel senso che l'equazione deve valere fino al bordo quando la condizione al bordo non è assunta in senso classico. Vedremo nel paragrafo 2.3.1 che, sotto opportune ipotesi su Ω, questo tipo di condizioni implica quello classico.

Proposizione 2.6. *Sia $u \in USC(\overline{\Omega})$. Allora*
u è soluzione viscosa dell'equazione (2.6) in Ω se e solo se u è soluzione viscosa in senso generalizzato di $F = 0$ in Ω

Dimostrazione. Vediamo la prima implicazione. Sia u soluzione viscosa di (2.6) in Ω. Fissiamo $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$, $\hat{\xi} \in \Omega$ punto di massimo relativo per $u - \varphi$ in Ω. Dobbiamo vedere $F_*(\hat{\xi}, u(\hat{\xi}), D\varphi(\hat{\xi}), D^2\varphi(\hat{\xi})) \leq 0$. Osserviamo anzitutto che per ipotesi vale $F(\hat{\xi}, u(\hat{\xi}), D\varphi(\hat{\xi}), D^2\varphi(\hat{\xi})) \leq 0$ Fissiamo $\varepsilon > 0$ e consideriamo la matrice $Y_\varepsilon := D^2\varphi(\hat{\xi}) + \varepsilon I_{2n+1} > D^2\varphi(\hat{\xi})$. Allora

$$F(\hat{\xi}, u(\hat{\xi}), D\varphi(\hat{\xi}), Y_\varepsilon) \leq F(\hat{\xi}, u(\hat{\xi}), D\varphi(\hat{\xi}), D^2\varphi(\hat{\xi})).$$

Per l'arbitrarietà di ε possiamo quindi dire che per ogni intorno di $(\hat{\xi}, u(\hat{\xi}), D\varphi(\hat{\xi}), D^2\varphi(\hat{\xi}))$ in Ω esiste $(\hat{\xi}, u(\hat{\xi}), D\varphi(\hat{\xi}), Y_\varepsilon) \neq (\hat{\xi}, u(\hat{\xi}), D\varphi(\hat{\xi}), D^2\varphi(\hat{\xi}))$ in tale intorno tale che $F(\hat{\xi}, u(\hat{\xi}), D\varphi(\hat{\xi}), D^2\varphi(\hat{\xi})) \leq 0$. Ne viene in particolare che

$$\liminf_{(\xi,r,p,X)\to(\hat{\xi},u(\hat{\xi}),D\varphi(\hat{\xi}),D^2\varphi(\hat{\xi}))} F(\xi, r, p, X) \leq 0.$$

Vediamo il viceversa. Assumiamo u soluzione viscosa generalizzata di $F = 0$ in Ω. Fissiamo $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$. Supponiamo che $\hat{\xi} \in \Omega$ sia un punto di massimo locale per $u - \varphi$ in Ω. Allora, pochè u è sottosoluzione:

$$F_*(\hat{\xi}, u(\hat{\xi}), D\varphi(\hat{\xi}), D^2\varphi(\hat{\xi})) \leq 0,$$

che implica $L_{\hat{\xi}}(\varphi) \geq 0$. Se così non fosse infatti, sarebbe $A(\varphi)$ non semidefinita positiva, quindi $F(\hat{\xi}, u(\hat{\xi}), D\varphi(\hat{\xi}), D^2\varphi(\hat{\xi})) = +\infty$, in contraddizione con la semicontinuità inferiore di F_*. Ne viene quindi

$$\det(A(D\varphi(\hat{\xi}), D^2\varphi(\hat{\xi}))) \geq k(\hat{\xi}, u(\hat{\xi}))f(D\varphi(\hat{\xi}))$$

perchè se così non fosse, sarebbe $F(\hat{\xi}, u(\hat{\xi}), D\varphi(\hat{\xi}), D^2\varphi(\hat{\xi})) = +\infty$ che implicherebbe $L\varphi(\hat{\xi})$ non semidefinita positiva dalla definizione di F. Quindi u è sottosoluzione viscosa.
Supponiamo che $\hat{\xi} \in \Omega$ sia di minimo locale per $u - \varphi$ in Ω. Allora

$$F^*(\hat{\xi}, u(\hat{\xi}), D\varphi(\hat{\xi}), D^2\varphi(\hat{\xi})) \geq 0.$$

Se $L_{\hat{\xi}}(\varphi)$ non è semidefinita positiva, allora u è soprasoluzione viscosa per definizione. Assumiamo dunque che $L_{\hat{\xi}}(\varphi) \geq 0$. Abbiamo dunque i seguenti casi:

- $L_{\hat{\xi}}(\varphi) \geq 0$ e $L\varphi(\hat{\xi})$ ha almeno un autovalore nullo. In questo caso abbiamo
$$0 = \det(A(\varphi)) < k(\hat{\xi}, u(\hat{\xi}))f(D\varphi(\hat{\xi})).$$

- $L_{\hat{\xi}}(\varphi) > 0$. In questo caso, poiché $\varphi \in C^2$ e quindi $y \mapsto L_y\varphi$ continua, $\exists r > 0$ tale che $L_y(\varphi) > 0$ $\forall y \in B_r(\hat{\xi})$. Ne viene che
$$F^*(\hat{\xi}, u(\hat{\xi}), D\varphi(\hat{\xi}), D^2\varphi(\hat{\xi})) = F(\hat{\xi}, u(\hat{\xi}), D\varphi(\hat{\xi}), D^2\varphi(\hat{\xi})),$$
quindi
$$\det(A(\varphi)) \leq k(\hat{\xi}, u(\hat{\xi}))f(D\varphi(\hat{\xi})).$$

Quindi u è anche soprasoluzione viscosa. □

Osservazione 2.7. Attraverso i calcoli si vede che, presa $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ Levi convessa in Ω, essa è soluzione classica del problema di Dirichlet (PD2) se e solo se è una sua soluzione viscosa. Una dimostrazione si può trovare in [10].

2.3 Principio del confronto e risultati di esistenza

2.3.1 Perdita di condizioni al bordo

In questo paragrafo esaminiamo una proprietà dell'operatore di Levi Monge Ampere che sarà cruciale per innescare la dimostrazione del principio del

confronto.
Consideriamo $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ aperto limitato con bordo C^2. Denotiamo con d una funzione C^∞, uguale in un intorno di $\partial\Omega$ alla funzione distanza da $\partial\Omega$ che è positiva in Ω e negativa fuori da Ω. Denotiamo poi con $n(\xi) := -Dd(\xi)$ per ogni ξ in tale intorno. Se $\xi \in \partial\Omega$, $n(\xi)$ non è altro che la normale esterna ad Ω in ξ.
Introduciamo i seguenti insiemi:

$$\Sigma_- := \{\xi \in \partial\Omega \,/ \forall R > 0 \text{ vale una delle condizioni 2.17}\}$$

$$\Sigma_+ := \{\xi \in \partial\Omega \,/ \forall R > 0 \text{ vale una delle condizioni 2.18}\}$$

$$\liminf_{w\to\xi,\alpha\to 0^+} F\left(w,-R,\frac{-n(w)+o_\alpha(1)}{\alpha},-\frac{1}{\alpha}n(w)\otimes n(w)+\frac{o_\alpha(1)}{\alpha^2}\right) > 0 \quad (2.17a)$$

$$\liminf_{w\to\xi,\alpha\to 0^+} F\left(w,-R,\frac{-n(w)+o_\alpha(1)}{\alpha},-\frac{1}{\alpha}D^2d(w)+\frac{o_\alpha(1)}{\alpha^2}\right) > 0 \quad (2.17b)$$

$$\limsup_{w\to\xi,\alpha\to 0^+} F\left(w,R,\frac{n(w)+o_\alpha(1)}{\alpha},\frac{1}{\alpha}n(w)\otimes n(w)+\frac{o_\alpha(1)}{\alpha^2}\right) < 0 \quad (2.18a)$$

$$\liminf_{w\to\xi,\alpha\to 0^+} F\left(w,R,\frac{n(w)+o_\alpha(1)}{\alpha},-\frac{1}{\alpha}D^2d(w)+\frac{o_\alpha(1)}{\alpha^2}\right) < 0 \quad (2.18b)$$

dove $o_\alpha(1) \overset{\alpha\to 0^+}{\to} 0$ e $v\otimes v$ è la matrice $(v_iv_j)_{i,j=1}^{2n+1}$ per i vettori $v \in \mathbb{R}^{2n+1}$.
Poniamo infine

$$\Sigma := \partial\Omega \setminus (\Sigma_- \cup \Sigma_+).$$

Si dimostra che (vedi Capitolo 3 di [4])

$$\forall\xi \in \Sigma_- \text{ e } \forall u \text{ sottosoluzione viscosa di (PD2) si ha } u(\xi) \le g(\xi)$$

$$\forall\xi \in \Sigma_+ \text{ e } \forall v \text{ soprasoluzione viscosa di (PD2) si ha } v(\xi) \ge g(\xi)$$

In questo paragrafo assumiamo verificata l'ipotesi

$$\Omega\times i\mathbb{R} \text{ è fortemente pseudoconvesso e } \forall\xi\in\partial\Omega,\ \sup_{\overline{\Omega}\times i\mathbb{R}} k < k_{\partial\Omega\times i\mathbb{R}}(\xi) \quad \text{(HH1)}$$

e vediamo che è sufficiente per garantire

$$\Sigma = \emptyset. \tag{2.19}$$

Questo significa che $\forall \xi \in \partial\Omega$, $\forall u$ sottosoluzione e v soprasoluzione viscosa di (PD2) in Ω, si ha

$$u(\xi) \leq g(\xi) \leq v(\xi)$$

Proposizione 2.8. *Sotto l'ipotesi (HH1), per ogni punto di $\partial\Omega$ sono verificate le condizioni (2.17b) e (2.18b).*

Dimostrazione. Una dimostrazione si trova in [4], Paragrafo 3. □

2.3.2 Principio del confronto

Teorema 2.9. *Assumiamo (HH1). Supponiamo inoltre che valgano le ipotesi*

$$\forall R > 0\ \exists \gamma_R > 0 :\ \gamma_R(r-s) \leq k^{\frac{1}{n}}(\xi, r) - k^{\frac{1}{n}}(\xi, s)\ \forall \xi \in \overline{\Omega},\ -R \leq u \leq v \leq R, \tag{HH2}$$

$$\begin{gathered}\forall R > 0\ \forall (\xi, \zeta) \in \overline{\Omega}, |r| < R,\ \exists \omega_R : [0, +\infty] \to [0, +\infty],\ \omega_R(0^+) = 0 : \\ |k^{\frac{1}{n}}(\xi, r) - k^{\frac{1}{n}}(\zeta, r)| \leq \omega_R(|\xi - \zeta|).\end{gathered} \tag{HH3}$$

Siano $u \in USC(\overline{\Omega})$ e $v \in LSC(\overline{\Omega})$ rispettivamente una sottosoluzione ed una soprasoluzione viscosa di (PD2) in Ω, limitate. Allora $u \leq v$ su $\overline{\Omega}$.

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella del principio del confronto visto nel Teorema 1.6.
Supponiamo per contraddizione che $\max\limits_{\overline{\Omega}}(u - v) =: M > 0$. Dall'ipotesi (HH1), che rende valida la Proposizione 2.8, possiamo affermare che tale massimo è assunto in un punto interno $\hat{\xi}$, perché $u \leq g \leq v$ in $\partial\Omega$.
Consideriamo per $\varepsilon > 0$ il numero reale $M_\varepsilon := \max_{\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}} \left(u(\xi) - v(\zeta) - \dfrac{|\xi - \zeta|^2}{\varepsilon^2} \right)$ (per tornare alle notazioni del Lemma 1.8: $\alpha = 2/\varepsilon^2$). Poniamo $(\xi_\varepsilon, \zeta_\varepsilon) \in \overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$ il punto che realizza M_ε. Nella stessa maniera del Teorema 1.6 si vede che valgono le ipotesi del Lemma 1.8, così valgono le relazioni:

$$\frac{|\xi_\varepsilon - \zeta_\varepsilon|^2}{\varepsilon^2} \overset{\varepsilon \to 0}{\to} 0 \qquad u(\xi_\varepsilon) - v(\zeta_\varepsilon) \overset{\varepsilon \to 0}{\to} u(\hat{\xi}) - v(\hat{\xi}) = M$$

da cui anche
$$u(\xi_\varepsilon) \overset{\varepsilon\to 0}{\to} u(\hat{\xi}) \quad v(\zeta_\varepsilon) \overset{\varepsilon\to 0}{\to} u(\hat{\xi}).$$
Poiché $\hat{\xi} \in \Omega$, quindi per ε sufficientemente piccolo anche $(\xi_\varepsilon, \zeta_\varepsilon) \in \Omega \times \Omega$. Per u e v valgono quindi rispettivamente le relazioni (2.13) e (2.15) in ξ_ε e ζ_ε per ε piccolo.
Applichiamo a questo punto il Teorema 1.10 con $\phi(\xi, \zeta) = \frac{|\xi-\zeta|^2}{\varepsilon^2}$: per ε piccolo, per ogni $\delta > 0$, esistono X_ε e Y_ε matrici simmetriche tali che, chiamando $p_\varepsilon := \frac{2(\xi_\varepsilon - \zeta_\varepsilon)}{\varepsilon^2}$:
$$(p_\varepsilon, X_\varepsilon) \in \overline{J^{2,+}_\Omega u(\xi_\varepsilon)}, \quad (p_\varepsilon, Y_\varepsilon) \in \overline{J^{2,-}_\Omega v(\zeta_\varepsilon)} \text{ e vale}$$
$$-\left(\frac{1}{\delta} + ||A||\right) Id \leq \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -y \end{pmatrix} \leq A + \delta A^2 \text{ ove } A = D^2\phi(\xi_\varepsilon, \zeta_\varepsilon). \quad (2.21)$$
Poiché F^* e F_* sono semicontinue (rispettivamente superiromente e inferiormente), per la Proposizione 1.4, vale
$$F_*(\xi_\varepsilon, u(\xi_\varepsilon), p_\varepsilon, X_\varepsilon) \leq 0 \text{ e } F^*(\zeta_\varepsilon, u(\zeta_\varepsilon), p_\varepsilon, Y_\varepsilon) \geq 0.$$
Sottraendo le due disuguaglianze ed utilizzando le ipotesi (HH2), (HH3), si ottiene attraverso un calcolo analogo a quello in (1.11), per ogni $R > 0$:
$$\begin{aligned} 0 &< \gamma_R M \leq \gamma_R M_\varepsilon \leq \gamma_R(u(\xi_\varepsilon) - v(\zeta_\varepsilon)) \overset{\text{(HH2)}}{\leq} \\ &\leq k^{\frac{1}{n}}(\hat{\xi}, u(\hat{\xi})) - k^{\frac{1}{n}}(\hat{\xi}, v(\hat{\xi})) \overset{\text{(HH3)}}{\leq} \omega_R(|\xi_\varepsilon - \zeta_\varepsilon|). \end{aligned}$$
Ricordando che $|\xi_\varepsilon - \zeta_\varepsilon| \overset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$, si arriva ad una contraddizione.
Osserviamo che da (2.21) si ricava $X_\varepsilon \leq Y_\varepsilon$, allora vale, per la (2.11) $A(p_\varepsilon, X_\varepsilon) \leq A(p_\varepsilon, Y_\varepsilon)$.

□

2.3.3 Esistenza e unicità della soluzione viscosa

Teorema 2.10. *Assumiamo che valgano le ipotesi (HH1), (HH2) e (HH3) e*
$$\sup_{\overline{\Omega}\times\mathbb{R}} k < \frac{1}{\rho^n}, \text{ dove } \rho \text{ è il raggio della più piccola sfera contenente } \overline{\Omega}. \quad \text{(HH4)}$$
Allora, per ogni $g \in C(\partial\Omega)$ esiste un'unica soluzione viscosa di (PD2).

Dimostrazione. Per dimostrare il teorema di esistenza si usa il metodo di Perron.

Osserviamo che, poiché g è continua su un compatto, è possibile fissare M grande a sufficienza perché la funzione $\overline{u} := M$ sia una soprasoluzione viscosa di (PD2).

Sia ξ_0 il centro della sfera di minimo raggio ρ contenente $\overline{\Omega}$.

Grazie all'ipotesi (HH4), risulta poi che la funzione $\underline{u}(\xi) := (\rho^2 - |\xi - \xi_0|^2)^{1/2} - M$ è sottosoluzione viscosa di (PD2). Infatti, ponendo $f(\xi, s) := (\rho^2 - |\xi - \xi_0|^2)^{1/2} - M - s$, il suo luogo degli zeri è un sottoinsieme della sfera di raggio ρ, quindi in questo caso $k_{\{f=0\}} = 1/\rho^n$. Dunque $F(\xi, \underline{u}(\xi), D\underline{u}(\xi), D^2\underline{u}(\xi)) = -1/\rho + k^{1/n}(\xi, \underline{v}(\xi)) < 0$.

Utilizzando il metodo di Perron visto nel Teorema 1.12, riadattato alla situazione attuale come in [4] (vedi Corollario 4.1), possiamo dimostrare l'esistenza della soluzione viscosa.

L'unicità è garantita dal principio del confronto (vedi Teorema 2.9), valido in questo caso per le ipotesi (HH1)-(HH3). $\square$

Capitolo 3

Soluzioni classiche

Riportiamo alcuni risultati sulla regolarità della soluzione viscosa per (PD2) con $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ aperto limitato, le cui esistenza ed unicità sono garantite dal Teorema 2.10.
F. Da Lio e A. Montanari dimostrano in [4] (Teorema 1.1) che, sotto le ipotesi del Teorema 2.10[1], assumendo $k \in C^{0,1}(\overline{\Omega} \times U)$ per ogni $U \subset\subset \Omega$ e $g \in C^{1,1}(\partial\Omega)$, allora la soluzione viscosa di (PD2) è Lipschitz continua.
A. Montanari e F. Lascialfari dimostrano poi in [8] (Teorema 1.3) il seguente risultato:

Teorema 3.1. *Sia $0 < \alpha < 1$. Se $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ è una soluzione strettamente Levi convessa dell'equazione di Levi Monge-Ampère $LMA(u) = k(\xi, u)f(Du)$ e $k \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$ non si annulla mai ($k > 0$), allora $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Cerchiamo di capire in quali casi è possibile dire che le soluzioni Lipschitz continue sono anche $C^{2,\alpha}$, in maniera da ottenere un risultato di ipoellitticità per l'operatore di Levi Monge-Ampère.

[1] Si può ottenere lo stesso risultato con ipotesi che non implichino la monotonia stretta di k (vedi [4], Teorema 1.2).

3.1 In $\mathbb{R}^3$

Consideriamo il caso $n = 1$. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ aperto (limitato) e sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2. Dalla caratterizzazione espressa in (2.5) si ottiene che la curvatura di Gauss-Levi del suo grafico in $\mathbb{C}^2$ è

$$k_\xi(u) = \frac{1 + u_t^2}{8(1 + u_x^2 + u_y^2 + u_t^2)^{\frac{3}{2}}} \det(A(Du, D^2u)).$$

D'altra parte $A(Du, D^2u)$ è in questo caso un numero complesso, in particolare dalla relazione (2.12) si vede che

$$A(Du, D^2u) = \det(A(Du, D^2u)) = u_{xx} + u_{yy} + 2au_{xt} + 2bu_{yt} + (a^2 + b^2)u_{tt}$$

con $a = a(Du) = \dfrac{u_y - u_x u_t}{1 + u_t^2}$ e $b = b(Du) = -\dfrac{u_x + u_y u_t}{1 + u_t^2}$.
Osserviamo inoltre che vale $a^2 + b^2 = \dfrac{u_x^2 + u_y^2 + u_x^2 u_t^2 + u_y^2 u_t^2}{(1 + u_t^2)^2} = \dfrac{u_x^2 + u_y^2}{1 + u_t^2}$, dunque

$$k_\xi(u) = \frac{u_{xx} + u_{yy} + 2au_{xt} + 2bu_{yt} + (a^2 + b^2)u_{tt}}{8(1 + a^2 + b^2)^{3/2}(1 + u_t^2)^{1/2}}. \tag{3.1}$$

Chiamando $H(Du) = 8(1+a^2+b^2)^{3/2}(1+u_t^2)^{1/2}$, grazie al Teorema 2.10, sappiamo che, per k e Ω scelti sotto le ipotesi (HH1)-(HH4) esiste una soluzione viscosa di

$$\begin{cases} LMA(u) = k(\xi, u)H(Du) & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{in } \partial\Omega \end{cases}$$

con $g \in C(\partial\Omega)$.
Nel nostro caso $n = 1$, G. Citti, E. Lanconelli e A. Montanari hanno dimostrato in [2] (Teorema 1.1) il seguente risultato:

Teorema 3.2. *Sia $k \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$ tale che $k(\xi, s) \neq 0$ $\forall(\xi, s) \in \Omega \times \mathbb{R}$. Allora ogni soluzione viscosa Lipschitz continua è di classe $C^{2,\alpha}$.*

La dimostrazione si basa sulla particolare struttura dell'operatore di Levi Monge Ampère per $n = 1$. Esso, infatti, si può scrivere come

$$LMA(u) = (X^2u + Y^2u)(1 + u_t^2)$$

ove X e Y sono i campi vettoriali

$$X = \partial_x + a(p)\partial_t, \qquad Y = \partial_y + b(p)\partial_t.$$

Il punto cruciale è dato dal fatto che vale

$$[X, Y] = -\frac{LMA(u)}{1 + u_t^2}\partial_t.$$

Unendo i risultati dei Teoremi richiamati si ottiene dunque un risultato di ipoellitticità dell'operatore di Levi Monge-Ampere.

Teorema 3.3. *Supponiamo che valgano le ipotesi (HH1)-(HH4). Supponiamo inoltre che $k \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$ e $k(\xi, s) \neq 0$ $\forall(\xi, s) \in \Omega \times \mathbb{R}$. Allora per ogni $g \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ esiste una soluzione C^∞ di*

$$\begin{cases} LMA(u) = k(\xi, u)H(Du) & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{in } \partial\Omega \end{cases}$$

3.2 In $\mathbb{R}^{2n+1}$ con $n \geq 2$

La situazione per $n \geq 2$ è nettamente diversa da quella proposta nella sezione precedente. In effetti, C. E. Gutiérrez, E. Lanconelli e A. Montanari dimostrano nel Teorema 1 di [5] che la condizione di ipoellitticità trovata per $n = 1$ non è valida in dimensioni superiori. Precisamente:

Teorema 3.4. *Sia $n \geq 2$ e sia $k \in C^\infty(B_1 \times \mathbb{R})$ una funzione limitata e strettamente positiva che soddisfa una delle condizioni seguenti:*

(h1) $s \mapsto k(\xi, s)$ è strettamente crescente per ogni fissato $\xi \in B_1$,

(h2) k non dipende da ξ e non decrescente in s.

Allora esiste $r \in (0, 1)$ ed esiste u soluzione viscosa di

$$\det A(Du, D^2u) = k(\xi, u)f(Du) \text{ in } B_r$$

tale che $u \in C^{0,1}(\overline{B_r})$, ma $u \notin C^1(B_r)$ per $n = 2$ e $u \notin C^{1,\beta}$ per ogni $\beta > 1 - \frac{2}{n}$ per $n > 2$. Denotiamo con B_r la palla di centro l'origine e raggio r.

Bibliografia

[1] I. CAPUZZO DOLCETTA, *Soluzioni di viscosità*, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana Serie 8 4-B (2001), p. 1-29

[2] G. CITTI, E. LANCONELLI, A. MONTANARI, *Smoothness of Lipschitz Continuous graphs with nonvanishing Levi Curvature*, Acta Math. 188 (2002), no. 1, 87-128

[3] M. G. CRANDALL, H. ISHII and P.-L. LIONS, *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*, Bull. Amer. Math. Soc., 27 (1992), 1-67

[4] F. DA LIO, A. MONTANARI, *Existence and Uniqueness of Lipschitz continuous graphs with prescribed Levi curvature*, Ann. de L'Institute Henri Poincaré, Analyse non Linéaire (2006), p. 1-28

[5] C. GUTIÉRREZ, *The Monge-Ampère Equation*, Birkhauser, 2001

[6] C. GUTIÉRREZ, E. LANCONELLI, A. MONTANARI, *Nonsmooth hypersurfaces with smooth Levi curvature*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, Available online 6 September 2012

[7] A. MONTANARI, E. LANCONELLI, *Pseudoconvex fully nonlinear partial differential operators. Strong comparison theorems*, J. Differential Equations 202 (2) (2004) 306-331

[8] A. MONTANARI, F. LASCIALFARI, *The Levi Monge-Ampère equation: smooth regularity of strictly Levi convex solutions*, J. Geom. Anal 14 (2) 2004 331-353

[9] R.M. RANGE, *Holomorphic Functions and Integral Representation Formulas in Several Complex Variables*, Springer, New York, 1986

[10] Z. SLODKOWSKI, G. TOMASSINI, *The Levi equation in higher dimensions and relationships to the envelope of holomorphy*, Amer. J. Math. 116 (2) (1994) 479-499

Ringraziamenti

Questa Tesi di Laurea arriva al termine di un percorso di studi e di vita che mai avrei immaginato in questo modo. La mia strada si è arricchita di tappe non previste ma fondamentali, a volte da subito bellissime, altre volte di più difficile comprensione. Per una tale occasione di crescita emotiva e professionale devo ringraziare alcune persone fortunatamente incontrate negli ultimi due anni e altre conoscenze di più lunga data, pronte a spronarmi con tranquillità verso traguardi importanti.

La prima persona a cui voglio dire grazie è il mio Relatore di Tesi, il professore E. Lanconelli. Sono sempre rimasta colpita dalla passione con cui trasmetteva i Suoi insegnamenti durante le lezioni e nei colloqui individuali, tanto da vivere la Sua persona come stimolo di crescita negli studi di Matematica. Lo ringrazio, poi, per essere stato nei miei confronti un attento osservatore: sia durante il lavoro di tesi, sia in delicati momenti di scelte professionali e personali, ha individuato in me difficoltà e valori, mettendomi nella condizione di poter essere guidata al meglio dalla Sua esperienza.
Nel mio recente percorso di studi ho incontrato altri professori grazie ai quali ho avuto l'occasione di apprendere e formarmi: ringrazio in particolare la professoressa G. Citti per avermi guidato nel tirocinio, la professoressa M. Manaresi per essersi sempre interessata da vicino al mio percorso di studi e il professore A. Parmeggiani per essersi dimostrato tanto disponibile a spiegazioni e consigli.

Il ringraziamento più dolce va ai miei genitori Daniele e Stefania per non essersi tirati indietro di fronte a tutti gli sforzi che mi, e ci, hanno permesso di arrivare con il sorriso fino ad oggi.

Ringrazio gli amici di sempre Alberto, Andrea e Margherita per vivere tante cose insieme a me, per essere indipendenti l'uno dall'altro ma sempre interessati a partecipare nella vita altrui, per avermi soccorso e spronato. Ringrazio il gruppo allargato delle amiche di scuola per regalarmi spensieratezza e confronti allo stesso tempo. In particolare ringrazio Alice e Lucia per non lasciarmi sola neanche quando parlo tra me e me davanti ad un computer. Ringrazio Daniela per tutti gli spunti che mi ha dato e continua a darmi attraverso i suoi mille interessi e la sua voglia di condividerli con me. Ringrazio Giulio perché mi ha mostrato un modo molto bello di vivere la vita e per la pazienza nei dialoghi con lui, in matematica e in altro.

Ringrazio, in conclusione tutti quelli senza i quali non avrei ora la voglia di costruire un futuro con sorriso e determinazione.
"Tutto il resto era ancora nulla. *Inventarlo* - questo sarebbe stato meraviglioso." (A. Baricco, Oceano mare)