

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

**ANALISI DI FOURIER
E APPLICAZIONI AI MERCATI
ELETTRICI**

Tesi di Laurea in Finanza Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
ANDREA PASCUCCI

Presentata da:
ALICE BUCCIOLI

Seconda Sessione
Anno Accademico 2011/2012

*Se non puoi essere una via maestra, sii un sentiero.
Se non puoi essere il sole, sii una stella.
Sii sempre il meglio di ciò che sei.
Cerca di scoprire il disegno che sei chiamato ad essere,
poi mettiti a realizzarlo nella vita.*

MARTIN LUTHER KING

Introduzione

Questo lavoro è dedicato all'analisi spettrale del comportamento del prezzo del mercato dell'energia elettrica; il nostro obiettivo è quello di introdurre il lettore allo studio di metodi che permettono di calcolare le ciclicità presenti nel mercato elettrico. I *prezzi spot* dell'energia elettrica presentano spesso una struttura complessa, più complessa di quella dei prezzi spot di altri beni e di *asset* finanziari. La strana natura dei suddetti prezzi dipende dalle caratteristiche fisiche dell'energia elettrica, fra le quali le significative difficoltà nella produzione, nella trasmissione e nella distribuzione. Talvolta tali difficoltà si traducono solo in costi aggiuntivi incorporati nel prezzo finale, altre volte invece si osservano strani comportamenti nell'andamento dei prezzi, come nel caso degli *spikes*. Per esempio, l'elettricità consegnata in tempi e posti diversi è per gli utenti finali un bene non surrogabile con un altro bene e non accumulabile, quindi eccessi locali di domanda o di consumo di elettricità generano squilibri che si traducono in prezzi spikes.

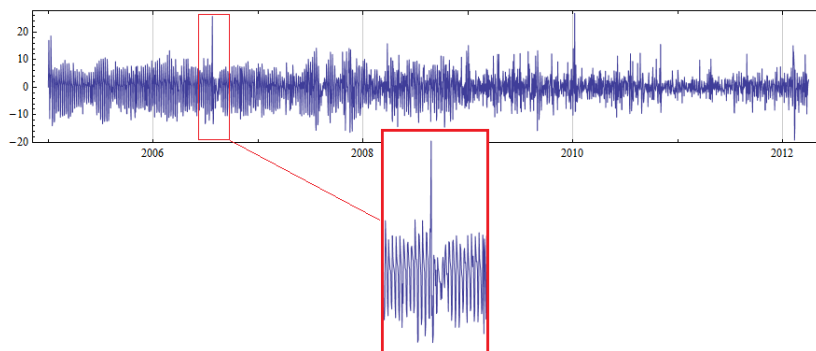


Figura 1: Serie storica dei prezzi del mercato elettrico con spike in dettaglio.

Ricordiamo che queste complicazioni non vengono affrontate quando si tratta con sottostanti puramente finanziari, quali ad esempio azioni, tassi d'interesse o tassi di cambio di valute. A differenza dell'andamento dei prezzi di molti asset finanziari, i prezzi giornalieri dell'energia elettrica non sono caratterizzati solo da un complesso comportamento stocastico ma sono fortemente influenzati da una componente periodica non trascurabile.

Ovviamente in questa trattazione non viene dedicato molto spazio all'analisi generica dei mercati dell'energia elettrica in quanto questa presuppone la conoscenza di molteplici nozioni economiche-finanziarie che esulano da questo lavoro. Per questo motivo, sarà trattata solo l'analisi della stagionalità dei prezzi dell'energia elettrica, dando rilievo agli aspetti più matematici e numerici.

L'importanza dell'Analisi di Fourier risiede nella sua applicazione in Finanza per descrivere il contenuto in frequenza di una serie storica di prezzi, utilizzando prevalentemente la *trasformata di Fourier*. Il primo capitolo di questo elaborato riguarderà appunto la trasformata di Fourier continua, della quale saranno trattate meno in profondità le proprietà per lasciare spazio ad una trattazione più incentrata sugli aspetti pratici di tale strumento. Nella nostra applicazione le funzioni che prenderemo in considerazione rappresenteranno l'andamento dei prezzi dell'energia elettrica e, grazie all'analisi di Fourier, ne studieremo la ciclicità. Richiedere che queste funzioni appartengano agli spazi $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $L^1(\mathbb{R})$ o $L^2(\mathbb{R})$ sarebbe un'ipotesi troppo limitativa, in quanto i modelli del mercato elettrico sono ben descritti, in generale, da funzioni trigonometriche. Pertanto nel secondo capitolo presenteremo una nozione più generale di trasformata di Fourier, definendola per una classe di oggetti che a loro volta generalizzano il concetto di funzione, le distribuzioni. La risoluzione di un problema pratico, quale l'analisi di una serie finita di dati, richiede l'utilizzo di una particolare forma della trasformata di Fourier, la *trasformata discreta di Fourier*, della quale verranno approfonditi il funzionamento, il significato matematico e l'interesse numerico all'interno del terzo capitolo. A seguire, verrà studiata nel dettaglio la periodicità di una serie reale di prezzi dell'energia elettrica (fornita dal Gestore dei Mercati Energetici) che ricoprono l'intervallo temporale dal 2005 ad oggi. Oltre al caso particolare della trasformata di Fourier, viene introdotto anche un secondo strumento che, insieme alla suddetta trasformata, confluisce nell'Analisi di Fourier, le *serie di Fourier*. Il quinto ed ultimo capitolo accoglierà la teoria delle serie di Fourier e uno sviluppo teorico sugli spazi di Hilbert astratti ausiliario alla formulazione di un importante risultato di convergenza quadratica delle suddette serie. Infine, in Appendice verranno raccolte le dimostrazioni di importanti risultati che si riveleranno fondamentali nello studio della trasformata di Fourier (prima sezione) e nella costruzione di una base ortonormale per lo spazio di Hilbert infinito dimensionale $L^2(\mathbb{R}^n)$ (seconda sezione).

Origine e sviluppo storico

La teoria delle serie trigonometriche può dirsi che abbia avuto origine dal problema delle corde vibranti. Consideriamo, in un piano σ , un sistema di assi cartesiani ortogonali x e y e immaginiamo tesa, fra due punti O e O' dell'asse delle x , una corda elastica, omogenea. Spostiamola, sempre nel piano σ , dalla sua posizione di equilibrio e lasciamola poi vibrare liberamente. Allora, indicando con $y(x, t)$ lo spostamento che presenta, al tempo t , il suo punto di ascissa x , il problema analitico da risolvere consiste nel determinare la funzione $y(x, t)$. La prima soluzione generale di questo problema fu data, nel 1747, da J. D'Alembert, ma su di essa si accese subito una lunga e vivace disputa, alla quale parteciparono, con altri, L. Eulero e Daniele Bernoulli. Partendo da certe soluzioni particolari del problema (indicate da B. Taylor), corrispondenti al fatto fisico che una corda di lunghezza l può dare, oltre al proprio suono fondamentale, anche quelli delle corde di lunghezza $\frac{l}{2}, \frac{l}{3}, \dots, \frac{l}{n}, \dots$, e osservando che la stessa corda può generare contemporaneamente questi vari suoni, D. Bernoulli affermò, nel 1753, che la soluzione generale del problema delle corde vibranti è espressa dalla serie

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi\alpha t}{l}\right)$$

dove α e tutte le a_n sono costanti. Eulero fece subito rivelare che, contando il tempo t dal principio delle vibrazioni, per $t = 0$ la soluzione precedente deve rappresentare la forma, che è del tutto arbitraria, assunta dalla corda con lo spostamento iniziale; e siccome, per $t = 0$, la formula soprascritta dà la serie trigonometrica

$$y(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

ne trasse la conseguenza che, ammettendo l'esattezza della soluzione di Bernoulli, deve anche ammettersi che ogni funzione, o, geometricamente parlando, ogni curva, incontrata in un sol punto al più da ogni parallela all'asse delle y , può essere rappresentata da una serie trigonometrica. Ciò era in contrasto con il concetto di funzione che allora si aveva e fu pertanto ritenuto come cosa assurda. Fourier in una nota letta all'Académie

des sciences di Parigi nel 1807, e in altri lavori successivi, superato il vecchio concetto di funzione, affermò risolutamente la sviluppabilità in serie trigonometrica di ogni funzione $f(x)$ e determinò i coefficienti di tale sviluppo, ottenendo quella serie che poi venne chiamata *serie di Fourier*. Gli studi che fiorirono dopo la morte di Fourier, portati avanti da tanti studiosi fra i quali spiccano L. Dirichlet, R. Lipschitz, U. Dini e C. Jordan, precisarono poi le condizioni di effettiva validità dello sviluppo in serie di Fourier. Così le serie di Fourier divennero uno strumento utilissimo nella rappresentazione analitica delle funzioni, tanto nelle matematiche pure quanto in quelle applicate, in particolare dovunque si debbano rappresentare analiticamente fenomeni periodici.

Indice

1	Trasformata di Fourier	7
1.1	Prime proprietà della trasformata di Fourier	7
1.2	Formula di inversione della trasformata di Fourier	10
2	Trasformata di Fourier in senso distribuzionale	11
3	Applicazioni della trasformata di Fourier	16
3.1	Trasformata discreta di Fourier	16
3.2	Esempi di applicazione della Trasformata Discreta di Fourier	20
3.3	Applicazione ai mercati elettrici	25
4	Serie di Fourier reali	31
4.1	Polinomi trigonometrici reali	31
4.2	Polinomi di Fourier	34
4.3	Polinomi di Fourier di funzioni in $L^2([-\pi, \pi[)$	41
4.4	Serie di Fourier e convergenza in norma L^2	50
4.5	Serie di Fourier complesse	54
4.6	Dalla serie alla trasformata di Fourier	55
A	Appendice	56
A.1	Trasformata di Fourier	56
A.2	Spazi di Hilbert	61
	Bibliografia	63

Capitolo 1

Trasformata di Fourier

In questa sezione richiamiamo brevemente la nozione di trasformata di Fourier e presentiamo le sue principali proprietà. Anticipiamo che si tratta solo di un richiamo: alcune proposizioni saranno provate nella sezione A.1 dell'Appendice e, per una trattazione completa, rinviamo a [5](Capitolo 9).

Definizione 1.1. Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e sia $\xi \in \mathbb{R}^n$. Definiamo *trasformata di Fourier* di f la seguente funzione di ξ :

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x) dx$$

ove $\langle x, \xi \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \xi_j$.

1.1 Prime proprietà della trasformata di Fourier

Presentiamo di seguito alcune proprietà significative della trasformata di Fourier che risulteranno utili nel corso della nostra trattazione.

CONTINUITÀ DELLA TRASFORMATA DI FOURIER

Proposizione 1.1. Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ fissata. Allora la sua trasformata di Fourier $\mathcal{F}f$ è continua in \mathbb{R}^n .

LIMITATEZZA DELLA TRASFORMATA DI FOURIER

Proposizione 1.2. *Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ fissata. Allora per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$ vale:*

$$|\mathcal{F}f(\xi)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Dalla proposizione precedente segue direttamente:

- $\mathcal{F}f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$,
- $\|\mathcal{F}f\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$.

Pertanto la trasformata di Fourier risulta un'applicazione lineare e continua

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n) \\ f &\longrightarrow \mathcal{F}f. \end{aligned}$$

COMPORAMENTO ALL'INFINITO DELLA TRASFORMATA DI FOURIER

Proposizione 1.3. *Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ fissata. Allora*

$$\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \mathcal{F}f(\xi) = 0.$$

Proposizione 1.4. *Sia f in $L^1(\mathbb{R}^n)$ fissata. Supponiamo che esista la derivata (in senso debole) $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ e che tale applicazione sia in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora*

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = -\xi_j \mathcal{F}f(\xi).$$

Osservazione 1. In generale, la trasformata di Fourier di una funzione sommabile non è una funzione sommabile. Consideriamo, ad esempio, la trasformata di Fourier della funzione indicatrice dell'intervallo $[-a, a]$, $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$. Anzitutto mostriamo che $\chi_{[-a, a]} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\chi_{[-a, a]}| dx = \mu([-a, a]) < +\infty$$

poiché $[-a, a]$ è compatto.

Calcoliamo la trasformata di Fourier.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\chi_{[-a, a]})(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} \chi_{[-a, a]} dx = \int_{-a}^a e^{-ix\xi} dx = \\ &= \left[\frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi} \right]_{-a}^a = \frac{e^{-ia\xi} - e^{ia\xi}}{-i\xi} = 2 \frac{\sin(a\xi)}{\xi}. \end{aligned}$$

Tale applicazione non appartiene a $L^1(\mathbb{R}^n)$ infatti,

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| 2 \frac{\sin(a\xi)}{\xi} \right| d\xi &= (\text{poiché } \left| 2 \frac{\sin(a\xi)}{\xi} \right| \text{ è una funzioni pari}) \quad 4 \int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin(a\xi)}{\xi} \right| d\xi = \\
 &= 4 \int_0^1 \left| \frac{\sin(a\xi)}{\xi} \right| d\xi + 4 \int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin(a\xi)}{\xi} \right| d\xi \geq \\
 &\geq (|\sin(a\xi)| \leq 1 \text{ da cui } |\sin(a\xi)|^2 \leq |\sin(a\xi)|) \quad 4 \int_0^1 \left| \frac{\sin(a\xi)}{\xi} \right| d\xi + \\
 &+ 4 \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(a\xi)}{|\xi|} d\xi = 4 \int_0^1 \left| \frac{\sin(a\xi)}{\xi} \right| d\xi + 4 \int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos(2a\xi)}{2|\xi|} d\xi = \\
 &= 4 \int_0^1 \left| \frac{\sin(a\xi)}{\xi} \right| d\xi + 2 \int_1^{+\infty} \frac{1}{|\xi|} d\xi - 2 \int_1^{+\infty} \frac{\cos(2a\xi)}{|\xi|} d\xi = +\infty
 \end{aligned}$$

in quanto,

- La funzione integranda $\left| \frac{\sin(a\xi)}{\xi} \right|$ è una funzione continua sull'intero intervallo $[0, 1]$. Ne segue che la suddetta funzione è integrabile e, poichè l'intervallo $[0, 1]$ è chiuso e limitato, l'integrale risulta finito.

- $2 \int_1^{+\infty} \frac{1}{|\xi|} d\xi = 2 \int_1^{+\infty} \frac{1}{\xi} d\xi = 2 [\log(\xi)]_{\xi=1}^{\xi=+\infty} = 2 \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \log(\xi) - 2 \log(1) = +\infty.$

- $-2 \int_1^{+\infty} \frac{\cos(2a\xi)}{|\xi|} d\xi < +\infty$ infatti, per il criterio di convergenza per integrali di funzioni oscillanti, la funzione

$$\xi \longrightarrow \cos(2a\xi)$$

è continua con una primitiva limitata (la funzione $\frac{1}{2a} \sin(2a\xi)$) su $[1, +\infty[$. Inoltre $-\frac{2}{|\xi|}$ è una funzione monotona su $[1, +\infty[$ e con limite 0 per $\xi \rightarrow +\infty$.

1.2 Formula di inversione della trasformata di Fourier

Come abbiamo previamente osservato, lo spazio $L^1(\mathbb{R}^n)$ non risulta un ambiente naturale in cui operare con la trasformata di Fourier in quanto l'immagine della trasformata di Fourier non rimane inclusa nello spazio $L^1(\mathbb{R}^n)$. Specifichiamo inoltre che la trasformata di Fourier non è un'applicazione suriettiva in $L^1(\mathbb{R}^n)$: per dimostrare tale fatto occorre trovare una funzione in $L^1(\mathbb{R}^n)$ che non sia la trasformata di Fourier di una qualche funzione. Ora, ricordiamo che qualunque sia la funzione f in $L^1(\mathbb{R}^n)$, la trasformata di Fourier $\mathcal{F}f$ è continua dunque se prendiamo una funzione f in $L^1(\mathbb{R}^n)$ non continua, questa non può essere la trasformata di Fourier di una qualche funzione proprio perché se lo fosse sarebbe continua. A sostegno di quanto appena detto proponiamo il seguente semplice esempio.

Esempio 1. Sia χ_K la funzione caratteristica di un certo compatto K . Evidentemente tale funzione non è continua, ma sappiamo appartenere allo spazio $L^1(\mathbb{R}^n)$ (cfr. Osservazione 1, pag.8). Pertanto non essendo continua, per la Proposizione 1.1, la funzione caratteristica non può essere la trasformata di Fourier di alcuna funzione.

Per le motivazioni sopra descritte, definiamo dunque un nuovo spazio di funzioni detto *spazio di Schwartz* e indicato con $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Definizione 1.2. Denotiamo con $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ lo spazio delle funzioni $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tali che:

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} x^\alpha D^\beta \varphi(x) = 0$$

per ogni multiindice α, β .

Proposizione 1.5. Sia $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ fissata. Allora $\mathcal{F}f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Notiamo che questa Proposizione è una generalizzazione della Proposizione 1.3. Per la dimostrazione, rimandiamo alla Proposizione A.5 dell'Appendice.

TEOREMA - 1.6. L'applicazione lineare continua $\mathcal{F}|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}$ è una biezione e per ogni $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vale

$$f(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, \xi \rangle} \mathcal{F}f(x) dx = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}\mathcal{F}f(-\xi), \quad (1.1)$$

detta *formula di inversione della trasformata di Fourier*.

Capitolo 2

Trasformata di Fourier in senso distribuzionale

L'applicazione che tratteremo in seguito, come già anticipato, è quella relativa ai modelli del mercato energetico; in tale contesto le funzioni prese in considerazione rappresenteranno l'andamento dei prezzi e, mediante l'analisi di Fourier, ne studieremo la periodicità. Richiedere che queste funzioni siano negli spazi $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $L^1(\mathbb{R})$ o $L^2(\mathbb{R})$ sarebbe troppo restrittivo, in quanto i modelli di cui sopra sono ben descritti, in generale, da funzioni trigonometriche, pertanto introduciamo in questo capitolo una nozione più generale di trasformata di Fourier, definendola per una classe di oggetti che a loro volta generalizzano il concetto di funzione, che chiameremo distribuzioni.

Osservazione 2. Condizione necessaria e sufficiente affinché $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{|\alpha| \leq p} (1 + \|x\|)^p |D^\alpha \varphi(x)| < +\infty$$

per ogni $p \in \mathbb{N}$.

Definizione 2.1. Sia $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ un'applicazione lineare. Diremo che T è una *distribuzione temperata* se esistono $C > 0$ e $p \in \mathbb{N}$ tali che:

$$|\langle T | \varphi \rangle| \leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{|\alpha| \leq p} (1 + \|x\|)^p |D^\alpha \varphi(x)|$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Notazione. Nel seguito, denoteremo con $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ lo spazio delle distribuzioni temperate su \mathbb{R}^n .

Definizione 2.2. Diremo che

- $f \in K_p(\mathbb{R}^n)$, per $1 \leq p < +\infty$, se esiste $M \geq 0$ tale che la funzione

$$x \longrightarrow \frac{|f(x)|^p}{(1 + \|x\|^2)^M}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

è sommabile.

- $f \in K_\infty(\mathbb{R}^n)$ se esiste $M \geq 0$ per cui

$$\text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{(1 + \|x\|^2)^M} < +\infty.$$

Esempio 2. Un primo esempio di distribuzione temperata è la distribuzione δ_{x_0} ,

$$\langle \delta_{x_0} | \varphi \rangle = \varphi(x_0)$$

detta *delta di Dirac* di centro x_0 . Mostriamo che $\delta_{x_0} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Vale

$$|\varphi(x_0)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\varphi(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{|\alpha| \leq p} (1 + \|x\|)^p |D^\alpha \varphi(x)|$$

da cui $\delta_{x_0} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Esempio 3. (*Distribuzioni regolari*) Sia $1 \leq p \leq +\infty$ e sia $f \in K_p(\mathbb{R}^n)$. Poniamo

$$T_f : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \langle T_f | \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot \varphi(x) dx$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

T_f è una distribuzione temperata (per la dimostrazione si veda [4](Esercizio.1, pag. 41)).

Nel seguito, diremo che una distribuzione temperata T ammette *densità* f se

$$T = T_f$$

per un'opportuna f ; tale distribuzione si dice *regolare*.

Mostriamo un esempio di distribuzione regolare. Sia

$$f(x) = \cos(x), \quad n = 1,$$

allora

$$\frac{|\cos(x)|^p}{(1+||x||^2)^M} \leq \frac{1}{(1+||x||^2)^M} \quad \forall M \geq 0$$

da cui

$$\cos(x) \in K_p(\mathbb{R}).$$

Risulta dunque ben definita la distribuzione T_{\cos} ,

$$\langle T_{\cos} | \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \cos(x) \varphi(x) dx.$$

Notazione. Sia $f \in K_p(\mathbb{R}^n)$, denotiamo con T_f la distribuzione con densità f .

Definizione 2.3. Sia $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ fissata. Definiamo *trasformata di Fourier* di T l'applicazione $\mathcal{F}T$ data da:

$$\langle \mathcal{F}T | \varphi \rangle = \langle T | \mathcal{F}\varphi \rangle \quad (2.1)$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

In realtà la trasformata di Fourier sopra definita è ben più di un'applicazione, vale infatti il seguente teorema.

TEOREMA - 2.1. *La trasformata di Fourier di una distribuzione temperata è una distribuzione temperata.*

Osservazione 3. Sia $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Indichiamo con $p(T)$ la distribuzione definita nel seguente modo

$$\langle p(T) | \varphi \rangle = \langle T | (\xi \rightarrow \varphi(-\xi)) \rangle.$$

Vale allora la seguente *formula di inversione*

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}\mathcal{F}(T) = p(T). \quad (2.2)$$

Dimostrazione. Sia $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Calcoliamo $\frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}\mathcal{F}(T)$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^n} \langle \mathcal{F}\mathcal{F}T | \varphi \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^n} \langle \mathcal{F}T | \mathcal{F}\varphi \rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \langle T | \mathcal{F}\mathcal{F}\varphi \rangle = \\ &= \left\langle T \left| \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}\mathcal{F}\varphi \right. \right\rangle = \langle T | \varphi(-\xi) \rangle \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Quindi abbiamo dimostrato che per ogni φ

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}\mathcal{F}T = p(T)$$

ovvero la distribuzione $\frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}\mathcal{F}T$ agisce come la distribuzione T su $\varphi(-\xi)$. □

Esempio 4. Calcoliamo la trasformata di Fourier della distribuzione δ_{x_0} . Abbiamo:

$$\langle \mathcal{F}\delta_{x_0} | \varphi \rangle = \langle \delta_{x_0} | \mathcal{F}\varphi \rangle = \mathcal{F}\varphi(x_0)$$

Ora

$$\mathcal{F}\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} \varphi(\xi) d\xi$$

da cui

$$\langle \mathcal{F}\delta_{x_0} | \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_0\xi} \varphi(\xi) d\xi$$

essendo $e^{-ix_0\xi} \in K_p(\mathbb{R}^n)$

$$\langle \mathcal{F}\delta_{x_0} | \varphi \rangle = \langle e^{-ix_0\xi} | \varphi \rangle$$

da cui

$$\mathcal{F}\delta_{x_0} = e^{-ix_0\xi}.$$

Abbiamo dimostrato dunque che la trasformata di Fourier della distribuzione δ_{x_0} è la funzione esponenziale.

Esempio 5. Calcoliamo la trasformata di Fourier della funzione coseno. Anzitutto consideriamo la distribuzione $\frac{\delta_1 + \delta_{-1}}{2}$, si ha

$$\left\langle \frac{\delta_1 + \delta_{-1}}{2} | \varphi \right\rangle = \frac{1}{2} (\varphi(1) + \varphi(-1))$$

da cui

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\frac{\delta_1 + \delta_{-1}}{2}\right) &= \frac{1}{2} (\mathcal{F}\delta_1 + \mathcal{F}\delta_{-1}) = \frac{1}{2} (e^{-i\xi} + e^{i\xi}) = \\ &= \frac{1}{2} (\cos(-\xi) + i \sin(-\xi) + \cos(\xi) + i \sin(\xi)) = \cos(\xi). \end{aligned}$$

Ora, ricordando (2.2) vale

$$\mathcal{FT}_{\cos} = \mathcal{FF} \frac{\delta_1 + \delta_{-1}}{2} = 2\pi p\left(\frac{\delta_1 + \delta_{-1}}{2}\right) = \pi p(\delta_1 + \delta_{-1})$$

ma

$$p(\delta_1 + \delta_{-1}) = \delta_1 + \delta_{-1}$$

quindi

$$\mathcal{FT}_{\cos} = \pi (\delta_1 + \delta_{-1})$$

Osserviamo esplicitamente che la funzione coseno non appartiene a $L^1(\mathbb{R}^n)$, dunque non è possibile calcolare la trasformata di Fourier secondo la definizione “classica”. Grazie all’introduzione delle distribuzioni siamo quindi riusciti a risolvere questo problema: rivalutando la funzione coseno come distribuzione è possibile determinare la sua trasformata di Fourier. Purtroppo però, lavorando a questo livello, non è sperabile che tale trasformata di Fourier sia una funzione ed il risultato è effettivamente una distribuzione temperata.

Capitolo 3

Applicazioni della trasformata di Fourier

In questo terzo capitolo presenteremo qualche importante interesse pratico della trasformata di Fourier, studiata nei primi capitoli. Vedremo come la suddetta trasformata sia largamente utilizzata in teoria dei segnali per l'analisi in frequenza di funzioni variabili nel tempo. La trasformata di Fourier è uno strumento che permette di ottenere una rappresentazione spettrale del segnale, ovvero una descrizione della densità di ampiezza dell'insieme delle funzioni trigonometriche che compongono il segnale in funzione della frequenza. Un segnale può essere infatti scomposto in altre funzioni, ovvero può essere costruito sommando un numero finito o infinito di funzioni più semplici per esempio, come vedremo dettagliatamente nel prossimo capitolo, le funzioni periodiche possono essere approssimate da serie di Fourier attraverso funzioni trigonometriche. Precisiamo che la risoluzione di un problema pratico richiederà l'utilizzo di una particolare forma della trasformata di Fourier, la trasformata *discreta* di Fourier, che scopriremo essere un potente strumento numerico in buona parte dovuto all'esistenza di un algoritmo, la trasformata di Fourier veloce, che permetterà di calcolare la trasformazione discreta in maniera rapida. Questo capitolo si concluderà con l'applicazione che più ci interessa in questa trattazione, l'analisi dei prezzi dei mercati dell'energia elettrica.

3.1 Trasformata discreta di Fourier

In questa sezione esaminiamo, con l'aiuto del software *Mathematica*, un metodo per l'analisi di segnali che può essere collocato all'interno dell'*Analisi di Fourier*.

Notazione. Denominiamo *segnale* una qualunque funzione f che dipende dalla variabile temporale t e la denotiamo con $f(t)$.

L'obiettivo dell'Analisi di Fourier è quello di evidenziare proprietà di un segnale che non sono deducibili dal suo andamento temporale, quali ad esempio la frequenza. Si effettua dunque una “*proiezione*” del segnale, ovvero si trasforma il segnale e lo si rappresenta in un dominio “*virtuale*” nel quale si possono ricavare più facilmente le informazioni ricercate: la trasformata di Fourier effettua una proiezione da un dominio del tempo ad un dominio della frequenza.

Sia f un segnale definito in un intervallo limitato I , ovvero un vettore di lunghezza N , con $N \in \mathbb{N}$. Consideriamo il segnale f prolungato ad un segnale periodico con periodo N . In questo modo si ha che $f(n)$ è definito per ogni $n \in \mathbb{R}$, con la proprietà

$$f(n + N) = f(n - N) = f(n).$$

Questa estensione del segnale permette il calcolo della trasformata di Fourier e quindi la descrizione, in funzione delle frequenze, della densità di ampiezza delle funzioni trigonometriche che compongono il segnale, data dall' $\int_I |\mathcal{F}f(x)| dx$.

La *Trasformata Discreta di Fourier* (spesso abbreviata a DFT, Discrete Fourier Transform) è l'equivalente della trasformata di Fourier per segnali a tempo discreto. Tale trasformazione è un argomento di grande interesse pratico grazie al suo utilizzo per il calcolo numerico della trasformata di Fourier di segnali a tempo continuo: viene utilizzata nell'analisi di Fourier per verificare numericamente se la funzione in esame ha un andamento che si ripete nel tempo e con quali frequenze eventualmente lo fa. Diversamente dalla trasformata di Fourier, la DFT richiede in ingresso una funzione discreta, ovvero una funzione della quale viene fornito il valore solo in corrispondenza di valori discreti che può assumere la variabile indipendente: tali valori in ingresso sono spesso ottenuti per campionamento di una funzione continua.

Notazione. Per riconoscere, nella scrittura della funzione f , la discretezza della variabile indipendente, utilizziamo al posto di t il simbolo τ . τ può dunque assumere solo un numero finito N di valori consecutivi, con $N \in \mathbb{N}$.

Definizione 3.1. Sia $f(\tau)$ una funzione discreta di componenti

$$f(0), \dots, f(N - 1), N \in \mathbb{N}$$

e sia $\nu \in 0, 1, \dots, N - 1$.

Si definisce *trasformata discreta di Fourier* (spesso abbreviata a DFT) di $f(\tau)$ la funzione discreta:

$$F(\nu) = \sum_{\tau=0}^{N-1} f(\tau) \cdot e^{-i2\pi \frac{\nu}{N} \tau}. \quad (3.1)$$

Data la DFT $F(\nu)$, si può ricavare la serie di tempo $f(\tau)$ con l'aiuto della relazione inversa:

$$f(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{\nu=0}^{N-1} F(\nu) \cdot e^{i2\pi \frac{\nu}{N} \tau},$$

detta *inversa della trasformata discreta di Fourier*.

Notiamo che, anche se f è una funzione a valori reali, F in generale è una funzione a valori complessi.

Il calcolo della DFT, per grandi valori di N , richiede un'elevatissima potenza di calcolo, è stato pertanto introdotto (da *Cooley e Tukey* nel 1965) un algoritmo di calcolo, la *Fast Fourier Transform* o FFT, che permette di calcolare la DFT in maniera più rapida in quanto riduce notevolmente il numero di operazioni da eseguire.

Vogliamo dunque analizzare il funzionamento della FFT.

Dalla definizione (3.1), possiamo scrivere la DFT (per $N = 8$) nella forma di un prodotto matriciale, precisamente si ha:

$$\begin{bmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ F(3) \\ F(4) \\ F(5) \\ F(6) \\ F(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W & W^2 & W^3 & W^4 & W^5 & W^6 & W^7 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 & W^8 & W^{10} & W^{12} & W^{14} \\ 1 & W^3 & W^6 & W^9 & W^{12} & W^{15} & W^{18} & W^{21} \\ 1 & W^4 & W^8 & W^{12} & W^{16} & W^{20} & W^{24} & W^{28} \\ 1 & W^5 & W^{10} & W^{15} & W^{20} & W^{25} & W^{30} & W^{35} \\ 1 & W^6 & W^{12} & W^{18} & W^{24} & W^{30} & W^{36} & W^{42} \\ 1 & W^7 & W^{14} & W^{21} & W^{28} & W^{35} & W^{42} & W^{49} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \\ f(5) \\ f(6) \\ f(7) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

ove $W = e^{\frac{-i2\pi}{N}}$ e la matrice a destra del segno uguale è detta *matrice di Fourier*. Notiamo che la quantità W è una radice N -esima dell'unità, infatti

$$W^N = e^{\frac{-i2\pi}{N}N} = e^{-i2\pi} = \cos(2\pi) + i \sin(2\pi) = 1.$$

Scomponiamo ora la matrice di Fourier come prodotto di quattro matrici sparse:

$$\begin{bmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ F(3) \\ F(4) \\ F(5) \\ F(6) \\ F(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & W^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & w^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & W^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & w^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & W^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W^6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & W^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \\ f(5) \\ f(6) \\ f(7) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Come si vede questa scomposizione lascia solo due elementi non nulli in ogni riga. Notiamo, in particolare, che in (3.2) ci sono N^2 moltiplicazioni da eseguire mentre in (3.3) sono presenti solo $2N$ moltiplicazioni per fattore. Il numero di fattori M è dato da $2^M = N$ se non contiamo il primo, che rappresenta semplicemente un riordinamento. Così il numero totale di moltiplicazioni è $2N \log_2 N$. Pertanto se N assumesse un valore molto grande, ad esempio N dell'ordine di 10^6 , il calcolo della DFT richiederebbe 10^{12} moltiplicazioni, ma grazie all'algoritmo FFT, in una delle migliori implementazioni, il calcolo si ridurrebbe ad un valore pari a $5 \cdot N \cdot \log_2(N)$ e dunque per $N = 10^6$ si avrebbero circa 10^8 operazioni, il che equivarrebbe ad un calcolo più veloce di circa 10000 volte.

3.2 Esempi di applicazione della Trasformata Discreta di Fourier

In questa sezione proponiamo, con l'aiuto del software *Mathematica*, qualche esempio che ci permetta di dare una breve illustrazione della potenza numerica di questo metodo. Lo scopo è quello di determinare l'eventuale contenuto in frequenza di segnali discreti dati in input, informazioni che non sono deducibili dalla sola osservazione dell'andamento temporale del segnale. In termini pratici, si parte da un vettore N -dimensionale di valori che determinano l'andamento temporale di una funzione discreta, successivamente si applica la trasformata di Fourier e si ottiene un grafico con in ascissa una sequenza di N valori corrispondenti alla frequenze e in ordinata la densità dell'ampiezza, data da

$$\int_I |\mathcal{F}f(x)| dx$$

ove I è un certo intervallo di valori. In termini più concreti l'altezza dei picchi indica quanto quel determinato valore dell'ampiezza sia concentrato nel segnale iniziale.

1. Consideriamo un campionamento dell'intervallo $[0, 2\pi]$ in 32 punti, compresi gli estremi, e valutiamo la funzione coseno in questa serie di dati.

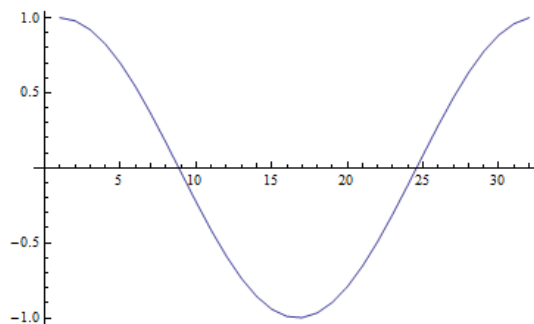


Figura 3.1: Grafico del coseno discreto.

Calcolando la trasformata di Fourier si ottiene un grafico con due picchi posti a valori di frequenza 0 e 32 corrispondenti ai dati estremi 0 e 2π . Notiamo che ad ogni dato iniziale viene associato, mantenendo l'ordine, un numero da 1 a 32 che va a formare l'asse delle ascisse del grafico della trasformata di Fourier. In corrispondenza di ogni altro valore della frequenza la trasformata di Fourier è prossima a 0 proprio perché non vi sono altre frequenze fondamentali nel segnale

iniziale, inoltre la vicinanza a 0 e non l'esatta coincidenza a 0 deriva dall'errore insito nel campionamento.

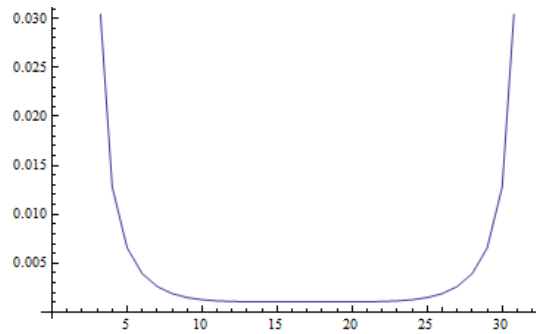


Figura 3.2: Grafico della DFT del coseno.

2. Consideriamo il seguente segnale discreto:

$$data = (-1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1)$$

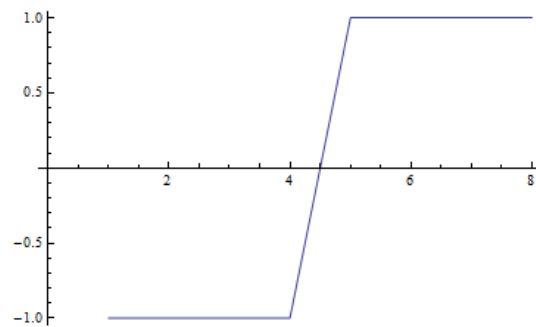


Figura 3.3: Grafico di *data*.

Troviamo la trasformata discreta di Fourier di questo array di numeri.

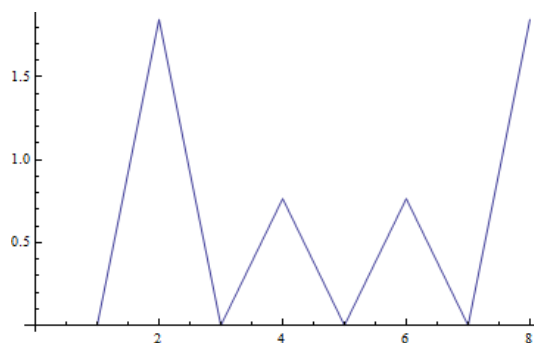


Figura 3.4: Grafico del valore assoluto della DFT di *data*.

Dal grafico si evince che il segnale può essere approssimato da un numero infinito di sinusoidi ognuna con la propria ampiezza e frequenza caratteristiche: l'altezza dei picchi indica proprio la concentrazione di tutte le frequenze che compongono il segnale. Se il picco è molto alto vuol dire che è dominante una certa frequenza e quindi vi è una rilevante componente periodica nel segnale. In questo caso il grafico mostra che le frequenze dominanti sono quelle in corrispondenza dei valori 2 e 8, tuttavia le restanti frequenze non sono trascurabili.

3. Consideriamo ora un segnale periodico:

$$data = Table[N[Sin[20 \cdot 2\pi n/100]], \{n, 100\}]$$

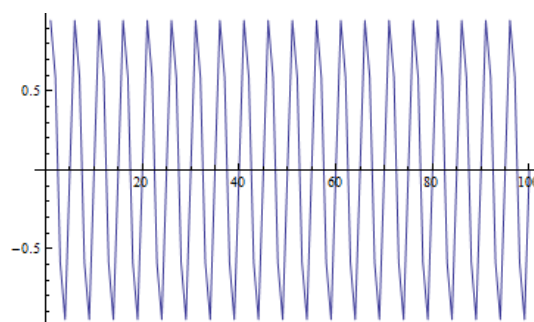


Figura 3.5: Grafico di *data*.

In *data* è stato memorizzato un elenco di 100 elementi contenente un segnale periodico. Studiamo il comportamento della trasformata discreta di Fourier di *data*.

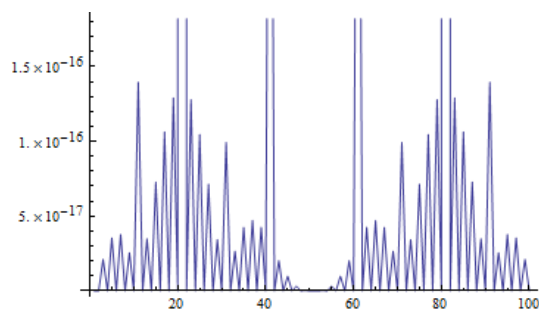


Figura 3.6: Grafico della DFT di *data*.

Il grafico mostra che il segnale ha una frequenza dominante pari a 20 e dunque presenta picchi in corrispondenza di 20 e dei suoi multipli 40, 60 e 80. La presenza di altri picchi di altezze inferiori dipende dal fatto che il segnale in analisi è discreto e quindi si avvicina molto ad una funzione periodica con un'unica frequenza, ma ne è comunque un'approssimazione.

4. Prendiamo infine in analisi un segnale periodico disturbato dalla presenza di rumore:

$$data = Table[N[Sin[30 \cdot 2Pi n/200] + (RandomReal[] - 1/2)], \{n, 200\}]$$

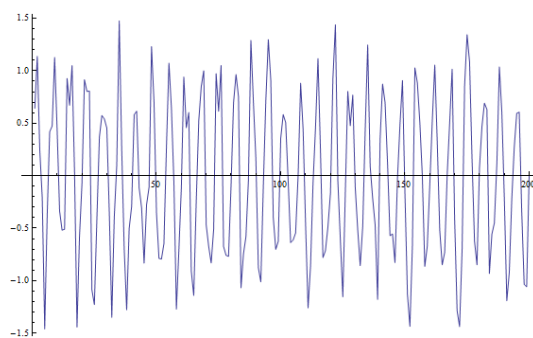


Figura 3.7: Grafico di *data*.

In *data* è stato memorizzato un elenco di 200 elementi contenente un segnale periodico con rumore casuale aggiunto.

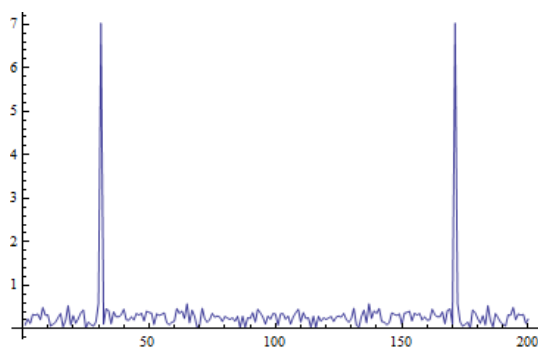


Figura 3.8: Grafico del valore assoluto della DFT di *data*.

La trasformata discreta di Fourier mostra un forte picco intorno a 30 e un picco simmetrico intorno a 170, questo riflette il fatto che il segnale originale si può scomporre, con una approssimazione accettabile, in due funzioni con frequenza rispettivamente di 30 e 170; in altre parole queste frequenze sono quelle maggiormente distribuite. Se la funzione fosse esattamente la composizione di due funzioni con frequenza rispettivamente di 30 e 170 allora il grafico risultante dall'applicazione della DFT mostrerebbe due picchi a frequenza 30 e 170 e tutto il resto esattamente pari a 0. La presenza di numerosissimi picchi molto bassi è la prova della presenza di molte altre sinusoidi con frequenze diverse e ampiezze poco concentrate che disturbano il segnale.

3.3 Applicazione ai mercati elettrici

I mercati dell'energia elettrica sono, nei paesi in cui si è strutturato un mercato concorrenziale¹, simili ai mercati finanziari. Analogamente ai titoli dei mercati finanziari, l'energia viene messa in commercio ad un prezzo determinato in maniera concorrenziale dagli operatori del mercato, cioè da partecipanti al mercato che assumono al ruolo di intermediari tra i produttori ed i beneficiari dell'energia elettrica. In generale, la liberalizzazione dei mercati dell'energia elettrica espone sia il venditore che il consumatore al rischio di mercato, cioè alla possibilità di ottenere, da variazioni generali del mercato, un rendimento diverso da quello atteso. Il mercato elettrico è un mercato *ahead*, ovvero è un mercato che permette la vendita o l'acquisto dell'asset² per il giorno successivo, contrariamente, per esempio, al mercato del petrolio nel quale la vendita ha luogo almeno 15 giorni dopo. Le caratteristiche dell'andamento dei prezzi dell'energia elettrica sono singolari e non comuni ad altri mercati; l'energia elettrica, infatti:

1. non può essere immagazzinata (se non parzialmente, nel caso di produzione idroelettrica),
2. deve essere consumata nel momento stesso della sua vendita.

Queste proprietà strutturali determinano una consistente anelasticità dell'offerta rispetto al prezzo³, infatti, per la proprietà 2., un'eventuale domanda in eccesso non può essere allocata usando l'energia prodotta in precedenza. Ad esempio, un'improvvisa rottura di una linea di trasmissione può creare un deficit di offerta non sostituibile con altre fonti, e quindi un aumento subitaneo del prezzo dell'energia. Pertanto i prezzi dell'energia

¹Un mercato è *concorrenziale* se si basa sulle seguenti ipotesi:

- Consumatori e imprese agiscono come *price takers*: tutti i partecipanti al mercato considerano il prezzo come indipendente dalle proprie decisioni di compra/vendita.
- Consumatori e imprese agiscono in modo non strategico: tutti gli agenti del mercato prendono le loro decisioni indipendentemente, senza prendere in considerazione le decisioni degli altri agenti e senza considerare i possibili effetti delle proprie decisioni sugli altri agenti.
- L'ingresso al mercato è libero (*libertà d'entrata*): non esistono ostacoli all'ingresso di nuovi venditori nel mercato.

²Il termine *asset* indica la risorsa economica, materiale o immateriale, che sia in grado di essere posseduta e che rappresenta un valore della proprietà che può essere convertita in denaro.

³Si definisce *elasticità dell'offerta rispetto al prezzo* il rapporto tra la variazione percentuale della quantità offerta e la variazione percentuale del prezzo. Se l'elasticità assume valore > 1 si dice che l'offerta è elastica, al contrario, se l'elasticità assume valore < 1 si dice che l'offerta è anelastica.

elettrica presentano una volatilità⁴ molto alta e variazioni del prezzo enormi, improvvise e non prevedibili, dette *spikes*.

In generale, possiamo scrivere il prezzo spot⁵ dell'energia elettrica come somma di diverse componenti:

$$E(t) = \alpha(t) + \mu(t) + W(t) + J(t)$$

ove

- $\alpha(t)$ è una componente lineare,
- $\mu(t)$ è una componente periodica,
- $W(t)$ è la componente di rumore probabilistico,
- $J(t)$ è una componente di puro *spike*.

Ognuna delle componenti appena descritte rappresenta un comportamento tipico del prezzo dell'energia elettrica, rispettivamente: una tendenza lineare, una componente periodica per la frequenza del prezzo, una componente stocastica per la descrizione della variabilità del prezzo (comportamento incerto) e una componente per descrivere il comportamento incerto del prezzo in situazioni estreme (comportamento “*spiky*”).

La dinamica del prezzo spot dell'energia elettrica è essenzialmente caratterizzata da un'importante e complessa componente periodica. È proprio l'Analisi di Fourier, attraverso la trasformata e le serie di Fourier, lo strumento che permette l'individuazione della componente stagionale di tale prezzo. Di seguito, attraverso dati reali del mercato elettrico, vedremo in quale modo la trasformata di Fourier viene utilizzata.

Consideriamo la serie storica dei prezzi dell'energia elettrica che si riferisce al periodo di tempo dal 2005 al 2012. Tale sequenza temporale, scaricabile dal sito del Gestore

⁴La *volatilità* è un indice della rischiosità dei prezzi dell'energia elettrica, precisamente è la stima di quanto ci si discosta dal valore medio. In formule, si ha:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N}}$$

ove x è il prezzo dell'energia elettrica e $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$ è la media aritmetica.

⁵Il prezzo *spot* è il prezzo del momento, riferito ad una chiusura immediata, o quasi, del contratto fra chi compra e chi vende un certo asset.

dei Mercati Energetici (GME), è una matrice di 2648 righe, corrispondenti al numero di giorni nell'arco temporale di 7 anni, e 26 colonne, corrispondenti ai differenti valori del prezzo intragiornalieri. Come *prezzo giornaliero* si considera la media del “*bid-ask*”, ovvero la media tra il prezzo massimo che un acquirente è disposto a pagare per un bene e il prezzo più basso per il quale un venditore è disposto a vendere. Si crea dunque la matrice *DailyDataSet*, formata da 2648 righe e 2 colonne nelle quali vengono collocati la data e il prezzo giornaliero corrispondente.

I grafici seguenti mostrano l'andamento dei prezzi giornalieri dal 2005 al 2012.

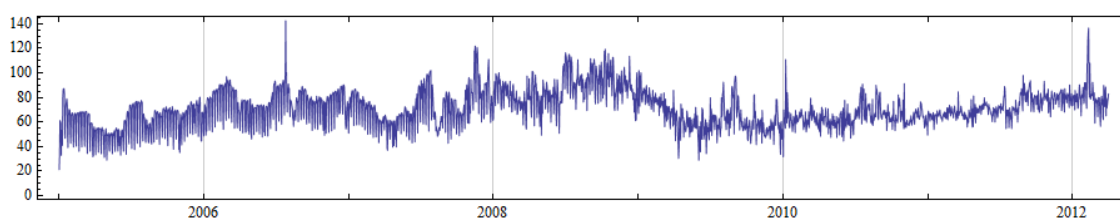


Figura 3.9: Grafico di *DailyDataSet*.

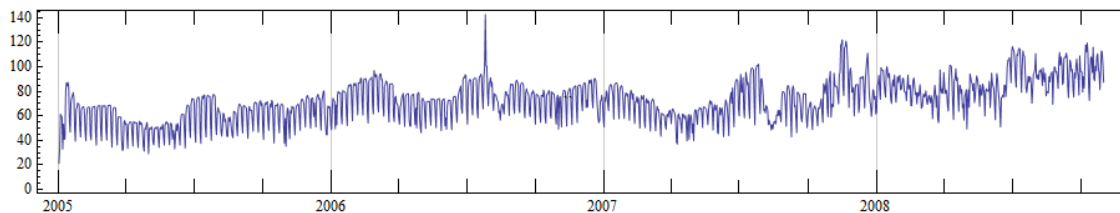


Figura 3.10: Grafico di *DailyDataSet* fino al 31 Ottobre 2008.

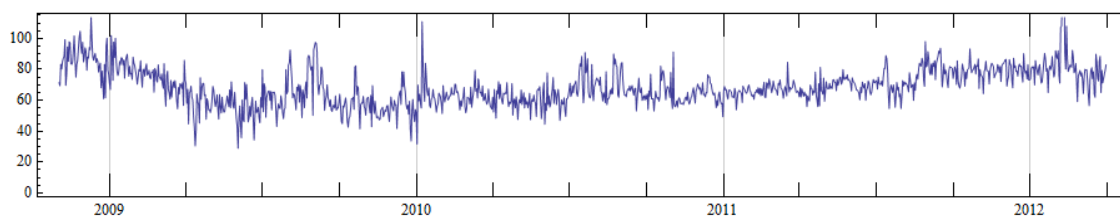


Figura 3.11: Grafico di *DailyDataSet* dal 31 Ottobre 2008.

Ancora più dettagliatamente possiamo suddividere la sequenza in sottointervalli, per esempio analizziamo l'andamento dei prezzi dal 31 Ottobre 2008 al 24 Gennaio 2010.

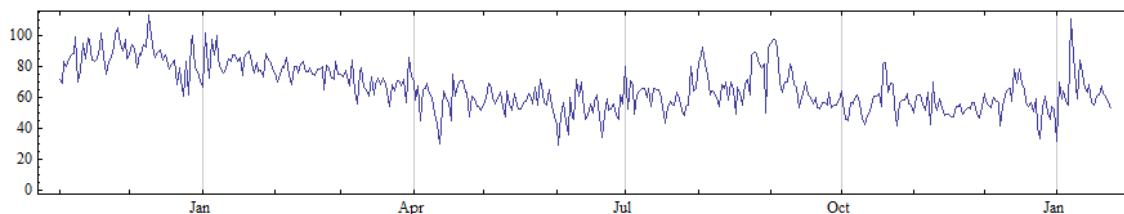


Figura 3.12: Grafico di *DailyDataSet* dal 31 Ottobre 2008 al 24 Gennaio 2010.

Applichiamo ora la trasformata discreta di Fourier per verificare la presenza di stagionalità nella variazione dei prezzi dell'energia elettrica. Per una maggiore chiarezza, consideriamo anzitutto la sequenza di dati fino al 31 Ottobre 2008, pari ad un intervallo temporale di 1400 giorni. Applicando la trasformata discreta di Fourier si ottengono in ascissa altrettanti 1400 valori indicanti le frequenze. Nel grafico vengono evidenziate in colori diversi le frequenze principali, precisamente in viola la frequenza annuale (y), in verde le frequenze mensile, bimestrale e quadrimestrale (rispettivamente m , $2m$ e q) e in rosso la frequenza settimanale (w). In particolare, le frequenze annuale, quadrimestrale, bimestrale, mensile e settimanale corrispondono a valori di ascissa rispettivamente pari a $1400/365$ (~ 4), $1400/120$ (~ 12), $1400/60$ (~ 23), $1400/30$ (~ 47) e 200.

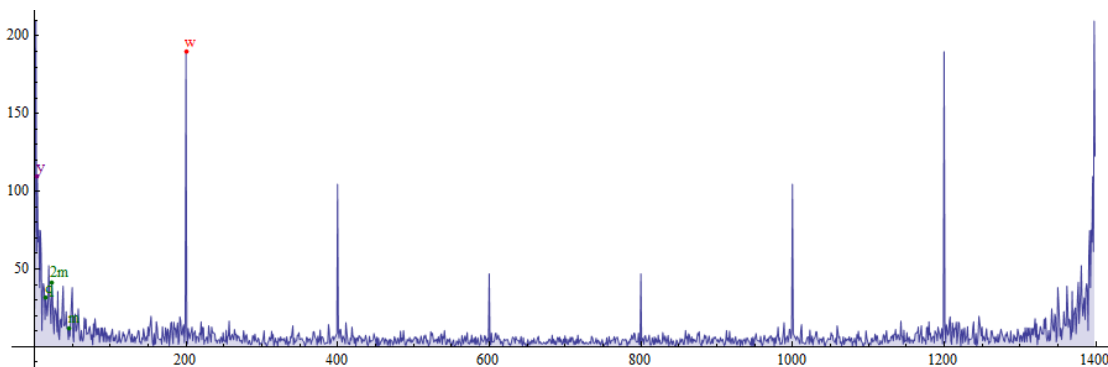


Figura 3.13: Grafico della DFT di *DailyDataSet*.

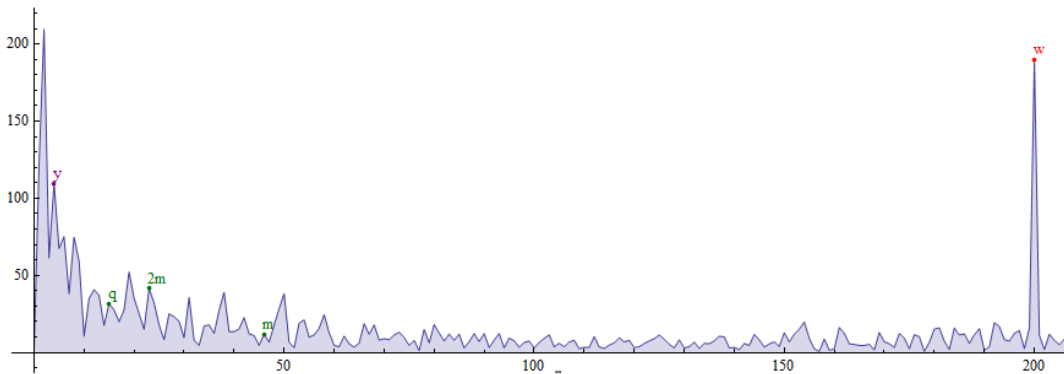


Figura 3.14: Dettaglio della DFT di *DailyDataSet*.

Dal grafico si osserva che, in un periodo di 1400 giorni, la periodicità più importante è quella settimanale.

Consideriamo ora il secondo sottointervallo di dati, precisamente quello che contiene i prezzi giornalieri dal 31 Ottobre 2008 ad oggi e calcoliamone la trasformata discreta di Fourier.

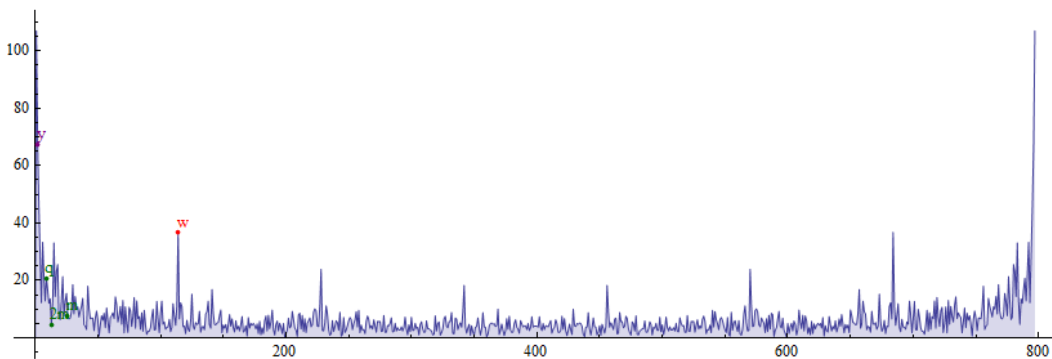


Figura 3.15: Grafico della DFT di *DailyDataSet* dal 31 Ottobre 2008 ad oggi.

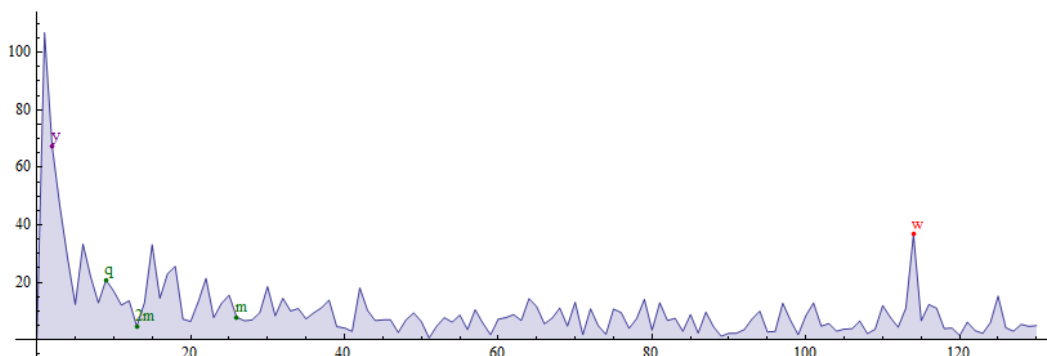


Figura 3.16: Dettaglio della DFT di *DailyDataSet* dal 31 Ottobre 2008 ad oggi.

In questo caso, il picco più alto è rappresentato dalla frequenza annuale, pertanto la periodicità più rappresentativa è quella annuale. Osserviamo inoltre che se consideriamo un intervallo di tempo pari ad un anno allora non ha più senso parlare di periodicità annuale e quindi il picco massimo che si ottiene in corrispondenza della frequenza annuale non è più un risultato significativo, pertanto risulta necessario analizzare le frequenze mensili e settimanali. Per chiarire questo punto, consideriamo un intervallo di circa 400 giorni a partire dal 31 Ottobre 2008.

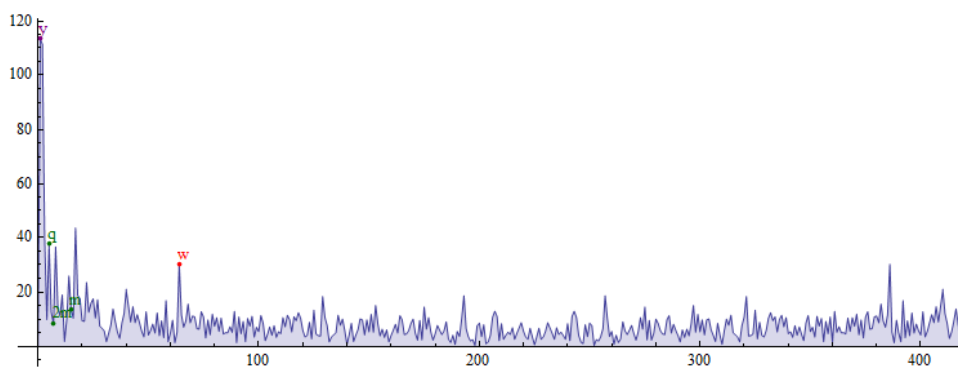


Figura 3.17: Grafico della DFT di *DailyDataSet* di circa 400 giorni dal 31 Ottobre 2008.

In tal caso, come previsto, il picco annuale è molto alto ma in un periodo di circa un anno le uniche periodicità che possono fornire informazioni significative sono quelle riferite a sottomultipli dell'anno.

Capitolo 4

Serie di Fourier reali

Questo capitolo sarà incentrato sullo studio di un secondo importante strumento dell'Analisi di Fourier, le serie di Fourier. Vedremo come un segnale possa essere scomposto in altre funzioni, precisamente vedremo come le funzioni periodiche possano essere approssimate da serie di Fourier attraverso somme infinite di funzioni trigonometriche. Le serie di Fourier sono uno strumento di grande interesse pratico per il loro utilizzo nell'analisi della periodicità di un segnale ma, a differenza della trasformata di Fourier, non servono a riconoscere, ed eventualmente analizzare, la presenza di periodicità in una funzione ma servono a studiare la periodicità di un segnale che si sa essere periodico a priori. Pertanto le serie di Fourier possono essere applicate solo sotto l'ipotesi che la funzione in analisi sia periodica. Questa caratteristica consente di considerare le serie di Fourier come un caso particolare della trasformata di Fourier, nonostante, tradizionalmente, le serie di Fourier costituiscano il punto di partenza per lo sviluppo teorico della trasformata di Fourier. Di seguito presenteremo le nozioni fondamentali della teoria delle serie di Fourier con l'obiettivo finale di mostrarne la convergenza in norma L^2 .

4.1 Polinomi trigonometrici reali

In questa sezione introduciamo lo spazio dei polinomi trigonometrici reali; come vedremo in seguito i generatori di tale spazio costituiscono una base di Hilbert dello spazio $L^2([-\pi, \pi])$, inoltre tale base è ortogonale e ciò permetterà, nelle sezioni successive, di studiare la convergenza di particolari polinomi trigonometrici associati univocamente ad ogni funzione $f \in L^2([-\pi, \pi])$.

Definizione 4.1. Chiamiamo *polinomio trigonometrico reale* ogni funzione:

$$p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

che possa scriversi nella maniera seguente:

$$p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \quad (4.1)$$

con $n \in \mathbb{N}$ e $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$.

Se i coefficienti a_n e b_n in (4.1) non sono entrambi nulli diremo che p ha grado n .

Notazione. Nel seguito, denoteremo con T_n lo spazio dei polinomi trigonometrici reali di grado $\leq n$.

Esempio 6. Le funzioni

$$\sin^2(t), \cos^2(t), \sin(t) \cdot \cos(t)$$

sono esempi di polinomi trigonometrici di grado 2; infatti

$$\begin{aligned} \sin^2(t) &= \frac{1 - \cos(2t)}{2}, \\ \cos^2(t) &= \frac{1 + \cos(2t)}{2}, \\ \sin(t) \cdot \cos(t) &= \frac{1}{2} \sin(2t). \end{aligned}$$

Osservazione 4. In generale, qualunque siano $h, k \in \mathbb{N}$, si deduce facilmente la valenza delle seguenti formule:

$$\begin{aligned} \cos(ht) \cdot \cos(kt) &= \frac{1}{2} (\cos((h-k)t) + \cos((h+k)t)) \\ \sin(ht) \cdot \cos(kt) &= \frac{1}{2} (\sin((h+k)t) + \sin((h-k)t)) \\ \sin(ht) \cdot \sin(kt) &= \frac{1}{2} (\cos((h-k)t) - \cos((h+k)t)). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Ogni polinomio trigonometrico reale di grado n si può scrivere in modo univoco nella forma (4.1). Questo si deduce direttamente dal seguente Teorema.

TEOREMA - 4.1. Se $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cdot \cos(kt) + b_k \cdot \sin(kt)),$$

è un polinomio trigonometrico reale di grado $\leq n$ allora

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(t) \cdot \cos(kt) dt \quad \forall k \geq 0 \quad (4.3a)$$

e

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(t) \cdot \sin(kt) dt \quad \forall k \geq 1 \quad (4.3b)$$

Dimostrazione. Ricordiamo che le funzioni $\cos(kt)$ e $\sin(kt)$, qualunque sia $k \geq 1$, hanno integrale nullo sull'intervallo $[-\pi, \pi[$. Inoltre, si ha

$$\int_{-\pi}^{\pi} p(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dt = \pi a_0. \quad (4.4a)$$

Moltiplichiamo ora $p(t)$ per $\cos(ht)$, con $1 \leq h \leq n$, e integriamo ancora su $[-\pi, \pi[$. Otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} p(t) \cdot \cos(ht) dt &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(ht) dt + \sum_{k=1}^n (a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt) \cdot \cos(ht) dt \\ &\quad + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt) \cdot \cos(ht) dt) = \pi a_k \end{aligned} \quad (4.4b)$$

in quanto, utilizzando le identità (4.2),

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt) \cdot \cos(ht) dt = \begin{cases} 0, & \text{se } k \neq h \\ \pi, & \text{se } k = h \end{cases}$$

mentre

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt) \cdot \cos(ht) dt = 0 \quad \forall k, h \in \mathbb{N}.$$

Per le identità (4.4a) e (4.4b) si prova la (4.3a). In modo analogo, moltiplicando $p(t)$ per $\sin(ht)$, con $1 \leq h \leq n$, e integrando su $[-\pi, \pi[$, si ottiene la (4.3b). □

Corollario 4.2. T_n , con le consuete operazioni di somma e di prodotto per scalare, è uno spazio vettoriale di dimensione $2n + 1$.

Dimostrazione. T_n è il sottospazio vettoriale di $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ generato dalle $2n + 1$ funzioni

$$1, \cos(t), \cos(2t), \dots, \cos(nt), \sin(t), \sin(2t), \dots, \sin(nt). \quad (4.5)$$

Dimostriamo che queste sono linearmente indipendenti affinché valga il Corollario.

Siano dunque $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ e tali che

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) = 0 \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dal Teorema 1.1 segue dunque che $a_0 = a_k = b_k = 0$ per ogni $k \in 1, \dots, n$ e questo prova la lineare indipendenza delle funzioni (4.5). □

4.2 Polinomi di Fourier

In questa sezione introduciamo un particolare polinomio trigonometrico, precisamente il polinomio di Fourier di una certa funzione f . Vedremo inoltre, nelle sezioni successive, come esso sia il polinomio che meglio approssima in $L^2([-\pi, \pi])$ tale funzione fra tutti i polinomi trigonometrici di grado n .

Prendiamo ora in esame funzioni periodiche reali, ovvero funzioni

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

tali che

$$f(t + T) = f(t)$$

per un qualche $T \in \mathbb{R}^+$, detto *periodo*, e per ogni $t \in \mathbb{R}$.

In particolare assumiamo

$$T = 2\pi$$

e, senza perdere di generalità, possiamo restringerci al caso di funzioni definite dall'intervallo $[-\pi, \pi[$.

Definizione 4.2. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, sommabile sull'intervallo $[-\pi, \pi[$. Si chiama *polinomio di Fourier di grado n di f* il seguente polinomio trigonometrico reale:

$$S_n(f)(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \quad (4.6)$$

ove

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cdot \cos(ks) \, ds \quad \forall k \geq 0 \quad (4.7)$$

e

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cdot \sin(ks) \, ds \quad \forall k \geq 1. \quad (4.8)$$

I numeri reali a_k e b_k sono chiamati *coefficienti di Fourier di f* .

Nota. Dal Teorema 1.1 segue che ogni polinomio trigonometrico di grado n è il polinomio di Fourier di grado n di se stesso.

Osservazione 5. Sia f una funzione 2π -periodica e sommabile su $[-\pi, \pi[$. Allora f è sommabile su ogni intervallo di lunghezza 2π e risulta:

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t) \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \quad (4.9)$$

Dimostrazione. Denotiamo con m la parte intera di $\frac{\alpha+\pi}{2\pi}$, risulta

$$m \leq \frac{\alpha + \pi}{2\pi} < m + 1$$

da cui

$$(2m - 1)\pi \leq \alpha < (2m + 1)\pi.$$

Ora, ponendo $\beta = \alpha - (2m - 1)\pi$, si ha

$$\begin{aligned}
 \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t) dt &= \int_{-\pi+\beta}^{\pi+\beta} f(z + 2m\pi) dz = \\
 &= (\text{per la } 2\pi\text{-periodicit\`a di } f) \int_{-\pi+\beta}^{\pi+\beta} f(z) dz = \\
 &= \int_{-\pi+\beta}^{-\pi} f(z) dz + \int_{-\pi}^{\pi} f(z) dz + \int_{\pi}^{\pi+\beta} f(z) dz = \\
 &= \int_{\pi+\beta}^{\pi} f(s - 2\pi) ds + \int_{-\pi}^{\pi} f(z) dz + \int_{\pi}^{\pi+\beta} f(z) dz = \\
 &= (\text{per la } 2\pi\text{-periodicit\`a di } f) \int_{\pi+\beta}^{\pi} f(s) ds + \int_{-\pi}^{\pi} f(z) dz + \int_{\pi}^{\pi+\beta} f(z) dz = \\
 &= - \int_{\pi}^{\pi+\beta} f(s) ds + \int_{-\pi}^{\pi} f(z) dz + \int_{\pi}^{\pi+\beta} f(z) dz = \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} f(z) dz.
 \end{aligned}$$

□

Prima di proseguire con la trattazione, presentiamo qualche esempio di polinomi di Fourier.

Esempio 7. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione 2π -periodica definita su $[-\pi, \pi[$ nel modo seguente

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{se } 0 \leq t < \pi \\ t + 2\pi, & \text{se } -\pi \leq t < 0. \end{cases}$$

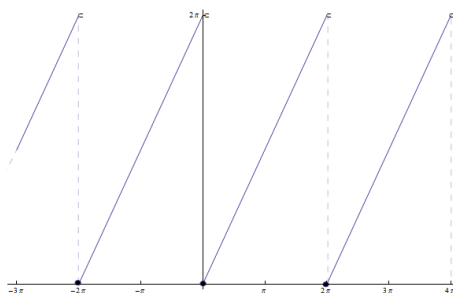


Figura 4.1: Grafico di f .

Osserviamo che sull'intervallo $[0, 2\pi[$ risulta $f(t) = t$: è dunque conveniente calcolare i coefficienti di Fourier applicando la (4.9). Si ha

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{2\pi} = 2\pi.$$

Per $k \neq 1$,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \langle f(t), \cos(kt) \rangle dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \langle t, \cos(kt) \rangle dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left[t \frac{\sin(kt)}{k} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\sin(kt)}{k} dt \right) = \frac{1}{\pi \cdot k^2} [\cos(kt)]_0^{2\pi} = 0, \end{aligned}$$

mentre,

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \langle f(t), \sin(kt) \rangle dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \langle t, \sin(kt) \rangle dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left[-t \frac{\cos(kt)}{k} \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{\cos(kt)}{k} dt \right) = -\frac{2\pi}{\pi} \frac{1}{k} + \frac{1}{\pi \cdot k^2} [\sin(kt)]_0^{2\pi} = -\frac{2}{k}. \end{aligned}$$

Pertanto, per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta

$$S_n(f)(t) = \pi - 2 \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kt)}{k}.$$

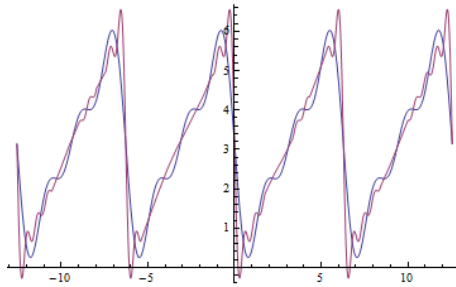


Figura 4.2: Grafico del polinomio di Fourier di f di grado 3 in blu e di grado 10 in viola.

Esempio 8.

PREMESSA. Sia

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

una funzione fissata. Allora f può essere decomposta nella somma di una funzione pari e di una funzione dispari. Poniamo:

$$f_p(t) := \frac{f(t) + f(-t)}{2}$$
$$f_d(t) := \frac{f(t) - f(-t)}{2}$$

da cui

$$f(t) = f_p(t) + f_d(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Notiamo che f è pari (risp. dispari) $\Leftrightarrow f_d(t) = 0 \quad \forall t$ (risp. $f_p(t) = 0 \quad \forall t$).

Ora, se f è una funzione pari, allora tutti i coefficienti b_k del polinomio di Fourier $S_n(f)$ sono nulli, ossia:

$$S_n(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kt).$$

Analogamente, se f è una funzione dispari, tutti i coefficienti a_k del polinomio di Fourier $S_n(f)$ sono nulli, ossia:

$$S_n(f) = \sum_{k=1}^n b_k \sin(kt).$$

Infatti,

- Se f è pari si ha

$$- \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cdot \cos(kt) dt,$$

in quanto $f(t) \cdot \cos(kt)$ è pari perché prodotto di due funzioni pari. L'integrale esteso a $[0, \pi]$ è dunque uguale alla metà dell'integrale in $[-\pi, \pi[$.

$$- \quad b_k = 0 \quad \forall k,$$

in quanto f è una funzione pari, il seno è una funzione dispari, quindi il loro prodotto risulta dispari. Pertanto l'integrale di $f(t) \cdot \sin(kt)$ su $[-\pi, \pi[$ è nullo.

- Se f è dispari si ha

$$- \quad a_k = 0 \quad \forall k,$$

in quanto f è una funzione dispari, il coseno è una funzione pari, quindi il loro prodotto risulta dispari. Pertanto l'integrale di $f(t) \cdot \cos(kt)$ su $[-\pi, \pi[$ è nullo.

$$- \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cdot \sin(kt) dt.$$

in quanto $f(t) \cdot \sin(kt)$ è pari perché prodotto di due funzioni dispari. L'integrale esteso a $[0, \pi]$ è dunque uguale alla metà dell'integrale in $[-\pi, \pi[$.

Tutto ciò premesso, vediamo il prossimo esempio.

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione 2π -periodica definita su $[-\pi, \pi[$ nel modo seguente:

$$f(t) = |t|$$

Vale

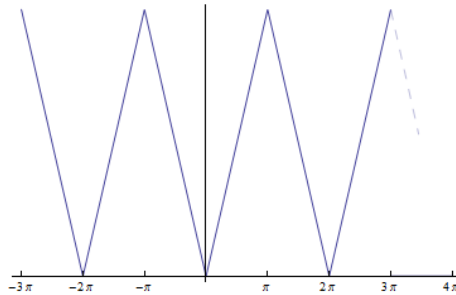


Figura 4.3: Grafico di f .

$$f(-t) = |-t| = |t| = f(t)$$

e quindi la funzione f è pari. Risulta che i suoi coefficienti di Fourier b_k sono nulli. Calcoliamo gli a_k . Se $k = 0$

$$a_k = a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t dt = \pi,$$

mentre, se $k \geq 1$,

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \langle t, \cos(kt) \rangle dt = \frac{2}{\pi \cdot k} \int_0^\pi \langle t, k \cdot \cos(kt) \rangle dt = \\
 &= \frac{2}{\pi \cdot k} \left([t \cdot \sin(kt)]_0^\pi - \int_0^\pi (-\sin(kt)) dt \right) = \\
 &= \frac{2}{\pi \cdot k^2} \int_0^\pi (k \cdot \sin(kt)) dt = \frac{2}{\pi \cdot k^2} [\cos(kt)]_0^\pi = \\
 &= \frac{2}{\pi \cdot k^2} ((-1)^k - 1).
 \end{aligned}$$

Quindi

$$a_k = \begin{cases} 0, & \text{se } k \text{ è pari, } k \geq 2, \\ \frac{-4}{\pi \cdot k^2}, & \text{se } k \text{ è dispari.} \end{cases}$$

In definitiva, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$S_{2n+1}(f) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^n \frac{\cos((2k+1)t)}{(2k+1)^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos(t) + \frac{\cos(3t)}{9} + \dots + \frac{\cos((2n+1)t)}{(2n+1)^2} \right).$$

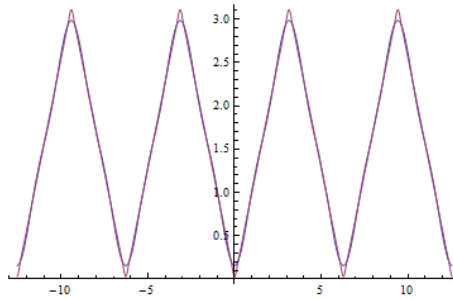


Figura 4.4: Grafico del polinomio di Fourier di f di grado 1 in blu e di grado 10 in viola.

4.3 Polinomi di Fourier di funzioni in $L^2([-π, π[)$

In questa sezione vedremo come sia possibile definire il polinomio di Fourier per ogni funzione $2π$ -periodica e di quadrato sommabile su $[-π, π[$. Cercheremo inoltre un sistema di riferimento ortogonale in $L^2([-π, π[)$ in modo da poter scrivere le funzioni in $L^2([-π, π[)$ come somme di queste funzioni note. Precisamente scopriremo come l'analogo per L^2 della base canonica negli spazi \mathbb{R}^n sia dato esattamente dai generatori dello spazio delle funzioni trigonometriche: $\cos(kt)$, $\sin(ht)$, $k \geq 0, h \geq 1$. Il principale risultato di questa sezione è che il polinomio di Fourier di una funzione f in $L^2([-π, π[)$ è proprio il polinomio che dista meno da f in termini della distanza in L^2 , per questo il polinomio di Fourier viene anche detto “*dei minimi quadrati*”. Come vedremo meglio nella sezione seguente, il nostro scopo è quello di provare che, sotto ipotesi molto deboli su una certa funzione assegnata f , reale e $2π$ -periodica, la serie di Fourier, intesa come $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f)$, converga in L^2 alla funzione f di partenza.

Anzitutto, introduciamo lo spazio delle funzioni di quadrato sommabile su $[-π, π[$ ¹.

Definizione 4.3. Si definisce $L^2[-π, π[$, o *spazio delle funzioni di quadrato sommabile su $[-π, π[$* , lo spazio

$$L^2([-π, π[) = \left\{ [f] \text{ tale che } f : [-π, π[\rightarrow \mathbb{R}, \int_{-π}^{\pi} f^2(t) dt < +\infty \right\}$$

ove

$$[f] = \{g : [-π, π[\rightarrow \mathbb{R}, f = g \text{ quasi-dappertutto}\}.$$

$L^2([-π, π[)$ è uno spazio vettoriale di dimensione infinita sul campo \mathbb{R} .

Proposizione 4.3. Siano $[f], [g] \in L^2([-π, π[)$. L'applicazione

$$\langle, \rangle : L^2([-π, π[) \times L^2([-π, π[) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\langle f, g \rangle := \int_{-π}^{\pi} f(t) \cdot g(t) dt$$

è un prodotto scalare su $L^2([-π, π[)$.

¹Per le dimostrazioni, rimandiamo alla sezione A.2 dell'Appendice.

Definizione 4.4. Siano $[f], [g] \in L^2([-\pi, \pi[)$. Si definisce distanza indotta da \langle, \rangle di f e g

$$d(f, g) = \|f - g\|_{L^2([-\pi, \pi[)} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f - g|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Osservazione 6. Per il teorema di Riesz-Fischer, lo spazio $L^2([-\pi, \pi[)$ è completo rispetto alla metrica indotta da \langle, \rangle e dunque è uno spazio di Hilbert.

Vogliamo ora osservare che tutto quanto definito nella previa sezione si applica alle funzioni in $L^2([-\pi, \pi[)$. Questo segue dal fatto che $L^2([-\pi, \pi[)$ è contenuto in $L^1([-\pi, \pi[)$, infatti:

Osservazione 7. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, misurabile e di quadrato sommabile su $[-\pi, \pi[$. Allora f è sommabile.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |f| dt &\leq (\text{Per la disuguaglianza di Hölder}) \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{-\pi}^{\pi} 1 dt \right) \\ &= \|f\|_2 \cdot (2\pi) < (\text{Poiché } f \text{ è di quadrato sommabile su } [-\pi, \pi[) + \infty. \end{aligned}$$

□

Introdurremo ora il concetto di sistema ortonormale in uno spazio di Hilbert, rivolgendo particolare attenzione allo spazio $L^2([-\pi, \pi[)$. Il nostro obiettivo è quello di generalizzare agli spazi di dimensione infinita la nozione di base ortonormale e le proprietà di cui godono gli spazi vettoriali euclidei finitamente generati. Per fare questo, introdurremo il concetto di sistema ortonormale completo.

Notazione. Nel seguito, denoteremo con H uno spazio di Hilbert, ossia uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare e completo rispetto alla norma indotta da tale prodotto.

Definizione 4.5. Sia $U \subset H$ un insieme non vuoto. U si dice *sistema ortonormale* di H se

$$\langle h, k \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } h \neq k \\ 1, & \text{se } k = h \end{cases}$$

per ogni $h, k \in U$.

Nota. Nella definizione U è un insieme qualunque, quindi può essere finito o infinito, numerabile ma anche non numerabile.

Al fine di evitare complicazioni, nel seguito, assumiamo che U sia al più numerabile e che sia fissata una numerazione, ossia supponiamo $U = \{u_k, k \in \mathbb{N}\}$ sempre con la stessa numerazione.

Sappiamo che se V è uno spazio vettoriale euclideo finitamente generato è sempre possibile trovarne una base ortonormale $\{u_1, \dots, u_n\}$ rispetto alla quale i coefficienti di ogni vettore $v \in V$ sono dati dai prodotti scalari $\langle v, u_k \rangle$. Vogliamo vedere quanto e come tutto questo possa essere generalizzato al caso degli spazi di Hilbert infinito dimensionali.

Lemma 4.4. (*Convergenza di serie ortonormali*)

Sia $U \subset H$ un sistema ortonormale numerabile di H , $U = \{u_k, k \in \mathbb{N}\}$. La serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k u_k$$

è convergente se e solo se

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|^2 < +\infty.$$

In tal caso, posto $x = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k u_k$, si ha

$$a_k = \langle x, u_k \rangle.$$

Dimostrazione. Poiché H è uno spazio completo, la successione $S_n = (\sum_{k=1}^n a_k u_k)_{n \in \mathbb{N}}$ è convergente se e solo se è di Cauchy in H . Siano quindi $n, m \in \mathbb{N}$ e supponiamo $n > m$; si ha

$$\begin{aligned} \|S_n - S_m\|^2 &= \left\| \sum_{k=1}^n a_k u_k - \sum_{k=1}^m a_k u_k \right\|^2 = \left\| \sum_{k=m}^n a_k u_k \right\|^2 = \\ &= \left\langle \sum_{k=m}^n a_k u_k, \sum_{k=m}^n a_k u_k \right\rangle = \sum_{i=m}^n \sum_{j=m}^n a_i a_j \langle u_i, u_j \rangle = \sum_{k=m}^n |a_k|^2 \end{aligned}$$

poiché u_1, \dots, u_n sono ortonormali. Da ciò segue che S_n è di Cauchy se e solo se lo è $\sum_{k=m}^n |a_k|^2$, ovvero S_n è convergente se e solo se lo è $\sum_{k=m}^n |a_k|^2$. Supponiamo ora S_n

convergente e sia x il suo limite. Per la continuità del prodotto scalare (cfr. Teorema A.8 dell'Appendice) risulta

$$\langle x, u_k \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\langle \sum_{k=1}^n a_k u_k, u_j \right\rangle.$$

Se $n \geq j$ si ha

$$\left\langle \sum_{k=1}^n a_k u_k, u_j \right\rangle = \sum_{k=1}^n a_k \langle u_k, u_j \rangle = a_j$$

da cui

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\langle \sum_{k=1}^n a_k u_k, u_j \right\rangle = a_j.$$

Pertanto $a_j = \langle x, u_j \rangle$ per ogni $j \geq 1$. □

Definizione 4.6. Sia $U \subset H$ un sistema ortonormale. U si dice *completo* se non esiste un altro sistema ortonormale V del quale U sia un sottoinsieme proprio.

TEOREMA - 4.5. Sia $U \subset H$ un sistema ortonormale. Sono equivalenti le seguenti condizioni:

1. U è un sistema ortonormale completo,
2. $x = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle x, u_k \rangle u_k$ per ogni $x \in H$,
3. Se Y è il sottospazio vettoriale generato da U (ossia l'insieme delle combinazioni lineari finite di elementi di U) allora $\bar{Y} = H$.
4. $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |\langle x, u_k \rangle|^2$ per ogni $x \in H$ (uguaglianza di Parseval).

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema mostrando la catena di implicazioni

$$1. \Rightarrow 2. \Rightarrow 3. \Rightarrow 4. \Rightarrow 1.$$

1 \Rightarrow 2. Supponiamo, per assurdo, che esista un vettore $x \in H$ per cui non valga 2. Poiché

$$\begin{aligned} \left\langle x - \sum_{k=1}^{+\infty} \langle x, u_k \rangle u_k, u_j \right\rangle &= \langle x, u_j \rangle - \sum_{k=1}^{+\infty} \langle x, u_k \rangle \langle u_k, u_j \rangle = \\ &= \langle x, u_j \rangle - \langle x, u_j \rangle = 0 \quad \forall u_j \in U, \end{aligned}$$

allora

$$U \cup \left\{ \frac{x - \sum_{k=1}^{+\infty} \langle x, u_k \rangle u_k}{\|x - \sum_{k=1}^{+\infty} \langle x, u_k \rangle u_k\|} \right\} \text{ risulta un sistema ortonormale contenente}$$

U come sottoinsieme proprio. Ciò è assurdo perché contraddice l'ipotesi che U sia completo. Dunque 2. è vera.

2 \Rightarrow 3. Discende direttamente dal fatto che ogni elemento x di H è limite di una successione di punti di Y

$$x = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \quad \text{ove} \quad S_n = \sum_{k=1}^n \langle x, u_k \rangle u_k, \quad S_n \in Y.$$

3 \Rightarrow 4. Se $x \in H$ e $U = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$, per la continuità del prodotto scalare da 1. segue

$$\begin{aligned} \|x\|^2 = \langle x, x \rangle &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\langle \sum_{k=1}^n \langle x, u_k \rangle u_k, \sum_{k=1}^n \langle x, u_k \rangle u_k \right\rangle = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n \langle x, u_h \rangle \langle x, u_k \rangle \langle u_h, u_k \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \langle x, u_k \rangle \langle x, u_k \rangle = \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} |\langle x, u_k \rangle|^2. \end{aligned}$$

Dunque 2. implica 4. e quindi anche 3. implica 4.

4 \Rightarrow 1. Supponiamo, per assurdo, che U non sia completo e che esista un vettore $u \in H$ tale che $U \cup \{u\}$ sia un sistema ortonormale. Posto $U = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$, per 4., si ha

$$\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |\langle u, u_k \rangle|^2 = 0 \quad \text{in quanto} \quad \langle u, u_k \rangle = 0.$$

Ciò è assurdo in quanto deve essere $\|u\| = 1$ affinché $U \cup \{u\}$ sia un sistema ortonormale.

□

Questo teorema assicura quindi che un sistema ortonormale completo è un insieme di vettori con proprietà molto vicine a quelle di una base ortonormale per spazi finitamente generati.

Notazione. Nel seguito, denoteremo con T lo spazio delle funzioni trigonometriche, ovvero l'insieme

$$T = \{\cos(kt), \sin(ht), \quad k \geq 0, h \geq 1\}. \quad (4.10)$$

Mostriamo che T costituisce un sistema ortonormale completo per $L^2([-\pi, \pi[)$.

Proposizione 4.6. *I generatori dello spazio delle funzioni trigonometriche T , ovvero le funzioni $\cos(kt)$, $\sin(ht)$, costituiscono per $k \geq 0$ e $h \geq 1$ un sistema ortogonale di funzioni in $L^2([-\pi, \pi[)$. Precisamente, si ha*

$$\langle \cos(kt), \cos(ht) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt) \cdot \cos(ht) dt = \begin{cases} 0, & \text{se } h \neq k \\ \pi, & \text{se } k = h \neq 0 \\ 2\pi, & \text{se } k = h = 0 \end{cases} \quad \forall k, h \geq 0. \quad (4.11)$$

$$\langle \sin(kt), \sin(ht) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt) \cdot \sin(ht) dt = \begin{cases} 0, & \text{se } h \neq k \\ \pi, & \text{se } k = h \neq 0 \end{cases} \quad \forall k, h \geq 1. \quad (4.12)$$

$$\langle \cos(kt), \sin(ht) \rangle = 0 \quad \forall k \geq 0, h \geq 1 \quad (4.13)$$

Questa Proposizione esprime l'ortogonalità, nel senso del prodotto scalare di $L^2([-\pi, \pi[)$, di ogni coppia di funzioni dell'insieme T ma non la loro ortonormalità. Per ottenere funzioni di norma 1 basta normalizzare le funzioni stesse, dividendo ciascuna di queste per la propria norma. Ne viene che

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(kt)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(ht)}{\sqrt{\pi}}$$

costituiscono $\forall k \geq 0$ e $\forall h \geq 1$ un sistema ortonormale di funzioni in $L^2([-\pi, \pi[)$, detto *sistema trigonometrico*.

Nota. Le funzioni in (4.10) appartengono a $C([-π, π[)$ quindi anche allo spazio $L^2([-π, π]^2)$.

Dimostrazione. Dalla formula di Eulero,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt) \cdot \cos(ht) dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2} \cdot \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2} dt \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{i(k+h)t} + e^{i(k-h)t} + e^{i(h-k)t} + e^{-i(k+h)t}) dt \quad \forall k, h \in \mathbb{N}; \end{aligned} \tag{4.14}$$

poiché

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{int} dt = \begin{cases} 2\pi, & \text{se } n = 0 \\ 0, & \text{se } n \neq 0 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ne consegue la (4.11). Le dimostrazioni di (4.12) e (4.13) sono analoghe. □

Per dimostrare la completezza del sistema trigonometrico utilizziamo il seguente teorema, la cui dimostrazione può essere trovata in [3](Osservazione 6.14, pag. 205).

TEOREMA - 4.7. *Siano $f, g \in L^2([-π, π[)$ due funzioni qualunque. Supponiamo che abbiano gli stessi coefficienti di Fourier, ovvero*

$$\begin{aligned} a_k(f) &= a_k(g) & \forall k \geq 0, \\ b_k(f) &= b_k(g) & \forall k \geq 1. \end{aligned}$$

Allora $f = g$ in $L^2([-π, π[)$, ovvero $f = g$ quasi-dappertutto su $[-π, π[$.

TEOREMA - 4.8. *L'insieme trigonometrico $T \subseteq L^2([-π, π[)$ è un sistema ortonormale completo.*

²Sia f una funzione continua in $[-π, π[$. Allora f è limitata, ossia esiste $M > 0$ tale che $|f| \leq M$, quindi $|f|^2 \leq M^2$. Pertanto si ha

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} M^2 dt = (2\pi)M^2 < \infty.$$

Dimostrazione. Manca da dimostrare la completezza di T . Supponiamo, per assurdo, che T non sia completo. Esiste allora $u \in L^2([-\pi, \pi])$, $\|u\| = 1$ tale che $T \cup \{u\}$ risulti un sistema ortonormale. Così i coefficienti di Fourier della funzione u , essendo i prodotti scalari tra u e gli elementi di T , sono tutti nulli. Pertanto, per il teorema precedente deve essere $u = 0$. Questo è assurdo, in quanto $\|u\| = 1$. □

Ora, data una funzione f in $L^2([-\pi, \pi])$ ne cerchiamo la proiezione su T : tale proiezione rappresenta l'elemento di T più vicino ad f ed è quindi il polinomio trigonometrico di grado n che meglio approssima f . Precisamente, notiamo che i coefficienti di Fourier, definiti in (4.7) e (4.8), sono le proiezioni di un elemento f in L^2 sulle "rette" di direzione $\cos(kt)$, $\sin(kt)$. Per comodità moltiplicheremo queste proiezioni per un fattore costante $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$. Si ha

$$\begin{aligned} a_0 &:= \frac{1}{2\pi} \langle f(t), 1 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \\ a_k &:= \frac{1}{\pi} \langle f(t), \cos(kt) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \cos(kt) dt \\ b_k &:= \frac{1}{\pi} \langle f(t), \sin(kt) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \sin(kt) dt. \end{aligned}$$

Vediamo ora, nel seguente Teorema, che il polinomio di Fourier di f è il polinomio "dei minimi quadrati" cioè quello che dista meno da f in termini della distanza in L^2 .

TEOREMA - 4.9. *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, misurabile e di quadrato sommabile su $[-\pi, \pi[$. Allora*

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f - p)^2 dt \geq \int_{-\pi}^{\pi} (f - S_n(f))^2 dt \quad \forall p \in T_n. \quad (4.15)$$

Dimostrazione. Per brevità di notazione indichiamo con

$$u_0, u_1, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots, u_{2n}$$

la sequenza di funzioni

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(t)}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(t)}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}}.$$

Se p è un qualunque polinomio trigonometrico di grado $\leq n$, esistono c_0, c_1, \dots, c_{2n} in \mathbb{R} tali che

$$p = \sum_{k=0}^{2n} c_k \cdot u_k.$$

Allora

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} (f - p)^2 dt &= \langle f - p, f - p \rangle_{L^2} = \langle f, f \rangle_{L^2} + \langle p, p \rangle_{L^2} - 2 \langle f, p \rangle_{L^2} = \\
&= \langle f, f \rangle_{L^2} + \left\langle \sum_{k=0}^{2n} c_k u_k, \sum_{h=0}^{2n} c_h u_h \right\rangle_{L^2} - 2 \left\langle f, \sum_{k=0}^{2n} c_k u_k \right\rangle_{L^2} = \\
&= \langle f, f \rangle_{L^2} + \sum_{k,h=0}^{2n} c_k c_h \langle u_k, u_h \rangle_{L^2} - 2 \sum_{k=0}^{2n} c_k \langle f, u_k \rangle_{L^2} = \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dt + \sum_{k=0}^{2n} c_k^2 - 2 \sum_{k=0}^{2n} c_k \int_{-\pi}^{\pi} f \cdot u_k dt = \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dt + \sum_{k=0}^{2n} (c_k - \int_{-\pi}^{\pi} f \cdot u_k dt)^2 - \sum_{k=0}^{2n} (\int_{-\pi}^{\pi} f \cdot u_k)^2 dt \\
&\geq \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dt - \sum_{k=0}^{2n} (\int_{-\pi}^{\pi} f \cdot u_k)^2 dt = \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left(f - \sum_{k=0}^{2n} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f \cdot u_k dt \right) u_k \right)^2 dt = \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} (f - S_n(f))^2 dt.
\end{aligned}$$

□

Corollario 4.10. (Disuguaglianza di Bessel) Nelle ipotesi del Teorema precedente risulta

$$\sum_{k=0}^{2n} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f \cdot u_k dt \right)^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 dt \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dimostrazione. Vale

$$0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} (f - S_n)^2 dt = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dt - \sum_{k=0}^{2n} (\int_{-\pi}^{\pi} f \cdot u_k)^2 dt,$$

da cui

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2 dt \geq \sum_{k=0}^{2n} (\int_{-\pi}^{\pi} f \cdot u_k)^2 dt.$$

□

4.4 Serie di Fourier e convergenza in norma L^2

In questa sezione dimostreremo il risultato fondamentale di questo capitolo; precisamente vedremo che, dati una funzione f in $L^2([-\pi, \pi[)$ e il corrispondente polinomio di Fourier $S_n(f)$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|S_n - f\|_{L^2} = 0$. Un problema fondamentale della teoria delle serie di Fourier è quello di trovare sotto quali ipotesi una funzione f , reale e periodica di periodo 2π , sia la somma di una serie del tipo $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$. Il nostro obiettivo è invece quello di trovare le condizioni più deboli su una funzione assegnata f , reale e periodica di periodo 2π , in modo che essa sia sviluppabile in serie di Fourier. Si tratta dunque di chiedersi se i risultati di convergenza puntuale, che necessitano sempre di particolari ipotesi sulla funzione f , possano essere estesi, opportunamente, a classi più generali di funzioni. Affrontiamo quindi la relazione tra la funzione e la sua serie di Fourier in L^2 , e presentiamo un risultato di convergenza.

Definizione 4.7. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, sommabile sull'intervallo $[-\pi, \pi[$. La serie trigonometrica

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$$

si chiama *serie di Fourier* di f se

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt \quad \text{per } k \geq 0$$

e

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt \quad \text{per } k \geq 1.$$

I numeri reali a_k e b_k vengono chiamati *coefficienti di Fourier* di f .

Definizione 4.8. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, sommabile sull'intervallo $[-\pi, \pi[$. Si dice che f è *sviluppabile in serie di Fourier nel punto* $t \in \mathbb{R}$ se la sua serie di Fourier converge nel punto t ed ha somma uguale a $f(t)$, precisamente se e solo se:

1. la successione $(S_n(f)(t))_{n \in \mathbb{N}}$ è convergente
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f) = f(t)$.

In tal caso, quindi,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \quad (4.16)$$

se a_k e b_k sono i coefficienti di Fourier di f .

Nota. La somma parziale n -esima della serie al secondo membro di (4.16) di f è il polinomio di Fourier di grado n di f .

Nota. Prima di procedere con la trattazione della convergenza in L^2 soffermiamoci brevemente sulla delicatezza del problema della convergenza puntuale. Infatti, a tal proposito, è importante osservare che, modificando f nei punti di un insieme di misura nulla (in particolare nel solo punto t), i suoi coefficienti di Fourier, e quindi la successione dei polinomi $S_n(f)$, non cambiano. Può quindi facilmente accadere che si verifichi la condizione 1. senza che valga 2. Per comprendere meglio il problema vediamo un esempio.

Esempio 9. Consideriamo la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x), & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Notiamo che f è uguale a $\cos(x)$ quasi dappertutto. Poichè i coefficienti di Fourier sono esprimibili in forma integrale, ne viene che, integrando su un insieme di misura nulla, il loro valore rimarrà il medesimo proprio perchè l'integrale non cambia. Di conseguenza si avrà anche la stessa serie. Pertanto, abbiamo una funzione per cui sappiamo che la serie converge e ne prendiamo una uguale quasi dappertutto allora quest'ultima avrà la stessa serie che però non convergerà. Nel nostro caso specifico, consideriamo:

- $\cos(x)$, che è una funzione che coincide proprio con la sua serie di Fourier;
- f .

Allora f è uguale a $\cos(x)$ quasi dappertutto e quindi la sua serie di Fourier sarà $\cos(x)$ ma questa serie non converge ad f : sicuramente sui razionali non converge perchè f vale sempre 0.

Lemma 4.11. (*Convergenza della serie di Fourier*)

Sia $f \in L^2([-\pi, \pi])$ fissata ad arbitrio e sia $U \subseteq L^2([-\pi, \pi])$ un sistema ortonormale. La serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \langle f, u_k \rangle u_k$$

è convergente in $L^2([-\pi, \pi])$ per ogni f .

Dimostrazione. Sia $\{u_k, k \in \mathbb{N}\}$ una numerazione di U . Per la disuguaglianza di Bessel si ha

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\langle f, u_k \rangle|^2 \leq \|f\|^2.$$

Pertanto, per il Lemma 4.4, la serie è convergente. □

Nota. Il suddetto lemma assicura la convergenza della serie di Fourier ma non dice nulla sul valore del suo limite. Precisamente, sappiamo che la serie di Fourier di f è convergente qualunque sia f ma questo non è sufficiente a garantire che la sua somma sia f stessa.

Mostriamo ora che affinché f sia sviluppabile in serie di Fourier risulta fondamentale la nozione di completezza del sistema ortonormale.

Un'importante conseguenza della completezza del sistema ortonormale trigonometrico T è rappresentata dal punto 2. del Teorema 4.5 a pagina 44. Data una qualunque funzione $f \in L^2([-\pi, \pi])$ risulta

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$$

in $L^2([-\pi, \pi])$, ovvero

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))|^2 dt = \\ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - S_n(f)\|_{L^2([-\pi, \pi])} = 0. \end{aligned}$$

In altre parole, ogni funzione $f \in L^2([-\pi, \pi])$ è il limite in L^2 delle somme parziali delle sua serie di Fourier.

Nota. Per concludere, notiamo che la completezza di T non dice nulla riguardo la convergenza puntuale delle serie di Fourier. Per questa rimandiamo al libro [3], il cui ultimo capitolo tratta la teoria della sviluppabilità in serie di Fourier.

Vediamo infine una applicazione di quanto finora detto, avvalendoci della risorsa computazionale interattiva *Wolfram Demonstrations Project*.

Esempio 10. Consideriamo una funzione f , periodica e pari, su un intervallo I e mostriamo graficamente la convergenza in norma L^2 delle serie di Fourier a tale funzione sull'intervallo I . Studiamo l'andamento dei polinomi di Fourier di grado rispettivamente 1, 2, 3, 4, 5, 6.

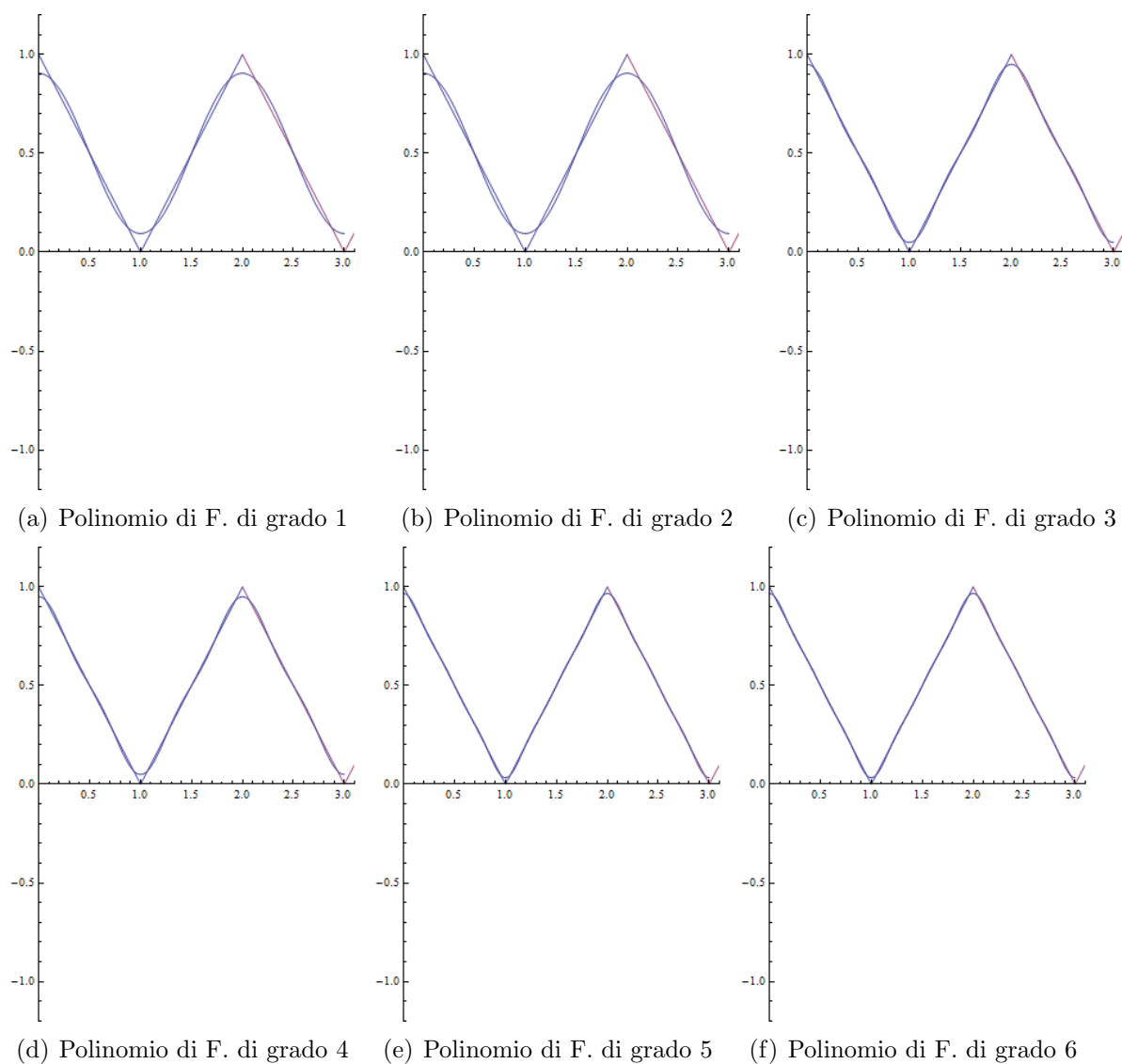


Figura 4.5: Approssimazione della funzione con serie di Fourier.

Dai grafici si evince che, all'aumentare del grado del polinomio di Fourier, presa una qualsiasi striscia, piccola a piacere, attorno al grafico di f , da un certo grado in poi tutti i grafici dei polinomi di Fourier stanno interamente dentro quella striscia (tutto,

naturalmente sull'intervallo I): ciò garantisce che la successione di polinomi di Fourier converge ad f uniformemente su I e dunque, in particolare, anche in norma L^2 su I . Pertanto possiamo concludere che la funzione f può essere approssimata da una serie di Fourier attraverso somme di funzioni trigonometriche.

4.5 Serie di Fourier complesse

La teoria sviluppata nelle sezioni precedenti si estende banalmente alle funzioni a valori in \mathbb{C} . In questa sezione ci limiteremo soltanto a dedurre, da quella reale, la forma complessa delle serie di Fourier, che vedremo essere una forma più compatta di quella del caso reale.

Sia dunque $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione 2π -periodica, sommabile su $[-\pi, \pi]$. Come nel caso reale,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$$

si chiama *serie di Fourier* di f se

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt \quad \text{per } k \geq 0$$

e

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt \quad \text{per } k \geq 1.$$

Scrivendo $\cos(kt)$ e $\sin(kt)$ con le formule di Eulero, si ottiene

$$\begin{aligned} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) &= a_k \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2} + b_k \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2i} = \\ &= \frac{a_k - ib_k}{2} e^{ikt} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ikt} \end{aligned}$$

e quindi, posto

$$\alpha_k = \begin{cases} \frac{a_k - ib_k}{2}, & \text{se } k \in \mathbb{Z}, k \geq 1 \\ \frac{a_0}{2}, & \text{se } k = 0 \\ \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2}, & \text{se } k \in \mathbb{Z}, k \leq -1, \end{cases}$$

la serie di Fourier può scriversi così

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k e^{ikt}.$$

Inoltre, esplicitando i coefficienti di Fourier,

$$\alpha_k = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\cos(kt) - i \sin(kt)}{2} dt, & \text{per } k \geq 0 \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\cos(-kt) + i \sin(-kt)}{2} dt, & \text{per } k < 0 \end{cases}$$

e quindi

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

4.6 Dalla serie alla trasformata di Fourier

Per collegare serie e trasformata di Fourier consideriamo una funzione $f \in L^1(\mathbb{R})$, la restringiamo in $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ e la prolunghiamo per periodicità in \mathbb{R} , denotandola con f_T .

Scriviamo lo sviluppo in serie di Fourier complessa nel seguente modo

$$f_T(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(e^{ik\nu x} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\nu t} dt \right) \Delta\nu$$

ove $\nu = \frac{2\pi}{T}$, $k \in \mathbb{Z}$ e $\Delta\nu = \frac{2\pi k}{T} - \frac{2\pi(k-1)}{T} = \frac{2\pi}{T}$.

Ora, passiamo al limite per $T \rightarrow +\infty$. Essendo $\Delta\nu = \frac{2\pi}{T}$ la lunghezza degli intervallini della decomposizione di \mathbb{R} , costruita dagli infiniti punti $k\frac{2\pi}{T}$ ove $k \in \mathbb{Z}$, per analogia con la somma integrale, otteniamo la formula di inversione della trasformata di Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(e^{i\nu x} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\nu t} dt \right) d\nu.$$

Appendice A

Appendice

A.1 Trasformata di Fourier

In questa sezione troviamo le dimostrazioni delle principali proprietà della trasformata di Fourier presentate nel primo Capitolo.

Proposizione A.1. *Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ fissata. Allora la sua trasformata di Fourier $\mathcal{F}f$ è continua in \mathbb{R}^n .*

Dimostrazione. Sia $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^n$ una successione tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \xi_n = \xi$ in \mathbb{R}^n . Allora

$$\mathcal{F}f(\xi_n) - f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} (e^{-i\langle x, \xi_n \rangle} - e^{-i\langle x, \xi \rangle}) f(x) dx.$$

Poiché

$$|(e^{-i\langle x, \xi_n \rangle} - e^{-i\langle x, \xi \rangle}) f(x)| \leq |(e^{-i\langle x, \xi_n \rangle} + e^{-i\langle x, \xi \rangle})| |f(x)| \leq 2 \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

per il teorema di convergenza dominata, si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\mathcal{F}f(\xi_n) - f(\xi)) = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{-i\langle x, \xi_n \rangle} - e^{-i\langle x, \xi \rangle}) f(x) dx = 0.$$

□

Proposizione A.2. Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ fissata. Allora per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$ vale:

$$|\mathcal{F}f(\xi)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

.

Dimostrazione. Per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$:

$$|\mathcal{F}f(\xi)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

da cui la tesi. □

Proposizione A.3. Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ fissata. Allora

$$\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \mathcal{F}f(\xi) = 0.$$

Dimostrazione. Notiamo che essendo $e^{i\pi} = -1$ possiamo riscrivere la trasformata di Fourier come

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^n} (e^{i\pi} e^{-i\langle x, \xi \rangle}) f(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\pi - \langle x, \xi \rangle)} f(x) dx.$$

Ora, $\pi - \langle x, \xi \rangle = \left\langle \pi \frac{\xi}{\|\xi\|^2} - x, \xi \right\rangle$ per $\xi \neq 0$ e quindi posto $x' = x - \pi \frac{\xi}{\|\xi\|^2}$ risulta

$$\mathcal{F}f(\xi) = - \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x', \xi \rangle} f\left(x' + \pi \frac{\xi}{\|\xi\|^2}\right) dx'$$

dove la variabile di integrazione x' può ridenotarsi con x .

Ora, sommando membro a membro le due espressioni della trasformata di Fourier si ricava

$$2\mathcal{F}f(\xi) = 2 \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} \left(f(x) - f\left(x + \pi \frac{\xi}{\|\xi\|^2}\right) \right) dx$$

da cui

$$|\mathcal{F}f(\xi)| \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f\left(x + \pi \frac{\xi}{\|\xi\|^2}\right)| dx$$

ma

$$\left\| \pi \frac{\xi}{\|\xi\|^2} \right\| = \pi \frac{1}{\|\xi\|} \rightarrow 0, \quad \xi \rightarrow +\infty \text{ quindi poich\`e}$$

$$\|f(x+h) - f(x)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0, \quad |h| \rightarrow 0$$

si ha

$$\mathcal{F}f(\xi) \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f\left(x + \pi \frac{\xi}{\|\xi\|^2}\right)| dx \rightarrow 0, \quad \xi \rightarrow 0$$

da cui la tesi. □

Proposizione A.4. Sia f in $L^1(\mathbb{R}^n)$ fissata. Supponiamo che esista la derivata (in senso debole) $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ e che tale applicazione sia in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = -i\xi_j \mathcal{F}(f)(\xi).$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione di troncamento φ_N :

$$\begin{aligned} \varphi_N &= 1 & x < N \\ \varphi_N &= 0 & x > N + 1 \\ \varphi_N &\in C^\infty & N < x < N + 1 \\ |\varphi'_N| &\leq C & \forall N \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Poniamo $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_N(x) := \varphi_N(\|x\|) \forall N \in \mathbb{N}$. Risulta immediatamente che

- $\lim_{N \rightarrow +\infty} \varphi_N = 1$,
- $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\partial \varphi_N}{\partial x_j} = 0$.

Si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(\xi) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \varphi_N(x) dx \right) = \\ &= - \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_j} (e^{-i\langle x, \xi \rangle} \varphi_N(x)) f(x) dx \right) = \\ &= - \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(-i\xi_j \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} \varphi_N(x) f(x) dx + \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} \frac{\partial \varphi_N}{\partial x_j} f(x) dx \right). \end{aligned}$$

Per le ipotesi, possiamo dunque applicare il teorema di convergenza dominata ai due integrali, ottenendo

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(\xi) &= i\xi_j \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{N \rightarrow +\infty} e^{-i\langle x, \xi \rangle} \varphi_N(x) f(x) dx + \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{N \rightarrow +\infty} e^{-i\langle x, \xi \rangle} \frac{\partial \varphi_N}{\partial x_j} f(x) dx = \\ &= i\xi_j \mathcal{F}f(\xi). \end{aligned}$$

□

Proposizione A.5. Sia $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ fissata. Allora $\mathcal{F}f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Dimostrazione. Dimostrare che $\mathcal{F}f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ equivale a dimostrare che

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi^\alpha \partial^\beta \mathcal{F}f(\xi) = 0$$

per ogni α, β multiindice. Si ha

$$\begin{aligned} \partial_{\xi_j} \mathcal{F}f(\xi) &= \partial_{\xi_j} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x) dx = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{e^{-i\langle x, \xi + t e_j \rangle} - e^{-i\langle x, \xi \rangle}}{t} \right) f(x) dx = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} \left(\frac{e^{-itx_j} - 1}{t} \right) f(x) dx. \end{aligned}$$

Cerchiamo ora di applicare il teorema di convergenza dominata per poter passare al limite sotto al segno di integrale.

$$\left| e^{-i\langle x, \xi \rangle} \left(\frac{e^{-itx_j} - 1}{t} \right) f(x) \right| = \left| \frac{e^{-itx_j} - 1}{t} \right| |f(x)|$$

Consideriamo $|e^{-itx_j} - 1|$. Vale

$$\begin{aligned} |e^{-itx_j} - 1| &= |\cos(-tx_j) + i \sin(-tx_j) - 1| = |(\cos(-tx_j) - 1) + i \sin(-tx_j)| = \\ &= \sqrt{\cos^2(-tx_j) - 2 \cos(-tx_j) + 1 + \sin^2(-tx_j)} = \sqrt{2 - 2 \cos(-tx_j)} = \\ &= \sqrt{\frac{4(1 - \cos(-tx_j))}{2}} = 2 \sqrt{\frac{1 - \cos(-tx_j)}{2}} = 2 \sin\left(\frac{-tx_j}{2}\right). \end{aligned}$$

Quindi

$$\left| \frac{e^{-itx_j} - 1}{t} \right| = 2 \left| \frac{\sin\left(\frac{-tx_j}{2}\right)}{t} \right| = |x_j| \left| \frac{\sin\left(\frac{-tx_j}{2}\right)}{\frac{-tx_j}{2}} \right|$$

ma $\left| \frac{\sin\left(\frac{-tx_j}{2}\right)}{\frac{-tx_j}{2}} \right|$ è limitata su \mathbb{R} per cui $\forall t$ e $\forall x_j$

$$\left| e^{-i\langle x, \xi \rangle} \left(\frac{e^{-itx_j} - 1}{t} \right) f(x) \right| \leq C |f(x)|.$$

Siccome $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la funzione

$$x \longrightarrow x_j f(x)$$

è sommabile e quindi possiamo applicare il teorema di Lebesgue.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} \left(\frac{e^{-itx_j} - 1}{t} \right) f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{t \rightarrow 0} e^{-i\langle x, \xi \rangle} \left(\frac{e^{-itx_j} - 1}{t} \right) f(x) dx$$

e, grazie al teorema di de l'Hôpital,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-itx_j} - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-ie^{-itx_j} x_j}{1} = -ix_j$$

si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} \lim_{t \rightarrow 0} e^{-i\langle x, \xi \rangle} \left(\frac{e^{-itx_j} - 1}{t} \right) f(x) dx = -i \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} x_j f(x) dx = -i\mathcal{F}(x_j f)(\xi).$$

Ora, grazie alla Proposizione A.4 sappiamo che se $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\frac{\partial g}{\partial x_j} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ allora $\mathcal{F}\left(\frac{\partial g}{\partial x_j}\right)(\xi) = i\xi_j \mathcal{F}g(\xi)$ da cui

$$\xi_j \mathcal{F}g(\xi) = \frac{1}{i} \mathcal{F}\left(\frac{\partial g}{\partial x_j}\right)(\xi) = -i \mathcal{F}\left(\frac{\partial g}{\partial x_j}\right)(\xi)$$

e

$$\xi^\alpha \mathcal{F}g(\xi) = -i^{|\alpha|} \mathcal{F}(\partial_x^\alpha g)(\xi).$$

Pertanto

$$\xi^\alpha \partial^\beta \mathcal{F}f(\xi) = (-i)^{|\beta|} \xi^\alpha \mathcal{F}(x^\beta f)(\xi) = (-i)^{|\beta|} (-i)^{|\alpha|} \mathcal{F}(\partial_x^\alpha (x^\beta f))(\xi).$$

Così $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e quindi $x^\beta f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ da cui $\partial_x^\alpha (x^\beta f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$. Infine sappiamo, dalla Proposizione A.3, che le trasformazioni di Fourier in $L^1(\mathbb{R}^n)$ vanno a zero all'infinito, da cui la tesi. □

A.2 Spazi di Hilbert

In questa sezione proponiamo le dimostrazioni dei principali risultati utilizzati nella parte dedicata agli spazi di Hilbert astratti, tra i quali, in particolare, lo spazio $L^2([-\pi, \pi])$.

Lemma A.6. $L^2([-\pi, \pi])$ è uno spazio vettoriale sul campo reale.

Dimostrazione.

- Se $f, g \in L^2([-\pi, \pi])$ allora $f + g \in L^2([-\pi, \pi])$.

Infatti, dalla disuguaglianza di Minkowski, segue che

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} (|f(t)| + |g(t)|)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

- Se $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in L^2([-\pi, \pi])$ allora $\lambda \cdot f \in L^2([-\pi, \pi])$.

Risulta immediatamente verificata. □

Proposizione A.7. Siano $[f], [g] \in L^2([-\pi, \pi])$. L'applicazione

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : L^2([-\pi, \pi]) \times L^2([-\pi, \pi]) \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot g(t) dt$$

è un prodotto scalare su $L^2([-\pi, \pi])$.

Dimostrazione.

- $\langle f + g, h \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) + g(t)) \cdot h(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot h(t) dt + \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cdot h(t) dt = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle,$
- $\langle \alpha f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \alpha f(t) \cdot g(t) dt = \alpha \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot g(t) dt = \alpha \langle f, g \rangle,$
- $\langle f, f \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt \geq 0$ e $\langle f, f \rangle \neq 0$ per $f \neq 0$.

□

TEOREMA - A.8. *Sia X uno spazio vettoriale sul campo reale e sia \langle, \rangle un prodotto scalare su X . Allora, fissato $y \in X$ l'applicazione*

$$(x, y) \longrightarrow \langle x, y \rangle$$

è continua su X rispetto alla metrica indotta dal prodotto scalare. Un risultato analogo si ha nel caso in cui si fissi la prima componente invece della seconda.

Dimostrazione. Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in X e sia $x_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$. Applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha

$$0 \leq |\langle x_n, y \rangle - \langle x_0, y \rangle| = |\langle x_n - x_0, y \rangle| \leq \|x_n - x_0\| \|y\|$$

da cui si evince che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle x_n, y \rangle = \langle x_0, y \rangle.$$

Ciò prova la continuità del prodotto scalare.

□

Bibliografia

- [1] Bracewell, R.N.: *The Fourier Transform and its Applications*, Third Edition. McGraw-Hill International Edition, Singapore, 2000.

- [2] Fiorenziani, S.: *Energy Structured Products: from Theory to Practice*. Barbera Editore, 2009.

- [3] Lanconelli, E.: *Lezioni di ANALISI MATEMATICA 2*. Pitagora Editrice Bologna, 1997.

- [4] Pini, B. : *SECONDO CORSO DI ANALISI MATEMATICA, PARTE I*. Cooperativa libraria universitaria, Bologna.

- [5] Rudin, W.: *Real And Complex Analysis*. Math, McGraw Hill, 1970.

- [6] Strichartz, R.: *A guide to distribution theory and Fourier transforms*. Cornell University. CRC Press, 1994.

- [7] Istituto della ENCICLOPEDIA ITALIANA fondata da Giovanni Treccani: *Enciclopedia italiana di scienze, lettere ed arti*. Roma, 1949.

Ringraziamenti

Vorrei anzitutto ringraziare il Professor Andrea Pascucci per aver reso possibile la realizzazione di questo lavoro e soprattutto per aver consentito la mia prima esperienza con la Matematica applicata. Un grazie di cuore va al mio ragazzo Andrea per l'essermi stato sempre così vicino, per aver placato le mie ansie con la sua infinita dolcezza e per avermi trasmesso una buona dose di sicurezza che da troppo tempo mancava in me: grazie per essere così meraviglioso con me. Grazie anche a Stefano per la sua disponibilità, la sua infinita gentilezza e la sua straordinaria competenza matematica: il suo simpatico sostegno, tecnico e morale, nella realizzazione di questo lavoro è stato per me molto importante, ancora grazie. Un grazie particolare va alla mia cara amica e coinquilina Giulia per essermi stata tanto vicina quando molto attorno a me si stava allontanando, ancora grazie per i suoi consigli diretti, per i suoi affettuosi rimproveri alle mie insicurezze e per la sua dolce comprensione. Infine, un profondo ringraziamento alla mia famiglia per l'amorevole sopporto che mi hanno sempre dato, per l'attenzione che hanno nel cogliere ogni mia debolezza che tento di nascondere, per la loro speciale comprensione e fiducia in me. Grazie Mamma, Babbo, Nonna e Nonno, insieme siete il mio punto di riferimento.

A tutti voi, grazie davvero di cuore.

Alice Buccioli