Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

SISTEMI ED EQUAZIONI DIFFERENZIALI DI ORDINE SUPERIORE

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Ermanno Lanconelli

Presentata da:
Giulia Zanchini

II Sessione
Anno Accademico 2011/2012

alla mia famiglia e
a tutti coloro che
hanno creduto
in me

Indice

Introduzione

Molti problemi scientifici consistono nel tentare di determinare una quantità conoscendone il suo tasso di variazione. Spesso, nel concreto, notiamo il verificarsi di cambiamenti e vogliamo poter predire il comportamento futuro di un fenomeno sulla base delle variazioni dei valori attuali. Ad esempio, potrebbe trattarsi della determinazione della traiettoria di una particella conoscendone la velocità e l'accelerazione. Si tenta cioè di trovare una funzione incognita a partire da informazioni espresse nella forma di un' equazione contenente almeno una delle derivate della funzione incognita. Queste equazioni sono dette *equazioni differenziali*. Esse si suddividono in due classi : equazioni differenziali *ordinarie* e *alle derivate parziali*, a seconda che la funzione incognita dipenda da una o più variabili. In questa tesi trattiamo solamente le *equazioni differenziali ordinarie* e, in particolare, i *sistemi di equazioni differenziali ordinarie* con alcune applicazioni in campo fisico e geometrico.

Capitolo 1

SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Sia $(y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n, \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ed $f_i : \Omega \ni (t, y_1, ..., y_n) \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n$. Un sistema di equazioni differenziali del primo ordine ha la struttura seguente

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, ..., y_n), \\ .... \\ y_n' = f_n(t, y_1, ..., y_n). \end{cases}$$

Introducendo i vettori $y = (y_1, ..., y_n)$ e $f = (f_1, ..., f_n)$ il sistema si può scrivere nella forma compatta

$$y' = f(t, y) \tag{1.1}$$

che, formalmente, è un'*equazione differenziale ordinaria.* Per la definizione di *equazione differenziale ordinaria* si veda il paragrafo 2.1 del Capitolo successivo.

1.1 Sistemi lineari di equazioni differenziali

In questo paragrafo studieremo i sistemi di equazioni differenziali lineari, con particolare riguardo a quelli omogenei.

Definizione 1.1.1. Si chiamano *lineari* i sistemi di equazioni differenziali ordinarie del tipo seguente

$$y' = A(t)y + b(t) \tag{1.2}$$

ove $A(t) = (a_{ij}(t))_{ij=1,\dots,n}$ è una matrice $n \times n$ di funzioni $a_{ij} \in C(I, \mathbb{R})$, con I intervallo aperto e non vuoto di $\mathbb{R}$, e ove $b \in C(I, \mathbb{R}^n)$.

La matrice $A(t)$ prende il nome di *matrice dei coefficienti*, mentre $b(t)$ si dice *termine noto*. Se A e b sono costanti, il sistema si dice *autonomo*. In forma più esplicita la (1.2) si scrive:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + ... + a_{1n}(t)y_n + b_1(t) \\ y_2' = a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2 + ... + a_{2n}(t)y_n + b_2(t) \\ .... \\ y_n' = a_{n1}(t)y_1 + a_{n2}(t)y_2 + ... + a_{nn}(t)y_n + b_n(t). \end{cases}$$

L'equazione (1.2) è un caso particolare dell'equazione differenziale ordinaria $y' = f(t, y)$ con

$$f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad f(t, y) = A(t)y + b(t).$$

È importante notare che $f \in C(I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ e f è localmente lipschitziana (cfr. Definizione 2.1.3) in y nell'aperto $I \times \mathbb{R}^n$ in quanto, se J è un intervallo compatto contenuto in I, per ogni $t \in J$ e per ogni $y, z \in \mathbb{R}^n$ risulta

$$| f(t, y) - f(t, z) | = \| A(t) \| | y - z | \leq L | y - z |$$

ove $L = max_{t \in J} \|A(t)\|$.

Per cui, come vedremo successivamente, per ogni $t_0 \in I$ e per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = A(t)y + b(t) \\ y(t_0) = \xi \end{cases}$$

ha una ed una sola soluzione definita sull'intervallo I.

Allo studio del sistema (1.2) è opportuno premettere l'analisi del sistema lineare omogeneo associato

$$y' = A(t)y$$

ottenuto ponendo il termine noto, $b(t)$, uguale a 0.

Teorema 1.1.2. *L'insieme delle soluzioni dell'equazione*

$$y' = A(t)y \tag{1.3}$$

è un sottospazio vettoriale di $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ *di dimensione* n.

Dimostrazione. Se $u, v \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ sono soluzioni di (1.3) e se $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ allora

$$(\lambda u + \mu v)'(t) = \lambda u'(t) + \mu v'(t) = \lambda A(t)u(t) + \mu A(t)v(t)$$

$$= A(t)(\lambda u + \mu v) \qquad \forall t \in I.$$

Questo prova che

$$K = \{u \in C^1(I, \mathbb{R}^n) / u'(t) = A(t)u(t) \quad \forall t \in I\}.$$

è un sottospazio vettoriale di $C^1(I, \mathbb{R}^n)$.
Proviamo ora che $dim(K) = n$ verificando che K è algebricamente isomorfo a $\mathbb{R}^n$. Fissato ad arbitrio $t_0 \in I$ definiamo

$$T_{t_0} : K \to \mathbb{R}^n \qquad T_{t_0}(u) = u(t_0).$$

Evidentemente T_{t_0} è lineare. Inoltre T_{t_0} è iniettiva in quanto se $u \in K$ e $T_{t_0}(u) = 0$ allora u è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = A(t)y \\ y(t_0) = 0. \end{cases}$$

D'altra parte anche la funzione $v \equiv 0$ risolve il sistema precedente, quindi per il Teorema di unicità della soluzione del problema di Cauchy (il cui enunciato verrà esplicitato nel prossimo Capitolo) deve essere $u = 0$. Dunque T_{t_0} è i-niettiva e anche suriettiva poichè, fissato ad arbitrio $\xi \in \mathbb{R}^n$, se $u \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = A(t)y \\ y(t_0) = \xi \end{cases}$$

allora $u \in K$ e $T_{t_0} = u(t_0) = \xi$.

Resta così provato che T_{t_0} è un isomorfismo algebrico di K su $\mathbb{R}^n$. Dunque

$$dim K = dim \mathbb{R}^n = n.$$

$\square$

Definizione 1.1.3. Ogni base $\{u_1, ..., u_n\}$ dello spazio vettoriale K si chiama *sistema fondamentale di integrali* dell'equazione omogenea $y' = A(t)y$.

Osservazione 1.1.4. Se $\{u_1, ..., u_n\}$ è un sistema fondamentale di integrali dell'equazione omogenea

$$y' = A(t)y$$

allora per ogni soluzione u di tale equazione esistono $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$ tali che

$$u = \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j u_j.$$

Viceversa, ogni funzione u del tipo precedente è soluzione dell'equazione omogenea.

Si usa solitamente esprimere questo risultato dicendo che

$$\sum_{j=1}^{n} c_j u_j, \quad c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$$

è l' *integrale generale* dell'equazione omogenea $y' = A(t)y$.

Proposizione 1.1.5. *Se $u_1, ..., u_n$ sono soluzioni dell'equazione omogenea*

$$y' = A(t)y,$$

sono equivalenti le seguenti affermazioni:

(i) esiste $t_0 \in I$ tale che

$$det[u_1(t_0), ..., u_n(t_0)] \neq 0;$$

(ii) per ogni $t_0 \in I$ risulta

$$det[u_1(t_0), ..., u_n(t_0)] \neq 0;$$

(iii) $\{u_1, ..., u_n\}$ è un sistema fondamentale di integrali dell'equazione omogenea $y' = A(t)y$.

Dimostrazione. *(iii)* $\Rightarrow$ *(i)*. Se $\{u_1, ..., u_n\}$ è un sistema fondamentale per l'equazione omogenea allora

$$\{u_1(t_0), ..., u_n(t_0)\} = \{T_{t_0}(u_1), ..., T_{t_0}(u_n)\}$$

è una base di $\mathbb{R}^n$, per ogni $t_0 \in I$ (cfr. la dimostrazione del Teorema precedente). Di conseguenza

$$det[u_1(t_0), ..., u_n(t_0)] \neq 0 \qquad \forall t \in I.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$. È ovvia.
$(i) \Rightarrow (iii)$. Se $det[u_1(t_0), ..., u_n(t_0)] \neq 0$ allora $\{u_1, ..., u_n\}$ è una base di $\mathbb{R}^n$. D'altra parte

$$T_{t_0} : K \to \mathbb{R}^n \qquad T_{t_0}(u) = u(t_0)$$

è un isomorfismo algebrico di K su $\mathbb{R}^n$ (cfr. la dimostrazione del Teorema precedente). Allora

$$\{u_1, ..., u_n\} = T_{t_0}^{-1}(\{u_1(t_0), ..., u_n(t_0)\})$$

è una base di K. □

Il determinante

$$det[u_1, ..., u_n]$$

si chiama *wronskiano* delle funzioni $u_1, ..., u_n$ e si indica con $W(u_1, ..., u_n)$:

$$W(u_1, ..., u_n) = det[u_1, ..., u_n].$$

Dalla Proposizione precedente si ricava che il wronskiano di una n-pla di soluzioni dell'equazione omogenea $y' = A(t)y$ è diverso da zero in un punto di I se e solo se è diverso da zero in ogni punto di I.

Proposizione 1.1.6. *Se $\{u_1, ..., u_n\}$ è un sistema fondamentale dell'equazione omogenea*

$$y' = A(t)y \tag{1.4}$$

e se v è una soluzione dell'equazione

$$y' = A(t)y + b(t) \tag{1.5}$$

allora

$$u = v + \sum_{j=1}^{n} c_j u_j, \qquad c_1, ..., c_n \in \mathbb{R} \tag{1.6}$$

è l'integrale generale di (1.5). Precisamente (1.6) è soluzione di (1.5) per ogni $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$*; viceversa, se* u *è soluzione di (1.5) esistono* $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$ *tali che vale (1.6).*

Dimostrazione. Se u si scrive come in (1.6) allora, poichè $v' = Av + b$ e $u'_j = Au_j$ per ogni $j = 1, 2, ..., n$, si ha:

$$u' = v' + \sum_{j=1}^{n} c_j u'_j = Av + b + \sum_{j=1}^{n} c_j A u_j = A\big(v + \sum_{j=1}^{n} c_j u_j\big) + b = Au + b.$$

Questo dimostra che u è soluzione di (1.5).
Viceversa, se u è soluzione di (1.5) allora per ipotesi

$$u' = Au + b \qquad v' = Av + b$$

e quindi

$$(u - v)' = A(u - v).$$

Allora, poichè $\{u_1, ..., u_n\}$ è un sistema fondamentale per (1.4) esistono $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$ tali che

$$u - v = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j.$$

Questo completa la dimostrazione. $\square$

Se $\{u_1, ..., u_n\}$ è un sistema fondamentale per l'equazione omogenea

$$y' = A(t)y, \tag{1.7}$$

diremo che la matrice

$$V(u_1, ..., u_n) \stackrel{def}{=} [u_1, ..., u_n]$$

è una *matrice fondamentale* per (1.7). Quando non vi è pericolo di ambiguità si scrive V in luogo di $V(u_1, ..., u_n)$.
Se

$$V(t_0) = [u_1(t_0), ..., u_n(t_0)] = I_n$$

si dice che V è una *matrice fondamentale principale per (1.7) nel punto* t_0.

Osservazione 1.1.7. Se $u_1, ..., u_n$ sono soluzioni dell'equazione omogenea (1.7) allora $V(u_1, ..., u_n)$ è una matrice fondamentale per (1.7) se e solo se

$$detV(u_1, ..., u_n)(t_0) \neq 0$$

in almeno un (o, equivalentemente,in ogni) punto $t_0 \in I$. Si noti infatti che

$$detV(u_1, ..., u_n) = W(u_1, ..., u_n)$$

è il determinante wronskiano di $u_1, ..., u_n$.

Osservazione 1.1.8. L'equazione omogenea (1.7) ha *una* ed *una sola* matrice fondamentale principale in ogni fissato punto $t_0 \in I$. Infatti, se u_j è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = A(t)y \\ y(t_0) = e_j, \qquad e_j = (0, ..., 1, ..., 0) \end{cases}$$

allora $V(u_1, ..., u_n)$ è una matrice fondamentale principale in t_0 in quanto

$$V(u_1, ..., u_n)(t_0) = [e_1, ..., e_n] = I_n.$$

Proviamo ora che V è l'unica matrice fondamentale di (1.7). Sia infatti

$$V_1 = V_1(v_1, ..., v_n)$$

una matrice fondamentale principale di (1.7) in t_0. Allora

$$V_1(t_0) = [v_1(t_0), ..., v_n(t_0)] = I_n,$$

e quindi

$$v_j(t_0) = e_j \; per \; j = 1, 2, ..., n.$$

La funzione v_j è quindi soluzione del problema di Cauchy. Di conseguenza, poichè anche u_j è soluzione dello stesso problema, per il Teorema di unicità risulta $v_j = u_j$ e quindi

$$V_1 = [v_1, ..., v_n] = [u_1, ..., u_n] = V.$$

Proposizione 1.1.9. *Se* $(u_1, ..., u_n)$ *sono soluzioni dell'equazione omogenea*

$$y' = A(t)y$$

e se $V = V[u_1, ..., u_n]$, *allora*

$$V'(t) = A(t)V(t) \qquad \forall t \in I.$$

Dimostrazione. Per mostrare questa identità basta riconoscere che per ogni $t \in I$ risulta

$$\langle V'(t)\alpha, \beta\rangle = \langle A(t)V(t)\alpha, \beta\rangle \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^n.$$

Ora, se $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n)$ e se $u_j = (u_{1,j}, ..., u_{n,j})$ si ha:

$$\langle V'(t)\alpha, \beta\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} u'_{i,j}(t)\alpha_j\beta_i = (u'_j = Au_j)$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_j\beta_i(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(t)u_{k,j}(t)) = \langle A(t)V(t)\alpha, \beta\rangle.$$

□

Proposizione 1.1.10. *(metodo della variazione delle costanti). Sia* $\{u_1, ..., u_n\}$ *un sistema fondamentale per l'equazione omogenea*

$$y' = A(t)y.$$

Esistono allora delle funzioni $c_1, ..., c_n \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ *tali che la funzione*

$$v = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j$$

è soluzione dell'equazione non omogenea

$$y' = A(t)y + b(t).$$

Le funzioni $c'_1, ..., c'_n$ *sono soluzioni del sistema*

$$\sum_{j=1}^{n} c'_j u_j = b.$$

Pertanto, se consideriamo la matrice fondamentale

$$V = V(u_1, ..., u_n)$$

e poniamo $c = (c_1, ..., c_n)$*, risulta*

$$V(t)c'(t) = b(t) \qquad \forall t \in I.$$

In particolare fissato $t_0 \in I$*, possiamo scegliere*

$$c(t) = \int_{t_0}^{t} V^{-1}(s)b(s)ds$$

e quindi

$$v(t) = V(t)\int_{t_0}^{t} V^{-1}(s)b(s)ds.$$

Osservazione 1.1.11. V è invertibile in ogni punto di I per Proposizioni precedenti.

Dimostrazione. È una semplice verifica. Infatti, se $c_1, ..., c_n \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ la funzione v è derivabile in ogni punto di I e risulta

$$v' = \sum_{j=1}^{n} c_j' u_j + \sum_{j=1}^{n} c_j u_j' = \sum_{j=1}^{n} c_j' u_j + \sum_{j=1}^{n} c_j A u_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} c_j' u_j + A \sum_{j=1}^{n} c_j u_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} c_j' u_j + Av.$$

Pertanto v è soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se vale

$$\sum_{j=1}^{n} c_j' u_j = b.$$

Le verifiche delle altre uguaglianze sono immediate. □

Osservazione 1.1.12. Sia $t_0 \in I$ e sia V una matrice fondamentale per l'equazione omogenea

$$y' = A(t)y.$$

Allora

$$u(t) = V(t)\big(\xi + \int_{t_0}^{t} V^{-1}(s)b(s)ds\big),\ \xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$$

è l'integrale generale dell'equazione

$$y' = A(t)y + b(t).$$

Se V è la matrice fondamentale principale in t_0 allora la funzione $u(t)$ è soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = A(t)y + b(t) \\ y(t_0) = \xi. \end{cases}$$

1.2 Sistemi lineari di equazioni differenziali a coefficienti costanti

In questo paragrafo studieremo i sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti nel piano, con particolare riguardo a quelli omogenei.

Definizione 1.2.1. Sia dato un sistema lineare di equazioni differenziali ordinarie del tipo seguente

$$y' = A(t)y + b(t) \tag{1.8}$$

ove $A(t) = (a_{ij}(t))_{ij=1,...,n}$ è una matrice $n \times n$ di funzioni $a_{ij} \in C(I, \mathbb{R})$, con I intervallo aperto e non vuoto di $\mathbb{R}$, e ove $b \in C(I, \mathbb{R}^n)$.

Se la *matrice dei coefficienti* $A(t)$ è costante, ovvero $A(t) = A$, allora il sistema precedente si dice essere un sistema lineare di equazioni differenziali a coefficienti costanti.

Diamo ora la definizione di *matrice esponenziale*.

Definizione 1.2.2. Se A è una matrice costante $n \times n$, la matrice esponenziale e^A è la matrice $n \times n$ definita ponendo

$$e^A = \sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + ...$$

Osserviamo esplicitamente che la serie al secondo membro è convergente e quindi la definizione è ben posta.
Diciamo prima di tutto che se $M_k = (m_{ij}^{(k)})$ è una successione di matrici $n \times n$, si dice che la serie $\sum M_k$ converge se le serie $\sum m_{ij}^{(k)}$ convergono per ogni $i, j = 1, ..., n$. Ora, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$e^A(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{A^k x}{k!} = x + Ax + \frac{A^2 x}{2!} + \frac{A^3 x}{3!} + ... \tag{1.9}$$

Notiamo che, posto

$$\| A \| = sup\{ | Ax | : x \in \mathbb{R}^n, | x | = 1\}$$

si ha che

$$| a_{ij} | \leq \left(\sum a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Inoltre, da $| A^k x | \leq \| A \|^k | x |$ segue che il valore assoluto del termine generale $\frac{A^k x}{k!}$ può essere maggiorato da $\frac{\|A\|^k |x|}{k!}$. Di conseguenza, la serie (1.9) converge per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.
Il seguente esempio giustifica il termine matrice esponenziale.

Esempio 1.2.3. Se $n = 1$ e $A = a \in \mathbb{R}$ allora la matrice esponenziale diventa

$$\sum \frac{a^k}{k!}$$

che è l'esponenziale e^a.
In generale, se $A = (a_{ij})$ è diagonale (cioè $a_{ij} = 0$ per $i \neq j$), allora A^k è

diagonale con componenti a_{ii}^k e quindi

$$\boldsymbol{e^A} = \begin{pmatrix} e^{a_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{a_{22}} & \dots & 0 \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & e^{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

Lemma 1.2.4. *La funzione $t \mapsto e^{tA}(c)$, con $c \in \mathbb{R}^n$, è derivabile e si ha*

$$\frac{d}{dt}e^{tA}(c) = Ae^{tA}(c).$$

Quindi $y(t) = e^{tA}(c)$ verifica l'equazione $y' = Ay$.

Dimostrazione. Usiamo la definizione e troviamo

$$e^{tA}(c) = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k A^k c}{k!} = c + tAc + \frac{t^2 A^2 c}{2!} + ...$$

Come abbiamo visto la serie $\sum_{k \geq 0} \frac{t^k A^k c}{k!}$ converge totalmente. Possiamo allora derivare trovando

$$\frac{d}{dt}e^{tA}(c) = \sum_{k \geq 1} \frac{kt^{k-1} A^k c}{k!} = Ac + tA^2c + \frac{t^2 A^3 c}{2!} + ...$$

$$= A\big(c + tAc + \frac{t^2 A^2 c}{2!} + ...\big) = Ae^{tA}(c).$$

Dal fatto che $\frac{d}{dt}e^{tA}(c) = Ae^{tA}(c)$ segue che $y(t) = e^{tA}(c)$ verifica l'equazione $y'(t) = Ae^{tA}(c) = Ay(t)$. $\square$

Possiamo osservare che, poichè $e^{tA} \mid_{t=0} = I_n$, grazie alla Proposizione 1.1.9 vista nel paragrafo precedente, e^{tA} è la matrice fondamentale principale in $t = 0$ dell'equazione omogenea

$$y' = Ay.$$

Teorema 1.2.5. *L'integrale generale di $y' = Ay$ è dato da $e^{tA}(c)$, al variare di $c \in \mathbb{R}^n$.*

Esempio 1.2.6. Se A è la matrice diagonale

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

allora

$$\boldsymbol{e^{tA}} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

Perciò posto

$$\boldsymbol{y_1(t)} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y_2(t)} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \boldsymbol{y_n(t)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

l'integrale generale del sistema $y' = Ay$ è dato da

$$y(t) = e^{tA}(c) = \sum c_j y_j(t).$$

Dal risultato generale della Proposizione 1.1.6, si ottiene il seguente teorema.

Teorema 1.2.7. *L'integrale generale del sistema lineare non omogeneo*

$$y' = Ay + b(t), \qquad b(t) \in \mathbb{R}^n,$$

si ottiene sommando l'integrale generale del sistema omogeneo associato $y' = Ay$ ad un integrale particolare del sistema non omogeneo.

1.3 Andamento qualitativo delle soluzioni di un sistema lineare a coefficienti costanti nel piano

Usiamo la notazione $y = (y_1, y_2)$ con $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Un sistema lineare omogeneo a coefficienti costanti in due variabili è del tipo

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 + by_2, \\ y_2' = cy_1 + dy_2, \end{cases}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Introduciamo la matrice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Allora il sistema può essere scritto come $y' = Ay$. Gli equilibri del sistema sono i punti $y^* \in \mathbb{R}^2$ tali che $Ay^* = 0$. Se A è non singolare, allora l'unico equilibrio è $y^* = (0, 0)$.
Vogliamo studiare l'andamento qualitativo delle soluzioni del sistema. Premettiamo un lemma. Ricordiamo che due matrici non singolari A, B sono simili se esiste una matrice M non singolare tale che $A = MBM^{-1}$. Due matrici simili hanno gli stessi autovalori. Ci chiediamo ora che relazioni ci siano tra la soluzione $u(t)$ del sistema precedente tale che $u(0) = \xi$ e la soluzione $v(t)$ di

$$y' = By, \quad \textit{con} \quad v(0) = M^{-1}(\xi).$$

Lemma 1.3.1. *Si ha* $u(t) = M(v(t))$.

Dimostrazione. Poniamo $z(t) = M(v(t))$. Si ha

$$z' = M(v') = MBv = MBM^{-1}z = Az.$$

Inoltre

$$z(0) = M(v(0)) = MM^{-1}(\xi) = \xi.$$

Allora $u(t)$ e $z(t)$ verificano lo stesso problema di Cauchy e quindi coincidono.

$\square$

In particolare le soluzioni dei due sistemi hanno le stesse proprietà qualitative. Supponiamo che A sia non-singolare. Indichiamo con J la forma normale di Jordan di A. In base al lemma precedente possiamo considerare il sistema $z' = Jz$, le cui soluzioni hanno le stesse proprietà di $y' = Ay$. Siano $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ gli autovalori di A.

Distinguiamo i seguenti casi:

Caso (1). Se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e $\lambda_1 \neq \lambda_2$, allora

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

e il sistema $z' = Jz$ diventa:

$$\begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1, \\ y_2' = \lambda_2 y_2. \end{cases}$$

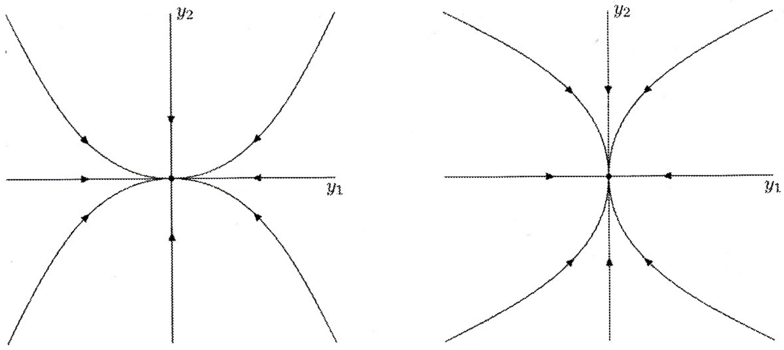
Se imponiamo le condizioni iniziali $y_1(0) = p_1, y_2(0) = p_2$ troviamo le soluzioni:

$$y_1 = p_1 e^{\lambda_1 t}, \qquad y_2 = p_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Se $p_1 \neq 0$, troviamo

$$y_2 = \frac{p_2}{p_1} y_1^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}.$$

Se $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ l'equilibrio $z = (0,0)$ è detto *Nodo*. Le traiettorie nel piano (y_1, y_2) sono riportate nella Figura 1.1, distinguendo i casi $\lambda_2/\lambda_1 > 1$ e $\lambda_2/\lambda_1 < 1$. Invece, se $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ si trovano delle iperboli e l'equilibrio $z = (0,0)$ è detto *Sella*, cfr. Figura 1.2.



$(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1)$ $(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1)$

Figura 1.1: Nodo nel Caso (1) con $\lambda_1\lambda_2 > 0$ con $\lambda_1\lambda_2 < 0$; se $\lambda_1\lambda_2 > 0$ le frecce vanno invertite.

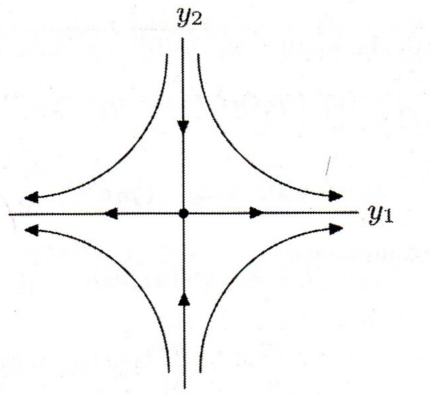


Figura 1.2: Sella nel Caso (1) con $\lambda_1\lambda_2 < 0$

Caso (2). Se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e $\lambda_1 = \lambda_2$, allora o

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

o

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Nel primo caso il sistema $z' = Jz$ diventa,

$$\begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1, \\ y_2' = \lambda_1 y_2. \end{cases}$$

Troviamo $y_2 = ky_1, k \in \mathbb{R}$. L'equilibrio (0,0) è un *Nodo*, cfr. la Figura 1.3.

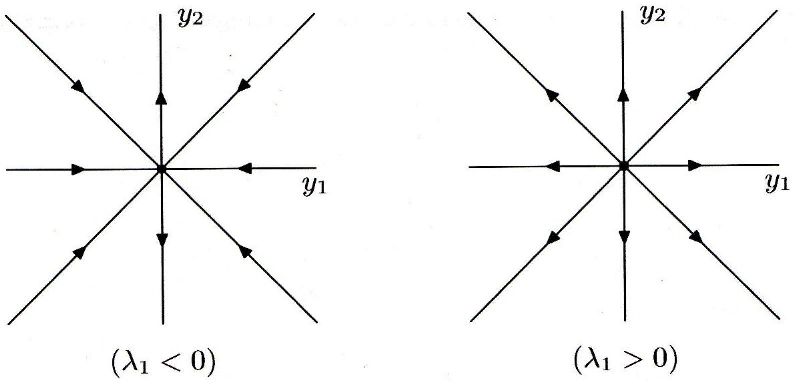


Figura 1.3: Nodo nel primo Caso.

Nel secondo caso invece si trova

$$\begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1 + y_2, \\ y_2' = \lambda_1 y_2. \end{cases}$$

Allora altre soluzioni tali che $y_1(0) = p_1, y_2(0) = p_2$ sono date da

$$y_1 = (p_1 + p_2 t)e^{\lambda_1 t}, \qquad y_2 = p_2 e^{\lambda_1 t}.$$

Se $p_2 = 0$ allora

$$y_2 \equiv 0, \qquad y_1 = p_1 e^{\lambda_1 t}.$$

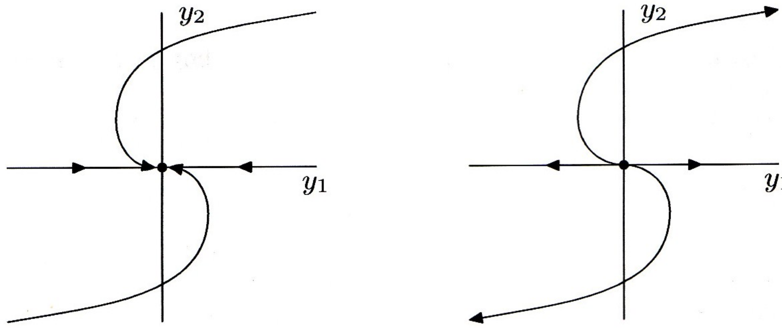
Se $p_2 \neq 0$ allora

$$t = \lambda_1^{-1} log(\frac{y_2}{p_2})$$

e quindi

$$y_1 = t y_2 + \frac{p_1}{p_2} y_2 = \frac{y_2}{\lambda_1}(log \mid y_2 \mid + k).$$

L'equilibrio è un *Nodo*, cfr. la Figura 1.4.



$(\lambda_1 < 0)$ $(\lambda_1 > 0)$

Figura 1.4: Nodo nel secondo Caso.

Caso (3). Se gli autovalori di J sono complessi coniugati, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, dove i denota l'unità immaginaria, allora

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

e il sistema $z' = Jz$ diventa

$$\begin{cases} y_1' = \alpha y_1 - \beta y_2, \\ y_2' = \beta y_1 + \alpha y_2. \end{cases}$$

Caso (3a). Se $\alpha = 0$ si trova il sistema

$$\begin{cases} y_1' = -\beta y_2, \\ y_2' = \beta y_1 \end{cases}$$

che è equivalente all'oscillatore armonico $y'' + \beta^2 y = 0$ il cui integrale è dato da

$$y = c_1 \sin \beta t + c_2 \cos \beta t.$$

Dalla relazione

$$\frac{d}{dt}(y_1^2 + y_2^2) = 2y_1 y_1' + 2y_2 y_2' = 0,$$

segue che $y_1^2 + y_2^2 = costante$ e quindi le traiettorie nel piano (y_1, y_2) sono delle circonferenze di centro l'origine. L'equazione $y'' + \beta^2 y = 0$ è anche equivalente a

$$\begin{cases} y' = p, \\ p' = -\beta^2 y. \end{cases}$$

Il piano (y,p) viene chiamato *piano delle fasi* e verrà discusso più in generale nell'ultimo Capitolo. Le variabili y, p verificano $\beta^2 y^2 + p^2 = c$, dove la costante c dipende dalle condizioni inziali. Quindi le traiettorie nel piano delle fasi (y,p) sono delle ellissi, cfr. la Figura 1.5.

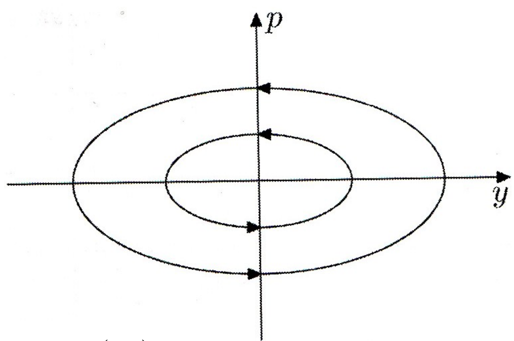


Figura 1.5: Centro nel Caso (3a) con $\beta > 0$; se $\beta < 0$ le frecce vanno invertite.

Caso (3b). Se $\alpha \neq 0$, è conveniente introdurre le coordinate polari $y_1 = \rho \cos\theta, y_2 = \rho \sin\theta$. Si ha

$$y_1' = \rho' \cos\theta - \rho\theta' \sin\theta, \quad y_2' = \rho' \sin\theta + \rho\theta' \cos\theta.$$

Sostituendo in $z' = Jz$ troviamo

$$\begin{cases} \rho' = \alpha\rho, \\ \theta' = \beta \end{cases}$$

che può essere integrato esplicitamente trovando le soluzioni

$$\rho = c_1 e^{\alpha t}, \quad \theta = \beta t + c_2,$$

una famiglia di spirali logaritmiche. Osserviamo che $\rho(t)$ è crescente se $\alpha > 0$, decrescente se $\alpha < 0$. Inoltre

$$\begin{cases} \lim_{t \to +\infty} \rho(t) = +\infty, se\ \alpha > 0; \\ \lim_{t \to +\infty} \rho(t) = 0, se\ \alpha < 0. \end{cases}$$

L'origine è detta *Fuoco*, cfr. la Figura 1.6.

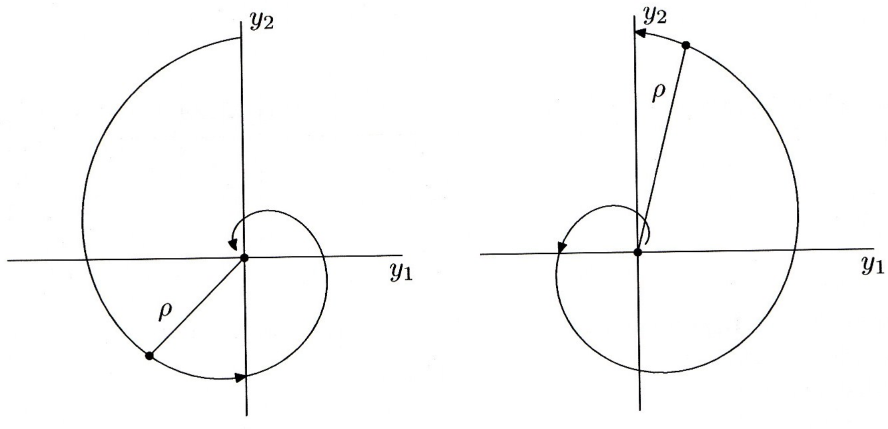


Figura 1.6: Fuoco nel Caso (3b).

Per completare lo studio del sistema $y' = Ay$, consideriamo i casi

$$(i) \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad oppure \quad (ii) \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Nel caso *(i)* la soluzione tale che $y_1(0) = p_1, y_2(0) = p_2$ è $y_1(t) = p_1 e^{\lambda t}, y_2(t) \equiv p_2$. Nel piano (y_1, y_2) si tratta di rette parallele all'asse y_1.
Analogamente, se $\lambda_2 = 0$ si trova $y_1(t) = p_1, y_2(t) \equiv p_2 e^{\lambda t}$. Infine, se $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ si ha $y_1(t) = bt + p_1, y_2(t) \equiv p_2$, mentre se $\boldsymbol{A}$ è la matrice nulla, allora $y_1(t) \equiv p_1, y_2(t) \equiv p_2$.

Ricapitoliamo quanto visto fino ad ora nella seguente tabella:

Autovalori $\lambda_{1,2}$	*Equilibrio*
$\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}, \lambda_1\lambda_2 > 0$	Nodo
$\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}, \lambda_1\lambda_2 < 0$	Sella
$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \alpha \neq 0$	Fuoco
$\lambda_{1,2} = i\beta, \alpha = 0$	Centro

Capitolo 2

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DI ORDINE SUPERIORE

Si chiama *equazione differenziale ordinaria di ordine superiore* una relazione della forma :

$$\phi(t, y(t), y''(t), ..., y^{(n)}(t)) = 0 \tag{2.1}$$

dove $\phi : A \to \mathbb{R}$ e A è un aperto contenuto in $\mathbb{R}^{n+2}$. Nell'espressione precedente compare la funzione incognita $y(t)$ insieme alle sue derivate fino all'ordine n incluso, tutte calcolate nello stesso punto. Se dalla (2.1) è possibile esplicitare la derivata di ordine massimo in modo che

$$y^{(n)} = f(t, y'(t), y''(t), ..., y^{(n-1)}(t)),$$

con $f : \Omega \to \mathbb{R}$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, l'equazione si dice scritta in *forma normale*. Per motivi di semplicità e ragionevolezza si è soliti pensare alla variabile indipendente t come al tempo, che quindi scorrerà in un intervallo temporale I. In altri termini, l'insieme di definizione di f sarà del tipo

$$\Omega = I \times D,$$

dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo aperto e $D \subseteq \mathbb{R}^n$ è anch'esso aperto. Se ϕ nella (2.1) (o similmente f) non dipende esplicitamente da t, l'equazione si dice *autonoma*.

2.1 Nozioni di base sulle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine

Un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine è un'equazione in cui l'incognita è una *funzione* $y(t)$ che compare con la sua derivata prima $y'(t)$. In generale si tratta di equazioni del tipo

$$\phi(t, y(t), y'(t)) = 0 \tag{2.2}$$

dove ϕ è definita in un aperto A di $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Se Ω è un aperto di $\mathbb{R}^2$, $A = \Omega \times \mathbb{R}$ e $\phi(t, y(t), y'(t)) = y'(t) - f(t, y(t))$, l'equazione diventa

$$y' = f(t, y(t)) \tag{2.3}$$

e viene detta in *forma normale*. Nel seguito studieremo questa classe di equazioni per le quali si possono dimostrare dei risultati di esistenza e unicità delle soluzioni.

Definizione 2.1.1. Una soluzione di (2.3) è una funzione $u \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ con $I \subset \mathbb{R}$ tale che $(t, u(t)) \in \Omega$ per ogni $t \in I$ e

$$u'(t) = f(t, u(t)), \qquad \forall t \in I. \tag{2.4}$$

In generale, l'equazione $y' = f(t, y)$ ammette una famiglia di soluzioni dipendenti da un *parametro* $c \in \mathbb{R}$. Per trovare un'unica soluzione si impone che una di esse, $u(t)$, verifichi una *Condizione Iniziale.*
Fissato $(t_0, \xi) \in \Omega$ cerchiamo una soluzione di $y'(t) = f(t, y(t))$ tale che $u(t_0) = \xi$.
Il problema

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = \xi \end{cases}$$

è chiamato *Problema di Cauchy.*
Supponiamo ora che il problema di Cauchy ammetta soluzione, ovvero che esista una funzione $u \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, soluzione dell'equazione differenziale in (2.3) e tale che

$$I \ni t_0 \qquad e \qquad u(t_0) = \xi.$$

Allora vale la seguente Proposizione:

Proposizione 2.1.2. *Sia I un intervallo non banale di $\mathbb{R}$ contenente t_0 e sia $u : I \to \mathbb{R}^n$ tale che $(t, u(t)) \in \Omega$ per ogni $t \in I$. Allora u è soluzione del problema di Cauchy se, e solo se, $u \in C(I, \mathbb{R}^n)$ e verifica l'equazione integrale di Volterra*

$$u(t) = \xi + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds \qquad \forall t \in I. \tag{2.5}$$

Definizione 2.1.3. Una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}^n, \Omega$ aperto di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, si dice localmente lipschitziana in Ω rispetto ad y se, per ogni insieme convesso e compatto $K \subset \Omega$, esiste una costante positiva L tale che:

$$| f(t, y) - f(t, z) | \leq L \mid y - z \mid \qquad \forall (t, y), (t, z) \in K. \tag{2.6}$$

Proposizione 2.1.4. *Se le derivate parziali*

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y_n}$$

esistono in ogni punto di Ω e sono continue in Ω, allora f è localmente lipschitziana in Ω rispetto ad y.

Vediamo infine il Teorema di esistenza e unicità (locale) della soluzione del problema di Cauchy, il quale costituisce un risultato fondamentale in tutta la teoria delle equazioni differenziali.

Teorema 2.1.5. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Sia poi $(t_0, \xi) \in \Omega$. Se f è localmente lipschitziana in Ω rispetto ad y allora il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = \xi \end{cases}$$

ha (almeno) una soluzione.
Inoltre se $u \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ e $v \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ sono entrambe soluzioni del problema precedente, risulta

$$u(t) = v(t) \qquad \forall t \in I \cap J.$$

2.2 Nozioni di base sulle equazioni differenziali ordinarie di ordine n

Definizione 2.2.1. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e sia $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$. Si chiama soluzione di un'equazione differenziale di ordine superiore una funzione $u \in C^n(I, \mathbb{R})$, con I intervallo di $\mathbb{R}$, tale che $(t, u(t), u'(t), ..., u^{(n-1)}(t)) \in \Omega$ e

$$u^n(t) = f(t, u(t), u'(t), ..., u^{(n-1)}(t)) \qquad \forall t \in I.$$

Proposizione 2.2.2. *Se $u \in C^n(I, \mathbb{R})$ è soluzione di un'equazione differenziale ordinaria di ordine n allora $\bar{u} = (u, u', ..., u^{(n-1)})$ è soluzione del sistema*

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = z_3 \\ \dots\dots\dots \\ z_{n-1}' = z_n \\ z_n' = f(t, z_1, ..., z_n). \end{cases}$$

Viceversa, se $\bar{u}$= $(u_1, ..., u_n) \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ *è soluzione del sistema precedente, allora* u *è soluzione dell'equazione differenziale.*

Dimostrazione. Se $u \in C^n(I, \mathbb{R})$ allora

$$\bar{u} = (u, u', ..., u^{(n-1)}) \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$$

e

$$\bar{u}_j = u^{(j-1)} \quad \text{per} \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Allora

$$\bar{u}_n'(t) = u^{(n)}(t) = f(t, \bar{u}_1(t), ..., \bar{u}_n(t)) \quad \text{per ogni} \quad t \in I$$

e

$$\bar{u}_j' = u^{(j)} = \bar{u}_{j+1} \quad \text{per} \quad j = 1, 2, ..., n-1.$$

Questo prova la prima parte della Proposizione.
Viceversa, se $\bar{u} = (u_1, ..., u_n) \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ è soluzione del sistema allora $u_1' = u_2, u_1'' = u_2' = u_3, ..., u_1^{(n-1)} = u_2^{(n-2)} = ... = u_n, u_1^{(n)} = u_n' = f(t, u_1, u_1', ..., u_1^{(n-1)})$.
Questo completa la dimostrazione della Proposizione. $\square$

Nel seguito indicheremo con $\bar{f}$ la funzione

$$\bar{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n, \ \bar{f}(t, z) = (z_2, ..., z_n, f(t, z_1, ..., z_n)).$$

Se $(t_0, \xi_0, \xi_1, ..., \xi_{n-1}) \in \Omega$, diremo che una funzione $u \in C^n(I, \mathbb{R})$ è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(t, y, y', ..., y^{(n-1)}) \\ y^{(j)}(t_0) = \xi_j, \quad j = 0, 1, ..., n-1 \end{cases} \tag{2.7}$$

se u è soluzione dell'equazione in (2.7) e

$$I \ni t_0 \quad e \quad u^{(j)}(t_0) = \xi_j \quad per \quad j = 0, 1, ..., n-1.$$

Proposizione 2.2.3. *Se $u \in C^n(I, \mathbb{R})$ è soluzione di (2.7) allora*

$$\bar{u} = (u, u', ..., u^{(n-1)}) \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$$

ed è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} z' = \bar{f}(t, z) \\ z(t_0) = (\xi_0, \xi_1, ..., \xi_n). \end{cases}$$

Viceversa, se $\bar{u} = (u_1, ..., u_n) \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ è soluzione del precedente problema di Cauchy allora $u = u_1 \in C^n(I, \mathbb{R})$ ed è soluzione di (2.7).

Dimostrazione. La dimostrazione di tale Proposizione è immediata e segue direttamente dalla Proposizione 2.2.2. □

Le Proposizioni 2.2.2 e 2.2.3 consentono di trasferire immediatamente alle equazioni di ordine n i risultati di esistenza e di unicità delle soluzioni relativi ai sistemi. A questo scopo è opportuno osservare che se f è localmente lipschitziana in Ω rispetto a $z = (z_1, ..., z_n)$ tale risulta anche la funzione $\bar{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Infatti, se $(t, z), (t, w) \in K$ si ha:

$$| \bar{f}(t, z) - \bar{f}(t, w) | \leq \sum_{j=1}^{n} | \bar{f}_j(t, z) - \bar{f}_j(t, w) |$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} | z_{j+1} - w_{j+1} | + | f(t, z) - f(t, w) |$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n-1} | z_{j+1} - w_{j+1} | + L \, | z - w | \leq (n - 1 + L) \, | z - w |$$

in quanto $| z_{j+1} - w_{j+1} | \leq | z - w |$ per ogni $j = 1, 2, ..., n-1$.

2.3 Equazioni differenziali lineari di ordine n

Sia data un'equazione differenziale di ordine n del tipo

$$\phi(t, y(t), y''(t), ..., y^{(n)}(t)) = 0.$$

Se ϕ è un polinomio di primo grado in $y(t), y'(t), y''(t), ..., y^{(n)}(t)$, l'equazione si dice *lineare* e la sua forma generale è:

$$\alpha_n(t)y^{(n)}(t) + \alpha_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + ... + \alpha_1(t)y'(t) + \alpha_0(t)y(t) = \beta(t)$$

con $I \subset \mathbb{R},\ \alpha_i \in C(I),\ i = 0, 1, ..., n$ e $\beta \in C(I)$. Se $\alpha_n(t) \neq 0$, ponendo $a_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_n}$ e $b = \frac{\beta}{\alpha_n}$ l'equazione precedente può essere scritta in forma normale. In tal modo otteniamo:

$$y^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t)y^{(j)} + b(t).$$

2.3.1 Equazioni differenziali lineari omogenee

Consideriamo un'equazione differenziale lineare di ordine superiore

$$y^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t)y^{(j)} + b(t).$$

Se la funzione b è identicamente nulla, l'equazione corrispondente

$$y^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t)y^{(j)}$$

si dice *omogenea.*

È facile riconoscere che la funzione

$$(t, z_1, ..., z_n) \to \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t)z_{j+1}(= f(t, z_1, ..., z_n))$$

è localmente lipschitziana in Ω rispetto alle variabili $z_1, ..., z_n$ e quindi l'equazione ammette soluzione.

Indichiamo ora con K l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea :

$$K = \{u \in C^n(I, \mathbb{R}) /\ u^{(n)}(t) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t)u^{(j)}(t) \quad \forall t \in I\}.$$

Poichè l'equazione è lineare, è immediato riconoscere che K è uno spazio vettoriale (su $\mathbb{R}$). Procedendo poi come nella dimostrazione del Teorema 1.1.2 del Capitolo precedente si prova subito che

$$dimK = n.$$

Infatti fissato $t_0 \in I$, ad arbitrio, e posto

$$T_{t_0} : K \to \mathbb{R}^n \quad T_{t_0}(u) = (u(t_0), u'(t_0), ..., u^{n-1}(t_0))$$

segue che T_{t_0} è un *isomorfismo* di K su $\mathbb{R}^n$.
Una base $\{u_1, ..., u_n\}$ dello spazio vettoriale K si dice che è un *sistema fondamentale di integrali* dell'equazione lineare omogenea.
Poichè T_{t_0} è un isomorfismo di K su $\mathbb{R}^n$, per ogni fissato $t_0 \in I$, un sottoinsieme $\{u_1, ..., u_n\}$ di K è una base di K se, e solo se,

$$\boldsymbol{W(u_1, ..., u_n)(t_0)} \stackrel{def}{=} \begin{vmatrix} u_1(t_0) & u_2(t_0) & \dots & u_n(t_0) \\ u_1'(t_0) & u_2'(t_0) & \dots & u_n'(t_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n-1)}(t_0) & u_2^{(n-1)}(t_0) & \dots & u_n^{(n-1)}(t_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

in un opportuno (o, equivalentemente, in un arbitrario) punto $t_0 \in I$.
Il determinante precedente si chiama *wronskiano* di $\{u_1, ..., u_n\}$.
Se $\{u_1, ..., u_n\}$ è un sistema fondamentale di integrali per l'equazione omogenea allora

$$u = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j, \qquad c_1, ..., c_n \in \mathbb{R},$$

è l'*integrale generale* dell'equazione stessa. In altri termini: tutte le soluzioni dell'equazione omogenea sono del tipo precedente.

2.3.2 Equazioni differenziali lineari non omogenee

Consideriamo un'equazione differenziale lineare non omogenea del tipo

$$y^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) y^{(j)} + b(t).$$

Se v è una soluzione di tale equazione allora

$$u = v + \sum_{j=1}^{n} c_j u_j, \quad c_1, ..., c_n \in \mathbb{R},$$

è l'*integrale generale* dell'equazione stessa. Basta infatti osservare che u è soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione precedente se, e solo se, $u - v \in K$.
Vediamo la seguente Proposizione:

Proposizione 2.3.1. *(metodo della variazione delle costanti). Sia* $\{u_1, ..., u_n\}$ *un sistema fondamentale di integrali dell'equazione omogenea*

$$y^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) y^{(j)}.$$

Esistono allora n funzioni

$$c_1, ..., c_n \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$$

tali che

$$v = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j$$

è soluzione dell'equazione non omogenea

$$y^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) y^{(j)} + b(t).$$

Le funzioni $c_1', ..., c_n'$ *sono soluzioni del sistema*

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_j' u_j = 0 \\ \sum_{j=1}^{n} c_j' u_j' = 0 \\ .... \\ \sum_{j=1}^{n} c_j' u_j^{(n-2)} = 0 \\ \sum_{j=1}^{n} c_j' u_j^{(n-1)} = b. \end{cases}$$

Dimostrazione. Se $c_1', ..., c_n'$ sono soluzioni del sistema, allora si verifica direttamente che la funzione v è soluzione dell'equazione non omogenea. $\square$

Osservazione 2.3.2. Il sistema precedente è risolubile in quanto il determinante della matrice dei suoi coefficienti è il determinante wronskiano

$$W(u_1, ..., u_n)$$

che è diverso da zero in ogni punto di I poichè $\{u_1, ..., u_n\}$ è un sistema fondamentale per l'equazione differenziale omogenea.

2.3.3 Equazioni differenziali a coefficienti costanti

Vediamo ora come si può trovare un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione

$$y^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) y^{(j)}$$

nel caso in cui i coefficienti $a_0, ..., a_{n-1}$ siano costanti.
Un calcolo diretto mostra che la funzione $u = e^{\omega t}$, $\omega \in \mathbb{R}$, è una soluzione dell'equazione precedente se e solo se $\omega \in \mathbb{C}$ è una radice dell'equazione caratteristica

$$\varphi(\omega) := \omega^n + a_{n-1}\omega^{n-1} + ... + a_1\omega + a_0 = 0.$$

Se questa equazione ha una coppia di radici complesse coniugate $\omega = \alpha \pm i\beta, (i^2 = -1)$, allora $u = e^{\alpha t}\cos\beta t$ e $v = e^{\alpha t}\sin\beta t$ sono due soluzioni dell'equazione omogenea e viceversa. Formalmente, ricordando che

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(cos\beta t - isin\beta t),$$

possiamo dire anche in questo caso che $e^{\omega t}$ è soluzione dell'equazione omogenea se e solo se $\varphi(\omega) = 0$. Per stabilire se la famiglia $e^{\omega t}$ forma un sistema fondamentale per l'equazione, calcoliamo direttamente il determinante wronskiano valutato in $t = 0$.

Cominciamo a considerare il caso in cui $\varphi(\omega) = 0$ ha n radici ω_j reali e distinte. È immediato verificare che

$$\boldsymbol{W(0)} = \begin{vmatrix} 1 & \omega_1 & \dots & \omega_1^{n-1} \\ 1 & \omega_2 & \dots & \omega_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \omega_n & \dots & \omega_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

(determinante di Vandermonde). È noto che se ω_j sono radici semplici di $\varphi(\omega) = 0$, cioè sono a due a due distinte, allora $W(0) \neq 0$ e quindi $e^{\omega_j t}(j = 1, ..., n)$ formano un sistema fondamentale per l'equazione omogenea a coefficienti costanti. Se $\omega_l = \omega_{l+1} = ... = \omega_{l+k}$ è una radice multipla di $\varphi(\omega) = 0$, allora le funzioni

$$u_l = e^{\omega_l t}, u_{l+1} = te^{\omega_l t}, ..., u_{l+k} = t^k e^{\omega_l t}$$

sono soluzioni dell'equazione omogenea. Come prima, se $\omega_l = \alpha \pm i\beta$, si intende che ogni u_l è costituita dalla coppia $e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t$.
Supponiamo che $\varphi(\omega) = 0$ abbia r radici semplici $\omega_1, ..., \omega_r$ e n-r radici ω_{l_s} di molteplicità k_s, consideriamo

$$e^{\omega_1 t}, \dots, e^{\omega_r t}, e^{\omega_{l_1} t}, te^{\omega_{l_1} t}, \dots, t^{k_s} e^{\omega_{l_s} t}, \dots, e^{\omega_{l_{n-r}} t}, te^{\omega_{l_{n-r}} t}, \dots, t^{k_r} e^{\omega_{l_{n-r}} t}.$$

Un calcolo diretto mostra che il loro wronskiano $W(0)$ è diverso da 0. Verifichiamo questa affermazione nel caso in cui $n = 3$ e l'equazione caratteristica $\varphi(\omega) = 0$ abbia una soluzione semplice $\omega_1 = a$ e una soluzione doppia $\omega_2 = \omega_3 = b \neq a$. La corrispondente famiglia è

$$u_1 = e^{at}, u_2 = e^{bt}, u_3 = te^{bt}.$$

Poichè $u_3' = e^{bt} + tbe^{bt}$ e $u_3'' = 2be^{bt} + tb^2 e^{bt}$, il relativo wronskiano è dato da

$$\boldsymbol{W(0)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \\ a^2 & b^2 & 2b \end{vmatrix} = (a-b)^2 \neq 0.$$

Capitolo 3

APPLICAZIONI

In questo Capitolo faremo un'analisi qualitativa per equazioni del tipo $y'' = f(y)$, che sono particolarmente interessanti per le applicazioni fisiche e vedremo come la teoria sui sistemi di equazioni differenziali sia utile per determinare, nel campo della geometria differenziale, l'equazione intrinseca di una curva.

3.1 Analisi nel piano delle fasi

Nel caso in cui $f = f(y)$, è spesso conveniente studiare, invece dell'equazione $y'' = f(y)$ il sistema autonomo equivalente

$$\begin{cases} y' = p, \\ p' = f(y). \end{cases} \tag{3.1}$$

Il piano *(y,p)* è di solito chiamato *piano delle fasi* e il sistema (3.1), dal punto di vista fisico, si può interpretare nel modo seguente:
la coppia $(p, f(y))$ definisce in ogni punto del piano un vettore e quindi descrive un campo vettoriale V. Le soluzioni del sistema possono essere interpretate come la posizione di una particella al tempo t la cui velocità è data in ogni punto dal campo V. Le orbite sono quindi le traiettorie della particella. Un esempio di piano delle fasi è stato visto nel caso particolare dei sistemi

lineari omogenei in due variabili nel paragrafo 1.3.

Nel seguito supporremo, per semplicità, che $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Osservazione 3.1.1. Le soluzioni di equilibrio di (3.1) sono i punti $(y^*, 0)$, con $f(y^*) = 0$.

Indicata con $F = F(y)$ una funzione tale che $F' = f$, consideriamo la funzione

$$E(y, p) = \frac{1}{2}p^2 - F(y).$$

Se $(y(t), p(t))$ verificano (3.1), poniamo

$$e(t) = E(y(t), p(t)).$$

Si ha

$$\frac{d}{dt}e = E_y y' + E_p p' = pp' - F'(y)y' = pp' - f(y)p = p(p' - f(y)) = 0.$$

Allora $e(t)$ è costante e dunque esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{1}{2}p^2(t) - F(y(t)) \equiv c.$$

La costante c dipende dalle condizioni iniziali: se $y(t_0) = y_0$ e $p(t_0) = p_0$ allora $c = c_0$ dove

$$c_0 = \frac{1}{2}p_0^2 - F(y_0).$$

Osserviamo che le derivate parziali di E sono date da

$$E_y = -F'(y) = -f(y), \quad E_p = p.$$

Se $(0, y^*)$ indicano i punti di equilibrio di (3.1), le costanti $c = E(0, y^*)$ saranno chiamate *valori singolari* di E. Per ogni c diverso dai valori singolari di E, l'equazione $E(y, p) = c$ definisce localmente, tramite il teorema della funzione implicita del Dini, una curva γ_c nel piano delle fasi (y, p). Per trovare la legge oraria delle soluzioni, consideriamo ad esempio un arco $\tilde{\gamma}_c$ di γ_c dove

$E_p = p \neq 0$ (se $E_y \neq 0$ il ragionamento è del tutto simile). Se, per esempio $p > 0$, possiamo esplicitare direttamente $p = p(y) = \sqrt{2F(y) + 2c}$ e da $y' = p$ ricaviamo

$$dt = \frac{dy}{p(y)} = \frac{dy}{\sqrt{2F(y) + 2c}}.$$

Integrando si trova $t = t(y)$. Su $\tilde{\gamma}_c$ si ha $\frac{dt}{dy} = p^{-1} > 0$ e quindi possiamo invertire $t(y)$ trovando $y = y(t)$. Allora $y = y(t), p(t) = p(y(t))$ è la soluzione cercata. Inoltre, poichè il sistema è autonomo, anche $y = y(t+s), p(t+s)$ risolve (3.1), per ogni $s \in \mathbb{R}$.
Nel seguito supporremo che:
$E(y, p) = c$ definisce globalmente una curva γ_c nel piano delle fasi.

Esempio 3.1.2. Nel caso del sistema lineare

$$\begin{cases} y' = p, \\ p' = -y, \end{cases}$$

la relazione $\frac{1}{2}p^2(t) - F(y(t)) \equiv c$ diventa $y^2 + p^2 = 2c$. L'unico punto di equilibrio è $(0, 0)$ che corrisponde al valore singolare $c = 0$. Allora per ogni $c > 0$ l'equazione $y^2 + p^2 = 2c$ definisce una curva γ_c nel piano (y, p), che è la circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio $\sqrt{2c}$. Per esempio, se $2c = 1$, nel semipiano $p > 0$ si trova $p = \sqrt{1 - y^2}$ e la soluzione è data da $y = \sin t, p = \cos t$.

Supponiamo che valga $E(y, p) = c$ e fissiamo una curva γ_c definita dalla relazione $\frac{1}{2}p^2(t) - F(y(t)) \equiv c$. Dato $t_0 \in \mathbb{R}$ sia $P = \gamma_c(t_0)$. Preso un altro punto $Q \in \gamma_c$ possiamo calcolare il tempo $\tau = \tau_c$ tale che $Q = \gamma_c(t_0 + \tau)$. Come s'è visto in precedenza se, per esempio $p > 0$ sull'arco $\gamma_c(P, Q)$ compreso tra P e Q, si ha

$$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{y'} = \frac{1}{p}.$$

Allora, tenendo presente che $p = y' > 0$ su $\gamma_c(P, Q)$, si trova

$$\tau = \int_0^\tau dt = \int_{\gamma_c(P,Q)} \frac{dy}{p} = \int_{\gamma_c(P,Q)} \frac{dy}{\sqrt{2F(y) + 2c}}.$$

Un' importante relazione tra le curve γ_c e le corrispondenti soluzioni $y_c(t)$ di $y'' = f(y)$, ovvero del sistema (3.1), riguarda l'esistenza di soluzioni periodiche.

Teorema 3.1.3. *Supponiamo che valga $E(y, p) = c$. Se γ_c è una curva chiusa, allora $y_c(t)$ è periodica.*

Dimostrazione. Sia $Q_c(t) = (y_c(t), p_c(t))$, con $p_c = y'_c$, il generico punto su γ_c.

Per ipotesi esistono t_0 e $\tau > 0$ tale che $P_c(t_0 + \tau) = P(t_0)$ cioè

$$y_c(t_0 + \tau) = y_c(t_0), \quad p_c(t_0 + \tau) = p_c(t_0).$$

Poniamo $\tilde{y_c}(t) = y_c(t+\tau)$ e $\tilde{p_c}(t) = p_c(t+\tau)$. Allora $(\tilde{y_c}, \tilde{p_c})$ verifica il sistema

$$\begin{cases} \tilde{y}' = \tilde{p}, \\ \tilde{p}' = f(\tilde{y}). \end{cases}$$

Tenuto conto di $y_c(t_0 + \tau) = y_c(t_0)$ *e* $p_c(t_0 + \tau) = p_c(t_0)$, $(\tilde{y_c}, \tilde{p_c})$ soddisfano le condizioni inziali

$$\tilde{y}(t_0) = y_c(t_0 + \tau) = y_c(t_0), \quad \tilde{p}(t_0) = p_c(t_0 + \tau) = p_c(t_0).$$

Allora, per l'unicità delle soluzioni del problema di Cauchy, deduciamo che

$$\tilde{y_c}(t) = y_c(t), \quad \tilde{p_c}(t) = p_c(t).$$

Questo equivale a dire che

$$y_c(t + \tau) = y_c(t), \quad p_c(t + \tau) = p_c(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

In particolare, y_c è periodica di periodo τ. □

3.2 L'oscillatore armonico non lineare

Si tratta dell'equazione

$$y'' + \omega^2 y - y^3 = 0, \tag{3.2}$$

che equivale al sistema

$$\begin{cases} y' = p, \\ p' = -\omega^2 y + y^3. \end{cases} \tag{3.3}$$

In questo caso vi sono tre equilibri : $(0,0)$ e $(0,\pm\omega)$. La relazione $\frac{1}{2}p^2(t) - F(y(t)) \equiv c$ diventa

$$\frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 y^2 - \frac{1}{4}y^4 = c_0,$$

dove

$$c_0 = \frac{1}{2}p_0^2 + \frac{1}{2}\omega^2 y_0^2 - \frac{1}{4}y_0^4.$$

Prendiamo le condizioni iniziali $y_0 = 0$ e $p(0) = a$ che equivalgono per l'equazione $y'' = \omega^2 y - y^3$ alle condizioni $y(0) = 0,\ y'(0) = a$. Allora

$$c_0 = \frac{1}{2}a^2,$$

e quindi andando a sostituire si ottiene

$$p^2 + \omega^2 y^2 - \frac{1}{2}y^4 = a^2.$$

Se $a^2 < \frac{1}{2}\omega^4$, questa equazione definisce nel piano delle fasi (y,p) una curva chiusa γ_a che passa per $(0,a)$ e quindi ad essa corrisponde una soluzione periodica $y_a(t)$ di (3.2), cfr. il Teorema 3.1.3.
Si noti che per $a^2 < \frac{1}{2}\omega^4$, γ_a interseca l'asse y in un punto $Q = (\eta_a, 0)$ con $0 < \eta_a < \omega$.

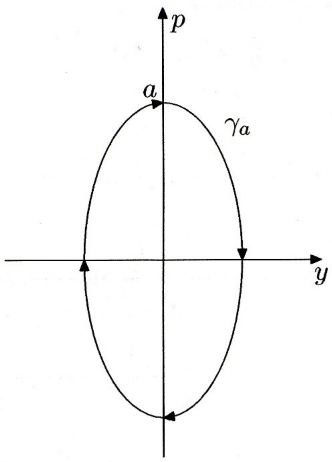


Figura 3.1: La traiettoria periodica γ_a.

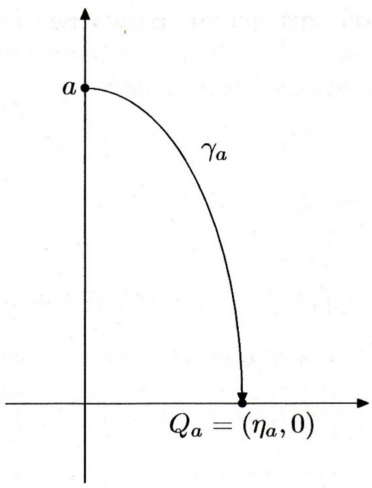


Figura 3.2: Parte di γ_a nel primo quadrante.

Allora dal paragrafo precedente segue che

$$\tau_a = \int_{\gamma_a} \frac{dy}{p} = \int_0^{\eta_a} \frac{dy}{\sqrt{a^2 - \omega^2 y^2 + \frac{1}{2} y^4}}.$$

Facciamo il cambio di variabile $y = \eta_a \xi$. Allora

$$\tau_a = \int_0^1 \frac{\eta_a d\xi}{\sqrt{a^2 - \omega^2 \eta_a^2 \xi^2 + \frac{1}{2} \eta_a^4 \xi^4}}.$$

Osserviamo che ponendo $t = \tau_a$ e tenendo conto che $c_0 = \frac{1}{2} a^2$ si trova che

$$a^2 = \omega^2 \eta_a^2 - \frac{1}{2} \eta_a^4, \tag{3.4}$$

e quindi

$$\tau_a = \int_0^1 \frac{\eta_a d\xi}{\sqrt{\omega^2\eta_a^2 - \frac{1}{2}\eta_a^4 - \omega^2\eta_a^2\xi^2 + \frac{1}{2}\eta_a^4\xi^4}}$$
$$= \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{\omega^2 - \frac{1}{2}\eta_a^2 - \omega^2\xi^2 + \frac{1}{2}\eta_a^2\xi^4}}.$$

Per simmetria, il periodo di y_a è $T_a = 4\tau_a$. Passiamo ora al limite per $a \to 0$. Osserviamo che (3.4) e $\eta_a < \omega$ implicano che $\eta_a \to 0$. Allora

$$\lim_{a\to 0} T_a = 4\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{\omega^2 - \omega^2\xi^2}} = \frac{4}{\omega}\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{2\pi}{\omega}.$$

In conclusione, il periodo delle piccole oscillazioni corrispondenti a $a \sim 0$, tende a $\frac{2\pi}{\omega}$ che è il periodo dell'oscillatore armonico lineare.
Più in generale consideriamo l'equazione

$$y'' + \omega^2 y - h(y, y') = 0$$

che è equivalente al sistema

$$\begin{cases} y' = p, \\ p' = -\omega^2 y + h(y,p). \end{cases}$$

Sia $(y(t), p(t))$una traiettoria di questo sistema e consideriamo la quantità

$$\rho(t) = \rho(y(t), p(t)) = \frac{1}{2}(\omega^2 y^2(t) + p^2(t)).$$

Si trova

$$\frac{d\rho}{dt} = \omega^2 yy' + pp' = \omega^2 yp + p(-\omega^2 y + h(y,p)) = ph(y,p).$$

Consideriamo i seguenti insiemi

$$A = \{(y,p) \in \mathbb{R}^2 : ph(y,p) > 0\}, \quad B = \{(y,p) \in \mathbb{R}^2 : ph(y,p) < 0\}.$$

Allora

$$(y(t), p(t)) \in A \Leftrightarrow \frac{d\rho}{dt} > 0, \quad (y(t), p(t)) \in B \Leftrightarrow \frac{d\rho}{dt} < 0.$$

Questa relazione permette di avere informazioni sulle traiettorie nel piano delle fasi. Ad esempio per l'equazione

$$y'' + \omega^2 y - ay' = 0$$

$h(y, p) = ap$ e quindi $\rho' = ph(y, p) = ap^2$. Perciò : se $a > 0$ allora ρ è crescente, mentre se $a < 0$ allora ρ è decrescente.

3.3 Equazione intrinseca di un cammino parametrizzato

Per determinare l'equazione intrinseca di cammino parametrizzato differenziabile, ovvero l'equazione di un cammino in funzione delle sue curvature, occorre utilizzare il Teorema di esistenza e unicità delle soluzioni di un sistema lineare di equazioni differenziali visto nel primo Capitolo. Diamo prima alcune definizioni.

Definizione 3.3.1. Un cammino parametrizzato differenziabile di classe C^k con $k = 0, 1, 2, ..., \infty, \omega$ (*analitica*) è un' applicazione $f : I \to \mathbb{R}^n$ di classe C^k con I intervallo reale.

Definizione 3.3.2. Sia $f : I \to \mathbb{R}^n$ un cammino parametrizzato differenziabile di classe C^k. Per ogni $j = 1, 2, ...$ e per ogni $t \in I$ chiamiamo *j-esimo spazio osculatore ad f in t* il sottospazio vettoriale $L(f, t, j)$ generato da $f'(t), f^{(2)}(t), \ldots, f^{(j)}(t)$.

Per studiare il comportamento di un cammino è necessario introdurre un sistema di riferimento.

Definizione 3.3.3. Sia $f : I \to \mathbb{R}^n$ un cammino parametrizzato differenziabile di classe C^k. Un riferimento fondamentale (o di Frénet) è un'applicazione $F = (F_1, ..., F_n) : I \to \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n$ tale che per ogni $t \in I$:

1. $(F_1(t), ..., F_n(t))$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ orientata positivamente.

2. Per ogni $j = 1, ..., n-1$ il sistema ordinato $(F_1(t), ..., F_n(t))$ genera il j-esimo spazio osculatore $L(f, t, j)$ di $\mathbb{R}^n$ ed è equiorientato con la base ordinata $(f'(t), ..., f^{(j)}(t))$.

Definizione 3.3.4. Sia $f : I \to \mathbb{R}^n$ un cammino parametrizzato differenziabile di classe C^k. Sia $(F_1, ..., F_n)$ un riferimento fondamentale di Frénet di f. Per ogni $j = 1, ..., n-1$ la *j-esima curvatura di f in t*, k_j, è definita da:

$$k_j(t) = \frac{< F_j'(t), F_{j+1}'(t) >}{\| f'(t) \|}.$$

Vediamo ora il *teorema di integrazione delle equazioni intrinseche.*

Teorema 3.3.5. *Sia I un intervallo reale e siano $k_1, ..., k_{n-1} : I \to \mathbb{R}$ funzioni differenziabili su I, per $n \geq 2$. Valga : $k_1(t) > 0, ..., k_{n-2}(t) > 0$ $\forall t \in I$. Sia $w \in \mathbb{R}^n$ e $\{G_1, ..., G_n\}$ una base ortonormale orientata positivamente. Allora esiste ed è unico (a meno di moti rigidi) un cammino $f : I \to \mathbb{R}^n$ differenziabile e parametrizzato d'arco (ovvero tale che $\| f'(t) \| = 1$, $\forall t \in I$) che ammetta un riferimento di Frénet $(F_1, ..., F_n)$ e tale che:*

1. *f abbia ordinatamente curvature $k_1^f, ..., k_{n-1}^f$ uguali a $k_1, ..., k_{n-1}$.*
2. *$(F_1(t_0), ..., F_n(t_0)) = (G_1(t_0), ..., G_n(t_0))$ con $t_0 \in I$.*
3. *$f(t_1) = w$ con $t_1 \in I$.*

Dimostrazione. Unicità. Sia $h : I \to \mathbb{R}^n$ un altro cammino parametrizzato d'arco con $k_1^f = k_1^h$, ..., $k_{n-1}^f = k_{n-1}^h$, $h(t_1) = f(t_1) = w$ e $(F_1^h(t_0), ..., F_n^h(t_0)) = (G_1(t_0), ..., G_n(t_0))$. Allora, per un risultato noto, f e h sono sovrapponibili, ovvero si ottengono l'uno dall'altro mediante un moto rigido.

Esistenza. Per ogni $t \in I$ definiamo $A(t) \in M(\mathbb{R}, n \times n)$:

$$a_{ij}(t) = \begin{cases} k_i(t) & j = i+1, i = 1, ..., n-1 \\ -k_i(t) & j = i-1, i = 2, ..., n \\ 0 & \forall (i,j) \neq \textit{ dai casi precedenti.} \end{cases}$$

La matrice sopra definita è una matrice antisimmetrica.
Sia ora G la matrice che ha ordinatamente come righe $G_1, ..., G_n$. Allora, per i teoremi visti sull'esistenza ed unicità delle soluzioni di un sistema lineare di equazioni differenziali, esiste ed è unica $F : I \to M(\mathbb{R}, n \times n)$ con $F'(t) = A(t)F(t)$ e $F(t_0) = G$. Tramite semplici calcoli si ricava poi che $(F_1(t), ..., F_n(t))$ è un sistema ortonormale orientato positivamente.
Ora se $f : I \to \mathbb{R}^n$ come voluto esistesse, sarebbe : $f'(t) = F_1(t)$.
Così definiamo $f : I \to \mathbb{R}^n$ tale che:

$$f(t) = \int_{t_1}^{t} F_1(u)du + w, \quad con\ f(t_1) = w,\ \| f(t) \|= 1.$$

Per vedere che $k_1, ..., k_{n-1}$ sono curvature di f, consideriamo

$$F'_{ij}(t) = -k_{i-1}(t)F_{i-1,j}(t) + k_i(t)F_{i+1,j}(t)$$

e poichè $f'(t) = F_1(t)$,

$$f^{(j)}(t) = \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik}(t)F_i(t) + k_1(t)k_2(t)...k_{j-1}(t)F_j(t).$$

Così essendo $(F_1, ..., F_n)$ un sistema di riferimento di Frénet di f, $k_i = k_i^f$ per ogni $i = 1, ..., n-1$. $\square$

Bibliografia

[1] Antonio Ambrosetti. *Appunti sulle equazioni differenziali ordinarie.* Springer, Trieste,2011

[2] Ermanno Lanconelli. *Lezioni di ANALISI MATEMATICA 2*. Pitagora editrice Bologna, Castel S. Pietro,1999

Ringraziamenti

Desidero ringraziare il Professor Lanconelli per la sua disponibilità, competenza e per l'interesse e la passione che è riuscito a trasmettermi nei confronti di questa materia. Vorrei inoltre ringraziare i miei genitori che mi hanno dato gli stimoli giusti affinchè potessi intraprendere questo meraviglioso ed affascinante percorso di studio.