Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Simmetrie per operatori lineari del secondo ordine

Tesi di Laurea in Analisi Matematica e Stocastica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Andrea Pascucci

Correlatore:
Chiar.mo Prof.
Ermanno Lanconelli

Presentata da:
Andrea Barletta

Seconda Sessione
Anno Accademico 2011/2012

Affrontare situazioni difficili
è una cosa estremamente eccitante,
è un po' come i problemi di matematica,
più sono complicati e più sono stimolanti.
Però quando si trova la soluzione
si rimane sempre un po delusi.
T. Egawa

Notazioni

Nella parte più importante della trattazione avrà luogo una serie piuttosto corposa di calcoli, per cui verrà fornito un elenco consistente delle notazioni utilizzate che si consiglia di consultare onde evitare confusione e interpretazioni ambigue dei simboli che utilizzeremo:

N-1. Indici e insiemi

Per ogni $N \in \mathbf{N}$:

$$\underline{N} := \{1, \ldots, N\}$$

$\mathbf{R}_x^N$ è lo spazio $\mathbf{R}^N$ ove si specifica che si considerano le variabili $x_1, \ldots, x_N$

$\mathbf{R}_t$ è l'insieme dei numeri reali ove si specifica che la variabile è t

$\mathbf{R}_{x,t}^{N+1} = \mathbf{R}_x^N \times \mathbf{R}_t$ è lo spazio $\mathbf{R}^{N+1}$ considerato rispetto alle variabili $x_1, \ldots, x_N, t$

In base alle notazioni precedenti, con la scrittura:

$$u \in C^k(\mathbb{R}_x^N, \mathbb{R})$$

intenderemo che u è una funzione di classe C^k su $\mathbb{R}^N$ secondo l'usuale notazione, specificandone inoltre la dipendenza dalla variabile x, che come vedremo comparirà affiancata ad una sua funzione u, la quale verrà trattata come **variabile dipendente**.

N-2. Operatori di derivazione

Siano $\Omega \subseteq \mathbf{R}^N$ un aperto e $f \in C^2(\Omega, \mathbf{R})$; denoteremo:

Per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $i \in \underline{N}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \partial_{x_i} f(x) = \partial_i f(x) = f_{x_i}(x)$$

ove non recherà ambiguità utilizzeremo l'ulteriore notazione:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = f_i(x)$$

Per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $i, j \in \underline{N}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \partial_{x_i x_j} f(x) = \partial_{ij} f(x) = f_{x_i x_j}(x)$$

ove non recherà ambiguità utilizzeremo l'ulteriore notazione:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = f_{ij}(x)$$

Siano $x = (x_1, \dots, x_N)$, $x' = (x_1, \dots, x_k)$ e $x'' = (x_{k+1}, \dots x_N)$ denoteremo:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(x)\right) = \nabla f(x) = \nabla_x f(x) = \partial_x f(x)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x), \dots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_N}(x), \dots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_N x_1}(x), \dots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_N^2}(x)\right) = \partial_x^2 f(x)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)\right) = \nabla_{x'} f(x) = \partial_{x'} f(x)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(x)\right) = \nabla_{x''} f(x) = \partial_{x''} f(x)$$

ove non recherà ambiguità utilizzeremo anche le seguenti notazioni:

$$\partial_x f(x) =: f^{(1)}$$

$$\partial_x^2 f(x) =: f^{(2)}$$

Introduzione

Negli ultimi anni hanno avuto un grande sviluppo approcci allo studio degli operatori differenziali che fanno uso della teoria dei gruppi di Lie. Uno di questi è rappresentato dallo studio delle *simmetrie*, cioè di una particolare classe di trasformazioni che possiedano una certa struttura di gruppo (di Lie) e che ci permettano, a partire da una soluzione u, di trovare altre soluzioni mediante un'azione indotta su di essa.
Determinare le simmetrie associate ad un operatore differenziale permette di acquisire una certa conoscenza sulla sua struttura e a dimostrarlo sono i loro impieghi in diversi ambiti:

- studio della soluzione fondamentale di operatori differenziali lineari
- riduzione del grado di un' equazione (cfr. [1], cap. 3 e 4)
- studio delle equazioni paraboliche, di grande interesse in finanza e particolarmente adatte ad essere studiate con questi metodi
- applicazione al calcolo delle variazioni e alla meccanica quantistica, con riferimento al *teorema di Noether* (cfr. [1], cap. 5 o il testo *Applications of Lie Groups to Differential Equations* di P.J Olver, cap. 4)

Lo scopo principale di questa tesi sarà quello di determinare un metodo, efficiente a livello applicativo, che consenta di trovare, per un' equazione $Lu = F(x, u(x), u^{(1)}(x), u^{(2)}(x)) = 0$ fissata, famiglie di trasformazioni che inducano azioni sulle soluzioni di L sotto le quali esse conservino la proprietà di essere soluzioni di L.
I due problemi fondamentali che verranno affrontati e approfonditi sono i seguenti:

(i) Chiarire innanzitutto cosa si intende per *famiglia di trasformazioni* e definire poi una famiglia di azioni indotte, in generale, su ogni funzione $u \in C^2$. Per azione in questo caso intendiamo un'applicazione che porti u in un'altra funzione $v = v(u) \in C^2$. L'obiettivo principale è quello di trovare quelle famiglie di trasformazioni tali che, se u è una soluzione dell'operatore L assegnato, la funzione v sia ancora una soluzione di L.

(ii) Restringere la nostra ricerca a famiglie di trasformazioni che godano di proprietà particolari, mediante le quali possa essere caratterizzata in modo operativo la condizione di invarianza. Si vedrà che le famiglie di trasformazioni, indicizzate da un parametro, che godano di certe proprietà di gruppo, soddisfano le nostre esigenze, pertanto ne saranno trattate con un certo formalismo definizioni e proprietà.

Lo svolgimento di tutta la trattazione si articola principalmente in tre capitoli, seguiti da un'appendice:

Cap. 1 In questo capitolo si dà spazio allo studio dei cosiddetti gruppi di Lie di trasformazioni ad un parametro. Con questa terminologia intendiamo, in breve e senza eccessivo formalismo, una famiglia di trasformazioni, indicizzata da un parametro reale e tale che, mediante l'operazione di composizione, definisca un isomorfismo con un gruppo di Lie. Il risultato cruciale del capitolo è il teorema di Lie, che ci assicura di poter caratterizzare ogni famiglia del tipo precedente, a meno di una riparametrizzazione, con un campo vettoriale, detto generatore infinitesimale.
Questo risultato ci permette di poter ricondurre il problema di determinare un gruppo di Lie di trasformazioni al problema di determinare il suo generatore infinitesimale.

Cap. 2 In questo capitolo si prendono in considerazione trasformazioni su $\mathbb{R}^{N+1}$ e si determina a partire da esse un'azione sulle funzioni $u \in C^2$, che coinvolga sia il dominio di u che la sua immagine. Il capitolo si dedica poi alla determinazione di un metodo per trovare quelle trasformazioni sotto la cui azione l'insieme delle soluzioni di L risulti invariante.

L'idea alla base di questo metodo è quella di affrontare il problema con un approccio geometrico; infatti il punto $(x, u(x), u^{(1)}(x), u^{(2)}(x))$ può essere visto come punto della superficie $F(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}) = 0$ di $\mathbb{R}^p$ e l'idea è quella di estendere opportunamente il generico gruppo di trasformazioni T, che agisce su $\mathbb{R}^N$, ad un gruppo di trasformazioni $T^{(2)}$ che agisca su $\mathbb{R}^p$ e tale che richiedere che l'azione del gruppo di trasformazioni T renda invariante l'insieme delle soluzioni di L equivalga a richiedere che $T^{(2)}$ renda invariante la superficie definita dal luogo degli zeri di F.

Il vantaggio di questa riformulazione, una volta studiata l'esistenza e l'unicità di $T^{(2)}$, è quello di poter utilizzare un risultato (abbastanza immediato) di caratterizzazione dell'invarianza di superficie rispetto a gruppi di trasformazioni, che consiste in una certa relazione tra i coefficienti del suo generatore infinitesimale. Lo studio dell'esistenza e dell'unicità di $T^{(2)}$ porta ad un risultato molto utile anche in termini operativi, che consiste in un procedimento algoritmico per determinare $T^{(2)}$ a partire da T. Il capitolo si conclude trattando nello specifico il caso di operatori lineari, per i quali esiste un risultato che semplifica enormemente la forma di $T^{(2)}$ nel caso in cui L sia invariante sotto l'azione di T, e che ci permette dunque di applicare il metodo descritto sopra in maniera concreta.

Cap. 3 In questo capitolo si applicano i risultati ottenuti alle equazioni:

$$
\begin{aligned}
(I) &\;:\; u_t = \frac{1}{2} u_{11} + x_1 u_2, && x_1, x_2, t \in \mathbb{R} \\
(II) &\;:\; u_t = \frac{1}{2} u_{11} + (x_1 - x_2) u_2, && x_1, x_2, t \in \mathbb{R} \\
(III) &\;:\; u_t = \frac{1}{2} x_1^2 u_{11} + x_1 u_2, && x_1, x_2, t \in \mathbb{R},\ x_1 > 0
\end{aligned}
$$

di notevole interesse nella finanza per la loro derivazione dall'analisi stocastica ma anche studiati in altri ambiti come la fisica, e comunque di rilievo anche solamente dal punto di vista matematico. Si vedrà che alcuni risultati ottenuti intersecano risultati già ottenuti con approcci del tutto differenti.

Appendice In Appendice sono trattati con un certo formalismo tutti quei risultati che, pur ritenuti indispensabili al fine di una comprensione completa e profonda degli argomenti trattati, possono appesantire la lettura e rendere più complicato l'apprendimento delle idee basilari. Tutto quello che è contenuto in questo capitolo è comunque parte integrante della trattazione, la quale risulterebbe incompleta e infondata senza farvi riferimento.
Tutte le sezioni ad esclusione delle ultime tre contengono comunque risultati reperibili in letteratura, con opportuni riferimenti in Bibliografia. Le sezioni E,F e G contengono invece uno sviluppo piuttosto dettagliato delle tecniche utilizzate per la risoluzione di alcuni sistemi di equazioni differenziali alle derivate parziali, necessaria al fine di determinare i risultati del capitolo 3. La lettura di questa sezione, anche senza soffermarsi sui singoli passaggi, può risultare molto utile per trattare i casi affini a quelli trattati nel capitolo 3.

Indice

Capitolo 1

Gruppi di trasformazioni su $\mathbf{R}^N$

1.1 Gruppi di trasformazioni ad un parametro

In questa sezione ci occupiamo di introdurre alcune condizioni sulle trasformazioni che tratteremo; innanzitutto non considereremo singole trasformazioni, quanto piuttosto famiglie di trasformazioni che dipendono da un parametro (reale) e vedremo che ad ogni famiglia di questo tipo che soddisfa alcune proprietà di gruppo è in corrispondenza biunivoca con un campo vettoriale. Questo risultato giustificherà dunque la scelta di considerare i cosiddetti **gruppi di Lie di trasformazioni ad un parametro** in quanto ci permetterà di determinare le trasformazioni che ci interessano, a partire dai campi vettoriali ad esse associati, e dunque a concentrare il nostro lavoro sulla ricerca di tali campi vettoriali.

1-A DEFINIZIONE. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto e $I \subseteq \mathbb{R}$; chiameremo ogni funzione $T : \Omega \times I \longrightarrow \Omega$ una **famiglia di trasformazioni** su Ω con parametro in I.

1-B DEFINIZIONE. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto e $\mathbb{G} = (I, *)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ un gruppo con elemento neutro e; sia infine $T : \Omega \times I \longrightarrow \Omega$ una famiglia di trasformazioni su Ω con parametro in I, diremo che T è un **gruppo di trasformazioni** su Ω **ad un parametro** nel gruppo $\mathbb{G}$ se:

(i) $T(\cdot, s)$ è biettiva $\quad \forall s \in I$

(ii) $T(x, e) = x, \quad \forall x \in \Omega$

(iii) $T(\cdot, s_1) \circ T(\cdot, s_2)(x) = T(T(x, s_2), s_1) = T(x, s_1 * s_2), \quad \forall x \in \Omega, \forall s_1, s_2 \in I$

Osservazione. Nella definizione precedente le condizioni *(ii)* e *(iii)* equivalgono a richiedere che l'usuale legge di composizione renda $\{T(\cdot, s)\}_{s\in I}$ un gruppo, isomorfo a $\mathbb{G}$ e parametrizzato da $s \in I$, con elemento neutro la funzione identità su Ω e legge di inversione data da $T(\cdot, s) \mapsto T(\cdot, s^{-1})$.
In altri termini un gruppo di trasformazioni ad un parametro può essere visto come una famiglia di trasformazioni biunivoche dotata di una struttura di gruppo.

1-C DEFINIZIONE. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto e $\mathbb{G} = (I, *)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ un gruppo con elemento neutro e; un gruppo $T : \Omega \times I \longrightarrow \Omega$ di trasformazioni ad un parametro si dice **di Lie** se:

(i) I è connesso.

(ii) $T(\cdot, s) \in C^\infty(\Omega)$, $T(x, \cdot) \in C^\omega(I)$, $\quad \forall x \in \Omega, s \in I$

(iii) $\mathbb{G}$ è un *gruppo di Lie analitico su* I, cioè definita:

$$\phi : I \times I \to I, \quad \phi(s_1, s_2) = s_1 * s_2$$

risulta $\phi \in C^\omega(I \times I)$.

Nel seguito, ove non recherà ambiguità, con la dicitura abbreviata **gruppo di trasformazioni** indicheremo un gruppo di Lie di trasformazioni ad un parametro.

Osservazione. Nelle definizioni precedenti non è restrittivo supporre, a meno di un cambiamento di variabili, $e = 0$. Sia infatti T un gruppo (eventualmente di Lie) di trasformazioni ad un parametro nel gruppo $\mathbb{G}$ e consideriamo la trasformazione biettiva e analitica su $\mathbb{G}$ data da $\tau(s) = s - e$. Il gruppo $\mathbb{H}$ indotto mediante isomorfismo da tale trasformazione (eventualmente ancora di Lie analitico) ha elemento neutro in 0; infine, per l'osservazione precedente, la famiglia $T(\cdot, \tau(\cdot))$ è un gruppo (eventualmente di Lie) di trasformazioni ad un parametro in $\mathbb{H}$.

1.2 Trasformazioni infinitesimali e teorema di Lie

Vogliamo mostrare un risultato fondamentale ai nostri fini, che assicura una **caratterizzazione di un gruppo di Lie di trasformazioni ad un parametro mediante un campo vettoriale** C^∞; questo risultato è contenuto nel **teorema di Lie**, il quale fornisce anche un'espressione esplicita di questa corrispondenza. Il risultato si rivelerà fondamentale in quanto, introdotta opportunamente la definizione di invarianza di un operatore rispetto ad un gruppo di trasformazioni, riusciremo a ricavare delle condizioni (da cui delle equazioni) sui campi vettoriali associati alle trasformazioni.
Nel seguito $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ e $I \subseteq \mathbb{R}$ saranno rispettivamente un aperto e un intervallo fissati, mentre $\mathbb{G} = (I, *)$ sarà un gruppo di Lie analitico, con elemento neutro in 0.

Osservazione. Sia T un gruppo di Lie di trasformazioni su Ω ad un parametro nel gruppo $\mathbb{G}$, poichè T è analitica rispetto al suo secondo argomento possiamo considerarne, per ogni $x \in \Omega$, lo sviluppo di Taylor nel punto $s = 0$.

In particolare, fissato $x \in \Omega$, esiste $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$ tale che $J =]-\varepsilon, \varepsilon[\subseteq I$ e tale che per ogni $s \in J$:

$$T(x,s) = T(x,0) + \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)(x,0)s + \omega(s)$$

ove $\omega \in C^{\infty}(J)$ è tale che $\frac{\|\omega(s)\|}{s} \to 0$ per $s \to 0$. Si ha dunque:

$$T(x,s) = x + \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)(x,0)s + \omega(s) \tag{1.1}$$

1-D DEFINIZIONE. Sia T un gruppo di Lie di trasformazioni su Ω ad un parametro nel gruppo $\mathbb{G}$, definiamo **coefficienti infinitesimali** di T i coefficienti della funzione vettoriale:

$$\xi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N, \quad \xi(x) = \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)(x,0)$$

Chiameremo poi **forma infinitesimale** di T la seguente espressione:

$$\begin{cases} T_1(x,s) = x_1 + s\cdot\xi_1(x) + \omega_1(s^2) \\ \qquad\vdots \\ T_N(x,s) = x_N + s\cdot\xi_N(x) + \omega_N(s^2) \end{cases} \tag{1.2}$$

ove le funzioni scalari $T_1,\ldots,T_N$, $\xi_1,\ldots,\xi_N$ e $\omega_1,\ldots,\omega_N$ sono ordinatamente, rispettivamente, le componenti di T, ξ e ω.
Equivalentemente riscriveremo *(1.2)* in forma vettoriale nel modo seguente:

$$T(x,s) = x + s\cdot\xi(x) + \omega(s)$$

infine, per semplificare le notazioni, ometteremo la scrittura dell'ultimo termine e delle sue componenti, indicando con la generica scrittura $\mathcal{O}(s^2)$ ogni funzione $\omega \in C^\infty(J)$ è tale che $\frac{||\omega(s)||}{s} \to 0$ per $s \to 0$. Al risultato principale di questa sezione premettiamo un lemma.

1-1 LEMMA. Sia T un gruppo di Lie di trasformazioni su Ω ad un parametro nel gruppo $\mathbb{G}$, allora per ogni $s \in I$ e per ogni $h \ll 1$ tale che $s+h \in I$:

$$T(x, s+h) = T(T(x,s), s^{-1} * (s+h))$$

Dimostrazione. Per la definizione 1-B-*(iii)* e per la proprietà associativa di $*$ si ha esplicitamente:

$$\begin{aligned} T(T(x,s), s^{-1} * (s+h)) &= T(x, s * [s^{-1} * (s+h)]) = \\ &= T(x, [s * s^{-1}] * (s+h)) = \\ &= T(x, 0 * (s+h)) = \\ &= T(x, s+h) \end{aligned}$$

□

1-2 TEOREMA di Lie. Sia T un gruppo di Lie di trasformazioni su Ω ad un parametro nel gruppo $\mathbb{G}$ e sia ξ il vettore dei suoi coefficienti infinitesimali, esiste allora un diffeomorfismo $\tau \in C^\omega(I)$ tale che:

$$\begin{cases} \partial_s T(x,s) = \tau'(s)\xi(T(x,s)) & \forall s \in I \\ \tau(0) = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

In particolare, per ogni $s \in I$:

$$\tau(s) = \int_0^s \Gamma(\rho)\, d\rho \tag{1.4}$$

ove:

$$\Gamma(\rho) \;=\; \left.\frac{\partial x * y}{\partial y}\right|_{(x,y)=(\rho^{-1},\rho)}$$

per ogni $\rho \in I$ e, infine:

$$\Gamma(0) = 1$$

Dimostrazione. Innanzitutto, poichè T è analitica rispetto al suo secondo argomento, essa sarà in particolare differenziabile, dunque fissati $x \in \Omega$ e $s \in I$:

$$T(x, s+h) \;=\; T(x,s) \;+\; h \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)(x,s) \;+\; \mathcal{O}(h^2) \tag{1.5}$$

per ogni $h \ll 1$ tale che $s+h \in I$. Allo stesso modo, per 1-C-*(iii)*:

$$\begin{aligned} s^{-1} * (s+h) \;&=\; s^{-1} * s \;+\; h \cdot \left.\frac{\partial x * y}{\partial y}\right|_{(x,y)=(s^{-1},s)} + \mathcal{O}(h^2) \;= \\ &=\; h \cdot \Gamma(s) \;+\; \mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

dunque, ricorrendo al lemma 1-1 e posto $z = T(x,s)$:

$$\begin{aligned} T(x, s+h) \;&=\; T(z, s^{-1} * (s+h)) \;= \\ &=\; T(z, h \cdot \Gamma(s) \;+\; \mathcal{O}(h^2)) \;= \\ &=\; T(z,0) \;+\; \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)(z,0) \cdot (h\Gamma(s) + \mathcal{O}(h^2)) \;+\; \mathcal{O}(h^2) \;= \\ &=\; T(z,0) \;+\; \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)(z,0) \cdot h\Gamma(s) \;+\; \mathcal{O}(h^2) \\ &=\; z \;+\; h \cdot \xi(z) \cdot \Gamma(s) \;+\; \mathcal{O}(h^2) \end{aligned} \tag{1.6}$$

Eguagliando ora gli ultimi membri di *(1.5)* e *(1.6)* otteniamo:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)(x,s) \;+\; \frac{\mathcal{O}(h^2)}{h} \;=\; \xi(T(x,s)) \cdot \Gamma(s)$$

per $h \to 0$:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)(x,s) \;=\; \xi(T(x,s)) \cdot \Gamma(s)$$

la dimostrazione di *(1.3)* segue allora dalla definizione di τ. Infine, dall'ultima uguaglianza, per $s = 0$:

$$\xi(x) \;=\; \xi(x) \cdot \Gamma(0)$$

da cui $\Gamma(0) = 1$, e ciò conclude la dimostrazione.

$\square$

Conseguenze del teorema di Lie

Il punto *(1.3)* dell'enunciato del teorema di Lie, unitamente all'osservazione a p. 8, ci assicura che, per ogni gruppo di trasformazioni T a parametro nel gruppo $\mathbb{G}$ con elemento neutro e, **è possibile trovare una riparametrizzazione** di s per cui $e = 0$ e T è **completamente caratterizzata dai suoi infinitesimali** mediante la relazione:

$$\begin{cases} \partial_s T(x,s) \;=\; \tau'(s)\xi(T(x,s)) & \forall s \in I \\ T(x,0) = x \end{cases} \tag{1.7}$$

l'unicità della soluzione del problema di Cauchy garantisce la **corrispondenza biunivoca** tra T e i suoi infinitesimali.

D'altra parte, poichè τ è iniettiva, possiamo definire un nuovo gruppo $H = (J, \diamond)$ nel modo seguente:

$$J = \tau(I)$$

e:

$$x \diamond y = \tau(\tau^{-1}(x) * \tau^{-1}(y))$$

poichè $\tau \in C^1(I)$ abbiamo, per ogni $s' \in J$, posto $s = \tau^{-1}(s')$:

$$\begin{aligned} &\partial_{s'} T(x, \tau^{-1}(s')) = \frac{1}{\tau'(s)} \partial_s T(x,s) = \xi(T(x, \tau^{-1}(s'))) \\ &T(x, \tau(0)) = T(x,0) = x \end{aligned} \tag{1.8}$$

Consideriamo dunque la famiglia di trasformazioni T' su Ω definita da:

$$T'(x, s') = T(x, \tau^{-1}(s')), \quad s' \in J$$

tale famiglia risulta un gruppo di trasformazioni a parametro in H, infatti:

$$\begin{aligned} T'(x, s' \diamond z') &= T'(x, \tau(\tau^{-1}(s') * \tau^{-1}(z'))) = \\ &= T(x, \tau^{-1}(s') * \tau^{-1}(z')) = \\ &= T(T(x, \tau^{-1}(s')), \tau^{-1}(z')) = \\ &= T'(T'(x, s'), z') \end{aligned}$$

poichè τ è analitica il gruppo di trasformazioni così definito è anche di Lie.

Infine, poichè vale *(1.8)* è, ricorrendo all'unicità della soluzione del problema di Cauchy è facile mostrare che:

$$T'(T'(x, s'), z') = T'(x, s' + z')$$

per ogni $s', z' \in I$ tali che $s' + z' \in J$, dunque:

$$T'(x, s' \diamond z') = T'(x, s' + z')$$

Di conseguenza riparametrizzando T nel modo precedente otteniamo un gruppo di Lie di trasformazioni ad un parametro su Ω che verifica la proprietà 1-B - *(iii)* rispetto all'operazione di addizione,

ogni volta che ciò ha senso, cioè ogni volta che $s+t\in J$.
Poichè siamo interessati all'oggetto T visto come famiglia di trasformazioni su Ω, al variare del parametro s, non è per nulla significativo il dominio in cui varia questo parametro e in particolare vedremo che l'invarianza è una proprietà che si conserva rispetto alle riparametrizzazioni, dunque in definitiva considereremo d'ora in avanti solo i gruppi di trasformazioni che verifichino:

$$\begin{cases} \partial_s T(x,s) = \xi(T(x,s)) \\ T(x,0) = x \end{cases} \tag{1.9}$$

e:

$$T(T(x,s),s') \;=\; T(x,s+s') \tag{1.10}$$

per ogni $s,s'\in I$ tali che $s+s'\in I$.

Osservazione. Nelle notazioni precedenti, se $\mathbb{G}=(\mathbb{R},+)$ le proprietà *(1.9)* e *(1.10)* sono sempre verificate, infatti:

$$\Gamma(\rho) \;=\; \frac{\partial x+y}{\partial y}\bigg|_{(x,y)=(\rho^{-1},\rho)} = 1$$

e dunque $\tau'(s)=1$ per ogni $s\in I$.

1-E DEFINIZIONE. Siano T e T' gruppi di trasformazioni su Ω ad un parametro, rispettivamente, nei gruppi $\mathbb{G}=(I,*),\mathbb{H}=(J,\diamond)$. Diremo che T e T' sono **equivalenti** se esiste un diffeomorfismo analitico $\tau\in C^{\omega}(I)$ tale che:

(i) $I=\tau(J)$

(ii) $s\diamond s' = \tau(\tau^{-1}(s)*\tau^{-1}(s')) \qquad \forall s,s'\in J$

(iii) $T'(x,s) = T(x,\tau^{-1}(s)) \qquad \forall s\in J$

In tal caso scriveremo $T \sim T'$.

È facile dimostrare che, fissato Ω, $\sim$ definisce una relazione di equivalenza sull'insieme dei gruppi di Lie di trasformazioni su Ω ad un parametro.

1.3 Generatori infinitesimali

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto e $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto; consideriamo un gruppo di trasformazioni T su Ω ad un parametro in I, con funzione vettoriale dei coefficienti infinitesimali $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$ e supponiamo che verifichi le proprietà *(1.9)* e *(1.10)*; in accordo con i risultati della sezione precedente ciò **non è restrittivo**.
La proprietà *(1.9)*, in particolare, esprime la relazione tra T e ξ, ma **non fornisce una scrittura esplicita** di T in funzione di ξ. Oggetto di questa sezione sarà quello di esprimere esplicitamente questa dipendenza, vedendo ξ come campo vettoriale e T come una sua curva integrale; questo punto di vista è quello che utilizzeremo operativamente per caratterizzare il concetto di invarianza, che definiremo nelle sezioni successive.
Nel seguito T sarà un gruppo di Lie di trasformazioni su Ω ad un parametro in I tale che verifichi *(1.9)* e *(1.10)*.

1-F DEFINIZIONE. Sia $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$ il vettore dei coefficienti infinitesimali di T, definiamo il **generatore infinitesimale** di T l'operatore differenziale seguente:

$$X : C^1(\Omega) \longrightarrow C(\Omega), \quad (Xf)(x) = \sum_{i=1}^{N} \xi_i(x) \partial_{x_i} f(x)$$

L' operatore definito precedentemente può essere esteso più in generale a funzioni vettoriali; sia infatti $f \in C^1(\Omega,\mathbb{R}^p)$, $f = (f_1,\ldots,f_p)$, utilizzeremo allora la seguente notazione vettoriale:

$$(Xf)(x) = \left(\sum_{i=1}^{N} \xi_i(x)\partial_{x_i} f_1(x),\ldots,\sum_{i=1}^{N} \xi_i(x)\partial_{x_i} f_p(x)\right)$$

In tal modo, denotata con I la funzione identità su Ω abbiamo:

$$(XI)(x) = (\xi_1(x),\ldots,\xi_N(x)) = \xi(x), \quad \forall x \in \Omega$$

Definiamo inoltre, per ogni $f \in C^\infty(\Omega)$:

$$\begin{aligned} &X^0 f = f \\ &X^1 f = Xf \\ &X^k f = X(X^{k-1} f) \quad \forall k \geq 2 \end{aligned}$$

Introduciamo poi un:

1-3 LEMMA. Siano $f \in C^k(\Omega)$ e X il generatore infinitesimale di T; siano infine, $x \in \Omega$ fissato e:

$$\gamma_x : I \longrightarrow \Omega, \quad \gamma_x(s) = T(x,s)$$

allora per ogni $s \in I$:

$$\begin{aligned} \frac{df \circ \gamma_x}{ds}(s) &= Xf(T(x,s)) \\ \frac{d^k f \circ \gamma_x}{ds^k}(s) &= X^k f(T(x,s)) \end{aligned} \tag{1.11}$$

Dimostrazione. Sia $s \in I$, osserviamo innanzitutto che:

$$\gamma'_x(s) = \frac{\partial T(x,s)}{\partial s} = \xi(T(x,s))$$

avremo allora:

$$\begin{aligned}\frac{df \circ \gamma_x}{ds}(s) &= \left\langle \gamma'_x(s)\,,\,\nabla f(\gamma_x(s)) \right\rangle = \\ &= \sum_{i=1}^{N} \xi_i(T(x,s)) \cdot \partial_i f(T(x,s)) = \\ &= Xf(T(x,s))\end{aligned}$$

Proveremo il resto dell'affermazione per induzione su $k \geq 2$, supponiamo dunque:

$$\frac{d^{k-1} f \circ \gamma_x}{ds^{k-1}}(s) = X^{k-1} f(T(x,s))$$

allora:

$$\begin{aligned}\frac{d^k f \circ \gamma_x}{ds^k}(s) &= \frac{d}{ds}\left(\frac{d^{k-1} f \circ \gamma_x}{ds^{k-1}}\right)(s) = \\ &= \frac{d}{ds} X^{k-1} f \circ \gamma_x(s) = \\ &= X(X^{k-1} f)(T(x,s)) = \\ &= X^k f(T(x,s))\end{aligned}$$

$\square$

1-4 TEOREMA. Siano X il generatore infinitesimale di T e $x \in \Omega$, esiste allora un intorno $J = J(x) \subseteq I$ di $s = 0$ tale che, per ogni $s \in J$:

$$\begin{aligned}T(x,s) &= x + s \cdot XI(x) + \frac{s^2}{2} \cdot X^2 I(x) + \ldots = \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{s^k}{k!} \cdot X^k I(x)\end{aligned}$$

Dimostrazione. Poichè T è analitica rispetto al suo secondo argomento esiste un intorno J di $s=0$ tale che:

$$\begin{aligned}
T(x,s) &= T(x,0) + s\cdot\frac{\partial T}{\partial s}(x,0) + \frac{s^2}{2}\cdot\frac{\partial T}{\partial s^2}(x,0) + \ldots = \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{s^k}{k!}\cdot\frac{\partial^k T}{\partial s^k}(x,0) = \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{s^k}{k!}\cdot\frac{d^k\gamma_x}{ds^k}(0)
\end{aligned}$$

La dimostrazione segue allora da *(1.11)* scegliendo $f=I$.

□

Il *teorema 1-4* consente di esprimere la soluzione di *(1.9)* in funzione di X. Adotteremo allora, all'occorrenza, la seguente notazione:

$$e^{sX}(x) := \gamma_x(s) = T(x,s) \tag{1.12}$$

La *(1.12)* è un altro modo di scrivere T, in questo caso esprimendone la dipendenza dal suo generatore infinitesimale X.

1-5 COROLLARIO. Sia $f\in C^\infty(\Omega)$ analitica in $x\in\Omega$e sia X il generatore infinitesimale di T, vale allora:

$$f(\gamma_x(s)) = f(e^{sX}(x)) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{s^k}{k!}X^k f(x) \tag{1.13}$$

in un intorno $J\subseteq I$ di 0.

Dimostrazione. Poichè f è analitica in x, $T(x,0)=x$ e T è analitica in 0, la composizione $f\circ\gamma_x$ è analitica in 0, dunque esiste $J\subseteq I$, $0\in J$ tale che:

$$f(\gamma_x(s)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{s^k}{k!} \frac{d^k f \circ \gamma_x}{ds^k}(0)$$

La dimostrazione si conclude allora ricorrendo a *(1.11)* in quanto, per $s = 0$:

$$\frac{d^k f \circ \gamma_x}{ds^k}(0) = X^k f(x)$$

$\square$

Il corollario precedente giustifica l'adozione di un'altra notazione; per ogni $s \in J$ definiamo:

$$e^{sX} f(x) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{s^k}{k!} X^k f(x)$$

In tal modo la *(1.13)* diventa:

$$f(e^{sX}(x)) = e^{sX} f(x)$$

1.4 Invarianza per funzioni, punti e superficie

In questa sezione introdurremo il concetto di invarianza di funzioni, curve e superficie rispetto ad un gruppo di trasformazioni.
Le definizioni e i risultati che introduciamo saranno poi alla base della definizione di invarianza per operatori differenziali che tratteremo nel capitolo successivo. L'idea infatti sarà quella di ricondurre la condizione di risoluzione di una certa equazione differenziale all'appartenenza del suo grafico (esteso alle sue derivate) ad una

certa superficie; questo ci consentirà di basare la definizione di invarianza per operatori differenziali sulla definizione di invarianza per superficie, e di dedurne facilmente alcuni risultati.
L'invarianza per funzioni, infine, oltre ad avere un interesse specifico nel trovare le soluzioni invarianti di una certa equazione (cioè le soluzioni che vengono portate in se stesse da un gruppo di trasformazioni) consente di ricavare i principali risultati di invarianza per curve e superficie.

1-G DEFINIZIONE. Sia T una famiglia di trasformazioni su Ω a parametro in $I \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f \in C(\Omega)$. Diremo che f è **invariante rispetto a** T se:

$$f(T(x,s)) = f(x) \qquad \forall s \in I,\ x \in \Omega \tag{1.14}$$

1-6 TEOREMA. Sia T un gruppo di trasformazioni su Ω ad un parametro nell'intervallo reale I e siano ξ e X, rispettivamente, il suo vettore dei coefficienti infinitesimali e il suo generatore infinitesimale; supponiamo infine che T verifichi *(1.9)*. La funzione $f \in C^1(\Omega)$ è invariante rispetto a T se e solo se:

$$Xf(x) = 0 \qquad \forall x \in \Omega \tag{1.15}$$

Dimostrazione. La seguente condizione:

$$\frac{df \circ \gamma_x}{ds}(s) = 0 \qquad \forall s \in I,\ x \in \Omega$$

è equivalente a *(1.14)*. D'altra parte, fissati $s \in I$ e $x \in \Omega$, per *(1.11)* si ha:

$$\frac{df \circ \gamma_x}{ds}(s) = Xf(T(x,s))$$

e poichè $\Omega = T(I \times \Omega)$ la condizione:

$$Xf(x) = 0 \qquad \forall x \in \Omega$$

è equivalente a *(1.14)* e ciò conclude la dimostrazione.

□

1-H DEFINIZIONE. Sia T una famiglia di trasformazioni su Ω a parametro in $I \subseteq \mathbb{R}$:

(a) Sia $x \in \Omega$, diremo che x è **invariante rispetto a** T se:

$$T(x,s) = x \qquad \forall s \in I \tag{1.16}$$

(b) Sia $M \subseteq \Omega$ una $(N-1)$-varietà continua di $\mathbb{R}^N$, diremo che M è **invariante rispetto a** T se:

$$T(x,s) \in M \qquad \forall s \in I,\ x \in M \tag{1.17}$$

Osservazione. Supponiamo che M sia definita globalmente come luogo degli zeri della funzione $F \in C(\Omega, \mathbb{R})$. Allora M è invariante rispetto a T se, per ogni $x \in \Omega$:

$$F(T(x,s)) = 0 \qquad \forall s \in I$$

dunque, in questo caso la condizione *(1.17)* è equivalente a:

$$\begin{aligned} & x \in \Omega,\ F(x) = 0 \\ & \Rightarrow \quad F(T(x,s)) = 0 \qquad \forall s \in I \end{aligned} \tag{1.18}$$

1-7 TEOREMA. Sia T un gruppo di trasformazioni su Ω ad un parametro nell'intervallo reale I e siano ξ e X, rispettivamente, il suo vettore dei coefficienti infinitesimali e il suo generatore infinitesimale; supponiamo infine che T verifichi *(1.9)*.

(a) Il punto $x \in \Omega$ è invariante rispetto a T se e solo se:

$$\xi(x) = 0, \qquad \forall x \in \Omega \tag{1.19}$$

(b) Siano $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ e $M \subseteq \Omega$ una $(N-1)$-varietà definita globalmente come luogo degli zeri della funzione F, allora essa è invariante rispetto a T se e solo se:

$$\begin{aligned} & x \in \Omega,\ F(x) = 0 \\ & \Rightarrow \quad XF(x) = 0 \end{aligned} \tag{1.20}$$

Dimostrazione.

(a) La dimostrazione segue direttamente da *(1.15)* con $f \equiv I$, in quanto:

$$x = T(x,s) = I(T(x,s)) \Leftrightarrow 0 = XI(x) = \xi(x)$$

(b) In questo caso la dimostrazione segue ragionando come nel *teorema 1-6*, nel caso $f = F$ e nel caso particolare $f(x) = 0$; la condizione *(1.18)* è infatti equivalente a:

$$0 = \frac{dF \circ \gamma_x}{ds}(s) = XF(T(s,x)) \qquad \forall s \in I$$

$\square$

Osservazione. Le definizioni *(1-G)* e *(1-H)* non dipendono dalla parametrizzazione di T. Più precisamente, se $\tau \in C^w(I,J)$ è un diffeomorfismo analitico, considerando la famiglia di trasformazioni T' su Ω definita da:

$$T'(x,s') = T(x,\tau^{-1}(s')), \quad s' \in J$$

essa risulta un gruppo di trasformazioni a parametro nel gruppo $H = (\diamond, J)$ indotto da τ, definito nella *sezione 1.2 (p. 14)*. Dalla definizione di T' , dalla *definizione 1-G* e dalla *definizione 1-H* è facile osservare che una funzione f, un punto $x \in \Omega$ o una $(N-1)$-varietà continua $M \subseteq \Omega$ sono invarianti rispetto a T' se e solo se sono invarianti rispetto a T. Poichè per il *teorema di Lie* da ogni trasformazione T possiamo ottenere, mediante il procedimento visto sopra, un gruppo di trasformazioni T' che verifichi *(1.9)*, i teoremi *1-6* e *1-7* costituiscono un criterio per valutare l'invarianza di funzioni, punti o superficie per qualunque gruppo di trasformazioni.
Le proprietà di invarianza definite in questa sezione sono dunque indipendenti dai rappresentanti scelti per le classi di equivalenza della relazione ~ (cfr. *definizione 1-E*).

1.5 Coordinate canoniche

In questa sezione studieremo il comportamento di un gruppo di trasformazioni rispetto ad una riparametrizzazione del primo argomento, ovvero rispetto alla composizione con un cambiamento di variabile su Ω. Vedremo, in particolare, che esiste sempre un cambiamento di variabile che consente di scrivere il gruppo di trasformazioni come un gruppo di traslazioni lungo una sola direzione; questo risultato non sarà utilizzato nelle sezioni immediatamente successive ma sarà richiamato nella dimostrazione di un importante teorema sulla caratterizzazione delle trasformazioni invarianti per operatori lineari.

Nel seguito T sarà un gruppo di Lie di trasformazioni su Ω, ad un parametro in I e tale che verifichi la proprietà *(1.9)*; $\xi_1,\ldots,\xi_N$ e X saranno, rispettivamente, i suoi coefficienti infinitesimali e il suo generatore infinitesimale.

Osservazione. Sia $x_0 \in \Omega$ e sia $V \subseteq \Omega$ un intorno di x_0 fissato. Poichè T è uniformemente continua su ogni compatto della forma $\bar{V} \times J$, $J \subset I$ posto $\lambda = \mathrm{diam}(V)$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che:

$$||T(x,s) - T(x',s')|| \leq \lambda, \quad \forall ||(x,s) - (x',s')|| < \varepsilon$$

in particolare ciò vale se $x = x'$ e $|s - s'| < \varepsilon$. D'altra parte, poichè $T(x,0) = x$ su V:

$$\begin{aligned} &||T(x,s) - x|| \leq \lambda, \quad \forall s \in]-\varepsilon,\varepsilon[\\ &\Rightarrow T(x,s) \in V \qquad \forall s \in]-\varepsilon,\varepsilon[\end{aligned}$$

1-8 TEOREMA. Siano $x_0 \in \Omega$, $V \subseteq \Omega$ un intorno di x e $\Theta \in C^{\infty}(V)$ un diffeomorfismo su V. Poniamo $V' = \Theta(V)$ e definiamo poi il gruppo

T' di trasformazioni su V' nel modo seguente:

$$T'(s,y) := \Theta\big(T(s,\Theta^{-1}(y))\big), \qquad y \in V',\ s \in J =]-\varepsilon,\varepsilon[\tag{1.21}$$

ove, $\varepsilon > 0$ è tale che $T(s,V) \subseteq V$ per ogni $s \in J$. Siano infine $\eta_1,\dots,\eta_N$ e Y, rispettivamente, i suoi coefficienti infinitesimali e il suo generatore infinitesimale. Vale allora, per ogni $y \in V'$:

$$\eta(y) = (\eta_1(y),\dots,\eta_N(y)) = X\Theta(\Theta^{-1}(y)) \tag{1.22}$$

Dimostrazione. Sia $y \in V'$, allora:

$$\begin{aligned}
\eta(y) &= \left(\frac{\partial T'}{\partial s}\right)(y,0) = \\
&= \left(\frac{\Theta \circ \partial e^{sX} \circ \Theta^{-1}}{\partial s}\right)(y,0) = \\
&= \left(\frac{\partial \Theta \circ e^{sX}}{\partial s}\right)(\Theta^{-1}(y),0) = \\
&= \frac{d\Theta \circ \gamma_{\Theta^{-1}(y)}}{ds}(0)
\end{aligned}$$

Quella appena ricavata è un'uguaglianza in forma vettoriale, riscrivendola per componenti diventa:

$$\eta_i(y) = \frac{d\Theta_i \circ \gamma_{\Theta^{-1}(y)}}{ds}(0), \qquad i \in \underline{N}$$

Sia poi $x = \Theta^{-1}(y)$, ricorrendo, per ogni $i \in \underline{N}$, a *(1.11)* con $f = \Theta_i$ otteniamo:

$$\frac{d\Theta_i \circ \gamma_x}{ds}(0) = X\Theta_i(x) = X\Theta_i(\Theta^{-1}(y)), \qquad i \in \underline{N}$$

□

1-I DEFINIZIONE. Sia $x \in \Omega$, diremo che il gruppo di trasformazioni T è **espresso nella forma canonica** T' **intorno a** x se esistono un intorno $V \subseteq \Omega$ di x e un diffeomorfismo $\Theta \in C^\infty(V)$ tale che la trasformazione T' definita in *(1.21)* assuma la forma:

$$
\begin{aligned}
T'_i(s,y) &= y_i, \qquad i \in \underline{N-1} \\
T'_N(s,y) &= y_N + s
\end{aligned}
\tag{1.23}
$$

per ogni $s \in J$, $y \in \Omega'$. In tal caso chiameremo **coordinate canoniche** di T in x le componenti $\Theta_1, \ldots, \Theta_N$ del diffeomorfismo Θ.

Osservazione. Sia T espressa nella forma canonica T' mediante il diffeomorfismo Θ; i coefficienti infinitesimali $\eta_1, \ldots, \eta_N$ di T' saranno allora:

$$
\begin{aligned}
\eta_i &= 0, \qquad i \in \underline{N-1} \\
\eta_n &= 1
\end{aligned}
$$

Conoscendo il diffeomorfismo Θ e l'aperto Ω' potremo sempre determinare T a partire dalla sua forma canonica; in particolare, se dimostriamo che è sempre possibile esprimere un gruppo di trasformazioni in forma canonica, potremo ricondurre certe dimostrazioni valide in generale al solo caso di T'.

1-9 TEOREMA. Siano $\partial\Omega \in C^\infty$ e $x_0 \in \Omega$ tale che $\xi(x_0) \neq 0$, allora è possibile trovare, in un intorno V di x_0, un vettore di coordinate canoniche $\Theta_1, \ldots, \Theta_N$ per T.

Dimostrazione. La dimostrazione si basa sui risultati di esistenza di soluzioni per equazioni differenziali alle derivate parziali, lineari e del primo ordine, contenuti nella *sezione B* dell'*Appendice*; in particolare si utilizzeranno risultati noti sul metodo delle curve caratteristiche. Per l'osservazione precedente e per *(1.22)* il diffeomorfismo ha coordinate canoniche in x_0 se e solo se, in un intorno V di x_0:

$$X\Theta_i(x) = 0, \qquad i \in \underline{N-1}$$
$$X\Theta_N(x) = 1$$

dunque il diffeomorfismo Θ è quello canonico se e solo se risolve intorno a x_0:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N} \xi_j(x) \cdot \partial_j \Theta_i(x) &= 0, \qquad i \in \underline{N-1} \\ \sum_{j=1}^{N} \xi_j(x) \cdot \partial_j \Theta_N(x) &= 1 \end{aligned} \tag{1.24}$$

Per ipotesi esiste $i \in \underline{N}$ tale che $\xi_i(x_0) \neq 0$, dunque esiste un intorno V di x_0 tale che $\xi(x) \neq 0$ per ogni $x \in V$. Poichè l'applicazione $C : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ definita nel modo seguente:

$$\begin{aligned} C_j(x) &= x_j \qquad \text{se } j \neq \{i, N\} \\ C_i(x) &= x_N \\ C_N(x) &= x_i \end{aligned}$$

risulta un diffeomorfismo globale di classe C^∞ su $\mathbb{R}^N$ non è restrittivo supporre $i = N$. Per il *teorema A-3* il problema *(1.24)* (eventualmente restringendo V) ha un'unica soluzione su V, una volta assegnata la condizione iniziale su ∂V. Per le osservazioni 1 e 2 in *A.2* possiamo supporre che ∂V sia contenuto nell'iperpiano $x_N = 0$, dunque:

- fissare la condizione iniziale su ∂V equivale a fissare una funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{N-1})$.
- richiamando il *lemma A-1* possiamo supporre, restringendo eventualmente V, che l'applicazione H sia un diffeomormismo di classe C^∞ da $W' \times J$ a V.

Poniamo allora:

$$f_i(z) = z_i, \qquad z \in \mathbb{R}^{N-1}, i \in \underline{N-1}$$

e denotiamo, per ogni $i \in \underline{N-1}$, con Θ_i la soluzione di:

$$\begin{cases} Xu = 0, & i \in \underline{N-1} \\ u \equiv f_i & \text{su } \partial V \end{cases}$$

infine denotiamo con Θ_N la soluzione di:

$$\begin{cases} Xu = 1, & i \in \underline{N-1} \\ u \equiv 0 & \text{su } \partial V \end{cases}$$

Avremo allora, per ogni $i \in \underline{N-1}$:

$$\Theta_i(x) = \Theta_i(T(y(x), s(x))) = f_i(y(x)) = y_i(x) = H_i^{-1}(x) \tag{1.25}$$

e, allo stesso modo:

$$\Theta_N(x) = s(x) + \Theta_i(T(y(x), s(x))) = s(x) + f_N(y(x)) = s(x) = H_N^{-1}(x) \tag{1.26}$$

Ponendo $\Theta = (\Theta_1, \ldots, \Theta_N)$, da *(1.25)* e *(1.26)* otteniamo $\Theta \equiv H^{-1}$, la dimostrazione segue allora dal *lemma A-1*.

$\square$

Osservazione. È facile mostrare che per ogni vettore $(a_1, \ldots, a_N) \in \mathbb{R}^N$ e per ogni gruppo di trasformazioni T' della forma:

$$\begin{aligned} T_i(s,x) &= x_i, \qquad i \in \underline{N-1} \\ T_N(s,x) &= x_N + s \end{aligned}$$

è possibile trovare un diffeomorfismo Φ tale che il gruppo di trasformazioni T'' definito da *(1.21)* sia della forma:

$$\begin{aligned} T_i(s,x) &= x_i + a_i s \qquad i \in \underline{N-1} \\ T_N(s,x) &= x_N + s \end{aligned}$$

Per il il teorema precedente, poi, per un qualunque gruppo di trasformazioni T fissato possiamo trovare un diffeomorfismo Θ tale che il gruppo definito in *(1.21)* sia T' . In tal modo il gruppo T'' coincide con il gruppo ottenuto da T mediante il diffeomorfismo $\Theta \circ \Phi$; in particolare allora possiamo generalizzare il *teorema 1.9* nel modo seguente:

Siano $\partial\Omega \in C^\infty$, $a \in \mathbb{R}^N$ e$x_0 \in \Omega$ tale che $\xi(x_0) \neq 0$, allora è possibile trovare, in un intorno V di x_0, un diffeomorfismo $\Theta \in C^\infty$ su V tale che il gruppo di trasformazioni T' definito da (1.21) abbia la funzione costante a come vettore degli infinitesimali.

1.6 Gruppi locali di trasformazioni ad un parametro

In questa breve sezione osserveremo che è possibile ottenere le proprietà e i risultati visti finora per i gruppi di Lie di trasformazioni ad un parametro in modo del tutto indipendente dall'operazione $*$.

1-J DEFINIZIONE. Sia T una famiglia di trasformazioni sull'aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ad un parametro nell'intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$. Diremo che T **è localmente un gruppo di trasformazioni di Lie** se:

$$
\begin{array}{rl}
\textit{(i)} & 0 \in I \\
\textit{(ii)} & T(x,s) = T(y,s) \;\Rightarrow\; x = y \qquad \forall x, y \in \Omega,\ s \in I \\
\textit{(iii)} & T(\cdot,s) = I_\Omega \;\Leftrightarrow\; s = 0 \\
\textit{(iv)} & T(\cdot,s) \in C^\infty(\Omega),\ T(x,\cdot) \in C^\omega(I), \quad \forall x \in \Omega, s \in I \\
\textit{(v)} & T(T(x,s'),s) = T(x,s+s') \qquad \forall s, s', s+s' \in I\ x, y \in \Omega
\end{array}
\tag{1.27}
$$

Il teorema di Lie (*teorema 1-2*) garantisce che la *definizione 1-J* è consistente con la *definizione 1-C*, in quanto mostra che ogni gruppo di Lie di trasformazioni ad un parametro è, a meno di una riparametrizzazione di s, localmente un gruppo di Lie di trasformazioni ad un parametro. Più precisamente esiste una corrispondenza iniettiva tra le classi di equivalenza di $\sim$ (cfr. *definizione 1-E*) e l'insieme delle famiglie di trasformazioni che sono localmente gruppi di Lie di trasformazioni ad un parametro.

La proprietà *(1.27)-(v)* esprime la proprietà della trasformazione T di agire localmente sul gruppo $\mathbb{R}$, in ogni punto di I.

Le definizioni *1-D* e *1-F* sono ben poste anche nel caso più generale in cui T sia localmente un gruppo di Lie di trasformazioni ad un parametro. Avrà allora perfettamente senso utilizzare le nozioni di coefficienti infinitesimali e generatore infinitesimale per T.

1-10 TEOREMA. Sia T localmente un gruppo di Lie di trasformazioni su Ω ad un parametro in I e sia ξ la il vettore dei suoi coefficienti infinitesimali; T verifica allora la proprietà *(1.9)*.

Dimostrazione. Siano $x \in \Omega$ e $s, h, s+h \in I$ e $y = T(x,s)$ allora:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial s}(x,s) &= \lim_{h\to 0} \frac{T(x,s+h) - T(x,s)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{T(T(x,s),h) - T(T(x,s),0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{T(y,h) - T(y,0)}{h} \\
&= \xi(y) = \xi(T(x,s))
\end{aligned}$$

$\square$

Come conseguenza del *teorema 1-10* tutte le definizioni e i risultati visti in questo capitolo si estendono al caso in cui T sia localmente un gruppo di Lie di trasformazioni ad un parametro.

Capitolo 2

Invarianza per operatori differenziali di ordine 2

L'obiettivo che ci proponiamo in questo capitolo è quello di poter determinare, per un'equazione differenziale (del secondo ordine) assegnata, delle soluzioni di quest'ultima a partire da una sua soluzione fissata. Questo procedimento dovrà dunque avvenire mediante un'azione sulla soluzione fissata e nel nostro caso quest'azione sarà **indotta da una famiglia di trasformazioni** su $\mathbb{R}^{N+1}$; intuitivamente dunque la condizione di invarianza di un'equazione differenziale rispetto ad una famiglia di trasformazioni potrebbe essere formulata richiedendo che l'azione indotta da tale famiglia porti soluzioni dell'equazione in altre soluzioni. Questo approccio porta però immediatamente a due problemi:

1. Determinare l'azione di una generica famiglia di trasformazioni su $\mathbb{R}^{N+1}$ su una funzione a valori in $\mathbb{R}^N$.

2. Trovare un metodo efficiente per determinare le trasformazioni invarianti per un operatore assegnato.

Una prima scelta che facciamo è allora quella di considerare solo le famiglie di trasformazioni che sono localmente gruppi di Lie, e che,

in particolare, verificano *(1.9)* e possono così essere determinate a partire dai loro infinitesimali. Potrebbero dunque esistere famiglie di trasformazioni (che non sono localmente gruppi di Lie) ad un parametro che rendono un operatore invariante e che non sono in alcun modo determinabili con i metodi che proporremo.
La seconda scelta che facciamo consiste in un approccio meno diretto al problema, partendo da una definizione di invarianza più geometrica e apparentemente differente rispetto a quella proposta, che ci consentirà però di risolvere il secondo problema scritto sopra.
In tutto il capitolo dunque adotteremo le seguenti convenzioni:

- $\Omega = A \times J \subseteq \mathbb{R}^{N+1}_{x,y}$ sarà un aperto con bordo $\partial\Omega \in C^{\infty}$.
- $I =]-\varepsilon, \varepsilon[$ sarà un intervallo aperto reale.
- T sarà una famiglia di trasformazioni che è localmente un gruppo di trasformazioni su Ω ad un parametro in I.

2.1 Azione di famiglie di trasformazioni su funzioni

In questa sezione mostreremo come determinare, a partire da T, un'azione su ogni funzione $u \in C^2(A)$. A priori T non induce un'azione in modo univoco, ma vedremo che l'azione di T su $u \in C^2(A)$ viene automaticamente determinata e può essere vista, tra tutte le scelte possibili, come quella più naturale, nel momento in cui si considera l'ultima componente di T come trasformazione sull'immagine di u e le altre componenti come trasformazione sul dominio A.
Supponiamo innanzitutto che T sia della forma:

$$\begin{cases} X_i(x,y;s) = T_i(x,y;s) & i \in \underline{N} \\ U(x,y;s) = T_{N+1}(x,y;s) \end{cases} \tag{2.1}$$

In accordo con le *Notazioni* denoteremo $R_{N+1} = \mathbb{R}^N_x \times \mathbb{R}_y = \mathbb{R}^{N+1}_{x,y}$. Sia ora $u \in C^2(A, J)$, se vediamo U come trasformazione sull'immagine di u , essa definisce, fissato $s \in I$ una funzione u^* nel modo seguente:

$$u^*(x) = U(x, u(x), s) \tag{2.2}$$

In questo modo U induce un'azione su u trasformandone le immagini, e tale azione dipende, in tutta generalità, anche dal punto in cui si calcola la funzione. Consideriamo poi la trasformazione:

$$(x_1, \ldots, x_N) \mapsto (X_1(x, u(x); s), \ldots, X_N(x, u(x); s)) \; =: \; (x_1^*, \ldots, x_N^*) \tag{2.3}$$

per vedere *(2.3)* come trasformazione sul dominio ed esprimere u^* come funzione delle variabili $(x_1^*, \ldots, x_N^*)$ dobbiamo supporre che sia un diffeomorfismo di classe C^2. In tal caso è ben definita, per ogni $w \in A$:

$$v_s(w) \; = \; u(x)$$

ove x è tale che $w = x^*$. Abbiamo poi:

$$(x_1, \ldots, x_N) = (X_1(x^*, u^*(x); -s), \ldots, X_N(x^*, u^*(x); -s))$$

Da cui, posto $X = (X_1, \ldots, X_N)$:

$$u^*(x) \; = \; U(X(x^*, u^*(x); -s), u(X(x^*, u^*(x); -s)), s)$$

La funzione v_s risulta allora definita implicitamente dalla seguente relazione:

$$v_s(x) = U(X(x, v_s(x); -s), u(X(x, v_s(x); -s)); s) \tag{2.4}$$

Osservazione. Supponiamo che T sia della forma *(2.1)* con:

$$\begin{aligned} X_i(x, y; s) &= X_i(x; s) \qquad i \in \underline{N} \\ U(x, y; s) &= U(y; s) \end{aligned}$$

in tal caso *(2.3)* è un diffeomorfismo di classe C^2, dunque, per ogni $s \in I$:

$$v_s(x) = U(X(x, -s), u(X(x, -s)); s)$$

Quanto visto finora giustifica le seguenti:

2-A DEFINIZIONE. Sia $u \in C^2(A)$ e sia $S(I)$ l'insieme degli $s \in I$ tali che $X(\cdot, u(\cdot); s)$ è un diffeomorfismo di classe C^2 su A. Chiameremo **azione di T su u** l'applicazione:

$$\mathcal{T}_u : S(I) \longrightarrow C^2(A),\ \mathcal{T}_u(s) = v_s$$

ove, v_s è la funzione definita implicitamente dalla relazione *(2.4).*

2-B DEFINIZIONE. Definiamo l'equazione differenziale (2.5) **invariante sotto l'azione di** (2.1) se, per ogni sua soluzione $u \in C^2(A, J)$ e per ogni $s \in S(I)$, la funzione $v_s = \mathcal{T}_u(s)$ è ancora una soluzione di (2.5).

Osserviamo che:

- Poichè $T(\cdot, s) \in C^{\infty}(\Omega)$ per ogni $s \in I$ e poichè $u \in C^2(A, J)$ risulta $v_s \in C^2(A)$, dunque le definizioni precedenti sono ben poste.

- L'azione di T lascia invariante l'equazione (2.5) se e solo se determina, per ogni sua soluzione, una famiglia di soluzioni.

- A priori la corrispondenza $(u, s) \mapsto v_s$ non è l'unica indotta da T, ma i risultati di questo capitolo ci mostreranno che tale scelta è, a posteriori, l'unica che consente di caratterizzare in maniera operativa la *definizione 2-A* e di determinare un metodo per trovare tutte le trasformazioni invarianti per un'equazione fissata. L'esempio che segue rappresenta una prima giustificazione di tale scelta.

Esempio. **Operatori omogenei rispetto a dilatazioni**
èz Siano $\Omega = \mathbb{R}^3_{t,x,y}$, e $I =]0, +\infty[$, la famiglia di dilatazioni T della forma:

$$\begin{aligned} T(t, x_1, x_2, y; s) &= (X(t, x_1, x_2, y; s), U(t, x_1, x_2, y; s)) \\ &= (e^{2s} x_1, e_{3s} x_2, e^s t, y), \qquad t, x, y \in \mathbb{R},\ s \in I \end{aligned}$$

tale famiglia risulta un gruppo di Lie di trasformazioni ad un parametro che verifica (1.9) globalmente (cfr. *Appendice - A*). Definiamo T-omogeneo di grado p un operatore lineare del primo ordine $u \mapsto P(u)$ se, per ogni $s \in I$:

$$P(u \circ X(\cdot; s))(t, x_1, x_2) = e^s P(u)(X(t, x_1, x_2; s)$$

questa definizione viene spesso presentata come definizione di invarianza nel caso specifico di una famiglia di dilatazioni. Osserviamo che se P è T-omogeneo di grado p, per ogni soluzione u di $P(u) = 0$ abbiamo:

$$P(v_s(t, x_1, x_2)) = P(u(X(t, x_1, x_2; s))) = e^s P(u)(X(t, x_1, x_2; s)) = 0$$

dunque l'operatore P è invariante rispetto a T nel senso della *definizione 2-A*.

□

2.2 Definizione geometrica

Ci interesseremo, in questa sezione, al concetto di invarianza per operatori differenziali del secondo ordine (cfr. *Appendice - C*), rispetto a famiglie di trasformazioni che sono localmente gruppi ad un parametro, seguendo un approccio di tipo geometrico.
Si consideri una generica equazione differenziale del secondo ordine:

$$f(x, u, u_1, \ldots, u_N, u_{11}, \ldots, u_{1N}, \ldots u_{N1}, \ldots, u_{NN}) = 0 \tag{2.5}$$

con $u \in C^2(A, J)$ per ogni sua soluzione u. Osserviamo che se $u \in C^2(A, J)$ è una soluzione di *(2.5)*, in particolare, per ogni $x \in A$, il vettore $\left(x, u(x), \partial u(x), \partial^2 u(x)\right)$ sarà una soluzione dell' equazione:

$$f(y) = f(z_1, \ldots, z_{2N+1+\frac{N(N+1)}{2}}) = 0 \tag{2.6}$$

sullo spazio $\mathbb{R}^m$, ove:

$$m = 2N + 1 + \frac{N(N+1)}{2}$$

con:

$$
\begin{aligned}
z_i &= x_i && i \in \underline{N} \\
z_{N+1} &:= u(x) && \\
z_{N+i+1} &= y_i^{(1)} := u_i(x) && i \in \underline{N} \\
z_{2N+i+1 \cdot j} &= y_{ij}^{(2)} := u_{ij}(x) = u_{ji}(x) && i \le j \; i, j \in \underline{N}
\end{aligned}
$$

In quest'ottica, la definizione più naturale di invarianza di *(2.5)* rispetto a *(2.1)* è quella di **invarianza come superficie** (cfr. sez. 1.4). Osserviamo però che T agisce solo su $N+1$ variabili, mentre *(2.5)* definisce una superficie sullo spazio $\mathbf{R}_z^m$; d'altra parte nel caso specifico che stiamo considerando, fissati $x \in A$ e una funzione $u \in C^2(A)$, le variabili $z_{N+1}, \ldots, z_m$ sono a loro volta **univocamente determinate**, e ciò suggerisce che, almeno intuitivamente, T definisca in modo naturale un'azione sullo spazio $\mathbf{R}_z^m$ che ci permetta di ridefinire il concetto di invarianza come invarianza di tale trasformazione rispetto alla superficie definita da *(2.5)*. Più formalmente nella prossima sezione ci occuperemo di dimostrare che esiste un' **estensione naturale** $T^{(2)}$ di T, della foma:

$$
\begin{cases}
X_i(x, y; s) = T_i(x, y; s) & i \in \underline{N} \\
U(x, y; s) = T_{N+1}(x, y; s) & \\
U_i(x, y, y^{(1)}; s) = T_i(x, y; s) & i \in \underline{N} \\
U_{ij}(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}; s) = T_{ij}(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}; s) & i, j \in \underline{N}
\end{cases} \tag{2.7}
$$

tale che renda *(2.5)* **invariante come superficie** di $\mathbf{R}_z^m$, nel senso della *definizione 1-H*, se e solo se *(2.5)* è invariante sotto l'azione di T, nel senso della *definizione 2-B*. Se tale "estensione" esiste, detto $Z^{(2)}$ il campo vettoriale ad essa associato, per il teorema *(1.20)*:

$$
\begin{aligned}
& f(x, u(x), \partial u(x), \partial^2 u(x)) = f(z) = 0 \\
\Rightarrow \quad & (X^{(2)} f)(x, u(x), \partial u(x), \partial^2 u(x)) = (Z^{(2)} f)(z) = 0
\end{aligned}
$$

2.3 Estensioni canoniche

Ci occuperemo in questa sezione di mostrare esistenza e unicità della trasformazione *(2.7)*, mediante la costruzione esplicita di $T^{(2)}$. Vedremo in particolare che sotto alcune ipotesi tali estensioni **esistono sempre univocamente determinate**, e che la loro costruzione segue in modo canonico; le stesse ipotesi saranno anche quelle che garantiranno, per ogni soluzione di un'equazione della forma *(2.5)* e per ogni soluzione $u \in C^2(A)$, che la famiglia di funzioni definita da $\mathcal{T}_u$ è una famiglia di soluzioni ogni volta che l'estensione $T^{(2)}$ rende l'equazione invariante come superficie di $\mathbb{R}^m$.
Il vantaggio di questo approccio, per determinare famiglie di trasformazioni che portino soluzioni in altre soluzioni, consiste nel poter determinare mediante un procedimento algoritmico un sistema di equazioni differenziali le cui soluzioni sono tutte e sole le famiglie di trasformazioni (localmente gruppi di Lie) che rendono un operatore assegnato invariante, e a tale scopo sarà cruciale l'esistenza di una formula esplicita per la determinazione delle *(2.7)*.

Osservazione. Per trovare l'estensione cercata dobbiamo innanzitutto sfruttare l'unica informazione che abbiamo su di essa, che consiste nella proprietà di ricondurre l'invarianza di T, rispetto ad un' equazione differenziale assegnata, all'invarianza di T rispetto alla superficie definita dalla stessa equazione.
Dunque supponiamo che $u \in C^2(A, J)$ sia soluzione di *(2.5)*; poichè in tal caso, come già visto nella sezione precedente, questa proprietà è equivalente all'appartenenza alla superficie $f(z) = 0$ di tutti e soli i punti $z = (x, y, y^{(1)}, y^{(2)})$ con $x \in A$ e $y = u(x)$ e tali che:

$$\begin{aligned} y^{(1)} &= \partial u(x) \\ y^{(2)} &= \partial^2 u(x) \end{aligned}$$

è necessario che questa condizione venga preservata dall'estensione $T^{(2)}$, ovvero deve valere:

$$\begin{aligned} U^{(1)}(x,u(x),u^{(1)}(x);s) &= \partial v_s(x) \\ U^{(2)}(x,u(x),u^{(1)}(x),u^{(2)}(x);s) &= \partial^2 v_s \end{aligned}$$

Notazione. Sia $u \in C^2(A,J)$, poniamo:

$$\Omega_u := \{(x,u(x),u^{(1)}(x),u^{(2)}(x)) | x \in A\} \subseteq \mathbb{R}^p, \quad \Omega' := \bigcup_{u \in C^2(A,J)} \Omega_u \subseteq \mathbb{R}^p$$

2-C DEFINIZIONE. Diremo che la famiglia di trasformazioni $T^{(2)}$ della forma *(2.7)* è un'**estensione canonica** di **grado 2** di T se è localmente un gruppo di Lie di trasformazioni sull'insieme Ω' ad un parametro in $]-\varepsilon',\varepsilon'[\subseteq I$, tale che, per ogni $x \in A$, per ogni $u \in C^2(A,J)$ e per ogni $s \in]-\varepsilon',\varepsilon'[$:

(2.8)

$$\begin{aligned} \mathscr{J}_{X(\cdot,u(\cdot);s)}(x) U^{(1)}(x,u(x),u^{(1)}(x);s) &= \nabla U(\cdot,u(\cdot);s)(x) \\ \mathscr{J}_{X(\cdot,u(\cdot);s)}(x) U^{(2)}_{i,\cdot}(x,u(x),u^{(1)}(x),u^{(2)}(x);s) &= \nabla U^{(1)}_i(\cdot,u(\cdot),u^{(1)}(\cdot);s)(x) \quad i \in \underline{N} \end{aligned}$$

ove $U^{(2)}_{i,\cdot} = (U^{(2)}_{i,1},\ldots,U^{(2)}_{i,N})$.

2-D DEFINIZIONE. Sia $p = 2N+1$, definiamo, per ogni $i \in \underline{N}$:

$$\begin{aligned} &D_i : C^1(\mathbb{R}^p) \longrightarrow C(\mathbb{R}^m), \\ &\big(D_i(\phi)\big)(x,y,y^{(1)},y^{(2)}) = \phi_{x_i} + y^{(1)}_i \phi_y + \sum_{k=1}^{N} y^{(2)}_{ik} \phi_{y^{(1)}_k} \end{aligned}$$

l' **i-esimo operatore di derivazione totale** su $\mathbb{R}^p$.

2-1 TEOREMA. Esiste ed è unica l'estensione canonica $T^{(2)}$ di T, di grado 2 e relativa ad u .

Dimostrazione. Siano $u \in C^2(A, J)$ e $i \in \underline{N}, x \in A$; poniamo poi $\varepsilon' = \operatorname{diam} S(I)$, e sia infine $s \in I' =]-\varepsilon', \varepsilon[$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} \partial_{x_i} U(\cdot, u(\cdot); s)(x) &= \partial_{x_i} U(x, u(x); s) + u_i(x) \partial_y U(x, u(x); s) = \\ &= D_i(U)(x, u(x); s) \end{aligned}$$

Allo stesso modo:

$$\partial_{x_i} X_j(\cdot, u(\cdot); s)(x) = D_i(X_j)(x, u(x); s)$$

dunque ponendo:

$$E = \begin{pmatrix} D_1 X_1(x, u(x); s) & \dots & D_1 X_N(x, u(x); s) \\ \vdots & & \vdots \\ D_N X_1(x, u(x); s) & \dots & D_N X_N(x, u(x); s) \end{pmatrix}$$

posto infine $x^* = X(x, u(x); s)$, imponendo la prima condizione in *(2.8)* otteniamo come condizione equivalente:

$$E \cdot U^{(1)}(x, u(x), u^{(1)}(x); s) = (D_1 U(x, u(x); s), \dots, D_N U(x, u(x); s))$$

poichè, inoltre, $s \in S(I)$, la matrice E è invertibile, dunque:

$$U^{(1)}(x, u(x), u^{(1)}(x); s) = E^{-1} \cdot (D_1 U(x, u(x); s), \dots, D_N U(x, u(x); s))$$

$U^{(1)}$ è allora ben definito e univocamente determinato.

Con un ragionamento del tutto analogo si mostra che:

$$\partial_{x_i} U_j^{(1)} = D_i(U_j^{(1)})(x, u(x), u^{(1)}(x); s)$$

da cui, imponendo la seconda condizione in *(2.8)* otteniamo come condizione equivalente:

$$U_{i,\cdot}^{(2)}(x, u(x), u^{(1)}(x), u^{(2)}(x); s) =$$
$$= E^{-1} \cdot (D_1 U_i^{(1)}(x, u(x), u^{(1)}(x); s), \ldots, D_N U_i^{(1)}(x, u(x), u^{(1)}(x); s))$$

Ora, per costruzione:

$$U^{(1)}(x, u(x), u^{(1)}(x); s) = \partial^{(1)} U(\cdot, u(\cdot); s) \circ X(\cdot, u(\cdot); s)^{-1}(x^*) =$$
$$= \partial^{(1)} u^* \circ X(\cdot, u(\cdot); s)^{-1}(x^*) = \partial^{(1)} v_s(x^*)$$

analogamente si mostra che:

$$U^{(2)}(x, u(x), u^{(1)}(x), u^{(2)}(x); s) = \partial^{(2)} v_s(x^*)$$

d'altra parte:

$$X(x, u(x); s) = x^*$$
$$U(x, u(x); s) = u^*(x) = v_s(x^*)$$

pertanto $T^{(2)}(z; s) = (x^*, v_s(x^*), \partial^{(1)} v_s(x^*), \partial^{(2)} v_s(x^*)) \in \Omega'$ per ogni $z \in \Omega'$. Poniamo dunque, per ogni $z = (x, u(x), u^{(1)}(x), u^{(2)}(x)) \in \Omega'$ e per ogni $s \in I'$:

$$\begin{cases} U^{(1)}(x, u(x), u^{(1)}(x); s) = E^{-1} \cdot (D_i U(x, u(x); s))_{i \in \underline{N}} \\ U_{i,\cdot}^{(2)}(x, u(x), u^{(1)}(x), u^{(2)}(x); s) = E^{-1} \cdot (D_j U_i^{(1)}(x, u(x), u^{(1)}(x); s))_{j \in \underline{N}} \quad i \in \underline{N} \end{cases}$$

È immediato poi verificare che la famiglia di trasformazioni su Ω' così definita risulta localmente un gruppo di Lie, e la dimostrazione è così conclusa.

$\square$

Ci resta da mostrare che le trasformazioni canoniche sono quelle che effettivamente ci consentono di ricondurre l'invarianza di un operatore sotto l'azione di una famiglia di trasformazioni all'invarianza dell'operatore, come superficie, rispetto alla sua estensione canonica.

2-2 TEOREMA. L'equazione differenziale *(2.5)* è invariante sotto l'azione di T sull'intervallo I' se e solo se la superficie M definita da:

$$M \;=\; \{(x, u(x), u^{(1)}(x), u^{(2)}(x)) \in \Omega' \mid f(x, u(x), u^{(1)}(x), u^{(2)}(x)) = 0 \;\forall x \in A\}$$

è invariante rispetto all'estensione canonica $T^{(2)}$ di grado 2.

Dimostrazione. Sia $Z^{(2)}$ il generatore infinitesimale di $T^{(2)}$; la condizione di invarianza di M rispetto a $T^{(2)}$ nel senso della *definizione 1-H* è:

$$z \in \Omega',\; f(z) = 0 \;\Rightarrow\; f(T^{(2)}(z, s)) = 0 \qquad \forall s \in I'$$

equivalentemente:

$$\begin{aligned} u \in C^2(A, J), \quad f(x, u(x), u^{(1)}(x), u^{(2)}(x)) = 0 \;\forall x \in A \\ \Rightarrow\; f(x^*, v_s(x^*), \partial^{(1)} v_s(x^*), \partial^{(2)} v_s(x^*)) = 0 \qquad \forall s \in I' \end{aligned}$$

la condizione scritta sopra è esattamente la condizione richiesta dalla *definizione 2-B*, ristretta all'intervallo $I' \subseteq S(I)$.

$\square$

2-3 TEOREMA. L'equazione differenziale *(2.5)* è invariante sotto l'azione di T sull'intervallo I' se e solo se:

$$\begin{aligned} & u \in C^2(A,J),\ f(x,u(x),u^{(1)}(x),u^{(2)}(x)) = 0 \quad \forall x \in A \\ \Rightarrow \quad & Z^{(2)} f(x,u(x),u^{(1)}(x),u^{(2)}(x)) \ = \ 0 \quad \forall x \in A \end{aligned}$$

ove $Z^{(2)}$ è il generatore infinitesimale di $T^{(2)}$.

Dimostrazione. La dimostrazione segue immediatamente dal *teorema 1-7* e dal *teorema 2-2*.

□

2.4 Forma infinitesimale delle estensioni canoniche

Il motivo principale per cui ci limitiamo a considerare famiglie di trasformazioni che sono localmente gruppi di Lie ad un parametro è che l'estensione cercata sarà determinata esplicitamente a partire dai suoi infinitesimali (cfr. *sezione 1.2*). Come vedremo più avanti infatti tutti i metodi che ci permettono di calcolare esplicitamente le trasformazioni invarianti per un certo operatore differenziale si basano sulla determinazione di un sistema di equazioni differenziali che coinvolge i loro infinitesimali; in questa sezione determineremo un risultato di rappresentazione per gli infinitesimali di $T^{(2)}$.

Consideriamo dunque la famiglia di trasformazioni T, scritta nella forma infinitesimale *(1.2)*:

$$\begin{cases} X_i(x,y;s) \ = \ x_i + s \cdot \xi_i(x,y) + \mathcal{O}(s^2) \quad i \in \underline{N} \\ U(x,y;s) \ = \ y + s \cdot \eta(x,y) + \mathcal{O}(s^2) \end{cases} \tag{2.9}$$

Sia poi $T^{(2)}$ la sua estensione canonica di grado 2, la sua forma infinitesimale sarà allora:

$$\begin{cases} X_i(x,y;s) \;=\; x_i + s\cdot\xi_i(x,y) + \mathscr{O}(s^2) & i\in\underline{N} \\ U(x,y;s) \;=\; u + s\cdot\eta(x,y) + \mathscr{O}(s^2) & \\ U_i^{(1)}(x,y,y^{(1)};s) \;=\; y_i^{(1)} + s\cdot\eta_i^{(1)}(x,y,y^{(1)}) + \mathscr{O}(s^2) & i\in\underline{N} \\ U_{ij}^{(2)}(x,y,y^{(1)},y^{(2)};s) \;=\; y_{ij}^{(2)} + s\cdot\eta_{ij}^{(2)}(x,y,y^{(1)},y^{(2)}) + \mathscr{O}(s^2) & i,j\in\underline{N} \end{cases} \tag{2.10}$$

Il risultato che segue costituisce lo strumento principale che utilizzeremo per determinare le trasformazioni invarianti per un operatore fissato:

2-4 TEOREMA. Siano *(2.9)* e *(2.10)*, rispettivamente, le scritture in forma infinitesimale di T e della sua estensione canonica $T^{(2)}$. Valgono allora, per ogni $i,j\in\underline{N}$, le seguenti **formule di rappresentazione**:

$$\begin{aligned} \eta_i^{(1)}(x,u,u^{(1)}) \;&=\; D_i\eta(x,u,u^{(1)}) \;-\; \sum_{k=1}^{N}(D_i\xi_k)(x,u,u^{(1)})u_k \\ \eta_{ij}^{(2)}(x,u,u^{(1)},u^{(2)}) \;&=\; D_j\eta_i^{(1)}(x,u,u^{(1)},u^{(2)}) \;-\; \sum_{k=1}^{N}(D_j\xi_k)(x,u,u^{(1)},u^{(2)})u_{ik} \end{aligned} \tag{2.11}$$

per ogni $x\in A$ e per ogni $u\in C^2(A,J)$, ove per brevità abbiamo denotato $u=u(x), u^{(1)}=u^{(1)}(x)$ e $u^{(2)}=u^{(2)}(x)$.

In particolare i coefficienti di $\eta^{(1)}$ e $\eta^{(2)}$ risultano, nelle $u^{(1)},u^{(2)}$, **funzioni polinomiali**.

Dimostrazione. Siano $u \in C^2(A, J)$, $x \in A$ e $s \in I'$. Consideriamo la matrice E definita nel *teorema 2-1*, sostituendo *(2.9)* abbiamo:

$$E = \begin{pmatrix} D_1 X_1(x, u(x); s) & \dots & D_1 X_N(x, u(x); s) \\ \vdots & & \vdots \\ D_N X_1(x, u(x); s) & \dots & D_N X_N(x, u(x); s) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} D_1(x_1 + s \cdot \xi_1(x, u(x))) & \dots & D_1(x_N + s \cdot \xi_N(x, u(x))) \\ \vdots & & \vdots \\ D_N(x_1 + s \cdot \xi_1(x, u(x))) & \dots & D_N(x_N + s \cdot \xi_N(x, u(x))) \end{pmatrix} + \mathcal{O}(s^2)$$

Ora:

- $D_i(f + g) = D_i f + D_i g \qquad \forall i \in \underline{N},\ \forall f, g \in C^1(\mathbb{R}^p)$
- $D_i(\alpha f) = \alpha \cdot D_i f \qquad \forall i \in \underline{N}, \forall f \in C^1(\mathbb{R}^p),\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- $D_i(x_j) = \delta_{ij} \qquad \forall i, j \in \underline{N}$

dunque:

$$E = I_N + s \cdot E' + \mathcal{O}(s^2)$$

inoltre, poichè $s \in I' \subseteq S(I)$ la matrice E è invertibile, dunque:

$$\begin{aligned} I_N - s \cdot E' &= E^{-1} E \cdot (I_N - s \cdot E') = \\ &= E^{-1} \cdot (I_N + \mathcal{O}(s^2)) = E^{-1} + \mathcal{O}(s^2) \end{aligned}$$

Sostituendo questa relazione e *(2.10)* nell'espressione esplicita di $T^{(2)}$ ricavata nel *teorema 2-1* otteniamo:

$$(\mathbf{i}) : u^{(1)}(x)+s\cdot\eta^{(1)}(x,u(x),u^{(1)}(x)) =$$
$$= (I_N - s\cdot E')\cdot\left[u^{(1)}(x)+s\cdot\left(D_i\eta(x,u(x))\right)_{i\in\underline{N}}\right]+\mathcal{O}(s^2)$$

$$(\mathbf{i}) : u^{(2)}(x)+s\cdot\eta^{(2)}(x,u(x),u^{(1)}(x),u^{(2)}(x)) =$$
$$= (I_N - s\cdot E')\cdot\left[u^{(2)}(x)+s\cdot\left(D_j\eta_i^{(1)}(x,u(x),u^{(1)}(x))\right)_{i,j\in\underline{N}}\right]+\mathcal{O}(s^2)$$

Da cui:

$$\eta^{(1)}(x,u(x),u^{(1)}(x)) = -E'\cdot u^{(1)}(x)+\left(D_i\eta(x,u(x))\right)_{i\in\underline{N}}+\frac{\mathcal{O}(s^2)}{s}$$

$$\eta^{(2)}(x,u(x),u^{(1)}(x),u^{(2)}(x)) = -E'\cdot u^{(2)}(x)+\left(D_j\eta_i^{(1)}(x,u(x),u^{(1)}(x)\right)_{i,j\in\underline{N}}+\frac{\mathcal{O}(s^2)}{s}$$

infine, per $s\to 0$ otteniamo esattamente *(2.11)*.

□

L'enunciato del *teorema 2.4* e la *definizione 2-D* forniscono dunque una prima dimostrazione della proprietà fondamentale dei coefficienti $\eta^{(1)}$ e $\eta^{(2)}$ che è quella di essere polinomiali nelle $u^{(1)}, u^{(2)}$.
Nella sezione successiva ci dedicheremo alla loro determinazione esplicita, per poter formalizzare in maniera più accurata la proprietà di cui accennato sopra e per poterla soprattutto utilizzare in modo applicativo.

2.5 Determinazione di $\eta^{(1)}$ e $\eta^{(2)}$

In questa sezione ci occupiamo esibire una scrittura esplicita di $\eta^{(1)}$ e $\eta^{(2)}$, facendo uso ovviamente del *teorema 2-4*. Le formule che ricaveremo per $\eta^{(1)}$ e $\eta^{(2)}$ ci serviranno per imporre delle condizioni esplicite per gli infinitesimali delle famiglie di trasformazioni invarianti per *(2.5)*; tali condizioni saranno poi tradotte in un sistema di equazioni differenziali su ξ e η, dunque i risultati di questa sezione costituiscono la base di quello che potremo definire un algoritmo per determinare un sistema di equazioni differenziali le cui soluzioni sono tutte e sole le famiglie di trasformazioni invarianti, localmente gruppi di Lie, la cui azione lascia invariante *(2.5)*.

Determinazione di $\eta^{(1)}$

Sia $i \in \underline{N}$ fissato, per *(2.11)* abbiamo allora:

$$\eta_i^{(1)} = D_i\eta - \sum_{k=1}^{N} (D_i\xi_k)u_k \quad \forall i \in \underline{N}$$

ora:

$$D_i\eta = \eta_{x_i} + u_i\eta_y$$
$$D_i\xi_k = (\xi_k)_{x_i} + u_i(\xi_k)_y$$

da cui:

$$\begin{aligned}\eta_i^{(1)} &= \eta_{x_i} + u_i\eta_y - \sum_{k=1}^{N} u_k\big((\xi_k)_{x_i} + u_i(\xi_k)_y\big)\\ &= \eta_{x_i} + \mathbf{u_i}\big(\eta_y - (\xi_i)_{x_i}\big) - \sum_{k\in\underline{N},k\neq i} \mathbf{u_k}(\xi_k)_{x_i} - (\mathbf{u_i})^2(\xi_i)_y - \sum_{k\in\underline{N},k\neq i} \mathbf{u_i}\mathbf{u_k}(\xi_k)_y\end{aligned}$$

□

Determinazione di $\eta^{(2)}$

Sia $i \in \underline{N}$ fissato, per *(2.11)* abbiamo allora:

$$\eta^{(2)}_{ij} = D_j \eta^{(1)}_i - \sum_{k=1}^{N} (D_j \xi_k) u_{ik} \quad \forall i, j \in \underline{N}$$

ove ricordiamo:

$$\eta^{(1)}_i = \eta^{(1)}_i (x, u, u^{(1)})$$

Inoltre:

$$D_j \eta^{(1)}_i = D_j \eta_{x_i} + D_j (u_i \eta_y) - \sum_{k=1}^{N} D_j \left[\left((\xi_k)_{x_i} + u_i (\xi_k)_y \right) u_k \right]$$

Dunque:

$$(\bullet): \quad D_j \eta_{x_i} = \eta_{x_i x_j} + u_j \eta_{x_i y}$$

$$(\bullet\bullet): \quad D_j (u_i \eta_y) = u_i \eta_{y x_j} + u_j u_i \eta_{yy} + u_{ji} \eta_y$$

$$\begin{aligned}
(\bullet\bullet\bullet): \quad & D_j \left[\left((\xi_k)_{x_i} + u_i (\xi_k)_y \right) u_k \right] = \\
= \ & D_j [u_k (\xi_k)_{x_i}] + D_j [u_i u_k (\xi_k)_y] = \\
& u_k \left((\xi_k)_{x_i x_j} + u_j (\xi_k)_{x_i y} \right) + u_{kj} (\xi_k)_{x_i} + \\
& + u_i u_k (\xi_k)_{y x_j} + u_i u_k u_j (\xi_k)_{yy} + u_{kj} u_i (\xi_k)_y + u_{ij} u_k (\xi_k)_y \qquad k \in \underline{N}
\end{aligned}$$

Infine:

$$(D_j \xi_k) u_{ik} = \left[(\xi_k)_{x_j} + u_j (\xi_k)_y \right] u_{ik} \qquad \forall k \in \underline{N}$$

Ora, sostituendo questo risultato, $(\bullet)$,$(\bullet\bullet)$ e $(\bullet\bullet\bullet)$ nell'espressione iniziale di $\eta^{(2)}_{ij}$ otteniamo la relazione:

$$\begin{aligned}\eta^{(2)}_{ij} \quad = \quad & \eta_{x_i x_j} + u_j \eta_{x_i y} + u_i \eta_{y x_j} + u_j u_i \eta_{yy} + u_{ji}\eta_y - \\ & - \sum_{k=1}^{N} u_k \left[(\xi_k)_{x_i x_j} + u_j (\xi_k)_{x_i y} + u_i (\xi_k)_{y x_j} + u_i u_j (\xi_k)_{yy} + u_{ij} (\xi_k)_y \right] - \\ & - \sum_{k=1}^{N} u_{kj} [(\xi_k)_{x_i} + u_i (\xi_k)_y] - \sum_{k=1}^{N} u_{ik} [(\xi_k)_{x_j} + u_j (\xi_k)_y] \end{aligned}$$

$\square$

Osservazione. Poichè $\xi_1, \ldots, \xi_N, \eta$ sono funzioni analitiche su $\mathbb{R}^{N+1}$ e per il Teorema di Schwarz vale per ogni $(x, y) \in \Omega$:

$$\begin{aligned} &(\xi_k)_{x_i x_j}(x,y) = (\xi_k)_{x_j x_i}(x,y) && \forall i,j,k \in \underline{N} \\ &(\xi_k)_{x_i y}(x,y) = (\xi_k)_{y x_i}(x,y) && \forall i,k \in \underline{N} \\ &\eta_{x_i x_j}(x,y) = \eta_{x_j x_i}(x,y) && \forall i,j,k \in \underline{N} \\ &\eta_{x_i y}(x,y) = \eta_{y x_i}(x,y) && \forall i,k \in \underline{N} \end{aligned}$$

in particolare queste relazioni valgono se si considerano in punti della forma $(x, y) = (x, u(x))$, con $x \in A$ e $u \in C^2(A, J)$.

Le formule *(2.11)* così esplicitate permettono di riformulare il *teorema 2-4* nel modo seguente:

2-5 TEOREMA. Siano *(2.9)* e *(2.10)*, rispettivamente, le scritture in forma infinitesimale di T e della sua estensione canonica $T^{(2)}$. Vale allora la seguente rappresentazione esplicita, per ogni $i, j \in \underline{N}$:

$$\begin{aligned}\eta^{(1)}_i \quad = \quad & \eta_{x_i} + \mathbf{u_i}\left(\eta_y - (\xi_i)_{x_i}\right) - \sum_{k \in \underline{N}, k \neq i} \mathbf{u_k} (\xi_k)_{x_i} - \\ & - (\mathbf{u_i})^2 (\xi_i)_y - \sum_{k \in \underline{N}, k \neq i} \mathbf{u_i}\mathbf{u_k} (\xi_k)_y \end{aligned} \qquad (2.12)$$

$$
\begin{aligned}
\eta_{ij}^{(2)} \quad = \quad & \eta_{x_i x_j} + \mathbf{u_j}\left[\eta_{x_i y} - (\xi_j)_{x_i x_j}\right] + \mathbf{u_i}\left[\eta_{x_j y} - (\xi_i)_{x_i x_j}\right] - \\
& - \sum_{k\in \underline{N}, k\neq i,j} \mathbf{u_k}\left[(\xi_k)_{x_i x_j}\right] + \mathbf{u_{ij}}\left[\eta_y - (\xi_i)_{x_i} - (\xi_j)_{x_j}\right] - \\
& - \mathbf{u_{ii}}\left[(\xi_i)_{x_j}\right] - \mathbf{u_{jj}}\left[(\xi_j)_{x_i}\right] - \sum_{k\in \underline{N}, k\neq i,j} \mathbf{u_{kj}}\left[(\xi_k)_{x_i}\right] - \\
& - \sum_{k\in \underline{N}, k\neq i,j} \mathbf{u_{ik}}\left[(\xi_k)_{x_j}\right] + \mathbf{u_i u_j}\left[\eta_{yy} - (\xi_i)_{x_i y} - (\xi_j)_{x_j y}\right] - \\
& - \mathbf{u_i^2}\left[(\xi_i)_{x_j y}\right] - \mathbf{u_j^2}\left[(\xi_j)_{x_i y}\right] - \sum_{k\in \underline{N}, k\neq i,j} \mathbf{u_k u_j}\left[(\xi_k)_{x_i y}\right] - \\
& - \sum_{k\in \underline{N}, k\neq i,j} \mathbf{u_k u_i}\left[(\xi_k)_{x_j y}\right] - \mathbf{u_i u_{ij}}\left[2(\xi_i)_y\right] - \\
& - \mathbf{u_j u_{ij}}\left[2(\xi_j)_y\right] - \mathbf{u_i u_{jj}}\left[(\xi_j)_y\right] - \mathbf{u_j u_{ii}}\left[(\xi_i)_y\right] - \\
& - \sum_{k\in \underline{N}, k\neq i,j} \mathbf{u_k u_{ij}}\left[(\xi_k)_y\right] - \sum_{k\in \underline{N}, k\neq i,j} \mathbf{u_{kj} u_i}\left[(\xi_k)_y\right] - \\
& - \sum_{k\in \underline{N}, k\neq i,j} \mathbf{u_{ik} u_j}\left[(\xi_k)_y\right] - (\mathbf{u_i})^{\mathbf{2}}\mathbf{u_j}\left[(\xi_i)_{yy}\right] - \\
& - (\mathbf{u_j})^{\mathbf{2}}\mathbf{u_i}\left[(\xi_j)_{yy}\right] - \sum_{k\in \underline{N}, k\neq i,j} \mathbf{u_k u_i u_j}\left[(\xi_k)_{yy}\right]
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

Osservazione. Dal *teorema 2-5* segue, in particolare, che:

(i) $\eta_i^{(1)}$ e $\eta_{ij}^{(2)}$ sono funzioni polinomiali nelle variabili $(y^{(1)}, y^{(2)})$ per ogni $i, j \in \underline{N}$ e i loro coefficienti hanno dipendenza lineare da ξ, η e le loro derivate di ordine 1 e 2.

(ii) I coefficienti $\eta_{ij}^{(2)}$ sono simmetrici rispetto a i, j, vale a dire:

$$\eta_{ij}^{(2)} = \eta_{ji}^{(2)} \qquad \forall i, j \in \underline{N}$$

Le forme *(2.12)* e *(2.13)* sono valide per una qualunque famiglia T di trasformazioni, localmente un gruppo di Lie a un parametro. Supponendo ora poter tradurre la condizione di invarianza di *(2.5)* rispetto a T in una certa relazione tra le componenti della sua estensione e poichè $u, u^{(1)}, u^{(2)}$ sono coordinate indipendenti di un vettore di Ω', otterremmo dunque una relazione polinomiale, la quale deve verificarsi per ogni coefficiente e viene così tradotta in un **sistema di equazioni alle derivate parziali**.
D'altra parte, senza conoscere un risultato che ci permetta di semplificare *(2.12)* e *(2.13)*, il metodo descritto non risulta affatto efficiente; per questo motivo nella prossima sezione, oltre a formalizzare questo procedimento, ci restringeremo ad una classe molto particolare di operatori differenziali del secondo ordine, per la quale esisteranno ulteriori risultati che caratterizzano, semplificandone la rappresentazione, $\eta^{(1)}$ e $\eta^{(2)}$ nel caso in cui T sia invariante.

2.6 Soluzioni invarianti

In questa sezione ci occuperemo di studiare un caso finora non esplicitamente considerato; potrebbe succedere, infatti, che l'azione di T sulla soluzione $u \in C^2(A, J)$ di *(2.5)* lasci l'equazione invariante portando però u in se stessa. In tal caso T non ci consente di determinare una famiglia di soluzioni di *(2.5)* a partire da u ma verifica un'altra proprietà importante che è quella di **lasciare invariata la soluzione**.

2-E DEFINIZIONE. Diremo che la soluzione $u \in C^2(A, J)$ di *(2.5)* è invariante sotto l'azione di T se:

$$v_s(x) = \mathcal{T}_u(s)(x) = u(x) \qquad \forall s \in I'$$

2-6 TEOREMA. La soluzione $u \in C^2(A, J)$ è invariante sotto l'azione di T se e solo se:

$$\sum_{i=1}^{N} \xi_i(x, u(x))u_i(x) \; = \; \eta(x, u(x))$$

Dimostrazione. Per definizione e poichè $x \mapsto x^*$ è un diffeomorfismo u è invariante sotto l'azione di T se e solo se, per ogni $x \in A$:

$$u(x^*) = v_s(x^*) = U(x, u(x); s)$$

questa condizione è esattamente la condizione di invarianza della superficie M definita da:

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{N+1} \mid y = u(x)\}$$

rispetto a T, nel senso della *definizione 1-H*. Per il *teorema 1-7* allora, detto Z il generatore infinitesimale di T, u è invariante sotto l'azione di T se e solo se, per ogni $x \in A$:

$$y = u(x) \quad \Rightarrow \quad Z(y - u(x)) = 0$$

la dimostrazione si conclude osservando che:

$$Z(y - u(x)) = \eta(x, u(x)) - \sum_{i=1}^{N} \xi_i(x, u(x)) u_i(x)$$

$\square$

2.7 Invarianza per operatori lineari

Al fine di studiare l'invarianza di un operatore L lineare del secondo ordine (cfr. *Appendice - C*) ricorreremo ad un teorema che fornirà, come condizione caratterizzante delle trasformazioni che definiremo **invarianti**, una certa **relazione tra le singole componenti** dello stesso gruppo di trasformazioni. Tale relazione risulterà peculiare, come vedremo, di ciascun operatore, e ciò significa che ci consentirà non solo di stabilire se un gruppo di trasformazioni lascia o meno invariante L, ma anche di dedurre da essa un sistema di equazioni differenziali le cui soluzioni saranno **gruppi di trasformazioni invarianti** di L. La condizione di cui sopra andrà pertanto applicata ad un generico gruppo di trasformazioni, e in termini pratici, poichè la definizione di invarianza che forniremo non si baserà direttamente su di essi, ma sulle loro estensioni di ordine 2, tale condizione andrà applicata alle **estensioni scritte nella loro forma esplicita**.

In tutta la sezione assumeremo verificate le seguenti ipotesi:

- T sarà una famiglia di trasformazioni della forma *(2.1)* che è localmente un gruppo di trasformazioni su Ω ad un parametro in I.
- $T^{(2)}$ sarà l'estensione canonica di grado 2 di T, definita su Ω' e a parametro in I' come nella *sezione 2.3*.
- Z e $Z^{(2)}$ saranno, rispettivamente, i generatori infinitesimali di T e $T^{(2)}$

Ai fini di semplificare le notazioni per la classe di operatori che studieremo poniamo $n = N-1$ e consideriamo un generico vettore $w \in \mathbb{R}^N$ nel modo seguente:

$$x' = (x'_1, \ldots, x'_N) = (x_1, \ldots, x_n, t) = (x, t)$$

Supporremo poi lineare (cfr. *Appendice - C*) l'equazione *(2.5)*, e della forma:

$$\partial_t u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \partial_{ij} u + \sum_{i=1}^{n} b_i \partial_i u + cu \tag{2.14}$$

in questo caso f è dunque della forma:

$$f(x, t, y^{(1)}, y^{(2)}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) y_{ij} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t) y_i + c(x,t) y - y_{n+1}$$

porremo inoltre, per convenzione, $a_{NN} = 0$ e $b_N = 1$.

Per il *teorema 2-3* allora *(2.14)* è invariante sotto l'azione di T se e solo se, per ogni $x \in A$ e per ogni sua soluzione $u \in C^2(A,J)$, posto $z = (x, u(x), u^{(1)}(x), u^{(2)}(x))$:

$$\begin{aligned}\eta^{(1)}_{n+1}(x,t,u(x,t),u^{(1)}) &= \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i(x,t,u(x,t)) \cdot \partial_{x_i} f(z) + \eta(x,t,u(x,t)) \cdot c(x,t) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \eta^{(1)}_i(x,t,u(x,t),u^{(1)}(x,t)) \cdot b_i(x,t) + \sum_{i,j=1}^{n+1} \eta^{(2)}_{ij}(z) \cdot a_{ij}(x,t)\end{aligned} \tag{2.15}$$

Osservazione. Poichè f è polinomiale, per l'osservazione a p. 57 l'equazione *(2.15)* risulta:

- polinomiale nelle $u^{(1)}, u^{(2)}$ e in particolare lineare nelle $u^{(2)}$
- a coefficienti relativi lineari rispetto a ξ, η e alle loro derivate di ordine 1 e 2.

Per la precedente osservazione dunque, fissato $x \in A$ si ottiene un'equazione **polinomiale** nelle $u(x), u^{(1)}(x), u^{(2)}(x)$ per ogni soluzione $u \in C^2(A)$; operando poi la sostituzione:

$$u_t(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) u_{ij}(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t) u_i(x) + c(x,t) y(x) \tag{2.16}$$

l'equazione risultante, polinomiale nelle variabili scritte sopra esclusa u_t, deve verificarsi per ogni $u \in C^2(A)$, dunque otteniamo un'equazione polinomiale nelle variabili indipendenti $y, y^{(1)}, y$ che deve dunque verificarsi coefficiente per ogni coefficiente e determina dunque un **sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali lineari di ordine 2**, nelle incognite $\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}, \eta$.
Si noti però che procedendo in questo modo stiamo imponendo che

la condizione *(2.15)* si verifichi per ogni funzione $u \in C^2(A, J)$ che soddisfi *(2.14)* **almeno in un punto** ma non che sia necessariamente una sua soluzione; allora ogni soluzione $\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}, \eta$ del sistema sarà sempre un vettore di infinitesimali di una famiglia di trasformazioni sotto la cui azione *(2.14)* è invariante, ma in generale non ne determina ogni possibile scelta.
Possiamo formalizzare quanto visto finora nel modo seguente:

2-F DEFINIZIONE. Definiamo il sistema di equazioni differenziali lineari di ordine 2 determinato da *(2.15)* e da *(2.16)* **determinante** per *(2.14)* e le trasformazioni indotte dalle sue soluzioni **simmeterie** di *(2.14)*; più precisamente sono gli infinitesimali di tutte e sole le trasformazioni $T^{(2)}$ che lasciano invariante *(2.14)* come superficie.

2-7 TEOREMA. Le soluzioni del sistema determinante per le invarianze di *(2.14)* sono sempre infinitesimali di famiglie di trasformazioni su Ω, localmente gruppi di Lie ad un parametro in I tali che la loro azione lasci invariante *(2.14)*.

2-8 TEOREMA. Sia T una di *(2.14)*, supponiamo poi che:

- (i) la matrice $(a_{ij})_{i,j \in \underline{n}}$ non si annulli su A
- (ii) l'equazione *(2.14)* sia non degenere (cfr. *definizione A-C*)

allora, per ogni $u \in C^2(A, J)$ e per ogni $x' = (x, t) \in A$:

$$\begin{aligned} &\xi(x, t, u(x, t))_y = 0 \\ &\eta(x, t, u(x, t))_{yy} = 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

In particolare:

$$\begin{aligned} &\xi(x,t,y') = \xi(x,t,y), \qquad \forall (x,t)\in A,\ \forall y \in J \\ &\eta(x,t,y) = y\cdot f_1(x,t) + f_2(x,t) \end{aligned} \tag{2.18}$$

Dimostrazione. Poichè *(2.14)* è invariante sotto l'azione di T verifica:

$$\begin{aligned} & z\in\Omega',\ f(z)=0 \\ \Rightarrow \quad & Z^{(2)} f(z) = 0 \end{aligned}$$

poichè $Z^{(2)}f$ è lineare nelle $u^{(2)}(x)$ possiamo riscrivere la condizione di invarianza introducendo un moltiplicatore di Lagrange. In particolare per ogni $z=(x,u(x),u^{(1)}(x),u^{(2)}(x))$ esiste $\lambda=\lambda(x,u(x),u^{(1)}(x))$ tale che:

$$Z^{(2)} f(z) \ = \ \lambda(x',u(x'),u^{(1)}(x'))f(z) \tag{2.19}$$

Ora, fissata $u\in C^2(A,J)$, ricorrendo a *(2.11)*:

$$\begin{aligned} \eta_i^{(1)} &= \eta_{x_i} + \mathbf{u_i}\eta_y - \sum_{k\in\underline{N}} \mathbf{u_k}(\xi_k)_{x_i} - \sum_{k\in\underline{N}} \mathbf{u_i}\mathbf{u_k}(\xi_k)_y \\ \eta_{ij}^{(2)} &= (\eta_i^{(1)})_{x_j} + u_j(\eta_i^{(1)})_y + \sum_{k\in\underline{N}} \mathbf{u_{jk}}(\eta_i^{(1)})_{y_k} - \sum_{k\in\underline{N}} \mathbf{u_{ik}}\Big((\xi_k)_{x_j} + \mathbf{u_j}(\xi_k)_y\Big) \end{aligned}$$

Per quanto già visto, l'uguaglianza *(2.19)* può essere vista come polinomiale nei coefficienti $u^{(1)},u^{(2)}$, sostituendo le relazioni scritte sopra in *(2.15)* otteniamo, rispetto alla componente $\mathbf{u_{ij}}$:

$$(*) : \sum_{k\in\underline{N}} a_{jk}(\eta_k^{(1)})_{y_i} - \sum_{k\in\underline{N}} a_{ik}\Big((\xi_j)_{x_k} + u_k(\xi_j)_y\Big) + \sum_{k\in\underline{N}} \xi_k\partial_k a_{ij} = \lambda a_{ij} \qquad i,j\in\underline{N}$$

$$(**) : \sum_{i,j\in\underline{N}} a_{ij}\Big((\eta_i^{(1)})_{x_j} + u_j(\eta_i^{(1)})_y\Big) + b_i\eta_i^{(1)} + c\eta + u_i\xi_j\partial_j b_i + u\xi_j\partial_j c = \sum_{i\in\underline{N}} \lambda b_i u_i + \lambda c u$$

Ricaveremo ora alcune relazioni utilizzando separatamente le equazioni $(*)$ e $(**)$:

(I) Siano $(x_0, t_0) \in A$ fissati, per ipotesi esistono $i, j \in \underline{N}$ e un intorno V di (x_0, t_0) tali che:

$$a_{ij} \neq 0 \qquad \forall (x,t) \in V$$

per fissare le idee supponiamo che sia $i = j = 1$. Dividendo $(*)$ per a_{11} nel caso $i = j = 1$, poichè $\eta^{(1)}$ è polinomiale in $u^{(1)}(x)$, osserviamo che sull'aperto V la funzione λ ha dipendenza al più lineare da $u^{(1)}$. Scriviamo allora:

$$\lambda(x, u(x), u^{(1)}) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i(x', u(x')) \cdot u_i(x') + \lambda_0(x, u(x))$$

sostituendo questa scrittura in $(*)$ e considerando che l'equazione risultante deve verificarsi componente per componente, rispetto ai coefficienti $u_1(x), \ldots, u_N(x)$, otteniamo:

$$(\star) \;:\; a_{kj}(\xi_i)_y + a_{ij}(\xi_k)_y + a_{ik}(\xi_j)_y = -a_{ij}\lambda^k \qquad i, j, k \in \underline{N}$$
$$(\star\star) \;:\; a_{ij}\eta_y - \sum_{k \in \underline{N}} a_{jk}(\xi_i)_{x_k} - \sum_{k \in \underline{N}} a_{ik}(\xi_j)_{x_k} + \sum_{k \in \underline{N}} \xi_k \partial_k a_{ij} = \lambda_0 a_{ij} \qquad i, j \in \underline{N}$$

osserviamo che il membro a sinistra di $(\star)$ è invariante rispetto alle permutazioni degli indici i, j, k, come conseguenza otteniamo allora:

$$a_{ij}\lambda^k = a_{jk}\lambda^i \qquad \forall i, j, k \in \underline{N}$$

Supponiamo ora che il vettore $(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ non sia nullo in (x_0, t_0); non è restrittivo supporre che esiste $i \in \underline{N}$ tale che $\lambda_i(x', u(x')) \neq 0$ su V e per fissare le idee possiamo supporre $i = 1$. Poniamo allora, per ogni $i \in \underline{N}$, $q_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1}$, in tal modo:

$$a_{ij} = q^i a_{j1} = q^i q^j a_{11}$$

ora, su V, non è restrittivo supporre $a_{11} = \frac{1}{3}$, in quanto moltiplicando o dividendo *(2.14)* per una funzione non nulla si ottiene un'equazione equivalente (cfr. *sezione A-C*). Avremo dunque:

$$f(x', u(x'), u^{(1)}(x), u^{(2)}(x)) = \sum_{i,j=1}^{N} q^i q^j u_{ij}(x') + \ldots =$$

Per il *teorema A-7* poi possiamo trovare un diffeomorfismo Θ su V che trasformi il campo vettoriale di coefficienti $q_1, \ldots, q_k$ nel campo di coefficienti $(1, 0, \ldots, 0)$ rendendo dunque *(2.14)* equivalente ad un'equazione in cui $a_{11} = \frac{1}{3}$ e $a_{i,j} = 0$ per ogni $i \cdot j > 1$. In tal modo considerando $(\star)$ per questa nuova equazione, nel caso $j = k = 1$, otteniamo:

$$\begin{aligned} (\xi_1)_y &= -\lambda_1 && \text{se } i = 1 \\ (\xi_i)_y &= -\lambda_i = 0 && \text{se } i > 1 \end{aligned}$$

Infine da $(\star\star)$, per $i = 1$ e $j > 1$ otteniamo:

$$(\xi_j)_{x_1} = 0 \qquad \forall j \in \underline{N}$$

(II) Consideriamo ora l'equazione $(**)$ e anche in questo caso scriviamola per componenti:

$$(\bullet) \quad : (\xi_j)_{yy} = 0 \qquad j \in \underline{N}$$

$$(\bullet\bullet) \quad : a_{ij}\eta_{yy} - \sum_{k\in\underline{N}} a_{ik}(\xi_j)_{x_k y} - \sum_{k\in\underline{N}} a_{kj}(\xi_i)_{x_k y} - b_i(\xi_j)_y = \lambda_j b_i \qquad i,j \in \underline{N}$$

$$(\bullet\bullet\bullet) \quad : \sum_{j\in\underline{N}}^{N} 2a_{ij}\eta_{x_j y} - \sum_{j,k\in\underline{N}} a_{kj}(\xi_j)_{x_j x_k} - b_i\eta_u + \sum_{i,j\in\underline{N}} \xi_j \partial_j b_i - b_j(\xi_i)_{x_j}$$

$$= \lambda_0 b_i + \lambda_i c u \qquad i \in \underline{N}$$

$$(\bullet\bullet\bullet\bullet) : \sum_{i,j\in\underline{N}} a_{ij}\eta_{x_j x_i} + \sum_{i\in\underline{N}} b_i\eta_{x_i} + \sum_{j\in\underline{N}} \xi_j u \partial_j c + c\eta = \lambda_0 c u$$

Supponendo nuovamente che valgano le ipotesi fatte in *(I)* e utilizzando la seconda delle ultime relazioni ottenute in $(\bullet\bullet)$:

$$-b_i(\xi_1)_y = \lambda_1 b_i \qquad \forall i \in \{2,\ldots,N\}$$

Ricorrendo ora alla prima delle due relazioni trovate in *(I)* otteniamo infine:

$$\lambda_1 b_i = 0 \qquad \forall i \in \{2,\ldots,N\}$$

d'altra parte, poichè, per ipotesi $\lambda_1 \neq 0$, necessariamente:

$$b_i = 0 \qquad \forall i \in \{2,\ldots,N\}$$

L'equazione *(2.14)* è stata così ricondotta ad un'equazione equivalente della forma:

$$u_{11} + \bar{b}_1 + \bar{c}u = 0$$

dunque è degenere. Poichè per ipotesi abbiamo supposto *(2.14)* non degenere, necessariamente:

$$\lambda_i = 0 \qquad \forall i \in \underline{N}$$

allora da $(\star)$ segue $\xi_y = 0$ su V mentre $\eta_{yy} = 0$ su V segue applicando questo risultato in $(\bullet\bullet)$. La dimostrazione si conclude per l'arbitrarietà di (x_0, t_0) e della funzione $u \in C^2(A, J)$.

$\square$

2-9 COROLLARIO. Sia f lineare nelle $y^{(1)}, y^{(2)}$ e supponiamo che T sia una simmetria per l'equazione $f(z) = 0$, allora gli infinitesimali $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}$ della sua estensione canonica $T^{(2)}$ di grado 2 ammettono la seguente scrittura esplicita:

$$\eta_i^{(1)} = u f_{1x_i} + f_{2x_i} + \mathbf{u_i}\left(f_1 - (\xi_i)_{x_i}\right) - \sum_{k \in \underline{N}, k \neq i} \mathbf{u_k} (\xi_k)_{x_i} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}\eta_{ij}^{(2)} = {} & u f_{1x_ix_j} + f_{2x_ix_j} + \mathbf{u_j}\left[f_{1x_i} - (\xi_j)_{x_ix_j}\right] + \mathbf{u_i}\left[f_{1x_j} - (\xi_i)_{x_ix_j}\right] - \\ & - \sum_{k \in \underline{N}, k \neq i,j} \mathbf{u_k}\left[(\xi_k)_{x_ix_j}\right] + \mathbf{u_{ij}}\left[f_1 - (\xi_i)_{x_i} - (\xi_j)_{x_j}\right] - \\ & - \mathbf{u_{ii}}\left[(\xi_i)_{x_j}\right] - \mathbf{u_{jj}}\left[(\xi_j)_{x_i}\right] - \sum_{k \in \underline{N}, k \neq i,j} \mathbf{u_{kj}}\left[(\xi_k)_{x_i}\right] - \sum_{k \in \underline{N}, k \neq i,j} \mathbf{u_{ik}}\left[(\xi_k)_{x_j}\right]\end{aligned} \tag{2.21}$$

Dimostrazione. La formule seguono dalla sostituzione di *(2.18)* nelle *(2.12)* e *(2.13)*.

$\square$

Osservazione. Sia $v \in C^2(A, J)$ una soluzione di *(2.14)*, se T è della forma:

$$\begin{aligned} X_i(x', y; s) &= x'_i, & i &= 1, \ldots, N \\ U(x', y; s) &= c_1 y + s \cdot c_2 v(x'), & c_1, c_2 &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

allora T è chiaramente una simmetria di *(2.14)* in quanto:

$$\mathcal{T}_u(s) = c_1 u + s \cdot c_2 v = v_s$$

ed essendo l'equazione lineare:

$$f(x, u(x), u^{(1)}(x), u^{(2)}(x)) = 0 \Rightarrow f(x, v_s(x), u^{(1)}(x), u^{(2)}(x)) = 0$$

Sempre per la linearità di *(2.14)* l'ipotesi che v sia una soluzione è anche necessaria affinchè T risulti una simmetria.

Come conseguenza, ricorrendo a *(2.18)*, in ogni sistema determinante per un operatore L lineare e di ordine 2 dovrà comparire l'equazione:

$$f(x, f_2(x), \partial f_2(x), \partial^2 f_2(x)) = 0$$

e inoltre la funzione $f_1 = c_1$ dovrà essere ammissibile come soluzione, dal sistema determinante, per ogni $c_1 \in \mathbb{R}$.

Capitolo 3

Simmetrie degli operatori di Kolmogorov

In questo capitolo applicheremo i risultati della *sezione 2.8* per studiare le simmetrie delle seguenti equazioni lineari del secondo ordine:

$$
\begin{aligned}
(I) \quad &: u_t = \frac{1}{2}u_{11} + x_1 u_2, && x_1, x_2, t \in \mathbb{R} \\
(II) \quad &: u_t = \frac{1}{2}u_{11} + (x_1 - x_2) u_2, && x_1, x_2, t \in \mathbb{R} \\
(III) \quad &: u_t = \frac{1}{2}x_1^2 u_{11} + x_1 u_2, && x_1, x_2, t \in \mathbb{R},\ x_1, x_2 > 0
\end{aligned}
$$

dette **di Kolmogorov**.

Le equazioni scritte sopra hanno un notevole interesse in tutte le applicazioni che facciano impiego di modelli stocastici, quindi ad esempio la fisica e la finanza. Gli strumenti matematici che descrivono questi fenomeni sono i **processi stocastici** (l'Appendice di [6] contiene una trattazione basilare ma approfondita al riguardo) e classe di processi stocastici che interviene nelle applicazioni finanziarieè costituita dai **processi di Ito** (anche in questo caso rimandiamo a [6], cap. 4 e 5 per approfondimenti), importanti perchè definiti da uno strumento di calcolo detto **integrale di Ito**, per il quale esiste un risultato fondamentale, che consiste nella *formula di Ito*.

I processi di Ito danno luogo alla teoria del **calcolo differenziale stocastico** e riconducono il problema di descrivere un modello si riconduce al problema di determinare il processo definito da un' **equazione differenziale stocastica** (cfr. [6], cap. 6), cioè una relazione del tipo:

$$dX_t = \alpha(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t$$

con $\alpha(t, X_t) \in \mathbb{L}^1_{\text{loc}}$, $\sigma(t, X_t) \in \mathbb{L}^2_{\text{loc}}$. La classe più semplice ma anche più importante di equazioni differenziali stocastiche è costituita dalle equazioni della forma:

$$dX_t = (B(t)X_t + b(t))\,dt \;+\; \sigma(t)dW_t$$

dette **lineari**, ove b, B e σ sono matrici di funzioni in L^∞_{loc} di dimensioni, rispettivamente $Nx1$, NxN e Nxd. Per queste equazioni esiste un risultato di rappresentazione di X_t, fissata la condizione iniziale $X_0 = x$:

$$X_t = \Phi(t)\left(x + \int_0^t \Phi^{-1}(s)b(s)ds + \int_0^t \Phi^{-1}(s)\sigma(s)dW_s\right)$$

ove $\Phi\,]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\,:\longrightarrow M_N(\mathbb{R})$ è la soluzione del problema di Cauchy ordinario:

$$\begin{cases} \Phi'(t) = B(t)\Phi(t) \\ \Phi(t_0) = I_N \end{cases}$$

Legame con lo studio degli operatori differenziali

Nel caso in cui $\alpha, \sigma \in \mathbb{L}^{\infty}_{\text{loc}}$ valgono due risultati che ci permettono di collegare lo studio delle equazioni differenziali stocastiche allo studio degli operatori differenziali del secondo ordine:

(I) (Formula di Feynman-Kač)
Ricorrendo a questa formula possiamo associare ad ogni equazione differenziale stocastica un operatore differenziale $\mathscr{A}_t$ tale che per ogni soluzione $u \in C^2(\mathbb{R}^{N+1})$ di:

$$\begin{cases} \mathscr{A}_t u + u_t = 0 \\ u(\cdot, T) = 0 \end{cases}$$

e che soddisfi certe condizioni di limitatezza, valga:

$$u(t,x) \;=\; E\left[\phi\left(X_T^{t,x}\right)\right]$$

Più precisamente:

$$\mathscr{A}_t u(x) \;=\; \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} c_{ij}(x,t)u_{ij}(x) + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(x,t)u_j(x)$$

ove $(c_{ij})_{i,j\in\underline{N}} = \sigma\sigma^*$. L'operatore $\mathscr{A}_t$ è detto l'**operatore caratteristico** dell'equazione differenziale stocastica.

(II) Nel caso in cui $\alpha(t,X_t) = \alpha(t)$ e $\sigma(t,X_t) = \sigma(t)$ si dimostra che X_t ha distribuzione multinormale e nel caso lineare tale essa è completamente caratterizzata dalla sua media e dalla sua matrice di covarianza, che ammette una rappresentazione esplicita:

$$\begin{aligned} m_x(t) \;&=\; E[X_t] \;=\; \phi(t)\left(x + \int_0^t \phi^{-1}(s)b(s)ds\right) \\ \mathscr{C}(t) \;&=\; \mathrm{cov}(X_t) \;=\; \phi(t)\left(\int_0^t \phi^{-1}(s)\sigma(s)(\phi^{-1}(s)\sigma(s))^*ds\right)\phi^*(t) \end{aligned}$$

Caso particolare: coefficienti costanti

Nel caso particolare di equazioni differenziali stocastiche in cui i coefficienti b, B, σ siano costanti abbiamo:

$$\phi(t) = e^{tB} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tB)^n}{n!}$$

si noti che la serie scritta sopra è assolutamente convergente in quanto:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|t|^n ||B||^n}{n!} = e^{|t|||B||}$$

Inoltre abbiamo:

- $\left(e^{tB}\right)^* = e^{tB^*}$
- $e^{tB} e^{t'B} = e^{(t+t')B}$

In particolare la matrice e^{tB} è sempre non degenere e vale:

$$\left(e^{tB}\right)^{-1} = e^{-tB}$$

Pertanto avremo:

$$m_x(t) = e^{tB} x + \int_0^t b e^{sB} ds$$
$$\mathscr{C}(t) = \int_0^t (e^{sB}\sigma)(e^{sB}\sigma)^* ds$$

Le equazioni differenziali stocastiche associate alle equazioni (I), (II) costituiscono, a meno di equivalenze (cfr. Appendice-C), degli esempi di equazioni lineari a coefficienti costanti.

(I) Innanzitutto l'equazione (I) è equivalente all'equazione:

$$\frac{1}{2}u_{11} + x_1 u_2 + u_t = 0$$

nel senso della *definizione A-B*. Consideriamo poi l'equazione differenziale stocastica:

$$\begin{cases} dX_t^1 = dW_t \\ dX_t^2 = X_t^1 dt \end{cases}$$

Poichè abbiamo:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b = 0$$

il suo operatore caratteristico è:

$$\mathscr{A}_t = \frac{1}{2}\partial_{x_1 x_1} + x_1 \partial_{x_2}$$

(II) Analogamente al caso precedente l'equazione (II) è equivalente all'equazione:

$$\frac{1}{2}u_{11} + (x_1 - x_2)u_2 + u_t = 0$$

nel senso della *definizione A-B*. Consideriamo poi l'equazione differenziale stocastica:

$$\begin{cases} dX_t^1 = dW_t \\ dX_t^2 = (X_t^1 - X_t^2)dt \end{cases}$$

Poichè abbiamo:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b = 0$$

il suo operatore caratteristico è:

$$\mathscr{A}_t = \frac{1}{2}\partial_{x_1 x_1} + (x_1 - x_2)\partial_{x_2}$$

(III) L'equazione (iiI) è equivalente all'equazione:

$$\frac{1}{2}x^2 u_{11} + x_1 u_2 + u_t = 0$$

nel senso della *definizione A-B*. Consideriamo poi l'equazione differenziale stocastica:

$$\begin{cases} X_t^1 = e^{W_t} - \frac{1}{2}X_t^2 \\ dX_t^2 = X_t^1 dt \end{cases}$$

Abbiamo in questo caso un'equazione riconducibile, mediante la formula di Ito, a:

$$\begin{cases} dX_t^1 = X_t^1 dW_t \\ dX_t^2 = X_t^1 dt \end{cases}$$

in questo caso abbiamo dunque:

$$\alpha(t, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad \sigma(x_1, x_2, t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

il suo operatore caratteristico è:

$$\mathscr{A}_t = \frac{1}{2}x_1^2\partial_{x_1x_1} + x_1\partial_{x_2}$$

Studio delle simmetrie di (I)**,** (II) **e** (III)

In accordo con le convenzioni della sezione precedente denoteremo:

$$t \;=\; x_3, \quad x = (x_1, x_2)$$

Con queste notazioni, ricordando inoltre che vale *(2.18)*, la generica simmetria T sarà della forma:

$$\begin{cases} X_1(x,t,y;s) = X_1(x,t;s) \;=\; x_1 + s\cdot\xi_1(x,t) + \mathscr{O}(s^2) \\ X_2(x,t,y;s) = X_2(x,t;s) \;=\; x_2 + s\cdot\xi_2(x,t) + \mathscr{O}(s^2) \\ X_3(x,t,y;s) = X_3(x,t;s) \;=\; t + s\cdot\xi_3(x,t) + \mathscr{O}(s^2) \\ U(x,t,y;s) \;=\; y + s\cdot\eta(x,t,y) + \mathscr{O}(s^2) \end{cases}$$

3.1 Equazione di Kolmogorov (I)

Ci proponiamo, in questa sezione, di determinare tutte e sole le simmetrie dell'equazione:

$$(I): \quad u_t = \frac{1}{2}u_{11} + x_1u_2, \quad (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^3$$

che rappresenta il prototipo più classico dell'**equazione di Kolmogorov** (in $\mathbb{R}^3$).

L'equazione (I) è ovviamente della forma *(2.14)* con:

$$f(x,t,y^{(1)},y^{(2)}) = \frac{1}{2}u_{11} + x_1 u_2 - u_t$$

Imponiamo dunque che la generica trasformazione T verifichi la condizione di invarianza *(2.15)*, avremo allora:

$$(\star): \quad \eta_3^{(1)} = \xi_1 u_2 + x_1 \eta_2^{(1)} + \frac{1}{2}\eta_{11}^{(2)}$$

Ora, dalle *(2.20)* e *(2.21)* otteniamo:

$$\begin{aligned}
\eta_3^{(1)} &= u f_{1t} + f_{2t} + u_t\left(f_1 - (\xi_3)_t\right) - u_1(\xi_1)_t - u_2(\xi_2)_t \\
\eta_2^{(1)} &= u f_{1x_2} + f_{2x_2} + u_2\left(f_1 - (\xi_2)_{x_2}\right) - u_1(\xi_1)_{x_2} - u_t(\xi_3)_{x_2} \\
\eta_{11}^{(2)} &= u f_{1x_1x_1} + f_{2x_1x_1} + u_1\left(2f_{1x_1} - (\xi_1)_{x_1x_1}\right) - u_2(\xi_2)_{x_1x_1} - u_t(\xi_3)_{x_1x_1} + \\
&+ u_{11}\left(f_1 - 2(\xi_1)_{x_1}\right) - 2u_{12}(\xi_2)_{x_1} - 2u_{1t}(\xi_3)_{x_1}
\end{aligned}$$

Dunque sostituendo tali espressioni in $(\star)$ e operando la sostituzione $u_t = \frac{1}{2}u_{11} + x_1 u_2$ otteniamo:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}f_{2x_1x_1} + x_1 f_{2x_2} - f_{2t} + \left(\frac{1}{2}f_{1x_1x_1} + x_1 f_{1x_2} - f_{1x_2}\right)u + \\
&+ \left(f_{1x_1} - \frac{1}{2}(\xi_1)_{x_1x_1} - x_1(\xi_1)_{x_2} + (\xi_1)_t\right)u_1 + \\
&+ \left(-\frac{1}{2}(\xi_2)_{x_1x_1} + x_1 f_1 - x_1(\xi_2)_{x_2} + (\xi_2)_t + \xi_1\right)u_2 + \\
&+ \left(-\frac{1}{2}(\xi_3)_{x_1x_1} - x_1(\xi_3)_{x_2} - f_1 + (\xi_3)_t\right)(\frac{1}{2}u_{11} + x_1 u_2) + \\
&+ \left(\frac{1}{2}f_1 - (\xi_1)_{x_1}\right)u_{11} - \\
&- (\xi_2)_{x_1}u_{12} - \\
&- (\xi_3)_{x_1}u_{1t} = 0
\end{aligned}$$

E dunque il sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{aligned}
(1): &\quad f_{2\,t} = \frac{1}{2} f_{2\,x_1 x_1} + x_1 f_{2\,x_2} \\
(2): &\quad f_{1\,t} = \frac{1}{2} f_{1\,x_1 x_1} + x_1 f_{1\,x_2} \\
(3): &\quad (\xi_1)_t = \frac{1}{2}(\xi_1)_{x_1 x_1} + x_1(\xi_1)_{x_2} - f_{1\,x_1} \\
(4): &\quad (\xi_2)_t = \frac{1}{2}(\xi_2)_{x_1 x_1} + x_1(\xi_2)_{x_2} + \frac{1}{2} x_1 (\xi_3)_{x_1 x_1} + x_1^2 (\xi_3)_{x_2} - x_1(\xi_3)_t - \xi_1 \\
(5): &\quad (\xi_3)_t = \frac{1}{2}(\xi_3)_{x_1 x_1} + x_1(\xi_3)_{x_2} + 2(\xi_1)_{x_1} \\
(6): &\quad (\xi_2)_{x_1} = 0 \\
(7): &\quad (\xi_3)_{x_1} = 0
\end{aligned}$$

La soluzione generale del sistema (cfr. *Appendice - D*), escludendo per il momento l'equazione (1), sarà della forma:

$$\begin{aligned}
\xi_1(x_1, x_2, t) &= k_5 + k_4 t + k_3 t^2 + k_2 x_1 + k_1 t x_1 - 3k_1 x_2 \\
\xi_2(x_1, x_2, t) &= k_8 - k_5 t - \frac{1}{2}(k_4 t^2) - \frac{1}{3}(k_3 t^3) + 3(k_2 + k_1 t) x_2 \\
\xi_3(x_1, x_2, t) &= k_7 + 2k_2 t + k_1 t^2 \\
f_1(x_1, x_2, t) &= k_6 - 2k_1 t - k_4 x1 - 2k_3 t x_1 - 2k_1 x_1^2 - 2k_3 x_2
\end{aligned}$$

Per l'equazione (1) è ammessa ogni funzione $f_2 \in C^2(A, J)$ che sia soluzione dell'equazione di partenza, in particolare è ammessa $f_2 = 0$. Ricordiamo poi:

$$\eta(x_1, x_2, t, y) = y f_1(x_1, x_2, t) + f_2(x_1, x_2, t)$$

La famiglia di trasformazioni ad un parametro T, associata a $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta)$, che dipenderà anche dai parametri $k_1, \ldots, k_8$, sarà determinata dalle curve integrali del campo vettoriale di coefficienti ξ, η.

Dunque T è determinata, al variare di x_1, x_2, t, y, dalla soluzione del sistema:

$$\begin{cases} T(x_1, x_2, t, y; s) = T(x', y; s) = \gamma_{x',y}(s) \\ \gamma'_{x',y}(s) = \xi(\gamma_{x',y}(s)) \\ \gamma_{x',y}(0) = x \end{cases}$$

Più precisamente, fissati $x_1, x_2, t, y \in \mathbb{R}$ e posto:

$$\begin{aligned} p(s) &= X_1(x_1, x_2, t, y; s) \\ q(s) &= X_2(x_1, x_2, t, y; s) \\ r(s) &= X_3(x_1, x_2, t, y; s) \\ z(s) &= U(x_1, x_2, t, y; s) \end{aligned}$$

Le simmetrie per l'equazione (I) saranno le soluzioni del sistema seguente:

$$\begin{cases} p' = k_5 + k_2 p - 3k_1 q + k_4 r + k_1 p r + k_3 r^2 \\ q' = k_8 - k_5 r - \frac{1}{2} k_4 r^2 - \frac{1}{3} k_3 r^3 + 3q(k_2 + k_1 r) \\ r' = k_7 + 2k_2 r + k_1 r^2 \\ z' = (k_6 - k_4 p - 2k_1 p^2 - 2k_3 q - 2k_1 r - 2k_3 p r) z \\ p(0) = x_1, \ q(0) = x_2, \ r(0) = t, \ z(0) = y \end{cases}$$

Caso particolare: trasformazioni che agiscono solo sul dominio

A conclusione di questa sezione ci proponiamo di trovare tutte le simmetrie dell'equazione di Kolmogorov che agiscono solo sul dominio, ovvero tutte le simmetrie tali che:

$$U(x_1, x_2, t, y; s) = y, \quad \forall (x, t, y) \in \mathbb{R}^4, \ \forall s \in \mathbb{R}$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè ciò si verifichi è:

$$\begin{cases} k_1 = k_3 = k_4 = k_6 = 0 \\ f_2 \equiv 0 \end{cases}$$

in tal caso gli infinitesimali saranno della forma:

$$\begin{aligned}
\xi_1(x_1, x_2, t) &= k_5 + k_2 x_1 \\
\xi_2(x_1, x_2, t) &= k_8 - k_5 t + 3k_2 x_2 \\
\xi_3(x_1, x_2, t) &= k_7 + 2k_2 t \\
f_1(x_1, x_2, t) &= 0
\end{aligned}$$

- Caso $k_2 \neq 0$

Poniamo $k_2 = \rho, k_5 = \omega_1, k_8 = \omega_2, k_7 = \tau$ e $w = (x_1, x_2, t, y)$, otteniamo allora:

$$\begin{aligned}
X_1(w; s) &= e^{s\rho} x_1 + \frac{1}{\rho}(e^{s\rho}\omega_1 - \omega_1) \\
X_2(w; s) &= e^{3s\rho} x_2 + \frac{1}{6\rho^2}\left(-\tau\omega_1 + 3e^{2s\rho}(2t\rho + \tau)\omega_1 - 2\rho\omega_2 + 2e^{3s\rho}(\rho\omega_2 - 3t\rho\omega_1 - \tau\omega_1)\right) \\
X_3(w; s) &= e^{2s\rho} t + \frac{1}{2\rho}(e^{2s\rho}\tau - \tau)
\end{aligned}$$

Esempio. Nel caso precedente ponendo $\rho = 1$ e $\omega_1 = \omega_2 = \tau = 0$ otteniamo:

$$\begin{aligned}
\xi_1(x_1, x_2, t) &= x_1 \\
\xi_2(x_1, x_2, t) &= 3x_2 \\
\xi_3(x_1, x_2, t) &= 2t \\
\eta(x_1, x_2, t, y) &= 0
\end{aligned}$$

La famiglia di trasformazioni T sarà della forma $T(x, t, y; s) = (X(x, t; s), y)$

ove, come riportato in *Appendice-A*, X corrisponde al gruppo di dilatazioni:

$$\begin{aligned} X_1(x_1,x_2,t,y;s) &= e^s x_1 = X_1(x_1,x_2,t;s) \\ X_2(x_1,x_2,t,y;s) &= e^{3s} x_2 = X_2(x_1,x_2,t;s) \\ X_3(x_1,x_2,t,y;s) &= e^{2s} t = X_3(x_1,x_2,t;s) \end{aligned}$$

In particolare, se $u \in C^2(A)$ è una soluzione dell'equazione di Kolmogorov ogni funzione del tipo:

$$w_\lambda(x_1,x_2,t) = u(\lambda x_1, \lambda^3 x_2, \lambda^2 t) = u \circ X(\cdot\,; \mathrm{Log}(\lambda))(x_1,x_2,t)$$

è ancora una soluzione.

- Caso $k_2 \neq 0$

E. Lanconelli e S. Polidoro introducono in [5] la nozione di *gruppo di tipo Kolmogorov* o *K-gruppo*, una particolare sottofamiglia di gruppi di Lie omogenei, dal cui studio è possibile ottenere, tra le altre informazioni:

(i) l'invarianza dell'equazione di Kolmogorov sotto l'azione della famiglia di dilatazioni dell'esempio precedente

(ii) per ogni $\alpha_1, \alpha_2, \tau \in \mathbb{R}$ l'invarianza dell'equazione di Kolmogorov sotto l'azione della famiglia di trasformazioni $K = (\zeta_{\omega_1,\omega_2,\tau}(x,t), y)$, con:

$$\zeta_{\tau,\omega}(x_1,x_2,t) = (x_1+\omega_1, x_2+\omega_2 - t\omega_1, t+\tau)$$

in tale contesto vengono considerate solo le trasformazioni applicate al dominio di u, ovvero implicitamente si considerano trasformazioni in cui $X(x_1,x_2,t,y;s) = X(x_1,x_2,t;s)$ e $U(x_1,x_2,t,y;s) = y$. Come già visto, essendo (I) lineare del secondo ordine, la prima condizione è sempre verificata. D'altra parte, ponendo $k_5 = \omega_1, k_8 = \omega_2, k_7 = \tau$ e $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_6 = 0$ otteniamo il sistema:

$$\begin{aligned}
\xi_1(x_1, x_2, t) &= \omega_1 \\
\xi_2(x_1, x_2, t) &= \omega_2 - \omega_1 t \\
\xi_3(x_1, x_2, t) &= \tau + 2k_2 t \\
f_1(x_1, x_2, t) &= 0
\end{aligned}$$

Da cui:

$$T(x_1, x_2, t, y; s) = (X_1(x_1, x_2, t; s), X_2(x_1, x_2, t; s), X_3(x_1, x_2, t; s), y)$$

Con:

$$\begin{aligned}
X_1(x_1, x_2, t, y; s) &= x_1 + s\omega_1 = X_1(x_1, x_2, t; s) \\
X_2(x_1, x_2, t, y; s) &= x_2 + s\omega_2 - st\omega_1 - \frac{1}{2}s^2\tau\omega_1 = X_2(x_1, x_2, t; s) \\
X_3(x_1, x_2, t, y; s) &= t + s\tau = X_3(x_1, x_2, t; s)
\end{aligned}$$

La famiglia di trasformazioni così ottenuta, ha una notevole somiglianza, per $s = 1$, con la trasformazione $\zeta_{\tau,\omega}$, ed effettivamente differiscono solo per il termine $-\frac{1}{2}\tau\omega_1$ della seconda componente. In realtà la trasformazione $\zeta_{\tau,\omega}$, apparentemente non ottenibile con il metodo visto finora, può essere recuperata ponendo $k_8 = \frac{1}{2}\omega_1\tau + \omega_2$ anzichè $k_8 = \omega_2$; in questo caso otteniamo:

$$X_2(x_1, x_2, t, y; s) = x_2 - s(t\omega_1 + \frac{1}{2}(s-1)\tau\omega_1 - \omega_2)$$

e, per $s = 1$:

$$X_2(x_1, x_2, t, y; 1) = x_2 - t\omega_1 + \omega_2$$

Il gruppo di trasformazioni definito sopra può essere ricavato anche come composizione della simmetria T definita inizialmente con la simmetria T' definita come soluzione del sistema:

$$\begin{aligned}
\xi_1(x_1, x_2, t) &= 0 \\
\xi_2(x_1, x_2, t) &= \omega_2 \\
\xi_3(x_1, x_2, t) &= 0 \\
f_1(x_1, x_2, t) &= 0
\end{aligned}$$

che si ottiene ponendo $k_2 = \frac{1}{2}\tau\omega_1$ e $k_i = 0$ per $i \neq 2$.
In tal caso infatti:

$$T'(x_1, x_2, t, y; s) = (x_1, x_2 + \frac{1}{2}s\tau\omega_1, t, y)$$

da cui:

$$T(T'(x_1, x_2, t, y; s); s) = (x_1 + s\omega_1, x_2 - s(t\omega_1 + \frac{1}{2}(s-1)\tau\omega_1 - \omega_2), t + s\tau, y)$$

Osservazione. Se T e T' sono localmente gruppi di Lie di trasformazioni ad un parametro, una condizione sufficiente affinchè la famiglia:

$$K(x_1, x_2, t, y; s) = T(T'(x_1, x_2, t, y; s); s)$$

sia ancora localmente un gruppo di Lie ad un parametro è la seguente:

$$T(T'(x_1, x_2, t, y; s); s) = T'(T(x_1, x_2, t, y; s); s) \qquad \forall x_1, x_2, t, y, s \in \mathbb{R}$$

3.2 Equazione di Kolmogorov (II)

Ci proponiamo, in questa sezione, di determinare tutte e sole le simmetrie dell'equazione:

$$(II): \quad u_t = \frac{1}{2}u_{11} + (x_1 - x_2)u_2, \quad (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^3$$

In questo caso abbiamo:

$$f(x, t, y^{(1)}, y^{(2)}) = \frac{1}{2}u_{11} + (x_1 - x_2)u_2 - u_t$$

Imponendo, come nella sezione precedente, che la generica trasformazione T verifichi la condizione di invarianza *(2.15)*, avremo:

$$(\star): \quad \eta_3^{(1)} = (\xi_1 - \xi_2)u_2 + (x_1 - x_2)\eta_2^{(1)} + \frac{1}{2}\eta_{11}^{(2)}$$

Ricorrendo poi, in maniera del tutto analoga al caso precedente, alle *(2.20)* e *(2.21)*, sostituendo tali espressioni in $(\star)$ e operando la sostituzione $u_t = \frac{1}{2}u_{11} + (x_1 - x_2)u_2$ otteniamo:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}f_{2\,x_1x_1} + (x_1 - x_2)f_{2\,x_2} - f_{2\,t} + \\
&+\left(\frac{1}{2}f_{1\,x_1x_1} + (x_1 - x_2)f_{1\,x_2} - f_{1\,x_2}\right)u + \\
&+\left(f_{1\,x_1} - \frac{1}{2}(\xi_1)_{x_1x_1} - (x_1 - x_2)(\xi_1)_{x_2} + (\xi_1)_t\right)u_1 + \\
&+\left(-\frac{1}{2}(\xi_2)_{x_1x_1} + (x_1 - x_2)f_1 - x_1(\xi_2)_{x_2} + (\xi_2)_t + \xi_1 - \xi_2\right)u_2 + \\
&+\left(-\frac{1}{2}(\xi_3)_{x_1x_1} - (x_1 - x_2)(\xi_3)_{x_2} - f_1 + (\xi_3)_t\right)(\frac{1}{2}u_{11} + (x_1 - x_2)u_2) + \\
&+\left(\frac{1}{2}f_1 - (\xi_1)_{x_1}\right)u_{11} - (\xi_2)_{x_1}u_{12} - (\xi_3)_{x_1}u_{1t} = 0
\end{aligned}$$

E dunque il sistema di equazioni differenziali:

$$
\begin{aligned}
(1):\quad & {f_2}_t = \frac{1}{2}{f_2}_{x_1x_1} + (x_1-x_2){f_2}_{x_2}\\
(2):\quad & {f_1}_t = \frac{1}{2}{f_1}_{x_1x_1} + (x_1-x_2){f_1}_{x_2}\\
(3):\quad & (\xi_1)_t = \frac{1}{2}(\xi_1)_{x_1x_1} + (x_1-x_2)(\xi_1)_{x_2} - {f_1}_{x_1}\\
(4):\quad & (\xi_2)_t = \frac{1}{2}(\xi_2)_{x_1x_1} + (x_1-x_2)\left((\xi_2)_{x_2} + \frac{1}{2}(\xi_3)_{x_1x_1} + (x_1-x_2)(\xi_3)_{x_2} - (\xi_3)_t\right) + \xi_2 - \xi_1\\
(5):\quad & (\xi_3)_t = \frac{1}{2}(\xi_3)_{x_1x_1} + (x_1-x_2)(\xi_3)_{x_2} + 2(\xi_1)_{x_1}\\
(6):\quad & (\xi_2)_{x_1} = 0\\
(7):\quad & (\xi_3)_{x_1} = 0
\end{aligned}
$$

La soluzione generale del sistema (cfr. *Appendice - E*), escludendo anche in questo caso l'equazione (1), sarà della forma:

$$
\begin{aligned}
\xi_1(x_1,x_2,t) &= e^{-t}(e^t-1)k_1 + k_2\\
\xi_2(x_1,x_2,t) &= -\frac{1}{2}e^{-t}(e^t-1)^2k_1 + k_2 - e^tk_2 + e^tk_5\\
\xi_3(x_1,x_2,t) &= k_4\\
f_1(x_1,x_2,t) &= e^{-t}(e^tk_3 + k_1(x_2-x_1))
\end{aligned}
$$

Anche in questo caso, per l'equazione (1), è ammessa ogni funzione $f_2 \in C^2(A,J)$ che sia soluzione dell'equazione di partenza e in particolare è ammessa $f_2 = 0$.
Fissati poi $x_1, x_2, t, y \in \mathbb{R}$ e posto, come nel caso precedente:

$$
\begin{aligned}
p(s) &= X_1(x_1,x_2,t,y;s)\\
q(s) &= X_2(x_1,x_2,t,y;s)\\
r(s) &= X_3(x_1,x_2,t,y;s)\\
z(s) &= U(x_1,x_2,t,y;s)
\end{aligned}
$$

con $T=(X_1,X_2,X_3,U)$, le simmetrie per l'equazione (II) saranno le soluzioni del sistema seguente:

$$\begin{cases} p' = e^{-r}(e^r-1)k_1+k_2 \\ q' = -\dfrac{1}{2}e^{-r}(e^r-1)^2k_1+k_2-e^rk_2+e^rk_5 \\ r' = k_4 \\ z' = k_3z+e^{-r}(k_1(q-p))z \\ p(0)=x_1,\ q(0)=x_2,\ r(0)=t,\ z(0)=y \end{cases}$$

Caso particolare: trasformazioni che agiscono solo sul dominio

Come già visto in precedenza per trasformazioni che agiscono solo sul dominio intendiamo le simmetrie tali che $f_1\equiv 0$; in questo caso condizione necessaria e sufficiente affinchè ciò si verifichi è:

$$k_1=k_3=0$$

In tal caso il sistema diventa:

$$\begin{cases} p' = k_2 \\ q' = k_2-e^rk_2+e^rk_5 \\ r' = k_4 \\ z' = 0 \\ p(0)=x_1,\ q(0)=x_2,\ r(0)=t,\ z(0)=y \end{cases}$$

Per risolverlo dobbiamo distinguere i due casi $k_4=0$ e $k_4\neq 0$.

- Caso $k_4 = 0$

$$\begin{aligned}
X_1(x_1, x_2, t, y; s) &= k_2 s + x_1 \\
X_2(x_1, x_2, t, y; s) &= (1 - e^t) k_2 s + e^t k_5 s + x_2 \\
X_3(x_1, x_2, t, y; s) &= t \\
U(x_1, x_2, t, y; s) &= y
\end{aligned}$$

- Caso $k_4 \neq 0$

$$\begin{aligned}
X_1(x_1, x_2, t, y; s) &= k_2 s + x_1 \\
X_2(x_1, x_2, t, y; s) &= \frac{e^{k_4 s + t}(k_5 - k_2)}{2k_4} + k_2 s + x_2 \\
X_3(x_1, x_2, t, y; s) &= k_4 s + t \\
U(x_1, x_2, t, y; s) &= y
\end{aligned}$$

In particolare, ponendo $k_2 = \omega_1, k_5 = \omega_2, k_4 = \tau, s = 1$ otteniamo che l'equazione di Kolmogorov (II) è invariante sotto l'azione della famiglia di trasformazioni $K = (\zeta_{\omega_1,\omega_2,\tau}(x,t), y)$, con:

$$\zeta_{\omega_1,\omega_2,\tau}(x_1, x_2, t) = \begin{cases} \left(x_1 + \omega_1, x_2 + (1 - e^t)\omega_1 + e^t \omega_2, t\right) & \text{se } \tau = 0 \\ \left(x_1 + \omega_1, x_2 + \omega_1 + \dfrac{e^{t+\tau}(\omega_2 - \omega_1)}{\tau}, t + \tau\right) & \text{se } \tau \neq 0 \end{cases}$$

In questo caso, inoltre, la famiglia $\zeta_{\omega_1,\omega_2,\tau}$ verifica una particolare condizione, più forte della proprietà di portare soluzioni in soluzioni, che è la seguente:

$$L(u \circ \zeta_{\omega_1,\omega_2,\tau})(x_1, x_2, t) = Lu(\zeta_{\omega_1,\omega_2,\tau}(x_1, x_2, t))$$

Ove:

$$Lv(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2} v_{11}(x_1, x_2, t) + (x_1 - x_2) v_2(x_1, x_2, t) - v_t(x_1, x_2, t)$$

3.3 Equazione di Kolmogorov (III)

In questa sezione prendiamo in considerazione la seguente equazione:

$$(III): \quad u_t = \frac{1}{2}x_1^2 u_{11} + x_1 u_2, \qquad x_1, x_2, t \in \mathbb{R},\ x_1, x_2 > 0$$

che viene preferita ad (I), nelle applicazioni alla finanza, in quanto associata ad un modello stocastico che descrive l'andamento del prezzo di un titolo supponendo anche che quest'ultimo non assuma mai valori negativi, e risultando dunque più realistico. In [7] viene mostrata la stretta analogia che intercorre, dal punto di vista analitico, tra (I) e (III). Sebbene le due equazioni siano analiticamente così simili la loro struttura in termini di simmetrie, come vedremo, differisce completamente. Innanzitutto in questo caso abbiamo:

$$f(x, t, y^{(1)}, y^{(2)}) = \frac{1}{2}x_1^2 u_{11} + x_1 u_2 - u_t$$

Imponendo che la generica trasformazione T verifichi la condizione di invarianza *(2.15)*, avremo allora:

$$(\star): \quad \eta_3^{(1)} \ = \ (x_1 u_{11} + u_2)\xi_1 + x_1 \eta_2^{(1)} + \frac{1}{2}x_1^2 \eta_{11}^{(2)}$$

Come nei casi precedenti, ricorriamo alle *(2.20)* e *(2.21)*, sostituiamo tali espressioni in $(\star)$ e operiamo la sostituzione $u_t = \frac{1}{2}x_1^2 u_{11} + x_1 u_2$.

Otteniamo allora:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}x_1^2 f_{2\,x_1x_1} + x_1 f_{2\,x_2} - f_{2\,t} + \left(\frac{1}{2}x_1^2 f_{1\,x_1x_1} + x_1 f_{1\,x_2} - f_{1\,x_2}\right)u+\\
&+\left(x_1^2 f_{1\,x_1} - \frac{1}{2}x_1^2(\xi_1)_{x_1x_1} - x_1(\xi_1)_{x_2} + (\xi_1)_t\right)u_1+\\
&+\left(-\frac{1}{2}x_1^2(\xi_2)_{x_1x_1} + x_1 f_1 - x_1(\xi_2)_{x_2} + (\xi_2)_t + \xi_1\right)u_2+\\
&+\left(-\frac{1}{2}x_1^2(\xi_3)_{x_1x_1} - x_1(\xi_3)_{x_2} - f_1 + (\xi_3)_t\right)(\frac{1}{2}x_1^2 u_{11} + x_1 u_2)+\\
&+\left(\frac{1}{2}x_1^2 f_1 - x_1^2(\xi_1)_{x_1} + x_1\xi_1\right)u_{11}-\\
&- x_1^2(\xi_2)_{x_1}u_{12}-\\
&- x_1^2(\xi_3)_{x_1}u_{1t} = 0
\end{aligned}
$$

E dunque il sistema di equazioni differenziali:

$$
\begin{aligned}
(1):\quad & f_{2\,t} = \frac{1}{2}x_1^2 f_{2\,x_1x_1} + x_1 f_{2\,x_2}\\
(2):\quad & f_{1\,t} = \frac{1}{2}x_1^2 f_{1\,x_1x_1} + x_1 f_{1\,x_2}\\
(3):\quad & (\xi_1)_t = \frac{1}{2}x_1^2(\xi_1)_{x_1x_1} + x_1(\xi_1)_{x_2} - x_1^2 f_{1\,x_1}\\
(4):\quad & (\xi_2)_t = \frac{1}{2}x_1^2(\xi_2)_{x_1x_1} + x_1(\xi_2)_{x_2} + \frac{1}{2}x_1^3(\xi_3)_{x_1x_1} + x_1^2(\xi_3)_{x_2} - x_1(\xi_3)_t - \xi_1\\
(5):\quad & \frac{1}{2}x_1^2(\xi_3)_t = \frac{1}{4}x_1^4(\xi_3)_{x_1x_1} + \frac{1}{2}x_1^3(\xi_3)_{x_2} + x_1^2(\xi_1)_{x_1} - x_1\xi_1\\
(6):\quad & (\xi_2)_{x_1} = 0\\
(7):\quad & (\xi_3)_{x_1} = 0
\end{aligned}
$$

La soluzione generale del sistema è in questo caso più complicata da determinare pertanto ci porremo già dall'inizio nel caso di trasformazioni che agiscono solo sul dominio imponendo:

$$(\diamond):\quad f_1(x_1,x_2,t) = f_2(x_1,x_2,t) = 0, \qquad \forall x_1,x_2,t\in\mathbb{R}, x_1,x_2>0$$

Caso particolare: trasformazioni che agiscono solo sul dominio

Imponendo $(\diamond)$ il sistema determinante diventa:

$$
\begin{aligned}
(3):\quad & (\xi_1)_t = \frac{1}{2}x_1^2(\xi_1)_{x_1x_1} + x_1(\xi_1)_{x_2} \\
(4):\quad & (\xi_2)_t = \frac{1}{2}x_1^2(\xi_2)_{x_1x_1} + x_1(\xi_2)_{x_2} + \frac{1}{2}x_1^3(\xi_3)_{x_1x_1} + x_1^2(\xi_3)_{x_2} - x_1(\xi_3)_t - \xi_1 \\
(5):\quad & \frac{1}{2}x_1^2(\xi_3)_t = \frac{1}{4}x_1^4(\xi_3)_{x_1x_1} + \frac{1}{2}x_1^3(\xi_3)_{x_2} + x_1^2(\xi_1)_{x_1} - x_1\xi_1 \\
(6):\quad & (\xi_2)_{x_1} = 0 \\
(7):\quad & (\xi_3)_{x_1} = 0
\end{aligned}
$$

La soluzione generale allora (cfr. *Appendice - F*) è data da:

$$
\begin{aligned}
\xi_1(x_1,x_2,t) &= k_1x_1 \\
\xi_2(x_1,x_2,t) &= k_2 + k_1x_2 \\
\xi_3(x_1,x_2,t) &= k_3
\end{aligned}
$$

Fissati allora $x_1, x_2, t, y \in \mathbb{R}$ poniamo, come nei casi precedenti:

$$
\begin{aligned}
p(s) &= X_1(x_1,x_2,t,y;s) \\
q(s) &= X_2(x_1,x_2,t,y;s) \\
r(s) &= X_3(x_1,x_2,t,y;s) \\
z(s) &= U(x_1,x_2,t,y;s)
\end{aligned}
$$

ove ricordiamo che:

$$
\begin{aligned}
& T = (X_1, X_2, X_3, U) \\
& \partial_s X_i(x_1,x_2,t,y;0) = \xi_i(x_1,x_2,t), \qquad i = 1,2,3 \\
& \partial_s U(x_1,x_2,t,y;0) = \eta(x_1,x_2,t)
\end{aligned}
$$

Le simmetrie per l'equazione (III) saranno allora le soluzioni del sistema seguente:

$$\begin{cases} p' = k_1 p \\ q' = k_2 + k_1 q \\ r' = k_3 \\ z' = 0 \\ p(0) = x_1,\ q(0) = x_2,\ r(0) = t,\ z(0) = y \end{cases}$$

Per studiare le soluzioni dobbiamo distinguere due casi:

- Caso $k_1 \neq 0$

$$T(x_1, x_2, t, y; s) = \left(e^{k_1 s} x_1, -\frac{k_2}{k_1} + e^{k_1 s} x_2, k_3 s + t, y\right)$$

- Caso $k_1 = 0$

$$T(x_1, x_2, t, y; s) = \left(x_1, k_2 s + x_2, k_3 s + t, y\right)$$

Esempio. A. Pascucci e L. Monti in [7] osservano che (III) è invariante sotto l'azione della famiglia di trasformazioni $K = (\zeta_{\omega_1,\omega_2,\tau}(x,t), y)$, con:

$$\zeta_{\tau,\omega}(x_1, x_2, t) = (\omega_1 x_1, \omega_2 + \omega_1 x_2, t + \tau), \qquad \omega_1, \omega_2 > 0$$

Questo risultato può essere ottenuto come caso particolare dalle simmetrie di (III).

Siano infatti $\omega_1, \omega_2, t \in \mathbb{R}$, $\omega_1, \omega_2 > 0$ fissati, allora ponendo:

$$k_1 = \mathrm{Log}(\omega_1)$$
$$k_2 = -\mathrm{Log}(\omega_1)\omega_2$$
$$k_3 = \tau$$

Otteniamo:

$$T(x_1, x_2, t, y; 1) = (\zeta_{\omega_1, \omega_2, \tau}(x_1, x_2, t), y)$$

$\square$

Appendice

A- Esempi

Gruppo delle traslazioni del piano

Consideriamo la seguente famiglia di trasformazioni su $\mathbb{R}^2$, a parametro in $\mathbb{R}$:

$$T(x,y;s) = (x+s,y), \qquad x,y,s \in \mathbb{R}$$

La famiglia di trasformazioni è analitica rispetto ad ogni suo argomento, $I = \mathbb{R}$ è ovviamente connesso e $G = (\mathbb{R},+)$ è ovviamente un gruppo di Lie analitico; mostriamo dunque che T è un gruppo di Lie di trasformazioni ad un parametro nel gruppo $(\mathbb{R},+)$ mostrando che verifica le proprietà *(i)*, *(ii)* e *(iii)* della *definizione 1-B*.

(i) $T(\cdot,s)$ è evidentemente una biezione su $\Omega = \mathbb{R}^2$ per ogni $s \in I$

(ii) $T(x,y;0) = (x,y), \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}^2$

(iii) $T(T(x,y;s'),s) = T(x+s',y;s) = (x+s+s',y) = T(x,y;s+s'),\ \forall x,y,s,s' \in \mathbb{R}$

Calcoliamone i coefficienti infinitesimali ξ_1, ξ_2 e il generatore infinitesimale X:

$$
\begin{aligned}
\xi_1 &= \frac{\partial x + s}{\partial s}|_{s=0} = 1 \\
\xi_2 &= \frac{\partial y}{\partial s}|_{s=0} = 0 \\
X &= 1 \cdot \partial_x + 0 \cdot \partial_y = \partial_x
\end{aligned}
$$

Il gruppo di trasformazioni T, a meno di una trasposizione delle variabili x e y, è gia espresso nella forma canonica *(1.23)*, ma procederemo ugualmente, a scopo di verifica, con il calcolo del diffeomorfismo Θ.
Nella dimostrazione del *teorema 1-9* abbiamo visto che un diffeomorfismo $\Theta = (\Theta_1, \Theta_2)$ che ci consente di esprimere T in forma canonica è determinato dalla risoluzione di:

$$
\begin{cases}
X\Theta_1 = 0 \\
X\Theta_2 = 1
\end{cases}
$$

Esplicitamente:

$$
X\Theta_1 = \partial_x \Theta_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \Theta_1(x, y) = f_1(y)
$$

e:

$$
X\Theta_2 = \partial_x \Theta_2 = 1 \quad \Leftrightarrow \Theta_2(x, y) = x + f_2(y)
$$

Supponiamo dunque che $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siano tali che Θ sia invertibile, avremo allora:

$$
\begin{aligned}
\Theta_1^{-1}(z, w) &= w - f_2(f_1^{-1}(z)) \\
\Theta_2^{-1}(z, w) &= f_1^{-1}(z)
\end{aligned}
$$

per ogni $z, w \in \mathbb{R}$; dalla dimostrazione del *teorema 1-9* segue che Θ

risulta un vettore di coordinate canoniche per ogni diffeomorfismo globale f_1 è di classe C^∞ e per ogni $f_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$. Eseguiamo, a titolo di esempio, una verifica esplicita:

$$\begin{aligned} T'(z,w;s) &= \Theta(T(\Theta^{-1}(z,w);s)) = \\ &= \Theta\big((w - f_2(f_1^{-1}(z)) + s, f_1^{-1}(z))\big) = \\ &= (f_1(f_1^{-1}(z)), w - f_2(f_1^{-1}(z)) + s + f_2(f_1^{-1}(z))) = \\ &= (z, w+s) \end{aligned}$$

Si noti che la scelta $f_1(y) = y$ e $f_2(x) = 0$ determina il diffeomorfismo Θ dato dalla trasposizione di x con y; tale diffeomorfismo, come anticipato all'inizio, è quello più immediato per esprimere T in forma canonica, ma l'esempio mostra anche come tale diffeomorfismo non sia affatto univocamente determinato.

Gruppo di dilatazioni di $\mathbb{R}^3$

Consideriamo la seguente famiglia di trasformazioni su $\mathbb{R}^3_{x_1,x_2,t}$, a parametro in $I =]0\,,+\infty[$:

$$T(t,x,y;\lambda) = (\lambda x_1, \lambda^3 x_2, \lambda^2 t), \qquad x_1, x_2, t \in \mathbb{R},\ \lambda \in I$$

La famiglia di trasformazioni è analitica rispetto ad ogni suo argomento, $I = \mathbb{R}$ è ovviamente connesso e, denotata con $\cdot$ l'usuale operazione di moltiplicazione su $\mathbb{R}$, $G = (I,\cdot)$ è un gruppo di Lie analitico. Per mostrare che T è un gruppo di Lie di trasformazioni ad un parametro nel gruppo $\mathbb{G} = (\mathbb{R},+)$ dobbiamo mostrare che verifica le proprietà *(i)*, *(ii)* e *(iii)* della *definizione 1-B*.

(i) $T(\cdot,\lambda)$ è evidentemente una biezione su $\Omega = \mathbb{R}^3$ per ogni $\lambda \in I$

(ii) $T(x_1,x_2,t;1) = (x_1,x_2,t), \quad \forall\, t,x,y \in \mathbb{R}$

(iii) $T(T(x_1,x_2,t;\lambda_1),\lambda_2) = T(\lambda_1 x_1, \lambda_1^3 x_2, \lambda_1^2 t; \lambda_2) = (\lambda_2\lambda_1 x_1, \lambda_2^3\lambda_1^3 x_2, \lambda_2^2\lambda_1^2 t) =$
$= T(t,x,y;\lambda_2\lambda_1), \quad \forall x_1,x_2,t \in \mathbb{R},\ \lambda_1,\lambda_2 \in I$

Come già osservato nella *sezione 1.1 (pag. 8)* possiamo riparametrizzare T nel modo seguente:

$$T'(x_1,x_2,t;\epsilon) \;=\; T(x_1,x_2,t;\epsilon+1)$$

Definiamo poi:

$$\begin{aligned} J &:=]-1,+\infty[\\ \epsilon \diamond \epsilon' &:= \; (\epsilon+1)(\epsilon'+1)-1 = \epsilon+\epsilon'+\epsilon\epsilon' \qquad \forall \epsilon,\epsilon' \in J \end{aligned}$$

La famiglia di trasformazioni T' risulta allora un gruppo di Lie di trasformazioni su Ω ad un parametro in J . Applichiamo ora il *teorema di Lie (sez. 1.3)* per trovare una riparametrizzazione T'' di T' della forma:

$$T''(x_1,x_2,t;s) \;=\; T'(x_1,x_2,t;\tau^{-1}(s)), \qquad s \in \tau(I)$$

tale che soddisfi *(1.9)*. Il diffeomorfismo τ è determinato da:

$$\tau(s) \;=\; \int_0^s \Gamma(\rho)\,d\rho$$

ove:

$$\begin{aligned} \Gamma(\rho) \;=\; & \left.\frac{\partial x_1 + x_2 + x_1 x_2}{\partial x_2}\right|_{(x_1,x_2)=(\rho^{-1},\rho)} = \\ & = 1+\rho^{-1} \;=\; 1-\frac{\rho}{1+\rho} \;=\; \frac{1}{1+\rho} \end{aligned}$$

per ogni $\rho \in I$.

Dunque:

$$
\begin{aligned}
& \tau(\epsilon) = \log(1+\epsilon) \\
& \Rightarrow T''(x_1, x_2, t; s) = T'(x_1, x_2, t; e^{s-1}) = T(x_1, x_2, t; e^s) = \\
& = (e^s x_1, e^{3s} x_2, e^{2s} t), \quad s \in]0, +\infty[
\end{aligned}
$$

Calcoliamone i coefficienti infinitesimali ξ_1, ξ_2, ξ_3 e il generatore infinitesimale X:

$$
\begin{aligned}
\xi_1 &= \frac{\partial e^s x_1}{\partial s}|_{s=0} = x_1 \\
\xi_2 &= \frac{\partial e^{3s} x_2}{\partial s}|_{s=0} = 3x_2 \\
\xi_3 &= \frac{\partial e^{2s} t}{\partial s}|_{s=0} = 2t \\
X &= t \cdot \partial_t + 2x \cdot \partial_x + y \cdot \partial_y
\end{aligned}
$$

Fissato $s \in I$ e considerata la trasformazione $T''(\cdot, s)$, ponendo $\lambda = e^s$ si ha:

$$
T''(\cdot, s) = T(\cdot, \lambda)
$$

quindi T'' definiscono, a livello insiemistico, la stessa famiglia di trasformazioni su Ω, pertanto risulta indifferente considerarne una piuttosto che un'altra quando si vuole studiare, ad esempio, l'invarianza di una funzione rispetto ad esse. Il gruppo di trasformazioni T'' ha però il vantaggio, tra tutti i gruppi di trasformazioni ad esso equivalenti secondo $\sim$ (cfr. *definizione 1-E*), di essere l'unico determinato da *(1.9)*.

B - EDP del primo ordine quasi-lineari

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto, I un intervallo aperto reale e T un gruppo di Lie di trasformazioni ad un parametro tale che soddisfi *(1.9)*. Siano poi $V \subseteq \Omega$ un aperto e $c \in \mathbb{R}$, consideriamo il seguente problema:

$$(*) := \begin{cases} Xu = c & \text{su } V \\ u \in C^\infty(V) \end{cases}$$

un problema di questo tipo è un caso particolare di equazione differenziale alle derivate parziali (EDP) quasi-lineare e del primo ordine. Studieremo la risolubilità di $(*)$ e le proprietà delle sue soluzioni utilizzate nella *sezione 1-5*.

Ipotesi sul bordo di V

Nel seguito vedremo che saranno necessarie alcune ipotesi su ∂V in quanto eventuali soluzioni di $(*)$ dipenderanno, come suggerisce l'intuizione, da una condizione al bordo. Introduciamo dunque la seguente:

A-A DEFINIZIONE. Sia $U \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto, diremo che U **ha frontiera di classe** C^k se, per ogni $x_0 \in \partial U$, esistono $r > 0$ e $\Lambda \in C^k(\mathbb{R}^{N-1})$ tali che, a meno di permutazioni e cambiamenti di segno delle variabili:

$$U \cap D(x_0, r) = \{x = (x_1, \dots, x_N) \in D(x_0, r) \mid x_N > \Lambda(x_1, \dots, x_{N-1})\}$$

in tal caso scriveremo $\partial V \in C^k$. Per convenzione scriveremo $\partial V \in C^\infty$ se $\partial V \in C^k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Osservazione 1 Supponiamo $\partial V \in C^\infty$ e fissiamo x_0 in ∂V. Siano r e Λ come nella *definizione A-A*, definiamo per ogni $x \in U =$

$V \cap D(x_0, r)$:

$$\begin{aligned} \phi_i(x) &= x_i & \qquad i \in \underline{N-1} \\ \phi_N(x) &= x_N - \Lambda(x_1, \ldots, x_{N-1}) \end{aligned}$$

poniamo poi $U' = \phi(U)$

$$\begin{aligned} \psi_i(y) &= y_i & \qquad i \in \underline{N-1} \\ \psi_N(y) &= y_N + \Lambda(y_1, \ldots, y_{N-1}) \end{aligned}$$

abbiamo allora $\psi = \phi^{-1}$ e $J_\phi = J_\psi = 1$. Infine esiste r' tale che:

$$U' = \{x = (y_1, \ldots, y_N) \in D(y_0, r') \mid y_N > 0\}$$

ove $y_0 = \phi(x_0)$. In altri termini U' ha come bordo una sezione dell' iperpiano $y_N = 0$.

Osservazione 2. Sia $u \in C^\infty(U)$ una soluzione di $(*)$ e supponiamo $\partial V \in C^\infty$. Consideriamo il diffeomorfismo ϕ definito nell'osservazione precedente, osservando inoltre che $\phi \in C^\infty(U)$; poniamo infine $v = u \circ \psi$.
Avremo allora $u = v \circ \phi$, dunque per ogni $x \in U$:

$$\begin{aligned} c = Xu(x) &= \sum_{i=1}^{N} \xi(x) \cdot \partial_{x_i} u(x) = \\ &= \sum_{i=1}^{N} \xi(x) \cdot \langle \partial_{x_i} \phi(x), \nabla_y v(\phi(x)) \rangle = \\ &= \sum_{i,j=1}^{N} \xi(x) \cdot \partial_i \phi_j(x), \partial_j v(\phi(x)) = \\ &= \sum_{i,j=1}^{N} \xi(\psi(y)) \cdot \partial_i \phi_j(\psi(y)), \partial_j v(y) = \\ &= \sum_{i=1}^{N} \eta(y) \cdot \partial_{y_i} v(y) \end{aligned}$$

dunque, posto $Y = \sum_{i=1}^{N} \eta_i \partial_{y_i}$, il problema $(*)$ su U è equivalente al problema:

$$(**) := \begin{cases} Yu = c \quad \text{su}\, V \\ u \in C^\infty(V) \end{cases}$$

su U'. Sia poi $f \in C^\infty(\partial U)$ e poniamo $g = f \circ \psi$, allora:

$$u \equiv f \,\text{su}\, U \Leftrightarrow v \equiv g \,\text{su}\, U'$$

Risolubilità

Supponiamo che $u \in C^1(V)$ sia una soluzione di $(*)$; avremo allora:

$$\frac{du \circ \gamma_x}{dt} = Xu(x) = c$$

sia poi $x_0 \in \partial V$ e poniamo $u_0 = u(x_0)$, allora u è soluzione di $(*)$ in ogni punto della traccia di γ_{x_0} se e solo se:

$$u \circ \gamma_{x_0}(t) = ct + u(x_0)$$

Il seguente lemma garantisce allora l'esistenza e l'unicità locali di una soluzione per $(*)$ una volta che assegneremo delle condizioni al bordo. Supporremo sin da ora $\partial V \in C^\infty$

A-1 LEMMA. Sia $x_0 \in \partial V$ e supponiamo che $\xi_N(x_0) \neq 0$, allora esistono un intervallo $J =]-\varepsilon, \varepsilon[$, $J \subseteq I$, un intorno W di x_0 in ∂V e un intorno V' di x in V tali che, per ogni $x \in V'$, esistono univocamente determinati $s \in J$ e $y \in W$ tali che:

$$x = T(y, s)$$

Dimostrazione. Per le osservazioni 1 e 2 non è restrittivo supporre che esista un intorno W di x_0 in ∂V tale che $W \subseteq x_N = 0$. Sia allora $W' = (x_1, \ldots, x_{N_1} \in \mathbb{R}^{N-1} \mid (x_1, \ldots x_{N_1}, 0) \in W$ e definiamo:

$$H : W' \times I \longrightarrow \mathbb{R}^N,\ H(x,s) = T((x,0);s)$$

D'altra parte, se $x_0 = (x_0^*, 0)$, poichè:

$$\mathscr{J}_{H(x_0^*,0)} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & \xi_1(x_0) \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \xi_N(x_0) \end{pmatrix}$$

Si ha $J_{H(x_0^*,0)} \neq 0$, la tesi sarà allora diretta conseguenza del teorema d'invertibilità locale osservando che $H(x_0^*, 0) = x_0$. □

Da questo lemma seguono immediatamente:

A-2 TEOREMA. Siano $x_0 \in \partial V$ e $f \in C^\infty(\partial V)$; supponiamo poi che $\xi_N(x_0) \neq 0$, allora esiste un intorno V' di x in V tale che sia univocamente determinata la soluzione $u \in C^\infty(V')$ del problema:

$$\begin{cases} Xu = c & \text{su } V' \\ u \equiv f & \text{su } \partial V' \end{cases}$$

A-3 TEOREMA. Siano $x_0 \in \bar{\Omega}$, $\Gamma = \{x \in \Omega | x_N = (x_0)_N\}$ e $f \in C^\infty(\Gamma)$. Supponiamo poi $\partial\Omega \in C^\infty$ e $\xi_N(x_0) \neq 0$, allora esiste un intorno V di x_0 in Ω tale che sia univocamente determinata la soluzione $u \in C^\infty(V)$ del problema:

$$\begin{cases} Xu = c & \text{su } V \\ u \equiv f & \text{su } \partial V \end{cases}$$

Dimostrazione. Il teorema è una semplice riformulazione del teorema precedente nel caso $x_0 \in \Omega$, mentre può facilmente esservi ricondotto nel caso $x_0 \in \partial\Omega$ grazie all'ipotesi $\partial\Omega \in C^\infty$ e alle osservazioni 1 e 2. □

C - Operatori differenziali di ordine 2

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto e sia $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{(N+1)^2})$, consideriamo il problema:

$$\text{(edp)} : \begin{cases} f(x, u(x), u^{(1)}(x), u^{(2)}(x)) = 0 \\ u \in C^2(A, \mathbb{R}) \end{cases}$$

chiameremo ogni problema di questo tipo un'**equazione differenziale alle derivate parziali di ordine 2**. Consideriamo poi l'operatore:

$$L_f : C^2(A) \to C^2(A), \quad \langle L_f \mid u \rangle (x) = f(x, u(x), u^{(1)}(x), u^{(2)}(x))$$

chiameremo ogni operatore di questo tipo un **operatore differenziale di ordine 2**.

Consideriamo un vettore $z \in \mathbb{R}^{(N+1)^2}$ rappresentato nel modo seguente:

$$z = (x, y, y_1, \ldots, y_N, y_{11}, \ldots, y_{NN}) = (x, y, y^{(1)}, y^{(2)})$$

Supponiamo poi che f sia della forma:

$$f(z) = f(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) y_{ij} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x) y_i + c(x) y$$

con $a_{ij}, b_i, c, \phi \in C^\infty(A)$. Diremo allora che l'equazione (edp) e l'operatore L_f sono **lineari**, di ordine 2.

Equivalenza tra equazioni differenziali

Alcuni passaggi cruciali nelle dimostrazioni del capitolo 2 richiederanno di poter ricondurre l'equazione che stiamo studiando a delle forme più semplici ma ad essa equivalente. Consideriamo dunque due equazioni differenziali di ordine 2 :

$$\begin{aligned}
&(1) \quad : f(x, u, u^{(1)}, u^{(2)}) = 0, \qquad x \in A \\
&(2) \quad : g(x', u, u^{(1)}, u^{(2)}) = 0, \qquad x' \in A'
\end{aligned}$$

Intuitivamente l'equivalenza di due equazioni sussiste quando risolvere una equivale e risolvere l'altra, quindi ad esempio quando possiamo determinare tutte le soluzioni di una a partire dalle soluzioni di un'altra e viceversa.

A-B DEFINIZIONE. Diremo che le equazioni (1) e (2) sono **equivalenti** se esiste un diffeomorfismo Θ da A ad A', di classe C^∞, tale che per ogni $u \in C^2(A)$, posto $v = u \circ \Theta^{-1}$, sono equivalenti le condizioni:

$$\begin{aligned}
&(i) \qquad f(x, u(x), u^{(1)}(x), u^{(2)}(x)) = 0, \qquad \forall x \in A \\
&(ii) \qquad g(x', v(x'), v^{(1)}(x'), v^{(2)}(x')) = 0, \qquad \forall x' \in A'
\end{aligned}$$

In altri termini due equazioni differenziali sono equivalenti quando hanno le stesse soluzioni, e meno di un diffeomorfismo; si può mostrare in modo molto semplice una prima proprietà che risulta però fondamentale ai fini della nostra trattazione.

A-4 TEOREMA. Sia T una famiglia di trasformazioni su $\Omega = A \times J$ che è localmente un gruppo di Lie ad un parametro in I. Supponiamo poi che (1) e (2) siano equivalenti mediante il diffeomorfismo Θ, allora (1) è invariante sotto l'azione di $T = (X, U)$ se e solo se (2) è invariante sotto l'azione della famiglia di trasformazioni K definita da:

$$K(x', y; s) = \left(\Theta(X(\Theta^{-1}(x'), y; s)), U(\Theta(x')^{-1}, y; s)\right)$$

Dimostrazione. Innanzitutto è facile verificare che K definisce una famiglia di trasformazioni su $\Omega' = A' \times J$, localmente un gruppo di Lie ad un parametro in I. Siano poi $u \in C^2(A)$ e $v = u \circ \Theta$; denotate poi con u_s^* e v_s^*, rispettivamente, l'azione di T su u e l'azione di K su v, risulta immediato dalla *definizione 2-A* che:

$$v_s^* = u_s^* \circ \Theta^{-1}$$

Per la *definizione 2-B* allora, se u è una soluzione di (1), la funzione u_s^* è soluzione di (1) per ogni $s \in I$. D'altra parte, poichè (1) e (2) sono equivalenti, v_s^* è soluzione di (2) per ogni $s \in I$, dunque (2) è invariante sotto l'azione di K. L'implicazione inversa si ottiene scambiando i ruoli di u e v e considerando il diffeomorfismo $\Phi = \Theta^{-1}$.

□

Il *teorema A-4* mostra in particolare che ai fini della ricerca di famiglie di trasformazioni sotto la cui azione un'equazione assegnata sia invariante non è restrittivo sosituire tale equazione con un'altra ad essa equivalente.

Esempio. Sia $a \in C^\infty$ una funzione che non si annulla su A, allora:

$$f(x, u(x), u^{(1)}(x), u^{(2)}(x)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a(x) \cdot f(x, u(x), u^{(1)}(x), u^{(2)}(x)) = 0$$

pertanto la funzione identità su A rende (1) e (2) equivalenti ogni volta che g è della forma $g = a \cdot f$, con $a \neq 0$ su A.

□

A-6 LEMMA. Sia X un campo vettoriale di coefficienti $q_1, \ldots, q_N$ e sia Θ un diffeomorfismo da A ad A', allora definito il campo vettoriale Y di coefficienti $\eta_1, \ldots, \eta_N$ nel modo seguente:

$$\eta_i(x') = X\Theta_i(\Theta^{-1}(x'))$$

Si ha, per ogni $x' \in A$ e per ogni $v \in C^2(A')$:

$$(i) \;:\; X(v \circ \Theta)(x) = Y(v)(\Theta(x))$$
$$(ii) \;:\; X^2(v \circ \Theta)(x) = Y^2(v)(\Theta(x))$$

Dimostrazione. Siano $x' \in A'$ e $v \in C^2(A')$ fissati e poniamo $x = \Theta^{-1}(x')$, allora:

$$\begin{aligned} Y(v)(x') &= \sum_{i=1}^N X\Theta_i(x) v_i(x') = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N q_j(x) \partial_j \Theta_i(x) v_i(x) = \sum_{j=1}^N q_j(x) \sum_{i=1}^N \partial_j \Theta_i(x) v_i(x) = \\ &= \sum_{i=1}^N q_j(x) \partial_j (v \circ \Theta)(x) = X(v \circ \Theta)(x) \end{aligned}$$

Dunque:

$$Y(v) = X(v \circ \Theta) \circ \Theta^{-1}$$

Posto $u = X(v \circ \Theta) \circ \Theta^{-1}$ abbiamo allora:

$$\begin{aligned} Y^2 v(y) &= Y(Yv)(y) = \\ &= Y(X(v \circ \Theta) \circ \Theta^{-1}))(y) = \\ &= Y(u)(y) = X(u \circ \Theta)(x) = \\ &= X(X(v \circ \Theta))(x) = X^2(v \circ \Theta)(x) \end{aligned}$$

$\square$

A-7 TEOREMA. Sia (1) lineare e supponiamo che f sia della forma:

$$f(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}) = \sum_{i,j=1}^{N} q_i q_j(x) y_{ij} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x) y_i + c(x) y$$

Allora (1) è equivalente ad un'equazione della forma:

$$u_{11}(x') + \sum_{i=1}^{N} \bar{b}_i(x') u_i(x') + \bar{c}(x') u(x') = 0$$

Dimostrazione. Sia X il campo vettoriale di coefficienti $q_1, \dots, q_N$, scrivendo per esteso l'espressione di T^2 abbiamo, per ogni $u \in C^2(A)$ e per ogni $x \in A$:

$$X^2(u) = \sum_{i,j=1}^{N} q_i(x) q_j(x) u_{ij}(x) + \sum_{i,j=1}^{N} q_i(x) \partial_i q_j(x) u_j(x)$$

pertanto, posto $X_1 = X^2 - \sum_{i,j=1}^{N} q_i(x) q_j(x) \partial_{ij}$, l'operatore X_1 risulta un campo vettoriale, cioè un operatore lineare di ordine 1. L'equazione

(1) diventa allora:

$$X^2(u)(x) + \sum_{i=1}^{N} b_i^*(x) u_i(x) + c(x)u(x) = 0$$

Siano ora Θ un diffeomorfismo da A ad A' e Y il campo vettoriale di coefficienti $\eta_1, \ldots, \eta_N$ definito nel *lemma A-5*. Per il punto (ii) del lemma, posto $v = u \circ \Theta^{-1}$ e $x' = \Theta(x)$, l'equazione (1) diventa:

$$Y^2(v)(x') + \sum_{i=1}^{N} b_i^*(x) u_i(x) + c(x)u(x) = 0$$

Ragionando come prima avremo:

$$Y^2(v)(x') = \sum_{i,j=1}^{N} \eta_i(x')\eta_j(x') v_{ij}(x') + Y_1(v)(x')$$

ove Y_1 è un campo vettoriale. Per il punto (i) del lemma precedente inoltre, detto B il campo vettoriale di coefficienti $b_1^*, \ldots, b_N^*$, esiste un campo vettoriale B_1 tale che:

$$Bu(x) = B_1 v(x')$$

L'equazione (1) diventa allora:

$$\sum_{i,j=1}^{N} \eta_i(x')\eta_j(x') v_{ij}(x') + \sum_{i=1}^{N} \bar{b}_i(x') v_i(x') + c(x)u(x) = 0$$

ove $(\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_N)$ sono i coefficienti del campo vettoriale $Y_1 + B_1$. Infine, posto $\bar{c} = c \circ \Theta^{-1}$ l'equazione (1) diventa:

$$\sum_{i,j=1}^{N} \eta_i(x')\eta_j(x') v_{ij}(x') + \sum_{i=1}^{N} \bar{b}_i(x') v_i(x') + \bar{c}(x')v(x') = 0$$

La dimostrazione si conclude allora per il *teorema 1.9* .

□

A-C DEFINIZIONE. Se l'equazione (1) è lineare diremo che è **degenere** se è equivalente a (2) e g è della forma:

$$g(x,u,u^{(1)},u^{(2)}) = u_{ii}(x) + b_i(x)u_i(x) + c(x)u(x)$$

Intuitivamente un'equazione differenziale alle derivate parziali, lineare di ordine 2, è degenere se è equivalente ad un'equazione differenziale ordinaria, lineare di ordine 2.

D - Risultati della sezione 3.1

Mostriamo i passaggi essenziali per la risoluzione del sistema:

$$\begin{aligned}
(1):\quad & {f_2}_t = \frac{1}{2}{f_2}_{x_1x_1} + x_1{f_2}_{x_2}\\
(2):\quad & {f_1}_t = \frac{1}{2}{f_1}_{x_1x_1} + x_1{f_1}_{x_2}\\
(3):\quad & (\xi_1)_t = \frac{1}{2}(\xi_1)_{x_1x_1} + x_1(\xi_1)_{x_2} - {f_1}_{x_1}\\
(4):\quad & (\xi_2)_t = \frac{1}{2}(\xi_2)_{x_1x_1} + x_1(\xi_2)_{x_2} + \frac{1}{2}x_1(\xi_3)_{x_1x_1} + x_1^2(\xi_3)_{x_2} - x_1(\xi_3)_t - \xi_1\\
(5):\quad & (\xi_3)_t = \frac{1}{2}(\xi_3)_{x_1x_1} + x_1(\xi_3)_{x_2} + 2(\xi_1)_{x_1}\\
(6):\quad & (\xi_2)_{x_1} = 0\\
(7):\quad & (\xi_3)_{x_1} = 0
\end{aligned}$$

L'unica funzione che esprime una relazione con tutte le altre, cioè che compare almeno in un'equazione ove compaia una qualunque delle altre funzioni, è la ξ_1. La strada migliore per risolvere il sistema è dunque quella di determinare una forma generale per ξ_1; d'altra parte, a priori, non abbiamo alcuna informazione su ξ_1 visto che nel sistema non compare mai da sola. Cerchiamo allora, come primo passo, di ricavare qualche informazione su ξ_1 che ci permetta di semplificarne la forma, possibilmente derivando qualche equazione e vedendo se si annulla qualche sua derivata, permettendoci in tal caso di scriverla in forma polinomiale rispetto a qualche variabile.

(I) Sfruttando innanzitutto le equazioni (6) e (7) le equazioni (4) e (5) vengono così riformulate:

$$\begin{aligned} (4):\quad (\xi_2)_t &= x_1(\xi_2)_{x_2} + x_1^2(\xi_3)_{x_2} - x_1(\xi_3)_t - \xi_1 \\ (5):\quad (\xi_3)_t &= x_1(\xi_3)_{x_2} + 2(\xi_1)_{x_1} \end{aligned}$$

Sempre ricorrendo a (6) e (7), derivando (4) e (5) rispetto a x_1, due e una volta rispettivamente, otteniamo:

$$\begin{aligned} (4)'':\quad (\xi_1)_{x_1x_1} &= 2(\xi_3)_{x_2} \\ (5)':\quad (\xi_1)_{x_1x_1} &= -\frac{1}{2}(\xi_3)_{x_2} \end{aligned}$$

Da cui, necessariamente:

$$(\xi_1)_{x_1x_1} = (\xi_3)_{x_2} = 0$$

Come prima informazione dunque avremo che ξ_3 dipende solo da t e che ξ_1 dipende linearmente da x_1. Sfruttando questi risultati in (5):

$$(5):\quad (\xi_3)_t = 2(\xi_1)_{x_1}$$

sfruttando poi nuovamente (6) e (7), derivando (4) una volta rispetto a x_1 abbiamo:

$$(4)' : \quad (\xi_2)_{x_2} = (\xi_1)_{x_1} + (\xi_3)_t = 3(\xi_1)_{x_1}$$

Derivando (5) una volta rispetto a x_2 otteniamo:

$$(\xi_1)_{x_1 x_2} = 0$$

Sfruttando questo risultato e derivando (4) due volte, una rispetto a x_1 e una rispetto a x_2 otteniamo:

$$(\xi_2)_{x_2 x_2} = 0$$

Ora notiamo che le derivate parziali di ξ_2 e ξ_3 sono scritte in funzione di ξ_1; condizione necessaria e sufficiente affinchè le equazioni (4) e (5) abbiano una soluzione è che le forme differenziali:

$$\begin{aligned} &2(\xi_1)_{x_1} dt \\ &3(\xi_1)_{x_1} dx_2 + ((\xi_1)_{x_1} - \xi_1) dt \end{aligned}$$

siano esatte; per il teorema di Poincarè (l'insieme Ω risulta stellato) , ciò è vero se e solo se tali forme sono chiuse, cioè se e solo se:

$$\begin{aligned} (\xi_3)_{x_1 x_2} &= (\xi_3)_{x_2 x_1} \\ (\xi_3)_{x_1 t} &= (\xi_3)_{t x_1} \\ (\xi_3)_{t x_2} &= (\xi_3)_{x_2 t} \\ (\xi_2)_{x_1 x_2} &= (\xi_2)_{x_2 x_1} \\ (\xi_2)_{x_1 t} &= (\xi_2)_{t x_1} \\ (\xi_2)_{t x_2} &= (\xi_2)_{x_2 t} \end{aligned}$$

Tutte le condizioni scritte sopra, ad eccezione dell'ultima, sono già state imposte implicitamente per ricavare alcune relazioni; imponendo allora $(\xi_2)_{tx_2} = (\xi_2)_{x_2 t}$ otteniamo:

$$-(\xi_1)_{x_2} = 3(\xi_1)_{x_1 t}$$

Per quanto visto finora il sistema costituito dalle equazioni (4),(5),(6) e (7) ha soluzione se e solo se la funzione ξ_1 è della forma:

$$\xi_1(x_1, x_2, t) = x_1 h(t) - 3x_2 h'(t) + g(t)$$

(II) Studiamo ora le condizioni di risolubilità del sistema costituito dalle equazioni (2) e (3); innanzitutto per i risultati ottenuti tali equazioni diventano:

$$\begin{aligned} (2): \quad f_{1t} &= \frac{1}{2} f_{1x_1x_1} + x_1 f_{1x_2} \\ (3): \quad (\xi_1)_t &= x_1(\xi_1)_{x_2} - f_{1x_1} \end{aligned}$$

Con una traslazione dei membri di (3) e derivando (2) una volta rispetto a x_1 otteniamo:

$$\begin{aligned} (2)': \quad f_{1x_1t} &= f_{1x_2} + x_1 f_{1x_1x_2} \\ (3): \quad f_{1x_1} &= x_1(\xi_1)_{x_2} - (\xi_1)_t \end{aligned}$$

Ove abbiamo già imposto:

$$\begin{aligned} f_{1x_1t} &= f_{1tx_1} \\ f_{1x_1x_2} &= f_{1x_2x_1} \end{aligned}$$

Ora:

• Derivando ulteriormente (2) rispetto a x_1 otteniamo:

$$(2)'' : \quad {f_1}_{x_1 x_1 t} = 2{f_1}_{x_1 x_2}$$

Sostituendo (3) in $(2)''$ abbiamo allora:

$$\begin{aligned} (\xi_1)_{x_1 tt} &= 3(\xi_1)_{x_2 t} \\ \Rightarrow h''(t) &= -9h''(t) \\ \Rightarrow h''(t) &= 0 \\ \Rightarrow h(t) &= d_1 t + d_2 \end{aligned}$$

• Consideriamo ancora l'equazione $(2)'$, che può essere riscritta nel modo seguente:

$$(2)' : \quad {f_1}_{x_2} = {f_1}_{x_1 t} - x_1 {f_1}_{x_1 x_2}$$

Sostituendo poi (3) nel membro a destra otteniamo:

$$(*) : \quad {f_1}_{x_2} = x_1(\xi_1)_{x_2 t} - (\xi_1)_{tt} + x_1(\xi_1)_{x_2 t} = 2x_1(\xi_1)_{x_2 t} - (\xi_1)_{tt}$$

Derivando poi l'equazione (2) rispetto a x_2:

$$x_1 {f_1}_{x_2 x_2} = {f_1}_{x_2 t}$$

Sostituendo, infine, $(*)$ in quest'uguaglianza:

$$(\xi_1)_{ttt} = 3x_1(\xi_1)_{x_2 tt}$$

Da cui:

$$x_1 h'''(t) - 3x_2 h'''' + g'''(t) = -9x_1 h''(t)$$

E dunque il sistema:

$$\begin{cases} h'''(t) = -9x_1 h''(t) \\ h''''(t) = 0 \\ g'''(t) = 0 \end{cases}$$

Le prime due equazioni sono sempre verificate, mentre dalla terza ricaviamo:

$$g(t) = d_3 t^2 + d_4 t + d_5$$

In definitiva il sistema ammette soluzione se e solo se ξ_1 è della forma:

$$\xi_1(x_1, x_2, t) = d_1 t x_1 + d_2 x_1 - 3d_1 x_2 + d_3 t^2 + d_4 t + d_5$$
$$d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 \in \mathbb{R}$$

(III) Il passo successivo consiste nel determinare una scrittura esplicita per le restanti funzioni, in generale, per ogni ξ_1 della forma scritta sopra.
Inoltre, fissati $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 \in \mathbb{R}$, ognuna di queste funzioni è univocamente determinata (a meno di una costante) grazie al teorema di

Poincaré; infatti abbiamo trovato le seguenti relazioni:

$$f_1 : \begin{cases} f_{1\,x_1} = x_1(\xi_1)_{x_2} - (\xi_1)_t \\ f_{1\,x_2} = 2x_1(\xi_1)_{x_2 t} - (\xi_1)_{tt} \\ f_{1\,t} = \dfrac{1}{2} f_{1\,x_1 x_1} + x_1 f_{1\,x_2} \end{cases}$$

$$\xi_3 : \begin{cases} (\xi_3)_{x_1} = 0 \\ (\xi_3)_{x_2} = 0 \\ (\xi_3)_t = 2(\xi_1)_{x_1} \end{cases}$$

$$\xi_2 : \begin{cases} (\xi_2)_{x_1} = 0 \\ (\xi_2)_{x_2} = 3(\xi_1)_{x_1} \\ (\xi_2)_t = x_1(\xi_2)_{x_2} - x_1(\xi_3)_t - \xi_1 \end{cases}$$

Per concludere la sezione presenteremo l'algoritmo utilizzato per determinare il potenziale di una 1-forma differenziale chiusa, omettendo i calcoli effettuati nel caso specifico.

Sia la forma $f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dt$ chiusa, allora sotto le ipotesi iniziali è esatta; sia F un suo potenziale e supponiamo, per fissare le idee, che A sia stellato in 0, avremo allora:

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,t) &= \int_0^{x_1} f_1(h,x_2,t)dh + F(0,x_2,t) = \\
&= \int_0^{x_1} f_1(h,x_2,t)dh + \int_0^{x_2} \frac{\partial}{\partial x_2}F(0,x_2,t)\,\big|_{x_2=h,t=t} + F(0,0,t) = \\
&= \int_0^{x_1} f_1(h,x_2,t)dh + \int_0^{x_2} \frac{\partial}{\partial x_2}F(0,x_2,t)\,\big|_{x_2=h,t=t}\, dh + \\
&+ \int_0^{t} \frac{d}{dt}F(0,0,t)\,|_{t=h}\, dh + F(0,0,0)
\end{aligned}
$$

Poichè non conosciamo F non possiamo calcolare direttamente il secondo ed il terzo integrando, ma osserviamo che, posto:

$$
\begin{aligned}
g_1(x_1,x_2,t) &= \int_0^{x_1} f_1(h,x_2,t)dh \\
h_1(x_2,t) &= f_2(x_1,x_2,t) - \partial_{x_2} g_1(x_1,x_2,t)
\end{aligned}
$$

Abbiamo:

$$
h_1(h,t) = \int_0^{x_2} \frac{\partial}{\partial x_2}F(0,x_2,t)\,\big|_{x_2=h,t=t}\, dh
$$

da cui:

$$
F(0,x_2,t) = \int_0^{x_2} h_1(x_1,h,t)dh + F(0,0,t)
$$

E di nuovo, posto:

$$
\begin{aligned}
g_2(x_2,t) &= \int_0^{x_2} h_1(h,t)dh \\
h_2(t) &= f_t(x_1,x_2,t) - \partial_t g_1(x_1,x_2,t) - \partial_t g_2(x_2,t)
\end{aligned}
$$

Avremo:

$$
h_2(h) = \frac{d}{dt}F(0,0,t)\,|_{t=h}
$$

Da cui

$$F(0,0,t) = \int_0^t h_2(h)dh + F(0,0,0)$$

In definitiva, posto:

$$g_3(t) = \int_0^t h_2(h)dh$$

Abbiamo:

$$F(x_1,x_2,t) = g_1(x_1,x_2,t) + g_2(x_2,t) + g_3(t) + F(0,0,0)$$

E - Risultati della sezione 3.2

Mostriamo i passaggi essenziali per la risoluzione del sistema:

$$\begin{aligned}
(2): \quad & {f_1}_t = \frac{1}{2}{f_1}_{x_1x_1} + (x_1 - x_2){f_1}_{x_2} \\
(3): \quad & (\xi_1)_t = \frac{1}{2}(\xi_1)_{x_1x_1} + (x_1 - x_2)(\xi_1)_{x_2} - {f_1}_{x_1} \\
(4): \quad & (\xi_2)_t = \frac{1}{2}(\xi_2)_{x_1x_1} + (x_1 - x_2)\left((\xi_2)_{x_2} + \frac{1}{2}(\xi_3)_{x_1x_1} + (x_1 - x_2)(\xi_3)_{x_2} - (\xi_3)_t\right) + \xi_2 - \xi_1 \\
(5): \quad & (\xi_3)_t = \frac{1}{2}(\xi_3)_{x_1x_1} + (x_1 - x_2)(\xi_3)_{x_2} + 2(\xi_1)_{x_1} \\
(6): \quad & (\xi_2)_{x_1} = 0 \\
(7): \quad & (\xi_3)_{x_1} = 0
\end{aligned}$$

Come nel caso precedente deterineremo un' espressione generale per ξ_1 e di scrivere in sua funzione le derivate di ξ_2, ξ_3 e f_1.

(I) Sfruttando innanzitutto le equazioni (6) e (7) le equazioni (4) e (5) vengono così riformulate:

$$
\begin{aligned}
(4): \quad (\xi_2)_t &= (x_1 - x_2)\big((\xi_2)_{x_2} + (x_1 - x_2)(\xi_3)_{x_2} - (\xi_3)_t\big) + \xi_2 - \xi_1 \\
(5): \quad (\xi_3)_t &= (x_1 - x_2)(\xi_3)_{x_2} + 2(\xi_1)_{x_1}
\end{aligned}
$$

Sempre ricorrendo a (6) e (7), derivando (4) e (5) rispetto a x_1, due e una volta rispettivamente, e imponendo:

$$
\begin{aligned}
(\xi_2)_{tx_1} = (\xi_2)_{x_1 t} = 0,\ (\xi_2)_{x_2 x_1} = (\xi_2)_{x_1 x_2} = 0 \\
(\xi_3)_{tx_1} = (\xi_3)_{x_1 t} = 0,\ (\xi_3)_{x_2 x_1} = (\xi_3)_{x_1 x_2} = 0
\end{aligned}
$$

otteniamo:

$$
\begin{aligned}
(4)'': \quad (\xi_1)_{x_1 x_1} &= 2(\xi_3)_{x_2} \\
(5)': \quad (\xi_1)_{x_1 x_1} &= -\frac{1}{2}(\xi_3)_{x_2}
\end{aligned}
$$

Da cui, necessariamente:

$$
(\xi_1)_{x_1 x_1} = (\xi_3)_{x_2} = 0
$$

Come prima informazione dunque avremo che ξ_3 dipende solo da t e che ξ_1 dipende linearmente da x_1. Sfruttando questi risultati in (5):

$$
(5): \quad (\xi_3)_t = 2(\xi_1)_{x_1}
$$

sfruttando poi nuovamente (6) e (7), derivando (4) una volta rispetto a x_1 abbiamo:

$$
(4)': \quad (\xi_2)_{x_2} = (\xi_1)_{x_1} + (\xi_3)_t = 3(\xi_1)_{x_1}
$$

Derivando (5) una volta rispetto a x_2 otteniamo:

$$(\xi_1)_{x_1 x_2} = 0$$

Sfruttando questo risultato, derivando (4) due volte, una rispetto a x_1 e una rispetto a x_2, e imponendo poi $(\xi_3)_{t x_2} = (\xi_3)_{x_2 t} = 0$, otteniamo:

$$(\xi_2)_{x_2 x_2} = 0$$

Imponiamo infine $(\xi_2)_{t x_2} = (\xi_2)_{x_2 t}$, otteniamo allora:

$$(\xi_2)_{x_2 t} = 3(\xi_1)_{x_1 t}$$
$$(\xi_2)_{t x_2} = (\xi_3)_t - (\xi_1)_{x_2}$$

Da cui:

$$3(\xi_1)_{x_1 t} = 2(\xi_1)_{x_1} - (\xi_1)_{x_2}$$

Per quanto visto finora il sistema costituito dalle equazioni (4),(5),(6) e (7) ha soluzione se e solo se la funzione ξ_1 è della forma:

$$\xi_1(x_1, x_2, t) = x_1 h(t) + x_2 \big(2h(t) - 3h'(t)\big) + g(t)$$

(II) Studiamo ora le condizioni di risolubilità del sistema costituito dalle equazioni (2) e (3); innanzitutto per i risultati già ottenuti tali equazioni diventano:

$$\begin{aligned} (2):\quad & f_{1\,t} = \frac{1}{2} f_{1\,x_1 x_1} + (x_1 - x_2) f_{1\,x_2} \\ (3):\quad & (\xi_1)_t = (x_1 - x_2)(\xi_1)_{x_2} - f_{1\,x_1} \end{aligned}$$

Con una traslazione dei membri di (3) e derivando (2) una volta rispetto a x_1 otteniamo:

$$\begin{aligned} (2)': \quad f_{1\,x_1 t} &= f_{1\,x_2} + (x_1 - x_2) f_{1\,x_1 x_2} \\ (3): \quad f_{1\,x_1} &= (x_1 - x_2)(\xi_1)_{x_2} - (\xi_1)_t \end{aligned}$$

Ove abbiamo imposto:

$$\begin{aligned} f_{1\,x_1 t} &= f_{1\,t x_1} \\ f_{1\,x_1 x_2} &= f_{1\,x_2 x_1} \end{aligned}$$

Ora:

• Derivando ulteriormente (2) rispetto a x_1 otteniamo:

$$(2)'': \quad f_{1\,x_1 x_1 t} = f_{1\,x_1 t x_1} = 2 f_{1\,x_1 x_2}$$

Sostituendo (3) in (2)″ abbiamo allora:

$$\begin{aligned} \diamond: \quad (\xi_1)_{x_1 t t} &= 2(\xi_1)_{x_2} + 3(\xi_1)_{x_2 t} \\ &\Rightarrow h''(t) = \frac{2}{5} h(t) \end{aligned}$$

• Consideriamo ancora l'equazione (2)′, che può essere riscritta nel modo seguente:

$$(2)': \quad f_{1\,x_2} = f_{1\,x_1 t} + (x_2 - x_1) f_{1\,x_1 x_2}$$

Sostituendo poi (3) nel membro a destra otteniamo:

$$(*): \quad f_{1\,x_2} = 2(x_1 - x_2)(\xi_1)_{x_2 t} + (x_1 - x_2)(\xi_1)_{x_2} - (\xi_1)_{tt}$$

Derivando poi l'equazione (2) rispetto a x_2:

$$f_{1_{x_2 t}} = (x_1 - x_2) f_{1_{x_2 x_2}} - f_{1_{x_2}}$$

Sostituendo, infine, $(*)$ in quest'uguaglianza:

$$3(x_1 - x_2)(\xi_1)_{x_2 tt} + 5(x_1 - x_2)(\xi_1)_{x_2 t} + 2(x_1 - x_2)(\xi_1)_{x_2} - (\xi_1)_{tt} - (\xi_1)_{ttt} = 0$$

Da cui il sistema:

$$\begin{cases} -10h'''(t) - 10h''(t) + 4h'(t) + 4h(t) = 0 \\ 3h''''(t) + 10h'''(t) + 7h''(t) - 4h'(t) - 4h(t) = 0 \\ g'(t) = -g''(t) \end{cases}$$

Troviamo allora le seguenti condizioni su h e g:

$$\begin{cases} h''''(t) = h''(t) \\ g(t) = (1 - e^{-t})k_1 + k_2 \end{cases}$$

Al sistema va poi aggiunta la relazione $\diamond$:

$$\begin{cases} h''''(t) = h''(t) \\ h''(t) = \dfrac{2}{5} h(t) \end{cases}$$

da cui otteniamo $h''''(t) = h''(t) = h(t) = 0$. In definitiva abbiamo:

$$\xi_1(x_1, x_2, t) = (1 - e^{-t})k_3 + k_4$$
$$k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

Il metodo utilizzato per trovare f_1, ξ_2 e ξ_3 è quello descritto nel punto (III) della sezione precedente.

F - Risultati della sezione 3.3

Mostriamo i passaggi essenziali per la risoluzione del sistema:

$$
\begin{aligned}
(2): \quad & f_1 = 0 \\
(3): \quad & (\xi_1)_t = \frac{1}{2}x_1^2(\xi_1)_{x_1x_1} + x_1(\xi_1)_{x_2} \\
(4): \quad & (\xi_2)_t = \frac{1}{2}x_1^2(\xi_2)_{x_1x_1} + x_1(\xi_2)_{x_2} + \frac{1}{2}x_1^3(\xi_3)_{x_1x_1} + x_1^2(\xi_3)_{x_2} - x_1(\xi_3)_t - \xi_1 \\
(5): \quad & \frac{1}{2}x_1^2(\xi_3)_t = \frac{1}{4}x_1^4(\xi_3)_{x_1x_1} + \frac{1}{2}x_1^3(\xi_3)_{x_2} + x_1^2(\xi_1)_{x_1} - x_1\xi_1 \\
(6): \quad & (\xi_2)_{x_1} = 0 \\
(7): \quad & (\xi_3)_{x_1} = 0
\end{aligned}
$$

Anche in questo caso cercheremo di determinare un' espressione generale per ξ_1 e di ricavare da quest'ultima le funzioni ξ_2 e ξ_3 .

(I) Sfruttando innanzitutto le equazioni (6) e (7) le equazioni (4) e (5) vengono così riformulate:

$$
\begin{aligned}
(4): \quad & (\xi_2)_t = x_1(\xi_2)_{x_2} + x_1^2(\xi_3)_{x_2} - x_1(\xi_3)_t - \xi_1 \\
(5): \quad & \frac{1}{2}x_1^2(\xi_3)_t = \frac{1}{2}x_1^3(\xi_3)_{x_2} + x_1^2(\xi_1)_{x_1} - x_1\xi_1
\end{aligned}
$$

Derivando (4) una volta rispetto a x_1, e imponendo:

$$
\begin{aligned}
(\xi_2)_{tx_1} = (\xi_2)_{x_1t} = 0, \ (\xi_2)_{x_2x_1} = (\xi_2)_{x_1x_2} = 0 \\
(\xi_3)_{tx_1} = (\xi_3)_{x_1t} = 0, \ (\xi_3)_{x_2x_1} = (\xi_3)_{x_1x_2} = 0
\end{aligned}
$$

otteniamo:

$$
(4)': \quad (\xi_1)_{x_1} = (\xi_2)_{x_2} + 2x_1(\xi_3)_{x_2} - (\xi_3)_t
$$

Sostituendo questo risultato in (5) e dividendo per x_1 (ricordiamo che per ipotesi $x_1 > 0$):

$$(*)\ :\quad \frac{3}{2}x_1(\xi_3)_t \ = \ \frac{5}{2}x_1^2(\xi_3)_{x_2} + x_1(\xi_2)_{x_2} - \xi_1$$

Derivando $(*)$ due volte rispetto a x_1 otteniamo:

$$(*)''\ :\quad (\xi_3)_{x_2} \ = \ \frac{1}{5}(\xi_1)_{x_1 x_1}$$

Derivando (4) due volte rispetto a x_1 otteniamo:

$$(*)''\ :\quad (\xi_3)_{x_2} \ = \ \frac{1}{2}(\xi_1)_{x_1 x_1}$$

Da cui:

$$(\xi_3)_{x_2} = (\xi_1)_{x_1 x_1} = 0$$

Le equazioni (4) e (5) diventano allora:

$$\begin{aligned} (4)\ :&\quad (\xi_2)_t \ = \ x_1(\xi_2)_{x_2} - x_1(\xi_3)_t - \xi_1 \\ (5)\ :&\quad \frac{1}{2}x_1(\xi_3)_t \ = \ x_1(\xi_1)_{x_1} - \xi_1 \end{aligned}$$

Derivandole entrambe rispetto a x_1 otteniamo così:

$$\begin{aligned} (5)'\ :&\quad (\xi_3)_t \ = \ 0 \\ (4)'\ :&\quad (\xi_2)_{x_2} \ = \ (\xi_1)_{x_1} \end{aligned}$$

Imponendo infine:

$$(\xi_2)_{t x_2} = (\xi_2)_{x_2 t}$$

otteniamo:

$$\bullet\ :\quad x_1(\xi_1)_{x_1 x_2} - (\xi_1)_{x_2} = (\xi_1)_{x_1 t}$$

(II) Per i risultati ottenuti il sistema viene così riformulato:

$$
\begin{aligned}
(2):&\quad f_1 = 0\\
(3):&\quad (\xi_1)_t = x_1(\xi_1)_{x_2}\\
(4):&\quad (\xi_2)_t = x_1(\xi_2)_{x_2} - \xi_1\\
(5):&\quad \xi_1 = x_1(\xi_1)_{x_1}\\
(6):&\quad (\xi_2)_{x_1} = 0,\ (\xi_2)_{x_2} = (\xi_1)_{x_1}\\
(7):&\quad \xi_3 = k_3
\end{aligned}
$$

Da (5) otteniamo:

$$\xi_1 = x_1 h(x_2, t)$$

Sostituendo questo risultato in (3):

$$x_1 h_t = x_1^2 h_{x_2}$$

Da cui:

$$h_t = h_{x_2} = 0$$

E dunque:

$$\xi = k_1 x_1$$

Per la funzione ξ_2 avremo allora, da (6) e da (4):

$$
\begin{aligned}
&(\xi_2)_{x_2} = k_1\\
&\xi_2 = \xi_2(x_2)\\
&\Rightarrow\ \xi_2(x_1, x_2, t) = k_1 x_2 + k_2
\end{aligned}
$$

Bibliografia

[1] G.W. Bluman, S. Kumei: *Symmetries and Differential Equations* Springer-Verlag 1989 cap. 2 e sez. 4.1.1 - 4.2.3

[2] L.V. Ovsiannikov: *Group Analysis of Differential Equations* Academic Press, New York 1982 cap. 2 e sez. 4.1.1 - 4.2.3

[3] L.C. Evans: *Partial Differential Equations* American Mathematical Society 1997 sez. 3.2

Per approfondimenti sulla nozione di *gruppi di tipo Kolmogorov*:

[4] A. Bonfiglioli, E. Lanconelli, F. Uguzzoni: *Stratified Lie Groups and Potential Theory for their Sub-Laplacians* Springer, 2007 sez. 4.1.4

[5] E. Lanconelli, S.Polidoro: *On a class of hypoelliptic evolution operators* Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino Vol. 52, 1 Partial Diff. Eqs. 1994

Per approfondimenti sull'analisi stocastica e su alcuni esempi:

[6] A.Pascucci: *PDE and Martingale Methods in Option Pricing* Springer, 2008 sez. 9.5

[7] L.Monti, A.Pascucci: *Obstacle problem for Arithmetic Asian options* C.R.Acad.Sci.Paris, Ser.I 347, 2009