

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

**SERIE DI FUNZIONI
MEROMORFE**

Tesi di Laurea in Istituzioni di Geometria Superiore I

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Salvatore Coen

Presentata da:
Giorgia Casadei

II Sessione
Anno Accademico 2011/2012

Indice

Introduzione	iii
1 CONVERGENZA DI SERIE DI FUNZIONI MEROMORFE	1
1.1 TEOREMI E DEFINIZIONI	1
2 SERIE DI EISENSTEIN ε_k	7
2.1 SERIE DI EISENSTEIN CON $k = 1$	10
2.2 SERIE DI EISENSTEIN CON $k = 2$	12
2.3 ULTIME PROPRIETÀ SULLE SERIE DI EISENSTEIN . . .	14
2.4 ESEMPIO	14
3 FUNZIONE \wp DI WEIERSTRASS	17
4 PRODOTTI INFINITI	23
4.1 DEFINIZIONI	23
4.2 PROPRIETÀ DEI PRODOTTI NORMALMENTE CON- VERGENTI DI FUNZIONI OLOMORFE	26
4.3 ESEMPIO: Sviluppo del $\sin \pi z$ in un prodotto infinito	28
5 FUNZIONE Γ	31
5.1 IL TEOREMA DI WEIERSTRASS	31
5.2 DEFINIZIONE DI Γ TRAMITE LA NOZIONE DI PRODOTTI INFINITI	35
5.3 RAPPRESENTAZIONE INTEGRALE DI $\Gamma(z)$	42
Bibliografia	43

Introduzione

La nozione di convergenza per una serie di funzioni meromorfe può essere espressa in più modi.

Si è trovato così un modo efficiente di estendere la nozione di convergenza uniforme sui compatti, già nota per le serie di funzioni olomorfe, al caso delle serie di funzioni meromorfe, fornendo una definizione di limite per una tale serie che implicasse che se una serie converge ad una funzione f , questa sia meromorfa.

Si tratta di imporre una “condizione di dispersione dei poli”, richiedendo che, per ogni compatto K dell’aperto considerato, da un certo indice in poi le funzioni meromorfe della serie non abbiano poli su K . Senza tale condizione l’operazione di limite uniforme sui compatti non sarebbe chiusa nello spazio delle funzioni meromorfe; basti pensare alla serie $\sum_n \frac{1}{n!z^n}$ che converge uniformemente sui compatti di $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ alla funzione $e^{\frac{1}{z}}$, ma che come serie di funzioni meromorfe su \mathbb{C} non converge uniformemente sui compatti.

Una volta introdotta questa nozione e studiatene le proprietà principali nel primo capitolo, iniziamo lo studio di particolari serie di funzioni meromorfe, scelte per l’importanza che hanno nelle loro applicazioni.

Il secondo capitolo è dedicato alle serie di Eisenstein

$$\varepsilon_k(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Si studiano alcune proprietà generali di queste serie e, approfondendo i risultati nel caso $k = 1, 2, 3$, si ottengono sviluppi meromorfi classici per le funzioni $\frac{1}{\sin z}$, $\cot z$ ed altre. Questi risultati classici ci permettono anche di ritrovare la celebre formula di Eulero

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Dopo un breve studio sui sottogruppi additivi discreti Ω di \mathbb{C} , introduciamo e studiamo le funzioni \wp_Ω di Weierstrass, molto importanti nello studio delle funzioni ellittiche (che però la tesi non affronta).

La nozione di prodotto infinito è, a questo punto, uno strumento necessario per introdurci ai metodi usati nello studio delle funzioni speciali ed in particolare della funzione Γ . Si introduce così la nozione di prodotto infinito convergente sia nel caso numerico che in quello funzionale, con particolare interesse per i prodotti infiniti di funzioni olomorfe, e si provano i relativi teoremi principali.

L'ultimo capitolo è dedicato alla funzione Γ , introdotta e studiata attraverso la sua inversa moltiplicativa, a sua volta definita attraverso un opportuno prodotto infinito; in tal modo è relativamente semplice trovare le formule principali relative alla Γ . L'espressione della Γ in termini integrali è invece solo accennata.

Capitolo 1

CONVERGENZA DI SERIE DI FUNZIONI MEROMORFE

In questo primo capitolo introduciamo la nozione di convergenza uniforme sui compatti per le serie di funzioni meromorfe ed insieme la nozione di somma di tali serie, in modo che la somma f di una serie di funzioni meromorfe uniformemente convergente sui compatti sia essa stessa una funzione meromorfa.

Studiamo inoltre alcune proprietà di tali serie.

1.1 TEOREMI E DEFINIZIONI

Prima di introdurre i principali teoremi sulla convergenza di serie di funzioni meromorfe, enunciamo e dimostriamo il seguente lemma che costituisce un importante risultato sulla convergenza di funzioni olomorfe e che ci tornerà utile in seguito.

Indichiamo con $\mathcal{H}(D)$ lo spazio vettoriale delle funzioni olomorfe su D .

Lemma 1.1.1. *Sia D un aperto del piano complesso.*

Sia data una successione di funzioni $f_n \in \mathcal{H}(D)$ che converge uniformemente sui compatti di D a una funzione f , allora

$f \in \mathcal{H}(D)$ e la successione delle derivate f'_n converge uniformemente alla derivata f' sui compatti di D .

Dimostrazione. Per dimostrare che f è olomorfa su D è sufficiente mostrare, usando il teorema di Morera, che la forma differenziale $f(z)dz$ è localmente esatta su D (vedere “Théorie Élémentaire des Fonctions Analytiques d’Une ou Plusieurs Variables Complexes”, di H. Cartan, teorema 1 cap. V, par. 1, sottopar. 2).

Questa prima parte del teorema è il noto *Teorema di Weierstrass sulla convergenza uniforme sui compatti*.

Per dimostrare che la serie delle derivate f'_n converge uniformemente a f' sui compatti di D , è sufficiente mostrare che f'_n converge uniformemente a f' su ogni disco chiuso di D , infatti la convergenza uniforme sui compatti dell'aperto D equivale alla convergenza uniforme sui dischi chiusi di D .

Sia perciò ora $\overline{B}(z_0, r) \subset D$. Sia R tale che $r < R$ con $\overline{B}(z_0, R) \subset D$. Ora: $\forall z \in B(z_0, R)$ si ha (per il teorema di rappresentazione di Cauchy)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-z_0|=R} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi.$$

Derivando rispetto alle variabili x e y , potendo passare al limite sotto il segno di integrale quando c'è convergenza uniforme per il Teorema sulla convergenza dominata di Lebesgue (vedere cap. 5 "Lezioni di Analisi Matematica 2, Prima parte" di E. Lanconelli), otteniamo

$$f_x(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-z_0|=R} \frac{-f(\xi)}{(\xi-z)^2} d\xi$$

e

$$f_y(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-z_0|=R} \frac{-i f(\xi)}{(\xi-z)^2} d\xi,$$

quindi vale l'equazione di Cauchy-Riemann $f_y = i f_x$, perciò f è olomorfa. Quindi la derivata rispetto a z , data dalla formula

$$f'(z) = \frac{1}{2} (f_x(z) - i f_y(z)),$$

è

$$f'(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-z_0|=R} \frac{-f(\xi)}{(\xi-z)^2} d\xi - \frac{i}{2\pi i} \int_{|\xi-z_0|=R} \frac{-i f(\xi)}{(\xi-z)^2} d\xi \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-z_0|=R} \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2} d\xi.$$

Questo vale $\forall z \in B(z_0, R)$ e quindi in particolare vale anche $\forall z \in \overline{B}(z_0, r)$. Così f' è olomorfa.

Così $\forall z \in B(z_0, R)$

$$f'(z) - f'_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-z_0|=R} \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-z_0|=R} \frac{f_n(\xi)}{(\xi-z)^2} d\xi.$$

Così

$$f'(z) - f'_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-z_0|=R} \frac{f(\xi) - f_n(\xi)}{(\xi-z)^2} d\xi.$$

Per $z \in \overline{B(z_0, r)}$ vale

$$|f'(z) - f'_n(z)| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi R \left\| \frac{f - f_n}{(\xi - z)^2} \right\|_{\overline{B(z_0, R)}} \quad ;$$

poichè $|\xi - z| \geq R - r$ (v. Figura 1.1), allora

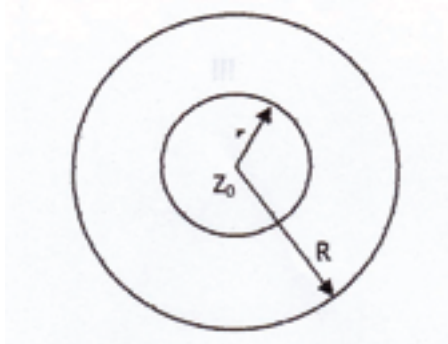


Figura 1.1: ξ varia lungo il bordo del disco di raggio R , z varia nel disco di raggio r .

$$\frac{1}{|\xi - z|^2} \leq \frac{1}{|R - r|^2},$$

quindi

$$\|f' - f'_n\|_{\overline{B(z_0, r)}} \leq \frac{R}{(R - r)^2} \|f - f_n\|_{\overline{B(z_0, R)}}$$

poichè il secondo membro della disuguaglianza tende a 0 per $n \rightarrow \infty$, anche il primo termine della disuguaglianza va a 0. Quindi

$$f'_n \rightarrow f'$$

uniformemente sul disco chiuso $\overline{B(z_0, r)}$. □

Entriamo ora nella teoria della convergenza di funzioni meromorfe. Sia D un aperto del piano complesso \mathbb{C} ; consideriamo una successione di funzioni f_n meromorfe su D .

Definizione 1.1.2. Si dice che la serie $\sum f_n$ di funzioni f_n meromorfe su D converge uniformemente sui compatti di D se ad ogni compatto $K \subset D$ corrisponde un indice $m = m(K)$ tale che:

1. per ogni $n \geq m$ l'insieme dei poli di f_n è disgiunto da K , e
2. la serie di funzioni continue $\sum_{n \geq m} f_n|_K$ converge uniformemente su K .

Cerchiamo concretamente di capire cosa voglia dire questa definizione. La condizione 1. è una “condizione di dispersione dei poli”: data una serie di funzioni meromorfe, la condizione 1. dice che condizione necessaria, affinché la serie converga su un compatto K del piano complesso, è che da un certo indice m in poi tutte le funzioni f_n con $n \geq m$ non abbiano poli su K .

Definizione 1.1.3. Analogamente, si dice che la serie $\sum f_n$ di funzioni f_n meromorfe su D converge normalmente sui compatti di D se ad ogni compatto $K \subset D$ corrisponde un indice $m = m(K)$ tale che:

1. per ogni $n \geq m$ l'insieme dei poli di f_n è disgiunto da K , e
2. la serie di funzioni continue $\sum_{n \geq m} |f_n|_K < \infty$

Osservazione 1.1.4. Chiaramente tutte le serie normalmente convergenti su K , compatto di \mathbb{C} , sono anche uniformemente convergenti su K .

D’ora in poi consideriamo serie di funzioni meromorfe su D , aperto del piano complesso, che convergono uniformemente (o normalmente) su tutti i compatti K contenuti in D .

Definizione 1.1.5. : Somma di una serie di funzioni meromorfe.

La somma di una tale serie, su tutti gli aperti U relativamente compatti di D , è la funzione meromorfa

$$\sum_{n \leq n_0} f_n + \sum_{n > n_0} f_n, \quad (1.1)$$

ove n_0 è scelto in modo che per le f_n con $n > n_0$ non ci siano poli sulla chiusura di \bar{U} (e quindi la serie $\sum_{n > n_0} f_n$ converga uniformemente sulla chiusura di \bar{U}).

Per verificare che la definizione sia ben posta occorre che la somma così definita sia una funzione meromorfa e che non dipenda dalla scelta dell’indice n_0 .

Nella definizione appena data il primo termine è una funzione meromorfa su U , in quanto somma di un numero finito di funzioni meromorfe; il secondo

termine è una funzione olomorfa su U , per il teorema che afferma che la somma di una serie di funzioni olomorfe che convergono uniformemente su tutti i compatti, converge ad una funzione olomorfa su U .

Quindi la somma di una serie di funzioni meromorfe è meromorfa.

Sia n_1 un altro indice tale che $n_1 > n_0$ e tale che la serie $\sum_{n>n_1} f_n$ converga

uniformemente sulla chiusura di \bar{U} , allora $\sum f_n = \sum_{n \leq n_0} f_n + \sum_{n_0 < n \leq n_1} f_n +$

$\sum_{n>n_1} f_n$. Il primo e il secondo addendo sono funzioni meromorfe su U in

quanto somma di un numero finito di funzioni meromorfe e il terzo addendo, come prima, è una funzione olomorfa su U .

Quindi la definizione non dipende dall'indice n_0 .

Così la *definizione è ben posta*.

Introduciamo ora il risultato della teoria della convergenza di serie di funzioni meromorfe che ci permetterà di sviluppare il resto della teoria.

Una serie uniformemente convergente di funzioni meromorfe su D converge ad una funzione meromorfa. Precisamente:

Teorema 1.1.6 (Teorema di convergenza). *Sia $\sum f_n$ una serie di funzioni meromorfe su D .*

Se tale serie converge uniformemente (risp. normalmente) su tutti i compatti di D , la somma f della serie è una funzione meromorfa su D ;

la serie $\sum f'_n$ delle derivate converge uniformemente (risp. normalmente) su tutti i compatti di D e la sua somma è la derivata f' della somma f della serie data.

Dimostrazione. Abbiamo già visto sopra che la somma di una serie uniformemente convergente di funzioni meromorfe è meromorfa su tutti gli aperti relativamente compatti $U \subset D$ e perciò è meromorfa su D .

Sia dato un aperto U relativamente compatto, scegliamo n_0 come in (1.1); su U si ha

$$\left(\sum_n f_n \right)' = \left(\sum_{n \leq n_0} f_n + \sum_{n > n_0} f_n \right)' = \sum_{n \leq n_0} f'_n + \left(\sum_{n > n_0} f_n \right)' \quad (1.2)$$

il primo termine della somma è tale perchè la derivata è lineare.

Possiamo derivare termine a termine il secondo termine della somma (1.2), poichè converge uniformemente su tutti i compatti di U : per il lemma 1.1.1, possiamo dire che la serie delle derivate $\sum_{n>n_0} f'_n$ converge uniformemente verso

$\left(\sum_{n>n_0} f_n\right)'$ su tutti i compatti contenuti in U .

Questo prova che la serie $\sum f_n'$ di funzioni meromorfe converge uniformemente verso f' su tutti i compatti di U .

Poichè questo è vero per tutti gli aperti relativamente compatti U , ne segue che $\sum f_n'$ converge uniformemente a f' su tutti i compatti contenuti in D .

Possiamo inoltre concludere che se la serie $\sum_n f_n$ converge normalmente su tutti i compatti di D ne segue che anche la serie $\sum_n f_n'$ converge normalmente su tutti i compatti di D . □

Osservazione 1.1.7. L'insieme $P(f)$ dei poli di f è contenuto nell'unione degli insiemi $P(f_n)$, ove ciascun $P(f_n)$ indica l'insieme dei poli di f_n . Inoltre la relazione (1.1) mostra che se gli insiemi $P(f_n)$ sono a due a due disgiunti, l'insieme $P(f)$ è uguale all'unione degli insiemi $P(f_n)$; per essere più precisi, se z_0 è un polo di ordine k di f_n allora è un polo di ordine k di f .

Quindi, nella definizione di convergenza di serie di funzioni meromorfe, i poli delle funzioni meromorfe f_n non creano difficoltà!

La “dispersione dei poli” è l'unica novità introdotta, in quanto tutto il resto procede come nella teoria della convergenza delle funzioni olomorfe.

Capitolo 2

SERIE DI EISENSTEIN ε_k

Nel 1847 il matematico tedesco Gotthold Eisenstein introdusse nella teoria delle funzioni trigonometriche le serie

$$\varepsilon_k(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

che oggi sono chiamate serie di Eisenstein. Queste serie sono il più semplice esempio di serie normalmente convergenti di funzioni meromorfe.

Lo scopo del capitolo è studiare le proprietà di queste serie.

Prima di passare a delle particolari serie di Eisenstein ($k = 1$ e $k = 2$), facciamo alcune osservazioni di carattere generale.

Osservazione 2.0.8. Abbiamo detto sopra che la serie di Eisenstein è

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

che può essere scritta anche equivalentemente

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Per ogni $r > 0$ vale la disuguaglianza

$$|z \pm n|^k \geq (n-r)^k \quad \text{per } k \geq 1, n \in \mathbb{N}, |z| \leq r < n.$$

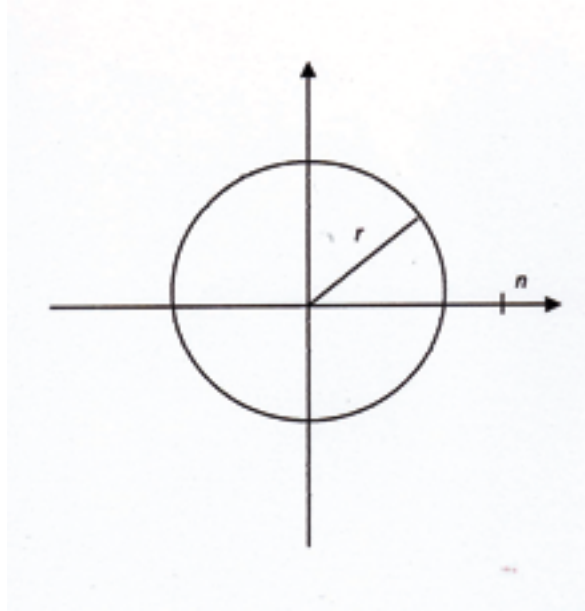


Figura 2.1: z varia dentro al disco di raggio r .

Infatti dimostriamo $|z - n|^k \geq (n - r)^k$ per induzione su k :
per ogni $r > 0$ tale che $|z| \leq r < n$ (v. Figura 2.1) si ha $|z - n| = |n - z| \geq n - |z| \geq n - r$, così abbiamo dimostrato che la formula sopra vale per $k = 1$; ora supponiamola vera per k e dimostriamola per $k + 1$:

$$|z - n|^{k+1} = |n - z|^{k+1} = |n - z|^k |n - z| \geq (n - r) |n - z|^k = (n - r) |n - z|^{k-1} |n - z| \geq \dots \geq (n - r)^{k+1}.$$

Analogamente si dimostra la disuguaglianza $|z + n|^k \geq (n - r)^k$.

Consideriamo $K = B_r(0)$ e osserviamo che

$$\left| \frac{1}{(z \pm n)^k} \right|_K \leq \frac{1}{(n - r)^k} \quad \text{per } k \geq 1, n > r$$

e che

$$\left| \frac{1}{z + n} - \frac{1}{n} \right|_K \leq \frac{r}{n(n - r)} \quad \text{per } n > r.$$

Poichè la serie $\sum \frac{1}{n^k}$ converge (per $k > 1$) e la serie $\sum \frac{1}{n(n - r)}$ converge, e poichè ogni compatto in \mathbb{C} giace su un disco $B_r(0)$, si ha che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z + n)^k} \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z - n)^k} \quad (k \geq 2)$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right) \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right)$$

convergono normalmente in \mathbb{C} ad una funzione meromorfa.

La somma delle prime due serie e delle ultime due serie mostra che anche

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^k}, \quad k \geq 2, \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

Infatti

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f_n := \sum_0^{\infty} f_n + \sum_{-\infty}^{-1} f_n,$$

ove $\sum_{-\infty}^{-1}$ significa $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{-n}^{-1}$,

allora una serie di funzioni è convergente se convergono entrambe le serie della somma, cioè $\sum_{-\infty}^{\infty} f_n$ converge normalmente (o uniformemente) se con-

vergono normalmente (o uniformemente) entrambe le serie $\sum_0^{\infty} f_n$ e $\sum_{-\infty}^{-1} f_n$ (la condizione è sufficiente ma non necessaria).

Quindi poichè

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^k} = \sum_0^{\infty} \frac{1}{(z+n)^k} + \sum_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(z+n)^k}$$

e

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{n} \right) = \sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right) + \sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right),$$

allora

le serie di funzioni meromorfe su \mathbb{C} date da

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \quad \text{e}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^k}, \quad k \geq 2$$

sono normalmente convergenti su \mathbb{C} .

2.1 SERIE DI EISENSTEIN CON $k = 1$

In questo sottoparagrafo studiamo le serie di Eisenstein per $k = 1$, sviluppando questo argomento con un approccio che si ispira a quello seguito da R. Remmert nel libro “Theory of Complex Functions”.

Si ha che

$$\varepsilon_1(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{-n}^n \frac{1}{z+n} = \frac{1}{z} + \sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n} \right) = \frac{1}{z} + \sum_1^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2},$$

ε_1 coinvolge serie di funzioni meromorfe che convergono normalmente in \mathbb{C} e così, per il Teorema di convergenza, ε_1 è una funzione meromorfa su \mathbb{C} .

Possiamo scrivere

$$\varepsilon_1(z) = \frac{1}{z} + \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right).$$

Iniziamo caratterizzando la funzione cotangente:

vediamo ora lo **sviluppo in frazioni parziali di $\pi \cot \pi z$** .

La funzione $\pi \cot \pi z$ è olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ e ogni $m \in \mathbb{Z}$ è un polo semplice con parte principale $(z-m)^{-1}$, infatti poiché $\cot \pi z = \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$, dallo sviluppo di

$$\sin \pi z = (-1)^n \pi (z-n) + g(z)$$

e

$$\cos \pi z = (-1)^n + \frac{(-1)^{(n+1)} \pi (z-n)^2}{2} + h(z),$$

ove $g(z)$ e $h(z)$ sono polinomi di potenze più alte di $(z-n)$, ne segue che $\pi \cot \pi z = \frac{1}{z-n} + f(z)$, ove $f(z)$ è una serie di potenze di $(z-n)$. Inoltre $\pi \cot \pi z$ è una funzione dispari e soddisfa la *formula di duplicazione*

$$2\pi \cot 2\pi z = \pi \cot \pi z + \pi \cot \pi \left(z + \frac{1}{2} \right).$$

Mostriamo ora che questa proprietà caratterizza la cotangente.

Lemma 2.1.1. *Sia g una funzione olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ e con parte principale $(z-m)^{-1}$ per ogni $m \in \mathbb{Z}$. Sia inoltre una funzione dispari e soddisfacente la formula di duplicazione*

$$2g(2z) = g(z) + g\left(z + \frac{1}{2}\right),$$

allora $g(z) = \pi \cot \pi z$ per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $h(z) := g(z) - \pi \cot \pi z$; è intera e dispari e soddisfa la relazione

$$2h(2z) = h(z) + h\left(z + \frac{1}{2}\right), \quad h(0) = 0. \quad (2.1)$$

Supponiamo per assurdo che h non sia la funzione identicamente nulla. Per il principio del massimo $\exists c \in \overline{B_2(0)}$ tale che $|h(z)| < |h(c)| \forall z \in B_2(0)$. Poichè sia $\frac{1}{2}c$ sia $\frac{1}{2}(c+1)$ appartengono a $B_2(0)$, segue che

$$\left| h\left(\frac{1}{2}c\right) + h\left(\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}\right) \right| \leq \left| h\left(\frac{1}{2}c\right) \right| + \left| h\left(\frac{1}{2}(c+1)\right) \right| < 2|h(c)|,$$

ma (se $z = \frac{c}{2}$) questo contraddice la (2.1).

Quindi h deve essere la funzione 0 e $g(z) = \pi \cot \pi z$. \square

Teorema 2.1.2. *La funzione cotangente ha in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ la seguente rappresentazione in serie:*

$$\pi \cot \pi z = \varepsilon_1(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z+n} = \frac{1}{z} + \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{z} + \sum_1^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \quad (2.2)$$

Dimostrazione. Dalla definizione di ε_1 deduciamo subito che è una funzione olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ e ha parte principale $(z-m)^{-1}$ per ogni $m \in \mathbb{Z}$.

Direttamente dalla definizione segue che $\varepsilon_1(-z) = -\varepsilon_1(z)$. E si verifica che la somma parziale $s_n(z) = \frac{1}{z} + \sum_1^n \left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n} \right)$ soddisfa

$$s_n(z) + s_n\left(z + \frac{1}{2}\right) = 2s_{2n}(z) + \frac{1}{2z + 2n + 1},$$

da cui passando al limite per $n \rightarrow \infty$, ricaviamo la formula di duplicazione

$$2\varepsilon_1(2z) = \varepsilon_1(z) + \varepsilon_1\left(z + \frac{1}{2}\right).$$

In questo modo $\varepsilon_1(z)$ soddisfa le ipotesi del lemma precedente e perciò possiamo dire che $\varepsilon_1(z) = \pi \cot \pi z$. \square

L'identità (2.2) è chiamata la *rappresentazione in frazioni parziali di $\pi \cot \pi z$* .

2.2 SERIE DI EISENSTEIN CON $k = 2$

Ora poniamo $k = 2$ e consideriamo

$$\varepsilon_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}. \quad (2.3)$$

Sia $f(z)$ la somma di questa serie. Poichè questa serie di funzioni meromorfe, per l'osservazione 2.0.8, converge uniformemente su \mathbb{C} , applichiamo il Teorema di convergenza e osserviamo che $f(z)$ è una funzione meromorfa su tutto il piano complesso \mathbb{C} .

La funzione f ammette periodo 1, cioè $f(z+1) = f(z) \forall z \in \mathbb{C}$, infatti

$$\sum_n \frac{1}{(z+1-n)^2} = \sum_{n'} \frac{1}{(z-n')^2}, \quad \text{ponendo} \quad n-1 = n'.$$

I poli di f sono e sono solo i punti interi $z = n$ e sono dei poli doppi.

Il residuo in tali poli è nullo, poichè in un intorno del punto $z = \bar{n}$ si ha

$$f(z) = \frac{1}{(z-\bar{n})^2} + g(z), \quad g \text{ olomorfa.}$$

Proposizione 2.2.1. *La somma $f(z)$ della serie $\varepsilon_2(z)$ è $(\frac{\pi}{\sin \pi z})^2$.*

Dimostrazione. Consideriamo l'identità ottenuta precedentemente

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right). \quad (2.4)$$

Dalla nota identità $(\cot z)' = -\frac{1}{(\sin z)^2}$ e applicando il Teorema di convergenza alla serie normalmente convergente (2.4), otteniamo il classico sviluppo in frazioni parziali

$$\left(\frac{\pi}{\sin \pi z} \right)^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}.$$

Infatti derivando il primo membro dell'identità (2.4) otteniamo

$$(\pi \cot \pi z)' = -\left(\frac{\pi}{\sin \pi z} \right)^2$$

e derivando il secondo membro otteniamo

$$\left(\frac{1}{z} + \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right) \right)' = -\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}.$$

Così

$$-\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 = -\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2},$$

cioè

$$\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}.$$

□

Prima di passare alle prossime proprietà delle serie di Eisenstein, vediamo una piccola applicazione di quanto visto.

Applicazione 2.2.2 (della serie di Eisenstein con $k = 2$).

Dai risultati ottenuti si ha

$$\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 - \frac{1}{z^2} = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{(z-n)^2},$$

ove il secondo membro è una funzione $h(z)$ olomorfa intorno a $z = 0$. Si ha che $h(0) = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2}$ perciò

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left(\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 - \frac{1}{z^2} \right) = 2 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}. \quad (2.5)$$

Il primo membro dell'equazione (2.5) si calcola facilmente grazie allo sviluppo

$$\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{\pi z - \frac{1}{6}\pi^3 z^3 + \dots}\right)^2 = \frac{1}{z^2} \left(1 - \frac{1}{6}\pi^2 z^2 + \dots\right)^{-2} = \frac{1}{z^2} + \frac{\pi^2}{3} + z^2(\dots)$$

e il suo valore è $\frac{\pi^2}{3}$,

da ciò otteniamo la relazione

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

dovuta ad Eulero.

2.3 ULTIME PROPRIETÀ SULLE SERIE DI EISENSTEIN

Ricapitolando, abbiamo visto che le serie di Eisenstein sono normalmente convergenti in \mathbb{C} per tutti gli interi $k \geq 2$ e di conseguenza, per il Teorema di convergenza, rappresentano funzioni meromorfe su \mathbb{C} .

Dalla definizione si ha subito che ε_k è olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ e che in ogni $n \in \mathbb{Z}$ ha un polo di ordine k e parte principale $1/(z - n)^k$.

Abbiamo visto che

$$\varepsilon_2(z) = \left(\frac{\pi}{\sin \pi z} \right)^2$$

e analogamente si vede che

$$\varepsilon_3(z) = \pi^3 \frac{\cot \pi z}{\sin^2 \pi z}.$$

Così $\varepsilon_3 = \varepsilon_2 \varepsilon_1$, un'identità che non poteva essere ricavata facilmente e direttamente dalla rappresentazione in serie.

Vediamo infine un ultimo teorema sulle serie di Eisenstein:

Teorema 2.3.1 (Teorema di periodicità). *Sia $k \geq 1$ un intero, sia $\omega \in \mathbb{C}$.*

Allora

$$\varepsilon_k(z + \omega) = \varepsilon_k(z) \text{ per ogni } z \in \mathbb{C} \iff \omega \in \mathbb{Z}.$$

Dimostrazione. \Rightarrow Se vale $\varepsilon_k(z + \omega) = \varepsilon_k(z)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$, questo vale sicuramente anche per $z = 0$; poichè 0 è un polo di ε_k , allora anche ω è un polo e quindi $\omega \in \mathbb{Z}$, poichè i poli delle serie di Eisenstein sono gli interi.

\Leftarrow Poichè la serie, dato che è normalmente convergente, può essere riordinata a piacere, otteniamo che, per ogni k , $\varepsilon_k(z + 1) = \varepsilon_k(z)$. Da ciò segue che $\varepsilon_k(z + n) = \varepsilon_k(z)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$. \square

2.4 ESEMPIO

Ritroviamo ora, in modo diverso, la formula dello sviluppo in frazioni parziali di $\pi \cot \pi z$ già trovata precedentemente.

Consideriamo la serie

$$\frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{z - n} + \frac{1}{n} \right). \quad (2.6)$$

Il termine generale della serie è uguale a $\frac{z}{n(z-n)}$; per quanto visto nell'osservazione 2.0.8 la serie è normalmente convergente sui sottoinsiemi compatti di \mathbb{C} .

La sua somma allora è una funzione meromorfa su \mathbb{C} e i suoi poli sono gli interi $z = n$, sono poli semplici con residuo uguale a 1.

Per il Teorema di convergenza, la derivata $F'(z)$ è la somma della serie delle derivate, cioè

$$F'(z) = -\frac{1}{z^2} - \sum_{n \neq 0} \frac{1}{(z-n)^2} = -\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 = \frac{d}{dz} \left(\frac{\pi}{\tan \pi z}\right).$$

Ne segue così che $F(z) - \frac{\pi}{\tan \pi z}$ è una funzione costante.

Comunque, vediamo dalla (2.6) che $F(-z) = -F(z)$, perciò la funzione $F(z) - \frac{\pi}{\tan \pi z}$ è una funzione dispari di z e poichè è una costante, deve essere zero.

La serie (2.6) può essere riscritta mettendo insieme i due termini corrispondenti agli interi n e $-n$:

$$\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right) = \frac{2z}{z^2 - n^2},$$

per ottenere infine la relazione

$$\frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \frac{\pi}{\tan \pi z}. \quad (2.7)$$

Applicazione 2.4.1 (per il calcolo di π).

Scegliendo degli $z \in \mathbb{C}$ particolari è possibile utilizzare la relazione (2.7) come formula per calcolare π .

Ad esempio prendendo $z = \frac{1}{4}$ e ricordando che $\tan \frac{\pi}{4} = 1$, abbiamo che

$$\begin{aligned} 4 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{16} - n^2} &= 4 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{16} - n^2} = 4 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{1 - 16n^2} = \\ &= 4 + \sum_{n \geq 1} \frac{8}{1 - 16n^2} = 4 - \frac{8}{15} - \frac{8}{63} - \dots = 4 \left(1 - \frac{2}{15} - \frac{2}{63} - \dots\right) = \pi. \end{aligned}$$

Questa formula ci dà però un'approssimazione di π molto lenta e quindi di poco interesse.

Capitolo 3

FUNZIONE \wp DI WEIERSTRASS

Sia Ω un sottogruppo discreto di \mathbb{C} della forma

$$\Omega = \{m_1 e_1 + m_2 e_2 \mid (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2\},$$

avente per base un sistema di due vettori $\{e_1, e_2\}$ che sono linearmente indipendenti su \mathbb{R} , cioè tali che $e_1 \neq 0$ e il loro rapporto e_2/e_1 non è reale.

Lo scopo di questo capitolo è ricordare brevemente la definizione e le prime proprietà della funzione \wp di Weierstrass relativa ad un siffatto Ω ;

tale funzione è meromorfa, ammette come periodo i punti di Ω , e i suoi poli sono e sono solo i punti di Ω , ciascuno di ordine 2 e con parte principale $\frac{1}{(z-\omega)^2}$.

Dimostriamo subito un'importante proprietà di Ω :

Proposizione 3.0.2. *Siano $\{e_1, e_2\}, \{f_1, f_2\}$ due basi di \mathbb{R}^2 .*

Siano Ω_e e Ω_f i sottogruppi rispettivamente generati sugli interi da queste due basi in \mathbb{R}^2 , cioè

$$\Omega_e = \{m_1 e_1 + m_2 e_2 \mid (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2\},$$

$$\Omega_f = \{n_1 f_1 + n_2 f_2 \mid (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

Allora $\Omega_e = \Omega_f$ se e solo se la matrice di passaggio A da una base all'altra è a coefficienti interi con determinante 1 o -1 (cioè è una matrice intera unimodulare).

Dimostrazione. Ricordiamo che A è definita da

$$f_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2$$

$$f_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2.$$

\Rightarrow Supponiamo $\Omega_f = \Omega_e$, allora $f_1, f_2 \in \Omega_e$.

Così la matrice A è a coefficienti interi perchè f_1, f_2 sono in Ω_e . Ma anche

$e_1, e_2 \in \Omega_f$, così anche la matrice inversa $B = A^{-1}$, definita da

$$e_1 = b_{11}f_1 + b_{12}f_2,$$

$$e_2 = b_{21}f_1 + b_{22}f_2$$

è a coefficienti interi. Quindi abbiamo visto che i vettori della prima base si esprimono come combinazione lineare a coefficienti interi dei vettori della seconda base e viceversa.

Ne segue così che sia $\det A$ che $\det B$ sono interi e inoltre devono essere uno l'inverso moltiplicativo dell'altro. Perciò deve essere che $\det A = \pm 1$.

⇐ Viceversa, poichè A è a coefficienti interi, dalla sua stessa definizione segue che $\Omega_f \subset \Omega_e$.

Supponiamo che la matrice A a coefficienti interi abbia $\det A = \pm 1$, allora sicuramente $\det B = \pm 1$. Ricordando la stessa formula con cui si calcola la matrice B (i complementi algebrici sono certo interi), segue che B è a coefficienti interi. Allora $\Omega_e \subset \Omega_f$. Quindi $\Omega_e = \Omega_f$. \square

Esempio 3.0.3.

Siano $\{e_1, e_2\} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ e $\{f_1, f_2\} = \{(3, 5), (1, 2)\}$.

Si ha che i coefficienti delle due matrici di passaggio da una base all'altra sono $a_{11} = 3, a_{12} = 5, a_{21} = 1, a_{22} = 2$ e

$$b_{11} = 2, b_{12} = -5, b_{21} = -1 \text{ e } b_{22} = 3,$$

quindi entrambe le matrici hanno determinante 1.

Per la proposizione appena dimostrata le due basi generano lo stesso sottogruppo discreto Ω di \mathbb{C} .

Proposizione 3.0.4. *Dato un sottogruppo discreto Ω come sopra, la serie*

$$p(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \quad (3.1)$$

è normalmente convergente sui sottoinsiemi compatti del piano \mathbb{C} ad una funzione $\wp(z)$.

Per dimostrare questa proposizione abbiamo bisogno del seguente lemma:

Lemma 3.0.5.

La serie $\sum_{\omega \in \Omega, \omega \neq 0} \frac{1}{|\omega|^3}$ è convergente.

Dimostrazione. Sia P_n il parallelogramma formato dai punti $z = t_1e_1 + t_2e_2$, dove i numeri reali t_1 e t_2 sono tali che $\sup(|t_1|, |t_2|) = n$.

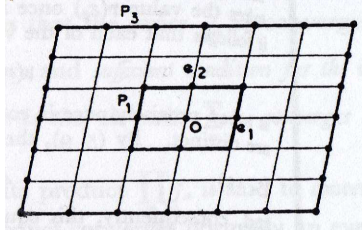


Figura 3.1: P_1 e P_3

Per ciascun intero $n \geq 1$ consideriamo il bordo ∂P_n di tale parallelogramma .

Su ∂P_n ci sono esattamente $8n$ punti di Ω . La distanza di ciascuno dei punti di Ω da 0 è $\geq kn$, (k è la più piccola distanza da 0 dei punti di P_1 , quindi è un numero fissato).

La somma di $\frac{1}{|\omega|^3}$ estesa ai punti di P_n si maggiora con $\frac{8n}{k^3 n^3}$, così

$$\sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{|\omega|^3} \leq \sum_{n \geq 1} \frac{8}{k^3 n^2},$$

e siccome la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ è convergente, anche $\sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{|\omega|^3}$ è convergente e quindi il lemma è provato. \square

Possiamo ora provare la proposizione precedente, cioè possiamo provare che su tutti i dischi compatti dove $|z| \leq r$, la serie (3.1) converge normalmente.

Si ha che $|\omega| \geq 2r$ per tutti gli $\omega \in \Omega$ eccetto che per un numero finito; si ha dunque che, per tutti i termini della serie (3.1) eccetto che per un numero finito, vale

$$\left| \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| = \left| \frac{2\omega z - z^2}{\omega^2(\omega - z)^2} \right| = \frac{\left| z \left(2 - \frac{z}{\omega} \right) \right|}{|\omega|^3 \left| 1 - \frac{z}{\omega} \right|^2} \leq \frac{r \cdot \frac{5}{2}}{|\omega|^3 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{10r}{|\omega|^3}, \text{ quando } |z| \leq r.$$

Grazie al lemma precedente risulta quindi che la (3.1) converge normalmente sul disco $|z| \leq r$.

Possiamo così dare la definizione seguente.

Definizione 3.0.6. Si definisce la **funzione $\wp(z)$ di Weierstrass** relativa ad Ω la funzione meromorfa somma della serie (3.1).

I poli di p sono esattamente i punti di Ω ; sono dei poli doppi dove il residuo è nullo, infatti intorno a $z = \omega$ si ha

$$p(z) = \frac{1}{(z - \omega)^2} + g(z), \quad g \text{ olomorfa.}$$

La funzione p è una funzione pari di z , perchè

$$p(-z) = \left(\frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{(z + \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right),$$

e nel secondo membro basta cambiare ω in $-\omega$ per ritrovare la serie (3.1).

Dal Teorema di convergenza derivando otteniamo lo sviluppo in serie (normalmente convergente su tutti i compatti)

$$p'(z) = -2 \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{(z - \omega)^3}.$$

Questa relazione evidenzia la periodicità della funzione p' :

$$p'(z + \omega) = p'(z) \text{ per tutti gli } \omega \in \Omega, \quad (3.2)$$

e il fatto che $p'(-z) = -p'(z)$.

Dimostriamo ora che la funzione $p(z)$ ammette come periodo tutti gli $\omega \in \Omega$. Poichè $\{e_1, e_2\}$ è una base di Ω , è sufficiente mostrare che $p(z + e_i) = p(z)$, prendendo come i i valori 1 e 2.

Ora poichè per (3.2) vale che $p'(z + e_i) - p'(z) = 0$, allora si ha che

$$p(z + e_i) - p(z) = \text{costante.} \quad (3.3)$$

Nella relazione (3.3) diamo a z il valore $-\frac{e_i}{2}$, questo è possibile perchè $\frac{e_i}{2}$ e $-\frac{e_i}{2}$ non sono poli di p ; allora si vede che la costante del secondo membro di (3.3) è uguale a $p(\frac{e_i}{2}) - p(-\frac{e_i}{2})$ dunque, poichè p è pari, è nulla.

Riassumendo,
la funzione \wp di Weierstrass è una funzione meromorfa che ammette come periodo i punti di Ω , e i cui poli sono esattamente i punti di Ω , ciascuno dei quali ha ordine 2, con parte principale $\frac{1}{(z-\omega)^2}$.

Sviluppo di Laurent di $p(z)$.

In un intorno dell'origine p ammette uno sviluppo di Laurent che è a priori della forma

$$p(z) = \frac{1}{z^2} + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots, \quad (3.4)$$

poichè la funzione p è pari, da (3.1) ricaviamo la funzione

$$g(z) = p(z) - \frac{1}{z^2} = \sum_{\omega \neq 0} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

olomorfa in un intorno dell'origine e che s'annulla per $z = 0$. Possiamo esprimere a_2 e a_4 tramite il sottogruppo discreto Ω : derivando termine a termine la serie $g(z)$ otteniamo

$$a_2 = 3 \sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{\omega^4}, \quad a_4 = 5 \sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{\omega^6}.$$

Derivando termine a termine, come permesso dal Teorema di convergenza, la relazione (3.4) otteniamo:

$$p'(z) = -\frac{2}{z^3} + 2a_2 z + 4a_4 z^3 + \dots,$$

elevando al quadrato

$$(p'(z))^2 = \frac{4}{z^6} - \frac{8a_2}{z^2} - 16a_4 + \dots;$$

elevando (3.4) al cubo otteniamo

$$(p(z))^3 = \frac{1}{z^6} + \frac{3a_2}{z^2} + 3a_4 + \dots$$

da cui

$$p'(z)^2 - 4(p(z))^3 = -20 \frac{a_2}{z^2} - 28a_4 + z^2(\dots),$$

allora abbiamo

$$p'(z)^2 - 4(p(z))^3 + 20 \frac{a_2}{z^2} + 28a_4 = z^2 A(z).$$

Consideriamo la funzione

$$p'(z)^2 - 4p(z)^3 + 20a_2 p(z) + 28a_4 \quad (3.5)$$

sostituendo la $p(z)$ grazie alla (3.4)

$$p'(z)^2 - 4p(z)^3 + 20a_2 \left(\frac{1}{z^2} + a_2 z^2 + \dots \right) + 28a_4 =$$

$$= p'(z)^2 - 4p(z)^3 + \frac{20a_2}{z^2} + 28a_4 + 20a_2(a_2z^2 + \dots) = z^2A(z) + z^2D(z) = z^2C(z).$$

(Abbiamo usato $A(z), C(z), D(z)$ per indicare polinomi nell'incognita z).

Perciò la funzione è olomorfa in un intorno dell'origine, s'annulla nell'origine, anzi ha uno zero doppio nell'origine, e ammette Ω come gruppo di periodi; è dunque olomorfa intorno a tutti i punti di Ω e nulla in tutti i punti di Ω . Siccome questa funzione non ha poli fuori da Ω , ne segue che è olomorfa su tutto il piano; essendo limitata su tutti i compatti, è limitata su \mathbb{C} per la sua periodicità; poichè è nulla nell'origine, è identicamente nulla per il teorema di Liouville.

Si ha finalmente l'identità

$$p'^2 - 4p^3 + 20a_2p + 28a_4 = 0.$$

Questa relazione ha un'importante interpretazione: consideriamo la curva algebrica

$$y^2 = 4x^3 - 20a_2x - 28a_4, \quad (3.6)$$

le formule $x = p(z)$, $y = p'(z)$ danno una rappresentazione geometrica di questa curva. Infatti si dimostra che tutti i punti $(x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ che soddisfano la (3.6) sono l'immagine di un punto $z \in \mathbb{C}$ determinato a meno dell'addizione di un elemento di Ω .

Capitolo 4

PRODOTTI INFINITI

In questo capitolo introduciamo il prodotto infinito di funzioni olomorfe. Questa nozione ci permetterà di definire in un modo particolare la funzione Γ di Eulero.

4.1 DEFINIZIONI

Definizione 4.1.1. Sia D un aperto del piano complesso \mathbb{C} . Sia $\{f_n(z)\}$ una successione di funzioni continue definite su D .

Diciamo che il prodotto infinito $\prod_n f_n(z)$ converge normalmente su un compatto $K \subset D$ se sono soddisfatte le due condizioni seguenti:

1. $f_n(z) \rightarrow 1$ uniformemente su K quando $n \rightarrow +\infty$; questo implica in particolare che, per n abbastanza grande, $|f_n - 1| < 1$ su K e di conseguenza $\lg f_n$ è una funzione definita su K (prendiamo la determinazione principale del logaritmo);
2. la serie di termine generale $\lg f_n$ (definita per n abbastanza grande) converge normalmente su K .

Poniamo $f_n = 1 + u_n$, allora

la prima condizione esprime che la successione $\{u_n\}$ converge uniformemente a 0 su K ;

la seconda condizione invece esprime che la serie $\sum_n u_n$ converge normalmente su K , infatti quando u_n è piccolo, facendo lo sviluppo di Taylor di $\lg(1 + u_n)$, vediamo che $\lg f_n$ e u_n sono infinitesimi equivalenti al primo ordine.

Definizione 4.1.2. Si dice che il prodotto infinito $\prod_n f_n$ converge normalmente sui compatti dell'aperto D se converge normalmente su un qualunque sottoinsieme compatto K contenuto in D .

Grazie alla proposizione seguente vediamo ora quale sia il *valore del prodotto infinito* $\prod_n f_n(z)$, inteso come limite dei prodotti parziali

$$p_n(z) = f_1(z) \cdots f_n(z) \text{ per } n \text{ che va all'infinito.}$$

Proposizione 4.1.3. Sia $\{u_n(z)\}$ una successione di funzioni limitate su un sottoinsieme D del piano complesso tale che $\sum_{n \geq 1} |u_n(z)|$ converga uniformemente su D a una funzione limitata. Allora la funzione

$$p_n(z) = \prod_{1 \leq k \leq n} (1 + u_k(z))$$

converge uniformemente a una funzione limitata $f(z)$, che indichiamo

$$f(z) = \prod_{n \geq 1} (1 + u_n(z)).$$

L'ordine dei fattori non altera la funzione limite f ;

$f(z) = 0$ per un certo $z \in D$ se e solo se $u_n(z) = -1$ per qualche n .

Prima di dimostrare questa proposizione dimostriamo un'utile osservazione sui prodotti di una successione di numeri complessi:

Osservazione 4.1.4. Sia data $\{u_n\}$ una successione di numeri complessi. Poniamo

$$\begin{aligned} p_n &= (1 + u_1) \cdots (1 + u_n) \\ p_n^* &= (1 + |u_1|) \cdots (1 + |u_n|). \end{aligned}$$

Valgono le seguenti disuguaglianze:

1. $p_n^* \stackrel{(*)}{\leq} \exp(|u_1| + \cdots + |u_n|) \stackrel{(**)}{\leq} 1 + (|u_1| + \cdots + |u_n|) \exp(|u_1| + \cdots + |u_n|)$
2. $|p_n - 1| \stackrel{(a)}{\leq} p_n^* - 1 \stackrel{(b)}{\leq} (|u_1| + \cdots + |u_n|) \exp\left(\sum_{k=1}^n |u_k|\right)$

Dimostrazione. 1. Dalla nota disuguaglianza $1 + x \leq e^x$, per $x \in \mathbb{R}$, si ha

$$p_n^* = (1 + |u_1|) \cdots (1 + |u_n|) \leq \exp(|u_1| + \cdots + |u_n|),$$

questa dimostra la disuguaglianza (*); la disuguaglianza (**) segue invece da

$$e^x - 1 \leq xe^x \quad \Rightarrow \quad e^x \leq 1 + xe^x.$$

2. Abbiamo che $p_n = 1 + \sum_{1 \leq i_j \leq n, 1 \leq k \leq n} u_{i_1} \dots u_{i_k}$,

perciò la disuguaglianza (a) segue da

$$|p_n - 1| = \left| \sum_{1 \leq i_j \leq n, 1 \leq k \leq n} u_{i_1} \dots u_{i_k} \right| \leq \sum_{1 \leq i_j \leq n, 1 \leq k \leq n} |u_{i_1}| \dots |u_{i_k}| = p_n^* - 1;$$

la disuguaglianza (b) segue invece da (**).

□

Ora dimostriamo la *proposizione* precedente:

Dimostrazione. Per le disuguaglianze dimostrate nell'osservazione precedente, si ha che

$$|p_n(z)| \leq 1 + |p_n(z) - 1| \leq p_n^*(z) - 1 + 1 = p_n^*(z) \leq \exp\left(\sum_{1 \leq k \leq n} |u_k(z)|\right) \leq M,$$

per un certo $M > 0$, dato che la funzione $\sum_{n \geq 1} |u_n(z)|$ è limitata su D .

Se $n \geq m$ allora

$$\begin{aligned} |p_n(z) - p_m(z)| &= |p_m(z)| \left| \prod_{m+1}^n (1 + u_k(z)) - 1 \right| \leq M \left(\prod_{m+1}^n (1 + |u_k(z)|) - 1 \right) \\ &\leq M \left[\exp\left(\sum_{m+1}^n |u_k(z)|\right) - 1 \right] \\ &\leq M \left(\sum_{m+1}^n |u_k(z)| \right) \exp\left(\sum_{m+1}^n |u_k(z)|\right) \leq \varepsilon M e^\varepsilon \leq 2\varepsilon M, \end{aligned}$$

se $0 < \varepsilon < \log 2$ e se m è tale che $m \geq m_\varepsilon$ e tale che $\sum_{m+1}^{\infty} |u_k(z)| < \varepsilon$ per ogni $z \in D$; così abbiamo provato che p_n converge uniformemente.

Notiamo che potevamo lasciare $|p_m(z)|$ al posto di M nell'ultima disuguaglianza, procedendo infatti in questo modo e mandando $n \rightarrow \infty$, otteniamo

$$|f(z) - p_m(z)| \leq 2\varepsilon |p_m(z)|.$$

Così se $\varepsilon < 1/2$, allora per un qualunque $m \geq m_\varepsilon, z \in D$, vale

$$|f(z)| \geq |p_m(z)|(1 - 2\varepsilon).$$

Perciò da queste due disuguaglianze si vede che $f(z) = 0$ solo se $p_m(z) = 0$, cioè solo se uno degli u_k assume il valore -1 quando $1 \leq k \leq m$.

Infine se σ è una qualunque permutazione di \mathbb{N}^* e se definiamo $q_n(z) = \prod_{j=1}^n (1 + u_{\sigma(j)}(z))$, $m \geq m_\varepsilon$, e n sufficientemente grande così che $\{1, 2, \dots, m\} \subset \{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\}$, allora

$$|q_n - p_m| = p_m \left| \prod_{\sigma(j) \geq m+1} (1 + u_{\sigma(j)}) - 1 \right| \leq M(e^\varepsilon - 1) \leq 2\varepsilon M$$

e da ciò segue che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \lim_{m \rightarrow \infty} p_m = f;$$

quindi l'ordine dei fattori non altera la funzione limite f . \square

Studiamo ora alcune proprietà del prodotto infinito nel caso in cui i fattori siano funzioni olomorfe.

4.2 PROPRIETÀ DEI PRODOTTI NORMALMENTE CONVERGENTI DI FUNZIONI OLOMORFE

Teorema 4.2.1. *Se le funzioni f_n sono olomorfe su D e se il prodotto infinito $\prod_n f_n$ converge normalmente su tutti i sottoinsiemi compatti di D , allora*

$f = \prod_n f_n$ è olomorfa su D .

Si ha di più,

$$f = f_1 f_2 \dots f_p \prod_{n > p} f_n \quad (4.1)$$

L'insieme degli zeri di f è l'unione degli insiemi degli zeri delle funzioni f_n , l'ordine di molteplicità di uno zero di f è uguale alla somma degli ordini di molteplicità che possiede per ogni funzione f_n .

Dimostrazione. Poiché f è limite (uniforme su tutti i sottoinsiemi compatti di D) di prodotti finiti, che sono quindi funzioni olomorfe, f è olomorfa su D . La formula di associatività (4.1) è evidente su tutti gli aperti relativamente compatti U .

Poichè f è prodotto delle funzioni f_n , gli zeri di ogni funzione f_n sono anche zeri di f . Quindi l'insieme degli zeri di f è l'unione degli insiemi degli zeri delle funzioni f_n .

Poichè $u_n = f_n - 1$ converge uniformemente a 0 su U , la funzione f_n non ha zeri su U per n abbastanza grande, perciò solo un numero finito di funzioni f_n ha zeri su U , per questo motivo l'ultima asserzione del teorema è vera. \square

Teorema 4.2.2. *Assumiamo le ipotesi del teorema precedente.*

Allora la serie delle funzioni meromorfe $\sum_n f'_n/f_n$ converge normalmente su tutti i sottoinsiemi compatti di D e la sua somma è la derivata logaritmica f'/f .

Dimostrazione. Sia U un aperto relativamente compatto di D . La funzione

$$g_p = \exp\left(\sum_{n>p} \log f_n\right),$$

è definita e olomorfa su U per p abbastanza grande. Dalla relazione (4.1) si ha su U

$$\frac{f'}{f} = \sum_{n \leq p} \frac{f'_n}{f_n} + \frac{g'_p}{g_p}. \quad (4.2)$$

Ora,

$$\frac{g'_p}{g_p} = \sum_{n>p} \frac{f'_n}{f_n}, \quad (4.3)$$

essendo la serie del secondo membro uniformemente convergente sui sottoinsiemi compatti di D ; poichè la serie dei logaritmi $\sum_{n>p} \log f_n$ converge

(uniformemente sui sottoinsiemi compatti) verso $\log g_p$, allora la serie delle derivate di questi logaritmi converge (uniformemente sui sottoinsiemi compatti) alla derivata g'_p/g_p (per il lemma 1.1.1).

Confrontando le relazioni (4.2) e (4.3) vediamo che su U si ha

$$\frac{f'}{f} = \sum_n \frac{f'_n}{f_n},$$

essendo normale la convergenza su tutti i sottoinsiemi compatti di U . Questo vale per tutto U , così abbiamo provato il teorema. \square

Dimostriamo ora una relazione tra funzioni meromorfe con la stessa derivata logaritmica che sarà utile nell'esempio successivo per costruire lo sviluppo di $\sin \pi z$ in un prodotto infinito.

Proposizione 4.2.3. *Siano f e g funzioni non identicamente nulle sul dominio D di \mathbb{C} . Supponiamo che su D valga $f'/f = g'/g$.*

Allora esiste una costante $c \in \mathbb{C}$ per cui su tutto D si abbia $f = e^c g$.

Dimostrazione. Poichè gli zeri e i poli di f e di g costituiscono un sottoinsieme discreto di D , esiste un punto $z_0 \in D$ nel quale $f(z_0) \neq 0$ e $g(z_0) \neq 0$. Possiamo scegliere perciò due determinazioni \log e Log del logaritmo rispettivamente in un intorno U_1 di $f(z_0)$ e in un intorno U_2 di $g(z_0)$ in \mathbb{C} .

Quindi le funzioni $\log f(z)$ e $\text{Log} g(z)$ sono ben definite e olomorfe su un opportuno intorno V di z_0 in D tale che $f(V) \subset U_1$ e $g(V) \subset U_2$.

Su V vale, per ipotesi,

$$\frac{d}{dz} \log f(z) = f'(z)/f(z) = g'(z)/g(z) = \frac{d}{dz} \text{Log} g(z).$$

Ne segue che esiste una costante $c \in \mathbb{C}$ tale che su V si abbia identicamente

$$\log f(z) = \text{Log} g(z) + c;$$

da cui, esponenziando su V , $f(z) = e^c g(z)$.

Poichè il principio del prolungamento analitico vale anche nel caso di funzioni meromorfe, possiamo estendere questa relazione su tutto il dominio D ;

cioè per il corollario al principio del prolungamento analitico che afferma che due funzioni meromorfe su un dominio D di \mathbb{C} uguali su un aperto del dominio allora sono uguali su tutto il dominio, possiamo dire che $f(z) = e^c g(z)$ su D . \square

4.3 ESEMPIO: Sviluppo del $\sin \pi z$ in un prodotto infinito

Consideriamo il prodotto infinito

$$f(z) = z \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right). \quad (4.4)$$

Questo prodotto converge normalmente sui compatti del piano \mathbb{C} perchè, grazie alla convergenza della serie numerica $\sum_n \frac{1}{n^2}$, la serie $\sum_n \frac{z^2}{n^2}$ converge normalmente sui sottoinsiemi compatti.

Perciò $f(z)$ è una funzione olomorfa sull'intero piano complesso e tutti i valori interi di z sono degli zeri semplici.

Grazie al teorema 4.2.2, possiamo costruire la derivata logaritmica di $f(z)$; otteniamo così, derivando i termini della produttoria, una serie di funzioni meromorfe, normalmente convergenti su tutti i sottoinsiemi compatti di \mathbb{C} :

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{2z}{z^2 - n^2} \right).$$

Avevamo visto nell'esempio finale del capitolo sulle serie di Eisenstein che vale

$$\frac{1}{z} + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{2z}{z^2 - n^2} \right) = \frac{\pi}{\tan \pi z},$$

inoltre $\frac{\pi}{\tan \pi z}$ è la derivata logaritmica della funzione $\sin \pi z$, cioè

$$\frac{\pi}{\tan \pi z} = \frac{g'(z)}{g(z)}, \text{ dove } g(z) = \sin \pi z.$$

Perciò

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)},$$

così, poichè f e g rispettano le ipotesi della proposizione precedente, allora esiste una costante $c \in \mathbb{C}$ per cui si ha

$$f(z) = e^c g(z) = e^c \sin \pi z,$$

dividendo per z si ha

$$\frac{f(z)}{z} = e^c \frac{\sin \pi z}{z},$$

poichè e^c è una costante, allora

$$\frac{f(z)}{z} = k \frac{\sin \pi z}{z}.$$

Resta da determinare la costante k ; da (4.4) vediamo che $\frac{f(z)}{z}$ tende a 1 quando z tende a 0, e poichè $\frac{\sin \pi z}{z}$ tende a π quando z tende a 0, allora $k = \frac{1}{\pi}$.

Abbiamo così provato la formula

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right).$$

Capitolo 5

FUNZIONE Γ

Una volta comprese le definizioni complesse delle funzioni trigonometriche e il loro legame con l'esponenziale, si pose il problema di definire funzioni meromorfe con proprietà particolarmente interessanti che potessero avvicinarsi allo studio delle funzioni trigonometriche.

In questo senso, sia per ragioni storiche che per utilità dimostrata, la funzione Γ è forse la più importante.

La funzione Γ è una funzione meromorfa che soddisfa la relazione $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$, senza zeri e i cui poli sono solo i punti $z = -m$, $m = 0, 1, \dots$

In questo ultimo capitolo, dopo un'introduzione in cui enunciamo e dimostriamo il Teorema di Weierstrass e alcuni importanti corollari e teoremi da esso derivanti, indispensabili per costruire la funzione Γ secondo l'approccio qui seguito, definiamo la funzione Γ e ne proviamo alcune proprietà classiche.

5.1 IL TEOREMA DI WEIERSTRASS

Ricordiamo che riguardo agli zeri di una funzione $f(z)$ intera trascendente, ci sono solo tre possibilità:

1. $f(z)$ non ha zeri;
2. $f(z)$ ha un numero finito di zeri;
3. $f(z)$ ha un numero infinito di zeri.

Analizziamo i due casi di nostro interesse in questo capitolo: il primo e il terzo.

Nel primo caso, utilizzando un semplice teorema sulle funzioni intere (per l'enunciato e la dimostrazione di questo, si consulti il teorema 9.7 del "Theory

of function of a complex variable”, di A.I. Markushevich, Volume II, cap. 9, par. 43), osserviamo che se $f(z)$ non ha zeri nel dominio allora si rappresenta

$$f(z) = e^{g(z)}, \quad \text{con } g(z) \text{ funzione intera.}$$

Consideriamo ora il terzo caso, dove $f(z)$ ha infiniti zeri:

Teorema 5.1.1 (Teorema di Weierstrass). *Dato λ un intero non negativo e una successione crescente di numeri complessi non nulli $\{\xi_n\}$ che converge all'infinito, allora esiste una funzione intera $f(z)$ i cui zeri coincidono con i punti*

$$\underbrace{0, \dots, 0}_{\text{sono } \lambda}, \xi_1, \dots, \xi_n, \dots \quad (5.1)$$

Dimostrazione. Consideriamo la sequenza di funzioni intere

$$f_m(z) = z^\lambda \prod_{n=1}^m \left(1 - \frac{z}{\xi_n}\right) e^{P_n(z)} \quad (m = 1, 2, \dots),$$

dove $P_n(z)$ sono polinomi che in seguito sceglieremo nel modo più adatto. Sicuramente gli zeri di $f_m(z)$ coincidono con i primi $m + \lambda$ punti della sequenza (5.1), molti di questi sono zeri multipli, perchè (5.1) può contenere gli stessi punti per diverse volte (come è esplicitamente indicato per il punto $z = 0$). L'idea di questa dimostrazione è di scegliere i polinomi $P_n(z)$ in modo che la successione $\{f_m(z)\}$ sia uniformemente convergente su ogni sottoinsieme compatto, in modo da poter usare il Teorema di Weierstrass sulla convergenza uniforme delle successioni di funzioni analitiche per dedurre che la funzione limite

$$f(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(z) \quad (5.2)$$

è intera.

Tenendo conto di ciò, sia K_R il disco ove $|z| < R$, e sia $N(R)$ il più piccolo intero tale che $|\xi_n| > 2R$ per tutti gli $n > N(R)$.

Allora, se $z \in K_R$ e $m > N(R)$, possiamo scrivere

$$f_m(z) = f_{N(R)}(z) \prod_{n=N(R)+1}^m \left(1 - \frac{z}{\xi_n}\right) e^{P_n(z)} = f_{N(R)}(z) \exp \left\{ \sum_{n=N(R)+1}^m \left[\ln \left(1 - \frac{z}{\xi_n}\right) + P_n(z) \right] \right\}, \quad (5.3)$$

dove possiamo fare lo sviluppo di ogni termine logaritmico nella serie

$$\ln \left(1 - \frac{z}{\xi_n}\right) = -\frac{z}{\xi_n} - \dots - \frac{z^n}{n\xi_n^n} - \frac{z^{n+1}}{(n+1)\xi_n^{n+1}} - \dots,$$

poichè $|z/\xi_n| < \frac{1}{2}$ per tutti gli $z \in K_R$ e $n > N(R)$.
Scegliamo $P_n(z)$ in modo da cancellare i primi n termini della serie,

$$P_n(z) = \frac{z}{\xi_n} + \cdots + \frac{z^n}{n\xi_n^n}, \quad (5.4)$$

così abbiamo

$$\ln\left(1 - \frac{z}{\xi_n}\right) + P_n(z) = -\frac{z^{n+1}}{(n+1)\xi_n^{n+1}} - \cdots, \quad (5.5)$$

che implica

$$\left| \ln\left(1 - \frac{z}{\xi_n}\right) + P_n(z) \right| \leq \frac{1}{n+1} \left| \frac{z}{\xi_n} \right|^{n+1} + \frac{1}{n+2} \left| \frac{z}{\xi_n} \right|^{n+2} + \cdots < \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots = \frac{1}{2^n}. \quad (5.6)$$

Allora la serie

$$\sum_{n=N(R)+1}^{\infty} \left[\ln\left(1 - \frac{z}{\xi_n}\right) + P_n(z) \right] \quad (5.7)$$

è uniformemente convergente, poichè

$$\sum_{n=N(R)+1}^{\infty} \left| \ln\left(1 - \frac{z}{\xi_n}\right) + P_n(z) \right| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 < \infty.$$

Inoltre la (5.7) rappresenta una funzione analitica $\chi_R(z)$ su K_R perchè è una serie di funzioni analitiche uniformemente convergente sui compatti di \mathbb{C} . Confrontando la (5.2) e la (5.3) e usando la continuità della funzione esponenziale, troviamo che

$$f(z) = f_{N(R)}(z)e^{\chi_R(z)} \quad (z \in K_R). \quad (5.8)$$

Questo mostra che $f(z)$ è analitica su K_R .

Poichè il disco K_R ha raggio arbitrario, allora $\{f_m(z)\}$ converge uniformemente su ogni sottoinsieme compatto, e così la funzione $f(z)$ è analitica sull'intero piano, $f(z)$ è perciò intera.

Dalla rappresentazione (5.8) e dalla arbitrarietà di R , poichè $\exp[\chi_R(z)]$ non ha zeri, mentre per costruzione gli zeri di $f_{N(R)}(z)$ su K_R sono precisamente i punti della sequenza iniziale (5.1) che giacciono su K_R , possiamo affermare che gli zeri di $f(z)$ coincidono con i punti della (5.1).

Infine richiamando la definizione di $f_m(z)$, notiamo che

$$f(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} z^\lambda \prod_{n=1}^m \left(1 - \frac{z}{\xi_n}\right) e^{P_n(z)}. \quad (5.9)$$

□

Corollario 5.1.2. *Il prodotto infinito*

$$f(z) = z^\lambda \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\xi_n}\right) \exp\left(\frac{z}{\xi_n} + \cdots + \frac{z^n}{n\xi_n^n}\right) \quad (5.10)$$

è una funzione intera che soddisfa le ipotesi del teorema 5.1.1.

Dimostrazione. L'equazione (5.10) è semplicemente un modo diverso per scrivere l'equazione (5.9). \square

Se aggiungiamo maggiori ipotesi alla successione $\{\zeta_n\}$ del Teorema di Weierstrass, otteniamo conclusioni più forti:

Teorema 5.1.3. *Sia λ un intero non negativo e sia $\{\zeta_n\}$ una successione crescente di numeri complessi diversi da zero convergente all'infinito, sia χ il più grande intero k non negativo per cui la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\zeta_n|^k}$$

diverge.

Allora il prodotto infinito

$$f(z) = z^\lambda \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\zeta_n}\right) \exp\left(\frac{z}{\zeta_n} + \cdots + \frac{z^\chi}{\chi\zeta_n^\chi}\right),$$

dove i fattori esponenziali scompaiono se $\chi = 0$, rappresenta una funzione intera i cui zeri coincidono con i punti

$$\underbrace{0, \dots, 0}_{\text{sono } \lambda}, \zeta_1, \dots, \zeta_n, \dots$$

Dimostrazione. La dimostrazione è parallela a quella del Teorema di Weierstrass, con l'importante differenza che ora scegliamo

$$P_n(z) = \begin{cases} \frac{z}{\zeta_n} + \cdots + \frac{z^\chi}{\chi\zeta_n^\chi} & \text{se } x \geq 1, \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

e così al posto della (5.5) abbiamo

$$\ln\left(1 - \frac{z}{\zeta_n}\right) + P_n(z) = -\frac{z^{\chi+1}}{(\chi+1)\zeta_n^{\chi+1}} - \cdots,$$

e al posto della (5.6)

$$\left| \ln \left(1 - \frac{z}{\zeta_n} \right) + P_n(z) \right| = \left| -\frac{z^{\chi+1}}{\zeta_n^{\chi+1}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{z^{p-1}}{(\chi+p)\zeta_n^{p-1}} \right| < \frac{R^{\chi+1}}{|\zeta_n|^{\chi+1}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^{p-1}} = \frac{2R^{\chi+1}}{|\zeta_n|^{\chi+1}}.$$

Inoltre la (5.7) è ancora uniformemente convergente su K_R , ma questa volta a causa della convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\zeta_n|^{\chi+1}}$$

invece della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Il resto della dimostrazione è uguale a quella del Teorema di Weierstrass. \square

5.2 DEFINIZIONE DI Γ TRAMITE LA NOZIONE DI PRODOTTO INFINITO

La funzione gamma $\Gamma(z)$, introdotta per la prima volta da Eulero, è il più semplice e il più importante esempio di prodotto infinito di funzioni meromorfe che estende il concetto di funzione fattoriale $n!$, originariamente definita solo per gli interi positivi, a tutti gli z complessi.

Per motivi storici, la relazione tra $\Gamma(z)$ e $n!$ è data dalla formula

$$\Gamma(n+1) = n!,$$

piuttosto che dalla formula più naturale $\Gamma(n) = n!$. Allora otteniamo che la relazione

$$n(n-1)! = n!,$$

che caratterizza la funzione fattoriale, prende la forma

$$n\Gamma(n) = \Gamma(n+1)$$

in termini della funzione gamma.

In particolare sostituendo $n = 1$, troviamo che $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1! = 1$.

(Dal momento che $\Gamma(1) = 0!$, quanto appena detto giustifica la nota formula $0! = 1$).

Queste considerazioni ci suggeriscono di studiare la soluzione dell'equazione funzionale

$$zf(z) = f(z+1) \quad [f(z) = 1] \quad (5.11)$$

per gli z complessi.

Osserviamo che applicando la (5.11) ai valori $z, z+1, \dots, z+n-1$ (dove n è un intero positivo) otteniamo

$$\begin{aligned} zf(z) &= f(z+1) \\ (z+1)f(z+1) &= f(z+2) \\ &\dots \\ (z+n-1)f(z+n-1) &= f(z+n) \end{aligned}$$

e moltiplicando tra loro membro a membro

$$z(z+1)\dots(z+n-1)f(z) = f(z+n), \quad (5.12)$$

cioè

$$f(z) = \frac{f(z+n)}{z(z+1)\dots(z+n-1)},$$

così $f(z)$, soluzione della (5.11), deve essere una funzione meromorfa tale che tutti i punti $z = -m, m \in \mathbb{N}$, sono suoi poli semplici.

Ponendo $n-1 = m$ nella (5.12) troviamo $(z+m)f(z) = \frac{f(z+m+1)}{z(z+1)\dots(z+m)}$, perciò

$$\lim_{z \rightarrow -m} (z+m)f(z) = \frac{f(1)}{(-1)^m m!} = \frac{(-1)^m}{m!},$$

perciò il residuo nei punti $z = -m$ è $\frac{(-1)^m}{m!}$.

Ma l'equazione (5.11) non definisce univocamente Γ , perchè la soluzione della (5.11) non è unica. Infatti se prendiamo una qualunque funzione meromorfa $\varphi(z) \neq 1$ che soddisfa la relazione

$$\varphi(z+1) = \varphi(z), \quad [\varphi(1) = 1], \quad (5.13)$$

cioè φ è una funzione periodica con periodo 1, allora anche la funzione

$$f^*(z) = \varphi(z)f(z) \quad (5.14)$$

soddisfa la (5.11).

Imponendo inoltre che la funzione $f(z)$ non abbia poli oltre ai punti $z =$

$-m, m \in \mathbb{N}$ e non abbia zeri, riusciamo allora a restringere la classe di funzioni che soddisfano la (5.11), ma questo non è abbastanza per avere una soluzione unica.

Infatti se questa volta prendiamo una qualunque funzione $\varphi(z) \neq 1$, non nulla, intera e che soddisfa la (5.13), allora $f(z)$ è soluzione della (5.11), così come la funzione (5.14).

Per risolvere questo problema proviamo ora il seguente teorema che mostra le caratteristiche che la soluzione della (5.11) deve avere.

Teorema 5.2.1. *Sia $f(z)$ una funzione meromorfa che soddisfa la (5.11), senza zeri e i cui poli sono solo i punti $z = -m, m = 0, 1, \dots$*

Allora $f(z)$ può essere rappresentata nella forma

$$f(z) = e^{-g(z)} \frac{1}{z \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{m}\right) e^{-z/m}}, \quad (5.15)$$

ove $g(z)$ è una funzione intera tale che

$$g(z+1) - g(z) = C + 2k\pi i, \quad [g(1) = C + 2l\pi i], \quad (5.16)$$

con k e l interi, e C costante di Eulero, definita da

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{m=1}^n \frac{1}{m} - \ln n \right) = 0.5772\dots \quad (5.17)$$

Dimostrazione. Poichè $f(z)$ non ha zeri e i suoi poli sono solo i punti $z = -m, m = 0, 1, \dots$, la funzione

$$F(z) = \frac{1}{f(z)}$$

è intera e ha come zeri solo i punti $z = -m$.

Poichè il più grande valore intero non negativo di k per cui la serie

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^k}$$

diverge è 1, ne segue che per il teorema 5.1.3 $F(z)$ ha la rappresentazione

$$F(z) = e^{g(z)} z \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{m}\right) e^{z/m},$$

ove $g(z)$ è una funzione intera.

Ricordandoci che $F(z) = 1/f(z)$, otteniamo la (5.15).

Ora vogliamo verificare la (5.16): scriviamo allora

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z), \quad (5.18)$$

dove

$$f_n(z) = \frac{e^{-g(z)}}{z \prod_{m=1}^n \left(1 + \frac{z}{m}\right) e^{-z/m}} = \frac{n! \exp \left[-g(z) + \sum_{m=1}^n \frac{z}{m} \right]}{z(z+1)\dots(z+n)}. \quad (5.19)$$

Allora

$$\begin{aligned} \frac{zf(z)}{f(z+1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{zf_n(z)}{f_n(z+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (z+n+1) \exp \left[-g(z) + g(z+1) - \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z+1}{n}\right) \exp \left[-g(z) + g(z+1) - \left(\sum_{m=1}^n \frac{1}{m} - \ln n \right) \right] = \exp[-g(z) + g(z+1) - C] \end{aligned}$$

per ogni z , ove C è data da (5.17), e inoltre

$$f(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\exp[-g(1) + \sum_{m=1}^n (\frac{1}{m} - \ln n)]}{1 + \frac{1}{n}} = \exp[-g(1) + C].$$

Inoltre la (5.11) implica che

$$\exp[-g(z) + g(z+1) - C] = 1, \quad \exp[-g(1) + C] = 1$$

o equivalentemente (5.16), e così il teorema è provato. \square

La più semplice funzione intera che soddisfa la relazione (5.16) è la funzione lineare $g(z) = Cz$; completiamo perciò ora la nostra definizione di funzione gamma precisando questa scelta.

Definizione 5.2.2. Si definisce la **funzione gamma** $\Gamma(z)$, la funzione meromorfa

$$\Gamma(z) = e^{-Cz} \frac{1}{z \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{m}\right) e^{-z/m}}. \quad (5.20)$$

Osservazione 5.2.3. La sua reciproca è la funzione intera

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{Cz} z \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{m}\right) e^{-z/m}. \quad (5.21)$$

Osservazione 5.2.4. Dalla (5.21) e dalla (4.4) segue che

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(-z)} = -z^2 \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{m^2}\right) = -\frac{z}{\pi} \pi z \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\pi^2 z^2}{m^2 \pi^2}\right) = -\frac{z \sin \pi z}{\pi},$$

equivalentemente

$$\frac{1}{\Gamma(z)[-z\Gamma(-z)]} = \frac{\sin \pi z}{\pi}. \quad (5.22)$$

Osservazione 5.2.5 (*Formula di ricorrenza*).

Secondo la (5.11), mettendo $\Gamma(z)$ al posto di $f(z)$, otteniamo la nota formula di ricorrenza:

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1), \quad (5.23)$$

Osservazione 5.2.6 (*Formula dei complementi*).

Dalla formula di ricorrenza segue che

$$-z\Gamma(-z) = \Gamma(1-z).$$

Così, grazie alla relazione appena trovata, la (5.22) diventa

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{\sin \pi z}{\pi},$$

da cui si ottiene la formula dei complementi:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}. \quad (5.24)$$

Osservazione 5.2.7.

1. In particolare la (5.24) implica che

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \pi,$$

cioè

2.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad (5.25)$$

dato che vale $\Gamma(\frac{1}{2}) > 0$, per la formula (5.20).

3. Dalle (5.23) e (5.25) otteniamo ricorsivamente

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Infatti

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + 2\right) = \Gamma\left(\left(\frac{1}{2} + 1\right) + 1\right) = \left(\frac{1}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \left(\frac{1}{2} + 1\right) \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1+2}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

e così via

Osservazione 5.2.8 (*Formula di Gauss*).

Infine sostituendo Cz al posto di $g(z)$ e $\Gamma(z)$ al posto di $f(z)$ nelle equazioni (5.18) e (5.19), troviamo che

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \exp\left\{\left(\sum_{m=1}^n \frac{1}{m} - C\right)z\right\}}{z(z+1) \cdots (z+n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \exp\left\{\left[\left(\sum_{m=1}^n \frac{1}{m} - \ln n - C\right) + \ln n\right]z\right\}}{z(z+1) \cdots (z+n)}. \quad (5.26)$$

Ma secondo la (5.17),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{m=1}^n \frac{1}{m} - \ln n - C \right) = 0,$$

e chiaramente

$$\exp(z \ln n) = n^z.$$

Perciò dalla (5.26) si ritrova la formula di Gauss, ovvero la classica rappresentazione della funzione gamma:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \cdots (z+n)}.$$

Osservazione 5.2.9. Notiamo che calcolando la derivata logaritmica otteniamo

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\frac{1}{z} - C + \sum_{n \geq 1} \frac{z}{n(n+z)},$$

e calcolando la derivata di Γ'/Γ otteniamo

$$\frac{d}{dz} \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(z+n)^2}.$$

Notiamo che, per come è definita $\Gamma(z)$, $\Gamma(x) > 0$ quando $x > 0$ e poichè $\lg \Gamma(x)$ è ben definito per $x > 0$ e, secondo la derivata appena calcolata, la derivata seconda di $\lg \Gamma(x)$ è sempre positiva, questo significa che la funzione $\log \Gamma(x)$ è convessa per $x > 0$.

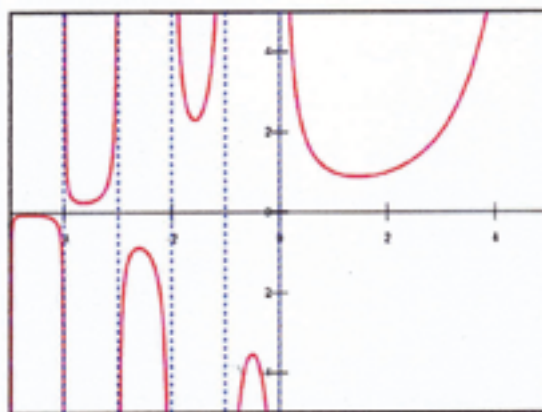


Figura 5.1: *Funzione Γ definita sui reali*

Ne consegue che questa proprietà insieme alla equazione funzionale (5.23) e al fatto che $\Gamma(1) = 1$ caratterizzano completamente la funzione gamma. Questo fatto è espresso nel Teorema di Bohr-Mollerup che enunciamo ma non dimostriamo (per la dimostrazione consultare “Functions of One Complex Variable”, di J. B. Conway, cap. VII, par. 7):

Teorema 5.2.10 (Teorema di Bohr-Mollerup). *Sia f una funzione definita su $(0, \infty)$ tale che $f(x) > 0$ per tutti gli $x > 0$. Supponiamo che f soddisfi le seguenti proprietà:*

1. $\lg f(x)$ è una funzione convessa,
2. $f(x+1) = xf(x)$ per tutti gli x ,

3. $f(1) = 1$.

Allora $f(x) = \Gamma(x)$ per tutti gli x .

5.3 RAPPRESENTAZIONE INTEGRALE DI $\Gamma(z)$

È interessante dare anche una definizione della funzione Γ tramite uno strumento più analitico: l'integrale.

Consideriamo la funzione

$$f(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (\operatorname{Re} z > 0), \quad (5.27)$$

dove il dominio di integrazione è su tutto l'asse reale positivo, e dove t^{z-1} indica la funzione $\exp[(z-1) \ln t]$. Scriviamo la (5.27) nella forma

$$f(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt. \quad (5.28)$$

Poichè

$$|e^{-t} t^{z-1}| = e^{-t} t^{\operatorname{Re} z - 1},$$

il primo integrale in (5.28) è assolutamente convergente se z appartiene al semipiano D dove $\operatorname{Re} z > 0$, mentre il secondo integrale è assolutamente convergente per tutti gli z .

Grazie a quanto osservato possiamo enunciare il seguente teorema:

Teorema 5.3.1. *La funzione (5.27) coincide con $\Gamma(z)$ nel semipiano D dove $\operatorname{Re} z > 0$,*

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (\operatorname{Re} z > 0).$$

(Per la dimostrazione consultare "Theory of function of a complex variable", di A.I. Markushevich, Volume II, cap. 10, par. 53.)

Bibliografia

- [1] H. Cartan, *Théorie Élémentaire des Fonctions Analytiques d'Une ou Plusieurs Variables Complexes*, Hermann, 1961.
- [2] R. Remmert, *Theory of Complex Functions*, Springer-Verlag, 1991.
- [3] A. I. Markushevich, *Theory of functions of a complex variable*, Chelsea Publishing Company, 1977.
- [4] Carlos A. Berenstein, Roger Gay, *Complex Variables an Introduction*, Springer-Verlag, 1991.
- [5] J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable*, Springer-Verlag, 1973.
- [6] E. Lanconelli, *Lezioni di Analisi Matematica 2, Prima Parte*, Pitagora Editrice Bologna, 1995.

Ringraziamenti

Desidero ringraziare il Professor Salvatore Coen per la grande disponibilità e la cura con cui mi ha seguita durante la stesura della tesi.

Ringrazio anche i miei genitori che mi hanno dato la possibilità di studiare, di raggiungere questo primo obiettivo e di poter continuare ancora il mio percorso universitario.