Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea in Matematica

Strumenti di teoria della misura nella rappresentazione di funzionali lineari

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Bruno Franchi

Presentata da:
Michele Pignotti

II Sessione
Anno Accademico 2011/2012

Alle mani della mia famiglia

Introduzione

Lo scopo di questa tesi è dare una rappresentazione dei duali degli spazi L^p e degli spazi di funzioni continue per mezzo della teoria della misura. Tali rappresentazioni, identificando oggetti astratti come i funzionali lineari con funzioni e misure, mettono a dispozione di chi affronta problemi riguardanti la dualità, comunissimi nell'analisi funzionale, tutto un armamentario di strumenti altrimenti non utilizzabili.

Nel trattare i duali degli spazi L^p, con p reale, il contributo della teoria della misura è prevalentemente tecnico intervenendo esclusivamente nel corso della dimostrazione con il teorema di Radon-Nicodym, mentre nel caso di L^∞ il contributo è effettivo essendo il duale di tale spazio rappresentato come insieme di misure finitamente addittive.

Per quanto riguarda il duale di $C_c(X)$ il lavoro capostipite è senza dubbio quello di F. Riesz che nel 1909 dimostrò che ogni funzionale continuo su $C([0,1])$ è rappresentabile come un integrale di Riemann-Stieltjes rispetto ad una funzione a variazione limitata. Tale risultato è equivalente a quello dato in questa tesi in termini di misure regolari che meglio si presta ad essere esteso a spazi topologici astratti più generali e a cui si è arrivati tramite i lavori di Daniell e Von Neumann cui risalgono rispettivamente l'idea di rappresentare un funzionale come misura e l'idea di costruire una misura non negativa direttamente da un funzionale monotono.

Nel Capitolo 1 presentiamo gli strumenti tecnici utilizzati successivamente, nel Capitolo 2 dimostriamo la ben nota caratterizzazione dei duali degli spazi L^p mentre nel Capitolo 3 identifichiamo il duale di $C_c(X)$ con lo spazio delle misure su X di Borel, limitate e regolari.

Indice

Capitolo 1

Elementi di teoria della Misura

In questo capitolo daremo alcuni basilari strumenti e definizioni di teoria della misura che ci saranno utili nel seguito quando ci addentreremo nella parte centrale della tesi, ossia nello studio dei funzionali lineari continui su certi spazi di Banach.

Nel seguito, assegnato un insieme X, $\mathcal{S}$ denoterà una σ-algebra di sottoinsiemi di X. Ci riferiremo agli elementi di $\mathcal{S}$ come agli insiemi misurabili. Inoltre, tutti gli insiemi che interverranno nei nostri enunciati, salvo diversa indicazione, sono da considerarsi misurabili. Infine, per partizione di un insieme A si intende una famiglia finita o numerabile di insiemi disgiunti misurabili la cui unione sia A.

Per le definizioni abbiamo seguito il libro di Swartz "Measure, Integration and Function Spaces" [5].

1.1 Misure con segno ed integrazione

Definizione 1.1 (Misura con segno)**.**
Una funzione $\mu : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ è una *misura con segno* se

i) $\mu(\varnothing) = 0$;

ii) $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \qquad \forall\, (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, partizione di A.

Un classico esempio è la differenza di due misure non negative limitate.

Osservazione 1. Poiché il termine a sinistra dell'uguaglianza in *ii*) non cambia per riarrangiamenti della partizione è implicita nella definizione la convergenza assoluta della serie a destra.

Definizione 1.2 (Parte positiva e negativa di una misura, variazione totale)**.**

Per ogni $A \in \mathcal{S}$ definiamo:

- $\mu^+(A) := \sup\{\mu(B) : B \subset A\}$;
- $\mu^-(A) := \sup\{-\mu(B) : B \subset A\}$;
- $|\mu|(A) := \mu^+(A) + \mu^-(A)$;
- $\|\mu\| := |\mu|(X)$.

Le funzioni μ^+, μ^- e $|\mu|$ sono dette rispettivamente *parte positiva*, *parte negativa* e *variazione totale* di μ. $\|\mu\|$ è chiamata *variazione* o *norma* di μ.

Teorema 1.1.1 (Decomposizione di Jordan)**.**
Siano μ una misura con segno e μ^+, μ^- le funzioni definite sopra, allora:

i) *μ^+ e μ^- sono non negative e monotone, inoltre $\mu^+ \geq \mu$, $\mu^- \geq -\mu$;*

ii) *μ^+, μ^- e $|\mu|$ sono misure;*

iii) *se μ è limitata allora $\mu = \mu^+ - \mu^-$;*

iv) *$|\mu|(A) \geq |\mu(A)|$;*

v) *$|\mu|(A) = \sup\{\sum_{n=1}^{N} |\mu(A_n)| : (A_n)_{n\leq N}$ partizione di $A\}$;*

vi) *$\|\mu\| \leq 2\sup\{|\mu(A)| : A \in \mathcal{S}\} \leq 2\|\mu\|$.*

Dimostrazione.
La *i*) è conseguenza immediata della definizione. Per dimostrare la *ii*) consideriamo un insieme A ed una sua partizione $(A_n)_{n\leq N}$ e fissiamo infine $\varepsilon > 0$. Dalla definizione segue che esiste una successione di insiemi $(B_n)_{n\leq N}$, $B_n \subset A_n$ e $\mu^+(A_n) < \mu(B_n) + \varepsilon 2^{-n}$. Dunque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu^+(A_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) + \varepsilon = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\Big) + \varepsilon \leq \mu^+(A) + \varepsilon$$

Per provare l'altra disuguaglianza sfruttiamo l'esistenza di un insieme $B \subset A$ tale che $\mu^+(A) < \mu(B) + \varepsilon$. Allora

$$\mu^+(A) < \mu(B)+\varepsilon = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B\cap A_n\Big)+\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(B\cap A_n)+\varepsilon \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu^+(A_n)+\varepsilon$$

Questo prova che μ^+ è una misura e un ragionamento analogo dimostra che anche μ^- lo è. $|\mu|$ infine è una misura in quanto somma di due misure.

Nell'ipotesi μ limitata anche μ^- e μ^+ risultano essere limitate e le seguenti scritture hanno senso per ogni $A \in \mathcal{S}$:

$$\begin{aligned}\mu^+(A) - \mu(A) &= \sup\{\mu(B) - \mu(A) \,:\, B \subset A\,, B \in \mathcal{S}\}\\ &= \sup\{-\mu(A \setminus B) \,:\, B \subset A\,, B \in \mathcal{S}\}\\ &= \sup\{-\mu(B) \,:\, B \subset A\,, B \in \mathcal{S}\} = \mu^-(A)\end{aligned}$$

Questo prova la *iii*) mentre la *iv*) è una semplice conseguenza della *i*).

Per verificare la *v*) prendiamo una partizione finita qualsiasi $(A_n)_{n\leq N}$ di A. Allora

$$\sum_{n=1}^{N}|\mu(A_n)| \leq \sum_{n=1}^{N}|\mu|(A_n) = |\mu|(A)$$

e dunque, passando all'estremo superiore otteniamo

$$\sup\left\{\sum_{n=1}^{N}|\mu(A_n)| \;:\; (A_n)_{n\leq N} \text{ partizione di} A\right\} \leq |\mu|(A) \qquad (1.1)$$

Per ottenere la disuguaglianza inversa consideriamo degli insiemi $B_k \subset A$, $\mu(B_k) \to \mu^+(A)$. Essendo $\mu^+(A) \geq 0$ vale anche $|\mu(B_k)| \to \mu^+(A)$. D'altronde $\mu(A) = \mu(B_k) + \mu(A \setminus B_k)$ dunque

$$\lim_{k\to\infty}\mu(A \setminus B_k) = \lim_{k\to\infty}\mu(A) - \mu(B_k) = \mu(A) - \mu^+(A) = -\mu^-(A)$$

Ne segue che $|\mu(A\setminus B_k)| \longrightarrow \mu^-(A)$ e che $|\mu(B_k)|+|\mu(A\setminus B_k)| \longrightarrow \mu^+(A)+\mu^-(A) = |\mu(A)|$. Abbiamo dimostrato che

$$|\mu|(A) = \sup\{\,|\mu(B)| + |\mu(A \setminus B)| \,:\, B \subset A,\, B \in \mathcal{S}\} \qquad (1.2)$$

Questo, unito alla (1.1) prova *v*).

Infine la prima disuguaglianza nella *vi*) segue da (1.2) applicata a X mentre la seconda è immediata dalla definizione. $\square$

Definizione 1.3 (Decomposizione di Jordan).
La *iii*) del teorema appena dimostrato caratterizza completamente le misure con segno limitate. Esse sono tutte e sole quelle che si ottengono come differenza di due misure non negative limitate. Tale coppia di misure si dice *decomposizione di Jordan* della misura con segno.

Osservazione 2. Osserviamo che, a causa della *vi*), condizione necessaria e sufficiente affinchè $\|\mu\| < \infty$ è che μ sia limitata.

Definizione 1.4 (Integrazione rispetto ad una misura con segno).
Sia data μ misura con segno definiamo $L^p(\mu) := L^p(|\mu|)$ e, per ogni $f \in L^1(\mu)$ poniamo

$$\int_X f\, d\mu := \int_X f\, d\mu^+ - \int_X f\, d\mu^-$$

Osservazione 3. Segue facilmente dalla definizione la seguente stima per il valore assoluto di un integrale, generalizzazione di quella usuale per misure non negative:

$$\left|\int_X f\, d\mu\right| = \left|\int_X f\, d\mu^+ - \int_X f\, d\mu^-\right| \leq \int_X |f|\, d\mu^+ + \int_X |f|\, d\mu^- = \int_X |f|\, d|\mu|$$

Osservazione 4. È chiaro che anche molte altre proprietà dell'integrale di Lebesgue "classico" continuano a valere (tra queste la linearità e il teorema della convergenza dominata) mentre altre non sono più vere, ad esempio i teoremi di Beppo Levi e Fatou. In particolare dalla disuguaglianza puntuale $f \leq g$ non segue in generale che $\int f\, d\mu \leq \int g\, d\mu$.

Vogliamo ora dimostrare un risultato che va sotto il nome di decomposizione di Hahn e che essenzialmente afferma che è possibile dividere un insieme su cui è definita una misura con segno in due particolari sottoinsiemi disgiunti. Il primo "supporta" la parte positiva della misura e l'altro la parte negativa. Il senso preciso di questa affermazione sarà chiarito nel teorema 1.1.3 a cui premettiamo due definizioni ed un lemma.

Definizione 1.5 (Limite superiore ed inferiore di insiemi).
Data una famiglia di insiemi $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiamo

$$\varlimsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \qquad \varliminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$$

Lemma 1.1.2.
Data una misura non negativa μ e una successione di insiemi $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si ha:

i) $\mu(\underline{\lim}\, A_n) \leq \underline{\lim}\, \mu(A_n)$;

ii) $\mu(\overline{\lim}\, A_n) \geq \overline{\lim}\, \mu(A_n)$ *se* $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) < \infty$.

Dimostrazione.
La famiglia di insiemi $\left(\bigcap_{n=i}^{\infty} A_n\right)_{i\in\mathbb{N}}$ è monotona crescente dunque

$$\lim_{i\to\infty} \mu\Big(\bigcap_{n=i}^{\infty} A_n\Big) = \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcap_{n=i}^{\infty} A_n\Big) = \mu(\underline{\lim}\, A_n) \leq \underline{\lim}\, \mu(A_i)$$

Dove la disuguaglianza è giustificata dal fatto che $\mu\Big(\bigcap_{n=i}^{\infty} A_n\Big) \leq \mu(A_i)$ essendo il primo insieme contenuto nel secondo. Per dimostrare la seconda asserzione il ragionamento è del tutto analogo infatti sotto l'ulteriore ipotesi sopra esplicitata è vera la prima delle seguenti uguaglianze:

$$\lim_{i\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{n=i}^{\infty} A_n\Big) = \mu\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{n=i}^{\infty} A_n\Big) = \mu(\overline{\lim}\, A_n) \geq \overline{\lim}\, \mu(A_i)$$

□

Definizione 1.6.
Sia μ una misura con segno definita su una σ-algebra $\mathcal{S}$. Un insieme misurabile I si dice *μ-positivo* (*μ-negativo*) se ogni suo sottoinsieme misurabile ha misura non negativa (non positiva). Un insieme contemporaneamente μ-positivo e μ-negativo si dice μ-nullo.

Teorema 1.1.3 (Decomposizione di Hahn)**.**
Sia μ una misura con segno limitata definita su una σ-algebra $\mathcal{S}$ su un insieme X. Allora esistono un insieme μ-positivo X^+ ed un insieme μ-negativo X^- tali che $X = X^+ \cup X^-$, $X^+ \cap X^- = \varnothing$. La coppia (X^+, X^-) si dice decomposione di Hahn di X indotta da μ.

Dimostrazione.
Scegliamo per ogni n naturale un insieme B_n tale per cui $\mu(B_n) > \mu^+(X) + 2^{-n}$ ed un insieme A qualsiasi nel complementare di B_n. Allora

$$\mu(A \cup B_n) = \mu(A) + \mu(B_n) \leq \mu^+(A) + \mu^+(B_n) \leq \mu^+(X).$$

Dunque $\mu(A) \leq \mu^+(X) - \mu(B_n) < 2^{-n}$ e $\mu^+(B_n^c) < 2^{-n}$. Dalla decomposizione di Jordan segue che

$$\mu^-(B_n) = \mu^+(B_n) - \mu(B_n) \leq \mu^+(X) - \mu(B_n) < 2^{-n}$$

Posto $X^+ = \overline{\lim}\, B_n$ e $X^- = (X^-)^c = \underline{\lim}\, B_n^c$ abbiamo in forza del lemma 1.1.2:

$$0 \leq \mu^+(X^-) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \mu^+(B_n^c) \leq \lim_{n\to\infty} 2^{-n}$$

Dunque $\mu^+(X^-) = 0$ e ogni suo sottoinsieme A misurabile gode della stessa proprietà perciò dalla decomposizione di Jordan si ottiene $\mu(A) = -\mu^-(A)$ cioè X^- è un insieme μ-negativo. D'altra parte per ogni k naturale si ha

$$0 \leq \mu^-(X^+) \leq \mu^-(\bigcup_{n=k}^{\infty} B_n) \leq \sum_{n=k}^{\infty} \mu^-(B_n) \leq \sum_{n=k}^{\infty} 2^{-n} = 2^{-k+1}$$

quindi X^+ è un insieme μ-positivo. □

Osservazione 5. La decomposizione di Hahn non è unica. Detto N un qualsiasi insieme μ-nullo le coppie $(X^+ \cup N,\ X^- \setminus N)$, $(X^+ \setminus N,\ X^- \cup N)$ sono ancora decomposizioni di Hahn di X indotte da μ.

Osservazione 6. Risulta $\mu^+(A) = \mu(A \cap X^+)$ e $\mu^-(A) = \mu(A \cap X^-)$. Infatti $\mu^+(A) \geq \mu^+(A \cap X^+) \geq \mu(A \cap X^+)$. Per provare l'altra disuguaglianza si prenda $B \subset A$. Allora $\mu(B) = \mu(B \cap X^+) + \mu(B \cap X^-) \leq \mu(B \cap X^+) \leq \mu(A \cap X^+)$. Passando all'estremo superiore sui sottinsiemi misurabili di A otteniamo la tesi per μ^+. Il caso di μ^- è del tutto analogo.

Esempio 1.1.
Consideriamo $\mathbb{N}$ e prendiamo come σ-algebra l'insieme delle parti. Sia poi μ la misura con segno definita sui singoletti come

$$\mu(\{n\}) = \begin{cases} 2^{-n} & n \text{ pari} \\ -2^{-n} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

Non è difficile riconoscere che $\mathbb{N}^+$ è l'insieme dei naturali pari e $\mathbb{N}^-$ quello dei naturali dispari, che $|\mu|$ sia la misura definita da $|\mu|(A) = \sum_{n\in A} 2^{-n}$ e che $|\mu|(\mathbb{N}) = 1$

1.2 Il teorema di Radon-Nikodym

Definizione 1.7.
Date due misure (eventualmente con segno) μ e λ diciamo che λ è *assolutamente continua* rispetto a μ e scriviamo $\lambda \ll \mu$ se $|\mu|(A) = 0$ implica $|\lambda|(A) = 0$.

Esempio 1.2.
Data una misura non negativa μ su uno spazio di misura $(X, \mathcal{S})$ e una qualsiasi funzione integrabile f la formula

$$\lambda(A) = \int_A f\, d\mu \qquad A \in \mathcal{S} \tag{1.3}$$

definisce sulla stessa σ-algebra una nuova misura con segno assolutamente continua rispetto a μ. Tale relazione si esprime con la notazione $\lambda = f \cdot \mu$ o anche $d\lambda = f\, d\mu$.

Osservazione 7.
Sia λ una misura definita da $\lambda = f \cdot \mu$ dove μ è non negativa. Allora $|\lambda| = |f| \cdot \mu$. Consideriamo infatti $X = X^+ \cup X^-$ una decomposizione di Hahn indotta da λ. Per ogni insieme $A \subset X^+$ e per ogni $B \subset X^-$ si ha

$$0 \leq \lambda(A) = \lambda^+(A) = \int_A f\, d\mu \qquad 0 \geq \lambda(B) = -\lambda^-(B) = \int_B f\, d\mu$$

Dunque $f \geq 0$ su X^+ e $f \leq 0$ su X^-. Questo dimostra che $\lambda^+ = f^+ \cdot \mu$ e $\lambda^- = f^- \cdot \mu$ e quindi che

$$|\lambda| = \lambda^+ + \lambda^- = f^+ \cdot \mu + f^- \cdot \mu = (f^+ + f^-) \cdot \mu = |f| \cdot \mu$$

Esempio 1.3.
Ovviamente se μ è una misura la sua parte positiva e la sua parte negativa sono misure assolutamente continue rispetto a μ. Detta X^+, X^- una scomposizione di Hahn non è difficile riconoscere che

$$\mu^+(A) = \int_A \chi_{X^+}\, d\mu = \int_A \chi_{X^+}\, d|\mu|$$
$$\mu^-(A) = -\int_A \chi_{X^-}\, d\mu = \int_A -\chi_{X^-}\, d|\mu|$$

cosicché:

$$\mu(A) = \int_A (\chi_{X^+} - \chi_{X^-})\, d|\mu| \tag{1.4}$$

L'esempio 1.2 è, in un certo senso, universale. Il contenuto del teorema di Radon-Nikodym infatti è proprio che, sotto opportune condizioni, tutte le misure assolutamente continue rispetto ad una misura data si ottengono tramita la (1.3).

Teorema 1.2.1 (Radon-Nikodym).
Date due misure con segno limitate μ e λ definite su una stessa σ-algebra $\mathcal{S}$, $\lambda \ll \mu$, esiste una funzione misurabile $f \in L^1(\mu)$ che rappresenta λ nel senso della (1.3)*. In questo caso si dice che f è la* derivata di Radon-Nikodym *di λ rispetto a μ.*

Dimostrazione.
Poiché $\mu = h_1 \cdot |\mu|$ e $\lambda = h_2 \cdot |\lambda|$ con $|h_1| = |h_2| = 1$ possiamo supporre che le misure siano non negative. Poniamo

$$\mathcal{F} := \left\{ f \in L^1(\mu) : \ f \geq 0, \ \int_A f \, d\mu \leq \lambda(A) \ \text{per ogni} \ A \in \mathcal{S} \right\}$$

e

$$M = \sup \left\{ \int_X f \, d\mu \ : f \in \mathcal{F} \right\}$$

Vogliamo mostrare che esiste una funzione f che raggiunge M. A questo scopo sia g_n una successione di funzioni in $\mathcal{F}$ i cui integrali convergano a M. Definiamo le funzioni $f_n = \max\{g_1, \ldots, g_n\}$ e notiamo che anche quest'ultime appartengono alla famiglia $\mathcal{F}$ in quanto ogni insieme A si può decomporre negli insiemi $A_1, \ldots, A_n$ tali per cui $f_n|_{A_k} \equiv g_k|_{A_k}$ e quindi

$$\int_A f_n \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} f_n \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} g_k \, d\mu \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda(A_k) = \lambda(A)$$

La successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è monotona crescente e gli integrali di tutti i suoi termini sono maggiorati da $\lambda(X)$. Possiamo applicare perciò il teorema di Beppo Levi che ci assicura che la funzione $f := \lim f_n$ è integrabile. Dalla sua definizione è inoltre ovvio che $f \in \mathcal{F}$ e che $\int_X f \, d\mu = M$. Per concludere la dimostrazione è sufficiente dimostare che la misura (non negativa) definita da

$$\nu(A) = \lambda(A) - \int_A f \, d\mu \qquad A \in \mathcal{S} \tag{1.5}$$

è identicamente nulla.

Procediamo per assurdo supponendo $\nu(X) > 0$ e considerando per ogni n naturale le misure con segno $\nu - n^{-1}\mu$ e delle loro decomposizioni di Hahn $X = X_n^+ \cup X_n^-$. Poniamo infine $X_0^- := \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n^-$. Da quest'ultima posizione segue che per ogni n $\nu(X_0^-) \leq \nu(X_n^-)$. D'altra parte per definizione di X_n^- si ha $(\nu - n^{-1}\mu)(X_n^-) \leq 0$ cioè $\nu(X_n^-) \leq n^{-1}\mu(X_n^-) \leq n^{-1}\mu(X)$. Unendo il tutto otteniamo

$$0 \leq \nu(X_0^-) \leq \nu(X_n^-) \leq \frac{\mu(X)}{n}$$

Perciò $\nu(X_0^-) = 0$. Ne viene che esiste un m naturale tale per cui $\nu(X_m^+) > 0$. Supponiamo infatti che $\nu(X_n^+) = 0$ per ogni naturale allora $\nu(X) = \nu(X_n^-)$ che risulta costante. D'altra parte dalla definizione delle misure segue subito che $X_{n+1}^- \subset X_n^-$ e perciò

$$0 = \nu(X_0^-) = \lim_{n\to\infty} \nu(X_n^-) = \lim_{n\to\infty} \nu(X) = \nu(X)$$

il che è assurdo. Notiamo anche che $\nu(X_m^+) > 0$ implica che X_m^+ ha μ-misura positiva infatti se fosse nulla per l'assoluta continuità di λ rispetto a μ l'insieme avrebbe anche λ-misura nulla e ora la (1.5) implica $\nu(X_m^+) = 0$. Definiamo infine la funzione $h = f + m^{-1}\chi_{X_m^+}$. Si ha

$$\int_X h\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \frac{\mu(X_m^+)}{m} = M + \frac{\mu(X_m^+)}{m} > M$$

Dalla definizione di X_m^- segue che per ogni suo sottoinsieme misurabile A $(\nu - m^{-1}\mu)(A) \geq 0$ cioè $m^{-1}\mu(A) \leq \nu(A)$. Dunque per ogni $B \in \mathcal{S}$

$$\int_B h\,d\mu = \int_B f\,d\mu + \frac{\mu(X_m^+ \cap B)}{m} \leq \int_B f\,d\mu + \nu(X_m^+ \cap B)$$
$$= \int_{B\setminus X_m^+} f\,d\mu + \lambda(X_m^+ \cap B) \leq \lambda(B \setminus X_m^+) + \lambda(X_m^+ \cap B) = \lambda(B)$$

Cioè $h \in \mathcal{F}$ nonostante il suo integrale su tutto X sia maggiore di M. Siamo arrivati ad un assurdo e la dimostrazione è conclusa. □

1.3 Misure di Borel, regolarità

Molto spesso sugli insiemi che si studiano oltre ad una struttura di spazio misurabile è presente anche una struttura topologica ed è naturale cercare di relazionare i due concetti. Questa parte della teoria della misura è vastissima ed è impensabile tentare di darne qui, anche solo a grandi linee, una panoramica. Ci limiteremo quindi alle prime definizioni e a due teoremi.

Definizione 1.8 (Misura di Borel)**.**
Dato uno spazio topologico X la σ-algebra $\mathscr{B}(X)$ generata dagli aperti prende il nome di σ-algebra di Borel e i suoi elementi si dicono Boreliani. Una qualsiasi misura definita sulla σ-algebra di Borel si chiama *misura di Borel.*

Nel seguito supporremo sempre lo spazio X di Hausdorff e le misure a variazione limitata.

Definizione 1.9 (Misura regolare)**.**
Una misura μ di Borel è detta *internamente regolare* se la seguente proprietà vale per ogni Boreliano:

$$|\mu|(A) = \sup\{\, |\mu|(K) : \, K \subset A, \, K \text{compatto}\} \tag{1.6}$$

Notiamo che la definizione è ben posta poiché essendo X di Hausdorff i compatti sono anche chiusi e quindi misurabili.

Osservazione 8. Nelle nostre ipotesi la (1.6) equivale alla *regolarità esterna* cioè

$$|\mu|(A) = \inf\{\, |\mu|(V) : \, A \subset V, \, V \text{aperto}\}$$

per ogni insieme misurabile A. Questo si vede facilmente prendendo come particolari aperti i complementari dei compatti nella (1.6). Nel caso più generale di una misura a variazione non limitata (ad esempio la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$) per misura regolare si intende una misura simultaneamente internamente ed esternamente regolare.

Essendo noi interessati allo studio di alcuni spazi duali ricerchiamo la struttura di spazio vettoriale normato in questo contesto.

Lemma 1.3.1.
Sia μ una misura con segno limitata e A un insieme misurabile. Sia poi $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di insiemi misurabili contenuti in A tali che $\lim_{n\to\infty} |\mu|(F_n) = |\mu|(A)$. Allora $\lim_{n\to\infty} \mu(F_n) = \mu(A)$.

Dimostrazione.

Si ha che $\lim_{n\to\infty}|\mu|(F_n) = |\mu|(A)$ se e solo se $\lim_{n\to\infty}|\mu|(A\setminus F_n) = 0$ se e solo se $\lim_{n\to\infty}\mu^+(A\setminus F_n) + \mu^-(A\setminus F_n) = 0$. Essendo le misure μ^+, μ^- non negative questo equivale a chiedere che $\lim_{n\to\infty}\mu^+(A\setminus F_n) = 0$ e $\lim_{n\to\infty}\mu^-(A\setminus F_n) = 0$. Segue quindi facilmente che $\lim_{n\to\infty}\mu(F_n) = \lim_{n\to\infty}\mu^+(F_n) - \mu^-(F_n) = \mu(A)$. □

Proposizione 1.3.2.

L'insieme $\mathcal{M}_r(X)$ delle misure con segno limitate regolari è uno spazio vettoriale con le ovvie operazioni.

Dimostrazione.

Per cominciare è banale dimostrare che se $\mu, \lambda \in \mathcal{M}_r(X)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ allora le funzioni $\mu+\lambda, \alpha\mu$ sono misure con segno e che $|\alpha\mu|(X) = |\alpha||\mu|(X)$. D'altra parte dal teorema 1.1.1 si ha

$$\begin{aligned} |\mu+\lambda|(X) &= \sup\sum_i |(\mu+\lambda)(A_i)| \leq \sup\sum_i |\mu(A_i)| + |\lambda(A_i)| \\ &\leq \sup\sum_i |\mu(A_i)| + \sup\sum_i |\lambda(A_i)| = |\mu|(X) + |\lambda|(X) \end{aligned} \tag{1.7}$$

dove i sup vanno intesi su tutte le partizioni finite di X.

Resta solo da provare la (1.6). Fissiamo quindi $\varepsilon > 0$. Dal teorema 1.1.1 segue che esiste una partizione finita di A $(A_n)_{n\leq N}$ tale per cui $|\mu+\lambda|(A) < \varepsilon + \sum |(\mu+\lambda)(A_n)|$. Segue ora dalla regolarità di μ e di λ e dal lemma precedente che per ogni A_n esiste un compatto F_n tale che $|(\mu+\lambda)(A_n)| < |(\mu+\lambda)(F_n)| + \varepsilon/N$. Dunque

$$\begin{aligned} |\mu+\lambda|(A) &< 2\varepsilon + \sum_{n=1}^{N} |(\mu+\lambda)(F_n)| \leq 2\varepsilon + \sum_{n=1}^{N} |\mu+\lambda|(F_n) \\ &= 2\varepsilon + |\mu+\lambda|(\bigcup_{n=1}^{N} F_n) \leq 2\varepsilon + \sup_{K\subset A} |\mu+\lambda|(K) \end{aligned}$$

essendo l'unione finita di compatti compatta. Segue ora dall'arbitrarietà di ε la disuguaglianza $|\mu+\lambda|(A) \leq \sup|\mu+\lambda|(K)$. L'altra è banale. □

Osservazione 9.

Nel corso della dimostrazione abbiamo provato che la funzione $\|\cdot\|$ è una seminorma. In effetti la funzione è a tutti gli effetti una norma in quanto se $|\mu|(X) = 0$ allora $|\mu|(A) \leq |\mu|(X) = 0$ per ogni insieme misurabile A. Quindi la terminologia data nella definizione 1.2 è coerente.

Teorema 1.3.3.
$\mathcal{M}_r(X)$ è uno spazio vettoriale di Banach.

Dimostrazione.
Prendiamo $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione di Cauchy in $\mathcal{M}_r(X)$. Più esplicitamente si ha che $\|\mu_n - \mu_m\| = |\mu_n - \mu_m|(X) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$. Per ogni insieme misurabile A la successione $(\mu_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ è anch'essa di Cauchy poiché

$$|(\mu_n - \mu_m)(A)| \leq |\mu_n - \mu_m|(A) \leq |\mu_n - \mu_m|(X) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$$

Resta così definita sulla stessa σ-algebra dei Boreliani una funzione a valori reali μ data da $\mu(A) = \lim \mu_n(A)$.

Abbiamo ora un candidato limite; iniziamo dimostrando che μ è effettivamente una misura con segno provando la σ-addittività. Presa $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una successione di insiemi disgiunti la cui unione sia A segue dal lemma di Fatou che per ogni $\varepsilon > 0$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varliminf_{m\to\infty} |\mu_n(A_i) - \mu_m(A_i)| \leq \varliminf_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |\mu_n(A_i) - \mu_m(A_i)|$$
$$\leq \varliminf_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |\mu_n - \mu_m|(A_i) = \varliminf_{m\to\infty} |\mu_n - \mu_m|(A) < \varepsilon$$

purché n sia abbastanza grande e dunque

$$\left|\mu(A) - \sum_{i=1}^{N} \mu(A_i)\right| \leq |\mu(A) - \mu_n(A)| + \left|\mu_n(A) - \sum_{i=1}^{N} \mu_n(A_i)\right| +$$
$$\sum_{i=1}^{N} |\mu_n(A_i) - \mu(A_i)| < 2\varepsilon + \left|\mu_n(A) - \sum_{i=1}^{N} \mu_n(A_i)\right| < 3\varepsilon$$

purchè anche N sia sufficientemente grande.

Proviamo ora la regolarità di μ. Fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{n}$ tale per cui $|\mu(A) - \mu_n(A)| < \varepsilon$ per ogni $A \in \mathcal{S}$ e per ogni $n > \overline{n}$. Tale stima ci permette di controllare la variazione totale di μ come segue:

$$|\mu|(A) = \mu^+(A) + \mu^-(A) = \sup_{B\subset A} \mu(B) + \sup_{B\subset A} -\mu(B)$$
$$\leq \sup_{B\subset A} \{\mu_n(B) + \varepsilon\} + \sup_{B\subset A} \{-\mu_n(B) + \varepsilon\} = |\mu_n|(A) + 2\varepsilon$$

e analogamente $|\mu_n|(A) \leq |\mu|(A) + 2\varepsilon$. Poiché tutte le μ_n sono regolari otteniamo

$$|\mu|(A) \leq |\mu_n|(A) + 2\varepsilon = \sup_{K \subset A} |\mu_n|(K) + 2\varepsilon \leq \sup_{K \subset A} |\mu|(K) + 4\varepsilon$$

e la regolarità di μ segue. Incidentalmente abbiamo dimostrato (applicando la stima sopra ad X) che μ è limitata ed è effettivamente il limite della successione considerata. $\square$

Capitolo 2

Gli spazi L^p

Indicheremo gli spazi di funzioni a potenza p-ma sommabile su uno spazio di misura $(X, \mathcal{S}, \mu)$ indifferentemente con le notazioni L^p e L_p, dove p indicherà sempre un numero compreso tra uno ed infinito mentre la lettera q indicherà l'esponente coniugato di p, definito da $q = \frac{p}{p-1}$.

Una volta familiarizzato con le nozioni, strettamente collegate tra loro, di misura ed integrale di Lebesgue sorgono naturali le definizioni di due spazi funzionali: L^1 ed L^∞ rispettivamente lo spazio delle funzioni sommabili e quello delle funzioni essenzialmente limitate.
Solo successivamente si può pensare di "interpolare" tali spazi ottenendo gli spazi L_p, cioè gli spazi di funzioni a potenza p-ma sommabile. [1] In questo capitolo studieremo i duali di tali spazi.

Cominciamo osservando che grazie alla disuguaglianza di Hölder ogni funzionale $T : L^p \to \mathbb{R}$ della forma

$$T(f) = \int_X f g \, d\mu \quad g \in L^q$$

è ben definito e continuo. La domanda è se L_q fornisca, nella forma sopra, *tutti* gli elementi di L_p^*. La risposta sarà positiva per gli spazi "intermedi" cioè con $p \in (1, \infty)$ ed anche per $p = 1$, sotto un'ulteriore ipotesi non troppo restrittiva su μ. Per il duale di L^∞ invece la risposta (indipendentemente dalla misura) è negativa. Dovremo quindi estendere opportunamente L^1 ad uno spazio più ampio.

[1] Si può mostrare che se $\mu(X) < \infty$ allora $L_s \supseteq L_t$ per $1 \leq s \leq t \leq \infty$ e che se $f \in L_r$ per qualche $r < \infty$ allora $\|f\|_p \to \|f\|_\infty$ per $p \to \infty$

2.1 Il caso $p > 1$, p reale

Teorema 2.1.1.
Se $F \in L_p^*(\mu)$ esiste un'unica $f \in L^q(\mu)$ che rappresenta F nel senso che

$$F(g) = \int_X f g \, d\mu \qquad \forall g \in L^p(\mu) \tag{2.1}$$

Inoltre se F e f sono relazionate come sopra allora

$$\|F\|_{L_p^*} = \|f\|_{L^q} \tag{2.2}$$

Dimostrazione.
Cominciamo dal caso $\mu(X) < \infty$. Definiamo $\lambda : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ come

$$\lambda(E) = F(\chi_E) \quad \forall E \in \mathcal{S} \tag{2.3}$$

Notiamo che, poiché $\mu(X) < \infty$, $\chi_E \in L^p(\mu) \quad \forall E \in \mathcal{S}$. Dalla definizione segue immediatamente che $\lambda(\varnothing) = 0$ e che λ è finitamente addittiva. Mostriamo quindi che è numerabilmente additiva, cioè una misura. Sia $\{E_j\} \subseteq \mathcal{S}$ una famiglia numerabile di insiemi disgiunti la cui unione sia E. Allora

$$\|\chi_E - \sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i}\|_p = \|\chi_{\bigcup_{i=n+1}^{\infty} E_i}\|_p = |\sum_{i=n+1}^{\infty} \mu(E_i)|^{1/p} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Dalla continuità di F si ha ora che $\lambda(E) - \lambda(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) \to 0$ e, poiché $|\lambda(E)| \leq \|F\|\|\chi_E\|_p$, segue che λ è una misura con segno limitata assolutamente continua rispetto a μ.

Il teorema 1.2.1 ci assicura quindi l'esistenza di una funzione $\mathcal{S}$-misurabile, che chiamiamo di già f, tale per cui valga la (1.3). Dalla linearità discende subito che la (2.1) è valida per ogni funzione semplice. Consideriamo ora una funzione $g \in L^p(\mu)$, $g \geq 0$. Possiamo trovare una succesione monotona $\{s_k\}$ di funzioni semplici tali per cui

- $s_k \nearrow g$;
- $\|s_k - g\|_p \longrightarrow 0$.

Siano poi $A = \{x \in X : f(x) \geq 0\}$ e $B = X \setminus A$. Si avrà che $s_k\chi_A \nearrow g\chi_A$ e che $\|s_k\chi_A - g\chi_A\|_p \longrightarrow 0$.

Dunque:

$$\begin{aligned} F(g\chi_A) &= \lim_{k\to\infty} F(s_k\chi_A) = \lim_{k\to\infty}\int_X s_k\chi_A f d\mu \\ &= \lim_{k\to\infty}\int_X s_k f^+ d\mu = \int_X g f^+ d\mu \end{aligned}$$

Dove la prima uguaglianza è giustificata dalla continuità di F mentre l'ultima dal teorema di Beppo Levi sulla convergenza monotona. Procedendo analogamente si dimostra che $F(g\chi_B) = \int g f^- d\mu$. Ciò implica che la (2.1) vale per g non negativa e dunque per qualsiasi funzione di L^p. Che $\|F\| \leq \|f\|$ è una conseguenza della disuguaglianza di Hölder. Per provare la disuguaglianza opposta consideriamo gli insiemi $C_n = \{x \in X : |f(x)| \leq n\}$ e le funzioni $h_n = \chi_{C_n}|f|^{q-1}\mathrm{sgn} f$. Risulta $h_n \in L^p$ e

$$\int_{C_n} |f|^q d\mu = \int_X \chi_{C_n}|f|^q d\mu = \int_X fh\, d\mu = F(h) \leq \|F\|\big(\int_{C_n} |f|^q d\mu\big)^{1/p}$$

Dividendo il primo e l'ultimo termine della disuguaglianza per l'integrale a destra otteniamo che $\int_{C_n} |f|^q d\mu \leq \|F\|^q$ ed appicando il teorema della convergenza monotona segue che $\|f\| \leq \|F\|$.

Per quanto riguarda l'unicità questa è presto provata infatti se esistessero due funzioni f_1,f_2 che soddisfano la (2.1) prendendo $g = \chi_E$, $E \in \mathcal{S}$ si avrebbe

$$\int_E (f_1 - f_2) d\mu = 0 \quad \forall E \in \mathcal{S}$$

il che implica $f_1 = f_2$ $\mu - q.o.$ Questo conclude la dimostrazione nel caso $\mu(X) < \infty$.

Consideriamo ora μ una generica misura non negativa. Per $E \in \mathcal{S}$ poniamo $L^p(E) := \chi_E L^p(\mu) := \{h \in L^p(\mu) : h = 0 \text{ in } E^c\}$ ed $\mathcal{E} := \{E \in \mathcal{S} : \mu(E) < \infty\}$. Dalla definizione e dalla prima parte della dimostrazione seguono facilmente le seguenti proprietà:

i) $\forall E \in \mathcal{E}\ \exists!\ \ f_E : F(\chi_E g) = \int_X f_E g d\mu$;

ii) $\forall E \in \mathcal{E}\ \ \|f_E\|_q \leq \|F\|$;

iii) $a = \sup\{\|f_E\|_q :\ E \in \mathcal{E}\} \leq \|F\|$;

iv) se $A, B \in \mathcal{E}$, $A \subseteq B \Rightarrow f_A = f_B$ q.o. in A.

In particolare in quest'ultimo caso $|f_A| \leq |f_B|$ e dunque $\|f_A\|_q \leq \|f_B\|_q$. Esiste perciò una sucessione $\{E_n\} \subseteq \mathcal{E}$ di insiemi crescenti tali per cui $\|f_{E_n}\|_q \uparrow a$. Poniamo

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_{E_n}(x) \tag{2.4}$$

Poichè $f_{E_{n+1}} = f_{E_n}$ in E_n (q.o.) il limite esiste q.o. cosicchè la definizione è ben posta e $f \in L^q(X)$ infatti

$$\|f\|_q^q = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} |f_{E_n}|^q d\mu \leq a^q \leq \|F\|^q \tag{2.5}$$

Inoltre $f(x) = 0$ per $x \notin D = \bigcup_n E_n$.

Vogliamo ora dimostrare che F si annulla identicamente su $L^p(D^c)$. Procediamo per assurdo: dalla densità delle funzioni semplici segue che non è restrittivo supporre l'esistenza di un insieme $B \in \mathcal{E}$, $B \subseteq D^c$ tale per cui $F(\chi_B) \neq 0$. Ciò implica $\|f_B\| \geq 0$ e poichè $B \cap E_n = \varnothing$

$$a^q \geq \|f_{B\cup E_n}\|_q^q = \|f_B\|_q^q + \|f_{E_n}\|_q^q \Longrightarrow a^q \geq \|f_B\|_q^q + a^q$$

il che è assurdo.

Sia ora $g \in L^p(X)$ allora $fg \in L^1(X)$ e, poichè $gf_{E_n} \to gf$ q.o. e $|gf_{E_n}| \leq |gf|$ possiamo applicare il teorema della convergenza dominata che ci garantisce che $\int_X gf_{E_n} d\mu \to \int_X gf d\mu$. Similmente $\|g\chi_{E_n} - g\chi_D\|_p \to 0$ e la continuità di F mostra che le seguenti uguaglianze sono corrette:

$$F(g) = F(g\chi_D) = \lim_{n\to\infty} F(g\chi_{E_n}) = \lim_{n\to\infty} \int_X gf_{E_n} d\mu = \int_X gf d\mu \tag{2.6}$$

Dunque la formula (2.1) è valida e la solita disuguaglianza di Hölder implica $\|F\| \leq \|f\|$. Ora dalla (2.5) segue la (2.2).

Resta da dimostare l'unicità. Ancora una volta supponiamo f_1,f_2 che verificano la (2.1); dal corso della dimostrazione sappiamo che si annullano entrambe su D^c e, d'altra parte, essendo μ σ-finita su D possiamo applicare il ragionamento della prima parte. □

Il teorema appena dimostrato esibisce un isomorfismo isometrico che denotiamo con R_q tra L_q e il duale di L_p. Dalla "riflesività" nella definizione di esponente coniugato si ottiene un isomorfismo tra L^p e il suo biduale semplicemente componendo R_p con l'inverso del trasposto di R_q. Questo non implica la riflessività ma è un forte indizio a suo favore.[2] In questo caso siamo fortunati, e la proprietà è vera.

Teorema 2.1.2.
Gli spazi L^p per $p \in]1, \infty[$ sono riflessivi.

Dimostrazione.
Detto J l'immersione canonica, nelle notazioni sopra, è sufficiente che il seguente diagramma commuti

$$\begin{tikzcd}
L_p \arrow[rr, "R_p"] \arrow[dr, "J"'] & & L_q^* \\
& L_p^{**} \arrow[ur, "R_q^*"'] &
\end{tikzcd}$$

cioè che $R_q^* \circ J = R_p$. Infatti ne verrà che $J = (R_q^*)^{-1} \circ R_p$ e quindi in particolare J è un operatore suriettivo essendo composizione di operatori biunivoci.

Per ogni $u \in L_p$ e $v \in L_q$ abbiamo

$$\begin{aligned}
{}_{L_q^*}\langle R_q^* Ju, v\rangle_{L_q} &=_{L_p^{**}} \langle Ju, R_q v\rangle_{L_p^*} =_{L_p^*} \langle R_q v, u\rangle_{L_p} = \\
&= \int_X vu\, d\mu = \int_X uv\, d\mu =_{L_q^*} \langle R_p u, v\rangle_{L_q}
\end{aligned}$$

□

[2]L'esistenza di un isomorfismo isometrico tra uno spazio e il suo biduale non garantisce la riflessività, è cruciale che l'isomorfismo sia quello canonico. Un controesempio è stato descritto da R.C. James in [3]

2.2 Il caso $p = 1$

Ammettendo 1 e ∞ come esponenti coniugati il teorema 2.1.1 continua a valere a patto che la misura sia $\sigma-$finita.

Teorema 2.2.1.
Sia μ σ-finita e $F \in L_1^*(\mu)$. Allora esiste un'unica $f \in L^\infty(\mu)$ che rappresenta F nel senso che

$$F(g) = \int_X fg \, d\mu \qquad \forall g \in L^1(\mu) \tag{2.7}$$

Inoltre se F ed f sono relazionate come sopra allora

$$\|F\|_{L_1^*} = \|f\|_{L^\infty} \tag{2.8}$$

Dimostrazione.
L'unicità seguirà immediatamente come nel caso precedente una volta dimostrata l'esistenza. Consideriamo dapprima il caso $\mu(X) < \infty$. Procedendo come nel caso $p > 1$ otteniamo una funzione misurabile f che soddisfa la (2.7). Vogliamo mostrare che f è essenzialmente limitata. Prendendo $g = \chi_E, \;\; E \in \mathcal{S}$ otteniamo che

$$\Big| \int_E f \, d\mu \Big| \leq \|F\| \mu(E) \quad \forall E \in \mathcal{S}$$

il che implica $|f| \leq \|F\|$ $\mu-$q.o. e perciò $\|f\|_\infty \leq \|F\|$. Dunque $f \in L^\infty$ e vale la seguente disuguaglianza:

$$|F(g)| = \Big| \int_X fg \, d\mu \Big| \leq \|f\|_\infty \|g\|_1$$

Segue che $\|F\| \leq \|f\|_\infty$ e quindi la (2.8).

Nel caso $\mu(X) = \infty$ X è unione di insiemi $X_1, X_2 \ldots$ a due a due disgiunti e di misura finita. Applicando la prima parte della dimostrazione otteniamo delle funzioni $f_1, f_2 \ldots$ tali per cui

$$F(\chi_{X_i} g) = \int_{X_i} f_i g \, d\mu \quad \forall g \in L^1(X) \;\;, \;\; \|f_i\|_\infty = \|F\|_{L_1^*(X_i)} \leq \|F\|_{L_1^*(X)}$$

Dunque $|f_i| \leq \|F\|_{(L^1(X))^*}$ q.o. in X_i e definendo $f(x) = f_i(x)$ per $x \in X_i$ si ha $\|f\|_\infty \leq \|F\|_{L_1^*(X)}$. Sia ora $g \in L^1(X)$ allora $fg \in L^1(X)$ e poichè

- $\left| \sum_{i=1}^n f_i g \right| \le |fg|$
- $\| \sum_{i=1}^n g\chi_{X_i} - g\|_1 \longrightarrow 0$

dal teorema della convergenza dominata e dalla continuità di F segue che

$$F(g) = \lim_{n\to\infty} F(\sum_{i=1}^n g\chi_{X_i}) = \lim_{n\to\infty} \int_X (\sum_{i=1}^n f_i) g \, d\mu = \int_X fg \, d\mu.$$

La disuguaglianza di Hölder implica ora che $\|F\|_{L_1^*(X)} \le \|f\|_{L^\infty}$. □

Osservazione 10. Poiché $\mathbb{R}^n$ è unione delle palle $B_k(0)$, k naturale ogni suo sottoinsieme, dotato della misura di Lebesgue, ricade in queste ipotesi.

Osservazione 11. L'ipotesi di σ-finitezza della misura non è rimovibile come prova il seguente controesempio. Sia $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{S}$ la σ-algebra degli insiemi al più numerabili o con complementare al più numerabile ed infine sia μ la misura del conteggio. $L^1(\mu)$ consiste in tutte quelle funzioni g che si annullano al di fuori di un insieme al più numerabile e tali per cui $\sum_{t\in\mathbb{R}} |g(t)| < \infty$. Consideriamo il funzionale T definito da $T(g) = \sum_{t>0} g(t)$. Risulta immediatamente che F è continuo e di norma 1. D'altra parte se ci fosse una funzione limitata f tale per cui

$$T(g) = \int_{\mathbb{R}} fg \, d\mu = \sum_{t>0} g(t)$$

tale funzione sarebbe $\chi_{(0,+\infty)}$ ma quest'ultima non è nemmeno $\mathcal{S}$-misurabile.

Pur non avendo ancora studiato il duale di L^∞ è lecito chiedersi se L^1 sia o meno riflessivo. In generale la risposta è negativa come mostra il seguente esempio:

Sia $X = [0, 1]$ e μ la misura di Lebesgue. Identifichiamo le funzioni continue con le classi di funzioni che hanno un rappresentante continuo. Tale rappresentante è unico infatti se ce ne fossero due la loro differenza sarebbe una funzione continua nulla quasi ovunque; un eventuale punto in cui tale funzione fosse non nulla avrebbe, per il teorema della permanenza del segno, tutto un intorno (di misura positiva!)in cui sarebbe non nulla e questo è assurdo. Possiamo quindi considerare $C([0, 1])$ come un sottospazio proprio di $L^\infty([0,1])$. Che su tale sottospazio la norma del massimo coincida con la norma infinito segue facilmente dalla definizione di norma infinito come estremo inferiore dei maggioranti q.o. e ancora una volta dal teorema della permanenza del segno. Dopo questa discussione preliminare consideriamo il funzionale F su $C([0,1])$ definito da $F(g) = g(0)$.

È immediato verificare che è lineare e continuo di norma uno. Per il teorema di Hahn-Banach esiste un'estensione di F a tutto L^∞ di norma ancora unitaria che per comodità continuiamo a chiamare ancora F. Vogliamo dimostrare che non esiste nessuna $f \in L^1([0,1])$ tale per cui

$$F(g) = \int_0^1 fg\, d\mu \quad \forall g \in L^\infty([0,1])$$

Si scelgano infatti $g_n(x) = (1-x)^n$. Se tale f esistesse dal teorema della convergenza dominata seguirebbe che

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 fg_n\, d\mu = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} fg_n\, d\mu = 0$$

ma $F(g_n) = 1 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$ il che è assurdo.

2.3 Il caso $p = \infty$

Definizione 2.1 (misura finitamente addittiva)**.** Sia X un insieme non vuoto e $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ un'algebra di sottinsiemi di X. Una funzione $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice *misura finitamente addittiva* (nel seguito m.f.a.) se valgono le seguenti:

i) $\mu(\varnothing) = 0$;

ii) $\mu(\bigcup_{i=1}^n E_i) = \sum_{i=1}^n \mu(E_i)$;

ogniqualvolta $E_i \in \mathcal{A}$, $E_i \cap E_j = \varnothing$ per $i \neq j$

Osservazione 12. Non è difficile verificare che il teorema 1.1.1 continua a valere se si sostituisce il termine misura con misura finitamente addittiva. È dunque sensata la definizione di m.f.a. limitata come m.f.a. la cui variazione totale sia limitata. Denotiamo l'insieme formato da quest'ultime con $ba(\mathcal{A})$.

Definizione 2.2. Data una misura non negativa μ indichiamo con $ba(\mathcal{A} : \mu)$ lo spazio delle m.f.a limitate assolutamente continue rispetto a μ. Non è difficile verificare, adattando la dimostrazione del teorema 1.3.3, $ba(\mathcal{A} : \mu)$ è uno spazio di Banach con la norma data dalla variazione.

Definizione 2.3 (Integrazione rispetto ad una m.f.a.)**.**
Specializziamo ora al caso in cui la nostra algebra $\mathcal{A}$ sia una σ-algebra $\mathcal{S}$ Sia data una misura non negativa μ e $\nu \in ba(\mathcal{S} : \mu)$. Per una funzione h $\mathcal{S}$-semplice e limitata è ben definito $\int_X h\,d\nu$ e risulta

$$\Big|\int_X h\,d\nu\Big| \leq \int_X |h|d\,\nu \leq \|h\|_\infty \|\nu\|$$

Risulta quindi definito un funzionale T_ν sul sottospazio denso di $L^\infty(\mu)$ formato dalle funzioni $\mathcal{S}$-semplici e limitate di norma al più $\|\nu\|$. Questo si estende in modo unico ad un funzionale $T_\nu^{'}$ definito su tutto $L^\infty(\mu)$. Definiamo quindi

$$\int_X h\,d\nu = T_\nu^{'}(h) \qquad h \in L^\infty(\mu)$$

Osservazione 13.
In effetti il funzionale $T_\nu^{'}$ ha norma esattamente $\|\nu\|$. Preso $\varepsilon > 0$ esiste una partizione finita di X , $\{E_i\}$ tale per cui

$$\sum_{i=1}^{n} |\nu(E_i)| > |\nu|(X) - \varepsilon$$

Posto $\alpha_i = \mathrm{sgn}(\nu(E_i))$ definiamo $h = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i}$. Risulta $\|h\|_\infty \leq 1$ e

$$\Big|\int_X h\,d\nu\Big| = \Big|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \nu(E_i)\Big| = \sum_{i=1}^{n} |\nu(E_i)| > |\nu|(X) - \varepsilon$$

Dall'arbitrarietà di ε segue dunque che $\|T_\nu^{'}\| \geq \|\nu\|$ e questo forza l'uguaglianza.

Teorema 2.3.1.
Se $F \in (L^\infty(\mu))^*$ esiste un'unica $\nu \in ba(\mathcal{S} : \mu)$ che rappresenta F nel senso che

$$F(g) = \int_X g d\nu \qquad \forall g \in L^\infty(\mu) \tag{2.9}$$

Inoltre se F e ν sono relazionate come sopra allora

$$\|F\|_{(L^\infty)^*} = \|\nu\| \tag{2.10}$$

Dimostrazione. Definiamo $\nu(E) = F(\chi_E) \quad E \in \mathcal{S}$. ν è allore ovviamente una misura finitamente addittiva. Inoltre dalla disuguaglianza $|\nu(E)| \leq \|F\|\|\chi_E\|_\infty$ segue che ν è limitata e assolutamente continua rispetto a μ.

Dalla linearità di F segue che la formula di rappresentazione 2.9 è valida per ogni g $\mathcal{S}$-semplice e limitata e dunque dalla discussione precedente per ogni $g \in L^\infty$ infine, per quanto già visto nell'osservazione 13 $\|F\| = \|\nu\|$. $\square$

Concludiamo osservando che il funzionale ha la forma $F(f) = \int fg\, d\mu$ con $g \in L^1(\mu)$ precisamente quando la ν data dal teorema appena provato è una misura numerabilmente addittiva. Infatti la posizione $\nu = g \cdot \mu$ definisce ovviamente un elemento di $ba(\mathcal{S} : \mu)$ mentre se ν è una misura assolutamente continua rispetto a μ il teorema di Radon-Nicodym ci assidura l'esistenza della g cercata. In questo senso lo spazio $ba(\mathcal{S} : \mu)$ rappresenta un'estensione opportuna di $L^1(\mu)$.

Capitolo 3

Lo spazio $C_c(X)$

Spazi di funzioni continue

Consideriamo l'insieme delle funzioni continue a valori reali su uno spazio topologico X ed indichiamolo con $C(X)$. Questo non è, in generale uno spazio vettoriale normato ma lo diventa, con la norma del massimo, se supponiamo che X sia compatto grazie al teorema sui massimi di Weierstrass. Possiamo indebolire leggermente la condizione supponendo X solo localmente compatto (è il caso adesempio di $\mathbb{R}^n$) restringendo però $C(X)$ al sottospazio $C_c(X)$ delle funzioni continue a supporto compatto. Nel seguito lavoreremo sotto queste ipotesi. Per evitare casi patologici supponiamo inoltre che lo spazio topologico X sia Hausdorff.

Osservazione 14. Mentre nel primo caso otteniamo uno spazio di Banach, nel secondo ciò non è generalmente vero. Il completamento di $C_c(X)$ con la norma del massimo si indica con $C_0(X)$. $C_0(\mathbb{R}^n)$ è lo spazio delle funzioni continue asintoticamente nulle. Ai fini del nostro studio tuttavia è indifferente lavorare su uno o l'altro di questi spazi: ogni funzionale lineare continuo su $C_0(X)$ lo è anche (ovviamente) su $C_c(X)$ viceversa ogni funzionale continuo su $C_c(X)$ si estende in modo univoco (per densità) a tutto $C_0(X)$.

Osservazione 15. Le nostre ipotesi su X (localmente compatto, di Hausdorff) ne fanno uno spazio topologico *normale*. È quindi applicabile il lemma di Urysohn che ci assicura dato un compatto $K \subset V$, V aperto, l'esistenza di una funzione continua a supporto compatto in V, identicamente uno su K e a valori in $[0,1]$. In particolare se $V_1, \dots, V_n$ è un ricoprimento aperto di un compatto K si può dimostrare l'esistenza di una partizione dell'unità su K subordinata al ricoprimento dato.

3.1 Funzionali monotoni

Data una funzione continua a supporto compatto in $\mathbb{R}^n$ è immediato pensare al funzionale definito dal suo integrale su tutto lo spazio. Ebbene tale funzionale, chiamiamolo I, non è in continuo ma ha un'altra importante proprietà: è *monotono* (o *positivo*) cioè $I(f) \geq I(g)$ ogniqualvolta $f \geq g$. Cominciamo allora studiando le proprietà di questo tipo di funzionali.

Definizione 3.1. D'ora in avanti con la notazione $K \prec f$ si intenderà K compatto, $f \in C_c(X)$, $0 \leq f \leq 1$ e $f = 1$ su K. Con la notazione $f \prec V$ si intenderà invece V aperto, f continua a supporto compatto in V e $0 \leq f \leq 1$. La scrittura $K \prec f \prec V$ indicherà che la validità simultanea delle definizioni precedenti.

Teorema 3.1.1.
Sia F un funzionale monotono su $C_c(X)$. Allora esiste un'unica misura non negativa μ tale per cui

$$F(f) = \int_X f \, d\mu \qquad \forall\, f \in C_c(X) \tag{3.1}$$

Inoltre tale misura è esternamente regolare su ogni insieme misurabile, ed è internamente regolare sugli aperti.

Dimostrazione.
Definiamo per V aperto ed E un qualsiasi sottoinsieme di X

$$\mu(V) = \sup\{\, F(f) :\ f \prec V\} \qquad \mu^*(E) = \inf\{\, \mu(V) :\ E \subset V,\ V \text{aperto}\}$$

Segue immediatamente che μ e μ^* coincidono sugli aperti, che μ^* è una funzione monotona e che $\mu^*(\varnothing) = 0$. Vogliamo dimostrare che μ^* è una premisura cioè che è numerabilmente subaddittiva. Sia $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una famiglia di sottoinsiemi di X. Se $\sum_i \mu^*(A_i) = \infty$ non c'è nulla da dimostrare, altrimenti fissato $\varepsilon > 0$ si scelgano degli aperti V_i tali che $A_i \subset V_i$ e

$\mu(V_i) < \mu^*(A_i) + \varepsilon/2^i$. Poniamo poi $V = \bigcup_i V_i$. Se $f \prec V$ allora $K = \text{supp } f \subset \bigcup_i V_i$ e dunque esiste un n tale per cui $K \subset \bigcup_{i=1}^n V_i$. Esiste ora una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $(V_i)_{i\le n}$ cioè delle funzioni $f_1, \dots, f_n \in C_c(X)$ tali che $f_i \prec V_i$ e $\sum_{i=1}^n f_i = 1$ su K. Si ha $f \le \sum_{i=1}^n f_i$ e quindi

$$F(f) \le \sum_{i=1}^n F(f_i) \le \sum_{i=1}^n \mu(V_i) \le \sum_{i=1}^\infty \mu(V_i) \le \sum_{i=1}^\infty \mu^*(A_i) + \varepsilon$$

Questo implica $\mu(V) \le \sum_{i=1}^\infty \mu^*(A_i) + \varepsilon$ e finalmente $\mu^*(A) \le \sum_{i=1}^\infty \mu^*(A_i)$ dove A indica l'unione degli A_i.

Dimostriamo ora che μ^* è finita sui compatti. Dato un compatto K scegliamo un aperto $V \supset K$ a chiusura compatta. Esiste una $g \in C_c(X)$ tale che $\overline{V} \prec g$. Se $f \prec V$ allora $f \le g$ e $F(f) \le F(g)$ perciò $\mu^*(K) \le \mu(V) \le F(g) < \infty$.

Proviamo ora la regolarità interna di μ^* sugli aperti cioè che $\mu^*(V) = \mu(V) = \sup\{\, \mu^*(K) : K \subset V,\ K \text{ compatto} \,\}$ per V aperto. Preso $a < \mu(V)$ scegliamo $f \prec V$ con $a < F(f)$. Sia $K = \text{supp } f$. Se W è un aperto contenente K si ha $f \prec W$ e quindi $a < F(f) \le \mu(W)$ il che implica $a < F(f) \le \mu^*(K) \le \mu(V)$ e dunque l'uguaglianza cercata.

Verifichiamo che μ^* è finitamente addittiva sui compatti. Per fare ciò è sufficiente dimostrare che $\mu^*(K_1 \cup K_2) \le \mu^*(K_1) + \mu^*(K_2)$ ogniqualvolta K_1 e K_2 sono compatti disgiunti poiché l'altra disuguaglianza deriva dalla subaddittività. Esistono due aperti V_1, V_2 a chiusura compatta contenenti rispettivamente K_1 e K_2 tali che $\overline{V_1} \cap \overline{V_2} = \varnothing$. Scegliamo un aperto V contenente $K_1 \cup K_2$ e tale che $\mu(V) < \mu^*(K_1 \cup K_2) + \varepsilon$. Allora $K_1 \subset V \cap V_1$ e $K_2 \subset V \cap V_2$. Esistono $f_1 \prec V \cap V_1$, $f_2 \prec V \cap V_2$, $\mu(V \cap V_1) < F(f_1) + \varepsilon$, $\mu(V \cap V_2) < F(f_2) + \varepsilon$. Poichè V_1 e V_2 sono disgiunti $f_1 + f_2 \prec V$ e le seguenti disuguaglianze sono corrette:

$$\begin{aligned} \mu^*(K_1) + \mu^*(K_2) &\le \mu(V \cap V_1) + \mu(V \cap V_2) < F(f_1) + F(f_2) + 2\varepsilon \\ &= F(f_1 + f_2) + 2\varepsilon \le \mu(V) + 2\varepsilon < \mu^*(K_1 \cup K_2) + 3\varepsilon \end{aligned}$$

segue quindi $\mu^*(K_1) + \mu^*(K_2) = \mu^*(K_1 \cup K_2)$.

Poiché μ^* è una premisura restringendola alla σ-algebra $\mathcal{M}(\mu^*)$ degli insiemi μ^*-misurabili otteniamo una misura a tutti gli effetti. Vogliamo dimostrare che $\mathscr{B}(X) \subset \mathcal{M}(\mu^*)$ cioè che tutti i boreliani sono μ^*-misurabili.

Per fare questo è sufficiente riconoscere che gli aperti sono misurabili. Osserviamo innanzitutto che dalla regolarità interna sugli aperti già dimostrata segue $\mu^*(K) + \mu(V) = \mu^*(K \cup V)$ ogniqualvolta K compatto, V aperto e $K \cap V = \varnothing$. Prendiamo un insieme test A che supponiamo per iniziare aperto. Scelto un compatto $K \subset A \cap V$ l'aperto $W = A \setminus K$ verifica $K \cap W = \varnothing$ e $A \cap V^c \subset W \subset A$ dunque per quanto appena osservato

$$\mu^*(K) + \mu^*(A \setminus K) \le \mu^*(K) + \mu(W) = \mu^*(K \cup W) \le \mu^*(A)$$

La regolarità interna sugli aperti mostra allora che $\mu^*(A \cup V) + \mu^*(A \setminus V) \le \mu^*(A)$ per ogni aperto A. Preso ora A un qualsiasi sottoinsieme di X e W un aperto che lo contiene allora da quanto sopra si ha

$$\mu^*(A \cup V) + \mu^*(A \setminus V) \le \mu(W \cap V) + \mu(W \setminus V) \le \mu(W)$$

e quindi dalla definizione di $\mu^*(A)$ si ha $\mu^*(A \cup V) + \mu^*(A \setminus V) \le \mu(V)$ e quindi V è misurabile.

Indichiamo con μ la restrizione di μ^* a $\mathscr{B}(X)$. Otteniamo così una misura di Borel non negativa, esternamente regolare ed internamente regolare sugli aperti.

Resta solo da dimostrare la formula di rappresentazione (3.1). Fissati $f \in C_c(X)$, $\varepsilon > 0$ e $M > \|f\|$ scegliamo un aperto V con misura finita contenente $K = \operatorname{supp} f$. Poniamo $y_i = -M + i(2M/n)$ per $i = 0, \ldots, n$ dove n è abbastanza grande da verificare $2M/n < \varepsilon$. Gli insiemi A_i definiti da $A_i = f^{-1}(]y_{i-1}, y_i]) \cap K$, $i = 1, \ldots, n$ formano una partizione di K. Inoltre gli aperti W_i definiti da $W_i = f^{-1}(]y_{i-1} - \varepsilon, y_i + \varepsilon[)$ contengono ciascuno il rispettivo A_i. Dalla definizione di μ esistono poi degli aperti V_i, $A_i \subset V_i \subset W_i$ con $\mu(V_i \setminus A_i) < \varepsilon/n$. Tali V_i ricoprono K dunque esiste una partizione dell'unità subordinata a tale ricoprimento, sia questa $g_1, \ldots, g_n$. Si ha subito $f = \sum_i f g_i$ e $f g_i \le (y_i + \varepsilon) g_i$ quindi

$$F(f) - \int_X f \, d\mu = \sum_{i=1}^n F(f g_i) - \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f \, d\mu$$

$$\le \sum_{i=1}^n \Big((y_i + \varepsilon) F(g_i) - (y_i - \varepsilon)\mu(A_i) \Big) \le \sum_{i=1}^n \Big((y_i + \varepsilon)\mu(V_i) - (y_i - \varepsilon)\mu(A_i) \Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (y_i + \varepsilon)(\mu(V_i) - \mu(A_i)) + 2\varepsilon \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n} (M + \varepsilon)\varepsilon/n + 2\varepsilon\mu(K) = \varepsilon[M + \varepsilon + 2\mu(K)]$$

Questo prova $F(f) \leq \int_X f\, d\mu$. Sostituendo f con $-f$ otteniamo la disuguaglianza inversa.

Per quanto riguarda l'unicità supponiamo di avere due misure μ e ν soddisfanti le conclusioni del teorema. Dato un compatto K troviamo un aperto $V \supset K$ con $\mu(V) < \mu(K) + \varepsilon$ e una f soddisfante $K \prec f \prec V$. Allora

$$\nu(K) \leq \int_X f\, d\nu = \int_X f\, d\mu \leq \mu(V) < \mu(K) + \varepsilon$$

dunque $\nu(K) \leq \mu(K)$ e scambiando i ruoli di μ e ν $\nu(K) = \mu(K)$ per ogni compatto K. Segue ora dalla regolarità interna degli aperti che le due misure coincidono sugli aperti e quindi per la regolarità esterna esse coincidono. $\square$

Corollario 3.1.2.
Nelle ipotesi precedenti la misura μ è a variazione limitata esattamente quando il funzionale F è continuo.

Dimostrazione.
Supponiamo dapprima $\|\mu\| < \infty$. Si ha

$$\left| \int_X f\, d\mu \right| \leq \int_X \|f\|\, d\mu \leq \|f\|\mu(X) = \|f\|\|\mu\| < \infty$$

e dunque F è continuo. Viceversa ricordando la definizione di norma di un funzionale e di μ si ha

$$\infty > \|F\| = \sup_{\|f\|=1} |F(f)| \geq \sup_{0 \leq f \leq 1} F(f) = \mu(X) = \|\mu\|$$

$\square$

Proposizione 3.1.3.
Se una misura con segno μ esternamente regolare ed internamente regolare sugli aperti è limitata allora è regolare.

In particolare se il funzionale monotono è continuo la misura è in $\mathcal{M}_r(X)$.

Dimostrazione.
È sufficiente dimostrare l'affermazione per misure non negativa. Si ha subito, passando ai complementari nella definizione di regolarità esterna, che per ogni insieme misurabile A risulta

$$\mu(A) = \sup_{F \subset A} \mu(F) \qquad F \text{ chiuso}$$

(stiamo qui usando implicitamente la limitatezza di μ). Per concludere basta quindi dimostrare che i compatti approssimano internamente i chiusi.

Dato un chiuso F ed $\varepsilon > 0$ esiste un aperto $V \supset F$ tale che $\mu(V \setminus F) < \varepsilon$ ed esiste un compatto $K \subset V$ tale che $\mu(V \setminus K) < \varepsilon$. L'insieme $F \cap K$ è allora compatto e contenuto in F inoltre

$$\begin{aligned} \mu(F) - \mu(F \cap K) &= \mu(F) - \mu(F \cap K) - \mu(K \setminus F) + \mu(K \setminus F) \\ &\leq \mu(V) - \mu(K) + \mu(K \setminus F) < \varepsilon + \mu(V \setminus F) < 2\varepsilon \end{aligned}$$

e la dimostrazione è completa. $\square$

3.2 Il duale di $C_c(X)$

Abbiamo già ottenuto una caratterizzazione completa dei funzionali monotoni su $C_c(X)$, essi sono tutti e soli quelli dati dall'integrazione rispetto ad una misura di Borel non negativa esternamente regolare ed internamente regolare sugli aperti. In particolare abbiamo visto che il funzionale è continuo se e solo se la misura associata è limitata e regolare. Cosa accade se lasciamo cadere l'ipotesi di monotonia e la sostituiamo con continuità, cioè studiamo il duale di $C_c(X)$? Otteniamo ancora la formula di rappresentazione (3.1)?

Per cominciare notiamo che per dell'osservazione 3 ogni misura ν in $\mathcal{M}_r(X)$ definisce un funzionale lineare continuo di norma al più $|\nu|(X)$ sullo spazio $C_c(X)$, di più, vale l'uguaglianza.

Proposizione 3.2.1.
Data $\nu \in \mathcal{M}_r(X)$ il funzionale T_ν sullo spazio $C_c(X)$ definito da

$$T_\nu(f) = \int_X f \, d\nu \tag{3.2}$$

ha norma esattamente $|\nu|(X)$.

Dimostrazione.
Per le considerazioni predecenti basta dimostrare che $\|T\| \geq \|\nu\|$ Sia $\varepsilon > 0$. Dalla definizione di $|\nu|(X)$ segue che esiste una partione $E_1, \dots, E_n$ di X tale per cui

$$\sum_{i=1}^{n} |\nu(E_i)| > \|\nu\| - \varepsilon.$$

Dalla regolarità di ν possiamo scegliere $K_1, \dots, K_n$ compatti, $K_i \subseteq E_i$ tali che

$$\|\nu\| - \varepsilon < \sum_{i=1}^{n} |\nu(K_i)|. \tag{3.3}$$

Sia ora $K = \bigcup K_i$. Dal lemma di Urysohn segue che esiste una $f \in C_c(X) 0 \leq |f| \leq 1,\ \ f = \mathrm{sgn}\nu(K_i)$ su K_i. Risulta dunque

$$\int_K f\, d\nu = \sum_{i=1}^{n} \int_{K_i} f\, d\nu = \sum_{i=1}^{n} |\nu(K_i)| > \|\nu\| - \varepsilon$$

$$\left| \int_{K^c} f\, d\nu \right| \leq |\nu|(K^c) < \varepsilon$$

E quindi

$$\|T_\nu\| \geq T_\nu(f) = \int_K f\, d\nu + \int_{K^c} f\, d\nu \geq \|\nu\| - 2\varepsilon$$

□

Che *tutti* gli elementi di $C_c^*(X)$ si ottengano in questo modo è precisamente quanto vogliamo dimostrare. Premettiamo al teorema un facile lemma.

Lemma 3.2.2.
Date $\mu \in \mathcal{M}_r(X)$ non negativa e $g \in L^\infty(\mu)$ la misura (con segno) λ definita da $d\lambda = g\, d\mu$ appartiene ancora a $\mathcal{M}_r(X)$.

Dimostrazione.
Poiché $|\mu(X)| < \infty$ e $g \in L^\infty(\mu)$ λ è limitata. Basta quindi verificare la regolarità di $|\lambda|$ che per l'osservazione 7 si scrive come $d|\lambda| = |g|\, d\mu$. Fissiamo ora un insieme borelliano E. Risulta ovviamente

$$|\lambda|(E) \leq \inf\{|\lambda|(V) : E \subseteq V,\ V \text{ aperto}\}.$$

Fissiamo quindi $\varepsilon > 0$. Dalla regolarità di μ segue che esiste un aperto V contenente E tale per cui $\mu(V) < \mu(E) + \varepsilon$ dunque

$$|\lambda|(V) = \int_V |g|\, d\mu = \int_E |g|\, d\mu + \int_{V \setminus E} |g|\, d\mu \leq |\lambda|(E) + \varepsilon \|g\|_\infty$$

L'arbitrarietà di epsilon prova la regolarità esterna. Quella interna è del tutto analoga. $\square$

Teorema 3.2.3.
Se $T \in C_c^*(X)$ esiste un'unica $\nu \in \mathcal{M}_r(X)$ che rappresenta T nel senso che

$$T(g) = \int_X g\, d\nu \qquad \forall g \in C_c(X). \tag{3.4}$$

Inoltre se T e ν sono relazionate come sopra allora

$$\|T\|_{C_c^*(X)} = \|\nu\|. \tag{3.5}$$

Dimostrazione.
Non è difficile provare che se $\int_X f\, d\mu = 0$ per ogni $f \in C_c(X)$ si ha $\mu \equiv 0$. Poichè la differenza di due misure Borel-regolari è ancora Borel-regolare questo basta a dimostrare l'unicità della misura nella (3.4). Non è restrittivo supporre $\|T\| = 1$. Volendo usare il teorema (3.1.1) costruiamo un funzionale positivo S tale per cui

$$|T(f)| \leq S(|f|) \leq \|f\| \tag{3.6}$$

A tale scopo consideriamo $f \in C_c^+(X) = \{g \in C_c(X) : g \geq 0\}$ e definiamo per tali f

$$S(f) = \sup \{\ |T(h)| : h \in C_c(X),\ |h| \leq f\}. \tag{3.7}$$

Risulta ovviamente $S(f) \geq 0$ e $|T(f)| \leq S(f)$. Inoltre poichè $\|T\| = 1$ $|T(h)| \leq \|h\|$ dunque $S(f) \leq \|f\|$. Se $c \in \mathbb{R}^+$ risulta ovviamente che $S(cf) = cS(f)$ così come è ovvio che $f_1 \leq f_2$ implica $S(f_1) \leq S(f_2)$. Vogliamo ora dimostrare che

$$\forall\, f,\, g \in C_c^+(X) \quad S(f+g) = S(f) + S(g). \tag{3.8}$$

Fissiamo $f, g \in C_c^+(X)$e$\varepsilon > 0$. Esistono $h_1,\, h_2 \in C_c(X)$ tali che

$$\begin{aligned} |h_1| \leq f \qquad & S(f) < |T(h_1)| + \varepsilon/2 \\ |h_2| \leq g \qquad & S(g) < |T(h_2)| + \varepsilon/2 \end{aligned}$$

Posto $\alpha_i = \operatorname{sgn} T(h_i),\ \ i = 1, 2$ risulta

$$\begin{aligned} S(f) + S(g) &\leq |T(h_1)| + |T(h_2)| + \varepsilon = T(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2) + \varepsilon \\ &\leq S(|h_1| + |h_2|) + \varepsilon \leq S(f+g) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Dunque $S(f+g) \geq S(f)+S(g)$. Per provare l'altra disuguaglianza prendiamo $h \in C_c(X)$tale che $|h| \leq f+g$ e poniamo $V = \{x \in X : f(x)+g(x) > 0\}$. Definiamo

$$h_1 \ = \frac{f(x)h(x)}{f(x)+g(x)} \quad , \quad h_2 \ = \frac{g(x)h(x)}{f(x)+g(x)} \qquad (x \in V);$$

$$h_1 = h_2 = 0 \qquad (x \notin V).$$

È facile verificare che h_1, $h_2 \in C_c(X)$, $h_1+h_2 = h$ e che $|h_1| \leq f$, $|h_2| \leq g$. Ne segue che

$$|T(h)| = |T(h_1+h_2)| \leq |T(h_1)| + |T(h_2)| \leq S(f) + S(g).$$

E passando all'estremo superiore sulle $|h| \leq f+g$ nel termine a sinistra otteniamo l'uguaglianza (3.8). Estendiamo ora S a tutto $C_c(X)$ ponendo $S(f) = S(f^+) - S(f^-)$. La definizione è ben posta in quanto f^+ e f^- sono funzioni continue a supporto compatto non negative. Dobbiamo ora verificare se S è effettivamente un funzionale lineare su $C_c(X)$. Che $S(cf) = cS(f)$ è banale per $c \geq 0$. Se $c < 0$ allora

$$\begin{aligned} S(cf) = S((cf)^+) - S((cf)^-) &= -cS(f^-) + cS(f^+) \\ = c(S(f^+) - S(f^-)) &= cS(f) \end{aligned}$$

inoltre, posto $t = f+g$ risulta $t^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + t^-$ e per la linearità di S su $C_c^+(X)$

$$S(t^+ + f^- + g^-) = S(f^+ + g^+ + t^-)$$
$$S(t^+) - S(t^-) = S(f^+) - S(f^-) + S(g^+) - S(g^-)$$
$$S(f+g) = S(f) + S(g)$$

Siamo ora nelle ipotesi del teorema 3.1.1 che ci assicura l'esistenza di una misura non negativa λ che rappresenta S. Poiché $\lambda(X) = \sup\{S(f) : 0 \leq f \leq 1, f \in C_c(X)\}$ e $|S(f)| \leq 1 \text{se} \|f\| \leq 1$ otteniamo che $\lambda(X) \leq 1$. In particolare essendo λ limitata per la proposizione 3.1.3 $\lambda \in \mathcal{M}_r(X)$. Inoltre

$$|T(f)| \leq S(|f|) = \int_X |f|\, d\lambda = \|f\|_{L^1(\lambda)}.$$

Dunque T è un funzionale su $C_c(X)$ di norma al più unitaria, rispetto alla norma $L^1(\lambda)$. Poichè $C_c(X)$ è denso segue che T ha un'unica estensione a tutto L^1e per quanto già visto nel capitolo precedente esiste un'unica funzione $g \in L^\infty(\lambda)$ (di norma anch'essa al più unitaria) tale per cui valga

$$T(f) = \int_X fg\, d\lambda \quad f \in C_c(X).$$

Ora:

$$\begin{aligned} 1 = \|T\| = \sup_{\|f\|_\infty \le 1} |T(f)| = \sup_{\|f\|_\infty \le 1} \Big| \int_X fg\, d\lambda \Big| \\ \le \sup_{\|f\|_\infty \le 1} \int_X |fg|\, d\lambda \le \int_X |g|\, d\lambda \le \int_X d\lambda = \lambda(X) \le 1. \end{aligned}$$

Questo forza $\lambda(X) = 1$ e $|g| = 1$ λ q.o. Poniamo infine $\mu = g{\cdot}\lambda$. È immediato verificare che la (3.4) è verificata. Il lemma (3.2.2) ci assicura che $\mu \in \mathcal{M}_r(X)$ e ora l'osservazione 7 implica che $|\mu| = |g|{\cdot}\lambda$. In particolare $|\mu|(X) = \lambda(X) = 1 = \|T\|$. Questo prova la (3.5) e conclude la dimostrazione. $\square$

Bibliografia

[1] L.Ambrosio, N. Fusco & D. Pallara, *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 2000

[2] V. Bogachev, *Measure Theory*, Springer, 2006

[3] R. C. James *Proc. Natl. Acad. Sci.* USA, vol 37, pp 174-177, 1951

[4] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Inc., 1970

[5] C. Swartz, *Measure, Integration and Function Spaces*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1994