

# ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

SCUOLA DI INGEGNERIA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA INDUSTRIALE (DIN)

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica

Curriculum Macchine a Fluido



ALMA MATER STUDIORUM  
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

## Trasporto di calore in flussi laminari confinati con scambio fluido–matrice non uniforme

Tesi di Laurea in Meccanica dei Fluidi

**Relatore:**

Prof.ssa

**Irene Daprà**

**Presentata da:**

**Antonio Artese**

**Correlatore:**

Ing.

**Alessandro Lenci**

---

Anno Accademico 2024/2025

## Sommario

Il presente lavoro di tesi propone un modello numerico sviluppato in ambiente MATLAB per lo studio del trasporto di calore in un flusso laminare all'interno di un micro-condotto piano (*flusso di Poiseuille piano*). L'analisi è focalizzata sull'iniezione di un fronte termico allo scopo di investigare il comportamento transitorio del sistema in condizioni caratterizzate da elevato numero di Péclet.

L'obiettivo principale dello studio consiste nell'analizzare come l'eterogeneità spaziale delle proprietà termiche della matrice solida circostante influenzi il trasporto di energia nel canale. Tale eterogeneità è modellata introducendo variazioni spaziali della diffusività termica della matrice, considerate sia in configurazioni deterministiche sia mediante campi stocastici log-normali o distribuzioni aleatorie non correlate. L'impatto di queste configurazioni viene valutato attraverso l'analisi della risposta termica media in uscita dal canale, descritta mediante la *Breakthrough Curve* (BTC).

I risultati mostrano che le eterogeneità delle proprietà termiche della matrice modificano in modo significativo la dinamica del transitorio termico, producendo un'attenuazione del picco del segnale e un prolungamento della coda temporale associata al rilascio diffusivo dell'energia immagazzinata nella parete. Inoltre, in condizioni di forte avvezione, il trasporto longitudinale tende a mediare parzialmente le eterogeneità spaziali di piccola scala, riducendo la sensibilità della risposta macroscopica alla struttura dettagliata del campo di diffusività.

L'approccio metodologico adottato e i risultati ottenuti presentano potenziali applicazioni in diversi ambiti dell'ingegneria industriale. Tra queste rientrano lo sviluppo di tecniche di diagnostica termica non invasiva per l'identificazione di fenomeni di degrado o shock termico nei meati di valvole oleodinamiche, nonché l'analisi del comportamento termico di micro-canali irregolari realizzati mediante tecnologie di *Additive Manufacturing*. Il modello numerico sviluppato costituisce pertanto una base computazionale che potrà essere estesa in studi futuri alla simulazione di configurazioni tridimensionali o di fenomeni di trasporto più complessi in domini fortemente confinati.

**Parole chiave:** CFD, Flusso Laminare, Scambio Termico Coniugato, Breakthrough Curve, Dispersione di Taylor, Oleodinamica.

---

<sup>†</sup>Università di Bologna, Dipartimento di Ingegneria Industriale (DIN).

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
1.1	Il fluido come vettore energetico nei sistemi di potenza . . . . .	1
1.2	Proprietà termofisiche e ruolo dell'interazione con la parete . . . . .	2
1.3	L'importanza del transitorio termico . . . . .	3
1.4	Analogia concettuale tra canale confinato e sistema fluido–matrice . . . . .	4
1.5	Obiettivi del lavoro di tesi . . . . .	5
1.6	Struttura della tesi . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Formulazione matematico-fisica del modello</b>	<b>7</b>
2.1	Descrizione del dominio e ipotesi fondamentali . . . . .	7
2.2	Campo di moto nel canale . . . . .	8
2.2.1	Regime laminare e riduzione del problema fluidodinamico . . . . .	8
2.2.2	Equazione della quantità di moto . . . . .	9
2.2.3	Profilo di Poiseuille piano . . . . .	9
2.2.4	Validazione numerica del profilo di velocità . . . . .	10
2.3	Equazione di trasporto termico nel fluido . . . . .	11
2.3.1	Bilancio energetico . . . . .	11
2.4	Condizioni iniziali e al contorno . . . . .	13
2.4.1	Condizione iniziale . . . . .	13
2.4.2	Condizione all'ingresso . . . . .	13
2.4.3	Accoppiamento termico fluido–solido . . . . .	14
2.4.4	Condizione in uscita . . . . .	15
2.5	Interpretazione della diffusività termica della matrice . . . . .	15
2.6	Numeri adimensionali rilevanti . . . . .	17
2.7	Osservabili termici e definizione della BTC . . . . .	17
2.8	Campo di validità e limiti del modello . . . . .	18

<b>3</b>	<b>Modellazione numerica e discussione dei risultati</b>	<b>20</b>
3.1	Architettura generale del simulatore . . . . .	20
3.2	Dominio computazionale e discretizzazione spaziale . . . . .	21
3.2.1	Discretizzazione longitudinale ( <i>cell-centered</i> ) . . . . .	21
3.2.2	Discretizzazione trasversale (nodale) . . . . .	22
3.3	Rappresentazione discreta del campo termico . . . . .	22
3.4	Discretizzazione dell'equazione di trasporto . . . . .	23
3.5	Integrazione temporale e sistema algebrico . . . . .	23
3.6	Implementazione discreta delle condizioni al contorno . . . . .	24
3.6.1	Condizione iniziale e di ingresso . . . . .	24
3.6.2	Condizione di uscita . . . . .	25
3.6.3	Accoppiamento termico fluido-matrice . . . . .	25
3.7	Eterogeneità della parete . . . . .	26
3.8	Post-processing e osservabili . . . . .	27
3.9	Verifiche numeriche . . . . .	27
3.10	Struttura algoritmica e implementazione in MATLAB . . . . .	28
3.11	Definizione degli scenari e analisi dimensionale . . . . .	29
3.11.1	Interpretazione termofluidodinamica degli scenari . . . . .	29
3.12	Evoluzione del fronte termico nei diversi regimi . . . . .	31
3.12.1	Regime a bassa velocità: caso Acqua-Roccia a basso gradiente . . . . .	32
3.12.2	Regime dominato dall'advezione: caso Acqua-Roccia ad alto gradiente . . . . .	33
3.12.3	Regime intermedio: caso Olio-Metallo . . . . .	33
3.13	Analisi macroscopica: le Breakthrough Curves . . . . .	35
3.13.1	Caso di riferimento omogeneo . . . . .	35
3.13.2	Effetto dell'eterogeneità stocastica della parete . . . . .	37
3.13.3	Sintesi comparativa e comportamento asintotico . . . . .	42
3.14	Considerazioni conclusive sui risultati . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Conclusioni e sviluppi futuri</b>	<b>44</b>
4.1	Sintesi dei risultati principali . . . . .	44
4.2	Implicazioni applicative . . . . .	45
4.3	Sviluppi futuri . . . . .	45



# Capitolo 1

## Introduzione

### 1.1 Il fluido come vettore energetico nei sistemi di potenza

Le funzioni svolte dai fluidi di lavoro nei moderni sistemi di attuazione e controllo industriale vanno oltre il semplice trasporto di massa o di quantità di moto. Essi rappresentano infatti un mezzo attraverso cui energia e potenza possono essere trasferite, modulate e dissipate. I sistemi oleodinamici, caratterizzati da elevata densità di potenza, compattezza geometrica e capacità di operare sotto carichi rilevanti ad alte prestazioni, lavorano tipicamente con pressioni elevate e con geometrie dei componenti fortemente confinate.

In questi domini, nei quali la scala trasversale del canale è molto più piccola rispetto alla lunghezza assiale, il moto è spesso caratterizzato da numeri di Reynolds modesti, conseguenza delle piccole dimensioni geometriche e della viscosità relativamente elevata dei fluidi impiegati. In tali condizioni il campo di moto può essere approssimato come laminare e completamente sviluppato, come descritto da Batchelor [1].

Per valori bassi del numero di Reynolds, la dinamica locale del fluido, e in particolare la distribuzione della velocità, risulta governata principalmente dal bilancio tra il gradiente di pressione e le forze viscosive. Il profilo di velocità che si instaura influenza direttamente il trasporto di energia nel fluido e, di conseguenza, le prestazioni macroscopiche della macchina in termini di efficienza volumetrica, stabilità sotto carico, precisione di attuazione e resistenza all'usura termica delle interfacce di tenuta.

Accanto alle condizioni operative nominali, negli ultimi anni è emerso un crescente

interesse verso l'impiego di segnali termici come strumenti diagnostici. In queste configurazioni il sistema non viene necessariamente sollecitato per massimizzare la trasmissione di potenza, ma per interrogare lo stato interno del componente attraverso la risposta fluidodinamica e termica generata da un ingresso controllato. Difetti geometrici, variazioni locali di gioco, disuniformità di rugosità o alterazioni delle proprietà termofisiche della parete introducono eterogeneità spaziali che possono modificare la distribuzione del campo di moto e lo scambio termico locale.

In questo contesto, il trasporto di calore può essere interpretato come un tracciante energetico. La sua evoluzione temporale lungo il canale e, in particolare, la risposta misurata all'uscita possono fornire indicazioni indirette sulla struttura interna del sistema, un approccio recentemente formalizzato da Klepikova et al. [2] per la caratterizzazione dei processi di trasporto in mezzi confinati eterogenei. L'interesse per questo problema è quindi duplice: da un lato riguarda la previsione del comportamento termico in condizioni operative critiche; dall'altro apre la possibilità di sviluppare criteri diagnostici non invasivi basati sulla firma termica del componente. In questa direzione, approcci recenti proposti da Lenci et al. [3] hanno dimostrato come l'analisi stocastica del trasporto di calore accoppiato possa essere impiegata proficuamente per inferire le proprietà strutturali e l'entità delle eterogeneità in domini confinati a partire unicamente dalla loro risposta termica macroscopica.

## **1.2 Proprietà termofisiche e ruolo dell'interazione con la parete**

Nei domini confinati tipici dei micro-canali e dei giochi micrometrici dei sistemi oleodinamici, il comportamento termofluidodinamico è fortemente influenzato dalle proprietà del fluido e dal modo in cui esso interagisce termicamente con le pareti solide. Come discusso in Bergman et al. [4], grandezze quali densità, viscosità, calore specifico e conducibilità termica determinano sia la struttura del campo di moto sia le scale caratteristiche del trasporto di energia.

La viscosità controlla il bilancio tra gradiente di pressione e forze viscosive, fissando il profilo di velocità e quindi il meccanismo convettivo con cui il calore viene trasportato lungo il canale. Il calore specifico e la densità contribuiscono alla capacità termica volumica

del fluido, mentre la conducibilità termica determina la scala diffusiva del problema. Nel loro insieme, tali proprietà definiscono la competizione tra advezione, diffusione termica e scambio energetico con il mezzo circostante.

Dal punto di vista fisico, durante un transitorio termico l'interazione con la parete non può essere considerata trascurabile, come mostrato da Carslaw and Jaeger [5]. In condizioni di iniezione di fluido a temperatura diversa da quella iniziale del sistema, il mezzo solido circostante agisce infatti come un serbatoio termico, assorbendo e successivamente rilasciando energia. La risposta termica del sistema dipende quindi non solo dal trasporto nel fluido, ma anche dalla dinamica di conduzione nella matrice solida adiacente al canale.

Nel presente lavoro tale interazione è descritta mediante una formulazione coniugata fluido–solido. Il trasporto termico nel fluido è modellato tramite un'equazione di advezione–diffusione bidimensionale, mentre la conduzione nella matrice solida è rappresentata mediante un'equazione di diffusione lungo la direzione normale alla parete. Le due regioni sono accoppiate imponendo all'interfaccia la continuità della temperatura e del flusso termico.

Dal punto di vista applicativo, questa formulazione consente di rappresentare in modo esplicito i fenomeni di immagazzinamento e rilascio dell'energia nella matrice solida durante il transitorio termico. Tale meccanismo risulta particolarmente rilevante nello studio di sistemi fortemente confinati, quali micro-canali o giochi micrometrici di componenti oleodinamici, nei quali lo scambio energetico con la parete può influenzare significativamente l'evoluzione del fronte termico nel fluido e la risposta termica complessiva del sistema.

### 1.3 L'importanza del transitorio termico

La progettazione termica dei componenti fluidici è spesso affrontata in condizioni prossime al regime stazionario. Tuttavia, numerosi fenomeni di interesse tecnico sono intrinsecamente transitori. L'ingresso nel canale di un fluido a temperatura diversa da quella iniziale del sistema genera infatti un fronte termico in evoluzione, la cui dinamica è governata dalla combinazione tra trasporto convettivo, diffusione termica nel fluido e scambio energetico con le pareti.

È proprio durante i transitori che si manifestano i gradienti termici più elevati e, di conseguenza, la maggiore sensibilità del sistema rispetto alle proprietà locali della parete e

del fluido. Per questa ragione, la sola analisi di stati finali o di regime può risultare insufficiente per interpretare il comportamento del componente, soprattutto quando l'obiettivo è individuare alterazioni locali, difetti geometrici o variazioni delle proprietà termiche del mezzo circostante.

Nel caso di geometrie confinate, la letteratura recente ha mostrato che la struttura della superficie e l'eterogeneità della parete possono modificare in modo significativo il trasporto termico locale. Studi come quelli di YANG [6] e Garg et al. [7] affermano che rugosità, micro-irregolarità geometriche e disuniformità di materiale influenzano sia il campo di moto sia il flusso termico all'interfaccia. Questa sensibilità alle condizioni superficiali risulta di estremo interesse per i componenti realizzati con moderne tecnologie di *Additive Manufacturing* (come il *Selective Laser Melting*), nei quali la rugosità intrinseca generata dal processo di stampa altera in modo sostanziale le caratteristiche di scambio termico rispetto ai canali lisci tradizionali, come evidenziato sperimentalmente da Deng et al. [8]. L'insieme di tali irregolarità modifica la propagazione del fronte di temperatura e la risposta termica macroscopica osservata in uscita. In questo senso, il transitorio termico rappresenta un osservabile particolarmente informativo rispetto al semplice stato stazionario, poiché integra nella sua evoluzione l'effetto combinato dei fenomeni convettivi, diffusivi e interfaciali.

Nel presente lavoro l'attenzione è quindi rivolta alla risposta temporale del sistema, descritta attraverso grandezze aggregate quali la temperatura media di sezione e la corrispondente *Breakthrough Curve* (BTC) all'uscita del canale. Questa grandezza costituisce una sintesi quantitativa dell'intero processo di trasporto e consente di evidenziare ritardi, attenuazione e dispersione del fronte termico dovuti allo scambio energetico con la parete.

## 1.4 Analogia concettuale tra canale confinato e sistema fluido–matrice

Un utile schema interpretativo del problema consiste nel considerare il canale come una regione preferenziale di trasporto accoppiata a un mezzo esterno che svolge il ruolo di serbatoio termico diffuso. In questa prospettiva, il fluido in moto nel canale rappresenta il dominio ad elevata mobilità, mentre il mezzo solido circostante costituisce una regione

a dinamica più lenta, capace di assorbire e restituire energia nel tempo attraverso la diffusione termica.

Questa analogia concettuale, pur senza implicare una perfetta equivalenza fisica con altri contesti applicativi, permette di interpretare il sistema come l'interazione tra un dominio convettivo e un dominio termicamente diffusivo. Il canale trasporta rapidamente il segnale termico lungo la direzione principale del moto, mentre il mezzo solido circostante introduce un meccanismo di accumulo e rilascio di energia che modifica la forma del fronte termico e la risposta complessiva del sistema.

Nel quadro adottato in questa tesi, tale interazione è descritta mediante una formulazione coniugata fluido–solido. Il trasporto termico nel fluido è governato da un'equazione di advezione–diffusione bidimensionale, mentre la matrice solida è modellata attraverso un'equazione di conduzione lungo la direzione normale alla parete. L'accoppiamento tra i due domini è realizzato imponendo all'interfaccia la continuità della temperatura e del flusso termico.

Questa formulazione consente di rappresentare in modo esplicito il ruolo della matrice come serbatoio termico e di analizzare come le proprietà termiche del mezzo solido circostante influenzino la dinamica del fronte termico e la risposta osservabile nel fluido..

## 1.5 Obiettivi del lavoro di tesi

L'obiettivo principale del presente lavoro è sviluppare e analizzare un modello numerico per il trasporto termico transitorio in un canale piano laminare accoppiato termicamente a una matrice solida circostante.

Più precisamente, lo studio si basa sui seguenti elementi:

- il campo di moto è assunto stazionario, laminare e completamente sviluppato, ed è descritto dal profilo di Poiseuille tra piastre piane parallele;
- il problema termico nel fluido è formulato mediante un'equazione bidimensionale di advezione–diffusione;
- la conduzione termica nella matrice solida è descritta da un'equazione di diffusione e risolta esplicitamente nel dominio solido;

- lo scambio energetico tra fluido e matrice è rappresentato imponendo all'interfaccia le condizioni di continuità della temperatura e del flusso termico;
- l'eterogeneità termica della matrice è introdotta, nel caso generale, mediante una diffusività termica variabile lungo la direzione assiale.

L'interesse specifico è rivolto a comprendere come la combinazione tra advezione nel fluido, diffusione termica nel fluido e conduzione nella matrice influenzi la propagazione del fronte termico nel canale e la risposta media osservata all'uscita. In particolare, si analizza come variazioni spaziali delle proprietà termiche della matrice modifichino la forma della *Breakthrough Curve* (BTC), introducendo effetti di ritardo, attenuazione del picco e allargamento temporale del segnale.

Dal punto di vista metodologico, il lavoro conduce allo sviluppo di un solutore numerico in ambiente MATLAB basato su discretizzazione a differenze finite e integrazione temporale implicita. Dal punto di vista applicativo, esso fornisce un quadro di riferimento utile per interpretare il trasporto di calore in geometrie confinate e per valutare la sensibilità della risposta termica rispetto alle proprietà termiche del mezzo esterno.

## 1.6 Struttura della tesi

Il Capitolo 2 presenta la formulazione matematico-fisica del problema, con particolare attenzione alle ipotesi di modello, alla descrizione del campo di moto laminare e alla definizione del problema di trasporto termico nel fluido accoppiato alla conduzione nella matrice solida circostante.

Nel capitolo successivo viene illustrata l'implementazione numerica del solutore sviluppato in ambiente MATLAB, descrivendo la discretizzazione spaziale e temporale, il trattamento delle condizioni al contorno e la costruzione dei campi eterogenei assegnati alla diffusività termica della matrice.

I capitoli finali sono dedicati alla presentazione e alla discussione dei risultati numerici, con particolare riferimento all'evoluzione del fronte termico, alla risposta media in uscita dal canale e all'influenza delle eterogeneità delle proprietà termiche della matrice sulla *Breakthrough Curve*.

# Capitolo 2

## Formulazione matematico-fisica del modello

### 2.1 Descrizione del dominio e ipotesi fondamentali

Il dominio fluido è descritto nel piano cartesiano  $(x, y)$ , dove  $x$  individua la direzione longitudinale del moto e  $y$  la coordinata trasversale. Il sistema fisico considerato è costituito da un canale piano bidimensionale. L'analisi è focalizzata sul problema di trasporto termico indotto da una perturbazione di temperatura imposta all'ingresso del canale di lunghezza  $L$  e apertura  $H$ , delimitato da due pareti piane e parallele localizzate in  $y = 0$  e  $y = H$ . Il fluido che attraversa il canale è assunto newtoniano e incomprimibile, mentre il mezzo solido adiacente alle pareti è trattato come un mezzo termicamente esteso con cui il fluido scambia energia durante il transitorio.

Il campo di moto è invece assunto prescritto, stazionario e completamente sviluppato, così da disaccoppiare la dinamica fluidodinamica da quella termica.

Il campo di velocità è rappresentato da

$$\mathbf{u}(x, y) = (u, v).$$

Nel quadro delle ipotesi adottate, il moto risulta puramente longitudinale e dipendente dalla sola coordinata trasversale; si assume pertanto

$$\mathbf{u}(x, y) = (u(y), 0). \tag{2.1}$$

La formulazione del problema si basa sulle seguenti ipotesi fondamentali:

- il fluido è newtoniano e incomprimibile;
- le proprietà termofisiche del fluido, ossia densità  $\rho_f$  e viscosità dinamica  $\mu_f$ , sono assunte costanti;
- il campo di moto è disaccoppiato dal campo termico, cosicché eventuali dipendenze della viscosità o di altre proprietà dalla temperatura non vengono considerate;
- il moto è laminare, stazionario e completamente sviluppato;

Con queste ipotesi il problema è formulato come un problema coniugato fluido–solido. Il campo di temperatura nel fluido e quello nella matrice solida sono risolti in modo accoppiato e collegati attraverso le condizioni di interfaccia imposte alle pareti del canale. In questo modo lo scambio energetico tra fluido e solido emerge direttamente dalla soluzione dell'equazione di conduzione nella matrice, senza ricorrere a coefficienti di scambio termico efficaci o a condizioni al contorno ridotte.

## 2.2 Campo di moto nel canale

### 2.2.1 Regime laminare e riduzione del problema fluidodinamico

Nel presente lavoro il campo di moto è assunto indipendente dal tempo e determinato esclusivamente dal gradiente di pressione applicato lungo il canale. Poiché l'apertura  $H$  è molto più piccola della lunghezza  $L$  e le velocità caratteristiche considerate mantengono il numero di Reynolds in un regime moderato o basso, il moto può essere descritto come laminare. Introducendo una velocità caratteristica  $U$ , il numero di Reynolds è definito come

$$\text{Re} = \frac{\rho_f U H}{\mu_f}. \quad (2.2)$$

Per i valori di interesse gli effetti inerziali risultano secondari rispetto alle forze viscosive. Di conseguenza, il campo di moto può essere descritto nell'ambito dell'approssimazione di Stokes, ottenuta trascurando i termini convettivi nelle equazioni di Navier–Stokes.

### 2.2.2 Equazione della quantità di moto

Nel caso bidimensionale considerato, le equazioni di Stokes per un fluido incomprimibile si scrivono come

$$-\nabla p + \mu_f \nabla^2 \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.3)$$

Sostituendo l'ipotesi di moto monodirezionale (2.1) e assumendo che il gradiente di pressione sia costante lungo il canale, l'equazione della quantità di moto nella direzione  $x$  si riduce a una semplice equazione differenziale ordinaria nella sola coordinata trasversale:

$$\mu_f \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{dP}{dx}, \quad (2.4)$$

dove  $dP/dx$  rappresenta il gradiente di pressione imposto che ingloba effetti gravitazionali. Questa relazione mostra che la curvatura del profilo di velocità è determinata dal bilancio tra la forza motrice dovuta al gradiente di pressione e la resistenza viscosa.

Alle pareti del canale si impongono le usuali condizioni di aderenza

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, H) = 0, \quad (2.5)$$

che esprimono il fatto che il fluido a contatto con le superfici solide ha velocità nulla rispetto ad esse.

### 2.2.3 Profilo di Poiseuille piano

L'integrazione dell'Equazione (2.4) con le condizioni al contorno (2.5) conduce al classico profilo di velocità alla Poiseuille lungo la direzione trasversale e ne consegue che il campo di velocità bidimensionale è definito come:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\mu_f} \left( -\frac{dP}{dx} \right) (Hy - y^2). \quad (2.6)$$

Si ottiene quindi un profilo di velocità parabolico, nullo sulle pareti e massimo nella regione centrale del canale. La forma della soluzione riflette la predominanza degli effetti viscosi e la simmetria della configurazione geometrica.

La velocità media di sezione si ricava come media della velocità lungo l'apertura del canale:

$$U = \frac{1}{H} \int_0^H u(y) dy = \frac{H^2}{12\mu_f} \left( -\frac{dP}{dx} \right). \quad (2.7)$$

Questa quantità rappresenta la velocità caratteristica adottata nel seguito per definire i principali parametri adimensionali del problema, in particolare il numero di Reynolds e il numero di Péclet.

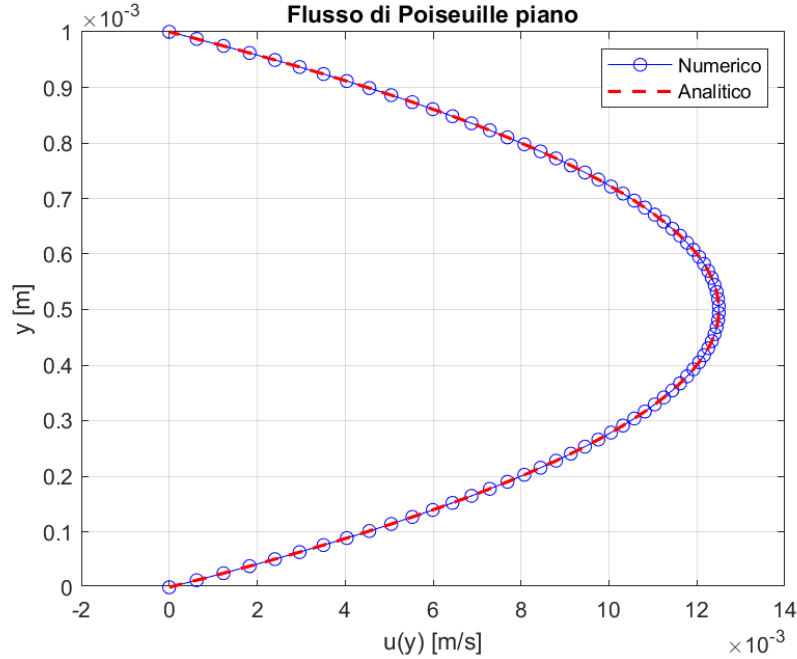
È opportuno osservare che il profilo (2.6) non viene qui ricavato come parte di un problema fluidodinamico accoppiato, ma è utilizzato come campo di moto assegnato nel problema termico. In altre parole, l'evoluzione del campo di temperatura viene studiata assumendo noto il campo di velocità, così da isolare il ruolo congiunto dell'advezione, della diffusione termica e dello scambio energetico con le pareti.

## 2.2.4 Validazione numerica del profilo di velocità

La correttezza dell'implementazione numerica del campo di moto è verificata confrontando la soluzione analitica (2.6) con la soluzione discreta ottenuta risolvendo l'Equazione (2.4) mediante discretizzazione a differenze finite centrate del secondo ordine lungo la direzione trasversale  $y$ .

In particolare, la derivata seconda  $d^2u/dy^2$  è discretizzata su una griglia uniforme, mentre le condizioni di non slip alle pareti sono imposte direttamente sui nodi di bordo. Il confronto tra la soluzione analitica (mostrato in Figura 2.1) e quella numerica mostra una sovrapposizione delle due curve entro l'accuratezza prevista dallo schema di discretizzazione, confermando la corretta costruzione dell'operatore differenziale e l'imposizione delle condizioni al contorno.

Poiché il termine convettivo nel problema termico dipende direttamente dal profilo di velocità  $u(y)$ , questa verifica costituisce un passaggio preliminare necessario.



**Figura 2.1:** Confronto tra il profilo analitico di Poiseuille e la soluzione numerica ottenuta mediante discretizzazione a differenze finite del secondo ordine. La simulazione è condotta imponendo un gradiente di pressione  $\frac{dP}{dx} = -100$  Pa/m in un canale di apertura trasversale  $H = 1$  m, discretizzato con una griglia di  $N_y = 80$  nodi lungo la direzione  $y$ .

## 2.3 Equazione di trasporto termico nel fluido

### 2.3.1 Bilancio energetico

Il trasporto di calore nel fluido è descritto dal principio di conservazione dell'energia. Sono considerate le seguenti ipotesi fondamentali:

- le proprietà termofisiche del fluido, calore specifico  $c_{p,f}$  e conducibilità termica  $k_f$ , sono assunte costanti;
- la dissipazione viscosa è trascurata nel bilancio energetico;
- il trasporto termico nel fluido è descritto da un'equazione bidimensionale di advezione–diffusione;
- la conduzione termica nella matrice solida circostante è descritta da un'equazione di diffusione e risolta esplicitamente nel dominio solido;
- lo scambio energetico tra fluido e matrice è modellato imponendo all'interfaccia le condizioni di continuità della temperatura e del flusso termico;

- le proprietà termiche della matrice possono variare lungo la coordinata assiale, attraverso una diffusività termica  $\alpha_m(x)$ .

Per un fluido incomprimibile con proprietà termofisiche costanti, l'equazione dell'energia può essere scritta nella forma

$$\rho_f c_{p,f} \left( \frac{\partial T_f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T_f \right) = \nabla \cdot (k_f \nabla T_f) + \Phi_v + \dot{q}''' \quad (2.8)$$

Il termine  $\Phi_v$  rappresenta la dissipazione viscosa, mentre  $\dot{q}'''$  indica eventuali sorgenti volumetriche di calore.

Nel problema considerato si adottano le seguenti ipotesi:

- non sono presenti sorgenti volumetriche di calore, quindi  $\dot{q}''' = 0$ ;
- la dissipazione viscosa è trascurabile rispetto agli altri contributi energetici, per cui  $\Phi_v \approx 0$ ;
- la conducibilità termica del fluido è assunta costante;
- il campo di velocità è monodirezionale e dipende unicamente dalla coordinata trasversale (2.1).

Dividendo l'Equazione (2.8) per  $\rho_f c_{p,f}$  e introducendo la diffusività termica del fluido

$$\alpha_f = \frac{k_f}{\rho_f c_{p,f}}, \quad (2.9)$$

si ottiene la forma ridotta dell'equazione di trasporto termico nel dominio fluido

$$\frac{\partial T_f}{\partial t} + u(y) \frac{\partial T_f}{\partial x} = \alpha_f \frac{\partial^2 T_f}{\partial y^2}. \quad (2.10)$$

L'Equazione (2.10) rappresenta un modello di advezione–diffusione nel quale il trasporto convettivo avviene lungo la direzione longitudinale del canale, mentre la diffusione termica nel fluido è considerata esclusivamente nella direzione trasversale.

Questa approssimazione risulta appropriata nei regimi caratterizzati da elevato numero di Péclet longitudinale, per i quali il contributo diffusivo lungo la direzione del flusso risulta trascurabile rispetto al trasporto convettivo.

Nel presente modello non viene introdotto alcun coefficiente dispersivo efficace. Gli eventuali effetti di dispersione macroscopica del fronte termico emergono direttamente

dall'interazione tra il profilo di velocità non uniforme del flusso laminare e la diffusione molecolare nel fluido.

In particolare, il gradiente di velocità trasversale genera una distribuzione non uniforme dei tempi di trasporto lungo il canale, mentre la diffusione molecolare redistribuisce il calore tra le diverse linee di corrente. La combinazione di questi due meccanismi produce un comportamento dispersivo effettivo su scala macroscopica.

## 2.4 Condizioni iniziali e al contorno

### 2.4.1 Condizione iniziale

All'istante iniziale il sistema è assunto in equilibrio termico uniforme. La temperatura del fluido in tutto il dominio è quindi

$$T_f(x, y, 0) = T_0. \quad (2.11)$$

### 2.4.2 Condizione all'ingresso

All'ingresso del canale, situato in  $x = 0$ , viene imposta una perturbazione termica mediante una condizione al contorno di tipo Dirichlet

$$T_f(0, y, t) = T_{in}(t). \quad (2.12)$$

Nel presente lavoro sono considerate due configurazioni di iniezione.

**Iniezione impulsiva (slug termico).** Nel primo caso viene immessa nel canale una perturbazione di durata finita. La temperatura all'ingresso assume quindi la forma

$$T_f(0, y, t) = \begin{cases} T_{in}, & 0 < t \leq t_{inj}, \\ T_0, & t > t_{inj}. \end{cases} \quad (2.13)$$

Questa condizione rappresenta l'iniezione di uno *slug* termico, ossia di una porzione limitata di fluido a temperatura diversa da quella iniziale del sistema.

**Iniezione continua.** Nel secondo caso si considera invece un'iniezione continua di fluido a temperatura costante

$$T_f(0, y, t) = T_{in}, \quad t > 0. \quad (2.14)$$

Questa configurazione rappresenta un regime di alimentazione permanente, nel quale il canale è continuamente alimentato da fluido alla temperatura  $T_{in}$ .

### 2.4.3 Accoppiamento termico fluido–solido

Alle pareti del canale, localizzate in  $y = 0$  e  $y = H$ , il fluido scambia calore con il mezzo solido circostante. Il problema è quindi formulato come un problema coniugato fluido–solido, nel quale il campo di temperatura nel fluido e quello nella matrice vengono risolti simultaneamente e accoppiati attraverso le condizioni di interfaccia.

La temperatura nella matrice solida è governata dall'equazione della conduzione

$$\frac{\partial T_m}{\partial t} = \alpha_m \nabla^2 T_m, \quad H \leq y < +\infty, \quad (2.15)$$

dove  $T_m$  rappresenta la temperatura nel mezzo solido e  $\alpha_m$  la diffusività termica della matrice.

All'interfaccia fluido–solido si impongono le condizioni di continuità della temperatura e del flusso termico

$$T_f(x, H, t) = T_m(x, H, t), \quad (2.16)$$

$$-k_f \frac{\partial T_f}{\partial y} \Big|_{y=H} = -k_m \frac{\partial T_m}{\partial y} \Big|_{y=H}, \quad (2.17)$$

dove  $k_f$  e  $k_m$  rappresentano rispettivamente la conducibilità termica del fluido e quella del mezzo solido.

Poiché la matrice è assunta semi-infinita, si impone inoltre la condizione asintotica

$$T_m(y \rightarrow \infty, t) = T_0. \quad (2.18)$$

Nel modello numerico adottato in questo lavoro la conduzione nella matrice viene risolta esplicitamente mediante discretizzazione spaziale nel dominio solido adiacente alla

parete. In questo modo l'accoppiamento termico tra fluido e matrice emerge direttamente dalla soluzione congiunta delle equazioni nei due domini, senza introdurre coefficienti di scambio termico efficaci o condizioni al contorno ridotte.

#### 2.4.4 Condizione in uscita

All'uscita del canale, in corrispondenza di  $x = L$ , non viene imposta una condizione di temperatura prescritta. Si assume che il trasporto del calore avvenga prevalentemente nella direzione longitudinale del flusso, cosicché il comportamento termico all'uscita sia determinato dalla dinamica convettivo–diffusiva interna al dominio.

Dal punto di vista fisico, questa ipotesi equivale ad assumere che il calore venga trasportato verso valle senza influenze significative provenienti dall'esterno del dominio computazionale. In termini numerici ciò corrisponde a una condizione di uscita di tipo convettivo, che evita l'introduzione di riflessioni artificiali del fronte termico al bordo del dominio.

## 2.5 Interpretazione della diffusività termica della matrice

Nel modello adottato l'interazione termica tra fluido e mezzo solido circostante è trattata come un problema coniugato fluido–solido. La temperatura nel fluido è governata dall'equazione di advezione–diffusione, mentre nella matrice solida il trasporto di calore è descritto dall'equazione della conduzione

$$\frac{\partial T_m}{\partial t} = \alpha_m(x) \frac{\partial^2 T_m}{\partial y^2}. \quad (2.19)$$

La diffusività  $\alpha_m(x)$  controlla la velocità con cui il calore penetra nel mezzo solido e quindi la scala temporale con cui la matrice assorbe e rilascia energia attraverso l'interfaccia fluido–solido. Valori elevati di  $\alpha_m$  corrispondono a una risposta termica più rapida della matrice, mentre valori più piccoli indicano un assorbimento di calore più lento e una maggiore inerzia termica del sistema.

Nel caso più semplice si assume che la matrice sia termicamente omogenea lungo il canale, per cui la diffusività è costante

$$\alpha_m(x) = \alpha_{m,0}.$$

In questa configurazione la dinamica termica è determinata esclusivamente dal bilancio tra advezione nel fluido, diffusione termica nel fluido e conduzione transitoria nella matrice.

Nel caso più generale si introduce invece una dipendenza spaziale della diffusività lungo la coordinata assiale

$$\alpha_m = \alpha_m(x).$$

Questa scelta consente di rappresentare eterogeneità delle proprietà termiche della parete o del mezzo circostante. In particolare, variazioni spaziali di  $\alpha_m(x)$  possono riflettere disuniformità del materiale, variazioni locali di conducibilità termica, presenza di depositi superficiali o fenomeni di degrado della parete.

Nel contesto del presente lavoro, la funzione  $\alpha_m(x)$  viene quindi utilizzata come una parametrizzazione delle eterogeneità termiche della matrice solida adiacente al canale.

Dal punto di vista modellistico, la diffusività  $\alpha_m(x)$  viene assegnata secondo diversi livelli di complessità:

- caso omogeneo, con  $\alpha_m(x) = \alpha_{m,0}$  costante;
- configurazioni deterministiche a tratti, nelle quali il dominio è suddiviso in regioni con proprietà termiche differenti;
- campi eterogenei continui, nei quali  $\alpha_m(x)$  è modellata come un campo casuale monodimensionale spazialmente correlato.

Nel caso stocastico, la struttura spaziale dell'eterogeneità è caratterizzata mediante una funzione di correlazione o un variogramma assegnato. Questa formulazione consente di rappresentare distribuzioni realistiche delle proprietà termiche lungo il canale e di analizzare come tali variazioni influenzino lo scambio energetico locale e la risposta termica globale del sistema.

Dal punto di vista fisico, variazioni di  $\alpha_m(x)$  modificano il tempo caratteristico di diffusione del calore nella matrice e quindi la capacità locale della parete di assorbire energia dal fluido. Ne deriva una modulazione spaziale dello scambio termico all'interfaccia

fluido–solido, che si riflette direttamente sull’evoluzione del fronte termico e sulla risposta osservata lungo il canale.

## 2.6 Numeri adimensionali rilevanti

Il comportamento del sistema può essere interpretato in modo più generale mediante alcuni parametri adimensionali che mettono in relazione le principali scale fisiche del problema.

Il parametro più rilevante per la classificazione del regime di trasporto termico è il numero di Péclet definito sulla base dell’apertura del canale:

$$\text{Pe}_H = \frac{UH}{\alpha_f}, \quad (2.20)$$

dove  $U$  è la velocità media di sezione definita in (2.7) e  $\alpha_f$  è la diffusività termica del fluido.

Il numero di Péclet rappresenta il rapporto tra il trasporto convettivo lungo il canale e la diffusione termica nel fluido. In particolare:

- per  $\text{Pe}_H \gg 1$  il trasporto convettivo domina il comportamento del sistema e il fronte termico viene trasportato principalmente dal moto del fluido;
- per  $\text{Pe}_H \lesssim 1$  la diffusione termica nel fluido diventa comparabile o dominante e tende ad attenuare i gradienti di temperatura, modificando la forma del fronte termico.

## 2.7 Osservabili termici e definizione della BTC

Per analizzare il transitorio termico in forma normalizzata si introduce la temperatura adimensionale

$$\Theta(x, y, t) = \frac{T_f(x, y, t) - T_0}{T_{in} - T_0}. \quad (2.21)$$

Con questa definizione  $\Theta = 0$  corrisponde allo stato iniziale indisturbato del sistema, mentre  $\Theta = 1$  rappresenta la temperatura del fluido iniettato durante lo slug termico.

L’osservabile principale utilizzato per descrivere l’evoluzione macroscopica del segnale termico è la *Breakthrough Curve* (BTC) media sulla sezione, definita come

$$\text{BTC}(x, t) = \frac{1}{H} \int_0^H \Theta(x, y, t) dy. \quad (2.22)$$

Questa quantità rappresenta la temperatura media adimensionale del fluido in una sezione del canale. La BTC fornisce quindi una descrizione sintetica dell'evoluzione del segnale termico lungo il dominio, integrando gli effetti combinati di advezione, diffusione termica nel fluido e scambio energetico con le pareti.

In particolare, la BTC valutata in prossimità dell'uscita del canale costituisce un indicatore diretto della risposta globale del sistema al transitorio termico imposto all'ingresso. La forma della curva nel tempo riflette infatti i meccanismi di trasporto che agiscono nel dominio e può evidenziare fenomeni quali ritardo del segnale, attenuazione del picco e dispersione del fronte termico dovuti all'interazione tra fluido e matrice.

## 2.8 Campo di validità e limiti del modello

Il modello adottato nel presente lavoro rappresenta una formulazione semplificata di un problema coniugato fluido–solido per il trasporto di calore in un canale laminare. Il campo termico nel fluido è accoppiato alla conduzione nella matrice solida circostante, la quale è descritta mediante un modello monodimensionale lungo la direzione normale alla parete. Questa scelta consente di rappresentare esplicitamente lo scambio energetico tra fluido e solido mantenendo al contempo una formulazione numericamente efficiente, adatta a studi parametrici sistematici.

Il campo di validità del modello è tuttavia condizionato dalle ipotesi introdotte nella formulazione.

In primo luogo, il campo di moto è assunto assegnato e indipendente dalla temperatura. Non viene quindi considerata la retroazione del campo termico sulla dinamica del fluido, ad esempio attraverso variazioni della viscosità o della densità con la temperatura.

In secondo luogo, nel bilancio energetico è stata trascurata la dissipazione viscosa. Questa ipotesi è ragionevole per i regimi laminari e per le scale di velocità considerate, ma potrebbe risultare meno accurata in presenza di gradienti di velocità molto elevati .

Un ulteriore limite riguarda la rappresentazione della conduzione nella matrice solida. Nel modello adottato la diffusione del calore nella parete è descritta mediante un'equazione di conduzione monodimensionale lungo la direzione normale all'interfaccia fluido–solido.

Questa scelta permette di catturare i principali meccanismi di immagazzinamento e rilascio dell'energia nella matrice, ma trascura eventuali variazioni della temperatura nella direzione assiale o lungo la terza dimensione.

Infine, il dominio considerato è bidimensionale e caratterizzato da una geometria piana ideale. Non vengono pertanto presi in considerazione effetti tridimensionali, variazioni geometriche della sezione o configurazioni più complesse che possono essere presenti in sistemi reali.

Nonostante queste semplificazioni, il modello risulta adeguato per analizzare in modo sistematico l'interazione tra advezione nel fluido, diffusione termica nel fluido e conduzione nella matrice solida. In particolare, esso consente di studiare come variazioni spaziali delle proprietà termiche della matrice influenzino la propagazione del fronte termico e la risposta media osservata lungo il canale.

# Capitolo 3

## Modellazione numerica e discussione dei risultati

Il presente capitolo descrive l'impostazione numerica del solutore MATLAB ed espone i risultati delle simulazioni del trasporto termico transitorio. Il problema matematico di riferimento, formulato nel Capitolo 2, viene qui trasposto nel dominio discreto mediante differenze finite. L'obiettivo del simulatore è calcolare l'evoluzione temporale del campo di temperatura accoppiato fluido–matrice, garantendo robustezza numerica, compattezza del codice ed efficienza nella risoluzione dei sistemi lineari sparsi ad ogni passo temporale.

### 3.1 Architettura generale del simulatore

Il simulatore risolve numericamente l'equazione di advezione–diffusione (2.10) per il dominio fluido  $(x, y)$  e l'equazione di conduzione (2.19) per il dominio solido  $(x, z)$ , accoppiandole alle interfacce parietali. La sequenza logica dell'algoritmo implementato può essere riassunta nei seguenti passaggi:

1. definizione dei parametri fisici e geometrici del problema;
2. costruzione della griglia computazionale mista per i domini fluido e solido;
3. calcolo preliminare e validazione del profilo di velocità laminare (2.6);
4. pre-assemblaggio vettorializzato degli operatori differenziali sparsi (diffusione e advezione);

5. inizializzazione del campo termico e definizione dinamica delle condizioni al contorno;
6. integrazione temporale del sistema accoppiato mediante schema *Predictor-Corrector* semi-implicito;
7. post-processing dei risultati (estrazione delle BTC e analisi del comportamento asintotico).

Poiché il campo di velocità è stazionario, esso viene calcolato numericamente una singola volta all’inizio della simulazione e mantenuto costante, ottimizzando i tempi computazionali.

## 3.2 Dominio computazionale e discretizzazione spaziale

La discretizzazione spaziale è effettuata mediante una griglia cartesiana strutturata. Il canale fluido, di lunghezza  $L$  e apertura  $H$ , è suddiviso in  $N_x$  intervalli lungo la direzione assiale e  $N_y$  nodi lungo la direzione trasversale. I passi di griglia costanti sono definiti come:

$$\Delta x = \frac{L}{N_x}, \quad \Delta y = \frac{H}{N_y - 1}. \quad (3.1)$$

Per massimizzare l’accuratezza nell’imposizione delle condizioni al contorno, si adotta uno schema di collocazione dei nodi misto (*staggered-like*), differenziato per le due coordinate.

### 3.2.1 Discretizzazione longitudinale (*cell-centered*)

Lungo la direzione  $x$  i nodi sono collocati al centro delle celle di controllo (*cell-centered*):

$$x_i = \left(i - \frac{1}{2}\right) \Delta x, \quad i = 1, \dots, N_x. \quad (3.2)$$

Questa topologia risulta intrinsecamente conservativa per la discretizzazione del trasporto convettivo *upwind* lungo l’asse principale del moto.

### 3.2.2 Discretizzazione trasversale (nodale)

Lungo la direzione  $y$  i nodi sono disposti esattamente sulle interfacce fisiche:

$$y_j = (j - 1)\Delta y, \quad j = 1, \dots, N_y. \quad (3.3)$$

In questo modo, i nodi di bordo  $j = 1$  e  $j = N_y$  giacciono fisicamente sulle pareti inferiori e superiori ( $y = 0$  e  $y = H$ ). Questa scelta strategica permette di imporre direttamente le condizioni di Robin vettorializzate, accoppiando in modo esatto il nodo fluido di parete con il primo nodo della griglia del dominio solido adiacente.

## 3.3 Rappresentazione discreta del campo termico

Per sfruttare l'efficienza degli algoritmi di algebra lineare sparsa di MATLAB, il campo bidimensionale delle temperature  $T_{i,j}$  all'istante  $t^n$  viene srotolato (*flattened*) in un unico vettore colonna globale:

$$\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{N_x N_y}. \quad (3.4)$$

La mappatura tra le coordinate geometriche  $(i, j)$  e l'indice lineare monodimensionale  $p$  segue un ordinamento lessicografico definito dalla relazione:

$$p = (j - 1)N_x + i. \quad (3.5)$$

Di conseguenza, l'elemento  $p$ -esimo del vettore di stato rappresenta univocamente la temperatura nel nodo fisico:

$$\mathbf{T}_p = T_{i,j}. \quad (3.6)$$

Tale vettorializzazione è il fulcro computazionale del codice: permette di abbandonare i lenti cicli iterativi `for` nidificati in favore di operazioni vettoriali dirette su matrici sparse di dimensione  $(N_x N_y) \times (N_x N_y)$ , abbattendo drasticamente i tempi di esecuzione del solutore.

### 3.4 Discretizzazione dell'equazione di trasporto

Nel dominio fluido si discretizza numericamente l'equazione di advezione–diffusione (2.10). La discretizzazione spaziale è costruita separando il contributo diffusivo da quello convettivo, utilizzando schemi scelti in accordo con i classici requisiti di stabilità e accuratezza numerica per i problemi di trasporto, come illustrato da Patankar [9].

I termini diffusivi nelle direzioni  $x$  e  $y$  sono approssimati mediante differenze finite centrate del secondo ordine. Per un generico nodo interno  $(i, j)$ , gli operatori discreti assumono la forma:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \approx \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2}. \quad (3.7)$$

Queste formule, fisicamente coerenti con la natura regolarizzante della diffusione termica, vengono combinate tramite prodotti di Kronecker per assemblare un operatore laplaciano sparso bidimensionale  $\mathbf{L}$ .

Il termine convettivo viene invece discretizzato mediante uno schema *upwind* del primo ordine (*backward differencing*) nella direzione longitudinale. Come ampiamente discusso da Anderson [10], tale scelta introduce una dissipazione numerica ma risulta essenziale per sopprimere le oscillazioni non fisiche (*wiggles*) tipiche degli schemi centrati quando applicati a regimi dominati dall'advezione (alti numeri di Péclet). Poiché il moto di Poiseuille è rigorosamente positivo lungo  $x$  ( $u_j > 0$ ), la derivata assiale viene valutata all'indietro:

$$u_j \frac{\partial T}{\partial x} \approx u_j \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x}. \quad (3.8)$$

Questo termine genera una matrice sparsa globale  $\mathbf{C}$  che incorpora intrinsecamente il profilo di velocità trasversale.

### 3.5 Integrazione temporale e sistema algebrico

L'applicazione degli operatori spaziali trasforma l'equazione a derivate parziali in un sistema di equazioni differenziali ordinarie. L'avanzamento nel tempo viene eseguito mediante uno schema implicito di Eulero all'indietro (*backward Euler*), che garantisce stabilità incondizionata.

Indicando con  $\mathbf{T}^n$  il vettore delle temperature all'istante  $t^n = n\Delta t$ , la discretizzazione temporale conduce alla seguente equazione di aggiornamento:

$$\frac{\mathbf{T}^{n+1} - \mathbf{T}^n}{\Delta t} + \mathbf{C}\mathbf{T}^{n+1} = \alpha_f \mathbf{L}\mathbf{T}^{n+1} + \mathbf{b}^{n+1}. \quad (3.9)$$

Riordinando i termini in modo da isolare le incognite al tempo futuro  $n + 1$ , si ottiene il sistema lineare risolto dal simulatore ad ogni iterazione:

$$\left[ \mathbf{I} + \Delta t \mathbf{C} - \Delta t \alpha_f \mathbf{L} \right] \mathbf{T}^{n+1} = \mathbf{T}^n + \Delta t \mathbf{b}^{n+1}, \quad (3.10)$$

dove  $\mathbf{I}$  è la matrice identità e  $\mathbf{b}^{n+1}$  contiene i termini noti derivanti dalle condizioni al contorno. Il costo computazionale associato all'inversione della matrice di iterazione è minimizzato dall'impiego dei solutori diretti per matrici sparse nativi di MATLAB.

## 3.6 Implementazione discreta delle condizioni al contorno

L'aspetto computazionalmente più delicato risiede nella traduzione delle condizioni al contorno continue nei corrispondenti vincoli algebrici da imporre ai nodi di bordo della griglia. Tali condizioni modificano strutturalmente le equazioni del sistema (3.10).

### 3.6.1 Condizione iniziale e di ingresso

All'istante  $t^0 = 0$ , il vettore di stato è inizializzato alla temperatura di riferimento uniforme:  $\mathbf{T}^0 = T_0 \mathbf{1}$ .

All'ingresso del canale ( $x = 0$ , indice spaziale  $i = 1$ ), la perturbazione termica è imposta in forma forte. Per ogni nodo trasversale  $j$ , la riga della matrice di iterazione viene sostituita dall'identità e il termine noto è forzato al valore imposto dallo *slug* termico:

$$T_{1,j}^{n+1} = \begin{cases} T_{in}, & \text{se } t^{n+1} \leq t_{inj}, \\ T_0, & \text{se } t^{n+1} > t_{inj}. \end{cases} \quad (3.11)$$

### 3.6.2 Condizione di uscita

Alla sezione di scarico ( $x = L$ , indice  $i = N_x$ ), non viene prescritta alcuna temperatura (*outflow boundary condition*). L'assenza di un vincolo di Dirichlet, combinata con lo schema *upwind* adottato per la convettività assiale, permette l'espulsione naturale dell'energia dal dominio computazionale, evitando riflessioni numeriche spurie del fronte termico all'interfaccia di valle.

### 3.6.3 Accoppiamento termico fluido-matrice

Alle pareti ( $y = 0$  e  $y = H$ , corrispondenti rispettivamente ai nodi  $j = 1$  e  $j = N_y$ ), lo scambio di calore è implementato discretizzando l'uguaglianza dei flussi termici. Il gradiente spaziale normale all'interfaccia viene approssimato con differenze in avanti (o all'indietro) del primo ordine.

Sulla parete inferiore, uguagliando il flusso conduttivo nel fluido a quello uscente verso la matrice solida valutato al tempo corrente ( $q_{bot,i}^{n+1}$ ), si ottiene:

$$-k_f \frac{T_{i,2}^{n+1} - T_{i,1}^{n+1}}{\Delta y} = q_{bot,i}^{n+1}. \quad (3.12)$$

Riorganizzando i termini per esplicitare l'incognita parietale  $T_{i,1}^{n+1}$ , si ricava il vincolo di Robin discretizzato inserito direttamente nel solutore:

$$T_{i,1}^{n+1} - T_{i,2}^{n+1} = \frac{\Delta y}{k_f} q_{bot,i}^{n+1}. \quad (3.13)$$

Una relazione speculare viene imposta sulla parete superiore per i nodi  $T_{i,N_y}^{n+1}$ :

$$T_{i,N_y}^{n+1} - T_{i,N_y-1}^{n+1} = -\frac{\Delta y}{k_f} q_{top,i}^{n+1}. \quad (3.14)$$

I flussi  $q_{bot}$  e  $q_{top}$  non sono parametri assegnati a priori, ma vengono calcolati ad ogni passo temporale risolvendo esplicitamente l'equazione della conduzione discreta lungo la coordinata normale  $z$  all'interno della matrice solida. Questo schema realizza il perfetto accoppiamento coniugato fluido-solido richiesto dal modello teorico.

### 3.7 Eterogeneità della parete

Nel capitolo precedente la diffusività termica della matrice  $\alpha_m(x)$  è stata introdotta come parametro che controlla localmente la dinamica dello scambio termico tra fluido e parete. Nel simulatore numerico questa grandezza viene assegnata lungo la direzione longitudinale del canale secondo diverse configurazioni spaziali, al fine di analizzare in modo controllato l'effetto dell'eterogeneità della parete sul trasporto termico.

Sono considerate tre tipologie di distribuzione della diffusività termica:

- **configurazione omogenea**, in cui  $\alpha_m(x) = \alpha_{m,0}$  è costante lungo tutto il canale;
- **configurazioni deterministiche a tratti**, nelle quali il dominio è suddiviso in regioni con valori differenti della diffusività termica;
- **configurazioni stocastiche**, in cui  $\alpha_m(x)$  è modellata come un campo casuale correlato lungo la direzione  $x$ .

Nel caso stocastico si assume che il campo della diffusività termica segua una distribuzione lognormale, così da garantire valori sempre positivi della proprietà termica. Il campo lognormale è ottenuto esponenziando un campo gaussiano correlato generato numericamente.

Seguendo l'approccio descritto da Cressie [11] per la modellazione geostatistica dei domini spaziali, la correlazione del campo gaussiano è descritta mediante una funzione di covarianza esponenziale:

$$C_{ij} = \sigma^2 \exp\left(-\frac{|x_i - x_j|}{\ell_c}\right),$$

dove  $\sigma^2$  rappresenta la varianza del campo e  $\ell_c$  la lunghezza di correlazione spaziale che controlla la scala delle eterogeneità lungo il canale.

Poiché per definizione la matrice di covarianza  $\mathbf{C}$  è simmetrica e definita positiva, la realizzazione discreta del campo spaziale correlato viene ottenuta mediante la fattorizzazione di Cholesky ( $\mathbf{C} = \mathbf{L}_c \mathbf{L}_c^T$ ), applicando la formulazione standard di Golub and Van Loan [12]. In pratica, un vettore di variabili gaussiane indipendenti standard viene trasformato moltiplicandolo per la matrice triangolare inferiore  $\mathbf{L}_c$  in un campo correlato che riproduce la struttura statistica desiderata. L'esponenziazione del campo gaussiano risultante consente infine di ottenere la distribuzione lognormale della diffusività termica utilizzata nelle simulazioni.

### 3.8 Post-processing e osservabili

Al fine di confrontare in modo sistematico le diverse simulazioni, i risultati vengono analizzati mediante grandezze adimensionali e osservabili integrali lungo la sezione del canale.

In particolare, si introduce la temperatura adimensionale (2.21) in forma discretizzata:

$$\Theta_{i,j}^n = \frac{T_{i,j}^n - T_0}{T_{in} - T_0}, \quad (3.15)$$

che consente di esprimere l'evoluzione della temperatura in forma normalizzata rispetto alla perturbazione imposta all'ingresso.

L'osservabile principale utilizzato nell'analisi dei risultati è la *Breakthrough Curve* (BTC), la cui forma discretizzata, ottenuta dall'Equazione (2.22), è data da:

$$\text{BTC}^n = \frac{1}{H} \sum_{j=1}^{N_y} \Theta_{N_x,j}^n w_j \Delta y. \quad (3.16)$$

La BTC rappresenta una misura sintetica della risposta del sistema al segnale termico imposto all'ingresso. Essa integra infatti gli effetti combinati di advezione, diffusione nel fluido e scambio termico con la matrice.

Nel simulatore questa grandezza è calcolata numericamente mediante integrazione discreta lungo la direzione trasversale della griglia computazionale.

### 3.9 Verifiche numeriche

Prima dell'esecuzione delle simulazioni parametriche è stata effettuata una serie di verifiche preliminari volte a controllare la correttezza e la stabilità del solutore numerico.

In particolare sono stati analizzati i seguenti aspetti:

- confronto con configurazioni omogenee, utilizzate come riferimento per verificare la coerenza fisica del modello;
- analisi di convergenza al variare della risoluzione spaziale e del passo temporale;
- controllo del comportamento numerico della soluzione durante l'evoluzione temporale.

In tutte le simulazioni la temperatura adimensionale rimane confinata nell'intervallo fisicamente ammissibile

$$0 \leq \Theta \leq 1,$$

confermando l'assenza di oscillazioni numeriche spurie e la stabilità dello schema di discretizzazione adottato.

### 3.10 Struttura algoritmica e implementazione in MATLAB

Il solutore descritto nelle sezioni precedenti è stato interamente sviluppato e codificato nell'ambiente di calcolo scientifico MATLAB. L'architettura del codice è stata progettata con un'enfasi particolare sull'efficienza computazionale, sfruttando il paradigma della vettorializzazione spaziale e l'impiego massiccio di matrici sparse (*sparse matrices*).

Il dominio bidimensionale fluido viene mappato in un singolo vettore colonna di incognite mediante un indicizzatore lineare lessicografico  $p(i, j)$ . Questo approccio consente di assemblare gli operatori differenziali bidimensionali (laplaciano e convezione *upwind*) come singole matrici sparse globali. Tale strategia riduce drasticamente il *footprint* di memoria e consente l'impiego dei solutori diretti nativi di MATLAB, i cui algoritmi per sistemi sparsi asimmetrici garantiscono prestazioni ottimali ad ogni passo temporale, come evidenziato da Davis [13].

Una sfida computazionale rilevante del presente modello risiede nell'accoppiamento tra il dominio fluido e il dominio solido semi-infinito (la matrice). Per garantire la stabilità numerica e preservare l'accuratezza del bilancio dei flussi termici all'interfaccia, il ciclo di integrazione temporale implementa uno schema di tipo *Predictor-Corrector*. In una prima fase (*Predictor*), il campo termico fluido viene avanzato nel tempo utilizzando il flusso di calore della parete calcolato al passo temporale precedente. Successivamente, le nuove temperature di parete vengono utilizzate come condizione di Dirichlet per risolvere l'equazione della conduzione monodimensionale all'interno della matrice solida, ricavando i nuovi flussi termici aggiornati. Infine (*Corrector*), il campo fluido viene ricalcolato impiegando la media aritmetica (*Crank-Nicolson-like*) tra i vecchi e i nuovi flussi parietali.

L'ossatura logica del solutore è sintetizzata nell'Algoritmo 1, che ne illustra l'architettura macroscopica dal setup iniziale fino al post-processing diagnostico.

L'intero listato del codice sorgente è riportato integralmente nell'Appendice A, al fine di consentire la piena riproducibilità numerica dei risultati discussi nel presente elaborato.

## 3.11 Definizione degli scenari e analisi dimensionale

In questa sezione vengono presentati i risultati numerici ottenuti dal solutore, con l'obiettivo di quantificare l'influenza relativa dell'advezione, della diffusione termica nel fluido e della conduzione nella matrice solida.

Essendo il campo di moto laminare e completamente sviluppato, il parametro guida per classificare i regimi di trasporto è il numero di Péclet basato sull'apertura del canale. Sostituendo la velocità media di Poiseuille ( $U$ ) nella definizione di Péclet, si esplicita la dipendenza diretta dal gradiente di pressione applicato:

$$\text{Pe}_H = \frac{UH}{\alpha_f} = \frac{H^3}{12\mu_f\alpha_f} \left( -\frac{dP}{dx} \right). \quad (3.17)$$

Valori elevati di  $\text{Pe}_H$  indicano un regime dominato dall'advezione, mentre per valori dell'ordine dell'unità (o inferiori) la diffusione nel fluido e l'inerzia termica della parete assumono un ruolo primario. La letteratura inerente al trasporto in mezzi confinati e fratturati [e.g., 14] adotta diffusamente questo approccio adimensionale per isolare le configurazioni in cui l'accoppiamento coniugato con il solido domina lo sviluppo della coda asintotica.

Per esplorare l'intero spettro di queste interazioni fisiche, la campagna di simulazioni è stata strutturata in tre scenari principali, riassunti nella Tabella 3.1. (Un quarto scenario, Olio-Calcare, è stato testato in via preliminare, ma scartato in quanto le variazioni di risposta termica rispetto al caso metallico sono risultate trascurabili ai fini della presente trattazione macroscopica).

### 3.11.1 Interpretazione termofluidodinamica degli scenari

Gli scenari proposti isolano efficacemente i diversi meccanismi di trasporto:

---

**Algorithm 1** Pseudocodice del solutore per il trasporto coniugato fluido-matrice

---

- 1: **Input:** Geometria  $(L, H)$ , Proprietà  $(k_f, \alpha_f, k_m)$ , Griglia  $(N_x, N_y)$ , Tempi  $(t_{inj}, t_{final}, \Delta t)$
- 2: **Input:** Parametri campo stocastico  $(\alpha_{mean}, \sigma_{log}, \ell_c)$
- 3: // 1. Inizializzazione e setup fluidodinamico
- 4: Costruzione griglia e calcolo profilo di velocità  $u(y)$  di Poiseuille
- 5: Calcolo numeri adimensionali  $(Re, Pe_H)$
- 6: // 2. Generazione campo stocastico di parete
- 7: **if** Eterogeneità attivata **then**
- 8:     Fattorizzazione di Cholesky su matrice covarianza esponenziale  $C$
- 9:     Generazione campo log-normale spazialmente correlato  $\alpha_m(x)$
- 10: **else**
- 11:      $\alpha_m(x) \leftarrow$  costante
- 12: **end if**
- 13: // 3. Pre-assemblaggio operatori (Matrici sparse)
- 14: Assemblaggio Laplaciano trasversale  $\mathbf{L}_{op}$  (differenze centrate)
- 15: Assemblaggio operatore convettivo  $\mathbf{C}$  (*upwind* 1° ordine in  $x$ )
- 16: Matrice di sistema:  $\mathbf{A}_{base} = \mathbf{I} + \Delta t \mathbf{C} - \Delta t \alpha_f \mathbf{L}_{op}$
- 17: Inizializzazione stato termico:  $\mathbf{T}^0 = T_0 \mathbf{1}$  e flussi parietali nulli
- 18: // 4. Integrazione temporale (Predictor-Corrector)
- 19: **for**  $n = 1 \rightarrow N_t$  **do**
- 20:     – *Predictor Step (Fluido)* –
- 21:     Imposizione Dirichlet all’ingresso e Robin alle pareti (usando flussi storici  $q_{wall}^n$ )
- 22:     Risoluzione sistema fluido:  $\mathbf{T}^{pred} = \mathbf{A}_{base} \setminus \mathbf{b}^n$
- 23:     – *Risoluzione conduzione (Matrice Solida)* –
- 24:     Estrazione temperature parietali:  $T_{wall}^{pred}$
- 25:     Imposizione  $T_{wall}^{pred}$  come vincolo Dirichlet all’interfaccia della matrice
- 26:     Integrazione eq. conduzione nel solido lungo  $z$  per ogni cella  $i$
- 27:     Estrazione flussi termici aggiornati:  $q_{wall}^{new} = -k_m \nabla_z T_{matrice}$
- 28:     – *Corrector Step (Fluido)* –
- 29:     Calcolo flusso medio all’interfaccia:  $q_{wall}^{avg} = \frac{1}{2}(q_{wall}^n + q_{wall}^{new})$
- 30:     Aggiornamento termine noto  $\mathbf{b}^{n+1}$  con  $q_{wall}^{avg}$
- 31:     Risoluzione sistema fluido corretto:  $\mathbf{T}^{n+1} = \mathbf{A}_{base} \setminus \mathbf{b}^{n+1}$
- 32:     – *Aggiornamento stato e Post-processing* –
- 33:      $q_{wall}^{n+1} \leftarrow q_{wall}^{new}$
- 34:     Calcolo Breakthrough Curve:  $BTC^{n+1} = \frac{1}{H} \sum (\Theta_{N_x, j}^{n+1} w_j \Delta y)$
- 35: **end for**
- 36: // 5. Analisi Diagnostica Asintotica
- 37: Estrazione *Local Slope*:  $\partial(\log BTC)/\partial(\log t)$
- 38: **Output:** Verifica regime dispersivo (asintoto  $\propto t^{-3/2}$ )

---

Scenario (fluido-parete)	Gradiente $\nabla P$ [Pa m <sup>-1</sup> ]	Viscosità $\mu_f$ [Pa s]	Diffusività fluido $\alpha_f$ [m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> ]	Diffusività parete $\alpha_m$ [m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> ]	Velocità media $U$ [mm s <sup>-1</sup> ]	Péclet $Pe_H$ [-]
Acqua-Roccia	1	$1.0 \times 10^{-3}$	$1.43 \times 10^{-7}$	$1.07 \times 10^{-6}$	0.083	$\sim 0.6$
Acqua-Roccia	100	$1.0 \times 10^{-3}$	$1.43 \times 10^{-7}$	$1.07 \times 10^{-6}$	8.333	$\sim 58.0$
Olio-Metallo	100	$46.0 \times 10^{-3}$	$7.86 \times 10^{-8}$	$1.88 \times 10^{-5}$	0.181	$\sim 2.3$
Olio-Calcare	100	$46.0 \times 10^{-3}$	$7.86 \times 10^{-8}$	$0.60 \times 10^{-6}$	0.181	$\sim 2.3$

**Tabella 3.1:** Scenari di simulazione considerati e relativi parametri caratteristici.

- **Acqua-Roccia a basso gradiente** ( $Pe_H \approx 0.6$ ): I tempi di residenza del fluido nel canale sono elevati. Questo favorisce sia la diffusione termica longitudinale sia il progressivo scambio energetico trasversale con la matrice solida.
- **Acqua-Roccia ad alto gradiente** ( $Pe_H \approx 58.0$ ): Il fronte termico è sparato rapidamente verso l'uscita. La diffusione termica longitudinale è del tutto trascurabile e la dinamica macroscopica è governata dall'advezione pura, seppur modulata dal ritardo indotto dalla parete.
- **Olio-Metallo ad alto gradiente** ( $Pe_H \approx 2.3$ ): A parità di  $\nabla P$  rispetto al caso precedente, l'elevata viscosità dinamica dell'olio frena drasticamente la velocità media di Poiseuille. Il sistema viene forzato in un regime di Péclet intermedio dove l'accoppiamento con una matrice metallica (ad alta diffusività) diventa fortemente impattante.

### 3.12 Evoluzione del fronte termico nei diversi regimi

L'estrazione dei campi di temperatura bidimensionali  $\mathbf{T}(x, y, t)$  consente di visualizzare la morfologia del fronte termico durante il transitorio. Questa indagine spaziale è il primo passo per comprendere come l'attrito viscoso (che distorce il profilo di velocità) e l'assorbimento parietale modifichino l'impronta termica del fluido.

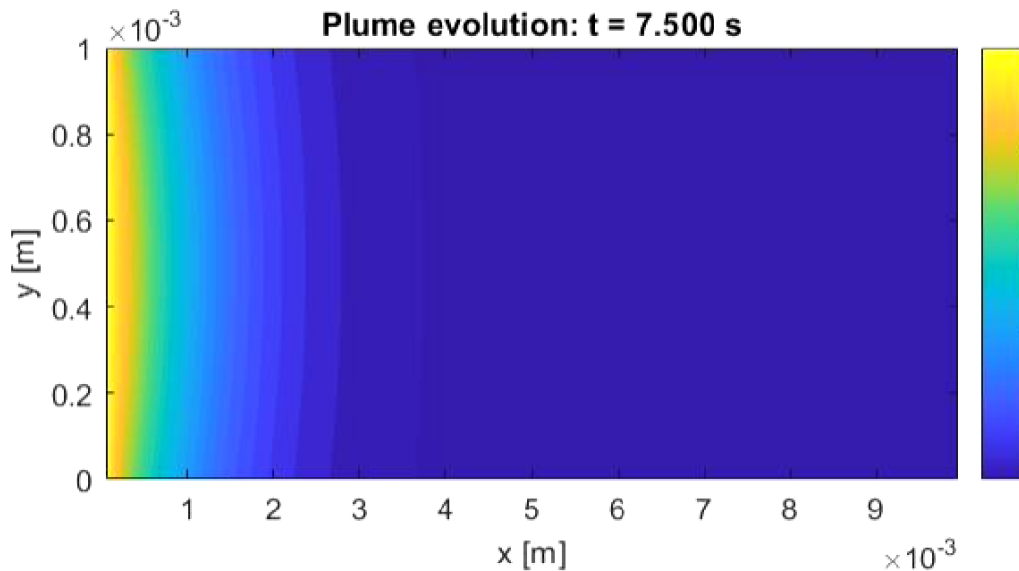
Tutte le simulazioni presentate in questa fase assumono una matrice solida spazialmente omogenea ( $\alpha_m(x) = \text{costante}$ ), operando come riferimento (*benchmark*) per le successive valutazioni sulle eterogeneità stocastiche.

### 3.12.1 Regime a bassa velocità: caso Acqua–Roccia a basso gradiente

Il primo scenario considerato è il sistema Acqua–Roccia soggetto a un gradiente di pressione modesto ( $\nabla P = 1 \text{ Pa m}^{-1}$ ), corrispondente a un numero di Péclet  $Pe_H \approx 0.6$ . In questo regime il trasporto convettivo e la diffusione termica nel fluido risultano dello stesso ordine di grandezza.

Come mostrato in Figura 3.1, il fronte termico avanza lentamente lungo il canale e presenta una morfologia progressivamente smussata a causa della diffusione nel fluido. Allo stesso tempo, la distribuzione di temperatura tende a uniformarsi nella direzione trasversale, indicando che la diffusione termica attraverso la sezione del canale è efficace su scale temporali comparabili a quelle del trasporto convettivo.

Il tempo di residenza relativamente elevato del fluido favorisce inoltre lo scambio energetico con la matrice rocciosa, che agisce come serbatoio termico e contribuisce ad attenuare l'intensità del segnale termico lungo la direzione longitudinale.



**Figura 3.1:** Campo di temperatura adimensionale per il caso Acqua–Roccia a basso gradiente di pressione ( $\nabla P = 1 \text{ Pa/m}$ ). Istante  $t = 7.5 \text{ s}$ . Dominio  $L = 10^{-2} \text{ m}$ ,  $H = 10^{-3} \text{ m}$ . Il numero di Péclet è  $Pe_H \approx 0.6$ , indicando un regime in cui advezione e diffusione termica nel fluido risultano comparabili.

### 3.12.2 Regime dominato dall'advezione: caso Acqua-Roccia ad alto gradiente

Incrementando di due ordini di grandezza il gradiente di pressione ( $\nabla P = 100 \text{ Pa m}^{-1}$ ), il numero di Péclet raggiunge valori dell'ordine di  $Pe_H \approx 58.0$ . In queste condizioni il trasporto convettivo diventa nettamente predominante rispetto alla diffusione termica nel fluido.

La sequenza temporale mostrata in Figura 3.2 evidenzia un avanzamento assiale molto rapido del fronte termico. A differenza del caso a basso Péclet, il segnale termico viene trasportato lungo il canale principalmente dall'advezione imposta dal campo di moto laminare.

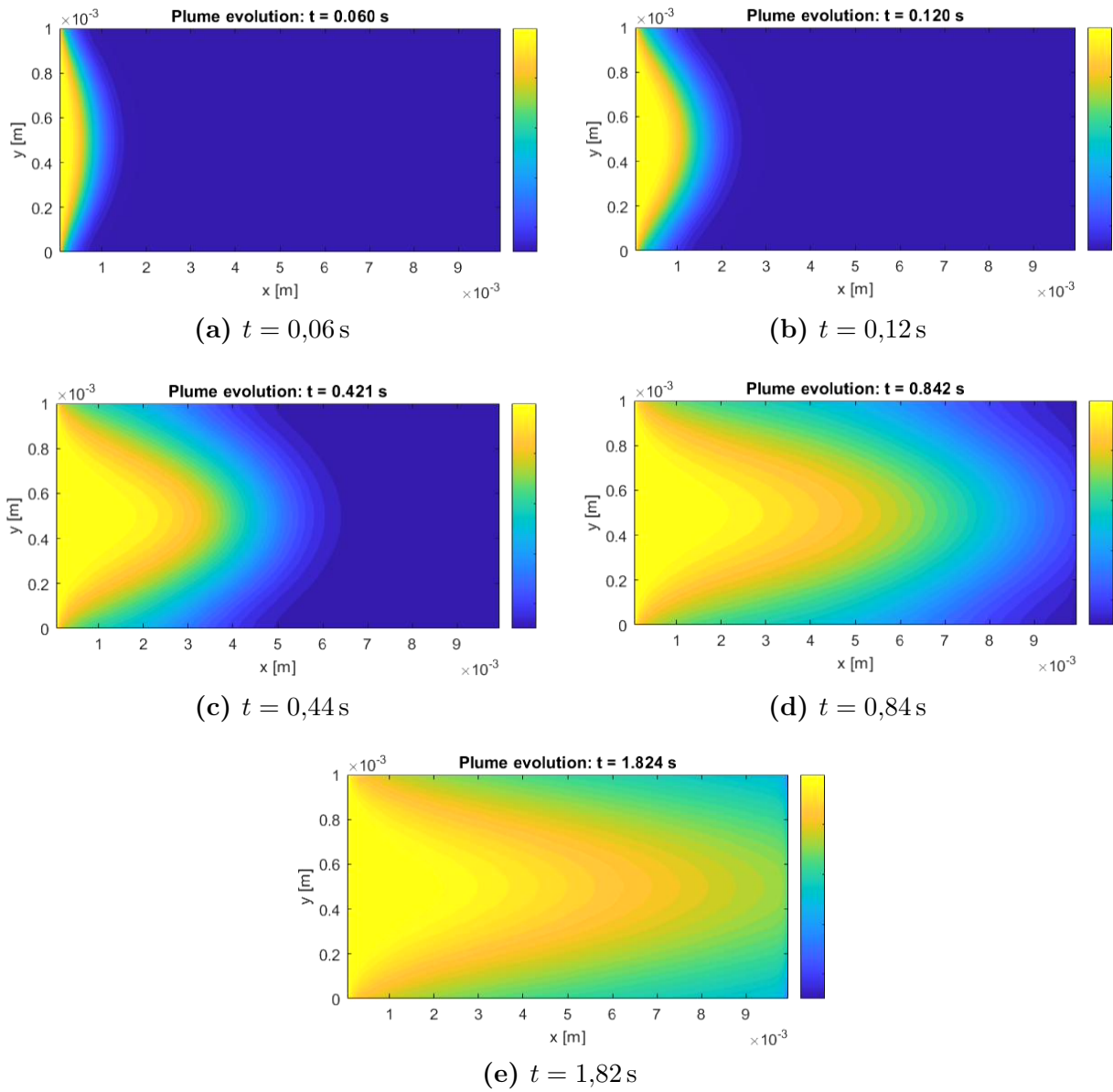
L'assenza di eterogeneità nella diffusività della parete consente inoltre al fronte di evolvere in modo regolare lungo il dominio. La struttura del campo di temperatura riflette direttamente il profilo di velocità parabolico del flusso di Poiseuille: il fronte risulta più avanzato nella regione centrale del canale, dove la velocità è massima, mentre rimane più arretrato in prossimità delle pareti.

In questo regime la diffusione termica nel fluido agisce principalmente come meccanismo di regolarizzazione del fronte, mentre lo scambio termico con la parete contribuisce progressivamente all'attenuazione dell'ampiezza del segnale termico durante la propagazione.

### 3.12.3 Regime intermedio: caso Olio-Metallo

Il sistema Olio-Metallo rappresenta uno scenario intermedio tra i due regimi estremi analizzati nei casi precedenti. Pur essendo sottoposto allo stesso gradiente di pressione del caso Acqua-Roccia ad alto gradiente ( $\nabla P = 100 \text{ Pa m}^{-1}$ ), la maggiore viscosità dinamica dell'olio riduce significativamente la velocità media del flusso secondo la relazione di Poiseuille. Di conseguenza il numero di Péclet assume un valore moderato ( $Pe_H \approx 2.3$ ).

In questo regime il trasporto convettivo e la diffusione termica nel fluido risultano dello stesso ordine di grandezza. La sequenza temporale riportata in Figura 3.3 mostra che l'avanzamento assiale del fronte termico è più lento rispetto al caso dominato dall'advezione e che la struttura del campo di temperatura appare più diffusa lungo la direzione longitudinale.



**Figura 3.2:** Evoluzione del campo di temperatura adimensionale per il caso Acqua–Roccia ad alto gradiente di pressione ( $\nabla P = 100$  Pa/m). Il numero di Péclet è  $Pe_H \approx 58$ . Il trasporto convettivo domina la dinamica del fronte termico, che si propaga rapidamente lungo il canale seguendo la struttura del profilo di velocità laminare.

La morfologia del fronte riflette quindi l'azione combinata dei diversi meccanismi di trasporto. Da un lato la convezione tende a trasportare il segnale termico lungo il canale seguendo la struttura del profilo di velocità laminare; dall'altro la diffusione nel fluido e lo scambio termico con la parete contribuiscono a smussare il fronte e ad attenuarne progressivamente l'intensità.

Nel caso specifico considerato, la parete metallica è caratterizzata da una diffusività termica relativamente elevata, il che favorisce il trasferimento di energia dal fluido alla matrice. Questo effetto contribuisce ulteriormente alla riduzione dell'ampiezza del segnale termico durante la propagazione.

### 3.13 Analisi macroscopica: le Breakthrough Curves

Per analizzare la risposta globale del sistema, i risultati numerici vengono interpretati in termini di *Breakthrough Curves* (BTC), introdotte nel Capitolo 2. La BTC rappresenta l'evoluzione temporale della temperatura media adimensionale su una sezione trasversale del canale e costituisce una misura sintetica dell'intero processo di trasporto termico.

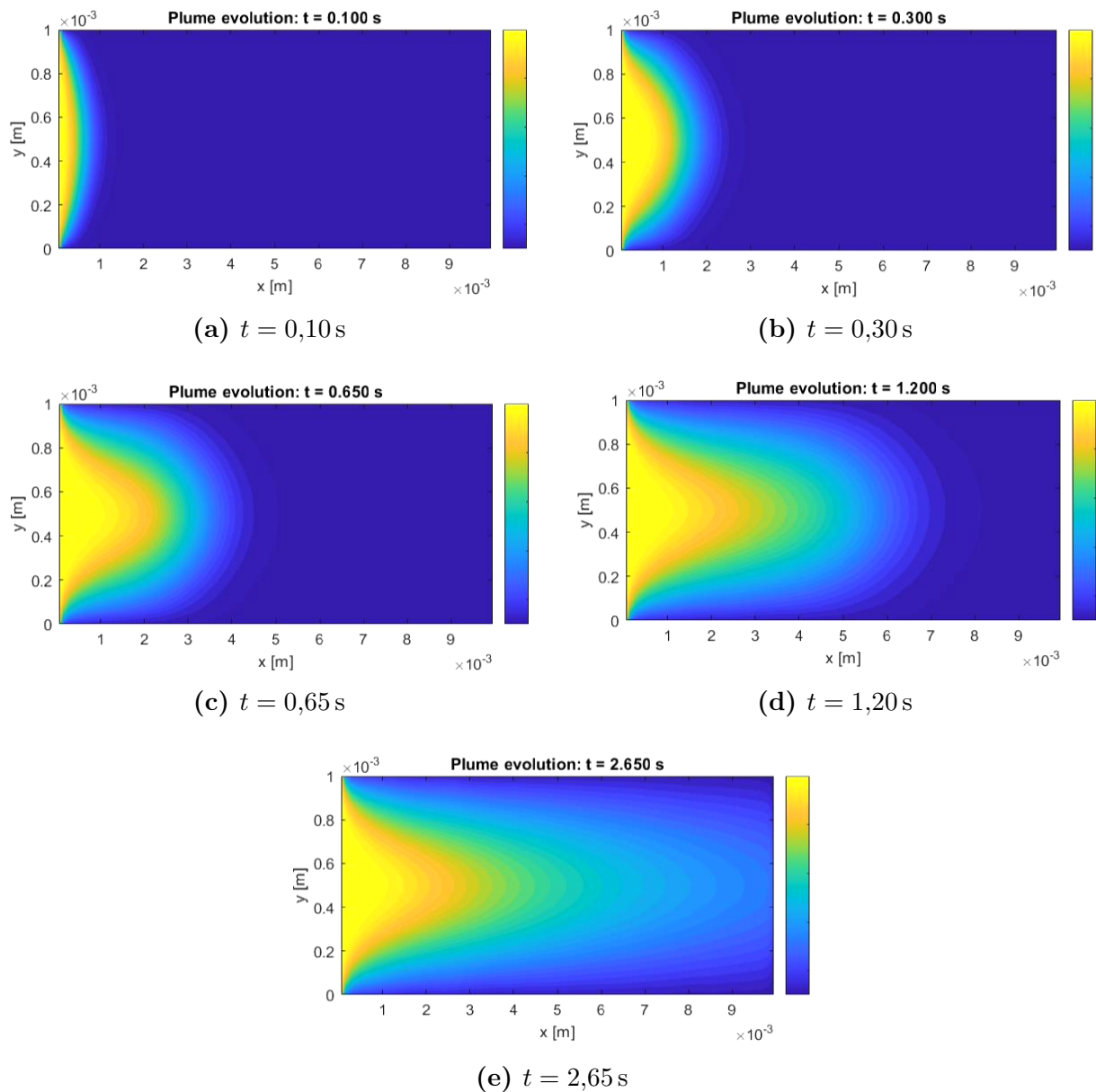
L'analisi delle BTC consente di confrontare in modo diretto gli effetti combinati di advezione, diffusione nel fluido e scambio termico con la matrice solida.

#### 3.13.1 Caso di riferimento omogeneo

Come primo passo si considera il caso omogeneo di riferimento, nel quale la diffusività termica della matrice è assunta costante lungo la direzione longitudinale. Questo scenario costituisce il benchmark rispetto al quale verranno successivamente confrontati i casi eterogenei.

La Figura 3.4 mostra la BTC calcolata alla sezione di uscita del canale e la corrispondente pendenza locale in scala log-log per lo scenario Acqua-Roccia in regime convettivo ( $Pe_H \approx 581$ ).

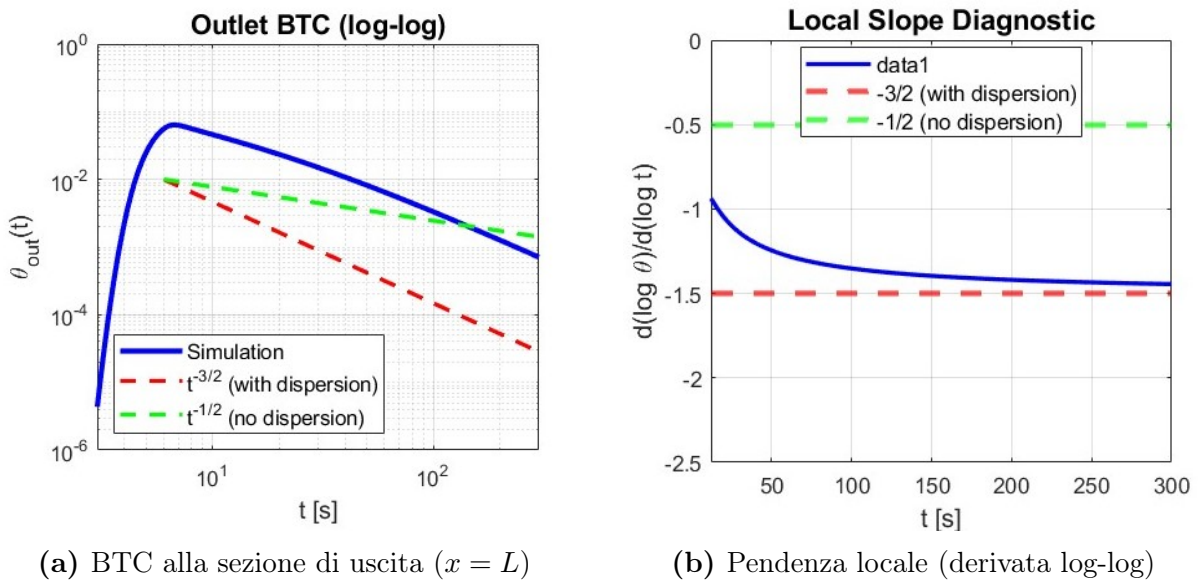
La BTC presenta un picco ben definito associato al passaggio del fronte termico, seguito da una fase di decadimento progressivo del segnale. L'analisi della pendenza locale evidenzia che, a tempi sufficientemente lunghi, il segnale tende a un regime asintotico caratterizzato da un esponente prossimo a  $-3/2$ .



**Figura 3.3:** Evoluzione del campo di temperatura adimensionale per il caso Olio–Metallo con gradiente di pressione  $\nabla P = 100$  Pa/m. Il numero di Péclet è  $Pe_H \approx 2.3$ . In questo regime intermedio il fronte termico è influenzato sia dal trasporto convettivo sia dai meccanismi diffusivi e dallo scambio termico con la parete.

Nel contesto del modello adottato, questo comportamento è coerente con il rilascio diffusivo dell'energia immagazzinata nella matrice solida, un fenomeno descritto in letteratura da de La Bernardie et al. [15] e De Simone et al. [16]. La conduzione termica in un mezzo semi-infinito introduce infatti una risposta con memoria temporale che genera code temporali lente nel segnale osservato nel fluido.

È importante sottolineare che tale comportamento emerge qui come risultato numerico del modello adottato e non costituisce una dimostrazione analitica generale. Tuttavia, la presenza di una coda con esponente  $-3/2$  è coerente con il comportamento atteso nei sistemi caratterizzati da scambio termico con una matrice semi-infinita.

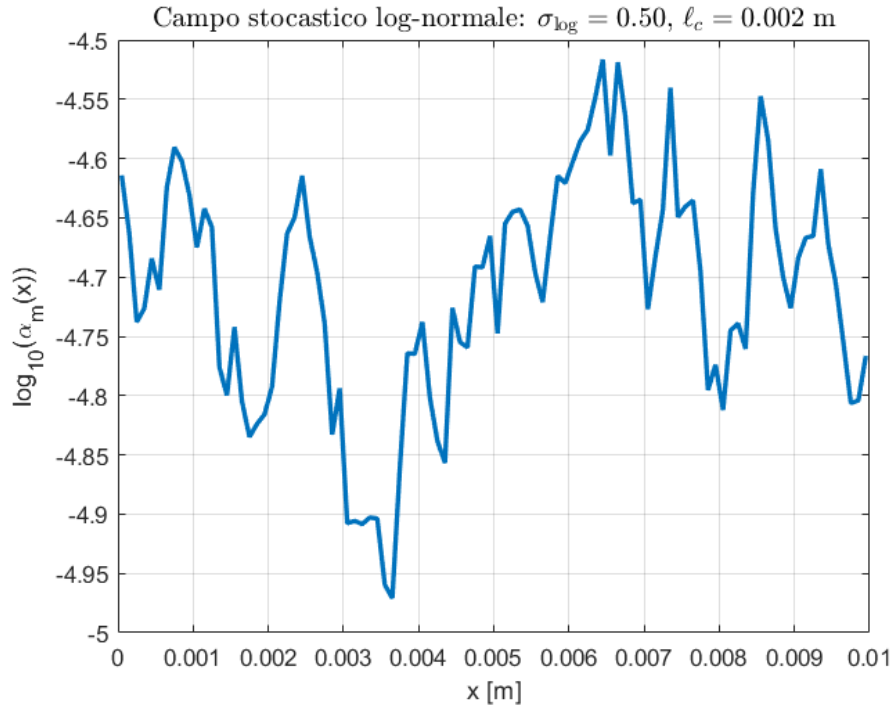


**Figura 3.4:** Breakthrough curve e pendenza locale per il caso omogeneo Acqua–Roccia in regime ad alto numero di Péclet ( $\nabla P = 1000$  Pa/m,  $Pe_H \approx 581$ ). La BTC è calcolata alla sezione di uscita del canale ( $x = 10^{-2}$  m). La pendenza locale in scala log-log evidenzia il decadimento asintotico del segnale termico associato allo scambio energetico con la matrice solida.

### 3.13.2 Effetto dell'eterogeneità stocastica della parete

Nel secondo insieme di simulazioni viene rimossa l'ipotesi di parete termicamente omogenea e si assume che la diffusività termica della matrice  $\alpha_m(x)$  sia descritta da un campo stocastico log-normale con correlazione spaziale assegnata. Questa scelta consente di rappresentare superfici caratterizzate da proprietà termiche variabili lungo la direzione longitudinale del canale.

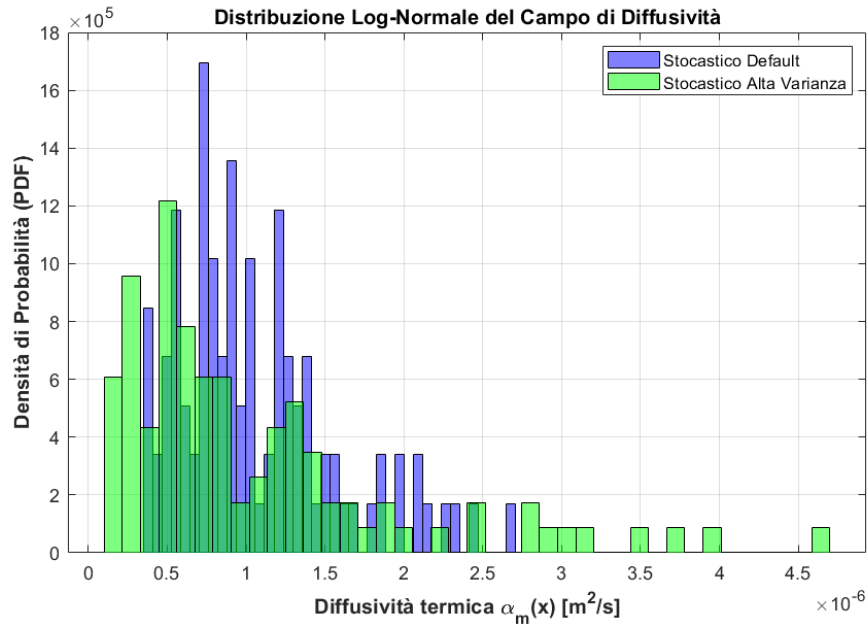
La Figura 3.5 mostra una realizzazione rappresentativa del campo stocastico utilizzato nelle simulazioni. Per evidenziare visivamente le fluttuazioni spaziali, il grafico riporta il logaritmo in base 10 della diffusività termica,  $\log_{10}(\alpha_m(x))$ . Il campo è generato assumendo una distribuzione log-normale con deviazione standard  $\sigma_{\log} = 0.5$  e lunghezza di correlazione  $\ell_c = 0.002$  m. Questa formulazione garantisce valori sempre positivi della diffusività termica.



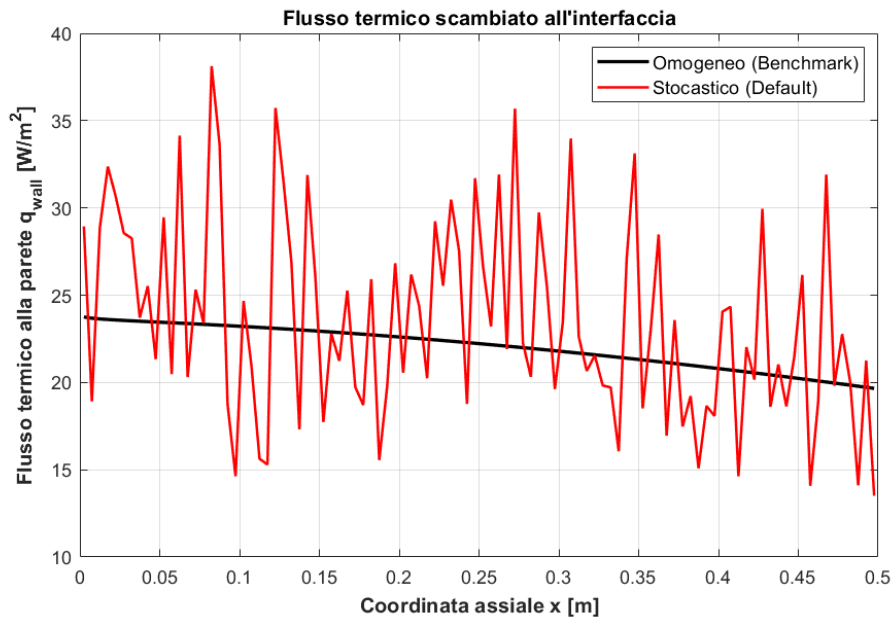
**Figura 3.5:** Esempio di realizzazione del campo stocastico della diffusività termica della matrice  $\alpha_m(x)$ . Il grafico riporta  $\log_{10}(\alpha_m(x))$  per evidenziare le fluttuazioni spaziali del campo log-normale generato numericamente ( $\sigma_{\log} = 0.5$ ,  $\ell_c = 0.002$  m).

La Figura 3.6 confronta la distribuzione di probabilità teorica con quella ottenuta campionando il campo sulla griglia computazionale. L'aumento della deviazione standard  $\sigma_{\log}$  comporta un allargamento della distribuzione e quindi una maggiore variabilità delle proprietà termiche lungo la parete.

Le fluttuazioni spaziali della diffusività termica della matrice influenzano direttamente lo scambio energetico locale tra fluido e parete attraverso la conduzione nel mezzo solido. La Figura 3.7 mostra il profilo del flusso termico parietale  $q_{wall}$  lungo il canale al termine del transitorio. Nel caso omogeneo il flusso varia in modo regolare lungo la direzione longitudinale, mentre nel caso eterogeneo compaiono variazioni locali più marcate associate alla variabilità spaziale delle proprietà termiche della matrice.

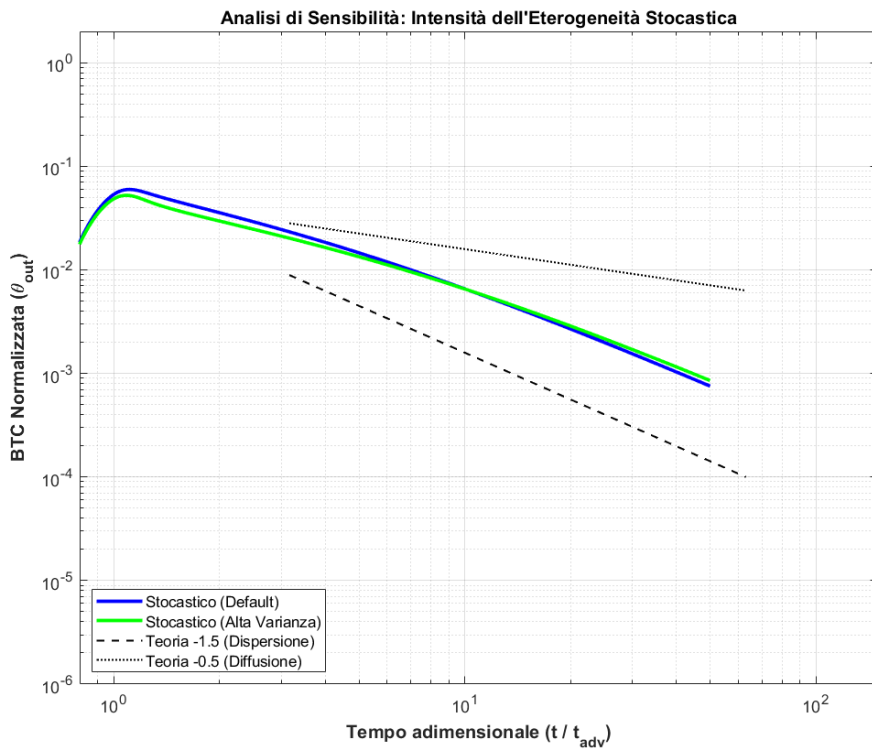


**Figura 3.6:** Distribuzione statistica della diffusività termica della matrice  $\alpha_m(x)$ . L'istogramma mostra il confronto tra un caso di riferimento e uno caratterizzato da maggiore varianza del campo log-normale.



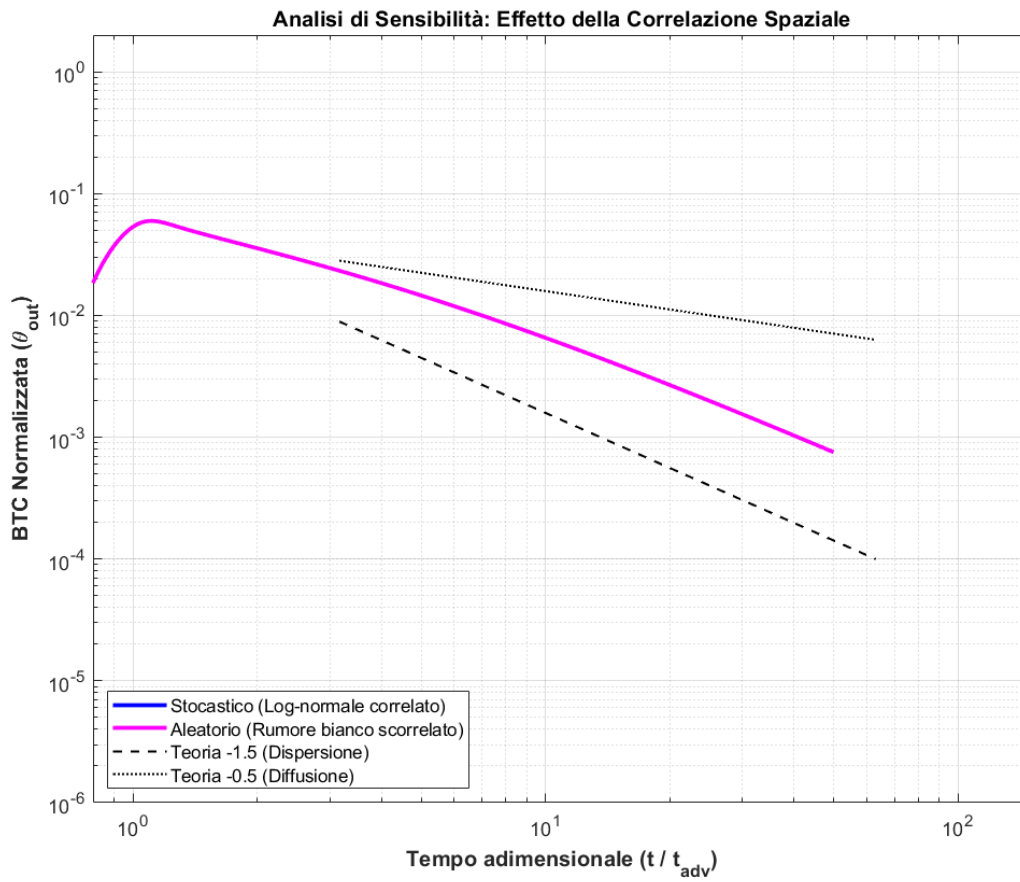
**Figura 3.7:** Confronto del flusso termico parietale  $q_{wall}$  lungo il canale al termine del transitorio ( $t = 3$  s) per il caso omogeneo e per il caso con diffusività eterogenea.

L'effetto integrato di questa variabilità spaziale emerge chiaramente nelle Breakthrough Curves. La Figura 3.8 mostra che l'aumento della varianza del campo stocastico della diffusività termica della matrice produce una riduzione dell'ampiezza del picco della BTC e una maggiore persistenza della coda temporale. Questo comportamento è coerente con un maggiore immagazzinamento temporaneo di energia nella matrice solida e con un rilascio più graduale verso il fluido, un fenomeno di ritardo termico e attenuazione del picco (*thermal attenuation*) ampiamente discusso nella letteratura recente sui mezzi fratturati eterogenei [15, 16].



**Figura 3.8:** Sensibilità della BTC alla varianza del campo stocastico della diffusività termica della matrice  $\alpha_m(x)$ . L'aumento della deviazione standard del campo log-normale determina una maggiore attenuazione del picco e una coda temporale più persistente.

Infine, la Figura 3.9 confronta il caso di campo stocastico spazialmente correlato con un campo completamente scorrelato. Nel regime di parametri considerato, le due curve risultano molto simili, suggerendo che la dinamica macroscopica della BTC è controllata principalmente dalle statistiche globali del campo (media e varianza), mentre la lunghezza di correlazione spaziale  $\ell_c$  esercita un'influenza più limitata sulla risposta integrata del sistema.



**Figura 3.9:** Confronto tra le Breakthrough Curves ottenute con un campo stocastico spazialmente correlato e con un campo scorrelato della diffusività termica della matrice  $\alpha_m(x)$ .

### 3.13.3 Sintesi comparativa e comportamento asintotico

La Figura ?? riporta in forma comparativa le Breakthrough Curves ottenute nei diversi scenari analizzati. Il confronto consente di valutare in modo diretto l'effetto dell'eterogeneità della parete sulla risposta macroscopica del sistema.

Nella fase iniziale del transitorio (*early-time*), le differenze tra gli scenari risultano particolarmente evidenti. In presenza di eterogeneità della diffusività termica della matrice, il picco della BTC risulta progressivamente attenuato rispetto al caso omogeneo. Questo comportamento riflette un incremento dello scambio energetico locale con la matrice, che riduce l'intensità del segnale termico trasportato dal fluido.

Nel regime intermedio (*intermediate-time*) emergono differenze più marcate nella forma delle curve. In questa fase la dinamica del segnale è governata dall'interazione tra il trasporto convettivo nel fluido e lo scambio termico con la parete. Le variazioni spaziali della diffusività termica della matrice modificano quindi il modo in cui l'energia viene temporaneamente immagazzinata nella matrice e successivamente restituita al fluido.

A tempi sufficientemente lunghi (*late-time*) tutte le curve mostrano una tendenza verso un comportamento asintotico comune. L'analisi della pendenza in scala log-log indica infatti che la BTC tende a un decadimento di tipo

$$\text{BTC}(t) \sim t^{-3/2}. \quad (3.18)$$

Nel contesto del modello adottato, questo comportamento è coerente con il rilascio diffusivo dell'energia immagazzinata nella matrice solida. Come rigorosamente descritto in letteratura per la conduzione transitoria in domini semi-infiniti [5], la matrice restituisce energia secondo una dinamica di flusso proporzionale a  $t^{-1/2}$ , che si riflette macroscopicamente in un decadimento temporale lento (*tailing*) del segnale tracciante con esponente  $-3/2$  [14]. Il fatto che il solutore numerico converga naturalmente a questo asintoto analitico conferma la robustezza dell'accoppiamento fluido-solido implementato.

È importante osservare che l'eterogeneità della diffusività termica della matrice modifica l'ampiezza delle BTC e il tempo necessario per raggiungere il regime asintotico, ma non altera in modo significativo l'esponente della legge di decadimento. Questo risultato suggerisce che, nelle condizioni considerate, l'esponente asintotico è principalmente controllato dal meccanismo macroscopico di diffusione nella matrice piuttosto che dalla

struttura spaziale di piccola scala dell'eterogeneità della parete.

### 3.14 Considerazioni conclusive sui risultati

I risultati numerici ottenuti mostrano come la risposta termica del sistema dipenda in modo significativo sia dal regime di trasporto nel fluido sia dalle proprietà termiche della matrice solida circostante.

Nei regimi caratterizzati da basso numero di Péclet, la diffusione termica nel fluido e la conduzione nella matrice giocano un ruolo dominante nel bilancio energetico. In queste condizioni la propagazione assiale del fronte termico risulta fortemente attenuata e il campo di temperatura tende a uniformarsi lungo la direzione trasversale.

Al contrario, per valori elevati del numero di Péclet il trasporto convettivo diventa il meccanismo principale di propagazione del segnale termico lungo il canale. In questo regime il fronte termico viene trasportato più rapidamente, ma lo scambio energetico con la matrice continua a influenzare l'evoluzione del segnale, contribuendo sia all'attenuazione del picco della *Breakthrough Curve* (BTC) sia alla formazione della coda temporale.

Nel regime intermedio, rappresentato dallo scenario Olio–Metallo, emerge chiaramente l'interazione tra trasporto convettivo nel fluido, diffusione termica nel fluido e conduzione transitoria nella matrice solida.

L'analisi dei casi con diffusività della matrice eterogenea mostra inoltre che la variabilità spaziale delle proprietà termiche del solido modifica in modo apprezzabile la forma delle BTC. In particolare, l'eterogeneità altera l'ampiezza del picco del segnale e la dinamica del decadimento temporale, pur preservando il comportamento asintotico associato alla diffusione del calore in una matrice estesa.

Dal punto di vista modellistico, questi risultati indicano che la distribuzione spaziale della diffusività termica della matrice costituisce un parametro chiave nel controllo dello scambio energetico tra fluido e solido e può essere utilizzata per rappresentare condizioni termiche non uniformi della parete o eterogeneità del mezzo circostante.

Infine, l'analisi delle Breakthrough Curves suggerisce che la risposta termica osservata in uscita dal sistema può fornire indicazioni utili sulle proprietà termiche della matrice solida. In questo senso, la BTC può essere interpretata come un osservabile macroscopico sensibile alle condizioni termiche dell'interfaccia fluido–solido.

# Capitolo 4

## Conclusioni e sviluppi futuri

Il presente lavoro ha affrontato la modellazione numerica del trasporto di calore in canali laminari accoppiati termicamente a una matrice solida circostante. L'obiettivo principale è stato analizzare il ruolo combinato dell'advezione nel fluido, della diffusione termica e della conduzione nella matrice nel determinare la propagazione del fronte termico lungo il canale, con particolare attenzione all'effetto di eterogeneità spaziali nelle proprietà termiche del mezzo solido.

A questo scopo è stato sviluppato un solutore numerico in ambiente MATLAB basato su una discretizzazione alle differenze finite su griglia strutturata, con schema upwind per il termine convettivo e integrazione temporale implicita. Il modello risolve in modo accoppiato il trasporto termico nel fluido e la conduzione nella matrice solida, imponendo all'interfaccia le condizioni di continuità della temperatura e del flusso termico. In questo modo lo scambio energetico tra fluido e parete emerge direttamente dalla soluzione congiunta delle equazioni nei due domini.

### 4.1 Sintesi dei risultati principali

L'analisi parametrica condotta sui diversi scenari di simulazione ha evidenziato alcuni risultati principali.

**Comportamento asintotico della BTC:** L'analisi delle Breakthrough Curves ha mostrato che, a tempi sufficientemente lunghi, il decadimento del segnale termico segue un comportamento compatibile con una legge di potenza del tipo

$$\text{BTC}(t) \sim t^{-3/2}.$$

Questo risultato è coerente con il rilascio diffusivo dell'energia immagazzinata nella matrice solida, associato alla conduzione termica in un mezzo esteso.

**Effetto dell'eterogeneità della parete:** L'introduzione di eterogeneità spaziali nella diffusività termica della matrice modifica in modo significativo la forma delle Breakthrough Curves. In particolare si osserva una riduzione dell'ampiezza del picco e una maggiore persistenza della coda temporale, effetto riconducibile a un maggiore immagazzinamento temporaneo di energia nella matrice solida.

**Ruolo delle statistiche dell'eterogeneità:** Il confronto tra campi stocastici spazialmente correlati e campi completamente scorrelati mostra che, nelle condizioni investigate, la dinamica macroscopica del segnale è controllata principalmente dalle statistiche globali della diffusività termica della matrice (media e varianza), mentre la lunghezza di correlazione spaziale esercita un'influenza più limitata sulla risposta integrata del sistema.

## 4.2 Implicazioni applicative

I risultati ottenuti indicano che la risposta termica macroscopica di un sistema fluido-parete è sensibile alle proprietà termiche della matrice solida. In particolare, l'analisi delle Breakthrough Curves può fornire informazioni indirette sulla struttura termica della parete.

Questo suggerisce possibili applicazioni nell'ambito della diagnostica termica non invasiva, dove l'osservazione della risposta termica del sistema potrebbe essere utilizzata per individuare disomogeneità, difetti o alterazioni delle proprietà della parete.

## 4.3 Sviluppi futuri

Il modello sviluppato in questa tesi costituisce una base per ulteriori sviluppi.

**Accoppiamento termo-viscoso:** Una possibile estensione consiste nell'introdurre una dipendenza della viscosità del fluido dalla temperatura  $\mu(T)$ . Questo permetterebbe

di analizzare fenomeni di accoppiamento tra campo termico e dinamica del flusso, inclusi effetti di variazione del profilo di velocità durante il transitorio termico.

**Evoluzione temporale delle proprietà della matrice:** Un ulteriore sviluppo riguarda l'introduzione di una dinamica temporale per la diffusività termica della matrice  $\alpha_m(x, t)$ , che potrebbe rappresentare fenomeni di deposito, fouling o alterazioni progressive delle proprietà termiche della parete.

**Estensione a geometrie tridimensionali:** Infine, il framework numerico potrebbe essere esteso a configurazioni tridimensionali o a geometrie più complesse, consentendo di studiare sistemi ingegneristici più realistici.

# Bibliografia

- [1] G. K. Batchelor. *An Introduction to fluid dynamics*. Cambridge mathematical library. Cambridge Univ. Press, Cambridge [u.a.], 14. print. edition, 2010. ISBN 9780521663960.
- [2] Maria V. Klepikova, Tanguy Le Borgne, Olivier Bour, Marco Dentz, Rebecca Hochreutener, and Nicolas Lavenant. Heat as a tracer for understanding transport processes in fractured media: Theory and field assessment from multiscale thermal push-pull tracer tests. *Water Resources Research*, 52(7):5442–5457, 2016. doi: 10.1002/2016WR018789.
- [3] Alessandro Lenci, Yves Méheust, Maria Klepikova, Vittorio Di Federico, and Daniel M. Tartakovsky. Effects of wall roughness on coupled flow and heat transport in fractured media, 2025.
- [4] Theodore L. Bergman, Adrienne S. Lavine, Frank P. Incropera, and David P. DeWitt. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. Wiley & Sons, Incorporated, John, 2020. ISBN 9781119722489.
- [5] Horatio S. Carslaw and J. C. Jaeger. *Conduction of heat in solids*. Oxford science publications. Clarendon Press, Oxford [u.a.], 2. ed., repr. edition, 2011. ISBN 0198533683.
- [6] SHANSHAN YANG. Fractal study on the heat transfer characteristics in the rough microchannels. *Fractals*, 29(05):2150118, June 2021. ISSN 1793-6543. doi: 10.1142/s0218348x21501188.
- [7] Himani Garg, Lei Wang, and Christer Fureby. Heat transfer enhancement with additively manufactured rough surfaces: Insights from large-eddy simulations. *Physics of Fluids*, 36(2), February 2024. ISSN 1089-7666. doi: 10.1063/5.0189115.

- [8] Yipan Deng, Lei Fu, Yinshui Liu, Xin Jiang, Yan Cui, and Defa Wu. Investigation on heat transfer characteristics of rectangular channels with internal rough surface naturally formed by selective laser melting three-dimensional printing. *Journal of Fluids Engineering*, 144(11), July 2022. ISSN 1528-901X. doi: 10.1115/1.4054862.
- [9] Suhas V. Patankar. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1980. ISBN 9780891165224.
- [10] John D. Anderson. *Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications*. McGraw-Hill, New York, 1995. ISBN 9780070016859.
- [11] Noel A. C. Cressie. *Statistics for Spatial Data*. John Wiley & Sons, New York, revised edition edition, 1993. doi: 10.1002/9781119115151.
- [12] Gene H. Golub and Charles F. Van Loan. *Matrix Computations*. Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 4th edition, 2013. ISBN 9781421407944.
- [13] Timothy A. Davis. *Direct Methods for Sparse Linear Systems*. Fundamentals of Algorithms. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2006. ISBN 9780898716139. doi: 10.1137/1.9780898718881.
- [14] A. Fiori and M. W. Becker. Power law breakthrough curve tailing in a fracture: The role of advection. *Journal of Hydrology*, 525:706–710, 2015. doi: 10.1016/j.jhydrol.2015.04.020.
- [15] J. de La Bernardie, O. Bour, T. Le Borgne, N. Guihéneuf, E. Chatton, T. Labasque, H. Le Lay, and M.-F. Gerard. Thermal attenuation and lag time in fractured rock: Theory and field measurements from joint heat and solute tracer tests. *Water Resources Research*, 54(12):10053–10075, 2018. doi: 10.1029/2018WR023199.
- [16] Silvia De Simone, Olivier Bour, and Philippe Davy. Impact of matrix diffusion on heat transport through heterogeneous fractured aquifers. *Water Resources Research*, 59(2):e2022WR033910, 2023. doi: 10.1029/2022WR033910.

# Appendice A

## Listato del codice MATLAB

In questa appendice viene riportato il codice sorgente integrale sviluppato in ambiente MATLAB per la simulazione del trasporto termico coniugato analizzato nel presente elaborato. Lo script implementa la generazione dei campi stocastici, il pre-assemblaggio vettorializzato degli operatori differenziali sparsi e il ciclo di integrazione temporale accoppiato *Predictor-Corrector*.

```
1 clear; clc; close all;
2
3 %% =====
4 %% COMPLETE FRACTURE-MATRIX THERMAL TRANSPORT SIMULATOR
5 %% With diagnostics for anomalous transport power-law analysis
6 %% =====
7
8 %% ===== CONFIGURATION =====
9 % Test modes - set to true/false to enable different physics tests
10 TEST_REDUCED_ALPHA_F = false; % Reduce alpha_f to create streamline dispersion
11 ALPHA_F_REDUCTION = 1; % Factor to reduce alpha_f (try 100, 200, or 500)
12
13 USE_LOCALIZED_INJECTION = false; % Use spatially localized inlet
14 INJECTION_TYPE = 'center_line'; % 'full' | 'center_line' | 'near_wall'
15 INJECTION_WIDTH_FRACTION = 0.1; % Fraction of H for localized injection
16
17 %% ===== PHYSICAL PARAMETERS =====
18 H = 1e-3; % channel height [m]
19 L = 0.5; % channel length [m]
20
21 % --- Fluid properties ---
22 rho_f = 1000; % density [kg/m^3]
23 mu_f = 1e-3; % viscosity [Pa s]
24 cp_f = 4180; % specific heat [J/(kg K)]
25 k_f = 0.6; % thermal conductivity [W/(m K)]
26
```

```

27 % Thermal diffusivity calculation
28 alpha_f_base = k_f/(rho_f*cp_f);
29 if TEST_REDUCED_ALPHA_F
30     alpha_f = alpha_f_base / ALPHA_F_REDUCTION;
31     fprintf('\n*** TEST MODE: alpha_f reduced by factor %d ***\n', ALPHA_F_REDUCTION);
32 else
33     alpha_f = alpha_f_base;
34 end
35
36 dpdx = -1000;          % pressure gradient [Pa/m]
37
38 % --- Matrix (solid) properties ---
39 rho_m = 2600;          % density [kg/m^3]
40 cp_m  = 900;           % specific heat [J/(kg K)]
41 k_m   = 2.5;           % thermal conductivity [W/(m K)]
42 alpha_m0 = k_m/(rho_m*cp_m);
43
44 % --- Thermal scenario ---
45 T0     = 260;          % initial temperature [K]
46 T1     = 350;          % injection temperature [K]
47 t_inj  = 2;           % injection duration [s]
48 tfinal = 300;          % simulation time [s]
49 T_inf  = T0;           % far-field matrix temperature [K]
50
51 %% ===== GRID SETUP =====
52 Ny = 20;                % grid points in y (transverse)
53 y   = linspace(0,H,Ny)';
54 dy  = y(2)-y(1);
55
56 Nx = 100;               % grid points in x (along flow)
57 dx  = L/Nx;
58
59 xc  = (dx/2:dx:L-dx/2)'; % cell centers in x
60 yc  = y;
61
62 Np  = Nx*Ny;             % total number of fluid nodes
63 idx = @(i,j) (j-1)*Nx + i; % linear index from (i,j)
64
65 %% ===== VELOCITY FIELD (POISEUILLE) =====
66 fprintf('\n===== \n');
67 fprintf('COMPUTING POISEUILLE VELOCITY PROFILE \n');
68 fprintf('===== \n');
69
70 % Solve  $d^2u/dy^2 = dP/dx / \mu$  with  $u(0)=u(H)=0$ 
71 e = ones(Ny,1);
72 A_u = spdiags([e -2*e e], -1:1, Ny, Ny)/dy^2;
73 A_u(1,:) = 0; A_u(1,1) = 1; % u=0 at bottom wall
74 A_u(end,:) = 0; A_u(end,end) = 1; % u=0 at top wall
75

```

```

76 b_u = (dpdx/mu_f)*ones(Ny,1);
77 b_u([1 end]) = 0;
78
79 u = A_u\b_u;
80
81 % Ensure left-to-right flow (u > 0)
82 if trapz(y,u)/H < 0
83     u = -u;
84 end
85
86 Umax = max(u);
87 Umean = trapz(y,u)/H;
88 tadv = L/Umean;
89
90 fprintf('Umax = %.3e m/s\n', Umax);
91 fprintf('Umean = %.3e m/s\n', Umean);
92 fprintf('t_adv = L/Umean = %.3f s\n', tadv);
93 fprintf('Re_H = %.3e\n', rho_f*Umax*H/mu_f);
94 fprintf('Pe_H = %.3e\n', Umax*H/alpha_f);
95
96 %% ===== INLET PROFILE =====
97 if USE_LOCALIZED_INJECTION
98     fprintf('\n*** LOCALIZED INJECTION: %s (%.0f%% width) ***\n', ...
99         INJECTION_TYPE, INJECTION_WIDTH_FRACTION*100);
100
101     Tin_profile = T0*ones(Ny,1);
102
103     switch INJECTION_TYPE
104     case 'full'
105         Tin_profile(:) = T1;
106
107     case 'center_line'
108         width_nodes = round(INJECTION_WIDTH_FRACTION * Ny);
109         center_idx = round(Ny/2);
110         idx_start = max(1, center_idx - floor(width_nodes/2));
111         idx_end = min(Ny, center_idx + floor(width_nodes/2));
112         Tin_profile(idx_start:idx_end) = T1;
113         fprintf('Injecting at y in [%.3f, %.3f] mm\n', ...
114             y(idx_start)*1e3, y(idx_end)*1e3);
115
116     case 'near_wall'
117         width_nodes = round(INJECTION_WIDTH_FRACTION * Ny);
118         Tin_profile(1:width_nodes) = T1;
119         fprintf('Injecting at y in [0, %.3f] mm\n', y(width_nodes)*1e3);
120     end
121 else
122     Tin_profile = T1*ones(Ny,1); % Full-width injection
123 end
124

```

```

125 %% ===== HETEROGENEOUS MATRIX =====
126 use_hetero_alpha = true;
127 alpha_m_min = 1e-10;
128
129 alpha_mean = alpha_m0;
130 alpha_std = 0.5*alpha_mean;
131 lc_alpha = 2e-3;          % correlation length [m]
132 seed_alpha = 1;
133
134 if use_hetero_alpha
135     alpha_m_x = generate_alpha_heterogeneous_1D(xc, alpha_mean, alpha_std, ...
136         lc_alpha, alpha_m_min, seed_alpha);
137     fprintf('\nUsing heterogeneous alpha_m(x)\n');
138     fprintf(' Mean = %.3e m^2/s, Std = %.3e m^2/s\n', alpha_mean, alpha_std);
139 else
140     alpha_m_x = alpha_m0*ones(Nx,1);
141     fprintf('\nUsing homogeneous alpha_m = %.3e m^2/s\n', alpha_m0);
142 end
143
144 %% ===== MATRIX DOMAIN =====
145 fprintf('\n=====\n');
146 fprintf('MATRIX DOMAIN SETUP\n');
147 fprintf('=====\n');
148
149 zmax = 0.2;          % matrix depth [m]
150 Nz_m = 300;        % grid points in z
151
152 z_m = linspace(0,zmax,Nz_m)';
153 dz_m = z_m(2)-z_m(1);
154 k_s = k_m;
155
156 % Characteristic time for thermal diffusion to zmax
157 tzmax = zmax^2/alpha_m0;
158
159 fprintf('zmax = %.3f m, Nz_m = %d, dz = %.3e m\n', zmax, Nz_m, dz_m);
160 fprintf('BC at z=zmax: Neumann (dT/dz=0) for semi-infinite behavior\n');
161 fprintf('t_zmax ~ %.1f s (thermal diffusion to zmax)\n', tzmax);
162 fprintf('t_final/t_zmax = %.3f (should be << 1 for power-law regime)\n', tfinal/tzmax);
163
164 % Initialize matrix temperature fields
165 Tmb = T0*ones(Nx, Nz_m); % bottom matrix (z>0, interface at z=0)
166 Tmt = T0*ones(Nx, Nz_m); % top matrix (z>0, interface at z=0)
167
168 % Build 1D diffusion operator in z
169 ezm = ones(Nz_m,1);
170 Dzz_m = spdiags([ezm -2*ezm ezm], -1:1, Nz_m, Nz_m)/dz_m^2;
171 I_m = speye(Nz_m);
172
173 % Heat flux storage (lagged for predictor-corrector)

```

```

174 qbot_x = zeros(Nx,1);      % heat flux at bottom wall [W/m^2]
175 qtop_x = zeros(Nx,1);     % heat flux at top wall [W/m^2]
176
177 %% ===== FLUID OPERATORS =====
178 fprintf('\n===== \n');
179 fprintf('BUILDING FLUID OPERATORS \n');
180 fprintf('===== \n');
181
182 ey = ones(Ny,1);
183
184 % Diffusion in y only (NO longitudinal diffusion for high Pe)
185 Dyy = spdiags([ey -2*ey ey], -1:1, Ny, Ny)/dy^2;
186 Lop = kron(Dyy, speye(Nx)); % Laplacian = d^2/dy^2 only
187
188 fprintf('Diffusion: transverse only (no d^2/dx^2) \n');
189
190 % Convection operator (upwind in x)
191 fprintf('Convection: 1st-order upwind in x \n');
192
193 Uc = repmat(u', Nx, 1); % velocity field (Nx-by-Ny)
194
195 rows = zeros(2*Np,1); cols = rows; vals = rows; ptr = 0;
196 for j=1:Ny
197     for i=1:Nx
198         pidx = idx(i,j);
199         ui = Uc(i,j);
200
201         if ui >= 0 % forward flow
202             if i > 1
203                 ptr=ptr+1; rows(ptr)=pidx; cols(ptr)=idx(i,j); vals(ptr)= ui/dx;
204                 ptr=ptr+1; rows(ptr)=pidx; cols(ptr)=idx(i-1,j); vals(ptr)= -ui/dx;
205             else
206                 ptr=ptr+1; rows(ptr)=pidx; cols(ptr)=idx(i,j); vals(ptr)= ui/dx;
207             end
208         else % backward flow (shouldn't happen)
209             if i < Nx
210                 ptr=ptr+1; rows(ptr)=pidx; cols(ptr)=idx(i+1,j); vals(ptr)= ui/dx;
211                 ptr=ptr+1; rows(ptr)=pidx; cols(ptr)=idx(i,j); vals(ptr)= -ui/dx;
212             else
213                 ptr=ptr+1; rows(ptr)=pidx; cols(ptr)=idx(i,j); vals(ptr)= -ui/dx;
214             end
215         end
216     end
217 end
218 C = sparse(rows(1:ptr), cols(1:ptr), vals(1:ptr), Np, Np);
219
220 fprintf('Outlet BC: natural outflow (no explicit BC, upwind handles it) \n');
221
222 %% ===== TIME STEPPING =====

```

```

223 fprintf('\n=====');
224 fprintf('TIME STEPPING SETUP\n');
225 fprintf('=====');
226
227 dt_cfl = 0.4*dx/max(1e-12,Umax);
228 dt_diff_y = 0.4*dy^2/max(1e-12,alpha_f);
229 dt = min([2e-3, dt_cfl, dt_diff_y]);
230
231 Nt = ceil(tfinal/dt);
232 tvec = (0:Nt)*dt;
233
234 fprintf('dx = %.3e m, dy = %.3e m\n', dx, dy);
235 fprintf('dt = %.3e s, Nt = %d\n', dt, Nt);
236 fprintf('CFL_adv = U*dt/dx = %.3f\n', Umax*dt/dx);
237 fprintf('CFL_diff = alpha_f*dt/dy^2 = %.3f\n', alpha_f*dt/dy^2);
238
239 % Transverse mixing timescale
240 t_mix_y = H^2/(4*alpha_f);
241 fprintf('t_mix_transverse = H^2/(4*alpha_f) = %.3f s\n', t_mix_y);
242 fprintf('t_mix/t_adv = %.3f (>1 means streamlines stay decorrelated)\n', t_mix_y/tadv);
243
244 % Base system matrix (implicit in time)
245 I = speye(Np);
246 A_base = I + dt*C - dt*alpha_f*Lop;
247
248 %% ===== BOUNDARY INDICES =====
249 bc_in = arrayfun(@(j) idx(1,j), 1:Ny); % inlet nodes
250 bc_bot = arrayfun(@(i) idx(i,1), 1:Nx); % bottom wall nodes
251 bc_top = arrayfun(@(i) idx(i,Ny), 1:Nx); % top wall nodes
252
253 %% ===== OUTPUT STORAGE =====
254 btc_out = nan(Nt+1,1); % breakthrough curve at outlet
255
256 %% ===== MOVIE SETUP =====
257 makeMovie = true;
258 frameEvery = 10;
259 aviName = 'plume_evolution.avi';
260 aviFPS = 10;
261
262 if makeMovie
263     figMovie = figure('Color','w','Position',[50 50 1000 400]);
264     mov = struct('cdata',{},'colormap',{});
265 end
266
267 %% ===== INITIAL CONDITION =====
268 T = T0*ones(Np,1);
269 Tmat = reshape(T,[Nx Ny]);
270 btc_out(1) = trapz(yc, u .* Tmat(Nx,:));
271

```

```

272 %% ===== TIME LOOP =====
273 fprintf('\n=====');
274 fprintf('TIME INTEGRATION\n');
275 fprintf('=====');
276
277 for n = 1:Nt
278
279     % Inlet temperature (time-dependent + spatial profile)
280     if tvec(n) <= t_inj
281         Tin_now_vec = Tin_profile;
282     else
283         Tin_now_vec = T0*ones(Ny,1);
284     end
285
286     %% PREDICTOR STEP %%
287     A = A_base;
288     rhs = T;
289
290     % Inlet BC (Dirichlet, spatially varying)
291     for j=1:Ny
292         p_in = bc_in(j);
293         rhs(p_in) = Tin_now_vec(j);
294         A(p_in,:) = 0;
295         A(p_in, p_in) = 1;
296     end
297
298     % Wall BC (flux coupling with lagged matrix flux)
299     for i=1:Nx
300         % Bottom wall:  $T_1 - T_2 = (dy/k_f) * q_{bot}$ 
301         p1 = bc_bot(i);
302         p2 = idx(i,2);
303         A(p1,:) = 0;
304         A(p1,p1) = 1;
305         A(p1,p2) = -1;
306         rhs(p1) = (dy/k_f) * qbot_x(i);
307
308         % Top wall:  $T_{Ny} - T_{Ny-1} = -(dy/k_f) * q_{top}$ 
309         pN = bc_top(i);
310         pNm = idx(i,Ny-1);
311         A(pN,:) = 0;
312         A(pN,pN) = 1;
313         A(pN,pNm) = -1;
314         rhs(pN) = -(dy/k_f) * qtop_x(i);
315     end
316
317     % Solve predictor
318     T_pred = A\rhs;
319     Tmat_pred = reshape(T_pred,[Nx Ny]);
320

```

```

321 %% UPDATE MATRIX (with predictor wall temperatures) %%
322 Tbot_wall_pred = Tmat_pred(:,1);
323 Ttop_wall_pred = Tmat_pred(:,Ny);
324
325 qbot_x_new = zeros(Nx,1);
326 qtop_x_new = zeros(Nx,1);
327
328 for i=1:Nx
329     alpha_si = alpha_m_x(i);
330     A_m = I_m - dt*alpha_si*Dzz_m;
331
332     % *** BOTTOM MATRIX ***
333     rhsb = Tmb(i,:);
334     % Interface BC: Dirichlet from fluid wall
335     A_m(1,:) = 0;
336     A_m(1,1) = 1;
337     rhsb(1) = Tbot_wall_pred(i);
338     % Far-field BC: NEUMANN dT/dz=0 (semi-infinite)
339     A_m(end,:) = 0;
340     A_m(end,end) = 1;
341     A_m(end,end-1) = -1;
342     rhsb(end) = 0;
343
344     Tb_new = A_m\rhsb;
345
346     % *** TOP MATRIX ***
347     rhst = Tmt(i,:);
348     % Interface BC: Dirichlet from fluid wall
349     A_m(1,:) = 0;
350     A_m(1,1) = 1;
351     rhst(1) = Ttop_wall_pred(i);
352     % Far-field BC: NEUMANN dT/dz=0 (semi-infinite)
353     A_m(end,:) = 0;
354     A_m(end,end) = 1;
355     A_m(end,end-1) = -1;
356     rhst(end) = 0;
357
358     Tt_new = A_m\rhst;
359
360     % Compute interface heat flux into fluid
361     % q = -k * dT/dz, where z points into matrix
362     dTdz_b = (Tb_new(2) - Tb_new(1))/dz_m;
363     dTdz_t = (Tt_new(2) - Tt_new(1))/dz_m;
364
365     % Heat flux LEAVING the fluid (positive when fluid cools)
366     qbot_x_new(i) = +k_s * dTdz_b; % bottom wall
367     qtop_x_new(i) = -k_s * dTdz_t; % top wall
368
369     % Store updated matrix state

```

```

370     Tmb(i,:) = Tb_new';
371     Tmt(i,:) = Tt_new';
372 end
373
374 %% CORRECTOR STEP (Crank-Nicolson-like) %%
375 qbot_x_avg = 0.5*(qbot_x + qbot_x_new);
376 qtop_x_avg = 0.5*(qtop_x + qtop_x_new);
377
378 A = A_base;
379 rhs = T;
380
381 % Inlet BC
382 for j=1:Ny
383     p_in = bc_in(j);
384     rhs(p_in) = Tin_now_vec(j);
385     A(p_in,:) = 0;
386     A(p_in, p_in) = 1;
387 end
388
389 % Wall BC with averaged flux
390 for i=1:Nx
391     p1 = bc_bot(i);
392     p2 = idx(i,2);
393     A(p1,:) = 0;
394     A(p1,p1) = 1;
395     A(p1,p2) = -1;
396     rhs(p1) = (dy/k_f) * qbot_x_avg(i);
397
398     pN = bc_top(i);
399     pNm = idx(i,Ny-1);
400     A(pN,:) = 0;
401     A(pN,pN) = 1;
402     A(pN,pNm) = -1;
403     rhs(pN) = -(dy/k_f) * qtop_x_avg(i);
404 end
405
406 % Solve corrector
407 T = A\rhs;
408 Tmat = reshape(T,[Nx Ny]);
409
410 % Update flux for next timestep
411 qbot_x = qbot_x_new;
412 qtop_x = qtop_x_new;
413
414 % Compute outlet BTC (flux-weighted)
415 btc_out(n+1) = trapz(yc, u .* Tmat(Nx,:))';
416
417 % Movie frame
418 if makeMovie && (mod(n,frameEvery)==0 || n==1 || n==Nt)

```

```

419     figure(figMovie); clf;
420     contourf(xc*1e3, yc*1e3, Tmat', 30, 'LineColor','none');
421     colorbar;
422     axis tight;
423     xlabel('x [mm]');
424     ylabel('y [mm]');
425     title(sprintf('t = %.2f s (%.2f t_{adv})', tvec(n+1), tvec(n+1)/tadv));
426     caxis([T0 T1]);
427     daspect([1 0.2 1]);
428     drawnow;
429     mov(end+1) = getframe(figMovie);
430 end
431
432 % Progress report
433 if mod(n,500)==0 || n==1 || n==Nt
434     fprintf('Step %d/%d, t=%.2f s, T in [%.2f, %.2f] K, <q_bot>=%.2e W/m^2\n', ...
435           n, Nt, tvec(n+1), min(T), max(T), mean(qbot_x));
436 end
437 end
438
439 %% ===== POST-PROCESSING =====
440 fprintf('\n=====');
441 fprintf('POST-PROCESSING\n');
442 fprintf('=====');
443
444 % Subtract background to get excess BTC
445 btc_out_ex = btc_out - Umean*H*T0;
446 btc_out_ex(btc_out_ex < 0) = 0;
447
448 % Compute CCDF
449 [t_ccdf, ccdf_ex, ccdf_ex_norm, A0ex] = ccdf_from_btc(tvec, btc_out_ex);
450
451 Jin = trapz(yc, u .* (Tin_profile - T0)); % excess thermal flux injected
452 theta_out = btc_out_ex / Jin;
453 theta_out = max(theta_out,0);
454
455 fprintf('Total recovered (A0): %.3e J/m\n', A0ex);
456
457 %% ===== POWER-LAW ANALYSIS =====
458 fprintf('\n=====');
459 fprintf('POWER-LAW ANALYSIS\n');
460 fprintf('=====');
461
462 t_start = 2*tadv;
463 t_end = min(tfinal, 0.1*tzmax);
464
465 fprintf('Fitting regime: t in [%.1f, %.1f] s\n', t_start, t_end);
466
467 % Fit BTC

```

```

468 mask_fit = (tvec > t_start) & (tvec < t_end) & (theta_out > 1e-5);
469
470 if sum(mask_fit) > 10
471     p_btc = polyfit(log(tvec(mask_fit)), log(theta_out(mask_fit)), 1);
472     slope_btc = p_btc(1);
473
474     fprintf('\nBTC slope (log-log): %.3f\n', slope_btc);
475     fprintf(' Theory WITH dispersion: -1.5\n');
476     fprintf(' Theory WITHOUT dispersion: -0.5\n');
477
478     if abs(slope_btc + 1.5) < 0.2
479         fprintf(' [MATCH]: Lagrangian dispersion is active!\n');
480     elseif abs(slope_btc + 0.5) < 0.2
481         fprintf(' [NO DISPERSION]: Streamlines still synchronized\n');
482     else
483         fprintf(' [INTERMEDIATE] regime (slope = %.3f)\n', slope_btc);
484     end
485 end
486
487 % Fit CCDF
488 mask_ccdf = (t_ccdf > t_start) & (t_ccdf < t_end) & (ccdf_ex_norm > 1e-5);
489
490 if sum(mask_ccdf) > 10
491     p_ccdf = polyfit(log(t_ccdf(mask_ccdf)), log(ccdf_ex_norm(mask_ccdf)), 1);
492     slope_ccdf = p_ccdf(1);
493
494     fprintf('\nCCDF slope (log-log): %.3f\n', slope_ccdf);
495     fprintf(' Theory: -0.5\n');
496 end
497
498 %% ===== DIAGNOSTIC PLOTS =====
499 fprintf('\n=====');
500 fprintf('GENERATING DIAGNOSTIC PLOTS\n');
501 fprintf('=====');
502
503 figure('Color','w','Position',[100 100 1400 900]);
504
505 % --- BTC log-log ---
506 subplot(2,3,1);
507 mask = (tvec>tadv/2) & (theta_out>1e-6);
508 loglog(tvec(mask), theta_out(mask), 'b-', 'LineWidth', 2.5); hold on;
509
510 t_ref = logspace(log10(max(tadv,1)), log10(tfinal), 100);
511 theta_ref_15 = 0.01*(tadv./t_ref).^1.5;
512 theta_ref_05 = 0.01*(tadv./t_ref).^0.5;
513
514 loglog(t_ref, theta_ref_15, 'r--', 'LineWidth', 2);
515 loglog(t_ref, theta_ref_05, 'g--', 'LineWidth', 2);
516

```

```

517 grid on; box on;
518 xlabel('t [s]', 'FontSize', 12);
519 ylabel('\theta_{out}(t)', 'FontSize', 12);
520 title('Outlet BTC (log-log)', 'FontSize', 13, 'FontWeight', 'bold');
521 legend('Simulation', 't^{-3/2} (with dispersion)', 't^{-1/2} (no dispersion)', ...
522       'Location', 'southwest', 'FontSize', 10);
523 xlim([tadv/2 tfinal]);
524 ylim([1e-6 1]);
525
526 % --- CCDF log-log ---
527 subplot(2,3,2);
528 mask = (t_ccdf > tadv/2) & (ccdf_ex_norm > 1e-6);
529 loglog(t_ccdf(mask), ccdf_ex_norm(mask), 'b-', 'LineWidth', 2.5); hold on;
530
531 ccdf_ref_05 = (tadv./t_ref).^1.5;
532 loglog(t_ref, ccdf_ref_05, 'r--', 'LineWidth', 2);
533
534 grid on; box on;
535 xlabel('t [s]', 'FontSize', 12);
536 ylabel('CCDF_{norm}(t)', 'FontSize', 12);
537 title('CCDF (log-log)', 'FontSize', 13, 'FontWeight', 'bold');
538 legend('Simulation', 't^{-1/2} (theory)', 'Location', 'southwest', 'FontSize', 10);
539 xlim([tadv/2 tfinal]);
540 ylim([1e-4 1]);
541
542 % --- Local slope diagnostic ---
543 subplot(2,3,3);
544 dt_log = diff(log(tvec));
545 dtheta_log = diff(log(max(theta_out, 1e-10)));
546 local_slope = dtheta_log./dt_log;
547 t_mid = exp(0.5*(log(tvec(1:end-1)) + log(tvec(2:end))));
548
549 mask_plot = (t_mid > 2*tadv) & (theta_out(1:end-1) > 1e-6);
550 plot(t_mid(mask_plot), local_slope(mask_plot), 'b-', 'LineWidth', 2); hold on;
551
552 yline(-1.5, 'r--', 'LineWidth', 2.5, 'DisplayName', '-3/2 (with dispersion)');
553 yline(-0.5, 'g--', 'LineWidth', 2.5, 'DisplayName', '-1/2 (no dispersion)');
554
555 grid on; box on;
556 xlabel('t [s]', 'FontSize', 12);
557 ylabel('d(log \theta)/d(log t)', 'FontSize', 12);
558 title('Local Slope Diagnostic', 'FontSize', 13, 'FontWeight', 'bold');
559 legend('Location', 'best', 'FontSize', 10);
560 ylim([-2.5 0]);
561 xlim([2*tadv tfinal]);
562
563 % --- BTC linear scale ---
564 subplot(2,3,4);
565 plot(tvec, theta_out, 'b-', 'LineWidth', 2); hold on;

```

```

566 xline(t_inj, 'r--', 'LineWidth', 1.5, 'DisplayName', 'End injection');
567 xline(tadv, 'g--', 'LineWidth', 1.5, 'DisplayName', 't_{adv}');
568
569 grid on; box on;
570 xlabel('t [s]', 'FontSize', 12);
571 ylabel('\theta_{out}(t)', 'FontSize', 12);
572 title('BTC - Linear Scale', 'FontSize', 13, 'FontWeight', 'bold');
573 legend('Location', 'best', 'FontSize', 10);
574
575 % --- Temperature field snapshot ---
576 subplot(2,3,5);
577 contourf(xc*1e3, yc*1e3, Tmat', 30, 'LineColor','none');
578 colorbar;
579 axis tight;
580 xlabel('x [mm]', 'FontSize', 12);
581 ylabel('y [mm]', 'FontSize', 12);
582 title(sprintf('T(x,y) at t=%.1f s', tvec(end)), 'FontSize', 13, 'FontWeight', 'bold');
583 daspect([1 0.2 1]);
584
585 % --- Outlet temperature profile ---
586 subplot(2,3,6);
587 plot(yc*1e3, Tmat(Nx,:), 'b-', 'LineWidth', 2.5); hold on;
588 plot(yc*1e3, u/max(u)*max(Tmat(Nx,:)), 'r--', 'LineWidth', 1.5);
589
590 grid on; box on;
591 xlabel('y [mm]', 'FontSize', 12);
592 ylabel('T [K]', 'FontSize', 12);
593 title('T(x=L, y) at final time', 'FontSize', 13, 'FontWeight', 'bold');
594 legend('Temperature', 'Velocity (scaled)', 'Location', 'best', 'FontSize', 10);
595
596 % Overall title
597 if TEST_REDUCED_ALPHA_F
598     sgtitle(sprintf('TEST: alpha_f reduced %dx (alpha_f/alpha_m=%.2f) | Pe_H=%.0e', ...
599         ALPHA_F_REDUCTION, alpha_f/alpha_m0, Umax*H/alpha_f), ...
600         'FontSize', 15, 'FontWeight', 'bold');
601 elseif USE_LOCALIZED_INJECTION
602     sgtitle(sprintf('Localized Injection: %s (%.0f%% width) | Pe_H=%.0e', ...
603         INJECTION_TYPE, INJECTION_WIDTH_FRACTION*100, Umax*H/alpha_f), ...
604         'FontSize', 15, 'FontWeight', 'bold');
605 else
606     sgtitle(sprintf('Standard Configuration | Pe_H=%.0e', Umax*H/alpha_f), ...
607         'FontSize', 15, 'FontWeight', 'bold');
608 end
609
610 %% ===== SAVE MOVIE =====
611 if makeMovie && ~isempty(mov)
612     fprintf('\nSaving movie: %s\n', aviName);
613     v = VideoWriter(aviName);
614     v.FrameRate = aviFPS;

```

```

615     open(v);
616     for k=1:numel(mov)
617         writeVideo(v, mov(k));
618     end
619     close(v);
620     fprintf('Movie saved successfully.\n');
621 end
622
623 %% ===== SAVE DATA =====
624 save('fracture_matrix_results.mat', ...
625     'TEST_REDUCED_ALPHA_F', 'ALPHA_F_REDUCTION', 'USE_LOCALIZED_INJECTION', ...
626     'T', 'Nx', 'Ny', 'dx', 'dy', 'H', 'L', 'xc', 'yc', 'dt', 'tfinal', 't_inj', 'tadv', 'tzmax', ...
627     'T0', 'T1', 'alpha_f', 'alpha_f_base', 'alpha_m0', 'alpha_m_x', ...
628     'u', 'Umax', 'Umean', 'tvec', 'btc_out', 'btc_out_ex', 'theta_out', ...
629     't_ccdf', 'ccdf_ex_norm', 'A0ex', 'Tmb', 'Tmt', 'qbot_x', 'qtop_x');
630
631 fprintf('\nResults saved to: fracture_matrix_results.mat\n');
632
633 %% ===== SUMMARY =====
634 fprintf('\n=====');
635 fprintf('SIMULATION COMPLETE\n');
636 fprintf('=====');
637 fprintf('Configuration:\n');
638 if TEST_REDUCED_ALPHA_F
639     fprintf(' alpha_f reduced by factor %d\n', ALPHA_F_REDUCTION);
640     fprintf(' alpha_f/alpha_m = %.3f\n', alpha_f/alpha_m0);
641 end
642 if USE_LOCALIZED_INJECTION
643     fprintf(' Localized injection: %s\n', INJECTION_TYPE);
644 end
645 fprintf('\nDimensionless numbers:\n');
646 fprintf(' Pe_H = %.2e (advection vs diffusion)\n', Umax*H/alpha_f);
647 fprintf(' t_mix/t_adv = %.2f (streamline decorrelation)\n', t_mix_y/tadv);
648 fprintf('\nPower-law results:\n');
649 if exist('slope_btc', 'var')
650     fprintf(' BTC slope = %.3f (theory: -1.5 with dispersion, -0.5 without)\n',
651         slope_btc);
652 end
653 if exist('slope_ccdf', 'var')
654     fprintf(' CCDF slope = %.3f (theory: -0.5)\n', slope_ccdf);
655 end
656 fprintf('=====');
657 %% ===== HELPER FUNCTIONS =====
658
659 function alpha_x = generate_alpha_heterogeneous_1D(x, alpha_mean, alpha_std, lc,
660     alpha_min, seed)
661     % Generate 1D spatially correlated lognormal field
662     if nargin >= 6 && ~isempty(seed)

```

```

662     rng(seed);
663 end
664
665 x = x(:);
666 Nx = numel(x);
667
668 % Lognormal parameters
669 v = alpha_std^2;
670 sigma2_log = log(1 + v/(alpha_mean^2));
671 sigma_log = sqrt(sigma2_log);
672 mu_log = log(alpha_mean) - 0.5*sigma2_log;
673
674 % Exponential correlation matrix
675 R = abs(x - x');
676 C = exp(-R/lc);
677
678 % Cholesky decomposition
679 nugget = 1e-12;
680 Lc = chol(C + nugget*eye(Nx), 'lower');
681
682 % Generate correlated Gaussian field
683 Z = Lc * randn(Nx,1);
684 Z = Z - mean(Z);
685 if std(Z) > 0
686     Z = Z / std(Z);
687 end
688
689 % Transform to lognormal
690 alpha_x = exp(mu_log + sigma_log * Z);
691
692 % Apply minimum threshold
693 if nargin >= 5 && ~isempty(alpha_min)
694     alpha_x = max(alpha_x, alpha_min);
695 end
696 end
697
698 function [t_out, ccdf, ccdf_norm, A0] = ccdf_from_btc(t, btc)
699 % Compute complementary cumulative distribution function from BTC
700 t = t(:);
701 btc = btc(:);
702
703 % Total area under BTC
704 A0 = trapz(t, btc);
705
706 % CDF by integration
707 cdf = cumtrapz(t, btc);
708
709 % CCDF = 1 - CDF (unnormalized: A0 - cdf)
710 ccdf = A0 - cdf;

```

```
711     ccdf(ccdf < 0) = 0;
712
713     % Normalized CCDF
714     if A0 > 0
715         ccdf_norm = ccdf / A0;
716     else
717         ccdf_norm = nan(size(ccdf));
718     end
719
720     t_out = t;
721 end
```

**Listing A.1:** Script principale per la risoluzione del dominio termico accoppiato fluido-matrice.