

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Dipartimento di Fisica e Astronomia "Augusto Righi"
Corso di Laurea in Fisica

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DELLE STRINGHE

Relatore:
Prof. Emanuele Latini

Presentata da:
Sara Montelli

Anno Accademico 2024/2025

Sommario

La seguente tesi introduce la teoria delle stringhe, focalizzandosi sullo studio delle stringhe bosoniche relativistiche. Nel primo capitolo viene analizzata la dinamica della particella puntiforme relativistica: richiamando le basi della relatività ristretta, si studia l'azione della particella e la sua invarianza per riparametrizzazione, che condurrà alle equazioni del moto. Nel secondo capitolo il formalismo viene esteso alla stringa bosonica relativistica. A partire dalla descrizione delle superfici spazio-temporali tracciate dall'evoluzione della stringa, si introduce l'azione di Nambu-Goto e si derivano le equazioni del moto. Viene inoltre presentato il primo dei due gauge trattati: il gauge statico, che porta a un'interpretazione fisica intuitiva della dinamica e delle oscillazioni trasversali della stringa. Il terzo capitolo è dedicato allo studio del gauge cono-luce analizzando i vincoli e le equazioni d'onda derivanti da questa scelta di gauge. Infine vengono introdotti i modi di espansione della stringa che, attraverso un'analogia con la meccanica quantistica, conducono alla definizione degli operatori di creazione e distruzione.

Indice

Introduzione	1
1 Particella puntiforme relativistica	3
1.1 Fondamenti di Relatività Ristretta	3
1.2 Coordinate cono-luce	6
1.3 Azione per una particella puntiforme relativistica	9
1.4 Invarianza per riparametrizzazione	11
1.5 Equazioni del moto	13
2 Stringa relativistica	15
2.1 Funzionale d'area per superfici spaziali	15
2.2 Invarianza dell'area per riparametrizzazione	17
2.3 Funzionale d'area per superfici spazio-temporali	19
2.4 Azione di Nambu-Goto	21
2.5 Equazioni del moto e condizioni al contorno	22
2.6 Gauge statico	24
2.7 Interpretazione fisica dell'azione di Nambu-Goto	25
2.8 Parametrizzazione ortogonale e dinamica della stringa relativistica	27
2.9 Equazione d'onda e vincoli di parametrizzazione	29
3 Stringa relativistica nel gauge cono-luce	31
3.1 Classe di gauge per il parametro τ	31
3.2 Parametrizzazione associata σ	34
3.3 Vincoli e equazioni d'onda	35
3.4 Modi d'espansione	37
3.5 Soluzione cono-luce delle equazioni del moto	39
3.6 Hamiltoniana cono-luce e commutatori	42
3.7 Quantizzazione degli oscillatori della stringa aperta	47
Conclusioni	51

Introduzione

Il XX secolo è stato caratterizzato da due grandi rivoluzioni della fisica teorica: la Relatività Generale e la meccanica quantistica. La prima si propone di studiare l'Universo su larga scala, rivoluzionando lo spazio-tempo in un'entità dinamica e curva. La seconda si avvicina a dimensioni microscopiche. Nonostante gli enormi successi individuali, il tentativo di unificare queste due teorie rappresenta ancora oggi una delle sfide più ardue della fisica moderna. Per comprendere la portata di questa sfida, occorre guardare a come sono descritte le interazioni in natura. Queste possono essere divise in quattro forze fondamentali:

- **Forza elettromagnetica:** descritta classicamente dalle equazioni di Maxwell e quantizzata nell'elettrodinamica quantistica (QED). Si manifesta tra oggetti dotati di carica elettrica e il portatore di tale forza è il fotone;
- **Forza debole:** responsabile dei processi nucleari come il decadimento beta e dei processi che coinvolgono i neutrini. Mediata dai bosoni W^+ , W^- e Z^0 ;
- **Forza forte:** chiamata oggi forza di colore, è la forza responsabile di tenere insieme i quark, ovvero i costituenti dei neutroni e protoni. Descritta dalla cromodinamica quantistica (QCD). I portatori della forza forte sono otto particelle a massa nulla detti gluoni, carichi di colore;
- **Gravità:** conosciuta fin dall'antichità ma descritta per la prima volta da Isaac Newton. Ha subito una profonda riformulazione nella teoria della Relatività Generale di Albert Einstein, in cui le forze gravitazionali emergono dalla curvatura dello spazio-tempo. Quest'ultima, tuttavia, rimane una teoria classica.

Alla fine degli anni '60 la forza elettromagnetica e la forza debole vengono unificate nella teoria elettrodebole. In questa teoria i portatori delle forze sono inizialmente quattro particelle senza massa, tuttavia, tramite un processo di rottura della simmetria i tre mediatori della forza debole diventeranno massivi, mentre l'unica particella a massa nulla rimarrà il fotone. La teoria elettrodebole, insieme alla QCD, costituisce il Modello Standard, che riassume tutte le particelle finora conosciute. Il Modello Standard comprende 60 particelle: dodici bosoni mediatori di forza, tra cui W^+ , W^- , Z^0 , il fotone e otto

gluoni, e 48 particelle di materia, chiamate fermioni. I fermioni si suddividono in dodici leptoni (e^- , μ^- , τ^- , ν_e , ν_μ , ν_τ , con le rispettive antiparticelle) e 36 quark (u , d , c , s , t , b), ciascuno con tre possibili cariche di colore e le rispettive antiparticelle. Questo modello, nonostante la sua eleganza, presenta alcune criticità, tra cui: non integra l'interazione gravitazionale, si basa su circa venti parametri liberi che non possono essere derivati analiticamente all'interno del suo stesso schema teorico e, essendo una teoria quantistica, fatica a trovare una formulazione coerente con la relatività generale che è, invece, una teoria classica.

La teoria delle stringhe, sviluppata originariamente negli anni Sessanta come modello per descrivere l'interazione forte, fu inizialmente superata dalla Cromodinamica Quantistica (QCD), che fornì una descrizione più accurata della fisica adronica. Tuttavia, la teoria è successivamente emersa come candidato per l'unificazione di tutte le interazioni fondamentali, inclusa la gravità, configurandosi quindi come una teoria quantistica gravitazionale. Le stringhe, ovvero gli oggetti fondamentali che costituiscono la teoria, hanno estensione unidimensionale. In questo quadro, ogni particella è identificata come un modo vibrazionale di una stringa elementare microscopica. L'unificazione deriva dal fatto che esiste un unico tipo di stringa da cui emergono tutte le particelle, che sono in questo modo, naturalmente incorporate in un'unica teoria. La teoria delle stringhe presenta inoltre un solo parametro ℓ_s , che fissa la dimensione della scala tipica della stringhe. Un ulteriore aspetto rilevante è che la dimensionalità dello spazio-tempo è fissata: mentre nel Modello Standard l'informazione quadridimensionale è un presupposto necessario alla sua costruzione, qui il numero di dimensioni emerge dalla teoria stessa. Lo spazio non ha più quattro dimensioni, bensì 10. Per stabilire un legame con la realtà macroscopica, si ipotizza che 6 di queste dimensioni siano compatte su una varietà interna, la cui dimensione è abbastanza piccola da non essere ancora stata rilevata. Le stringhe possono presentarsi in due forme: aperte (due estremi) o chiuse (nessun estremo). Una distinzione fondamentale riguarda inoltre la natura delle stringhe stesse:

- **Stringhe bosoniche:** vivono in 26 dimensioni e i loro modi vibrazionali rappresentano solo i bosoni. Siccome mancano i fermioni, queste teorie non sono realistiche ma sono studiate perchè più semplici e utili per spiegare gran parte dei concetti fondamentali;
- **Superstringhe:** vivono in uno spazio a 10 dimensioni e le loro vibrazioni includono sia fermioni che bosoni, legati dalla supersimmetria. In queste teorie il gravitone, ovvero il quanto del campo gravitazionale, emerge specificamente come modo vibrazionale di una stringa chiusa.

Capitolo 1

Particella puntiforme relativistica

1.1 Fondamenti di Relatività Ristretta

Tutti i fenomeni fisici possono essere descritti in un opportuno sistema di riferimento, ovvero un insieme di coordinate spazio-temporali che consentono di rappresentare la posizione e il moto dei corpi. I sistemi di riferimento nei quali è valido il primo principio della dinamica sono detti sistemi inerziali. Nel 1905 Albert Einstein formulò la teoria della relatività ristretta, con l'obiettivo di conciliare le leggi della meccanica newtoniana e quelle dell'elettrodinamica classica nel passaggio tra sistemi di riferimento inerziali. Questa teoria si fonda su due postulati fondamentali:

1. Le leggi della fisica sono identiche in tutti i sistemi di riferimento inerziali.
2. La velocità della luce è la stessa in ogni sistema di riferimento inerziale.

Le trasformazioni compatibili con questi due postulati mettono in relazione due sistemi inerziali K e K' , in moto relativo con velocità v costante lungo l'asse x . Esse sono date da:

$$\begin{cases} t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad (1.1)$$

dove c è la velocità della luce nel vuoto. L'insieme delle coordinate (ct, x, y, z) individua un punto in uno spazio quadridimensionale, detto spazio-tempo di Minkowski, e definisce

il quadrivettore posizione x^μ :

$$(ct, x, y, z) = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (x_0, \vec{x}) = x^\mu. \quad (1.2)$$

La coordinata temporale è scalata con la velocità della luce così che tutte le coordinate abbiano la dimensione di una lunghezza. L'introduzione dei quadrivettori consente di formulare le leggi della fisica in forma manifestamente covariante rispetto alle trasformazioni tra sistemi inerziali che preservano l'intervallo spazio-temporale. Il boost lungo l'asse x (1.1) può essere riscritto in forma matriciale come:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

dove si è posto $\beta \equiv \frac{v}{c}$, $\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

A differenza delle trasformazioni di Galileo, nelle quali il tempo è una grandezza assoluta, le trasformazioni relativistiche tra sistemi inerziali trattano il tempo e le coordinate spaziali in modo analogo, rendendo il tempo una quantità dipendente dal sistema di riferimento scelto. Queste trasformazioni inoltre, lasciano invariate alcune grandezze, dette scalari, che di conseguenza non dipenderanno dal sistema di riferimento utilizzato. In particolare conservano l'intervallo spazio-temporale tra due eventi, il cui quadrato è definito mediante la metrica pseudoeuclidea di Minkowski. Nel seguito si adotta la convenzione di segno $(-, +, +, +)$ per cui la metrica assume la forma:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Il quadrato dell'intervallo spazio-temporale risulta quindi:

$$s^2 = -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = (ct, x, y, z) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad (1.5)$$

dove si è adottata la convenzione di somma sugli indici ripetuti. Tale quantità risulta invariata sotto le trasformazioni lineari dello spazio-tempo considerate:

$$s'^2 = x'^\mu x'_\mu = \eta_{\mu\nu} x'^\nu x'^\mu = \eta_{\mu\nu} L^\mu_\alpha L^\nu_\beta x^\alpha x^\beta = \eta_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = s^2. \quad (1.6)$$

Si possono dunque ricavare alcune condizioni che gli elementi della matrice L dovranno soddisfare affinché questa invarianza sia valida. In particolare:

$$\eta_{\mu\nu}L^\mu_\alpha L^\nu_\beta = (L^T)_{\alpha\mu}\eta_{\mu\nu}L^\nu_\beta = \eta_{\alpha\beta} \quad (1.7)$$

dove è stata introdotta la matrice trasposta L^T ottenuta scambiando le righe con le colonne. Le matrici reali L che soddisfano tale relazione costituiscono il gruppo delle trasformazioni di Lorentz $O(1,3)$, di cui il boost lungo una direzione rappresenta un caso particolare. Prendendo come esempio il boost lungo l'asse x è possibile scrivere in notazione indiciale compatta la relazione (1.3), che assume la forma:

$$x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu \quad (1.8)$$

dove L^μ_ν sono gli elementi della matrice del boost L .

La metrica di Minkowski fornisce il criterio geometrico per classificare gli intervalli spazio-temporali in tre categorie:

- **Intervallo di tipo tempo** ($s^2 < 0$): esiste sempre un sistema di riferimento inerziale in cui i due eventi avvengono nello stesso punto dello spazio ma in istanti diversi. In questo caso gli eventi possono essere connessi causalmente ed è possibile definire un tempo proprio associato alla traiettoria che li collega.
- **Intervallo di tipo luce** ($s^2 = 0$): caratterizza eventi connessi da segnali che si propagano alla velocità della luce nel vuoto.
- **Intervallo di tipo spazio** ($s^2 > 0$): esiste un sistema di riferimento in cui i due eventi sono simultanei ma separati spazialmente. Essi non possono quindi essere connessi causalmente, poiché ciò richiederebbe un segnale con velocità superiore a c .

Dalla classificazione degli intervalli deriva una analoga classificazione anche per i quadrivettori dello spazio-tempo. Infatti un generico quadrivettore A^μ possiede una norma lorentz-invariante

$$A^2 \equiv A^\mu A_\mu = \eta_{\mu\nu}A^\mu A^\nu. \quad (1.9)$$

Il segno di tale norma distingue le tre tipologie di vettori seguendo la stessa convenzione introdotta per gli intervalli spazio-temporali.

Si vogliono poi considerare le grandezze dinamiche associate a una particella relativistica. In relatività ristretta l'energia e il momento tridimensionale di una particella sono definiti rispettivamente come:

$$E = \gamma mc^2, \quad \vec{p} = \gamma m\vec{v}. \quad (1.10)$$

dove m è la massa a riposo. Queste quantità soddisfano la relazione fondamentale di invarianza :

$$\frac{E^2}{c^2} - \vec{p} \cdot \vec{p} = m^2 c^2, \quad (1.11)$$

che rappresenta l'analogo relativistico della conservazione dell'energia cinetica classica ed esprime l'invarianza della massa a riposo. Tale struttura suggerisce l'introduzione del quadrivettore momento (o quadrimomento) p^μ , che unifica energia e quantità di moto in un unico oggetto quadridimensionale:

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) = m\gamma(c, \vec{v}). \quad (1.12)$$

Abbassando l'indice mediante la metrica di Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ si ottengono le componenti covarianti di p_μ :

$$p_\mu = \eta_{\mu\nu} p^\nu = \left(-\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right) = \left(-\frac{E}{c}, \vec{p} \right). \quad (1.13)$$

La norma quadra del quadrimomento, definita dal prodotto scalare $p^2 = p^\mu p_\mu$, risulta essere:

$$p^\mu p_\mu = -(p^0)^2 + \vec{p} \cdot \vec{p} = -\frac{E^2}{c^2} + \vec{p} \cdot \vec{p} = -m^2 c^2, \quad (1.14)$$

dove l'ultima uguaglianza segue direttamente dalla (1.11). Poichè $p^\mu p_\mu$ è una contrazione completa di indici, essa costituisce uno scalare di Lorentz, pertanto il valore $-m^2 c^2$ è identico per ogni osservatore inerziale. Considerando infine un sistema di riferimento K' in moto relativo lungo l'asse x rispetto a K e sfruttando la natura vettoriale di p^μ , è immediato notare che l'energia e il momento seguono le medesime leggi di trasformazione delle coordinate del sistema. Sostituendo $p^0 = \frac{E}{c}$ e $p^1 = p_x$ si ottiene:

$$\frac{E'}{c} = \gamma \left(\frac{E}{c} - \beta p_x \right) \quad p'_x = \gamma \left(p_x - \beta \frac{E}{c} \right). \quad (1.15)$$

1.2 Coordinate cono-luce

Nello studio della teoria delle stringhe relativistiche, risulta estremamente vantaggioso introdurre un sistema di coordinate noto come *coordinate cono-luce*. Tale scelta consente una notevole semplificazione della dinamica e della struttura dei vincoli del sistema. Le due coordinate cono-luce x^+ e x^- sono definite come combinazioni lineari indipendenti della coordinata temporale x^0 e di una coordinata spaziale, convenzionalmente scelta come x^1 .

$$x^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 + x^1), \quad x^- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 - x^1). \quad (1.16)$$

In questo sistema la coppia (x^0, x^1) viene sostituita da (x^+, x^-) , mentre le rimanenti coordinate trasverse rimangono invariate. Il nome di queste coordinate deriva dalla loro interpretazione geometrica, come mostrato in Figura 1.1: gli assi x^+ e x^- coincidono con le linee di universo di segnali luminosi emessi dall'origine lungo l'asse x^1 . Infatti, per un raggio di luce che si propaga verso destra ($x^1 = x^0$) risulta $x^- = 0$, che definisce l'asse x^+ ; viceversa, per un raggio che si propaga verso sinistra ($x^1 = -x^0$) si ha $x^+ = 0$ che definisce l'asse x^- . L'intervallo spazio-temporale invariante ds^2 , espresso coordinate

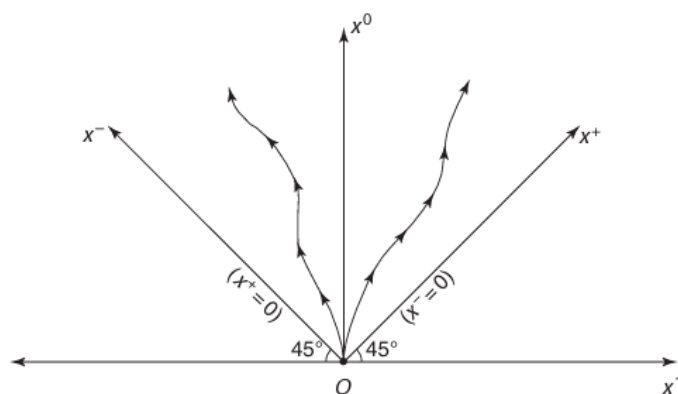


Figura 1.1: Assi cono-luce e linee d'universo di particelle fisiche nel piano (x^0, x^1) . La regione causale è delimitata dalle bisettrici $x^\pm = 0$.

cono-luce, assume una forma particolarmente semplice. A partire dai differenziali delle definizioni (1.16), si ottiene: $2dx^+dx^- = (dx^0)^2 - (dx^1)^2$, da cui segue:

$$-ds^2 = -2dx^+dx^- + (dx^2)^2 + (dx^3)^2. \quad (1.17)$$

Questa espressione introduce un nuovo tensore metrico $\hat{\eta}_{\mu\nu}$, le cui componenti nel sottospazio $(+, -)$ risultano puramente fuori diagonale:

$$\hat{\eta}+- = \hat{\eta}-+ = -1, \quad \hat{\eta}++ = \hat{\eta}-- = 0. \quad (1.18)$$

La matrice associata alla metrica cono-luce è pertanto:

$$\hat{\eta}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Invertendo $\hat{\eta}_{\mu\nu}$ si trova $\hat{\eta}^{\mu\nu}$ che consente di alzare gli indici. Nel formalismo del cono-luce questa matrice mantiene la stessa struttura della metrica con indici bassi.

Le componenti cono-luce di un generico vettore di Lorentz a^μ sono definite, in analogia a (1.16), come:

$$a^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(a^0 + a^1), \quad a^- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(a^0 - a^1). \quad (1.20)$$

Utilizzando queste componenti, il prodotto scalare tra due quadrivettori può essere definito come:

$$a \cdot b = -a^-b^+ - a^+b^- + a^2b^2 + a^3b^3 = \hat{\eta}_{\mu\nu}a^\mu b^\nu. \quad (1.21)$$

Una conseguenza immediata della struttura del nuovo tensore metrico introdotto è la regola per abbassare o innalzare gli indici: le componenti cambiano ruolo con un segno meno, ovvero $a_+ = -a^-$ e $a_- = -a^+$. In questo formalismo, si assume convenzionalmente x^+ come tempo cono-luce, mentre x^- viene trattata come coordinata spaziale. È importante notare che per qualsiasi particella fisica massiva, entrambe le coordinate x^+ e x^- crescono sempre lungo la linea di universo. La velocità nel sistema cono-luce è definita dal rapporto $v_{lc} = \frac{dx^-}{dx^+}$. Per una particella che si muove con velocità β , si ottiene:

$$\frac{dx^-}{dx^+} = \frac{1 - \beta}{1 + \beta}. \quad (1.22)$$

Questa relazione mostra che per un raggio di luce che si propaga verso destra ($\beta = 1$) la velocità cono-luce è nulla (x^- rimane costante), per una particella ferma ($\beta = 0$) la velocità cono-luce è unitaria e per un raggio di luce che si propaga verso sinistra ($\beta = -1$) la velocità cono-luce diverge. Tali risultati non implicano nessuna violazione dei principi della relatività ristretta poichè v_{lc} non rappresenta una velocità fisica misurabile, ma un parametro cinematico associato alla scelta delle coordinate. Per descrivere la dinamica di una particella nel formalismo del cono-luce, è utile introdurre le componenti cono-luce del quadrimomento p^μ :

$$p^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(p^0 + p^1) = -p_-, \quad p^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(p^0 - p^1) = -p_+ \quad (1.23)$$

dove $p^0 = \frac{E}{c}$. Dalla (1.11), considerando $m \neq 0$ si ricava:

$$p^0 = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2c^2} > |p^1| \quad (1.24)$$

da cui segue che sia p^+ che p^- sono strettamente positive e di conseguenza potrebbero essere, in linea di principio, entrambe candidate al ruolo di energia cono-luce. Per chiarire quale sia la scelta fisicamente corretta, consideriamo la funzione d'onda di una particella libera con energia E e quantità di moto \vec{p} :

$$\psi(t, \vec{x}) = \exp \left[-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p} \cdot \vec{x}) \right] \quad (1.25)$$

e tenendo conto del fatto che l'operatore Hamiltoniano misura l'energia e genera l'evoluzione temporale, si può notare che la relazione appena scritta soddisfa l'equazione di Schrodinger:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x^0} = \frac{E}{c} \psi \quad (1.26)$$

In analogia a quanto appena visto, definendo x^+ come la coordinata temporale nel cono-luce, l'energia E_{lc} è la quantità fisica che misura l'evoluzione della particella lungo x^+ e deve soddisfare:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x^+} = \frac{E_{lc}}{c} \psi. \quad (1.27)$$

Per trovare la dipendenza da x^+ della funzione d'onda si può scrivere quest'ultima come:

$$\psi(t, \vec{x}) = \exp \left[\frac{i}{\hbar} (p_0 x^0 + \vec{p} \cdot \vec{x}) \right] = \exp \left(\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu \right) \quad (1.28)$$

Espresso in coordinate cono-luce, il prodotto scalare invariante assume la forma:

$$p_\mu x^\mu = \hat{\eta}^{\mu\nu} p_\mu x_\nu = -p^- x^+ - p^+ x^- + p^2 x^2 + p^3 x^3, \quad (1.29)$$

Oppure analogamente

$$p_\mu x^\mu = p_+ x^+ + p_- x^- + p_2 x^2 + p_3 x^3. \quad (1.30)$$

Sostituendolo nella funzione d'onda e confrontando il risultato con la (1.27), si ottiene:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x^+} = -p_+ \psi \implies -p_+ = \frac{E_{lc}}{c} = p^-. \quad (1.31)$$

Si conclude pertanto che, nel formalismo cono-luce, il generatore dell'evoluzione temporale rispetto alla coordinata x^+ è la componente p^- del quadrimomento, che viene identificata come energia cono-luce.

1.3 Azione per una particella puntiforme relativistica

Lo scopo di questa sezione è descrivere la dinamica relativistica di una particella puntiforme libera, ovvero non soggetta a forze, con massa $m > 0$. Nel formalismo lagrangiano la dinamica di un sistema è determinata dall'azione

$$S = \int_{\mathcal{P}} L(x, \dot{x}, t) dt. \quad (1.32)$$

definita come l'integrale temporale della lagrangiana lungo il cammino \mathcal{P} seguito dal sistema. In questa espressione, x rappresenta il vettore delle coordinate della particella, mentre $\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}$ denota le sue velocità generalizzate, ovvero la rapidità con cui la posizione varia rispetto al parametro temporale t .

Secondo il principio di Hamilton, la traiettoria fisica tra due istanti t_i e t_f è quella che rende l'azione stazionaria. Nel caso non relativistico di una particella libera, la lagrangiana è

$$L_{nr} = \frac{1}{2}m(v(t))^2 \quad (1.33)$$

da cui segue

$$S_{nr} = \int L_{nr} dt = \int \frac{1}{2}mv^2(t)dt, \quad v^2 \equiv \vec{v} \cdot \vec{v}, \quad \vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}, \quad v = |\vec{v}|. \quad (1.34)$$

La condizione $\delta S_{nr} = 0$ conduce all'equazione $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$, che descrive un moto rettilineo uniforme. Tuttavia, questa formulazione non impone alcun limite superiore alla velocità della particella e risulta quindi incompatibile con la relatività ristretta.

Per costruire una teoria relativistica coerente è necessario formulare l'azione in termini di grandezze definite nello spazio-tempo e invarianti di Lorentz. La traiettoria della particella prende il nome di *linea di mondo*, e l'azione deve essere uno scalare di Lorentz affinché le equazioni del moto risultino covarianti. Come discusso nella Sezione 1.1, l'intervallo spazio-temporale ds è uno scalare di Lorentz e permette di classificare le traiettorie in base alla loro natura causale. Per una traiettoria fisica di una particella massiva si ha $ds^2 < 0$, questa condizione deriva da uno dei due principi fondamentali della relatività ristretta, ovvero che le particelle massive non possono raggiungere né superare la velocità della luce. Il tempo proprio associato alla linea di mondo è definito da

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{-ds^2}. \quad (1.35)$$

Poichè tutti gli osservatori inerziali concordano sul valore del tempo proprio associato a una linea di mondo, una scelta naturale per l'azione relativistica di una particella libera è quella di renderla proporzionale al tempo proprio associato. Affinchè sia dimensionalmente coerente è necessario moltiplicare il tempo proprio per un opportuno fattore che restituisca la dimensione dell'azione e che sia a sua volta Lorentz-invariante. Questo fattore è mc^2 ovvero l'energia a riposo della particella. Si può quindi formulare l'azione come

$$S = -mc \int_{\mathcal{P}} ds. \quad (1.36)$$

Il segno meno è necessario affinché l'azione ammetta un minimo e per garantire la corretta corrispondenza con il limite non relativistico. Per ottenere una formulazione lagrangiana standard, è necessario parametrizzare la linea di mondo della particella mediante la coordinata temporale t ed esprimere l'elemento di linea ds in funzione di dt . Partendo dalla definizione di intervallo fornita dalla (1.5) in forma infinitesima:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 + |d\vec{x}|^2 \quad (1.37)$$

si riscrive poi ds raccogliendo il termine temporale:

$$ds = \sqrt{-ds^2} = \sqrt{c^2 dt^2 - |d\vec{x}|^2} = c \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \frac{|d\vec{x}|^2}{dt^2}} dt \quad (1.38)$$

Identificando $\frac{|d\vec{x}|}{dt}$ con la velocità istantanea $v(t)$, otteniamo:

$$ds = c dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (1.39)$$

da cui segue:

$$S = -mc^2 \int_{t_i}^{t_f} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (1.40)$$

dove t_i e t_f sono i valori di tempo rispettivamente del punto iniziale e finale di \mathcal{P} . Da questa espressione si ricava la lagrangiana relativistica per la particella puntiforme:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (1.41)$$

Essa è definita solo per $v < c$, incorporando naturalmente il limite relativistico sulla velocità.

1.4 Invarianza per riparametrizzazione

Nel paragrafo precedente è stata scritta l'azione relativistica di una particella puntiforme come integrale sulla linea di mondo. Per trattare la dinamica in maniera generale è utile introdurre un parametro arbitrario lungo la curva, che permetta di riesprimere l'integrando e dimostrare proprietà generali come l'invarianza per riparametrizzazione. Sia τ un parametro che descrive il moto della particella, strettamente crescente lungo la linea di mondo che ha come estremi x_i^μ e x_f^μ . Di conseguenza τ sarà compreso nell'intervallo $[\tau_i, \tau_f]$. Il motivo della parametrizzazione attraverso τ è poter esprimere le coordinate x^μ come

$$x^\mu = x^\mu(\tau), \quad (1.42)$$

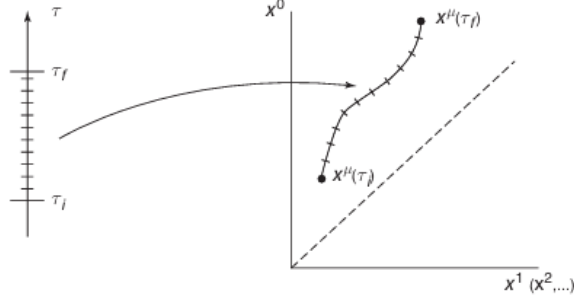


Figura 1.2: *Linea di mondo completamente parametrizzata dal parametro τ . Le coordinate spazio-temporali x^μ sono funzioni di τ .*

come rappresentato graficamente in Figura 1.2. Si richiede inoltre che

$$x_i^\mu = x^\mu(\tau_i), \quad x_f^\mu = x^\mu(\tau_f). \quad (1.43)$$

L'elemento di linea ds può quindi essere riespresso usando questa parametrizzazione. Ricordando che $ds^2 = -\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ si può scrivere:

$$ds^2 = -\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} (d\tau)^2. \quad (1.44)$$

Di conseguenza la (1.36) diventa

$$S = -mc \int_{\tau_i}^{\tau_f} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} d\tau. \quad (1.45)$$

È facile verificare che il valore dell'azione non dipende dal parametro scelto, infatti cambiando τ in τ' e sfruttando la regola della catena si ottiene

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{d\tau'} \frac{d\tau'}{d\tau}. \quad (1.46)$$

che può essere sostituita nella (1.45):

$$S = -mc \int_{\tau_i}^{\tau_f} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau'} \frac{dx^\nu}{d\tau'}} \frac{d\tau'}{d\tau} d\tau = -mc \int_{\tau_i}^{\tau_f} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau'} \frac{dx^\nu}{d\tau'}} d\tau'. \quad (1.47)$$

L'espressione appena ricavata ha la stessa forma di (1.45), dimostrando che S è invariante per riparametrizzazione della linea di mondo. In altre parole, è sempre possibile scegliere un parametro monotono lungo la traiettoria senza modificare il valore dell'azione, rendendo il formalismo completamente covariante.

1.5 Equazioni del moto

Lo scopo di questa sezione è ricavare le equazioni del moto di una particella puntiforme a partire dall'azione Lorentz-invariante. Le equazioni del moto descrivono l'evoluzione dinamica del sistema e si ottengono imponendo che l'azione sia stazionaria rispetto a variazioni infinitesime delle coordinate $x^\mu(\tau)$, in accordo con il principio di minima azione. Allo scopo di ricavarle è quindi necessario valutare la variazione dell'azione che può essere scritta come:

$$\delta S = -mc \int \delta(ds) \quad (1.48)$$

Variando entrambe le parti di (1.44) si trova

$$2ds\delta(ds) = -2\eta_{\mu\nu}\delta\left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\right)\frac{dx^\nu}{d\tau}(d\tau)^2. \quad (1.49)$$

Dove viene aggiunto il fattore moltiplicativo 2 perchè $\frac{dx^\mu}{d\tau}$ e $\frac{dx^\nu}{d\tau}$ compaiono simmetricamente nel prodotto. Poichè la variazione della velocità è uguale alla derivata rispetto al tempo della variazione delle coordinate

$$\delta\left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\right) = \frac{d(\delta x^\mu)}{d\tau}, \quad (1.50)$$

la (1.49) può essere riscritta come

$$\delta(ds) = -\eta_{\mu\nu}\frac{d(\delta x^\mu)}{d\tau}\frac{dx^\nu}{ds}d\tau = -\frac{d(\delta x^\mu)}{d\tau}\frac{dx_\mu}{ds}d\tau. \quad (1.51)$$

Dove la metrica $\eta_{\mu\nu}$ abbassa l'indice di dx^ν . Si può quindi riscrivere la variazione di azione come

$$\delta S = mc \int_{\tau_i}^{\tau_f} \frac{d(\delta x^\mu)}{d\tau} \frac{dx_\mu}{ds} d\tau. \quad (1.52)$$

Dove gli estremi dell'integrale rappresentano i valori assunti dal parametro nei punti iniziali e finali della linea di mondo. Dalla definizione del quadrimpulso

$$mc\frac{dx_\mu}{ds} = mu_\mu = p_\mu \quad (1.53)$$

dove $u_\mu \equiv \frac{dx_\mu}{ds}$ è la quadrivelocità, è possibile trovare la variazione di azione nella forma:

$$\delta S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} \frac{d(\delta x^\mu)}{d\tau} p_\mu d\tau. \quad (1.54)$$

Per far comparire δx^μ moltiplicata da un oggetto sotto l'integrale, si applica l'integrazione per parti:

$$\delta S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} \frac{d}{d\tau} (\delta x^\mu p_\mu) d\tau - \int_{\tau_i}^{\tau_f} \delta x^\mu \frac{dp_\mu}{d\tau} d\tau. \quad (1.55)$$

Il primo termine è un termine di bordo che si annulla poiché $\delta x^\mu(\tau_i) = \delta x^\mu(\tau_f) = 0$. Il secondo integrale deve annullarsi per variazioni arbitrarie $\delta x^\mu(\tau)$, e da ciò segue l'equazione del moto:

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = 0. \quad (1.56)$$

Fisicamente, questa equazione afferma che il quadrimpulso della particella puntiforme è costante lungo la linea di mondo e di conseguenza nel tempo, indipendentemente dalla parametrizzazione scelta. Siccome τ può essere scelto arbitrariamente si introduce il tempo proprio s come parametro della traiettoria della particella. In questo modo la parametrizzazione della linea di mondo diventa indipendente dal sistema di riferimento scelto, semplificando la formulazione delle equazioni del moto. Da ciò segue che la (1.56) si scrive

$$\frac{dp_\mu}{ds} = 0 \quad (1.57)$$

e usando la (1.53) si ottiene una formulazione equivalente dell'equazione del moto:

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = 0. \quad (1.58)$$

Questa equazione implica che la quadrivelocità è costante lungo intervalli uguali di tempo proprio. Se invece si usa un parametro τ arbitrario, la variazione della coordinata tra due valori consecutivi di τ non è necessariamente uniforme, ma l'equazione del moto rimane covariante e indipendente dalla parametrizzazione scelta. Ciò è naturale poiché un parametro arbitrario corrisponde a una suddivisione non uniforme della traiettoria. Come fatto nella sezione precedente si può verificare che anche in questo caso le equazioni del moto sono invarianti sotto trasformazioni di Lorentz. Riprendendo la (1.8) e la proprietà scalare di ds , si verifica immediatamente che

$$0 = \frac{d^2 x'^\mu}{ds^2} = \frac{d^2}{ds^2} (L^\mu{}_\nu x^\nu) = L^\mu{}_\nu \frac{d^2 x^\nu}{ds^2}. \quad (1.59)$$

Siccome L è una matrice invertibile, l'annullarsi della derivata seconda nelle coordinate originali implica automaticamente che si annulli anche nelle coordinate trasformate, garantendo che le equazioni del moto siano covarianti e valide in qualsiasi sistema di riferimento inerziale.

Capitolo 2

Stringa relativistica

2.1 Funzionale d'area per superfici spaziali

Una stringa è un oggetto fisico caratterizzato da una sola estensione spaziale. Postulando questa struttura unidimensionale, molte proprietà del Modello Standard emergono naturalmente. Secondo la Teoria delle Stringhe, infatti, le particelle elementari sono interpretate come differenti modi vibrazionali di una stringa elementare microscopica. Le stringhe possono essere aperte o chiuse: una stringa chiusa non presenta estremi, mentre una stringa aperta è contraddistinta da due punti finali. In questo capitolo si considera una stringa classica relativistica. In analogia con quanto discusso nel capitolo precedente, per la particella puntiforme, l'azione associata a un sistema relativistico deve essere costruita a partire da quantità geometriche invarianti. Nel caso di una particella puntiforme l'oggetto geometrico fondamentale è la linea di mondo tracciata nello spazio-tempo. Per la stringa, che è un oggetto esteso unidimensionale, l'evoluzione temporale non è più descritta da una curva, bensì da una superficie bidimensionale immersa nello spazio-tempo, detta *foglio di mondo*. Ne consegue che l'azione della stringa non può essere un funzionale di una traiettoria, ma deve dipendere dall'intera superficie delineata durante l'evoluzione temporale. Per descrivere matematicamente una superficie bidimensionale è necessario introdurre due parametri indipendenti: ξ^1 e ξ^2 , che etichettano i punti del foglio di mondo. Le curve ottenute mantenendo costante uno dei due parametri definiscono una griglia che ricopre la superficie e fornisce un sistema di coordinate. La superficie fisica è quindi descritta come l'immagine di una mappa che associa a ogni punto dello spazio dei parametri un punto dello spazio fisico, detto *target space* ovvero lo spazio in cui una stringa si muove o vibra:

$$\vec{x}(\xi^1, \xi^2) = (x^1(\xi^1, \xi^2), x^2(\xi^1, \xi^2), x^3(\xi^1, \xi^2)). \quad (2.1)$$

Tale costruzione è illustrata in Figura 2.1. Per costruire l'azione della stringa è necessario esprimere l'elemento infinitesimo di area della superficie in funzione della parametrizza-

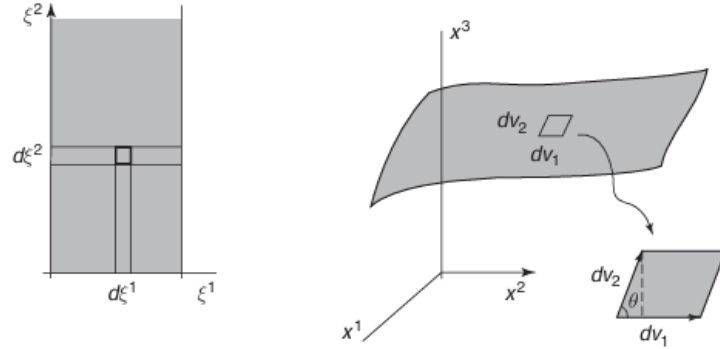


Figura 2.1: *A sinistra: spazio dei parametri (ξ^1, ξ^2) con un elemento infinitesimo sezionato. A destra: superficie immersa nello spazio fisico (target space) e immagine dell'elemento di parametro, che risulta un parallelogramma generato dai vettori $d\vec{v}_1$ e $d\vec{v}_2$.*

zione. Considerando un elemento infinitesimo di superficie dA nello spazio target. I lati che definiscono questa porzione di superficie possono essere identificati con i vettori $d\vec{v}_1$ e $d\vec{v}_2$, definiti come le immagini (tramite la mappa \vec{x}) degli incrementi $(d\xi^1, 0)$ e $(0, d\xi^2)$ nello spazio dei parametri. Questi vettori rappresentano gli spostamenti tangenti alla superficie ottenuti variando un singolo parametro alla volta. In particolare, una variazione infinitesima di ξ^1 (o ξ^2) produce uno spostamento nello spazio fisico proporzionale al proprio differenziale:

$$d\vec{v}_1 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} d\xi^1, \quad d\vec{v}_2 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} d\xi^2. \quad (2.2)$$

L'area infinitesima del parallelogramma generato da questi vettori è quindi data da

$$dA = |d\vec{v}_1| |d\vec{v}_2| |\sin\theta| = |d\vec{v}_1| |d\vec{v}_2| \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{|d\vec{v}_1|^2 |d\vec{v}_2|^2 - |d\vec{v}_1|^2 |d\vec{v}_2|^2 \cos^2\theta}, \quad (2.3)$$

dove θ è l'angolo tra i vettori $d\vec{v}_1$ e $d\vec{v}_2$. Equivalentemente si può scrivere:

$$dA = \sqrt{(d\vec{v}_1 \cdot d\vec{v}_1)(d\vec{v}_2 \cdot d\vec{v}_2) - (d\vec{v}_1 \cdot d\vec{v}_2)^2}. \quad (2.4)$$

Sostituendo le espressioni dei vettori $d\vec{v}_1$ e $d\vec{v}_2$, si ottiene l'espressione generale per l'elemento di area per superficie parametrizzata:

$$dA = d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1}\right) \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2}\right) - \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2}\right)^2} \quad (2.5)$$

Il funzionale d'area associato all'intera superficie risulta infine:

$$A = \int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1}\right) \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2}\right) - \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2}\right)^2} \quad (2.6)$$

dove l'integrazione si estende sugli intervalli rilevanti dei parametri ξ^1 e ξ^2 .

2.2 Invarianza dell'area per riparametrizzazione

Come nel caso del moto relativistico di una particella, è necessario che l'area della superficie sia indipendente dalla scelta della parametrizzazione. In questo modo l'azione risulta proporzionale all'area propria del foglio di mondo e l'invarianza garantisce la libertà di scegliere la parametrizzazione più conveniente per risolvere le equazioni del moto. L'invarianza dell'area sotto riparametrazioni del tipo $\tilde{\xi}^1(\xi^1)$ e $\tilde{\xi}^2(\xi^2)$ segue immediatamente dall'uso della regola della catena nella (2.6). Tuttavia, per una formulazione fisicamente consistente, è necessario verificare l'invarianza per trasformazioni più generali, del tipo $\xi^1(\tilde{\xi}^1, \tilde{\xi}^2)$ e $\xi^2(\tilde{\xi}^1, \tilde{\xi}^2)$. Usando il teorema del cambio di variabile, l'elemento d'area si trasforma come:

$$d\xi^1 d\xi^2 = \left| \det \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial \tilde{\xi}^j} \right) \right| d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2 = |\det M| d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2 \quad (2.7)$$

dove $M = [M_{ij}]$ è la matrice definita dagli $M_{ij} = \frac{\partial \xi^i}{\partial \tilde{\xi}^j}$. In modo analogo si può scrivere:

$$d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2 = \left| \det \left(\frac{\partial \tilde{\xi}^i}{\partial \xi^j} \right) \right| d\xi^1 d\xi^2 = |\det \tilde{M}| d\xi^1 d\xi^2 \quad (2.8)$$

dove $\tilde{M} = [\tilde{M}_{ij}]$ è la matrice definita dagli $\tilde{M}_{ij} = \frac{\partial \tilde{\xi}^i}{\partial \xi^j}$. Dalle due relazioni segue immediatamente:

$$|\det M| |\det \tilde{M}| = 1 \quad (2.9)$$

Si consideri ora una superficie S nello spazio target descritta dalle funzioni che mappano $\vec{x}(\xi^1, \xi^2)$. Per un vettore $d\vec{x}$ tangente alla superficie di lunghezza ds si può scrivere:

$$ds^2 \equiv (ds)^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x}. \quad (2.10)$$

Il vettore $d\vec{x}$ si può esprimere come

$$d\vec{x} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} d\xi^1 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} d\xi^2 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^i} d\xi^i \quad (2.11)$$

Sostituendo l'espressione di $d\vec{x}$ nella definizione di ds^2 , si ottiene

$$ds^2 = \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^i} d\xi^i \right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^j} d\xi^j \right) = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^j} d\xi^i d\xi^j \equiv g_{ij}(\xi) d\xi^i d\xi^j, \quad (2.12)$$

dove

$$g_{ij}(\xi) \equiv \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^j} \quad (2.13)$$

definisce la *metrica indotta* sulla superficie S . In coordinate esplicite, la metrica indotta assume la forma matriciale

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} & \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} & \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Indicando con g il determinante della metrica indotta, il funzionale d'area può essere scritto come

$$A = \int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{g}. \quad (2.15)$$

Piuttosto che verificare direttamente l'invarianza di questa espressione sotto riparametrizzazioni, è più conveniente osservare che l'elemento di linea ds^2 rappresenta una quantità geometrica intrinseca associata al vettore tangente $d\vec{x}$ e, in quanto tale, non può dipendere dalla parametrizzazione. Deve quindi valere:

$$g_{ij}(\xi) d\xi^i d\xi^j = \tilde{g}_{pq}(\tilde{\xi}) d\tilde{\xi}^p d\tilde{\xi}^q \quad (2.16)$$

Utilizzando la regola della catena si ottiene:

$$g_{ij}(\xi) d\xi^i d\xi^j = \tilde{g}_{pq}(\tilde{\xi}) \frac{\partial \tilde{\xi}^p}{\partial \xi^i} \frac{\partial \tilde{\xi}^q}{\partial \xi^j} d\xi^i d\xi^j \quad (2.17)$$

da cui segue

$$g_{ij}(\xi) = \tilde{g}_{pq}(\tilde{\xi}) \frac{\partial \tilde{\xi}^p}{\partial \xi^i} \frac{\partial \tilde{\xi}^q}{\partial \xi^j}. \quad (2.18)$$

Dalla definizione di \tilde{M} la legge di trasformazione della metrica può essere riscritta in forma matriciale come

$$g_{ij}(\xi) = \tilde{g}_{pq} \tilde{M}_{pi} \tilde{M}_{qj} = (\tilde{M}^T)_{ip} \tilde{g}_{pq} \tilde{M}_{qj} \quad (2.19)$$

Passando ai determinanti, si ottiene:

$$g = (\det \tilde{M}^T) \tilde{g} (\det \tilde{M}) = \tilde{g} (\det \tilde{M})^2, \quad (2.20)$$

avendo utilizzato il fatto che $\det(\tilde{M}^T) = \det(\tilde{M})$. Per valutare il funzionale d'area è ora sufficiente prendere la radice quadrata di g e sostituirlo nella (2.15):

$$\int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{g} = \int d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2 |\det M| \sqrt{\tilde{g}} |\det \tilde{M}| = \int d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2 \sqrt{\tilde{g}} \quad (2.21)$$

Il funzionale d'area risulta quindi manifestamente invariante sotto riparametrizzazioni arbitrarie.

2.3 Funzionale d'area per superfici spazio-temporali

In questa sezione si estende lo studio del funzionale d'area dal caso di superfici puramente spaziali al caso relativistico. Per descrivere una superficie bidimensionale nello spazio-tempo è conveniente introdurre due parametri reali, analoghi a ξ^1 e ξ^2 nel caso puramente spaziale, che denotiamo come τ e σ rispettivamente. Essi possono essere interpretati come coordinate sul foglio di mondo: il parametro τ è associato all'evoluzione temporale della stringa, mentre σ parametrizza la posizione lungo la stringa stessa. La configurazione della stringa nello spazio-tempo è quindi descritta da una mappa

$$X^\mu(\tau, \sigma), \quad \mu = 0, 1, \dots, d \quad (2.22)$$

Poichè la stringa evolve nello spazio-tempo, le coordinate $X^\mu(\tau, \sigma)$ sono misurate rispetto alla metrica di Minkowski in $d+1$ dimensioni. Per convenzione, le coordinate della stringa sono indicate con lettere maiuscole per distinguerle dalle coordinate di un punto generico dello spazio-tempo. Un punto (τ, σ) nello spazio dei parametri viene quindi mappato in un punto dello spazio-tempo con coordinate

$$(X^0(\tau, \sigma), X^1(\tau, \sigma), \dots, X^d(\tau, \sigma)). \quad (2.23)$$

Siccome σ parametrizza la posizione lungo la stringa stessa, gli estremi di una stringa aperta corrispondono a due punti la cui linea di mondo ha il parametro σ fissato. Per questo motivo gli estremi si parametrizzano con il variare di τ ovvero con lo scorrere del tempo. Si può quindi scrivere:

$$\left. \frac{\partial X^0}{\partial \tau} \right|_{estremi} \neq 0. \quad (2.24)$$

Si procede in modo analogo a quanto fatto per le superfici spaziali. Un rettangolo infinitesimo di lati $d\tau$ e $d\sigma$ nello spazio dei parametri viene mappato in un quadrilatero

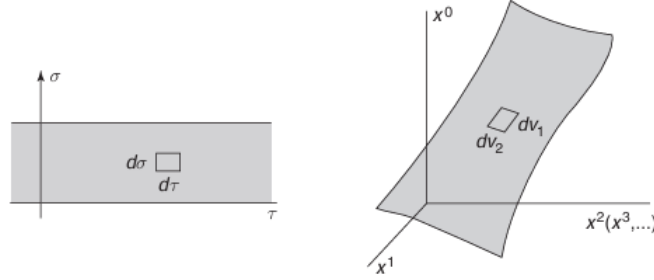


Figura 2.2: A sinistra: spazio dei parametri (τ, σ) , con un quadrato infinitesimo selezionato. A destra: foglio di mondo nello spazio-tempo target, contenente l'immagine del quadrato, un parallelogramma i cui lati sono i vettori dv_1^μ e dv_2^μ .

nello spazio-tempo generato dai vettori

$$dv_1^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} d\tau, \quad dv_2^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} d\sigma \quad (2.25)$$

Tale mappatura è visualizzata in Figura 2.2. In analogia con le superfici spaziali, l'elemento di area dA del foglio di mondo può quindi essere espresso come:

$$dA = \sqrt{-[(dv_1 \cdot dv_1)(dv_2 \cdot dv_2) - (dv_1 \cdot dv_2)^2]} \quad (2.26)$$

dove il prodotto scalare è quello relativistico, garantendo l'invarianza di Lorentz dell'area. Sostituendo le definizioni (2.25) nell'equazione (2.26), il funzionale d'area assume la forma:

$$A = \int d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2}. \quad (2.27)$$

Dove si usa la notazione per il prodotto scalare relativistico. Il segno negativo nella (2.27) è necessario in quanto si richiede che il valore di A sia reale, ovvero che la quantità sotto radice sia non-negativa. Questo garantisce la consistenza fisica del foglio di mondo, infatti, per ogni punto regolare della superficie si può considerare il suo piano tangente bidimensionale, generato da una direzione spaziale e una temporale. La presenza di entrambe le direzioni assicura che ogni punto della stringa sia limitato a velocità inferiori a quelle della luce, evitando configurazioni non fisiche. Per dimostrare quanto detto, si considera l'insieme dei vettori tangenti al foglio di mondo $v^\mu(\lambda)$ in un punto P dato da:

$$v^\mu(\lambda) = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} + \lambda \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \quad (2.28)$$

dove λ è un parametro che può andare da $-\infty$ a $+\infty$. Siccome $\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}$ e $\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}$ sono vettori tangenti linearmente indipendenti, variando il parametro λ si ottengono, a meno di fattori costanti, tutti i vettori tangenti al punto P. È possibile determinare se $v^\mu(\lambda)$ è timelike o spacelike considerando il suo quadrato:

$$v^2(\lambda) = v^\mu(\lambda)v_\mu(\lambda) = \lambda^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma} \right)^2 + 2\lambda \left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma} \right) + \left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \right)^2. \quad (2.29)$$

Per garantire che al punto P esistano sia vettori temporali che spaziali $v^2(\lambda)$ deve assumere sia valori negativi che positivi al variare di λ . In altre parole, l'equazione

$$v^2(\lambda) = 0 \quad (2.30)$$

deve avere due radici reali. Questo avviene solo se il discriminante è positivo, cioè:

$$\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma} \right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma} \right)^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \right)^2 > 0 \quad (2.31)$$

che è esattamente la condizione richiesta per l'elemento di area.

2.4 Azione di Nambu-Goto

L'azione di una stringa relativistica è proporzionale al funzionale d'area del foglio di mondo, introdotto nella sezione precedente. Quest'ultimo ha dimensioni di lunghezza al quadrato, come ci si aspetta. Poichè l'azione S deve avere unità di $[S] = ML^2/T$ è necessario moltiplicare l'area propria del foglio di mondo per una quantità con dimensioni M/T . Una quantità che rispetta questa richiesta è la tensione della stringa divisa per una velocità, ovvero T_0/c . L'azione per la stringa relativistica, che prende il nome di Azione di Nambu-Goto, diventa quindi:

$$S = -\frac{T_0}{c} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2} \quad (2.32)$$

dove si è usata la seguente notazione per le derivate:

$$\dot{X}^\mu \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}, \quad X'^\mu \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}. \quad (2.33)$$

È fondamentale che questa azione sia invariante sotto riparametrazioni dei parametri (τ, σ) . Si può scrivere in forma covariante a vista seguendo quanto fatto nella sezione (2.1). In questo caso si ha:

$$-ds^2 = dX^\mu dX_\mu = \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta. \quad (2.34)$$

dove $\xi^\alpha \equiv (\xi^1, \xi^2) = (\tau, \sigma)$ e $\eta_{\mu\nu}$ è la metrica di Minkowski nello spazio target. Si definisce la metrica indotta sul foglio di mondo $\gamma_{\alpha\beta}$ come

$$\gamma_{\alpha\beta} \equiv \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} = \frac{\partial X}{\partial \xi^\alpha} \cdot \frac{\partial X}{\partial \xi^\beta} \quad (2.35)$$

che scritta esplicitamente nella forma delle matrici 2×2 ha la forma:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 & \frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma} & \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

L'azione di Nambu-Goto può quindi essere riscritta in forma manifestamente invariante:

$$S = -\frac{T_0}{c} \int d\tau d\sigma \sqrt{-\gamma}, \quad \gamma = \det(\gamma_{\alpha\beta}). \quad (2.37)$$

Il segno negativo sotto radice è necessario affinché l'area del foglio di mondo sia reale, garantendo che la direzione temporale sia correttamente considerata nella metrica di Minkowski.

2.5 Equazioni del moto e condizioni al contorno

Una volta ottenuta l'azione di Nambu-Goto è possibile ricavare le equazioni del moto studiando la variazione dell'azione per la stringa. Essendo la stringa un oggetto esteso, l'azione si scrive come integrale doppio della densità di lagrangiana \mathcal{L} :

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau L = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \mathcal{L}(\dot{X}^\mu, X'^\mu) \quad (2.38)$$

dove, confrontando con la (2.32), si ha

$$\mathcal{L}(\dot{X}^\mu, X'^\mu) = -\frac{T_0}{c} \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}. \quad (2.39)$$

Per comodità si definiscono i momenti coniugati alle coordinate della stringa:

$$\mathcal{P}_\mu^\tau \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} \quad \mathcal{P}_\mu^\sigma \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu}. \quad (2.40)$$

Calcolando quindi la variazione δS e riordinando i termini si ottiene:

$$\delta S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[\frac{\partial}{\partial \tau} (\delta X^\mu P_\mu^\tau) + \frac{\partial}{\partial \sigma} (\delta X^\mu P_\mu^\sigma) - \delta X^\mu \left(\frac{\partial P_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial P_\mu^\sigma}{\partial \sigma} \right) \right]. \quad (2.41)$$

Imponendo che le variazioni siano nulle agli estremi, $\delta X^\mu(\tau_i, \sigma) = \delta X^\mu(\tau_f, \sigma) = 0$, i termini di bordo in τ si annullano. Integrando sulle derivate totali in σ , la variazione assume la forma:

$$\delta S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau [\delta X^\mu P_\mu^\sigma] \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=\sigma_1} - \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \delta X^\mu \left(\frac{\partial P_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial P_\mu^\sigma}{\partial \sigma} \right) \quad (2.42)$$

La variazione dell'azione contiene un termine di volume proporzionale a $\delta X^\mu(\tau, \sigma)$, poichè tali variazioni sono arbitrarie all'interno del dominio di integrazione, il principio variazionale impone l'annullamento del coefficiente di δX^μ . Le equazioni del moto per una stringa relativistica (aperta o chiusa) sono quindi:

$$\frac{\partial P_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial P_\mu^\sigma}{\partial \sigma} = 0 \quad (2.43)$$

Quando espressa in termini delle coordinate $X^\mu(\tau, \sigma)$, la sua risoluzione è resa possibile dall'invarianza per riparametrizzazione dell'azione di Nambu-Goto, che consente di scegliere un sistema di coordinate convenienti sul foglio di mondo. Oltre alle equazioni del moto, il principio variazionale impone che il termine di bordo in (2.42) si annulli separatamente per ogni componente μ e per ciascun estremo $\sigma = 0$, $\sigma = \sigma_1$. Nel caso di una stringa aperta questo richiede l'imposizione di opportune condizioni al contorno sugli estremi. Fissato un estremo $\sigma = \sigma_* \in 0, \sigma_1$ esistono due scelte di condizioni al contorno. La prima è la condizione di Dirichlet che descrive un estremo fissato nello spazio:

$$\delta X^\mu(\tau, \sigma_*) = 0, \quad \mu \neq 0 \quad (2.44)$$

Questa equivale a richiedere che la coordinata spaziale dell'estremo rimanga costante nel tempo. Poichè la coordinata temporale varia necessariamente con τ , tale condizione può essere imposta solo sulle direzioni spaziali. La seconda possibilità è la condizione di estremo libero, definita da:

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma(\tau, \sigma_*) = 0 \quad (2.45)$$

in questo caso non viene imposto alcun vincolo sulle variazioni δX^μ all'estremo della stringa che è quindi libero di muoversi nello spazio target. In particolare questa condizione deve valere anche per la coordinata temporale $\mu = 0$:

$$\mathcal{P}_0^\sigma(\tau, 0) = \mathcal{P}_0^\sigma(\tau, \sigma_1) = 0 \quad (2.46)$$

2.6 Gauge statico

Per procedere nello studio della dinamica della stringa relativistica è conveniente fissare una parametrizzazione specifica del foglio di mondo. Questa libertà esiste perchè le coordinate τ e σ sono parametri arbitrari sulla superficie e non corrispondono direttamente a grandezze fisiche misurabili. Di conseguenza è possibile scegliere una parametrizzazione che semplifichi i calcoli senza alterare le proprietà fisiche della stringa. Una scelta particolarmente utile consiste nell'identificare il parametro temporale del foglio di mondo con la coordinata temporale X^0 dello spazio target. Si consideri infatti l'iperpiano $t = t_0$ nello spazio-tempo: esso interseca il foglio di mondo lungo una curva che rappresenta la configurazione istantanea della stringa al tempo t_0 . Si sceglie quindi di etichettare tale curva come una linea di parametro costante $\tau = t_0$. Estendendo questa identificazione a tutti i punti Q del foglio di mondo si ottiene:

$$\tau(Q) = t(Q). \quad (2.47)$$

Questa scelta prende il nome di *gauge statico*: le linee a τ costante descrivono infatti la configurazione spaziale della stringa a tempo fissato nel sistema di riferimento scelto. Tale configurazione è illustrata in Figura 2.3. Per quanto riguarda la coordinata spaziale σ ,

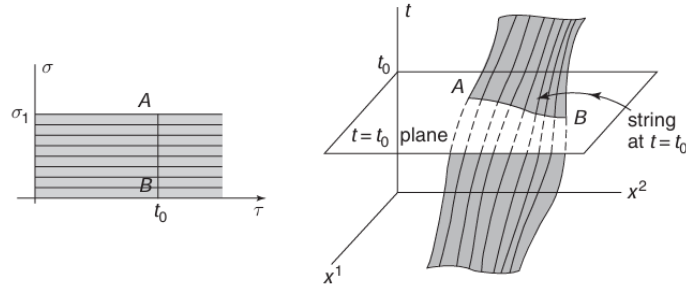


Figura 2.3: *Rappresentazione del gauge statico per una stringa aperta. L'identificazione $\tau = t$ permette di mappare il segmento a parametro costante AB (sinistra) con la configurazione fisica della stringa ottenuta sezionando il foglio di mondo con l'iperpiano a tempo t_0 costante (destra)*

non è necessario imporre una condizione altrettanto restrittiva. Nel caso di una stringa aperta si assume semplicemente che gli estremi corrispondano a valori costanti di σ , ovvero $\sigma \in [0, \sigma_1]$. Le linee a σ costante possono essere tracciate in modo arbitrario purchè siano regolari, non si intersechino e siano compatibili con i bordi del foglio di mondo. Nel gauge statico le coordinate della stringa assumono quindi la forma:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = (ct, \vec{X}(t, \sigma)), \quad t = \tau \quad (2.48)$$

dove \vec{X} denota il vettore delle coordinate spaziali. Le derivate rispetto ai parametri del foglio di mondo si separano naturalmente nelle componenti temporali e spaziali:

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} = \left(\frac{\partial X^0}{\partial \sigma}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right) = \left(0, \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right), \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial t} = \left(\frac{\partial X^0}{\partial t}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right) = \left(c, \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right). \quad (2.50)$$

Questa parametrizzazione rende esplicita la distinzione tra evoluzione temporale e configurazione spaziale della stringa, semplificando in modo significativo l'analisi della dinamica e il calcolo dell'azione.

2.7 Interpretazione fisica dell'azione di Nambu-Goto

Per comprendere il significato fisico dell'azione di Nambu-Goto è utile analizzare il caso di una stringa relativistica in configurazione statica, tesa lungo un asse spaziale (ad esempio x^1) tra due estremi fissati in 0 e a . Nel gauge statico questa configurazione consente di isolare direttamente il contributo energetico associato alla tensione della stringa. Si descrive la forma della stringa tramite una funzione monotona $f(\sigma)$ che assegna a ciascun valore di σ un punto dello spazio. Sotto queste ipotesi la stringa non evolve nel tempo e i vettori tangenti sul foglio di mondo si semplificano notevolmente:

$$\dot{X}^\mu = (c, 0, \dots, 0) \quad X'^\mu = (0, f', 0, \dots, 0) \quad (2.51)$$

L'argomento della radice quadrata nell'azione di Nambu-Goto si riduce quindi a $cf'(\sigma)$. Assumendo $f'(\sigma) > 0$, l'azione diventa

$$S = -\frac{T_0}{c} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left(c \frac{df}{d\sigma} \right). \quad (2.52)$$

Poichè l'integrando in $d\sigma$ è una derivata totale, l'integrale spaziale dipende esclusivamente dai valori agli estremi della stringa:

$$S = -T_0 \int_{t_i}^{t_f} dt [f(\sigma_1) - f(0)] = \int_{t_i}^{t_f} dt (-T_0 a). \quad (2.53)$$

Confrontando con la definizione generale di azione $S = \int L dt$ e ricordando che in un sistema statico $L = -V$, si arriva all'espressione per l'energia potenziale: $V = T_0 a$. Questo risultato chiarisce immediatamente l'interpretazione fisica dei parametri dell'azione:

- Il parametro T_0 dell'azione di Nambu-Goto è la tensione fisica della stringa. Infatti dal risultato appena ricavato $V = T_0 a$, si nota che l'energia della stringa cresce linearmente con la lunghezza e quindi il coefficiente di proporzionalità T_0 rappresenta l'energia per unità di lunghezza, ovvero la definizione fisica della tensione;
- La stringa relativistica non possiede una densità di massa intrinseca dipendente dal suo stato di tensione. La sua massa per unità di lunghezza è $\mu_0 = \frac{T_0}{c^2}$ ed emerge come manifestazione dell'energia necessaria a sostenere l'estensione spaziale della stringa stessa. È dunque una proprietà geometrica perchè dipende esclusivamente dalla lunghezza e dalla tensione;
- Il segno negativo nell'azione di Nambu-Goto è necessario per garantire che l'energia del sistema sia positiva e che la teoria sia fisicamente accettabile.

Si potrebbe tentare di definire la velocità locale della stringa come la derivata parziale delle coordinate spaziali rispetto al tempo. Tuttavia, questa grandezza non ha significato fisico univoco dipendendo dalla scelta arbitraria di σ . L'unica quantità fisicamente significativa è la velocità trasversa v_\perp , definita come la componente del moto perpendicolare alla tangente della stringa. Per definire analiticamente la velocità trasversa è necessario introdurre il parametro s che misura la lunghezza di un tratto di stringa al tempo t fissato. Di conseguenza ds può essere scritto come:

$$ds = |d\vec{X}| = \left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right| |d\sigma|. \quad (2.54)$$

Il vettore $\frac{\partial \vec{X}}{\partial s}$ è unitario per costruzione e tangente alla stringa in ogni punto. La velocità trasversa si ottiene sottraendo dalla velocità totale la sua proiezione lungo la direzione tangente. Quindi:

$$\vec{v}_\perp = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right) \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}. \quad (2.55)$$

Si vuole riscrivere l'azione della stringa in termini di v_\perp . Usando il gauge statico e le (2.50), la radice quadrata nell'azione di Nambu-Goto può essere riscritta come:

$$\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2} = c \frac{ds}{d\sigma} \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}. \quad (2.56)$$

Si può quindi scrivere l'azione della stringa come:

$$S = -T_0 \int dt \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left(\frac{ds}{d\sigma} \right) \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}} \quad (2.57)$$

Questa espressione conferma che solo il moto perpendicolare della stringa contribuisce all'azione, che appare come la generalizzazione dell'azione per la particella puntiforme dove $(T_0 ds)$ è l'energia a riposo infinitesima e $\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}$ è la correzione relativistica. Utilizzando il gauge statico e il parametro s , le densità di momento \mathcal{P}_σ^μ e \mathcal{P}_τ^μ diventano:

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{T_0}{c^2} \frac{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right) \dot{X}^\mu + \left(c^2 - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2\right) \frac{\partial X^\mu}{\partial s}}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \quad (2.58)$$

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{T_0}{c^2} \frac{ds}{d\sigma} \frac{\dot{X}^\mu - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right) \frac{\partial X^\mu}{\partial s}}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}. \quad (2.59)$$

Imponendo che per una stringa aperta \mathcal{P}_σ^μ svanisca agli estremi ($\sigma = 0, \sigma_1$), dalla componente temporale \mathcal{P}_σ^0 segue:

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = 0 \quad (2.60)$$

cioè la velocità agli estremi è sempre ortogonale alla tangente della stringa. Inoltre sostituendo la (2.60) nella (2.58) questa diventa:

$$\vec{\mathcal{P}}^\sigma = -T_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \Big|_{\text{estremi}} = 0 \quad (2.61)$$

Siccome $\frac{\partial \vec{X}}{\partial s}$ è un vettore unitario si conclude che $v^2 = c^2$ ovvero gli estremi di una stringa aperta libera si muovono necessariamente alla velocità della luce.

2.8 Parametrizzazione ortogonale e dinamica della stringa relativistica

Fissato il gauge statico, rimane ancora la libertà di scegliere la coordinata spaziale σ in modo che semplifichi l'analisi della dinamica. L'obiettivo è costruire una parametrizzazione in cui le linee a σ costante risultino sempre ortogonali alla configurazione istantanea della stringa.

Si consideri una parametrizzazione arbitraria della stringa all'istante iniziale $t = 0$, ad esempio $\sigma \in [0, \sigma_1]$. Dal profilo della stringa si tracciano, sul foglio di mondo, segmenti ortogonali alla curva. Si osserva dove tali segmenti intersecano la stringa ad un istante

di tempo successivo $t = \epsilon$ e si assegna a ciascun punto di intersezione lo stesso valore di σ del punto di partenza. Iterando questo procedimento per tutti i punti della stringa e per tutti i tempi successivi a $t = 0$, si ottiene una coordinata σ definita globalmente sul foglio di mondo. Con questa costruzione i vettori tangenti $\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}$, posti sulla stringa a tempo fissato, risultano ortogonali ai vettori $\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}$, tangenti alle linee a σ costante. Geometricamente questa condizione si traduce in:

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = 0. \quad (2.62)$$

Questa scelta implica che la velocità in un punto σ non possiede componenti tangenziali alla stringa: la velocità fisica coincide interamente con la velocità trasversa $v_{\perp} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}$. Nel paragrafo precedente è stato introdotto il parametro s come lunghezza propria di un tratto di stringa a t fissato. Poichè il vettore tangente rispetto a s è proporzionale a quello rispetto a σ , la (2.62) implica anche

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = 0. \quad (2.63)$$

Questo permette di semplificare le (2.58) e (2.59) e ottenere:

$$P^{\tau\mu} = \frac{T_0}{c^2} \frac{\frac{ds}{d\sigma}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}} \frac{\partial X^{\mu}}{\partial t} \quad P^{\sigma\mu} = -T_0 \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}} \frac{\partial X^{\mu}}{\partial s}. \quad (2.64)$$

Da qui segue che

$$\mathcal{P}^{\sigma 0} = 0, \quad (2.65)$$

mentre

$$\mathcal{P}^{\tau 0} = \frac{T_0}{c} \frac{\frac{ds}{d\sigma}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}}. \quad (2.66)$$

Riprendendo l'equazione del moto per una stringa relativistica (2.43) nel gauge statico si ha:

$$\frac{\partial \mathcal{P}^{\tau\mu}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{P}^{\mu\sigma}}{\partial \sigma}. \quad (2.67)$$

Unendo queste informazioni si ottiene la seguente equazione:

$$\frac{\partial P^{\tau 0}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{T_0 \frac{ds}{d\sigma}}{c \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}} \right) = 0. \quad (2.68)$$

In questa espressione si possono riconoscere chiaramente le diverse componenti della dinamica relativistica: il termine $T_0 ds$ rappresenta l'energia a riposo del segmento di

stringa, mentre il fattore relativistico tiene conto dell'aumento dell'energia dovuta al moto. Il prodotto di questi due contributi fornisce quindi l'energia relativistica totale associata al tratto di stringa. L'equazione ottenuta esprime quindi un principio di conservazione locale dell'energia: sebbene la stringa possa deformarsi variando la lunghezza ds del segmento $d\sigma$, il sistema evolve in modo che l'energia contenuta in ogni segmento resti costante. Ne segue che non vi è flusso di energia lungo la stringa, ossia non avviene scambio energetico tra porzioni diverse.

La conservazione dell'energia determina anche la dinamica spaziale della stringa. Confrontando l'equazione del moto relativistica con quella di una stringa classica, emerge che la stringa relativistica può essere interpretata come un sistema dotato di una tensione e di una densità di massa dipendenti dallo stato di moto locale. In particolare, l'equazione del moto può essere riscritta in forma analoga a quella classica introducendo una tensione efficace T_{eff} e una densità di massa efficace μ_{eff} definite come segue:

$$T_{eff} = T_0 \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}, \quad \mu_{eff} = \frac{T_0}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}}. \quad (2.69)$$

La densità di massa efficace μ_{eff} coincide con l'energia del segmento per unità di lunghezza, mentre la tensione efficace diminuisce all'aumentare della velocità trasversa. Questa interpretazione chiarisce anche il comportamento degli estremi di una stringa aperta: affinché sia valida la condizione di estremo libero, la tensione fisica deve annullarsi agli estremi, questo è vero solo nel caso in cui $v_{\perp} = c$. In questo limite la densità di massa diverge localmente ma l'energia totale del segmento rimane finita, garantendo la coerenza fisica del sistema.

2.9 Equazione d'onda e vincoli di parametrizzazione

Nonostante la parametrizzazione ortogonale appena introdotta, l'equazione del moto risulta ancora piuttosto complessa. Rimane tuttavia una libertà residua nella scelta della coordinata spaziale σ lungo le linee ortogonali alla stringa. Una scelta fisicamente privilegiata consiste nel fissare la coordinata σ in modo che intervalli uguali di σ corrispondano a uguali quantità di energia. In altre parole, si utilizza l'energia come coordinata lungo la stringa. A tal fine si introduce la quantità

$$A(\sigma) \equiv \frac{\frac{ds}{d\sigma}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}}, \quad (2.70)$$

che risulta indipendente dal tempo. È quindi possibile scegliere la parametrizzazione in modo che $A(\sigma) = 1$ ovunque. In questo caso, l'equazione del moto assume una forma

particolarmente semplice:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial \sigma^2}, \quad (2.71)$$

ossia la consueta equazione delle onde unidimensionali. La condizione $A(\sigma) = 1$ implica inoltre

$$d\sigma = \frac{ds}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}} = \frac{1}{T_0} dE, \quad (2.72)$$

da cui segue che la densità di energia lungo la stringa è costante e pari alla tensione T_0 . Integrando lungo la stringa si ottiene che l'estensione del dominio di σ è fissata dall'energia totale: $\sigma \in [0, \sigma_1]$, $\sigma_1 = \frac{E}{T_0}$. Questa scelta di parametrizzazione è compatibile con la condizione di ortogonalità tra le linee a $t = \text{costante}$ e $\sigma = \text{costante}$, e si traduce nei seguenti vincoli sulle coordinate della stringa nello spazio-tempo:

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} = 0 \quad \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 = 1. \quad (2.73)$$

Tali relazioni costituiscono i vincoli di parametrizzazione che accompagnano l'equazione d'onda. Infine per una stringa aperta con estremi liberi, la condizione al bordo segue dall'annullarsi del flusso di quantità di moto attraverso gli estremi. Considerando le componenti spaziali \vec{P}^σ della (2.64) otteniamo:

$$P_\sigma = -T_0 \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}} \frac{d\sigma}{ds} \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} = -T_0 \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \quad (2.74)$$

da cui segue la condizione di Neumann:

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} = 0. \quad (2.75)$$

In conclusione, il moto di una stringa relativistica aperta è completamente determinato dalla soluzione delle quattro equazioni che seguono:

$$\text{equazione d'onda: } \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial \sigma^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} = 0, \quad (2.76)$$

$$\text{condizione di parametrizzazione: } \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} = 0, \quad (2.77)$$

$$\text{condizione di parametrizzazione: } \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 = 1, \quad (2.78)$$

$$\text{condizione al contorno: } \left. \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=0} = \left. \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=\sigma_1} = 0. \quad (2.79)$$

Capitolo 3

Stringa relativistica nel gauge cono-luce

3.1 Classe di gauge per il parametro τ

In questo capitolo si introduce una classe più generale di condizioni di gauge per la parametrizzazione del foglio di mondo della stringa relativistica. L'obiettivo è individuare una scelta che, pur saturando completamente la libertà di riparametrizzazione, conduca a equazioni del moto più semplici rispetto a quelle ottenute nel gauge statico. Sebbene il gauge statico, analizzato nel capitolo precedente, offra un'interpretazione fisica immediata identificando τ con il tempo coordinato X^0 , esso presenta limiti significativi nella risoluzione delle equazioni del moto. In tale gauge infatti le (2.76) hanno vincoli non lineari, ovvero le (2.77) e (2.78), che rendono molto difficile trovare una soluzione universale.

Per superare queste difficoltà è utile considerare una classe più generale di condizioni di gauge che legano il parametro temporale τ a una combinazione lineare delle coordinate spazio-temporali della stringa. Introducendo un vettore costante n^μ e una costante di proporzionalità λ , si impone la relazione:

$$n_\mu X^\mu(\tau, \sigma) = \lambda\tau. \quad (3.1)$$

Si osserva che la scelta $n^\mu = (1, 0, \dots, 0)$ e $\lambda = c$ permette di recuperare il caso particolare del gauge statico. Dal punto di vista geometrico, la condizione appena scritta implica che, per ogni valore fissato di τ , l'espressione

$$n_\mu x^\mu = \lambda\tau \quad (3.2)$$

descrive un iperpiano nello spazio di Minkowski, orientato secondo il vettore normale n^μ . La stringa fisica a un dato istante τ non è altro che la curva ottenuta dall'intersezione

tra il foglio di mondo e tale iperpiano, come si vede in Figura 3.1. Poichè n^μ è per

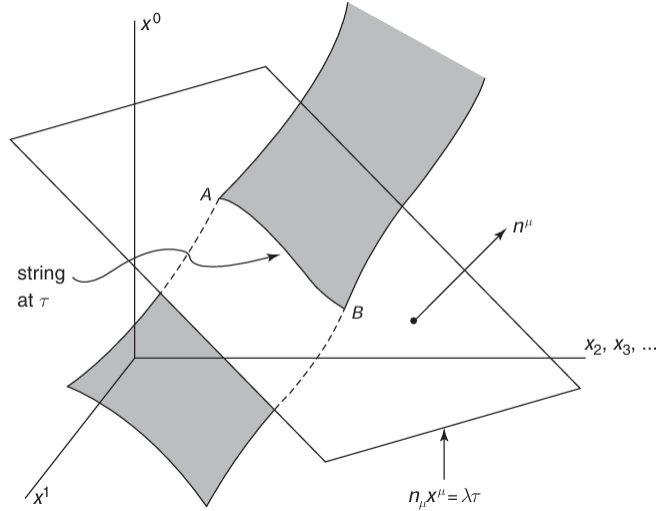


Figura 3.1: *Rappresentazione geometrica della condizione di gauge $n \cdot X = \lambda\tau$. La stringa a un tempo τ fissato è definita dall'intersezione tra il foglio di mondo e l'iperpiano ortogonale al vettore n^μ .*

definizione il vettore normale all'iperpiano ne consegue che ogni vettore tangente alla stringa (ovvero ogni spostamento a τ costante) risulti ortogonale a n^μ . Affinchè la teoria abbia significato fisico si richiede che l'intervallo ΔX^μ tra due punti qualsiasi sulla stringa sia di tipo spazio o al limite di tipo luce. Questo vincolo è sempre verificato se nel gauge (3.1) il vettore n^μ è di tipo tempo. Per dimostrare tale proprietà, si considera che nel gauge in analisi ogni intervallo ΔX^μ lungo la stringa deve soddisfare la condizione di ortogonalità

$$n_\mu \Delta X^\mu = 0. \quad (3.3)$$

Poichè questa condizione è Lorentz invariante è possibile analizzarla in un sistema di riferimento in cui l'unica componente non nulla del vettore n^μ è quella temporale (vettore di tipo tempo). In tale sistema, la relazione precedente si riduce a $n_0 \Delta X^0 = 0$, il che impone che l'intervallo non abbia nessuna componente temporale e quindi che per definizione sia un vettore di tipo spazio. Nel caso limite in cui n^μ sia di tipo luce si può analogamente dimostrare che la condizione $n_\mu \Delta X^\mu = 0$ implica che ΔX^μ sia generalmente di tipo spazio o al più di tipo luce.

Una volta stabilita la natura spaziale della stringa attraverso la scelta del gauge, è fondamentale definirne le quantità fisiche conservate. Come discusso nel Capitolo 2, l'azione di Nambu-Goto dipende dalle coordinate $X^\mu(\tau, \sigma)$ e dalle loro derivate, risultando invariata

sotto traslazioni globali nello spazio-tempo. In virtù del teorema di Noether, a questa simmetria corrisponde l'esistenza di una corrente conservata sul foglio di mondo. La densità di momento è definita nella (2.40) e integrando $\mathcal{P}^{\tau\mu}$ lungo la coordinata spaziale della stringa σ si ottiene il momento totale p^μ .

$$p^\mu(\tau) = \int_0^{\sigma_1} \mathcal{P}^{\tau\mu}(\tau, \sigma) d\sigma. \quad (3.4)$$

Si verifica facilmente che p^μ è indipendente dal tempo τ . Infatti, derivando rispetto a τ , utilizzando la (2.43) e le condizioni di estremo libero (2.45) si ottiene:

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \int_0^{\sigma_1} \frac{\partial \mathcal{P}^{\tau\mu}}{\partial \tau} d\sigma = - \int_0^{\sigma_1} \frac{\partial \mathcal{P}^{\sigma\mu}}{\partial \sigma} d\sigma = - [\mathcal{P}^{\sigma\mu}]_0^{\sigma_1} = 0. \quad (3.5)$$

Questa quantità rappresenta l'impulso totale trasportato dalla stringa nel suo moto nello spazio-tempo ed è una quantità conservata del sistema.

Per semplificare la gestione delle dimensioni fisiche, i parametri del foglio di mondo τ e σ verranno considerati adimensionali. Per stringhe aperte con estremi liberi la conservazione del quadrimpulso appena vista nella (3.5) permette di riscrivere la condizione di gauge come

$$n_\mu X^\mu(\tau, \sigma) = \tilde{\lambda}(n_\mu p^\mu)\tau \quad (3.6)$$

dove n^μ è un vettore costante scelto in modo che la componente $n_\mu p^\mu$ del quadrimpulso totale sia conservata. Ciò è garantito imponendo condizioni al bordo tali che il flusso di quantità di moto lungo la direzione n^μ sia nullo, ossia

$$n_\mu \mathcal{P}^{\sigma\mu} = 0 \quad (3.7)$$

agli estremi della stringa. Dato che n^μ compare su entrambi i lati della (3.6), conta solo la sua direzione. Dall'analisi dimensionale segue che $\tilde{\lambda}$ ha dimensioni di velocità diviso forza ed è quindi naturale esprimerla come $\tilde{\lambda} \sim c/T_0$. É spesso conveniente sostituire la tensione della stringa con un parametro equivalente, noto come *parametro di pendenza*. Esso è definito come

$$\alpha' = \frac{1}{2\pi T_0 \hbar c}. \quad (3.8)$$

Fisicamente α' compare nella relazione che lega il momento angolare di una stringa aperta rigida in rotazione al quadrato della sua energia, con α' come costante di proporzionalità. In questo modo, il parametro di pendenza non solo fornisce un legame tra quantità dinamiche come energia e momento angolare, ma determina anche le dimensioni spaziali della stringa stessa.

Utilizzando quindi (3.8) è possibile scrivere

$$\tilde{\lambda} \sim c/T_0 = 2\pi\hbar c^2\alpha'. \quad (3.9)$$

Si adottano infine unità naturali ($\hbar = c = 1$) in modo tale che il parametro α' abbia dimensioni di una lunghezza al quadrato coerentemente con quanto discusso in precedenza. α' definisce quindi la scala di lunghezza caratteristica della teoria delle stringhe: la lunghezza tipica della stringa ℓ_s è proporzionale a $\sqrt{\alpha'}$. Per comodità si sceglie quindi $\tilde{\lambda} = 2\alpha'$, in modo che la condizione di gauge risulti direttamente proporzionale alla lunghezza caratteristica della stringa. La forma finale del gauge per stringhe aperte che fissa la parametrizzazione di τ sul foglio di mondo è quindi:

$$n_\mu X^\mu(\tau, \sigma) = 2\alpha'(n_\mu p^\mu)\tau. \quad (3.10)$$

3.2 Parametrizzazione associata σ

Una volta fissata la parametrizzazione temporale τ , è necessario determinare la corrispondente parametrizzazione spaziale σ . Nel gauge statico, σ era scelto in modo che la densità di energia lungo la stringa fosse costante. Nel caso più generale che prevede l'arbitrarietà di n^μ si richiede la costanza di $n_\mu \mathcal{P}^{\tau\mu}$ lungo la stringa e un range di parametrizzazione $\sigma \in [0, \pi]$ per le stringhe aperte. Per verificare che ciò sia possibile, consideriamo come $\mathcal{P}^{\tau\mu}(\tau, \sigma)$ si trasforma sotto una ridefinizione di σ . Dato un parametro iniziale $\tilde{\sigma}$, la densità di momento si trasforma come

$$\mathcal{P}^{\tau\mu}(\tau, \sigma) = \frac{d\tilde{\sigma}}{d\sigma} \mathcal{P}^{\tau\mu}(\tau, \tilde{\sigma}) \quad \Rightarrow \quad n_\mu \mathcal{P}^{\tau\mu}(\tau, \sigma) = \frac{d\tilde{\sigma}}{d\sigma} n_\mu \mathcal{P}^{\tau\mu}(\tau, \tilde{\sigma}). \quad (3.11)$$

Se la parametrizzazione iniziale $\tilde{\sigma}$ è tale che $n_\mu \mathcal{P}^{\tau\mu}(\tau, \tilde{\sigma})$ dipende da $\tilde{\sigma}$, è possibile ridefinire σ scegliendo opportunamente $\frac{d\tilde{\sigma}}{d\sigma}$ in modo da ottenere una quantità costante lungo la stringa. Inoltre è possibile scalare σ per un valore costante $\sigma \rightarrow b\sigma$ in modo da fissare l'intervallo standard $[0, \pi]$ senza alterare la costanza di $n_\mu \mathcal{P}^{\tau\mu}$. Nella parametrizzazione finale otteniamo quindi

$$n_\mu \mathcal{P}^{\tau\mu}(\tau, \sigma) = a(\tau), \quad (3.12)$$

dove $a(\tau)$ è una funzione di τ . Integrando lungo la stringa si ha

$$\int_0^\pi d\sigma n_\mu \mathcal{P}^{\tau\mu}(\tau, \sigma) = n_\mu p^\mu = \pi a(\tau) \quad \Rightarrow \quad a(\tau) = \frac{n_\mu p^\mu}{\pi}. \quad (3.13)$$

Poichè $n_\mu p^\mu$ è conservato, $a(\tau)$ non dipende dal tempo. In conclusione, la quantità $n_\mu \mathcal{P}^{\tau\mu}$ risulta costante lungo la stringa e nel tempo, costituendo una quantità conservata sul

foglio di mondo di una stringa aperta. Per le stringhe aperte, l'equazione del moto (2.43) proiettata lungo n^μ diventa

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (n_\mu \mathcal{P}^{\tau\mu}) + \frac{\partial}{\partial \sigma} (n_\mu \mathcal{P}^{\sigma\mu}) = 0. \quad (3.14)$$

Poichè nella parametrizzazione scelta $n_\mu \mathcal{P}^{\tau\mu}$ è costante nel tempo, il primo termine si annulla e rimane

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} (n_\mu \mathcal{P}^{\sigma\mu}) = 0. \quad (3.15)$$

Questo implica che $n_\mu \mathcal{P}^{\sigma\mu}$ non dipende da σ . Si possono quindi imporre le condizioni al bordo $n_\mu \mathcal{P}^{\sigma\mu} = 0$ agli estremi della stringa. In questo modo la conservazione del quadrimpulso totale proiettato lungo n^μ è automaticamente soddisfatta. La definizione delle parametrizzazioni per le stringhe aperte si completa con le seguenti equazioni fondamentali:

$$\begin{aligned} n_\mu X^\mu(\tau, \sigma) &= 2\alpha' (n_\mu p^\mu) \tau, \\ n_\mu p^\mu &= \pi n_\mu \mathcal{P}^{\tau\mu}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Tali condizioni fissano in maniera univoca la parametrizzazione τ e σ della stringa aperta.

3.3 Vincoli e equazioni d'onda

Per analizzare le conseguenze dinamiche della scelta di gauge, è necessario riprendere le espressioni esplicite per le densità di momento $\mathcal{P}^{\tau\mu}$ e $\mathcal{P}^{\sigma\mu}$. Come ricavato nel Capitolo 2 dalle variazioni dell'azione di Nambu-Goto (si vedano le definizioni (2.40)), i momenti coniugati assumono la forma:

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X') X'^\mu - (X'^2) \dot{X}^\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(\dot{X} \cdot X') X'^\mu - (X'^2) \dot{X}^\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}} \quad (3.17)$$

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X') \dot{X}^\mu - (\dot{X}^2) X'^\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(\dot{X} \cdot X') \dot{X}^\mu - (\dot{X}^2) X'^\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}} \quad (3.18)$$

Imponendo le condizioni di gauge (3.6) e richiedendo la costanza di $n_\mu \mathcal{P}^{\tau\mu}$, si proietta la (3.18) lungo il vettore costante n^μ

$$n_\mu \mathcal{P}^{\sigma\mu} = \frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X') (n_\mu \dot{X}^\mu) - (\dot{X}^2) (n_\mu X'^\mu)}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}}. \quad (3.19)$$

Dalla condizione di gauge (3.6) è noto che $n_\mu X^\mu$ dipende solo da τ , il che implica $n_\mu X'^\mu = 0$. Inoltre $\partial_\tau (n_\mu X^\mu)$ è una costante non nulla. Di conseguenza affinché la condizione al

bordo per le stringhe aperte (3.7) sia soddisfatta, il numeratore deve annullarsi, portando al primo vincolo:

$$\dot{X} \cdot X' = 0. \quad (3.20)$$

Sostituendo tale risultato nelle (3.17) e (3.18), si ottiene

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{X'^2 \dot{X}^\mu}{\sqrt{-\dot{X}^2 X'^2}}, \quad (3.21)$$

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{\dot{X}^2 X'^\mu}{\sqrt{-\dot{X}^2 X'^2}}. \quad (3.22)$$

Si può notare che derivando la prima delle equazioni (3.16) rispetto alla derivata temporale si ottiene $n_\mu \dot{X}^\mu = 2\alpha'(n_\mu p^\mu)$. Di conseguenza sostituendo la (3.21) nella seconda delle equazioni (3.16) si ricava il secondo vincolo della parametrizzazione:

$$1 = \frac{X'^2}{\sqrt{-\dot{X}^2 X'^2}} \Rightarrow \dot{X}^2 + X'^2 = 0. \quad (3.23)$$

Le due relazioni (3.20), (3.23) possono essere unite nella seguente forma compatta:

$$(\dot{X} \pm X')^2 = 0. \quad (3.24)$$

Sotto queste condizioni si semplifica notevolmente la forma delle (3.21) e (3.22) che possono essere riscritte come

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu, \quad (3.25)$$

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} X'^\mu. \quad (3.26)$$

Le densità di momento sono proporzionali alle derivate delle coordinate. Sostituendo queste ultime equazioni nell'equazione del moto (2.43) si ricava

$$\ddot{X}^\mu - X''^\mu = 0. \quad (3.27)$$

In conclusione, la scelta del gauge ha permesso di linearizzare le equazioni del moto della stringa, inizialmente non lineari. Questo dimostra che ogni coordinata dello spazio-tempo evolve indipendentemente come un'onda che si propaga sul foglio di mondo.

3.4 Modi d'espansione

L'obiettivo di questa sezione è risolvere l'equazione del moto (3.27) per stringhe aperte con estremi liberi. La soluzione più generale per un'equazione d'onda è la somma di due onde indipendenti, ovvero

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2}[f^\mu(\tau, \sigma) + g^\mu(\tau, \sigma)], \quad (3.28)$$

con f^μ e g^μ funzioni arbitrarie. Imponendo la condizione di estremo libero (2.45), che richiede l'annullamento della (3.26) si ricavano le condizioni al contorno di Neumann

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} = 0, \quad \text{per } \sigma = 0, \pi. \quad (3.29)$$

Nel caso $\sigma = 0$ si ottiene

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}(\tau, 0) = \frac{1}{2}(f'^\mu(\tau) - g'^\mu(\tau)) = 0. \quad (3.30)$$

Ciò implica che le derivate delle due funzioni possono differire solo per una costante c^μ tale che $g^\mu = f^\mu + c^\mu$. Questa costante può essere assorbita in f^μ , quindi la (3.28) diventa

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2}[f^\mu(\tau + \sigma) + f^\mu(\tau - \sigma)]. \quad (3.31)$$

Nel caso $\sigma = \pi$ si ottiene

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}(\tau, \pi) = \frac{1}{2}(f'^\mu(\tau + \pi) - g'^\mu(\tau + \pi)) = 0. \quad (3.32)$$

Affinchè questa uguaglianza valga per qualsiasi valore di τ , la funzione f'^μ deve essere periodica di periodo 2π . Può quindi essere rappresentata attraverso la seguente serie di Fourier:

$$f'^\mu(u) = f'_1{}^\mu + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^\mu \cos nu + b_n^\mu \sin nu), \quad (3.33)$$

dove $a_n^\mu = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'^\mu(u) \cos(nu) du$ e $b_n^\mu = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'^\mu(u) \sin(nu) du$ sono i coefficienti di Fourier. L'obiettivo è quello di ricavare f^μ , per farlo si integra la serie rispetto a u ottenendo:

$$f^\mu(u) = f_0^\mu + f_1^\mu u + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^\mu \cos(nu) + B_n^\mu \sin(nu)), \quad (3.34)$$

dove le costanti di integrazione sono state assorbite dai coefficienti A_n^μ e B_n^μ . Ora è possibile riscrivere la (3.31) come

$$X^\mu(\tau, \sigma) = f_0^\mu + f_1^\mu \tau + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^\mu \cos(n\tau) + B_n^\mu \sin(n\tau)) \cos(n\sigma). \quad (3.35)$$

Sfruttando le identità di Eulero: $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ e $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ i termini oscillanti posso essere riscritti come:

$$\begin{aligned} A_n^\mu \cos(n\tau) + B_n^\mu \sin(n\tau) &= -\frac{i}{2} \left((B_n^\mu + iA_n^\mu) e^{in\tau} - (B_n^\mu - iA_n^\mu) e^{-in\tau} \right) \\ &\equiv -i \frac{\sqrt{2\alpha'}}{\sqrt{n}} \left(a_n^{\mu*} e^{in\tau} - a_n^\mu e^{-in\tau} \right), \end{aligned} \quad (3.36)$$

dove il simbolo $*$ indica il complesso coniugato e il coefficiente $\sqrt{2\alpha'}$ è usato per rendere le costanti a_n^μ adimensionali. Tali costanti, insieme ai loro complessi coniugati, sono definite in modo da poter essere identificate, nel passaggio alla teoria quantistica, con gli operatori di creazione e distruzione.

Per determinare il momento totale della stringa p^μ si integra $\mathcal{P}^{\tau\mu}$ nell'intervallo $[0, \pi]$. In questo intervallo i termini che moltiplicano $\cos(n\sigma)$ si annullano e il risultato diventa

$$p^\mu = \int_0^\pi \mathcal{P}^{\tau\mu} d\sigma = \frac{1}{2\pi\alpha'} \pi f_1^\mu \quad \rightarrow \quad f_1^\mu = 2\alpha' p^\mu. \quad (3.37)$$

Si nota quindi che f_1^μ è proporzionale al momento trasportato dalla stringa. Si ridefinisce $f_0^\mu = x_0^\mu$ e la (3.35) viene riscritta nella forma

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau - i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^{\mu*} e^{in\tau} - a_n^\mu e^{-in\tau} \right) \frac{\cos(n\sigma)}{\sqrt{n}}. \quad (3.38)$$

Questa espressione permette di identificare i vari contributi fisici che determinano la dinamica della stringa. I termini a secondo membro corrispondono, rispettivamente, al modo zero (che definisce la posizione iniziale), al momento totale della stringa e ai suoi modi di oscillazione. Si può osservare inoltre che nel limite in cui tutti i coefficienti oscillatori a_n^μ svaniscono, l'equazione si riduce alla descrizione del moto di una particella puntiforme.

Per riscrivere l'equazione del moto, è conveniente introdurre la seguente notazione:

$$\alpha_0^\mu = \sqrt{2\alpha'} p^\mu, \quad (3.39)$$

$$\alpha_n^\mu = a_n^\mu \sqrt{n}, \quad n \geq 1, \quad (3.40)$$

$$\alpha_{-n}^\mu = a_n^{\mu*} \sqrt{n}, \quad n \geq 1, \quad (3.41)$$

dove $\alpha_{-n}^\mu = (\alpha_n^\mu)^*$. Di conseguenza si può riscrivere X^μ come

$$\begin{aligned} X^\mu(\tau, \sigma) &= x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau - i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^\mu e^{in\tau} - \alpha_n^\mu e^{-in\tau}) \cos(n\sigma) \\ &= x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos(n\sigma). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Questa è la soluzione completa dell'equazione d'onda soggetta alle condizioni di Neumann. In conclusione è utile riesprimere le derivate di X^μ rispetto ai parametri σ e τ :

$$X'^\mu = -i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu \sin(n\sigma) e^{-in\tau}, \quad (3.43)$$

$$\dot{X}^\mu = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu \cos(n\sigma) e^{-in\tau}. \quad (3.44)$$

Si riportano di seguito due delle loro possibili combinazioni lineari:

$$\dot{X}^\mu \pm X'^\mu = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau \pm \sigma)}. \quad (3.45)$$

3.5 Soluzione cono-luce delle equazioni del moto

Le soluzioni trovate precedentemente soddisfano le condizioni al contorno ma è necessario che verifichino anche i vincoli (3.24), questo è possibile fissando un gauge particolare: il *gauge di cono-luce*. Come discusso nella sezione 1.2 le coordinate cono-luce x^+ e x^- sostituiscono le coordinate x^0 e x^1 con una loro combinazione lineare. L'obiettivo di questo paragrafo è fissare una parametrizzazione del foglio di mondo che rispetti le (3.16) attraverso un vettore n^μ che verifichi la condizione

$$n_\mu X^\mu = X^+. \quad (3.46)$$

Scegliendo $n^\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0\right)$ si identificano le proiezioni

$$n_\mu X^\mu = \frac{X^0 + X^1}{\sqrt{2}} = X^+, \quad n_\mu p^\mu = \frac{p^0 + p^1}{\sqrt{2}} = p^+. \quad (3.47)$$

Queste permettono di riscrivere le (3.16) nel seguente modo:

$$X^+(\tau, \sigma) = 2\alpha' p^+ \tau, \quad p^+ = \pi \mathcal{P}^{\tau+}. \quad (3.48)$$

Si può notare che nella seconda equazione è conservato il momento totale p^μ , da questo segue la conservazione di p^+ e della sua densità. Inoltre X^+ dipende unicamente dal parametro τ ed è quindi una quantità non dinamica, infatti nel gauge di cono-luce la dinamica è interamente determinata dalle coordinate trasverse X^I dove $I = 2, \dots, d$. Il vincolo (3.24) può essere riscritto attraverso la definizione del prodotto scalare per le coordinate cono-luce (1.21) come segue:

$$-2(\dot{X}^+ \pm X'^+)(\dot{X}^- \pm X'^-) + (\dot{X}^I \pm X'^I)^2 = 0. \quad (3.49)$$

Calcolando le derivate $\dot{X}^+ = 2\alpha' p^+$ e $X'^+ = 0$, l'equazione precedente diventa

$$\dot{X}^- \pm X'^- = \frac{1}{2\alpha'} \frac{1}{2p^+} \left(\dot{X}^I \pm X'^I \right)^2. \quad (3.50)$$

Si è assunto che $p^+ \neq 0$. Sebbene valga generalmente la condizione $p^+ \geq 0$, il caso $p^+ = 0$ corrisponderebbe fisicamente a una particella priva di massa che si muove nella direzione negativa di x^1 . Poiché tale occorrenza è rara, si considera sempre $p^+ > 0$; in caso contrario il formalismo del gauge di luce-cono non è applicabile. L'espressione (3.50) determina X^- a meno di una costante di integrazione. Poiché i vincoli determinano solo le derivate di X^- , la coordinata si ottiene integrando la seguente grandezza:

$$dX^- = \frac{\partial X^-}{\partial \tau} d\tau + \frac{\partial X^-}{\partial \sigma} d\sigma. \quad (3.51)$$

Per stringhe aperte l'integrale sul foglio di mondo è indipendente dal cammino scelto dato che la superficie non ha alcuna discontinuità. Di conseguenza si esprime la (3.42) per le componenti trasversali X^I :

$$X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^I \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^I e^{-in\tau} \cos(n\sigma). \quad (3.52)$$

Per la coordinata X^+ , la scelta del gauge di cono-luce fissa

$$X^+(\tau, \sigma) = 2\alpha' p^+ \tau = \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^+ \tau \quad (3.53)$$

dove è stata sostituita la (3.39) nella (3.48). Dunque si annulla sia il modo zero spaziale che le oscillazioni di X^+ , infatti lungo la coordinata X^+ la stringa non si muove nel tempo e non ci sono oscillazioni. La coordinata X^- , essendo una combinazione lineare

di x^0 e X^1 , soddisfa la stessa equazione delle onde e le stesse condizioni al contorno delle coordinate trasverse e vale quindi:

$$X^-(\tau, \sigma) = x_0^- + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^-\tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^- e^{-in\tau} \cos(n\sigma). \quad (3.54)$$

Riesprimendo le (3.45) nei termini di $\mu = I$ e $\mu = -$ si ricavano rispettivamente:

$$\dot{X}^I \pm X'^I = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^I e^{-in(\tau \pm \sigma)}, \quad (3.55)$$

$$\dot{X}^- \pm X'^- = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^- e^{-in(\tau \pm \sigma)}. \quad (3.56)$$

Queste due unite alla (3.50) conducono alla seguente uguaglianza:

$$\sqrt{2\alpha'}\alpha_n^- = \frac{1}{2p^+} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I \quad (3.57)$$

che esprime i modi di α_n^- in funzione dei soli modi trasversi α_n^I . Questa relazione fornisce una soluzione completa specificando p^+ , x_0^- , x_0^I e tutti i modi trasversi α_n^I , si determinano univocamente $X^I(\tau, \sigma)$, $X^+(\tau, \sigma)$ e $X^-(\tau, \sigma)$. La combinazione quadratica dei modi trasversi sul lato destro della (3.57) viene chiamata *modo trasverso di Virasoro* L_n^\perp :

$$\sqrt{2\alpha'}\alpha_n^- = \frac{1}{p^+} L_n^\perp, \quad L_n^\perp \equiv \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I. \quad (3.58)$$

Per $n = 0$ si ottiene per la coordinata X^-

$$\sqrt{2\alpha'}\alpha_0^- = 2\alpha'p^- = \frac{1}{\alpha'} L_0^\perp \quad \Rightarrow \quad 2p^+p^- = \frac{1}{\alpha'} L_0^\perp, \quad (3.59)$$

dove L_0^\perp è il modo trasverso di Virasoro zero.

Le equazioni (3.56) e (3.50) possono essere riscritte nel seguente modo

$$\dot{X}^- \pm X'^- = \frac{1}{p^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n^\perp e^{-in(\tau \pm \sigma)} = \frac{1}{4\alpha'p^+} (\dot{X}^I \pm X'^I)^2. \quad (3.60)$$

Integrando le derivate di X^- si trova la soluzione completa in termini dei modi trasversi:

$$X^-(\tau, \sigma) = x_0^- + \frac{L_0^\perp}{p^+} \tau + \frac{i}{p^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} L_n^\perp e^{-in\tau} \cos n\sigma. \quad (3.61)$$

Il quadrato della massa classica della stringa può essere espresso in funzione dei modi trasversi α_n^I , partendo dalla (3.59), si sostituisce il valore di L_0^\perp trovato in (3.58) e si utilizzano le definizioni (3.39), (3.40) e (3.41):

$$M^2 = -p_\mu p^\mu = 2p^+ p^- - p_I p^I = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} n \alpha_n^{I*} \alpha_n^I \geq 0. \quad (3.62)$$

Questo risultato mostra che essendo M^2 una somma di termini definiti positivi della forma $|a|^2$, la massa classica $M = \sqrt{M^2}$ è sempre reale e positiva. Inoltre se tutti i coefficienti a_n^I svaniscono la stringa collassa in un punto materiale in movimento con $M^2 = 0$. Tuttavia, il limite classico presenta due criticità che vengono risolte solo dalla quantizzazione:

- nel caso classico le masse possono assumere qualsiasi valore reale non negativo, infatti queste variano in modo continuo con i coefficienti a_n^I . In natura però si osservano masse con valori discreti. Questa proprietà emergerà solo grazie alla quantizzazione del sistema;
- la versione classica non fornisce un numero sufficiente di stati massless compatibili con le teorie di Maxwell o della gravitazione. La quantizzazione introdurrà una costante addittiva essenziale per far emergere i bosoni di gauge e i gravitoni.

3.6 Hamiltoniana cono-luce e commutatori

Come visto nella sezione precedente, lo studio classico della stringa relativistica nel gauge cono-luce presenta delle criticità. Per analizzare correttamente la teoria è quindi necessario passare alla quantizzazione della stringa aperta relativistica. Nel formalismo della meccanica quantistica esistono generalmente due approcci equivalenti per definire l'evoluzione temporale:

- **Quadro di Schrödinger:** gli stati quantistici del sistema evolvono nel tempo mentre gli operatori che rappresentano gli osservabili rimangono costanti;
- **Quadro di Heisenberg:** gli operatori evolvono nel tempo mentre gli stati rimangono costanti.

I due quadri sono fisicamente equivalenti e sono collegati da una trasformazione unitaria generata dall'hamiltoniana del sistema.

Gli operatori di Schrödinger sono quegli operatori che rappresentano le quantità osservabili fondamentali della teoria. In particolare passando dal quadro di Schrödinger a quello di Heisenberg gli operatori acquisiscono una dipendenza temporale che può essere di due tipi:

- **esplicita:** quando l'operatore dipende già dal tempo nel quadro di Schrödinger;
- **implicita:** dovuta al fatto che nel quadro di Heisenberg l'evoluzione temporale viene incorporata negli operatori stessi.

Nel caso dello studio della stringa relativistica il parametro che gioca il ruolo di tempo è il parametro del foglio di mondo τ . Gli operatori di Schrödinger vengono quindi scelti in modo tale che siano indipendenti dal parametro di evoluzione τ e rappresentano le variabili dinamiche della teoria a tempo fissato. La procedura di quantizzazione consiste nel promuovere le variabili dinamiche classiche a operatori quantistici che agiscono su uno spazio di Hilbert degli stati della stringa.

Nel gauge cono-luce gli operatori di Schrödinger sono:

$$X^I(\sigma), \quad x_0^-, \quad \mathcal{P}^{\tau I}(\sigma), \quad p^+. \quad (3.63)$$

Gli operatori di Heisenberg associati diventano invece dipendenti dal parametro di evoluzione τ e sono quindi:

$$X^I(\tau, \sigma), \quad x_0^-(\tau), \quad \mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma), \quad p^+(\tau). \quad (3.64)$$

A questo punto è necessario introdurre le regole di commutazione canoniche tra gli operatori della stringa. Siccome le coordinate trasverse $X^I(\sigma)$ e i momenti coniugati $\mathcal{P}^{\tau I}(\sigma)$ presentano una dipendenza dal parametro spaziale σ è ragionevole richiedere che questi due non commutino quando sono riferiti allo stesso punto sulla stringa. In caso contrario non ci si aspetta che misure simultanee in punti diversi interferiscano tra loro. Di conseguenza si fissa:

$$[X^I(\sigma), \mathcal{P}^{\tau J}(\sigma')] = i \eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (3.65)$$

Dove η^{IJ} è la metrica di Minkowski ristretta alle direzioni trasverse, poichè tali direzioni sono puramente spaziali, essa coincide con δ^{IJ} . La delta di Dirac garantisce che il commutatore sia diverso da zero solo nel caso in cui $\sigma = \sigma'$.

Le altre regole di commutazione tra le coordinate e i momenti trasversi, sono:

$$[X^I(\sigma), X^J(\sigma')] = [\mathcal{P}^{\tau I}(\sigma), \mathcal{P}^{\tau J}(\sigma')] = 0, \quad (3.66)$$

$$[x_0^-, p^+] = -i. \quad (3.67)$$

Gli operatori x_0^- e p^+ commutano con tutte le altre variabili dinamiche della stringa:

$$[x_0^-, X^I(\sigma)] = [x_0^-, \mathcal{P}^{\tau I}(\sigma)] = [p^+, X^I(\sigma)] = [p^+, \mathcal{P}^{\tau I}(\sigma)] = 0. \quad (3.68)$$

Passando al quadro di Heisenberg, gli operatori dipendono dal parametro τ . Le relazioni di commutazione vengono quindi scritte a tempo uguale, cioè per lo stesso valore di τ . L'unico commutatore non nullo tra gli operatori trasversi è

$$[X^I(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma')] = i \eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma'), \quad (3.69)$$

inoltre

$$[x_0^-(\tau), p^+(\tau)] = -i. \quad (3.70)$$

Dopo aver stabilito le regole di commutazione è necessario introdurre l'Hamiltoniana della stringa, che deve generare l'evoluzione nel parametro τ .

Nelle coordinate cono-luce le variabili X^+ e p^- formano una coppia di variabili coniugate in quanto soddisfano la regola di commutazione $[X^+, p^-] = i$. Di conseguenza, per la meccanica hamiltoniana, il momento coniugato p^- genera traslazioni della coordinata X^+ . Ricordando che nel gauge cono-luce vale la (3.53), è possibile valutare la derivata rispetto a τ :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial X^+}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial X^+} = 2\alpha' p^+ \frac{\partial}{\partial X^+}. \quad (3.71)$$

Ci si aspetta quindi che l'Hamiltoniana che genera cambiamenti in τ sia

$$H = 2\alpha' p^+ p^- = 2\alpha' p^+ \int_0^\pi d\sigma \mathcal{P}^{\tau-}. \quad (3.72)$$

Utilizzando l'espressione (3.50) si ricava

$$\dot{X}^- = \frac{1}{2\alpha'} \frac{1}{2p^+} \left(\dot{X}^I \dot{X}^I + X'^I X'^I \right). \quad (3.73)$$

Da cui è possibile riscrivere $\mathcal{P}^{\tau-}$ ricordando l'espressione della densità di momento (3.25):

$$\mathcal{P}^{\tau-} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^- = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{1}{2\alpha'} \frac{1}{2p^+} \left(\dot{X}^I \dot{X}^I + X'^I X'^I \right) \quad (3.74)$$

$$= \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{1}{2\alpha'} \frac{1}{2p^+} (2\pi\alpha')^2 \left(\mathcal{P}^{\tau I} \mathcal{P}^{\tau I} + \frac{X'^I X'^I}{(2\pi\alpha')^2} \right) \quad (3.75)$$

$$= \frac{\pi}{2p^+} \left(\mathcal{P}^{\tau I} \mathcal{P}^{\tau I} + \frac{X'^I X'^I}{(2\pi\alpha')^2} \right). \quad (3.76)$$

La forma appena ricavata di $\mathcal{P}^{\tau-}$ è utile per riscrivere l'Hamiltoniana (3.72) attraverso gli operatori di Heisenberg:

$$H(\tau) = \pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma \left(\mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma) \mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma) + \frac{X'^I(\tau, \sigma) X'^I(\tau, \sigma)}{(2\pi\alpha')^2} \right). \quad (3.77)$$

H deve generare le equazioni quantistiche del moto, ovvero una versione analoga alle equazioni del moto classiche ma utilizzando gli operatori. L'Hamiltoniana assume una forma particolarmente semplice se espressa nei termini dei modi trasversi di Virasoro.

Infatti dalla relazione (3.59) deriva $L_0^\perp = 2\alpha' p^+ p^-$ che porta immediatamente a riscrivere la (3.72) come

$$H = L_0^\perp. \quad (3.78)$$

È importante notare che questa identificazione è formale. Infatti l'Hamiltoniana contiene prodotti di operatori valutati nello stesso punto del foglio di mondo, come $\mathcal{P}^{\tau I} \mathcal{P}^{\tau I}$ e $X^{\tau I} X^{\tau I}$, che nella teoria quantistica sono ambigui. Avendo ricavato una forma per l'Hamiltoniana è ora necessario derivare le equazioni del moto. Ogni operatore di Heisenberg $\xi(\tau, \sigma)$ che deriva da un operatore di Schrödinger indipendente dal tempo $\xi(\sigma)$ deve soddisfare la seguente relazione

$$i\dot{\xi}(\tau, \sigma) = [\xi(\tau, \sigma), H(\tau)]. \quad (3.79)$$

Poichè $H(\tau)$ è costruita a partire da operatori di Heisenberg senza dipendenza esplicita dal tempo, l'equazione appena vista si può applicare anche all'operatore $H(\tau)$ stesso. Si ottiene quindi

$$i\dot{H}(\tau) = [H(\tau), H(\tau)] = 0, \quad (3.80)$$

da cui segue che l'Hamiltoniana è indipendente dal tempo $H(\tau) = H$. Gli operatori x_0^- e p^+ soddisfano la relazione canonica

$$[x_0^-, p^+] = -i. \quad (3.81)$$

Nel gauge cono-luce il momento p^+ è conservato e quindi commuta con l'Hamiltoniana. Per quanto riguarda gli operatori $X^I(\tau, \sigma)$ la loro equazione del moto di Heisenberg diventa

$$i\dot{X}^I(\tau, \sigma) = [X^I(\tau, \sigma), H(\tau)] = \left[X^I(\tau, \sigma), \pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma' \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma') \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma') \right], \quad (3.82)$$

dove è stata utilizzata la relazione (3.66). Servendosi della (3.65) e sviluppando l'integrale si arriva alla forma finale

$$\dot{X}^I(\tau, \sigma) = 2\pi\alpha' \mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma). \quad (3.83)$$

Questa equazione coincide perfettamente con la corrispondente equazione classica (3.25), inoltre calcolare l'evoluzione di $\mathcal{P}^{\tau I}$ consente di verificare che l'equazione quantistica del moto è

$$\ddot{X}^I - X''^I = 0. \quad (3.84)$$

Nel passaggio dalla teoria classica a quella quantistica le condizioni al contorno viste in precedenza vengono trasposte direttamente in equazioni sugli operatori. Ad esempio i vincoli agli estremi della stringa presenti nelle condizioni di Neumann diventano:

$$\partial_\sigma X^I(\tau, \sigma) = 0 \quad \sigma = 0, \pi. \quad (3.85)$$

Infine sarà utile all'analisi ricavare i commutatori delle combinazioni lineari $(\dot{X}^I \pm X'^I)$. Si può riscrivere il commutatore (3.69) attraverso la (3.83)

$$\left[X^I(\tau, \sigma), \dot{X}^J(\tau, \sigma') \right] = 2\pi\alpha' i \eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (3.86)$$

Derivando rispetto a σ si ottiene

$$\left[X'^I(\tau, \sigma), \dot{X}^J(\tau, \sigma') \right] = 2\pi\alpha' i \eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (3.87)$$

Si applica poi la derivata nelle coordinate spaziali σ e σ' alla relazione $[X^I(\tau, \sigma), X^J(\tau, \sigma')] = 0$ e sfruttando le regole di commutazione tra i momenti coniugati (3.66), si ottiene che le derivate temporali e spaziali delle coordinate commutano separatamente tra loro:

$$\left[X'^I(\tau, \sigma), X'^J(\tau, \sigma') \right] = \left[\dot{X}^I(\tau, \sigma), \dot{X}^J(\tau, \sigma') \right] = 0. \quad (3.88)$$

La relazione appena trovata può essere utilizzata per esaminare il commutatore

$$\left[\left(\dot{X}^I + X'^I \right) (\tau, \sigma), \left(\dot{X}^J + X'^J \right) (\tau, \sigma') \right], \quad (3.89)$$

che può essere riscritto come

$$\left[\dot{X}^I(\tau, \sigma), X'^J(\tau, \sigma') \right] + \left[X'^I(\tau, \sigma), \dot{X}^J(\tau, \sigma') \right]. \quad (3.90)$$

Il secondo termine è equivalente alla (3.87), il primo invece diventa

$$- \left[X'^J(\tau, \sigma), \dot{X}^I(\tau, \sigma') \right] = -(2\pi\alpha') i \eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma'} \delta(\sigma' - \sigma) = 2\pi\alpha' i \eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (3.91)$$

Questo risultato deriva dal fatto che, agendo su una funzione della differenza $(\sigma - \sigma')$, la derivata rispetto a σ equivale all'opposto della derivata rispetto a σ' . Si è inoltre sfruttata la proprietà della delta di Dirac: $\delta(x) = \delta(-x)$. Di conseguenza entrambi i termini della (3.90) danno lo stesso contributo e in generale si può scrivere che

$$\left[(\dot{X}^I \pm X'^I)(\tau, \sigma), (\dot{X}^J \pm X'^J)(\tau, \sigma') \right] = \pm 4\pi\alpha' i \eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (3.92)$$

Siccome solo i termini misti danno un contributo non nullo, vale anche

$$\left[(\dot{X}^I \pm X'^I)(\tau, \sigma), (\dot{X}^J \mp X'^J)(\tau, \sigma') \right] = 0. \quad (3.93)$$

3.7 Quantizzazione degli oscillatori della stringa aperta

Nella quantizzazione della stringa aperta, i commutatori tra le coordinate $X^I(\tau, \sigma)$ e i momenti \mathcal{P}^I sono stati definiti tramite le delta di Dirac, questo li rende molto difficili da trattare poichè valgono per tutti i valori continui di σ . Per gestirli in forma discreta si ricorre ai modi di oscillazione classici α_n^I che vengono promossi ad operatori quantistici di creazione e distruzione.

Richiamando le equazioni (3.52) e (3.55) si ottengono le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} (\dot{X}^I + X'^I)(\tau, \sigma) &= \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^I e^{-in(\tau+\sigma)}, \quad \sigma \in [0, \pi], \\ (\dot{X}^I - X'^I)(\tau, \sigma) &= \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^I e^{-in(\tau-\sigma)}, \quad \sigma \in [0, \pi]. \end{aligned} \quad (3.94)$$

che valgono per $\sigma \in [0, \pi]$ coerentemente con l'intervallo valido per le coordinate della stringa aperta. Per semplificare l'analisi sarà utile estendere la definizione a un intervallo di lunghezza 2π . A tal fine si costruisce una funzione di σ espressa nei termini delle coordinate della stringa. Per procedere si valuta la seconda delle (3.94) in $-\sigma$

$$(\dot{X}^I - X'^I)(\tau, -\sigma) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^I e^{-in(\tau+\sigma)}, \quad \sigma \in [-\pi, 0]. \quad (3.95)$$

Si definisce quindi l'operatore $A^I(\tau, \sigma)$ come

$$A^I(\tau, \sigma) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^I e^{-in(\tau+\sigma)}, \quad A^I(\tau, \sigma + 2\pi) = A^I(\tau, \sigma). \quad (3.96)$$

Grazie a questa definizione, l'operatore $A^I(\tau, \sigma)$, che sarà utile a determinare le relazioni di commutazione per gli oscillatori α_n^I , può essere messo in relazione con le coordinate della stringa aperta nell'intervallo $\sigma \in [-\pi, \pi]$:

$$A^I(\tau, \sigma) = \begin{cases} (\dot{X}^I + X'^I)(\tau, \sigma), & \sigma \in [0, \pi], \\ (\dot{X}^I - X'^I)(\tau, -\sigma), & \sigma \in [-\pi, 0]. \end{cases} \quad (3.97)$$

Per valutare il commutatore $[A^I(\tau, \sigma), A^J(\tau, \sigma')]$ sull'intero intervallo $\sigma, \sigma' \in [-\pi, \pi]$, è necessario distinguere quattro casi basati sui segni di σ e σ' . Sfruttando la definizione di $A^I(\tau, \sigma)$, il calcolo si riduce alle seguenti combinazioni:

$$[(\dot{X}^I + X'^I)(\tau, \sigma), (\dot{X}^J + X'^J)(\tau, \sigma')], \quad \sigma, \sigma' \in [0, \pi], \quad (3.98)$$

$$[(\dot{X}^I + X'^I)(\tau, \sigma), (\dot{X}^J - X'^J)(\tau, -\sigma')], \quad \sigma \in [0, \pi], \sigma' \in [-\pi, 0], \quad (3.99)$$

$$[(\dot{X}^I - X'^I)(\tau, -\sigma), (\dot{X}^J + X'^J)(\tau, \sigma')], \quad \sigma \in [-\pi, 0], \sigma' \in [0, \pi] \quad (3.100)$$

$$[(\dot{X}^I - X'^I)(\tau, -\sigma), (\dot{X}^J - X'^J)(\tau, -\sigma')], \quad \sigma, \sigma' \in [-\pi, 0]. \quad (3.101)$$

Il primo commutatore, che vede sia σ che σ' positive, è già stato studiato nella sezione precedente e il suo contributo è dato dalla (3.92). Il risultato è analogo a quello dell'ultimo commutatore con σ e σ' entrambe negative. Per il secondo e il terzo commutatore con segni misti delle coordinate, si può usare la (3.93) per dimostrare che entrambi si annullano. Di conseguenza il risultato complessivo dei quattro commutatori può essere riassunto in

$$[A^I(\tau, \sigma), A^J(\tau, \sigma')] = 4\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{\partial}{\partial\sigma} \delta(\sigma - \sigma'), \quad \sigma, \sigma' \in [-\pi, \pi]. \quad (3.102)$$

Usando la definizione (3.96) nella relazione appena ricavata si ottiene

$$\sum_{m', n' \in \mathbb{Z}} e^{-im'(\tau+\sigma)} e^{-in'(\tau+\sigma')} [\alpha_{m'}^I, \alpha_{n'}^J] = 2\pi i \eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (3.103)$$

Questa equazione è valida per $\sigma, \sigma' \in [-\pi, \pi]$. Si applicano poi, ad entrambi i lati, gli integrali su σ e σ' :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{im\sigma} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma' e^{in\sigma'}. \quad (3.104)$$

Per il membro sinistro vengono selezionati solo i modi con indici $m' = m$ e $n' = n$. Si ottiene quindi

$$e^{-i(m+n)\tau} [\alpha_m^I, \alpha_n^J]. \quad (3.105)$$

Nel lato destro l'integrale sulla variabile σ' viene valutato usando la proprietà della delta di Dirac, $\int d\sigma' f(\sigma') \delta(\sigma - \sigma') = f(\sigma)$. Risulta quindi

$$\begin{aligned} & i\eta^{IJ} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{im\sigma} \frac{d}{d\sigma} \int_0^{2\pi} d\sigma' e^{in\sigma'} \delta(\sigma - \sigma') \\ &= i\eta^{IJ} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{im\sigma} \frac{d}{d\sigma} e^{in\sigma} = -n \eta^{IJ} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{i(m+n)\sigma} \\ &= -n \eta^{IJ} \delta_{m+n,0} = m \eta^{IJ} \delta_{m+n,0}. \end{aligned} \quad (3.106)$$

Eguagliando i risultati ottenuti nelle (3.105) e (3.106) si ricava

$$[\alpha_m^I, \alpha_n^J] = m \eta^{IJ} \delta_{m+n,0}. \quad (3.107)$$

che rappresenta la relazione fondamentale di commutazione tra i modi oscillatori. Si nota che il modo zero α_0^I commuta con tutti gli altri oscillatori ed è proporzionale al momento della stringa, come mostrato nella (3.39)

$$\alpha_0^I = \sqrt{2\alpha'} p^I. \quad (3.108)$$

Per determinare i commutatori tra il modo zero x_0^I e gli oscillatori α_n^J si integra l'equazione (3.86) in $\sigma \in [0, \pi]$. Sul lato sinistro, i termini legati ai modi oscillatori di $X^I(\tau, \sigma)$ non contribuiscono, mentre l'integrale della funzione delta produce un fattore unitario. Il risultato può quindi essere scritto come

$$[x_0^I + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^I \tau, \dot{X}^J(\tau, \sigma)] = 2\alpha' i \eta^{IJ}. \quad (3.109)$$

Poiché \dot{X}^J è espresso in termini degli oscillatori α_n^J e $[\alpha_0^I, \dot{X}^I] = 0$, usando la sua espansione in modi si ottiene

$$\sum_{n' \in \mathbb{Z}} [x_0^I, \alpha_{n'}^J] e^{-in'\tau} \cos n'\sigma \quad (3.110)$$

$$= [x_0^I, \alpha_0^J] + \sum_{n'=1}^{\infty} [x_0^I, \alpha_{n'}^J e^{-in'\tau} + \alpha_{-n'}^J e^{in'\tau}] \cos n'\sigma \quad (3.111)$$

$$= \sqrt{2\alpha'} i \eta^{IJ}. \quad (3.112)$$

Applicando a entrambi i lati dell'equazione l'integrale $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\sigma \cos n\sigma$ ($n \geq 1$) segue che

$$[x_0^I, \alpha_n^J e^{-in\tau} + \alpha_{-n}^J e^{in\tau}] = [x_0^I, \alpha_n^J] e^{-in\tau} + [x_0^I, \alpha_{-n}^J] e^{in\tau} = 0. \quad (3.113)$$

Siccome l'equazione deve essere uguale a zero per ogni valore di τ ne segue che ogni componente deve annullarsi separatamente:

$$[x_0^I, \alpha_n^J] = 0 \quad n \neq 0. \quad (3.114)$$

Il termine rimanente della (3.112) fornisce

$$[x_0^I, \alpha_0^J] = \sqrt{2\alpha'} i \eta^{IJ}. \quad (3.115)$$

La relazione appena trovata, insieme alla (3.108) fornisce il commutatore desiderato

$$[x_0^I, p^J] = i\eta^{IJ}. \quad (3.116)$$

In analogia con la meccanica quantistica standard, gli operatori x_0^I e p^I sono hermitiani: $(x_0^I)^\dagger = x_0^I$ e $(p^I)^\dagger = p^I$. Le relazioni di commutazione per i modi α_n^I possono essere riscritte in forma più familiare introducendo gli operatori di creazione e distruzione. Seguendo l'analogia con le variabili classiche (3.40) e (3.41), si definiscono gli oscillatori per $n \geq 1$ nel gauge cono-luce, dove $\mu = I$:

$$\alpha_n^I = \sqrt{n} a_n^I, \quad \alpha_{-n}^I = \sqrt{n} a_n^{I\dagger}. \quad (3.117)$$

Nel formalismo quantistico α e a vengono promosse ad operatori. Da questa definizione segue immediatamente la proprietà di hermiticità

$$(\alpha_n^I)^\dagger = \alpha_{-n}^I. \quad (3.118)$$

Utilizzando la relazione di commutazione ottenuta in precedenza (3.107) si può riscrivere

$$[\alpha_m^I, \alpha_{-n}^J] = m \eta^{IJ} \delta_{m,n}. \quad (3.119)$$

Per m e n interi di segno opposto, gli operatori nel commutatore $[\alpha_m^I, \alpha_{-n}^J]$ hanno indici dello stesso segno, quindi il lato destro della relazione appena scritta si annulla:

$$[a_m^I, a_n^J] = [a_m^{I\dagger}, a_n^{J\dagger}] = 0. \quad (3.120)$$

Invece nel caso di m e n entrambi positivi si trova

$$[\sqrt{m} a_m^I, \sqrt{n} a_n^{J\dagger}] = m \delta_{m,n} \eta^{IJ}. \quad (3.121)$$

Spostando le radici quadrate nella parte destra dell'equazione si ottiene

$$[a_m^I, a_n^{J\dagger}] = \frac{m}{\sqrt{mn}} \delta_{m,n} \eta^{IJ}. \quad (3.122)$$

Siccome l'equazione è diversa da zero solo nel caso in cui $m = n$, questa si semplifica in

$$[a_m^I, a_n^{J\dagger}] = \delta_{m,n} \eta^{IJ}. \quad (3.123)$$

La relazione appena trovata, insieme alle (3.120), mostrano che la coppia $(a_m^I, a_m^{I\dagger})$ soddisfa le regole di commutazione degli operatori canonici di creazione e distruzione di un oscillatore armonico quantistico. Per ogni valore di $m \geq 1$ e per ciascuna direzione trasversa I , esiste una coppia distinta di operatori di creazione e distruzione. Le relazioni di commutazione risultano diagonali: oscillatori associati a m diversi o a differenti coordinate commutano tra loro. Il commutatore è unitario solo quando sia m che I coincidono. Ne segue che per $n \geq 1$ i modi α_n^I agiscono come operatori di distruzione, mentre i modi α_{-n}^I agiscono come operatori di creazione.

Conclusioni

In questa tesi è stata presentata un'introduzione alla teoria delle stringhe bosoniche relativistiche. L'analisi è iniziata richiamando alcuni elementi fondamentali della relatività ristretta e introducendo le coordinate cono-luce. Si è studiata poi la dinamica della particella puntiforme relativistica dove, attraverso il formalismo della relatività ristretta, la sua azione diventa proporzionale alla lunghezza della linea di universo nello spazio-tempo. L'invarianza per riparametrizzazione di tale azione riflette il fatto che solo la geometria della linea di universo possiede significato fisico. Applicando poi il principio variazionale si ottengono le equazioni del moto.

Successivamente l'analisi viene estesa al caso della stringa relativistica, generalizzando il formalismo della particella puntiforme. La linea di universo diventa una superficie nello spazio-tempo, detta foglio di mondo, che descrive l'evoluzione della stringa. La dinamica è determinata dall'azione di Nambu-Goto, proporzionale all'area della superficie tracciata dalla stringa. L'applicazione del principio variazionale conduce a equazioni del moto che assumono la forma di equazioni d'onda bidimensionali per le coordinate dello spazio-tempo, mentre l'invarianza per riparametrizzazione del foglio di mondo introduce vincoli che riflettono la presenza di simmetrie di gauge nella teoria. Per semplificare lo studio delle soluzioni, viene introdotto il gauge statico, che fissa parzialmente la libertà di parametrizzazione e consente di identificare il parametro τ con il tempo fisico osservato nello spazio-tempo. In questo contesto la dinamica della stringa risulta descritta da equazioni d'onda accompagnate da opportune condizioni di vincolo.

Infine viene trattato il gauge cono-luce, che permette di fissare completamente la libertà residua associata alla scelta di parametrizzazione. Grazie a questa scelta di gauge i vincoli della teoria possono essere risolti esplicitamente, consentendo di esprimere le componenti non fisiche in funzione delle componenti trasverse. Le equazioni del moto risultano quindi ridotte ad equazioni d'onda per i soli gradi di libertà fisici della stringa, semplificando notevolmente la descrizione della dinamica. In questo contesto viene inoltre introdotto lo sviluppo in modi di oscillazione, che consente di interpretare le soluzioni come sovrapposizione di modi armonici indipendenti. Questo formalismo permette infine di porre le basi per la quantizzazione della stringa e, in analogia con la meccanica quantistica dei sistemi oscillatori, introdurre operatori di creazione e distruzione. L'analisi presentata predispone le basi per lo studio della teoria quantistica delle stringhe

che conduce inoltre a uno spettro discreto di stati, interpretabili come particelle nello spazio-tempo. In particolare, nel caso della stringa chiusa lo spettro contiene uno stato a massa nulla identificabile con il gravitone, ovvero il quanto del campo gravitazionale. Questa proprietà mostra come la gravità emerga naturalmente nel contesto della teoria delle stringhe.

Bibliografia

- [1] V. I. Arnold, *Metodi matematici della meccanica classica*, Editori Riuniti, 1979.
- [2] V. Barone, *Relatività: Principi e applicazioni*, Bollati Boringhieri, 2004.
- [3] K. Becker, M. Becker, J. H. Schwarz, *String Theory and M-Theory*, Cambridge University Press, 2006.
- [4] M. B. Green, J. H. Schwarz, E. Witten, *Superstring Theory, Volume 1: Introduction*, Cambridge University Press, 1987.
- [5] J. Polchinski, *String Theory: Volume 1, An Introduction to the Bosonic String*, Cambridge University Press, 1998.
- [6] J. H. Schwarz, *Introduction to Superstring Theory*, arXiv:hep-ex/0008017, 2000.
- [7] B. Zwiebach, *A First Course in String Theory*, Cambridge University Press, 2009.