

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Augusto Righi”  
Corso di Laurea in Fisica

# COMPATTIFICAZIONI CONFORMI E DIAGRAMMI DI PENROSE

Relatore:  
Prof. Emanuele Latini

Presentata da:  
Matilda Pasquini

Anno Accademico 2024/2025

# Abstract

La seguente tesi analizza il ruolo delle trasformazioni conformi nello studio della struttura causale dello spazio-tempo. In relatività generale molti spazi-tempo di interesse fisico risultano non compatti e si estendono fino all'infinito, rendendo complessa l'analisi delle loro proprietà globali. Per superare questo problema si utilizzano le tecniche di compattificazione conforme, le quali permettono di rappresentare spazi infiniti all'interno di domini finiti, senza modificarne la struttura causale. Le tecniche di compattificazione vengono quindi applicate a diversi modelli. In primo luogo viene analizzato il disco di Poincaré, che fornisce un esempio geometrico di spazio infinito rappresentato in un dominio finito. Successivamente viene costruito il diagramma di Penrose dello spazio-tempo di Minkowski, che permette di visualizzarne in modo compatto la struttura causale e i diversi infiniti conformi. Infine tali strumenti vengono applicati alla soluzione di Schwarzschild delle equazioni di Einstein, ottenendo il corrispondente diagramma di Penrose e mettendo in evidenza le diverse regioni dello spazio-tempo, l'orizzonte degli eventi e la singolarità.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Fondamenti di Geometria Differenziale</b>	<b>3</b>
1.1 Strutture metriche su varietà differenziabili . . . . .	3
1.2 Distanze e geodetiche . . . . .	7
1.3 Struttura causale dello spazio-tempo di Minkowski . . . . .	9
1.4 Trasformazioni conformi . . . . .	11
<b>2 Modello del disco di Poincaré</b>	<b>13</b>
2.1 Calcolo del fattore conforme . . . . .	13
2.2 Interpretazione geometrica . . . . .	14
<b>3 Compattificazione dello spazio-tempo di Minkowski</b>	<b>17</b>
3.1 Calcolo del fattore conforme . . . . .	17
3.2 Interpretazione geometrica . . . . .	19
3.3 Costruzione del diagramma di Penrose . . . . .	20
3.4 Analisi del diagramma di Penrose . . . . .	22
<b>4 Compattificazione Conforme della Metrica di Schwarzschild</b>	<b>24</b>
4.1 Metrica di Schwarzschild . . . . .	24
4.2 L'evoluzione del sistema di coordinate . . . . .	25
4.3 Calcolo del fattore conforme . . . . .	29
4.4 Il diagramma di Penrose . . . . .	31
<b>Conclusioni</b>	<b>34</b>

# Introduzione

La comprensione della struttura globale dello spazio-tempo rappresenta una delle sfide centrali della relatività generale. Fin dalla formulazione della teoria da parte di Albert Einstein nel 1915, la gravità viene interpretata non più come una forza nel senso classico, ma come una manifestazione della geometria dello spazio-tempo. In questo contesto, lo spazio-tempo è descritto matematicamente come una varietà differenziabile dotata di una metrica pseudo-riemanniana, la quale determina la struttura causale e il moto delle particelle e della luce. Dunque, lo studio delle proprietà geometriche e globali di tali varietà diventa fondamentale per analizzare il comportamento dello spazio-tempo in presenza di materia.

Già nei primi anni successivi alla formulazione della relatività generale furono trovate alcune importanti soluzioni esatte delle equazioni di campo di Einstein. Tali equazioni mettono in relazione la geometria dello spazio-tempo con il contenuto di materia ed energia e, nella loro forma tensoriale, sono espresse come:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1)$$

Si tratta di un sistema estremamente complesso di dieci equazioni differenziali non lineari, le cui incognite sono le dieci componenti indipendenti del tensore metrico  $g_{\mu\nu}$ . In questa espressione, il membro di sinistra descrive la curvatura dello spazio-tempo (tramite il tensore di Ricci  $R_{\mu\nu}$  e lo scalare di curvatura  $R$ ), mentre il membro di destra contiene il tensore energia-impulso  $T_{\mu\nu}$ .

Tra le prime soluzioni esatte di queste equazioni vi è la soluzione di Schwarzschild, ottenuta nel 1916, che descrive la geometria dello spazio-tempo nel vuoto attorno a una massa sferica e statica (come una stella o un buco nero). Tuttavia, l'analisi delle proprietà globali di tali soluzioni si rivelò presto complessa. Molti spazi-tempo di interesse fisico, come lo spazio-tempo di Minkowski o alcune soluzioni delle equazioni di Einstein, risultano infatti non compatti e si estendono fino all'infinito. Ciò rende difficile studiarne in modo completo la struttura causale e il comportamento asintotico delle geodetiche.

Un progresso significativo nello studio globale degli spazi-tempo fu compiuto negli anni Sessanta grazie ai lavori di Roger Penrose, che introdusse il concetto di compattificazione

conforme. Attraverso opportune trasformazioni conformi è possibile rappresentare uno spazio-tempo infinito in un dominio finito senza modificarne la struttura causale, ovvero l'orientamento dei coni luce. In questo modo, è possibile analizzare con chiarezza l'andamento delle geodetiche e la configurazione complessiva dello spazio-tempo, definendo con precisione la posizione dei diversi infiniti conformi (spaziali, temporali e nulli).

Lo scopo di questo elaborato di tesi è quello di analizzare le tecniche di compattificazione conforme e mostrare come esse permettano la costruzione dei diagrammi di Penrose, i quali sono strumenti fondamentali nello studio della struttura causale degli spazi-tempo.

Nel primo capitolo verranno introdotti gli strumenti matematici necessari. Verranno richiamati alcuni concetti di geometria differenziale, tra cui quelli di varietà differenziabili, spazi tangenti, metriche e geodetiche. Verrà inoltre discussa la struttura causale dello spazio-tempo di Minkowski e sarà introdotto il concetto di trasformazione conforme.

Nel secondo capitolo verrà fornito un primo esempio di compattificazione conforme: il disco di Poincaré. Questo modello permette di visualizzare come uno spazio infinito possa essere rappresentato all'interno di un dominio finito e come tale trasformazione influenzi la rappresentazione delle geodetiche.

Nel terzo capitolo, le tecniche di compattificazione conforme verranno estese allo spazio-tempo di Minkowski. Attraverso opportuni cambi di coordinate e trasformazioni conformi, si giungerà alla costruzione del diagramma di Penrose; tale strumento consente di rappresentare l'intera struttura causale dello spazio-tempo piatto in un dominio finito, mappando i diversi infiniti (spaziali, temporali e nulli) sul bordo della figura.

Infine, nel quarto capitolo verrà considerato uno spazio-tempo di particolare interesse fisico: la soluzione di Schwarzschild alle equazioni di Einstein. Dopo aver analizzato l'evoluzione dei sistemi di coordinate e la deformazione dei coni luce, verranno applicate le tecniche di compattificazione conforme per ottenere il diagramma di Penrose dello spazio-tempo di Schwarzschild, che permette di visualizzare in modo compatto le diverse regioni dello spazio-tempo, inclusi l'orizzonte degli eventi, la singolarità e le regioni associate al buco nero e al buco bianco.

# Capitolo 1

## Fondamenti di Geometria Differenziale

In questo capitolo vengono introdotti gli strumenti fondamentali della geometria differenziale.

Inizieremo analizzando come la metrica agisce sugli spazi tangenti, passando dalla sua forma astratta di prodotto scalare alla sua rappresentazione operativa in coordinate locali, nota come elemento di linea  $ds^2$ .

Successivamente approfondiremo i concetti di distanza e geodetica. Definiremo le geodetiche come curve che trasportano parallelamente il proprio vettore tangente, evidenziando come la coincidenza tra queste e le curve di minima distanza sia una proprietà specifica delle varietà dotate di metrica riemanniana, distinguendola dal caso pseudo-riemanniano di interesse fisico.

Verrà poi trattato nel dettaglio lo spazio-tempo di Minkowski e la sua struttura causale, la quale sarà fondamentale per lo studio dei diagrammi di Penrose.

Infine, si introdurrà il concetto di trasformazione conforme. Si osserverà come essa agisca sulla metrica preservando gli angoli e la struttura dei coni luce; tale strumento sarà fondamentale per le procedure di compattificazione trattate nei capitoli successivi.

### 1.1 Strutture metriche su varietà differenziabili

Il punto di partenza per l'analisi geometrica di una varietà è la definizione di funzioni lisce e la costruzione degli spazi tangenti nei suoi punti. Successivamente, mediante l'introduzione di una struttura metrica, è possibile definire la lunghezza dei vettori tangenti.

**Definizione 1.1** (Varietà differenziabile) Una varietà differenziabile di dimensione  $n \in \mathbb{N}$  è uno spazio topologico  $M$  che localmente "assomiglia" a  $\mathbb{R}^n$ . Più precisamente, su

un insieme  $M$  è definita una struttura di varietà differenziabile se  $M$  è munita di una collezione finita o numerabile di carte compatibili, che formano un atlante, tale che ogni punto  $p \in M$  sia rappresentato da almeno una carta.

In questo elaborato, volto allo studio dello spazio-tempo, si considerano principalmente varietà di dimensione  $n = 4$ . Tuttavia, per scopi illustrativi, verranno presentati modelli in dimensioni ridotte, come l'iperboloide bidimensionale trattato nel Capitolo 2. Inoltre, per evitare di introdurre ulteriori tecnicismi, come carte e atlanti, nella prima parte del lavoro si considerano varietà che "assomigliano" globalmente a  $\mathbb{R}^4$ , descrivibili tramite un unico sistema di coordinate. Questo approccio semplificato verrà superato nel quarto capitolo, dove l'analisi della soluzione di Schwarzschild mostrerà come un unico sistema di coordinate non sia sufficiente a coprire l'intera varietà. Si renderà quindi necessaria la costruzione di un'estensione massima per descriverne la geometria globale.

**Definizione 1.2** (Spazio Tangente) Dato un punto  $p \in M$ , definiamo lo spazio tangente  $T_p M$  come l'insieme delle derivate in  $p$ , ovvero come l'insieme degli operatori lineari  $X_p : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  che agiscono sulle funzioni lisce  $f, g \in C^\infty(M)$  e soddisfano la regola di Leibniz: <sup>1</sup>

$$X_p(fg) = (X_p f)g(p) + f(p)(X_p g) \quad (1.1)$$

Lo spazio tangente è uno spazio vettoriale e, scelto un sistema di coordinate  $(x^\mu) = (x^1, \dots, x^n)$ , una base per questo spazio è data dalle derivate parziali in  $p$ : <sup>2</sup>

$$\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \right\} \quad (1.2)$$

Un generico vettore tangente  $X_p \in T_p M$  può essere espresso come combinazione lineare degli elementi della base:

$$X_p = a^1 \left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p + a^2 \left. \frac{\partial}{\partial x^2} \right|_p + \dots + a^n \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p = \sum_{\mu} a^\mu \partial_\mu \Big|_p \quad (1.3)$$

Lo spazio tangente  $T_p M$  rappresenta quindi l'insieme delle direzioni infinitesime lungo cui è possibile muoversi a partire dal punto  $p$ . Possiamo dotare lo spazio tangente di una struttura che permetta di misurare la lunghezza dei vettori tangenti: una metrica.

---

<sup>1</sup> $C^\infty(M)$  denota l'insieme di tutte le funzioni scalari a valori reali definite sulla varietà  $M$  che sono differenziabili infinite volte. Per maggiori dettagli si consulti V. I. Arnold, *Metodi matematici della meccanica classica*, Editori Riuniti/Springer.

<sup>2</sup>Formalmente, un sistema di coordinate in un intorno di  $p$  è definito da una carta locale  $(U, \phi)$ , dove  $\phi$  è un diffeomorfismo locale che mappa un aperto della varietà in un aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Questo permette di identificare i vettori tangenti con operatori di derivazione parziale rispetto alle coordinate euclidee.

**Definizione 1.3** (Metrica) La metrica  $g$  su una varietà differenziabile  $M$  è un oggetto matematico che associa ad ogni punto  $p \in M$  un prodotto interno  $g_p$  sullo spazio tangente  $T_pM$ . Tale prodotto interno prende due vettori tangenti  $v, w \in T_pM$  e restituisce il prodotto interno tra i due, ovvero un numero reale

$$g_p(v, w) \in \mathbb{R} \quad (1.4)$$

Nel caso di una varietà dove la metrica è definita positiva, essa permette di definire la lunghezza di un vettore  $v \in T_pM$  e l'angolo compreso tra due vettori  $v, w \in T_pM$ :

$$\|v\| = \sqrt{g_p(v, v)} \quad (1.5)$$

$$\cos \theta = \frac{g_p(v, w)}{\|v\| \cdot \|w\|} \quad (1.6)$$

Fissato un sistema di coordinate locali  $(x^\mu)$ , possiamo rappresentare la metrica tramite le sue componenti rispetto alla base indotta dello spazio tangente.

Considerato un vettore tangente  $X_p \in T_pM$ , questo può essere scritto come combinazione lineare degli elementi della base dello spazio tangente  $(\frac{\partial}{\partial x^\mu}|_p)$ , come nell'Equazione 1.3. Sfruttando la bilinearità della metrica, il prodotto scalare del vettore tangente con se stesso risulta essere:

$$\begin{aligned} g_p(X_p, X_p) &= g_p \left( \sum_{\mu} a^\mu \partial_\mu|_p, \sum_{\nu} a^\nu \partial_\nu|_p \right) \\ &= \sum_{\mu, \nu} a^\mu a^\nu g_p(\partial_\mu|_p, \partial_\nu|_p) \\ &= \sum_{\mu, \nu} a^\mu a^\nu g_{\mu\nu}(p) \end{aligned} \quad (1.7)$$

dove nell'ultimo passaggio sono state definite le componenti del tensore metrico  $g_{\mu\nu}(p)$  come i prodotti interni dei vettori della base dello spazio tangente, ovvero:

$$g_{\mu\nu}(p) \equiv g_p(\partial_\mu|_p, \partial_\nu|_p) \quad (1.8)$$

Se identifichiamo i coefficienti  $a^\mu$  con gli spostamenti infinitesimi  $dx^\mu$  lungo una curva, allora otteniamo una espressione per l'elemento di linea  $ds^2$ :

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu \quad (1.9)$$

Per visualizzare concretamente questa struttura, consideriamo lo spazio  $\mathbb{R}^2$  con coordinate cartesiane  $(x, y)$ . In questo caso, un vettore tangente a un punto  $p$  si scrive come

$X_p = a\partial_x|_p + b\partial_y|_p$ , mentre le componenti della metrica nel punto  $p$  sono date dalla matrice:

$$g_{\mu\nu}(p) = \begin{pmatrix} g_{xx}(p) & g_{xy}(p) \\ g_{yx}(p) & g_{yy}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_p(\partial_x|_p, \partial_x|_p) & g_p(\partial_x|_p, \partial_y|_p) \\ g_p(\partial_y|_p, \partial_x|_p) & g_p(\partial_y|_p, \partial_y|_p) \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

Nel caso della metrica euclidea, i vettori della base  $\{\partial_x|_p, \partial_y|_p\}$  sono ortonormali fra loro quindi la matrice è l'identità e l'elemento di linea è il classico teorema di Pitagora:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad (1.11)$$

Se invece consideriamo una metrica più generica che dipende dalle coordinate  $(x, y)$  allora l'elemento di linea si scrive come:

$$ds^2 = g_{xx}(x, y)dx^2 + 2g_{xy}(x, y)dxdy + g_{yy}(x, y)dy^2 \quad (1.12)$$

Un esempio di metrica non euclidea è quello della sfera unitaria  $S^2$ . Utilizzando le coordinate sferiche  $(\theta, \phi)$  l'elemento di linea si scrive come:

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (1.13)$$

In questo caso, le componenti del tensore metrico nel punto  $p$  rispetto alla base  $\{\partial_\theta|_p, \partial_\phi|_p\}$  sono date dalla matrice:

$$g_{\mu\nu}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

**Definizione 1.4** (Segnatura della metrica) Si definisce segnatura di una metrica  $g$  la coppia  $(r, s)$ , dove  $r$  e  $s$  sono, rispettivamente, il numero di autovalori positivi e negativi della matrice associata alla metrica rispetto a una qualunque base di  $T_pM$ .

Grazie alla definizione di segnatura si può fare una classificazione delle metriche:

**Definizione 1.5** (Metrica riemanniana) Una metrica  $g$  su una varietà differenziabile  $M$  si definisce riemanniana se è definita positiva in ogni punto  $p \in M$ . Per ogni vettore tangente non nullo  $v \in T_pM$ , deve valere la condizione:

$$g_p(v, v) > 0, \quad \forall v \neq 0 \quad (1.15)$$

ovvero la metrica ha segnatura  $(n, 0)$ .

Se la metrica è riemanniana allora:

- Solo il vettore nullo ha norma nulla

$$\|v\| = 0 \iff v = 0 \quad (1.16)$$

- La lunghezza (o norma) di ogni vettore non nullo è sempre un numero reale strettamente positivo.
- La metrica induce una struttura di spazio metrico su  $M$ , dove la distanza tra due punti distinti è sempre strettamente positiva.

**Definizione 1.6** (Metrica pseudo-riemanniana) Una metrica  $g$  su una varietà differenziabile si dice pseudo-riemanniana se ha segnatura  $(p, q)$  con  $p, q > 0$ .

Se la metrica è pseudo-riemanniana allora:

- Può esistere un vettore non nullo con norma nulla
- La lunghezza (o norma) di un vettore può essere positiva, negativa o nulla
- La nozione di distanza euclidea viene sostituita da quella di intervallo spazio-temporale, che può assumere anche valori negativi o nulli per coppie di punti distinti

**Definizione 1.7** (Metrica lorentziana) Una metrica  $g$  su una varietà differenziabile  $M$  si definisce una metrica lorentziana se è una metrica pseudo-riemanniana con segnatura  $(n - 1, 1)$ , dove  $n$  è la dimensione della varietà.

A differenza del caso riemanniano, in presenza di una metrica lorentziana è possibile distinguere la natura dei vettori tangenti in base al segno del loro modulo quadro:

- time-like se  $g_p(v, v) < 0$
- space-like se  $g_p(v, v) > 0$
- null-like se  $g_p(v, v) = 0$

## 1.2 Distanze e geodetiche

Una volta stabilito come misurare la lunghezza di un vettore in un punto, è necessario passare a una descrizione globale che permetta di misurare la separazione tra punti arbitrari della varietà.

Poiché la metrica è definita, in ogni punto  $p \in M$ , come una mappa bilineare:

$$g_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.17)$$

essa agisce esclusivamente sui vettori tangenti nello stesso punto  $p \in M$ . Quindi non è possibile confrontare direttamente due vettori  $v \in T_p M$  e  $w \in T_q M$ . Per ovviare questo

problema la distanza tra due punti  $p, q \in M$  viene definita tramite le curve  $\gamma(t)$  che li congiungono.

Sia  $\gamma(t)$  una curva parametrizzata liscia tale che:

$$\gamma: [a, b] \rightarrow M \quad \gamma(a) = p, \quad \gamma(b) = q \quad (1.18)$$

dove per ogni valore di  $t \in [a, b]$ ,  $\gamma(t)$  è un punto della varietà  $M$  e  $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}M$  è il vettore tangente alla curva. La metrica permette di misurare la lunghezza di tale vettore:

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} \quad (1.19)$$

Essendo l'elemento d'arco infinitesimo pari a  $ds = \|\dot{\gamma}(t)\| dt$ , la lunghezza totale della curva  $\gamma$  nell'intervallo  $[a, b]$  è data dall'integrale:

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt \quad (1.20)$$

Definita la lunghezza di una curva, è possibile fornire la definizione formale di distanza tra punti sulla varietà.

**Definizione 1.8** (Distanza) Dati due punti  $p, q \in M$ , la distanza tra essi è definita come l'estremo inferiore delle lunghezze di tutte le curve lisce che li congiungono:

$$d(p, q) = \inf_{\gamma} L(\gamma) \quad (1.21)$$

Per chiarire come la metrica determini la distanza, consideriamo due casi distinti per lo stesso insieme di punti  $(x, y)$  con  $y > 0$ .

Nel caso Euclideo ( $\mathbb{R}^2$ ) la metrica è quella Euclidea ( $ds^2 = dx^2 + dy^2$ ) e la lunghezza di una curva in  $\mathbb{R}^2$  sarà data dall'integrale  $L(\gamma) = \int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$ , mentre la distanza tra due punti  $p, q \in \mathbb{R}^2$  sarà data dalla curva che realizza il minimo, ovvero dalla retta che congiunge i due punti.

Invece, nel caso iperbolico ( $\mathbb{H}^2$ ) la metrica è  $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$  e la lunghezza di una curva in  $\mathbb{H}^2$  sarà data dall'integrale  $L(\gamma) = \int_a^b \frac{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}}{y(t)} dt$ . Si osserva quindi che la distanza tra due punti  $p, q \in \mathbb{H}^2$  viene "pesata" dalla coordinata  $y$ , ovvero muoversi vicino all'asse  $y = 0$  costa di più in termini di distanza. Di conseguenza le curve che realizzano il minimo della distanza non sono più rette, ma archi di semicirconferenze ortogonali all'asse  $x$ .

La nozione di distanza così introdotta solleva il problema di caratterizzare le curve che ne realizzano l'estremo inferiore. Tali curve sono strettamente connesse al concetto di geodetica.

**Definizione 1.9** (Geodetica) Una geodetica è una curva  $\gamma(t)$  che rappresenta la generalizzazione del concetto di retta su una varietà. Formalmente, una curva è una geodetica se trasporta parallelamente il proprio vettore tangente, ovvero soddisfa la seguente equazione:

$$\frac{D\dot{\gamma}(t)}{dt} = 0 \quad (1.22)$$

Intuitivamente, le geodetiche sono i cammini "più dritti possibili" sulla varietà, ovvero curve la cui accelerazione intrinseca è nulla.

È importante distinguere la proprietà di essere il cammino "più dritto" possibile (geodetica) e quella di essere il cammino di minima distanza. Nel caso di una varietà dotata di una metrica riemanniana (come il disco di Poincaré) questi due concetti coincidono: le geodetiche sono effettivamente le curve che realizzano il minimo della distanza (Eq. 1.21).

Al contrario, in una varietà dotata di una metrica lorentziana (come lo spazio-tempo di Minkowski) la nozione di distanza minima perde di significato a causa della segnatura della metrica. Le geodetiche rappresentano semplicemente le curve ad accelerazione covariante nulla e possono essere classificate in base al segno di  $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$  lungo la curva.

**Definizione 1.10** (Classificazione causale delle geodetiche) Sia  $(M, g)$  una varietà lorentziana e  $\gamma : I \rightarrow M$  una geodetica. La geodetica si dice:

- *time-like* se

$$g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) < 0 \quad \text{per ogni } t \in I;$$

- *null-like* se

$$g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = 0 \quad \text{per ogni } t \in I;$$

- *space-like* se

$$g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) > 0 \quad \text{per ogni } t \in I.$$

Poiché lungo una geodetica la quantità  $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$  è costante, è sufficiente che la condizione precedente sia verificata in un singolo punto.

### 1.3 Struttura causale dello spazio-tempo di Minkowski

Lo spazio-tempo di Minkowski è la varietà differenziabile  $\mathbb{R}^4$  dotata della seguente metrica lorentziana:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

Dato che la metrica è lorentziana, presi due punti  $p$  e  $q$  di questo spazio, la separazione fra essi non è descritta da una distanza definita positiva, ma dall'intervallo invariante  $ds^2$ , definito come:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \quad (1.24)$$

È proprio il segno di  $ds^2$  che stabilisce la struttura causale di questo spazio-tempo.

A ogni punto della varietà è associato un cono luce, rappresentato in Figura 1.1, definito dall'insieme delle geodetiche nulle ( $ds^2 = 0$ ) che partono da esso.

Il cono luce divide lo spazio-tempo in tre regioni distinte:

- Cono del futuro: contiene tutti gli eventi che possono essere influenzati dall'osservatore posto nell'origine del cono. Le traiettorie di particelle massive sono vincolate a rimanere all'interno di questa regione ( $ds^2 < 0$ );
- Cono del passato: contiene tutti gli eventi che possono aver influenzato l'evento presente posto all'origine del cono;
- Altrove: contiene tutti gli eventi che non possono essere in rapporto causale con l'evento presente, poiché per raggiungerlo sarebbe necessaria una velocità superiore a quella della luce.

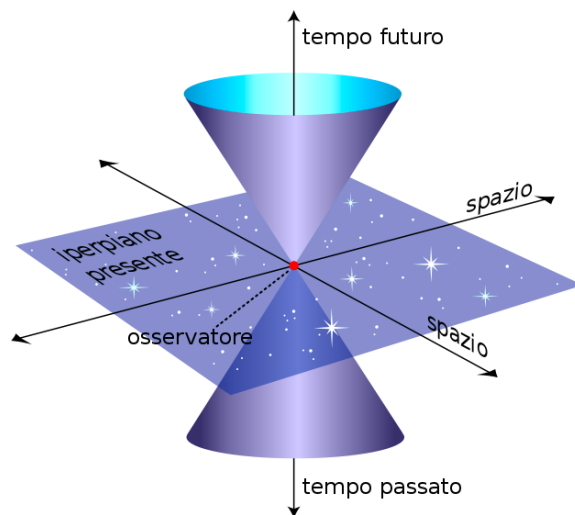


Figura 1.1: Cono luce in un punto dello spazio-tempo di Minkowski. Il cono superiore rappresenta il futuro causale, quello inferiore il passato causale, mentre la regione esterna al cono costituisce l'altrove.

Due eventi situati l'uno all'interno del cono luce dell'altro sono separati da un intervallo  $ds^2 < 0$ . Essi possono essere congiunti da curve (e in particolare da una geodetica) di

tipo tempo, poiché tali traiettorie corrispondono a velocità inferiori a quella della luce ( $v < c$ ).

Eventi situati esattamente sulla superficie del cono sono collegati da geodetiche nulle ( $ds^2 = 0$ ), ovvero traiettorie percorse da segnali luminosi.

Eventi situati nell'Altrove spaziale presentano un intervallo  $ds^2 > 0$ . Essi possono essere congiunti solo da curve di tipo spazio, le quali richiederebbero velocità superluminali ( $v > c$ ). Di conseguenza, non esiste alcuna curva fisica (causale) in grado di connettere tali eventi, che risultano tra loro causalmente indipendenti.

## 1.4 Trasformazioni conformi

In questa sezione esploreremo una classe particolare di trasformazioni che, pur variando le distanze, mantengono inalterati gli angoli e i coni luce.

**Definizione 1.11** (Trasformazione conforme) Sia  $(M, g)$  una varietà differenziabile dotata di una metrica  $g$ . Si dice che due metriche  $g$  e  $\tilde{g}$  su  $M$  sono conformemente equivalenti se esiste una funzione

$$\Omega: M \rightarrow \mathbb{R} \tag{1.25}$$

tale che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

- $\Omega \in C^\infty(M)$ ;
- $\Omega(p) > 0$  per ogni  $p \in M$ ;
- $\tilde{g} = \Omega^2 g$ .

La mappa che associa  $g$  a  $\tilde{g}$  è detta trasformazione conforme e  $\Omega$  è chiamato fattore conforme.

Sotto trasformazioni conformi le lunghezze e le distanze cambiano ma gli angoli e i coni luce restano invariati. Questa proprietà rende le trasformazioni conformi particolarmente adatte allo studio delle strutture causali.

Le trasformazioni conformi si utilizzano per affrontare il problema dell'infinito in uno spazio-tempo. Molti spazi-tempo di interesse fisico (ad esempio lo spazio-tempo di Minkowski) non sono compatti e sono dotati di infiniti spaziali, temporali e nulli. L'idea introdotta da Penrose è quella di rappresentare l'infinito come un bordo geometrico finito, preservando la struttura causale. Questo è possibile attraverso le compattificazioni conformi.

La compattificazione conforme di una varietà  $(M, g)$  consiste nel trovare una varietà con il bordo  $\tilde{M} = M \cup \partial M$  e una funzione  $\Omega \geq 0$  tali che:

- $\Omega > 0$  su  $M$

- $\Omega = 0$  sul bordo  $\partial M$
- $\Omega$  sia differenziabile tutte le volte che è necessario

in questo modo l'infinito di  $M$  è mappato nel bordo finito di  $\tilde{M}$ .

# Capitolo 2

## Modello del disco di Poincaré

In questo capitolo applicheremo i concetti di metrica e compattificazione conforme, introdotti precedentemente, per analizzare uno dei modelli più significativi: il disco di Poincaré.

### 2.1 Calcolo del fattore conforme

Consideriamo lo spazio di Minkowski 3-dimensionale  $\mathbb{R}^{1,2}$  con coordinate  $(t, x, y)$  e metrica:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 \quad (2.1)$$

In questo spazio consideriamo l'iperboloide a due falde  $I^2$  definito dall'equazione:

$$-t^2 + x^2 + y^2 = -1 \quad (2.2)$$

Limitando l'analisi alla falda superiore ( $t > 0$ ), che rappresenta un modello dello spazio iperbolico  $\mathbb{H}^2$ , introduciamo la parametrizzazione standard:

$$\begin{cases} t = \cosh \rho \\ x = \sinh \rho \cos \theta \\ y = \sinh \rho \sin \theta \end{cases} \quad (2.3)$$

con:

$$\rho \geq 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad (2.4)$$

In questo modo la metrica indotta sull'iperboloide assume la forma:

$$ds^2 = d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\theta^2 \quad (2.5)$$

Al fine di studiare la struttura all'infinito della varietà, eseguiamo una compattificazione mediante il cambio di coordinate:

$$r = \tanh\left(\frac{\rho}{2}\right) \quad (2.6)$$

Tale trasformazione mappa l'intero dominio infinito  $\rho \in [0, \infty)$  nell'intervallo finito:

$$0 \leq r < 1 \quad (2.7)$$

In queste coordinate la metrica diventa:

$$ds^2 = \frac{4}{(1-r^2)^2} (dr^2 + r^2 d\theta^2) \quad (2.8)$$

dove  $d\tilde{s}^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$  corrisponde alla metrica euclidea del piano, limitata però al dominio del disco unitario. Abbiamo così ottenuto la metrica conforme  $d\tilde{s}^2$  alla metrica dell'iperboloide di partenza. Il passaggio alla metrica conforme comporta l'introduzione del fattore conforme

$$\Omega = \frac{1-r^2}{2} \quad (2.9)$$

così che la relazione tra metrica fisica e metrica conforme diventa:

$$d\tilde{s}^2 = \Omega^2 ds^2 = \left( \frac{1-r^2}{2} \right)^2 ds^2 \quad (2.10)$$

Il fattore conforme è positivo e regolare all'interno del dominio e si annulla sul bordo, che rappresenta i punti all'infinito dell'iperboloide.

## 2.2 Interpretazione geometrica

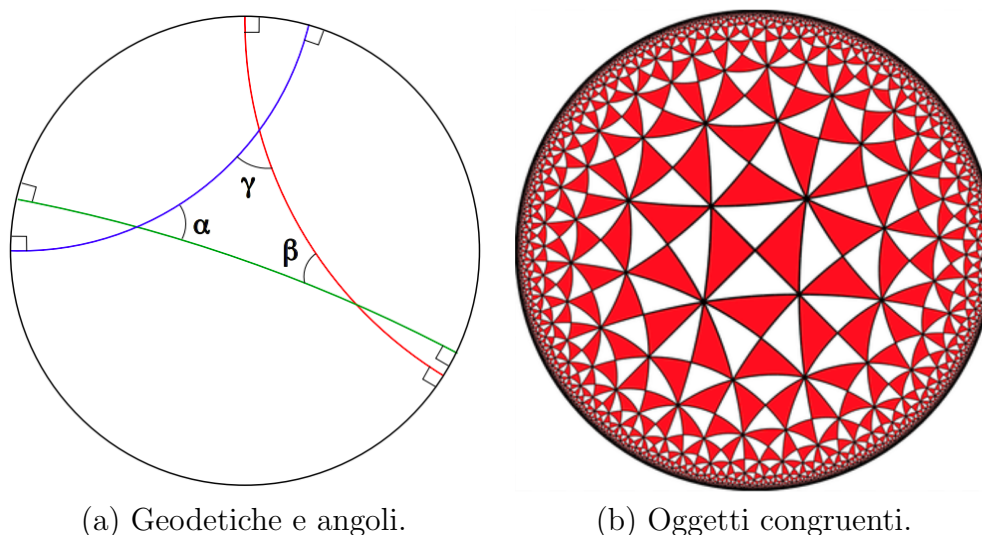
Grazie al cambio di coordinate (2.6) si è mappato l'iperboloide infinito in una regione finita: il disco di Poincaré. I bordi del disco di Poincaré rappresentano i punti a distanza infinita dell'iperboloide, infatti il fattore conforme soddisfa  $\Omega = 0$  sul bordo, ovvero per  $r = 1$ .

È importante sottolineare che poiché il disco di Poincaré è una varietà riemanniana, la definizione di geodetica tramite trasporto parallelo coincide con quella di curva di minima distanza.

Trattandosi di una compattificazione conforme, nel disco le distanze non rimangono invariate ma gli angoli vengono conservati. Infatti come si può vedere in Figura 2.1(a) gli angoli tra le rette sono gli stessi che si misurerebbero sull'iperboloide, mentre le curve di minima distanza (geodetiche) non sono più delle rette, bensì archi di circonferenza ortogonali al bordo del disco o, nel caso di punti allineati con l'origine, diametri dello stesso. Questo accade perché, nel disco di Poincaré la geometria dei cammini di minima distanza è profondamente influenzata dal fattore conforme. Sebbene  $\Omega$  tenda a zero per  $r \rightarrow 1$ , la metrica fisica  $ds^2$  è inversamente proporzionale ad esso; di conseguenza la

distanza propria  $ds$  associata a uno spostamento infinitesimo  $dr$  aumenta drasticamente man mano che ci si allontana dall'origine. Di conseguenza, per minimizzare l'integrale della distanza propria tra due punti, le geodetiche tendono a incurvarsi verso il centro del disco, dove la metrica è meno "compressa".

Inoltre in Figura 2.1(b) si osserva che oggetti tra loro congruenti (ovvero aventi la stessa distanza propria  $ds$ ) appaiono progressivamente più piccoli man mano che si avvicinano al bordo unitario. Questo fenomeno è dettato dal comportamento del fattore conforme  $\Omega(r)$ : poiché lo spazio fisico viene "compresso" per essere contenuto in una regione finita, è necessaria una quantità sempre maggiore di spazio iperbolico per coprire una medesima distanza euclidea  $dr$ . Di conseguenza, per mantenere costante la dimensione fisica di un corpo, la sua estensione deve contrarsi asintoticamente verso lo zero per  $r \rightarrow 1$ .



(a) Geodetiche e angoli.

(b) Oggetti congruenti.

Figura 2.1: Rappresentazione conforme dello spazio iperbolico nel disco di Poincaré.

Si può ottenere lo stesso risultato attraverso una costruzione geometrica diretta nota come proiezione stereografica: consideriamo un generico punto  $P$ , di coordinate  $(t, x, y)$ , situato sulla falda superiore dell'iperboloide ( $t > 0$ ). Tracciamo la retta passante per  $P$  e per il polo sud dell'iperboloide, ovvero il punto  $S$  di coordinate  $(-1, 0, 0)$ . Il punto di intersezione della retta con il piano passante per  $t = 0$  sarà la proiezione del punto  $P$  sul disco. Ripetendo questo processo per l'intera superficie della falda superiore, si mappa l'iperboloide infinito nel disco di Poincaré, come illustrato in Figura 2.2.

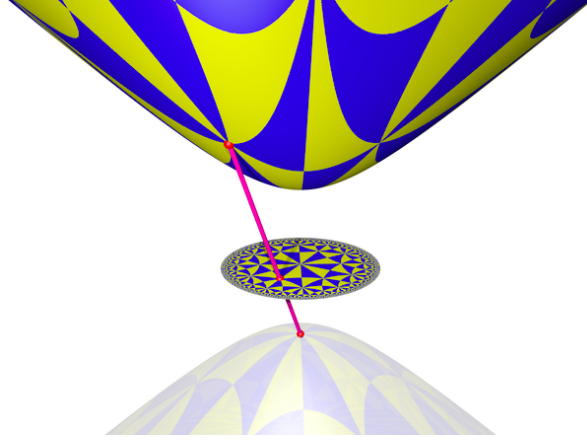


Figura 2.2: Proiezione stereografica dell'iperboloide nel disco di Poincaré.

La retta passante per i punti  $P$  e  $S$  può essere descritta dalla seguente espressione parametrica:

$$\begin{cases} t' = -1 + \lambda(t + 1) \\ x' = \lambda x \\ y' = \lambda y \end{cases} \quad (2.11)$$

Si definisce  $P'$  il punto sul disco che rappresenta la proiezione del punto  $P$  appartenente all'iperboloide di partenza. Le coordinate di questo punto saranno  $(0, x', y')$ . Per trovare i valori delle coordinate  $x'$  e  $y'$  si interseca il piano  $t' = 0$  con la retta di proiezione (Eq. 2.11), in questo modo si ricava:

$$\lambda = \frac{1}{t + 1} \implies P' = \left(0, \frac{x}{1 + t}, \frac{y}{1 + t}\right) \quad (2.12)$$

Per analizzare il comportamento di tale mappa al limite, sfruttiamo la relazione che definisce l'iperboloide,  $t^2 - x^2 - y^2 = 1$ , per calcolare la distanza dall'origine nel disco:

$$(x')^2 + (y')^2 = \frac{x^2 + y^2}{(1 + t)^2} = \frac{t^2 - 1}{(t + 1)^2} = \frac{t - 1}{t + 1} \quad (2.13)$$

Si osserva immediatamente che per ogni valore finito di  $t \geq 1$ , risulta  $(x')^2 + (y')^2 < 1$ . Al limite per  $t \rightarrow +\infty$ , ovvero per i punti dell'iperboloide infinitamente distanti dall'origine, si ottiene:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [(x')^2 + (y')^2] = 1 \quad (2.14)$$

Di conseguenza, l'intera superficie infinita dell'iperboloide viene mappata all'interno del disco unitario ( $(x')^2 + (y')^2 < 1$ ), mentre il bordo del disco ( $(x')^2 + (y')^2 = 1$ ) rappresenta l'infinito conforme della varietà.

# Capitolo 3

## Compattificazione dello spazio-tempo di Minkowski

In questo capitolo, estenderemo le tecniche di compattificazione conforme studiate nei capitoli precedenti allo spazio-tempo di Minkowski.

### 3.1 Calcolo del fattore conforme

Consideriamo lo spazio-tempo di Minkowski in coordinate sferiche  $(t, r, \theta, \phi)$ , la cui metrica è data da:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\sigma^2 \quad (3.1)$$

dove  $d\sigma^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$  è la metrica per la sfera bidimensionale  $S^2$ . Nel seguito ignoreremo le coordinate angolari ( $\theta$  e  $\phi$ ), ci concentreremo, invece, sui domini delle altre due. In questo caso i domini sono:

$$-\infty < t < +\infty, \quad 0 \leq r < +\infty \quad (3.2)$$

Per semplificare il problema facciamo un cambio di coordinate e introduciamo le coordinate nulle:

$$u = \frac{1}{2}(t + r), \quad v = \frac{1}{2}(t - r) \quad (3.3)$$

dove  $-\infty < u, v < +\infty$ . In queste coordinate la metrica diventa la seguente:

$$ds^2 = -2(du dv + dv du) + (u - v)^2 d\sigma^2 \quad (3.4)$$

Come si può vedere in Figura 3.1, in queste coordinate le superfici  $u = \text{costante}$  e  $v = \text{costante}$  descrivono, rispettivamente, raggi di luce entranti e uscenti, ovvero sono delle geodetiche radiali nulle. Queste sono rappresentate nel diagramma  $r - t$  come delle linee rette a  $45^\circ$ , che continuano a infinito sia in  $t$  che in  $r$ .

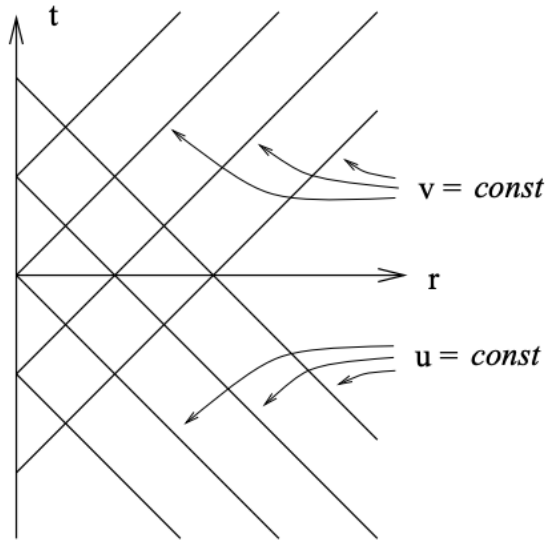


Figura 3.1: Diagramma  $r$ - $t$  dello spazio-tempo di Minkowski, dove le geodetiche nulle radiali sono rappresentate dalle linee  $u = \text{costante}$  e  $v = \text{costante}$ .

Ogni punto di questo diagramma, in realtà, non rappresenta un punto dello spazio, ma è una sfera bidimensionale.

Ora facciamo un altro cambio di coordinate che mira a portare i punti all'infinito al finito. Il cambio di coordinate è il seguente:

$$U = \arctan u \quad V = \arctan v \quad (3.5)$$

dove i domini di queste variabili sono:

$$-\frac{\pi}{2} < U < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < V < \frac{\pi}{2} \quad (3.6)$$

In queste coordinate la metrica di Minkowski diventa:

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2 U \cos^2 V} [-2(dU dV + dV dU) + \sin^2(U - V) d\sigma^2] \quad (3.7)$$

Possiamo fare un ulteriore cambio di coordinate che ci permetta di reintrodurre una coordinata spacelike ( $\chi$ ) e una coordinata timelike ( $\eta$ ):

$$\eta = U + V, \quad \chi = U - V \quad (3.8)$$

dove i domini di queste variabili sono:

$$-\pi < \eta < \pi, \quad 0 \leq \chi < \pi \quad (3.9)$$

Sostituendo nella metrica si ottiene:

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2 U \cos^2 V} (-d\eta^2 + d\chi^2 + \sin^2 \chi d\sigma^2) \quad (3.10)$$

Il termine tra parentesi ha la stessa forma della metrica iniziale, ma le coordinate  $\eta$  e  $\chi$  sono ora limitate a un dominio finito. Possiamo quindi indicare questo termine come metrica conforme, denotata da:

$$d\tilde{s}^2 = -d\eta^2 + d\chi^2 + \sin^2 \chi d\sigma^2 \quad (3.11)$$

Abbiamo così ottenuto la metrica conforme alla metrica di Minkowski di partenza. Il passaggio alla metrica conforme comporta l'introduzione del fattore conforme

$$\Omega = \cos U \cos V, \quad (3.12)$$

così che la relazione tra metrica fisica e metrica conforme diventa

$$ds^2 = \Omega^{-2} d\tilde{s}^2. \quad (3.13)$$

Il fattore conforme è positivo e regolare all'interno del dominio e si annulla sui bordi, che rappresentano le diverse infinità dello spazio-tempo di Minkowski. Esso preserva la struttura causale, permettendo una rappresentazione compatta dello spazio-tempo di partenza.

## 3.2 Interpretazione geometrica

Abbiamo introdotto una metrica in cui le coordinate spaziali e temporali non vanno più all'infinito, permettendo di rappresentare lo spazio-tempo di Minkowski in un dominio finito.

Possiamo interpretare  $\eta$  come coordinata temporale e  $\chi$ ,  $\theta$ ,  $\phi$  come coordinate spaziali. La parte spaziale della metrica non fisica,  $d\chi^2 + \sin^2 \chi d\sigma^2$ , corrisponde alla metrica di una 3-sfera  $S^3$  di raggio unitario. Di conseguenza, la metrica completa non fisica definisce uno spazio della forma  $\mathbb{R} \times S^3$ . L'intero spazio  $\mathbb{R} \times S^3$  ha normalmente come dominio

$$-\infty < \eta < +\infty, \quad 0 \leq \chi \leq \pi, \quad (3.14)$$

mentre lo spazio di Minkowski compattificato è mappato solo nella sotto-regione definita dall'Equazione 3.9. L'intera varietà  $\mathbb{R} \times S^3$  può essere visualizzata come un cilindro (Figura 3.2), dove la coordinata temporale scorre lungo l'asse verticale e ogni sezione a tempo costante (cerchio) rappresenta una 3-sfera  $S^3$ .

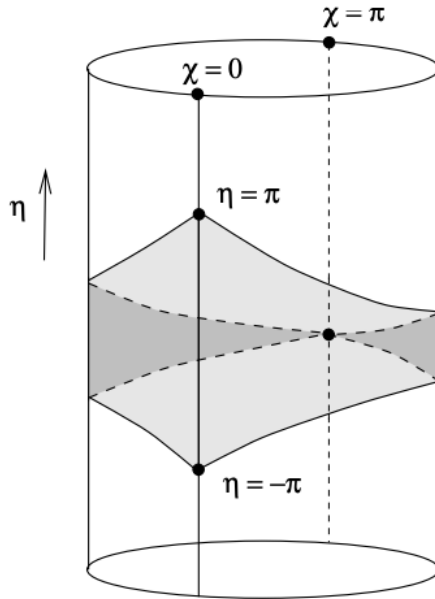


Figura 3.2: Rappresentazione cilindrica dell'intero spazio  $\mathbb{R} \times S^3$ . L'intero cilindro mostra tutte le possibili coordinate temporali  $\eta$ , mentre lo spazio di Minkowski compatto occupa solo una parte finita, ovvero quella scura.

I bordi dello spazio-tempo di Minkowski compatto rappresentano i punti a distanza infinita nello spazio-tempo originale. Infatti, in un dominio ottenuto tramite compattezza conforme, il fattore conforme soddisfa  $\Omega = 0$  sui bordi. Ciò accade quando  $U, V \rightarrow \pm\frac{\pi}{2}$ , ovvero quando  $r, t \rightarrow \pm\infty$ . Dunque i punti all'infinito dello spazio originale sono mappati sui bordi dello spazio compatto. In questa rappresentazione, l'infinito spaziale  $i^0$  e gli infiniti temporali  $i^\pm$  sono punti singoli sulla varietà cilindrica, mentre gli infiniti nulli  $\mathcal{I}^\pm$  rappresentano superfici di tipo luce.

Dal momento che questo spazio compatto è il risultato di una trasformazione conforme, la struttura causale dello spazio-tempo originale viene preservata. Questo implica che i fotoni continuano a viaggiare lungo geodetiche inclinate a  $45^\circ$  nel diagramma di Penrose, esattamente come accadrebbe in un grafico spazio-tempo standard. Sono proprio queste geodetiche nulle a definire i coni luce in ogni punto e, di conseguenza, a determinare le relazioni causali tra gli eventi della varietà.

### 3.3 Costruzione del diagramma di Penrose

Il diagramma di Penrose dello spazio-tempo di Minkowski si ottiene proiettando la regione dello spazio-tempo di Minkowski, immersa nel cilindro, su uno spazio bidimensionale

$(\eta, \chi)$ .

Per costruire correttamente lo spazio-tempo di Minkowski compattificato, è necessario determinare i confini della regione definita dalle coordinate conformi  $(\eta, \chi)$ , le quali non sono indipendenti ma sono entrambe legate a  $U$  e  $V$ .

Riprendendo i domini di  $U$  e  $V$  definiti nell'Equazione 3.6 e la definizione delle coordinate  $\eta$  e  $\chi$  introdotte nell'Equazione 3.8, si ricavano i domini di  $\eta + \chi$  e  $\eta - \chi$  nel seguente modo:

$$\eta + \chi = (U + V) + (U - V) = 2U \quad (3.15)$$

$$\eta - \chi = (U + V) - (U - V) = 2V \quad (3.16)$$

dato che il valore massimo e minimo sia di  $V$  che di  $U$  sono, rispettivamente,  $\frac{\pi}{2}$  e  $-\frac{\pi}{2}$ , segue che:

$$-\pi < \eta + \chi < \pi \quad (3.17)$$

$$-\pi < \eta - \chi < \pi \quad (3.18)$$

Tracciando le rette  $\eta = \pi + \chi$ ,  $\eta = -\pi - \chi$ ,  $\eta = \pi - \chi$  e  $\eta = -\pi + \chi$  si ottiene la regione di spazio all'interno del diagramma  $\chi - \eta$  che rappresenta lo spazio-tempo di Minkowski. Tale regione è nota come diagramma di Penrose ed è rappresentato in Figura 3.3(a). Si osserva che il diagramma ottenuto è un rombo; tuttavia, poiché nell'Equazione 3.9 abbiamo ristretto il dominio della coordinata spaziale a soli valori positivi, allora nel diagramma ottenuto dobbiamo cancellare la parte delle  $\chi < 0$ , ovvero il triangolo presente nel semipiano di sinistra. Di conseguenza il diagramma di Penrose finale è un triangolo, rappresentato in Figura 3.3(b).

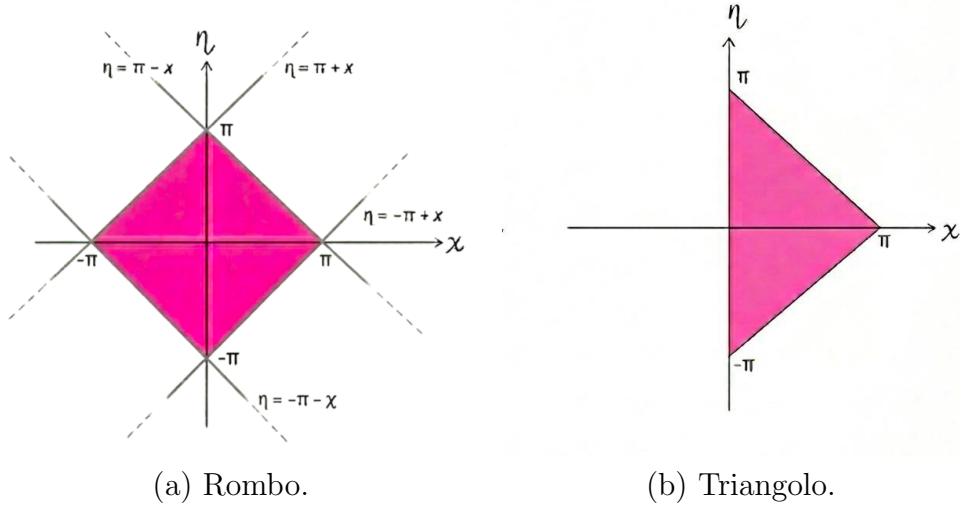


Figura 3.3: Rappresentazione della regione di Minkowski nel piano delle coordinate conformi  $(\chi, \eta)$ : (a) la regione a forma di rombo ottenuta estendendo  $\chi$  a valori negativi; (b) il diagramma di Penrose finale ottenuto restringendo il dominio a  $\chi \geq 0$

### 3.4 Analisi del diagramma di Penrose

Attraverso una compattificazione conforme, lo spazio-tempo di Minkowski viene identificato con una porzione del cilindro di Einstein. Il relativo diagramma di Penrose, mostrato in Figura 3.4, emerge dalla rappresentazione di questa regione nel piano  $(\eta, \chi)$ .

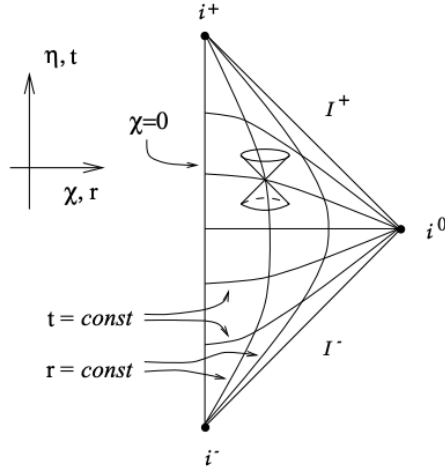


Figura 3.4: Diagramma di Penrose per lo spazio-tempo di Minkowski.

Dall'analisi del diagramma di Penrose (Figura 3.4), si osserva come l'intero spazio-tempo di Minkowski sia mappato in una regione finita. I bordi di questo diagramma rappresentano gli infiniti conformi, i quali possono essere classificati in base al tipo di geodetiche che vi terminano:

- $i^0$  (Infinito spaziale): Rappresenta il limite per  $r \rightarrow \infty$  a tempo  $t$  costante. Nel diagramma corrisponde al punto  $(\eta = 0, \chi = \pi)$ .
- $i^+$  (Infinito temporale futuro): Rappresenta il limite per  $t \rightarrow +\infty$  a  $r$  costante. Nel diagramma corrisponde al punto  $(\eta = \pi, \chi = 0)$ .
- $i^-$  (Infinito temporale passato): Rappresenta il limite per  $t \rightarrow -\infty$  a  $r$  costante. Nel diagramma corrisponde al punto  $(\eta = -\pi, \chi = 0)$ .
- $\mathcal{I}^+$  (Infinito nullo futuro): Rappresenta il limite per  $r, t \rightarrow +\infty$  con  $v = \frac{1}{2}(t - r)$  fissato. Nel diagramma corrisponde all'insieme di punti  $(\eta = \pi - \chi, 0 < \chi < \pi)$ .
- $\mathcal{I}^-$  (Infinito nullo passato): Rappresenta il limite per  $r \rightarrow +\infty$  e  $t \rightarrow -\infty$  con  $u = \frac{1}{2}(t + r)$  fissato. Nel diagramma corrisponde all'insieme di punti  $(\eta = -\pi + \chi, 0 < \chi < \pi)$ .

Ogni punto interno del diagramma rappresenta una 2-sfera, mentre i vertici  $i^0$ ,  $i^+$  e  $i^-$  corrispondono a punti singoli della varietà compattificata. Infine, gli infiniti nulli  $\mathcal{I}^+$  e  $\mathcal{I}^-$  hanno la topologia di superfici cilindriche del tipo  $\mathbb{R} \times S^2$ .

Il punto  $i^0$  rappresenta il punto di partenza e di arrivo di tutte le curve di tipo spazio. I punti  $i^-$  e  $i^+$  rappresentano, rispettivamente, il punto di partenza e di arrivo delle geodetiche di tipo tempo, le quali rappresentano particelle massive costrette a muoversi a una velocità inferiore a quella della luce. Infine,  $\mathcal{I}^-$  e  $\mathcal{I}^+$  rappresentano, rispettivamente, il luogo dei punti da dove partono e da dove arrivano tutte le geodetiche nulle, le quali descrivono raggi luminosi.

Rispetto al diagramma  $r - t$  (Figura 3.1), nel diagramma di Penrose le curve subiscono una deformazione geometrica per essere racchiuse nella regione finita del triangolo. In Tabella 3.1 è riportato il confronto tra le varie curve in questi due diagrammi.

<b>Curva</b>	<b>Diagramma <math>r - t</math></b>	<b>Diagramma di Penrose</b>
Tempo costante ( $t$ )	Retta orizzontale infinita	Curva convergente in $i^0$
Raggio costante ( $r$ )	Retta verticale infinita	Curva tra $i^-$ e $i^+$
Geodetiche nulle ( $u, v$ )	Diagonale infinita	Diagonale finita ( $\mathcal{I}^\pm$ )

Tabella 3.1: Confronto tra curve nel diagramma  $r - t$  e nel diagramma di Penrose.

Grazie alla natura conforme della mappa, i coni di luce nel diagramma di Penrose sono identici a quelli dello spazio di Minkowski standard, facilitando lo studio della causalità tra regioni distanti.

# Capitolo 4

## Compattificazione Conforme della Metrica di Schwarzschild

In questo capitolo estenderemo le tecniche di compattificazione conforme allo studio di uno spazio-tempo curvo. Partendo dalla metrica di Schwarzschild, analizzeremo come la presenza di una massa influenzi la struttura causale e come le singolarità coordinate possano essere rimosse attraverso l'introduzione delle coordinate di Kruskal. Infine, giungeremo alla costruzione del diagramma di Penrose per il buco nero.

### 4.1 Metrica di Schwarzschild

La metrica di Schwarzschild è la più importante soluzione esatta delle equazioni di campo di Einstein della relatività generale.

Essa descrive la geometria dello spazio-tempo nel vuoto all'esterno di una distribuzione di massa  $M$  a simmetria sferica e statica.

Ponendo  $T_{\mu\nu} = 0$ , Schwarzschild ricavò una metrica che descrive lo spazio-tempo in una regione priva di materia o energia, fatta eccezione per l'origine  $r = 0$ . In tale punto si ipotizza sia concentrata l'intera massa  $M$ .

La metrica di Schwarzschild in coordinate sferiche  $(r, t, \phi, \theta)$  presenta la seguente forma:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\sigma^2 \quad (4.1)$$

dove  $d\sigma^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$  rappresenta la metrica su una 2-sfera di raggio unitario. Si osserva che la metrica tende alla metrica piatta di Minkowski per  $M \rightarrow 0$  e per  $r \rightarrow \infty$ .

La metrica di Schwarzschild presenta due singolarità in  $r = 0$  e  $r = 2GM$ .

Attraverso l'analisi degli invarianti di curvatura si riesce a distinguere la natura di tali punti:  $r = 0$  è una singolarità fisica, mentre  $r = 2GM$  è una singolarità delle coordinate, ovvero è possibile eliminarla utilizzando un nuovo set di coordinate.

Per comprendere il significato fisico della singolarità in  $r = 2GM$  si prende in considerazione una geodetica nulla radiale ( $ds^2 = 0$ ,  $d\sigma^2 = 0$ ) e si ricava la pendenza del cono luce:

$$\frac{dt}{dr} = \pm \frac{1}{1 - \frac{2GM}{r}} \quad (4.2)$$

Si nota immediatamente che per  $r \rightarrow \infty$  la pendenza tende a  $\pm 1$ , recuperando il comportamento dei coni di luce nello spazio-tempo di Minkowski. Tuttavia, al tendere di  $r$  verso il raggio di Schwarzschild  $r_s = 2GM$ , il termine  $(1 - 2GM/r)^{-1}$  diverge e di conseguenza i coni luce tenderanno a schiacciarsi come illustrato in Figura 4.1.

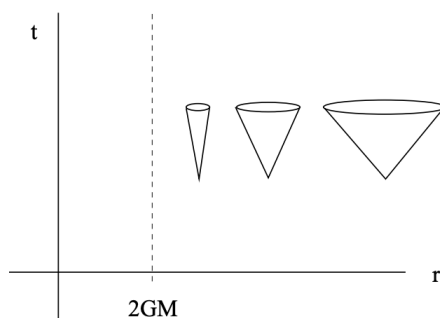


Figura 4.1: Coni luce nello spazio-tempo di Schwarzschild al variare di  $r$

Dunque, in queste coordinate, per un raggio di luce sembra impossibile raggiungere il raggio di Schwarzschild.

## 4.2 L'evoluzione del sistema di coordinate

L'obiettivo di questa sezione è mostrare come la singolarità in  $r = 2GM$  sia dovuta al sistema di coordinate di Schwarzschild e come sia possibile rimuoverla attraverso una serie di cambi di coordinate che rendano la metrica regolare su tutto l'orizzonte degli eventi.

### Coordinata tartaruga

Il primo passo consiste nell'introdurre una nuova coordinata radiale, chiamata coordinata tartaruga  $r^*$  e definita dalla relazione:

$$r^* = r + 2GM \ln \left( \frac{r}{2GM} - 1 \right) \quad (4.3)$$

Questa trasformazione mappa l'intervallo  $r \in (2GM, +\infty)$  nell'intero asse reale  $r^* \in (-\infty, +\infty)$ . Nel sistema di coordinate  $(r^*, t, \phi, \theta)$  la metrica di Schwarzschild assume la forma:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) [-dt^2 + (dr^*)^2] + r^2 d\sigma^2 \quad (4.4)$$

In queste nuove coordinate la struttura dei coni luce nel piano  $(t, r^*)$  è identica a quella dello spazio-tempo piatto di Minkowski, in quanto la pendenza di una geodetica radiale nulla è

$$\frac{dt}{dr^*} = \pm 1 \quad (4.5)$$

Tuttavia, si osserva che per  $r \rightarrow 2GM$  la coordinata  $r^* \rightarrow -\infty$ . Questo significa che, sebbene i coni luce non si "schiaccino" più, l'orizzonte degli eventi viene spostato all'infinito, confermando che le coordinate  $(t, r^*)$  non sono ancora idonee a descrivere il superamento dell'orizzonte stesso.

### Coordinate di Eddington-Finkelstein

Per risolvere il problema della coordinata  $r^*$  che diverge all'orizzonte, introduciamo le coordinate nulle

$$\begin{cases} v = t + r^* \\ w = t - r^* \end{cases} \quad (4.6)$$

dove  $v$  è definita coordinata nulla entrante, mentre  $w$  coordinata nulla uscente. Nel sistema di coordinate  $(v, r, \theta, \phi)$  la metrica assume la forma:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dv^2 + 2 dv dr + r^2 d\sigma^2 \quad (4.7)$$

Analizzando le geodetiche nulle radiali ( $ds^2 = 0, d\sigma^2 = 0$ ) in queste coordinate, si ricavano le rispettive pendenze:

$$\frac{dv}{dr} = \begin{cases} 0 & \text{(entranti)} \\ 2 \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} & \text{(uscenti)} \end{cases} \quad (4.8)$$

L'analisi delle pendenze mostra un cambiamento cruciale nella geometria dei coni di luce. Mentre all'esterno dell'orizzonte ( $r > 2GM$ ) i coni permettono traiettorie sia verso l'interno che verso l'esterno, per  $r < 2GM$  la pendenza di tutte le geodetiche (sia entranti che uscenti) punta verso l'interno del buco nero, come illustrato in Figura 4.2(a). Dunque l'orizzonte degli eventi agisce come una membrana unidirezionale: la luce e la materia possono entrarvi, ma nessuna geodetica fisica può uscirne, poiché ciò richiederebbe una velocità superiore a quella della luce.

Invece, nel sistema di coordinate  $(w, r, \theta, \phi)$ , la metrica assume la forma:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) dw^2 - 2 dw dr + r^2 d\sigma^2 \quad (4.9)$$

Analizzando le geodetiche nulle radiali ( $ds^2 = 0, d\sigma^2 = 0$ ) in queste coordinate, si ricavano le rispettive pendenze:

$$\frac{dw}{dr} = \begin{cases} 0 & \text{(uscenti)} \\ -2 \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} & \text{(entranti)} \end{cases} \quad (4.10)$$

L'analisi delle pendenze mostra come, a differenza del caso precedente, per  $r < 2GM$  la pendenza di tutte le geodetiche (sia entranti che uscenti) punta verso l'esterno, come illustrato in Figura 4.2(b). Dunque, anche in questo caso l'orizzonte degli eventi agisce come una membrana unidirezionale, ma con un comportamento opposto rispetto a prima: la luce e la materia possono solo uscire dalla regione interna ma nessuna geodetica fisica può entrarvi, poiché ciò richiederebbe una velocità superiore a quella della luce. Questa regione descrive matematicamente un "buco bianco", una soluzione in cui nulla può entrare e tutto deve uscire.

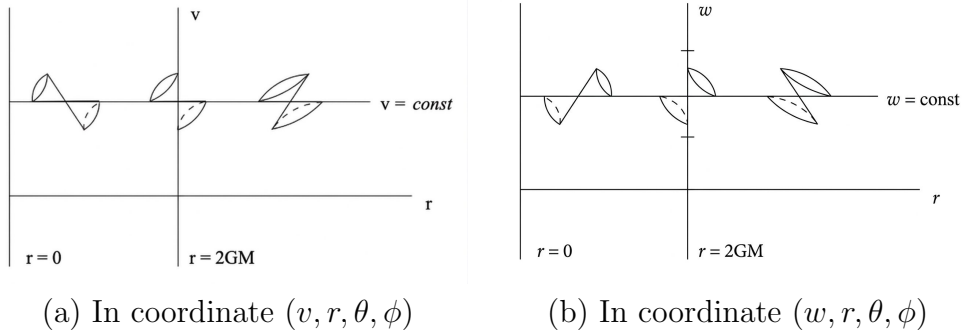


Figura 4.2: Rappresentazione della struttura causale e dei coni di luce nelle diverse regioni dello spazio-tempo (esterno, orizzonte e interno) per i sistemi di coordinate di Eddington-Finkelstein entranti (a) e uscenti (b).

Le coordinate entranti  $(v, r, \theta, \phi)$  e le coordinate uscenti  $(w, r, \theta, \phi)$  formano un atlante dello spazio-tempo formato da due carte differenti: una che descrive bene il buco nero (entrante) e una che descrive il buco bianco (uscente). Serve quindi un sistema di coordinate che permetta di unire queste due in un'unica mappa globale che copra tutte le regioni possibili dello spazio-tempo di Schwarzschild. Queste sono le coordinate di Kruskal.

## Coordinate di Kruskal

Per ottenere un'unica mappa che copra tutto lo spazio-tempo, si definiscono le coordinate nulle di Kruskal:

$$\begin{cases} v' = e^{\frac{v}{4GM}} \\ w' = -e^{-\frac{w}{4GM}} \end{cases} \quad (4.11)$$

Nel sistema di coordinate  $(v', w', \theta, \phi)$  la metrica è la seguente:

$$ds^2 = -\frac{32(GM)^3}{r} e^{-\frac{r}{2GM}} dv' dw' + r^2 d\sigma^2 \quad (4.12)$$

Per tornare a una visione con una coordinata temporale  $T$  e una spaziale  $R$ , definiamo:

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2}(v' + w') \\ R = \frac{1}{2}(v' - w') \end{cases} \quad (4.13)$$

In queste nuove coordinate, l'elemento di linea diventa:

$$ds^2 = \frac{32(GM)^3}{r} e^{-\frac{r}{2GM}} (-dT^2 + dR^2) + r^2 d\sigma^2 \quad (4.14)$$

dove la coordinata radiale  $r$  è definita implicitamente dalla relazione:

$$R^2 - T^2 = \left( \frac{r}{2GM} - 1 \right) e^{\frac{r}{2GM}} \quad (4.15)$$

Si osserva che nelle coordinate  $(T, R, \theta, \phi)$  la luce torna a essere una linea a  $45^\circ$ , esattamente come nello spazio-tempo di Minkowski. Infatti, analizzando una geodetica radiale nulla si ricava che la pendenza è:

$$\frac{dT}{dR} = \pm 1 \quad (4.16)$$

Inoltre, le superfici a  $r$  costante sono delle iperboli definite dall'Equazione 4.15, mentre le superfici a  $t$  costante sono rette passanti per l'origine del piano di Kruskal, la cui pendenza è legata alla relazione  $t = 4GM \operatorname{arctanh}\left(\frac{T}{R}\right)$ . Infine, nelle coordinate di Kruskal, la singolarità fisica in  $r = 0$  non è più rappresentata da un asse verticale, ma da un'iperbole  $T^2 - R^2 = 1$ . Quindi la condizione fisica di esistenza dello spazio-tempo ( $r > 0$ ) si traduce nel vincolo matematico  $T^2 - R^2 < 1$ .

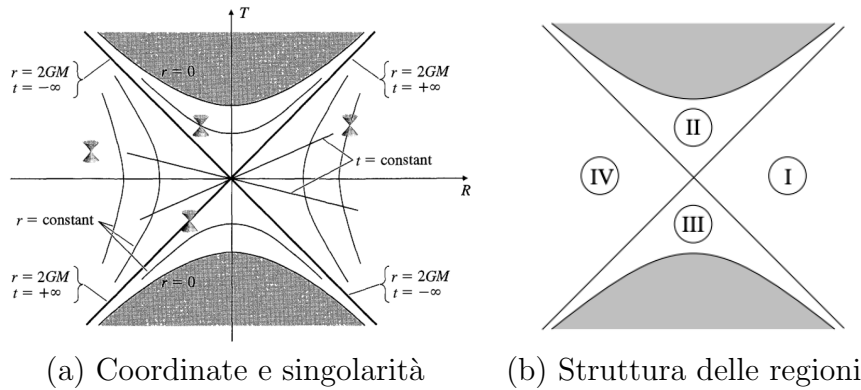


Figura 4.3: Diagramma di Kruskal. La figura (a) mostra la singolarità  $r=0$ , le superfici di tempo costante e le superfici a  $r$  costante. La figura (b) mostra come il piano di Kruskal venga suddiviso in 4 regioni diverse dalle geodetiche radiali nulle.

Come si può vedere in Figura 4.3(b), il diagramma di Kruskal permette di identificare quattro regioni nello spazio-tempo separate dagli orizzonti degli eventi, i quali sono definiti dalle rette  $T = \pm R$ :

- Regione I ( $R > |T|$ ): Rappresenta l'universo esterno ( $r > 2GM$ ).
- Regione II ( $T > |R|$ ): Rappresenta l'interno del buco nero ( $r < 2GM$ ). Una volta che una particella attraversa l'orizzonte degli eventi ( $T = R$ ) ed entra nel buco nero, il suo cono di luce è orientato in modo tale che ogni traiettoria futura termini inevitabilmente sulla singolarità in  $r = 0$  (l'iperbole superiore).
- Regione III ( $R < -|T|$ ): È un secondo universo esterno, speculare alla Regione I. Sebbene sia matematicamente identico al nostro universo, è causalmente separato da esso: nessun segnale può viaggiare dalla Regione I alla III senza superare la velocità della luce.
- Regione IV ( $T < -|R|$ ): Rappresenta l'interno del buco bianco. In questa regione, tutte le traiettorie fisiche devono necessariamente uscire verso le regioni esterne (I o III) e nulla può mai entrarvi.

### 4.3 Calcolo del fattore conforme

Le coordinate di Kruskal hanno permesso di eliminare le singolarità coordinate e di mappare l'intero spazio-tempo di Schwarzschild. Tuttavia, sebbene la coordinata temporale sia limitata dalla singolarità, le coordinate  $(T, R)$  risultano illimitate verso l'infinito spaziale e lungo le direzioni nulle, rendendo difficile l'analisi del comportamento

asintotico delle geodetiche. Per ovviare a questo problema, si utilizza la tecnica delle compattificazioni conformi.

Partendo dalla metrica espressa nelle coordinate nulle di Kruskal (Eq. 4.12), definite nel dominio  $-\infty < v', w' < +\infty$ , si introduce il seguente cambio di coordinate:

$$\begin{cases} v'' = \arctan(v') \\ w'' = \arctan(w') \end{cases} \quad (4.17)$$

Grazie alle proprietà della funzione arcotangente, l'intero spazio-tempo viene mappato in un dominio finito:

$$-\frac{\pi}{2} < v'', w'' < \frac{\pi}{2} \quad (4.18)$$

In queste coordinate la metrica di Schwarzschild diventa:

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2(v'') \cos^2(w'')} \left[ -\frac{32G^3 M^3}{r} e^{-r/2GM} dv'' dw'' \right] + r^2 d\sigma^2 \quad (4.19)$$

È possibile effettuare un ulteriore cambio di coordinate per reintrodurre una coordinata di tipo tempo  $T'$  e una di tipo spazio  $R'$ , definendo:

$$\begin{cases} T' = v'' + w'' \\ R' = v'' - w'' \end{cases} \quad (4.20)$$

I domini matematici di queste variabili, indotti dalle trasformazioni precedenti, sono:

$$-\pi < T' < \pi, \quad -\pi < R' < \pi \quad (4.21)$$

In questo nuovo sistema di coordinate la metrica diventa:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{8G^3 M^3 e^{-r/2GM}}{r \cos^2(v'') \cos^2(w'')} (-dT'^2 + dR'^2) + r^2 d\sigma^2 \\ &= \frac{8G^3 M^3 e^{-r/2GM}}{r \cos^2(v'') \cos^2(w'')} [-dT'^2 + dR'^2 + \left( \frac{r \cos^2(v'') \cos^2(w'')}{8G^3 M^3 e^{-r/2GM}} \right) r^2 d\sigma^2] \end{aligned} \quad (4.22)$$

Si definisce  $\tilde{r}^2 = r^3 \left( \frac{\cos^2(v'') \cos^2(w'')}{8G^3 M^3 e^{-r/2GM}} \right)$  in modo che la metrica si possa riscrivere come:

$$ds^2 = \frac{8G^3 M^3 e^{-r/2GM}}{r \cos^2(v'') \cos^2(w'')} [-dT'^2 + dR'^2 + \tilde{r}^2 d\sigma^2] \quad (4.23)$$

dove  $d\tilde{s}^2 = -dT'^2 + dR'^2 + \tilde{r}^2 d\sigma^2$  è la metrica conforme dello spazio-tempo di Schwarzschild. Il passaggio alla metrica conforme comporta l'introduzione del fattore conforme:

$$\Omega^2 = \frac{r \cos^2(v'') \cos^2(w'')}{8G^3 M^3 e^{-r/2GM}} \quad (4.24)$$

così che la relazione tra metrica fisica e metrica conforme diventa:

$$d\tilde{s}^2 = \Omega^2 ds^2 = \left( \frac{r \cos^2(v'') \cos^2(w'')}{8G^3 M^3 e^{-r/2GM}} \right) ds^2 \quad (4.25)$$

Il fattore conforme è positivo e regolare all'interno del dominio e si annulla sui bordi, che rappresentano le diverse infinità dello spazio-tempo di Schwarzschild. Esso preserva la struttura causale, permettendo una rappresentazione compatta dello spazio-tempo di partenza.

## 4.4 Il diagramma di Penrose

Il risultato della compattificazione conforme è la rappresentazione dell'intero spazio-tempo di Schwarzschild in una regione finita del piano  $(T', R')$ , nota come diagramma di Penrose. Nonostante la deformazione delle distanze fisiche, la struttura causale dello spazio-tempo rimane invariata; infatti, le geodetiche nulle continuano a essere rappresentate da rette inclinate a  $\pm 45^\circ$ , esattamente come nel diagramma di Kruskal. Ogni punto nel diagramma rappresenta una 2-sfera di raggio  $r$ , e la mappatura permette di visualizzare in un unico schema finito sia l'infinito asintotico che le regioni interne del buco nero.

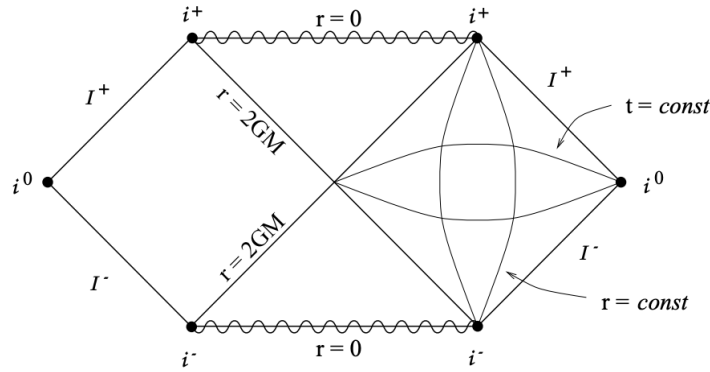


Figura 4.4: Diagramma di Penrose per lo spazio-tempo di Schwarzschild

La singolarità fisica, definita nelle coordinate di Kruskal dall'iperbole  $T^2 - R^2 = 1$ , viene mappata nel diagramma di Penrose come una linea retta orizzontale situata a  $T' = \pm\pi/2$ .

La forma caratteristica del diagramma di Penrose per lo spazio-tempo di Schwarzschild deriva dall'intersezione di due vincoli: i limiti matematici della funzione arcotangente e il vincolo fisico della singolarità. La funzione arcotangente ha portato a definire delle variabili  $T', R' \in (-\pi, \pi)$ . Tuttavia, occorre considerare la condizione fisica  $r > 0$ , che nelle coordinate di Kruskal era espressa come  $T^2 - R^2 < 1$ . Traducendo questo vincolo

nelle nuove coordinate, si osserva che la coordinata temporale  $T'$  risulta ulteriormente limitata. Dunque, lo spazio-tempo è fisicamente definito solo nell'intervallo:

$$-\frac{\pi}{2} < T' < \frac{\pi}{2} \quad -\pi < R' < \pi \quad (4.26)$$

L'orizzonte degli eventi, che nelle coordinate di Schwarzschild corrisponde alla superficie  $r = 2GM$ , nelle coordinate di Kruskal è definito dalla condizione:

$$T^2 - R^2 = 0 \implies T = \pm R \quad (4.27)$$

Data la natura della compattificazione conforme che preserva gli angoli, questa relazione si mantiene inalterata nel piano di Penrose  $(T', R')$ , dove l'orizzonte è descritto dalle bisettrici:

$$T'^2 - R'^2 = 0 \implies T' = \pm R' \quad (4.28)$$

I bordi del diagramma di Penrose rappresentano gli infiniti conformi, i quali possono essere classificati in base al tipo di geodetiche che vi terminano:

- $i^0$  (infinito spaziale): Rappresenta il limite per  $r \rightarrow \infty$  a  $t$  costante. Nel diagramma corrisponde ai punti  $(R' = \pm\pi, T' = 0)$ . Sono i punti verso cui tendono tutte le curve di tipo spacelike.
- $i^+$  (infinito temporale futuro): Rappresenta il limite per  $t \rightarrow +\infty$  a  $r$  costante. Nel diagramma corrisponde ai punti  $(R' = \pm\pi/2, T' = \pi/2)$ . È il luogo verso cui tendono tutte le geodetiche di tipo timelike percorse da particelle massive che non cadono nel buco nero.
- $i^-$  (infinito temporale passato): Rappresenta il limite per  $t \rightarrow -\infty$  a  $r$  costante. Nel diagramma corrisponde ai punti  $(R' = \pm\pi/2, T' = -\pi/2)$ . È il punto di partenza di tutte le geodetiche di tipo tempo.
- $\mathcal{I}^+$  (infinito nullo futuro): Rappresenta il limite per  $r, t \rightarrow +\infty$  con  $w''$  fissato. Nel diagramma corrisponde all'insieme di punti  $(\pi/2 < R' < \pi, T' = \pi - R')$  oppure  $(-\pi < R' < -\pi/2, T' = \pi + R')$  se ci troviamo nell'universo di sinistra. È la regione dove terminano tutte le geodetiche nulle che sfuggono all'attrazione gravitazionale del buco nero.
- $\mathcal{I}^-$  (infinito nullo passato): Rappresenta il limite per  $r \rightarrow +\infty$  e  $t \rightarrow -\infty$  con  $v''$  fissato. Nel diagramma corrisponde all'insieme di punti  $(\pi/2 < R' < \pi, T' = R' - \pi)$  oppure  $(-\pi < R' < -\pi/2, T' = -R' - \pi)$  se ci troviamo nell'universo di sinistra. È la regione da dove partono tutte le geodetiche nulle.

La suddivisione dello spazio-tempo nel diagramma di Penrose riflette fedelmente quella del diagramma di Kruskal, mantenendo invariate le relazioni causali e la classificazione nelle quattro regioni fondamentali:

- Regione I e III (Universi esterni): Rappresentano due regioni asintoticamente piatte, causalmente disconnesse tra loro. Entrambe sono delimitate verso l'esterno dagli infiniti conformi ( $\mathcal{I}^\pm, i^0, i^\pm$ ).
- Regione II (Buco nero): Regione da cui è possibile entrare ma non uscire. Questa regione è delimitata dall'orizzonte degli eventi e dalla singolarità fisica  $r = 0$ .
- Regione IV (Buco Bianco): Regione da cui è possibile uscire ma non entrare. Questa regione è delimitata dall'orizzonte degli eventi e dalla singolarità fisica  $r = 0$ .

Il vantaggio cruciale della rappresentazione di Penrose rispetto a quella di Kruskal risiede nella compattificazione: mentre in Kruskal le Regioni I e III si estendono all'infinito, rendendo difficile visualizzare il destino asintotico delle geodetiche, nel diagramma di Penrose l'intero spazio-tempo è racchiuso in una regione finita.

# Conclusioni

Il presente lavoro di tesi ha permesso di approfondire come le tecniche di compattificazione conforme rappresentino uno strumento imprescindibile per lo studio della struttura globale dello spazio-tempo. L'introduzione delle trasformazioni conformi ha permesso di affrontare una delle principali difficoltà nello studio globale degli spazi-tempo: la presenza di regioni che si estendono fino all'infinito. Infatti, attraverso le tecniche di compattificazione conforme è stato possibile rappresentare spazi infiniti all'interno di domini finiti, senza alterarne la struttura causale.

L'efficacia di queste tecniche è emersa chiaramente attraverso l'analisi dei diversi modelli trattati. Un primo esempio è stato fornito dal modello del disco di Poincaré, il quale ha illustrato visivamente come una metrica iperbolica infinita possa essere rappresentata all'interno di un disco unitario, mantenendo inalterati gli angoli pur contraendo le distanze fisiche in prossimità del bordo.

Successivamente, tali tecniche sono state applicate allo spazio-tempo di Minkowski, ottenendo il corrispondente diagramma di Penrose a forma triangolare, nel quale i diversi infiniti (temporale futuro e passato, spaziale e nulli) vengono rappresentati sui bordi del diagramma. Questa rappresentazione permette di visualizzare in maniera immediata la struttura causale dello spazio-tempo piatto e il comportamento delle geodetiche nulle che delimitano i coni di luce.

Infine, l'analisi è stata estesa allo spazio-tempo di Schwarzschild. Attraverso l'introduzione delle coordinate di Kruskal è stato possibile estendere la soluzione oltre l'orizzonte degli eventi e studiarne la struttura globale. La successiva compattificazione conforme ha portato alla costruzione di un diagramma di Penrose formato da più regioni a forma di diamante. In questa rappresentazione emergono chiaramente le quattro regioni caratteristiche dello spazio-tempo esteso: due regioni esterne asintoticamente piatte, la regione del buco nero e quella del buco bianco. Inoltre, il diagramma mette in evidenza la natura dell'orizzonte degli eventi come una superficie a  $45^\circ$ , distinguendolo dalla singolarità  $r = 0$ , che invece appare come una linea orizzontale.

Nel complesso, i diagrammi di Penrose ottenuti permettono di rappresentare in modo compatto e intuitivo la struttura globale degli spazi-tempo analizzati. Essi costituiscono

quindi uno strumento particolarmente efficace per lo studio della struttura causale e della geometria globale degli spazi-tempo relativistici e per le soluzioni di buco nero.

# Bibliografia

- [1] V. I. Arnold, *Metodi matematici della meccanica classica*, Editori Riuniti, Roma, 1979.
- [2] V. Barone, *Relatività: Principi e applicazioni*, Bollati Boringhieri, 2004.
- [3] G. Bruschi, *Esposizione del problema di Einstein-Straus*, Tesi di Laurea, Università di Bologna, 2022.
- [4] S. M. Carroll, *Lecture Notes on General Relativity*, arXiv:gr-qc/9712019, 1997.
- [5] P. Di Meo, *Diagrammi di Penrose*, Tesi di Laurea, Università degli Studi di Napoli Federico II, 2017.
- [6] B. Martelli, *Geometria Iperbolica*, Dispense didattiche, Università di Pisa, 2012.