

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI  
BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

# ISOMETRIE E GRUPPI DI COXETER

Relatrice:  
Prof.ssa  
Alessia Cattabriga

Presentata da:  
Giorgia Martinelli

Anno Accademico 2024-2025

*Oh, I looked into  
that philosopher you quoted.*

*Jagger.*

*And you're right:  
you can't always get what you want.*

*But as it turns out,  
if you try sometimes,  
you get what you need.*

*-Dr. Cuddy, House M.D., 1x01*





# Indice

<b>1</b>	<b>Isometrie dello spazio euclideo <math>n</math>-dimensionale</b>	<b>11</b>
1.1	Spazi vettoriali euclidei . . . . .	11
1.2	Isometrie vettoriali . . . . .	14
1.3	Un teorema di struttura per le isometrie vettoriali . . . . .	21
1.4	Un altro modo di vedere le isometrie . . . . .	23
1.5	Sottospazi affini e isometrie affini . . . . .	25
<b>2</b>	<b>Isometrie vettoriali di <math>\mathbb{R}^2</math> e <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>31</b>
2.1	Isometrie vettoriali di $\mathbb{R}^2$ . . . . .	31
2.2	Alcuni sottogruppi finiti di $O_2(\mathbb{R})$ . . . . .	35
2.3	Isometrie vettoriali di $\mathbb{R}^3$ . . . . .	40
2.4	Sottogruppi finiti di $O_3(\mathbb{R}^3)$ . . . . .	45
2.5	I cinque poliedri regolari . . . . .	60
<b>3</b>	<b>Gruppi di Coxeter</b>	<b>63</b>
3.1	Una prospettiva geometrica . . . . .	63
3.2	Una prospettiva algebrica . . . . .	66
3.3	Sottogruppi parabolici . . . . .	86
3.4	Domini fondamentali . . . . .	89
3.5	Classificazione dei gruppi finiti di riflessione . . . . .	94
3.6	Gruppi cristallografici . . . . .	105
3.7	Costruzione dei sistemi di radici . . . . .	108
<b>A</b>	<b>Nozioni di base</b>	<b>117</b>



# Introduzione

L'obiettivo di questa tesi è studiare i gruppi di Coxeter, mettendo in evidenza il legame tra la loro struttura algebrica e quella geometrica.

Per farlo, partiamo introducendo, nel primo capitolo, la nozione di isometria di uno spazio euclideo, definendola come una funzione dello spazio in se stesso che ne preserva le distanze.

Iniziamo studiando le isometrie vettoriali di uno spazio euclideo di dimensione  $n$ , mostrando che preservano il prodotto scalare. Presentiamo quindi il teorema di caratterizzazione delle isometrie vettoriali, secondo cui ogni isometria vettoriale può essere espressa come composizione di al più  $n$  riflessioni ortogonali. Dimostriamo inoltre che ogni isometria può essere scritta come composizione di una traslazione e di un'isometria vettoriale; questo risultato ci permette di descrivere la struttura del gruppo delle isometrie come prodotto semidiretto tra il gruppo delle traslazioni e il gruppo delle isometrie vettoriali.

Concludiamo il capitolo introducendo le nozioni di spazio affine e sottospazio affine, che vengono utilizzate nel capitolo successivo per lo studio dei gruppi di simmetria di alcuni poligoni e poliedri regolari.

Nel secondo capitolo ci concentriamo sullo studio delle isometrie vettoriali in dimensione 2 e 3. Iniziamo classificando le isometrie vettoriali di  $\mathbb{R}^2$  e introducendo la nozione di poligono regolare; studiamo quindi il gruppo di simmetria della circonferenza, del triangolo equilatero e del quadrato, dove per gruppo di simmetria di un insieme intendiamo il gruppo di isometrie che stabilizzano quell'insieme.

Successivamente classifichiamo le isometrie di  $\mathbb{R}^3$ . Introduciamo quindi la definizione di poliedro regolare e studiamo i gruppi di simmetria di quei poliedri regolari che vengono anche chiamati solidi platonici. In particolare, analizziamo i gruppi di simmetria del cubo, del tetraedro e del dodecaedro. Introduciamo inoltre la nozione di poliedri duali dimostrando che cubo e ottaedro, così come dodecaedro e icosaedro, sono duali e hanno quindi gruppi di simmetria isomorfi.

Proseguiamo poi studiando il gruppo ciclico  $\mathcal{C}_n$  e il gruppo diedrale  $D_n$ , interpretandoli come gruppi di simmetria di poligoni regolari considerati in un piano di  $\mathbb{R}^3$ . Dimostriamo che questi due gruppi, insieme ai sottogruppi di isometrie positive dei gruppi di simmetria dei poliedri regolari studiati in precedenza, sono, a meno di isomorfismo, tutti i sottogruppi di  $SO_3(\mathbb{R})$ . Infine, utilizzando un teorema di classificazione dei sottogruppi di  $O_3(\mathbb{R})$ , dimostriamo che i poliedri chiamati solidi platonici sono tutti e soli i poliedri regolari esistenti.

Nel terzo capitolo studiamo i gruppi di Coxeter, ovvero i gruppi generati da riflessioni. Iniziamo introducendoli dal punto di vista geometrico, presentandone un esempio concreto: il caleidoscopio.

Successivamente, studiamo i gruppi di Coxeter da una prospettiva algebrica, passando ad una descrizione più interna e strutturale.

Dopo aver presentato alcuni esempi di gruppi di riflessioni, introduciamo il concetto di sistema di radici, che ci permette di rappresentare un gruppo finito di riflessioni attraverso un insieme finito di vettori stabile rispetto all'azione del gruppo. Dimostriamo quindi che ogni gruppo finito di riflessioni può essere associato ad un opportuno sistema di radici e, viceversa, che ogni sistema di radici determina un gruppo finito di riflessioni.

Dato che un sistema di radici può contenere molti più elementi rispetto al necessario, introduciamo le nozioni di sistema positivo e di sistema semplice. Dimostriamo che ogni gruppo di riflessioni è in realtà generato dalle riflessioni associate alle sue radici semplici. Questo ci consente di sostituire un sistema di radici generalmente molto ampio con un insieme minimale di generatori,

---

trovando in questo modo una rappresentazione il più economica ed efficace possibile della struttura del gruppo di riflessioni.

Introduciamo poi la nozione di lunghezza di un elemento del gruppo, cioè il numero minimo di riflessioni semplici necessarie per ottenerlo. Dimostriamo che la lunghezza di un elemento coincide con il numero di radici positive che l'elemento manda in radici negative. Questo ci permette di ottenere importanti proprietà delle espressioni ridotte di un elemento, tra cui la condizione di cancellazione e quella di scambio.

Utilizziamo poi i risultati ottenuti per ottenere una rappresentazione astratta del gruppo in termini di generatori e relazioni. In particolare, mostriamo che il gruppo è completamente determinato dalle riflessioni semplici e dagli ordini dei prodotti a due a due di tali generatori. Questo ci permette di definire i gruppi di Coxeter come quelli che ammettono una tale rappresentazione.

Proseguiamo poi studiando i sottogruppi parabolici di un gruppo di Coxeter, cioè quei sottogruppi generati da sottoinsiemi di riflessioni semplici. Mostriamo che tali sottogruppi ereditano naturalmente la struttura dei gruppi di riflessione e che ogni elemento del gruppo può essere scritto in modo unico come prodotto di un elemento di un sottogruppo parabolico e di un rappresentante di lunghezza minima della corrispondente classe laterale. Questa decomposizione ci permette di analizzare la struttura del gruppo e di introdurre il polinomio di Poincaré, che descrive la distribuzione degli elementi di  $W$  rispetto alla funzione lunghezza.

In seguito classifichiamo i gruppi finiti di riflessione tramite i grafi di Coxeter, mostrando che il gruppo è determinato, a meno di isomorfismo, dal proprio grafo. Vedremo che la classificazione si può ricondurre in realtà allo studio dei grafi connessi di tipo positivo.

Nella parte finale, introduciamo i gruppi cristallografici e i sistemi di radici cristallografici. Costruiamo quindi esplicitamente i principali sistemi di radici. Infine, introduciamo anche i casi non cristallografici, in particolare i tipi  $H_3$  e  $H_4$ .



# Capitolo 1

## Isometrie dello spazio euclideo $n$ -dimensionale

L'obiettivo di questo capitolo è fornire una caratterizzazione delle isometrie degli spazi vettoriali euclidei  $n$ -dimensionali. A tal fine, iniziamo introducendo la nozione di spazio euclideo, dotato di un prodotto scalare. Questo ci consente di definire una norma su tale spazio, dalla quale deriva una distanza. Una volta stabilito questo quadro, possiamo definire le isometrie come quelle applicazioni che preservano la distanza e studiarne le principali proprietà, che ci permetteranno di ottenere una loro caratterizzazione.

### 1.1 Spazi vettoriali euclidei

Iniziamo formalizzando il concetto di spazio vettoriale euclideo.

**Definizione 1.1.1.** Uno **spazio vettoriale euclideo** è una coppia  $(E, \beta)$ , in cui  $E$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$  e  $\beta$  è una forma bilineare simmetrica definita positiva<sup>1</sup> su  $E$ , detta anche **prodotto scalare**.

---

<sup>1</sup>Vedere la Definizione A.0.5.

Come abbiamo anticipato, il nostro obiettivo è quello di definire una norma <sup>2</sup> su  $E$ , per poter poi introdurre una distanza <sup>3</sup>. Per farlo, è necessario studiare alcune proprietà del prodotto scalare  $\beta$ , a partire dal legame tra prodotto scalare e dipendenza lineare di due vettori dello spazio euclideo.

**Proposizione 1.1.1.** (*Disuguaglianza di Schwarz*). *Sia  $(E, \beta)$  uno spazio euclideo e siano  $v, w$  vettori di  $E$ . Allora vale*

$$\beta(v, w)^2 \leq \beta(v, v)\beta(w, w)$$

*e l'uguaglianza vale se e solo se  $v$  e  $w$  sono linearmente dipendenti.*

*Dimostrazione.* Se uno dei due vettori è il vettore nullo, la dimostrazione è banale. Supponiamo quindi che sia  $v$  che  $w$  siano diversi da 0. Definiamo  $\psi(t) = \beta(v + tw, v + tw)$ , con  $t \in \mathbb{R}$ . Abbiamo che  $\psi(t) \geq 0, \forall t$ .

Riscriviamo  $\psi(t)$  come  $\psi(t) = \beta(v, v) + 2t\beta(v, w) + t^2\beta(w, w)$ . Dato che l'equazione  $\psi(t) = 0$  non può avere due radici distinte, altrimenti troverei un vettore diverso da zero che annulla  $\beta$  definita positiva, abbiamo che il discriminante  $\Delta$  è minore o uguale a zero, cioè  $\Delta = 4\beta(v, w)^2 - 4\beta(v, v)\beta(w, w) \leq 0$ , da cui otteniamo la disuguaglianza cercata.

Inoltre,  $\Delta = 0$  implica che esiste un  $t_0$  tale che  $\psi(t_0) = 0$ , cioè  $\beta(v + t_0w, v + t_0w) = 0$ , ma questo accade se e solo se  $v + t_0w = 0$ , cioè se  $v$  e  $w$  sono linearmente dipendenti.  $\square$

La disuguaglianza di Schwarz ci consente di definire una norma sullo spazio  $(E, \beta)$ , che induce una distanza.

**Corollario 1.1.1.** *Sia  $(E, \beta)$  uno spazio vettoriale euclideo. La mappa  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$  che manda  $v \in E$  in  $\sqrt{\beta(v, v)}$  è una norma.*

*Vale anche che  $\|v + w\| = \|v\| + \|w\|$  se e solo se  $v$  e  $w$  sono linearmente dipendenti.*

*In particolare, si ha che la mappa  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $d(v, w) = \|v - w\|$ , è una distanza su  $E$ .*

---

<sup>2</sup>Vedere la Definizione A.0.1

<sup>3</sup>Vedere la Definizione A.0.2

*Dimostrazione.* Iniziamo mostrando che  $\|\cdot\|$  così definita è una norma.

Per le proprietà della radice quadrata, è vero che  $\|v\| \geq 0 \forall v \in E$  e vale l'uguaglianza se e solo se  $v = 0$ . Inoltre  $\|\lambda v\| = \sqrt{\beta(\lambda v, \lambda v)} = \sqrt{\lambda^2 \beta(v, v)} = |\lambda| \|v\|$ . Mostriamo quindi che  $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$ . Si ha che  $\|v+w\|^2 = \beta(v+w, v+w) = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\beta(v, w)$ . Dalla disuguaglianza di Schwarz (Proposizione 1.1.1) segue che  $\beta(v, w)^2 \leq \|v\|^2 \|w\|^2$ , da cui  $\beta(v, w) \leq \|v\| \|w\|$ . Quindi otteniamo  $\|v+w\|^2 \leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\| \|w\| = (\|v\| + \|w\|)^2$ , da cui  $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$ . L'uguaglianza vale se e solo se vale l'uguaglianza nella Proposizione 1.1.1 cioè se e solo se  $v$  e  $w$  sono linearmente dipendenti. Abbiamo quindi mostrato che  $\|\cdot\|$  è una norma.

Per mostrare che  $d(\cdot, \cdot)$  è una distanza, si ragiona in modo analogo. Le proprietà 1., 2. e 3. della Definizione A.0.2 seguono direttamente dalle proprietà della norma e della radice quadrata.

Mostriamo ora che  $d(v, w) \leq d(v, z) + d(z, w)$ . L'uguaglianza vale se e solo se  $\|v-w\| \leq \|v-z\| + \|z-w\|$  ma questo è vero per la disuguaglianza triangolare della norma.

Otteniamo così la tesi. □

Ora, consideriamo lo spazio vettoriale euclideo  $(E, \beta)$  e fissiamo una base  $(v_1, \dots, v_n)$  di  $E$ . Vogliamo associare a  $\beta$  una matrice simmetrica  $B$  definita nel modo seguente:

$$B_{i,j} = \beta(v_i, v_j).$$

Inoltre, si ha anche che ogni matrice simmetrica definisce un prodotto scalare: fissata la matrice simmetrica  $B$ , per ogni coppia di vettori il prodotto scalare è definito da

$$\langle v, w \rangle = v^t B w.$$

**Esempio 1.1.1. Il prodotto scalare standard in  $\mathbb{R}^n$ :** nel caso di  $E = \mathbb{R}^n$ , possiamo quindi definire il prodotto scalare standard come quello definito dalla matrice identità. Si avrà quindi  $\langle v, w \rangle = v^t I_n w = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ , dove  $a_i$  e  $b_i$  sono le coordinate rispetto alla base fissata di  $v$  e  $w$  rispettivamente.

Vogliamo mostrare ora che è possibile esprimere ogni prodotto scalare  $\beta$  come il prodotto scalare standard. Questo ci permetterà di alleggerire la notazione ed esprimerci in maniera più sintetica.

Dato che  $\beta$  è un prodotto scalare, il Teorema di Sylvester <sup>4</sup> ci dice che esiste una base ortonormale per  $\beta$ . Sia  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  tale base; abbiamo che  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\beta) = I_n$ . Quindi, se  $v = \sum_{i=1}^n a_i e_i$  e  $w = \sum_{i=1}^n b_i e_i$ , con  $a_i, b_i \in \mathbb{R} \forall i$ , abbiamo che  $\beta(v, w) = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = \langle v, w \rangle$ , che è quello che volevamo.

Elenchiamo ora alcune proprietà che legano distanza, norma e prodotto scalare in uno spazio euclideo.

**Osservazione 1.1.1.** In uno spazio euclideo  $(E, \beta)$ , sia  $\mathcal{B}$  una base ordinata ortonormale di  $\beta$  e siano  $v = \sum_{i=1}^n a_i e_i$  e  $w = \sum_{i=1}^n b_i e_i$ . Allora, rispetto a questa base, valgono le seguenti:

1.  $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$ ;
2.  $d(v, w) = \|v - w\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}$ ;
3.  $a_i = \langle v, e_i \rangle$ ;
4.  $(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2)$ .

## 1.2 Isometrie vettoriali

Per comodità, assumiamo di star lavorando con basi ortonormali, così che il prodotto scalare  $\beta$  si riduca a quello standard.

Siamo pronti ora per introdurre formalmente il concetto di isometria.

**Definizione 1.2.1.** Sia  $E$  uno spazio euclideo. Un'isometria  $\varphi : E \rightarrow E$  è una mappa che preserva la distanza, cioè tale che per ogni  $v, w$  vettori di  $E$ , vale  $\|\varphi(v) - \varphi(w)\| = \|v - w\|$ .

---

<sup>4</sup>Vedi Teorema A.0.1

Dato che il nostro obiettivo è quello di descrivere i gruppi generati dalle riflessioni vettoriali di uno spazio euclideo, formalizziamo il concetto di riflessione e mostriamo che le riflessioni sono effettivamente delle isometrie.

**Definizione 1.2.2.** Siano  $(E, \beta)$  uno spazio euclideo e  $H$  un iperpiano <sup>5</sup> di  $E$ . La **riflessione ortogonale** rispetto a  $H$  è un'applicazione lineare  $s_H : E \rightarrow E$  che fissa l'iperpiano  $H$  e manda i vettori  $v$ , con  $v \in H^\perp$ , in  $-v$ . Fissato  $v \in H^\perp \setminus \{0\}$ , possiamo scrivere la riflessione rispetto ad  $H$  come  $s_v(w) = w - \frac{2\beta(w,v)}{\beta(v,v)}v$ .

La funzione  $s_v$  così definita è lineare per linearità di  $\beta$ . Inoltre, si vede facilmente che  $s_v$  fissa l'iperpiano  $H_v$  ortogonale a  $v$  e manda  $v$  in  $-v$ .

Infatti:

$$s_v(v) = v - \frac{2\beta(v,v)}{\beta(v,v)}v = v - 2v = -v. \quad (1.1)$$

Se invece  $w \in H_v$ , si ha  $s_v(w) = w - 0 = w$ .

Mostriamo ora che una riflessione è effettivamente un'isometria.

Siano  $w, z \in E$ ,  $v, H_v$  come sopra.

Se  $w, z \in H_v$ , è ovvio che  $\|s_v(w) - s_v(z)\| = \|w - z\|$ .

Se  $w = \lambda_1 v$ ,  $z = \lambda_2 v$ ,  $\|s_v(w) - s_v(z)\| = \|-w + z\| = \|w - z\|$ .

Infine, se  $w = \lambda v$  e  $z \in H_v$ ,  $\|s_v(w) - s_v(z)\| = \|-\lambda v - z\| = \|\lambda v + z\|$ .

Passando ai quadrati  $\|\lambda v + z\|^2 = \|\lambda v\|^2 + \|z\|^2 + 2\langle \lambda v, z \rangle = \|\lambda v\|^2 + \|z\|^2$  dato che  $v \perp z$ . Lo stesso risultato si ottiene per  $\|\lambda v - z\| = \|w - z\|$  e possiamo concludere.

Prendiamo ora una base di  $E$   $\mathcal{B} = (z_1, \dots, z_{n-1}, v)$  con  $z_i \in H_v \forall i : 1, \dots, n-1$ .

Siano  $w_1 = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i z_i + \tilde{\alpha}v$  e  $w_2 = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i z_i + \tilde{\beta}v$ .

In questo caso  $\|s_v(w_1) - s_v(w_2)\| = \left\| \left( \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i z_i - \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i z_i \right) - (\alpha v - \beta v) \right\|$  e

$\|w_1 - w_2\| = \left\| \left( \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i z_i - \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i z_i \right) + (\alpha v - \beta v) \right\|$ . Dato che i due addendi nella norma sono ortogonali, possiamo concludere che  $\|s_v(w_1) - s_v(w_2)\| = \|w_1 -$

<sup>5</sup>Vedere la Definizione A.0.7

$w_2$  ragionando come fatto nel caso precedente. Abbiamo quindi mostrato che, comunque presi  $w, z$  in  $E$ ,  $\|s_v(w) - s_v(z)\| = \|w - z\|$ , ovvero  $s_v$  è un'isometria.

Inoltre, si vede facilmente che per ogni  $v \in E$ , vale che  $s_v^2 = Id_E$ .

Non tutte le isometrie sono applicazioni lineari. Ad esempio, una traslazione  $t_v$  con  $v \in E$ , definita da  $t_v(w) = v + w$  preserva la distanza, ma non è lineare se  $v \neq 0$ .

Per poter caratterizzare le isometrie di uno spazio euclideo, siamo interessati a capire quando un'isometria è anche un'applicazione lineare. Per farlo, abbiamo bisogno dei seguenti lemmi.

**Lemma 1.2.1.** *Sia  $\varphi$  un'isometria dello spazio vettoriale euclideo  $E$ . Se  $\varphi(0) = 0$ , allora per ogni  $v, w$  vettori di  $E$  si ha:*

1.  $\|\varphi(v)\| = \|v\|$ ;
2.  $\langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ .

*Dimostrazione.* La 1. segue dal fatto che, essendo  $\varphi$  un'isometria, si ha

$$\|\varphi(v) - \varphi(0)\| = \|v - 0\|.$$

Per la 2., essendo  $\varphi$  un'isometria si ha  $\|\varphi(v) - \varphi(w)\|^2 = \|v - w\|^2$ , cioè  $\|\varphi(v)\|^2 + \|\varphi(w)\|^2 - 2\langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\langle v, w \rangle$  e dalla 1. segue  $\langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ .  $\square$

Dal Lemma 1.2.1 segue il seguente:

**Lemma 1.2.2.** *Sia  $\varphi$  un'isometria dello spazio euclideo  $E$  tale che  $\varphi(0) = 0$  e sia  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  una base ortonormale di  $E$ . Allora  $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$  è ancora una base ortonormale di  $E$ .*

*Dimostrazione.* La dimostrazione segue direttamente dal fatto che  $\varphi$  preserva la norma e il prodotto scalare.  $\square$

Ora possiamo dimostrare la seguente proposizione:

**Lemma 1.2.3.** *Sia  $\varphi$  un'isometria dello spazio euclideo  $E$ . Se  $\varphi(0) = 0$ , allora  $\varphi$  è un'applicazione lineare.*

*Dimostrazione.* Sia  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  una base ortonormale dello spazio  $E$  e sia  $v \in E$ ,  $v = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ . Per il Lemma 1.2.2,  $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$  è ancora una base ortonormale. Scriviamo  $\varphi(v)$  come combinazione lineare di vettori di questa base:  $\varphi(v) = \sum_{i=1}^n \langle \varphi(v), \varphi(e_i) \rangle \varphi(e_i)$ .

Per il Lemma 1.2.1,  $\langle \varphi(v), \varphi(e_i) \rangle = \langle v, e_i \rangle = a_i$ .

Da qui segue la tesi.  $\square$

Abbiamo visto che se un'isometria fissa l'origine, è un'applicazione lineare. In questo caso, chiamiamo la mappa **isometria vettoriale**.

**Osservazione 1.2.1.** Un'isometria vettoriale è un endomorfismo biiettivo e la composizione di due isometrie è ancora un'isometria.

Essendo un'isometria vettoriale un'applicazione dallo spazio  $E$  in se stesso, per mostrare che è biiettiva ci basta vedere che è iniettiva, e questo segue facilmente dalla definizione. Infatti,  $\varphi(v) = \varphi(w) = 0 \Leftrightarrow \|\varphi(v) - \varphi(w)\| = 0$ , ma  $\|\varphi(v) - \varphi(w)\| = \|v - w\|$ , da cui otteniamo  $v = w$ .

Vediamo ora che la composizione di isometrie è ancora un'isometria: siano  $\varphi, \phi$  due isometrie di  $E$ .

Abbiamo  $\|\varphi(\phi(v)) - \varphi(\phi(w))\| = \|\phi(v) - \phi(w)\| = \|v - w\|$ , ovvero  $\varphi \circ \phi$  è un'isometria.

A questo punto abbiamo tutti gli ingredienti per enunciare un risultato importante per il nostro obiettivo di caratterizzazione delle isometrie di uno spazio euclideo  $E$ . Infatti, il seguente teorema ci dice che le isometrie di uno spazio euclideo sono tutte e sole quelle ottenute come composizione di una traslazione con un'isometria vettoriale. Segue quindi che per il nostro scopo sarà sufficiente studiare le isometrie vettoriali e capire come queste si compongono con le traslazioni.

**Teorema 1.2.1.** *Ogni isometria dello spazio euclideo  $E$  è un'applicazione di forma  $t_a \circ \varphi$ , dove  $t_a$  è una traslazione di vettore  $a$  e  $\varphi$  è un'isometria vettoriale di  $E$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\phi$  un'isometria di  $E$  e sia  $a = \phi(0)$ .

Definiamo  $\varphi := t_{-a} \circ \phi$ . Per quanto detto nell'Osservazione 1.2.1,  $\varphi$  è un'isometria. Inoltre,  $\varphi(0) = 0$ , quindi, per il Lemma 1.2.3,  $\varphi$  è un'applicazione lineare.

Possiamo quindi scrivere  $\phi = t_a \circ \varphi$ , ottenendo così la tesi.  $\square$

Ora siamo interessati a trovare una corrispondenza tra isometrie vettoriali e matrici di uno spazio vettoriale.

**Proposizione 1.2.1.** *Sia  $E$  uno spazio vettoriale euclideo e sia  $\varphi : E \rightarrow E$  un endomorfismo di  $E$ . Sono equivalenti:*

1.  $\varphi$  è un'isometria vettoriale;
2.  $\varphi$  preserva la norma e il prodotto scalare;
3.  $\varphi$  trasforma basi ortonormali in basi ortonormali;
4.  $\varphi$  trasforma una base ortonormale in una base ortonormale;
5. se  $\mathcal{B}$  è una base ortonormale,  $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$  è una matrice ortogonale <sup>6</sup>.

*Dimostrazione.*  $1 \Rightarrow 2$  è il Lemma 1.2.1.

$2 \Rightarrow 1$ : dato che  $\varphi$  è lineare e preserva la norma, abbiamo  $\|v - w\| = \|\varphi(v - w)\| = \|\varphi(v) - \varphi(w)\|, \forall v, w \in E$ , cioè  $\varphi$  preserva le distanze.

$2 \Rightarrow 3$ : è il Lemma 1.2.2.

$3 \Rightarrow 2$ : sia  $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$  una base ortonormale di  $E$  e sia  $v \in E$ ,  $v = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ . Abbiamo  $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2$ ,  $\varphi(v) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi(e_i)$  ( $\varphi$  è lineare). Per ipotesi  $\{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\}$  è ancora una base ortonormale, quindi  $\|\varphi(v)\|^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 = \|v\|^2$ , che è quello che volevamo dimostrare.

$3 \Rightarrow 4$  è banale.

$4 \Rightarrow 3$ : ripetendo la dimostrazione  $3 \Rightarrow 2$  si ottiene  $4 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$ .

$5 \Rightarrow 3$ : sia  $\mathcal{B}$  una base ortonormale e sia  $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ . Per ipotesi  $A$  è una

---

<sup>6</sup>Vedere Definizione A.0.3

matrice ortogonale, quindi il prodotto scalare della  $i$ -esima riga di  ${}^tA$  con la sua  $j$ -esima colonna è uguale a  $\delta_{ij}$ . Ma, dato che la  $i$ -esima riga di  ${}^tA$  non è altro che la  $i$ -esima colonna di  $A$ , otteniamo  $\langle \varphi(e_1), \varphi(e_j) \rangle = \delta_{ij}$ , cioè  $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$  è una base ortonormale.

3  $\Rightarrow$  5: sappiamo che  $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$  è una base ortogonale e concludiamo come sopra.  $\square$

**Lemma 1.2.4.** *Sia  $\varphi$  un'isometria vettoriale dello spazio euclideo  $E$ . Allora, gli unici autovalori di  $\varphi$ , se esistono, sono  $\pm 1$ .*

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $\lambda$  sia autovalore di  $\varphi$  rispetto all'autovettore  $v \neq 0$ . Allora, deve essere  $\|v\| = \|\varphi(v)\| = \|\lambda v\| = \lambda^2 \|v\|$ , che è vero se e solo se  $\lambda = \pm 1$ .  $\square$

**Notazione:** indichiamo con  $O(E)$  l'insieme delle isometrie vettoriali dello spazio euclideo  $E$ .

**Lemma 1.2.5.** *L'insieme  $O(E)$  è un gruppo con l'operazione di composizione.*

*Dimostrazione.* Abbiamo già visto nell'Osservazione 1.2.1 che la composizione di isometrie è ancora un'isometria e che un'isometria vettoriale è biiettiva. Inoltre, l'elemento neutro è chiaramente  $\text{Id}_E$ .

Resta da mostrare che, se  $\varphi$  è un'isometria vettoriale, anche  $\varphi^{-1}$  lo è. Siano  $v, w \in E$ . Esistono due vettori  $v', w' \in E$  tali che  $v = \varphi(v')$  e  $w = \varphi(w')$ . Abbiamo quindi  $\|\varphi^{-1}(v) - \varphi^{-1}(w)\| = \|v' - w'\| = \|\varphi(v') - \varphi(w')\| = \|v - w\|$ , che è quello che volevamo.  $\square$

Chiamiamo il gruppo  $O(E)$  il **gruppo ortogonale** di  $E$ . Dalla Proposizione 1.2.1 segue che, se  $\varphi$  è un'isometria vettoriale e  $\mathcal{B}$  una base ortonormale, allora  $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$  è una matrice ortogonale. Da qui segue che  $\det(A) = \pm 1$ . Se  $\det(A) = 1$ , diremo che  $\varphi$  è un'isometria **positiva** o **diretta**; se  $\det(A) = -1$  diremo che è un'isometria **negativa** o **inversa**.

Chiamiamo rispettivamente  $O^+(E)$  e  $O^-(E)$  l'insieme delle isometrie positive e quello delle isometrie negative.

È immediato notare che  $O^+(E)$  è un gruppo con operazione la composizione di applicazioni lineari, mentre  $O^-(E)$  non lo è. Il gruppo  $O^+(E)$  viene anche chiamato **gruppo speciale ortogonale** e viene indicato con  $SO(E)$ .

Se  $\dim E = n$  e  $\mathcal{B}$  è una base ortonormale, l'isomorfismo

$M_{\mathcal{B}}(\cdot) : \text{End}(E) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  che associa ad un endomorfismo la corrispondente matrice in  $\mathbb{R}^n$ , manda  $O(E)$  in  $O_n(\mathbb{R})$ . Questo isomorfismo ci permette di identificare, fissata una base, un'isometria vettoriale con la propria matrice associata rispetto a quella base. Nel seguito della tesi, con abuso di notazione, indicheremo con  $A$  sia l'isometria vettoriale in  $O(E)$  che la matrice associata in  $O_n(\mathbb{R})$ .

Data un'isometria  $\varphi$  dello spazio vettoriale euclideo  $E$ , per il Teorema 1.2.1 sappiamo che  $\varphi = Ax + b$  con  $A \in O(E)$  e  $b \in E$ . Allora, diciamo che  $\varphi$  è un'isometria **positiva** o **diretta** se  $\det A = 1$ .

Diciamo che  $\varphi$  è un'isometria **negativa** o **inversa** se  $\det A = -1$ .

Indichiamo con  $\text{Sym}(E)$  il gruppo delle isometrie di  $E$  e con  $\text{Sym}^+(E)$  il gruppo delle sue isometrie positive.

Osserviamo che  $\text{Sym}^+(E)$  è un gruppo; questo segue dal fatto che lo è  $SO(E)$ .

**Definizione 1.2.3.** Sia  $E$  uno spazio euclideo. Una **rotazione** è un'isometria positiva  $\varphi : E \rightarrow E$  con almeno un punto fisso, cioè tale che esiste  $x \in E$  per cui vale  $\varphi(x) = x$ .

Se l'insieme dei punti fissi è un unico punto, questo verrà chiamato **centro** di rotazione; se è una retta, si chiamerà **asse** di rotazione; se è un piano, si chiamerà **piano di rotazione**.

**Osservazione 1.2.2.** Dalla Definizione 1.2.3 segue che le rotazioni vettoriali coincidono con le isometrie positive che fissano l'origine, ovvero con il gruppo speciale ortogonale  $SO(E)$ .

### 1.3 Un teorema di struttura per le isometrie vettoriali

Abbiamo quasi tutti gli ingredienti per poter caratterizzare le isometrie vettoriali. Prima di procedere però abbiamo bisogno di caratterizzare gli iperpiani vettoriali e di introdurre il concetto di bisettore ortogonale.

**Lemma 1.3.1.** *Sia  $E$  uno spazio vettoriale euclideo di dimensione  $n$  e siano  $v, w$  due vettori di  $E$  tali che  $\|v\| = \|w\|$ .*

*Posto  $H = \{x \in E \mid d(x, v) = d(x, w)\}$ , si ha che*

$$H = \{x \mid \langle x, v - w \rangle = 0\} = (v - w)^\perp$$

*e  $H$  è un iperpiano vettoriale.*

*Dimostrazione.* Abbiamo che  $x \in (v - w)^\perp \Leftrightarrow \langle x, v \rangle = \langle x, w \rangle$ . Infatti  $x \in (v - w)^\perp \Leftrightarrow \langle x, v - w \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle x, v \rangle = \langle x, w \rangle$ .

Dato che  $d(x, v) = \|x - v\| = (\|x\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle x, v \rangle)^{1/2}$  e  $\|v\| = \|w\|$ , si ha che  $x \in H \Leftrightarrow d(x, v) = d(x, w) \Leftrightarrow \langle x, v \rangle = \langle x, w \rangle \Leftrightarrow x \in (v - w)^\perp$ . □

**Definizione 1.3.1.** Siano  $E$ ,  $v, w \in E$ ,  $H$  come nel lemma precedente. Allora,  $H$  è detto **bisettore ortogonale** di  $v$  e  $w$ .

**Osservazione 1.3.1.** Sia  $H = (v - w)^\perp$  il bisettore ortogonale di  $v, w \in E$ , con  $E$  spazio euclideo. Per com'è definito  $H$ ,  $v - w \in H^\perp$ . Quindi, se  $s_H$  è la riflessione ortogonale rispetto ad  $H$ , abbiamo che  $s_H(v - w) = w - v$  e  $s_H(v - w) = s_H(v) - s_H(w)$ ; inoltre  $\langle v + w, v - w \rangle = \|v\|^2 - \|w\|^2 = 0$ . Quindi, per il Lemma 1.3.1,  $v + w \in H$  e  $s_H(v + w) = v + w = s_H(v) + s_H(w)$ , da cui otteniamo  $s_H(v) = w$  e  $s_H(w) = v$ .

**Definizione 1.3.2.** Sia  $E$  uno spazio euclideo e  $\varphi$  un'isometria di  $E$ . Un sottospazio  $V$  di  $E$  si dice **fisso** sotto  $\varphi$  se  $\varphi|_V = Id_V$ , mentre si dice **stabile** sotto  $\varphi$  se  $\varphi(V) = V$ .

Per poter enunciare il teorema di caratterizzazione delle isometrie vettoriali abbiamo bisogno di stabilire quando un sottospazio vettoriale è fisso o stabile rispetto ad un'isometria  $\varphi$ .

**Lemma 1.3.2.** *Sia  $E$  uno spazio euclideo,  $\varphi$  un'isometria vettoriale di  $E$  e  $V$  un sottospazio di  $E$ . Allora, se  $V$  è stabile sotto  $\varphi$ , anche  $V^\perp$  lo è.*

*Dimostrazione.* Siano  $v \in V$  e  $w \in V^\perp$ . Dobbiamo dimostrare che  $\varphi(w) \in V^\perp$ , cioè  $\langle v, \varphi(w) \rangle = 0$ . Dato che per ipotesi  $V$  è stabile sotto  $\varphi$ , posso scrivere  $v = \varphi(v')$ , con  $v' \in V$ . Da qui segue  $\langle v, \varphi(w) \rangle = \langle \varphi(v'), \varphi(w) \rangle = \langle v', w \rangle = 0$ , da cui la tesi.  $\square$

Giunti a questo punto, abbiamo il quadro completo per poter enunciare il teorema di caratterizzazione delle isometrie vettoriali  $n$ -dimensionali.

**Teorema 1.3.1.** *Sia  $E$  uno spazio vettoriale euclideo di dimensione  $n \geq 2$  e sia  $\varphi \neq Id_E$  un'isometria vettoriale di  $E$ . Se esiste un sottospazio vettoriale  $V \subset E$  con  $\dim(V) = n - k$  e  $V$  è fisso sotto  $\varphi$ , allora  $\varphi$  si scrive come il prodotto di al più  $k$  riflessioni ortogonali rispetto ad iperpiani contenuti in  $V$ .*

*Dimostrazione.* Per dimostrare il teorema useremo l'induzione su  $k > 0$  (se fosse  $k = 0$ , avremmo  $\varphi = Id_E$ ).

Passo base ( $k = 1$ ): in questo caso,  $V$  è un iperpiano tale che  $\varphi|_V = Id_V$ . Possiamo scrivere  $E$  come  $E = V \oplus V^\perp$ .

Il nostro obiettivo è mostrare che  $\varphi$  è la riflessione ortogonale rispetto all'iperpiano  $V$ . Prendo ora una base ortonormale di  $V$  e la completo ad una base ortonormale  $\mathcal{B}$  di  $E$ . Avremo che  $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$  è una matrice a blocchi, con il primo blocco  $I_{n-1}$  e il secondo blocco uno scalare  $a$ . Quindi,  $\det(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)) = a = \pm 1$ , cioè  $a = \pm 1$ . Ma per ipotesi,  $\varphi \neq Id_E$ , quindi  $a = -1$  e  $\varphi = s_V$ , come volevamo dimostrare.

Passo induttivo: scrivo  $E$  come  $E = V \oplus V^\perp$ . Dato che  $V$  è stabile sotto  $\varphi$  per ipotesi, per il Lemma 1.2.3 anche  $V^\perp$  lo è. Sia  $\mathcal{B}$  una base ortonormale di  $E$ ,  $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_{n-k}, e_{n-k+1}, \dots, e_n\}$ , con  $\{e_1, \dots, e_{n-k}\}$  base ortonormale di  $V$  e  $\{e_{n-k+1}, \dots, e_n\}$  base ortonormale di  $V^\perp$ .

Definisco  $w := e_{n-k+1}$ ; sia  $H$  il bisettore ortogonale di  $w$ ,  $\varphi(w)$ .

Sia  $\varphi' := s_H \circ \varphi$ , con  $s_H$  la riflessione ortogonale rispetto all'iperpiano  $H$ .

Vogliamo vedere che  $\varphi'$  ristretta a  $V' := V \oplus \langle w \rangle$  è l'identità.

Per prima cosa, osserviamo che  $V \subset H$ : se  $v \in V$ ,  $\langle v, w - \varphi(w) \rangle = 0$ , dato che  $V^\perp$  è stabile sotto  $\varphi$ , quindi  $\varphi(w) \in V^\perp$ .

Questo vuol dire che  $\varphi'_V = Id_V$ , dato che entrambe  $\varphi$  e  $s_H$  sono l'identità su  $V$ . Inoltre,  $s_H(\varphi(w)) = w$  dato che  $H$  è il bisettore ortogonale di  $w, \varphi(w)$ .

Quindi possiamo concludere che  $\varphi'_{|_{V'}} = Id_{V'}$ .

Dato che la dimensione di  $V' = n - k + 1 = n - (k - 1)$ , per ipotesi induttiva  $\varphi' = s_{H_1} \circ \dots \circ s_{H_h}$ , con  $h \leq k - 1$ . Inoltre  $V' \subset H_i, \forall i$ . Possiamo concludere che  $\varphi = s_H \circ s_{H_1} \circ \dots \circ s_{H_k}$ .

Abbiamo quindi dimostrato che un'isometria  $\varphi$  di  $E$  si scrive come prodotto di al più  $k$  riflessioni rispetto ad iperpiani contenenti il sottospazio  $V$ , che era la nostra tesi.  $\square$

**Corollario 1.3.1.** *Sia  $E$  uno spazio vettoriale euclideo di dimensione  $n \geq 2$ . Allora, ogni isometria vettoriale di  $E$  può essere scritta come prodotto di al più  $n$  riflessioni ortogonali.*

## 1.4 Un altro modo di vedere le isometrie

Ora, vogliamo introdurre un nuovo modo di rappresentare il gruppo delle isometrie.

Per farlo, dobbiamo prima definire cos'è il prodotto semidiretto di due gruppi.

**Definizione 1.4.1.** Siano  $(G_1, \cdot)$  e  $(G_2, \star)$  due gruppi e sia  $\psi : (G_2, \star) \rightarrow \text{Aut}((G_1, \cdot))$  un omomorfismo. Il **prodotto semidiretto** di  $G_1$  e  $G_2$  secondo  $\psi$  è il prodotto cartesiano  $G_1 \times G_2$  dotato dell'operazione

$$(a, b) * (c, d) = (a \cdot \psi_b(c), b \star d),$$

dove  $\psi_b = \psi(b)$ .

Indichiamo il prodotto semidiretto di  $G_1$  e  $G_2$  secondo  $\psi$  come  $(G_1, \cdot) \rtimes_\psi (G_2, \star)$

Vogliamo far vedere che è possibile rappresentare il gruppo delle isometrie come prodotto semidiretto del gruppo delle traslazioni e di  $O(E)$ . Per farlo, abbiamo bisogno del seguente teorema.

**Teorema 1.4.1.** *Sia  $(G, \cdot)$  un gruppo e siano  $H, K$  due suoi sottogruppi tali che:*

1.  $H$  è normale in  $G$ , ovvero per ogni  $g \in G$  vale  $gHg^{-1} = H$ ;
2.  $G = HK = \{h \cdot k \mid h \in H, k \in K\}$ ;
3.  $H \cap K = \{e\}$ .

Allora, si ha che  $G \cong H \rtimes_{\psi} K$  con  $\psi_k(h) = khk^{-1}$ .

L'isomorfismo che manda  $G$  nel prodotto semidiretto di  $H$  e  $K$  rispetto a  $\psi$  è quello che manda l'elemento  $h \cdot k$  in  $(h, k)$ .

*Dimostrazione.* [18, Lemma 7.20]. □

Il Teorema 1.2.1 ci dice che ogni isometria di  $E$  può essere scritta nella forma  $\varphi(x) = Ax + b$ , con  $A \in O(E)$  e  $b \in E$ .

Consideriamo ora il gruppo delle traslazioni di  $E$ , che chiamiamo  $T$ . Vogliamo far vedere che  $T$  è un sottogruppo normale del gruppo delle isometrie.

L'elemento neutro di  $T$  è la traslazione per il vettore 0 e l'inverso di un elemento  $t_v$  di  $T$  è la traslazione  $t_{-v}$ .

Mostriamo ora che la composizione di due traslazioni è ancora una traslazione: siano  $t_v$  e  $t_w$  due traslazioni, di vettori  $v$  e  $w$  rispettivamente. Allora, se  $x \in E$ , abbiamo  $t_v \circ t_w(x) = t_v(x + w) = x + w + v = t_{v+w}(x)$ .

Abbiamo quindi mostrato che  $T$  è un gruppo, dunque è un sottogruppo delle isometrie di  $E$ . Vediamo ora che il sottogruppo  $T$  è normale, ovvero vediamo che per ogni  $\varphi$  isometria di  $E$  si ha  $\varphi T \varphi^{-1} = T$ .

Siano  $t_v \in T$ ,  $\varphi$  isometria di  $E$  e  $x \in E$ . Abbiamo che  $\varphi(x) = Ax + b$  con  $A \in O(E)$ ,  $b \in E$ .

Osserviamo che, se  $\varphi = Ax + b$ , allora  $\varphi^{-1} = A^{-1} - A^{-1}b = {}^t A - {}^t A b$ .

Calcoliamo  $\varphi \circ t_v \circ \varphi^{-1}(x)$  :

$$\begin{aligned} \varphi \circ t_v \circ \varphi^{-1}(x) &= \varphi(t_v({}^tAx - {}^tAb)) = \\ &= \varphi({}^tAx - {}^tAb + v) = \\ &= A({}^tAx - {}^tAb + v) = \\ &= x - b + Av = t_{Av-b}(x). \end{aligned}$$

L'unica traslazione che fissa l'origine è l'identità, quindi si ha che l'intersezione tra il gruppo  $T$  e il gruppo  $O(E)$  è solo l'identità.

Possiamo quindi applicare il Teorema 1.4.1 e scrivere il gruppo delle isometrie dello spazio  $E$  come  $E \rtimes O(E)$ .

## 1.5 Sottospazi affini e isometrie affini

Uno degli obiettivi di questo elaborato è quello di studiare quali isometrie stabilizzano poligoni e solidi regolari. Per poterlo fare, dobbiamo richiamare alcune nozioni fondamentali di geometria affine.

**Definizione 1.5.1.** Sia  $V$  un spazio vettoriale e sia  $W$  un suo sottospazio. Un **sottospazio affine** di  $V$  è un sottoinsieme  $A$  della forma

$$A = \{p + w \mid w \in W\},$$

dove  $p$  è un vettore di  $V$ . Possiamo indicare  $A$  anche con la seguente notazione:

$$A = p + W.$$

Il sottospazio vettoriale  $W$  si chiama **spazio direttore** di  $A$ .

Questa definizione ci dice che, dato uno spazio vettoriale, un suo sottospazio affine non è altro che un traslato di un suo sottospazio vettoriale.

Definiamo ora un particolare sottospazio affine.

**Definizione 1.5.2.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale reale di dimensione  $n$  e sia  $W$  un iperpiano vettoriale. Un **iperpiano affine** è un sottospazio affine di  $V$  della forma

$$H = p + W.$$

**Definizione 1.5.3.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale e  $W$  un suo sottospazio. Allora, se  $W$  ha dimensione 2, diremo che  $p + W$ , con  $p \in V$ , è un **piano affine**; se  $W$  ha dimensione 1 diremo che  $p + W$  è una **retta affine**.

Per poter studiare i gruppi di isometrie a cui siamo interessati, dobbiamo formalizzare il concetto di sottospazi affini paralleli.

**Definizione 1.5.4.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale e siano  $A_1 = p_1 + W_1$  e  $A_2 = p_2 + W_2$  due suoi sottospazi affini. Allora, diciamo che  $A_1$  e  $A_2$  sono **paralleli** se  $W_1 = W_2$ , ovvero se hanno lo stesso spazio direttore.

Possiamo ora dare una definizione formale di rotazione affine e di riflessione affine, che si ottengono a partire dalle corrispondenti trasformazioni vettoriali. D'ora in poi lavoreremo su uno spazio vettoriale euclideo, indicandolo con  $E$ , in quanto le definizioni per isometrie vettoriali sono state introdotte in tale contesto.

**Definizione 1.5.5.** Sia  $E$  uno spazio vettoriale euclideo e sia  $p \in E$ . Una **rotazione affine** di centro  $p$  è un'applicazione  $R_p : E \rightarrow E$  della forma

$$R_p(x) = p + R(x - p),$$

dove  $R$  è una rotazione vettoriale, ovvero un elemento di  $SO(E)$ .

**Osservazione 1.5.1.** La Definizione 1.5.5 è equivalente alla Definizione 1.2.3 di rotazione. Infatti, se consideriamo un'applicazione  $R_p : E \rightarrow E$  della forma

$$R_p(x) = p + R(x - p),$$

questa è un'isometria positiva in quanto  $R$  è positiva ed ha come punto fisso  $p$ . Considerando invece una rotazione  $\varphi$  secondo la Definizione 1.2.3, per il

Teorema 1.2.1 può essere scritta come  $\varphi(x) = R(x) + v$  con  $v \in E$  ed  $R$  una rotazione vettoriale (altrimenti  $\varphi$  sarebbe negativa). Chiamando  $p$  il punto fisso di  $\varphi$  otteniamo  $p = \varphi(p) = R(p) + v \Rightarrow v = p - R(p)$ . Possiamo quindi scrivere  $\varphi$  come:

$$\varphi(x) = R(x) + p - R(p) = R(x - p) + p.$$

**Definizione 1.5.6.** Sia  $E$  uno spazio vettoriale e sia  $H = p + W$  un iperpiano affine, con  $p \in E$  e  $W = v^\perp$  per un  $v \in E \setminus \{0\}$ . La **riflessione affine** rispetto all'iperpiano  $H$  è un'applicazione

$$s_H : E \rightarrow E$$

della forma

$$s_H(x) = p + s_v(x - p),$$

dove  $s_v$  è la riflessione vettoriale associata a  $E$ .

Una proprietà delle riflessioni è la seguente:

**Proposizione 1.5.1.** *Sia  $H = p + v^\perp$  un iperpiano affine di uno spazio euclideo  $E$ . Allora la riflessione  $s_H$  rispetto a  $H$  soddisfa*

$$s_H^2 = \text{id}_E.$$

*Dimostrazione.* Per definizione, per ogni  $x \in E$  si ha  $s_H(x) = p + s_v(x - p)$ , dove  $s_v$  è la riflessione vettoriale associata a  $v$ .

Applicando nuovamente  $s_H$ , otteniamo

$$s_H(s_H(x)) = p + s_v(s_H(x) - p).$$

Dato che  $s_H(x) - p = s_v(x - p)$ , abbiamo  $s_H(s_H(x)) = p + s_v(s_v(x - p)) = p + s_v^2(x - p)$ . Ma la riflessione vettoriale  $s_v$  soddisfa  $s_v^2 = \text{id}$ , quindi  $s_H(s_H(x)) = p + (x - p) = x$ .

Essendo questo vero per ogni  $x \in E$ , abbiamo dimostrato la tesi.  $\square$

Un risultato interessante per quanto riguarda il gruppo delle isometrie è che le isometrie negative sono esattamente le composizioni di una riflessione con una isometria positiva. Per dimostrarlo, richiamiamo la Definizione A.0.14 di classe laterale e la Definizione A.0.15 di indice di un sottogruppo, che si possono trovare in Appendice.

Ciò che vogliamo fare è mostrare che le isometrie positive di uno spazio euclideo formano un sottogruppo di indice 2 del gruppo delle isometrie. Da questo fatto segue facilmente la tesi.

**Proposizione 1.5.2.** *L'insieme delle isometrie positive di uno spazio euclideo  $E$  forma un sottogruppo di indice 2 del gruppo delle isometrie di  $E$ .*

*Dimostrazione.* Sappiamo già che le isometrie positive sono un sottogruppo del gruppo delle isometrie di  $E$ .

Il fatto che abbia indice 2 segue facilmente dal fatto che, data  $\varphi$  isometria, la sua componente vettoriale ha determinante  $\pm 1$ .

Quindi  $\text{Sym}(E) = \text{Sym}^+(E) \cup \text{Sym}^-(E)$ . Inoltre, se  $\varphi$  è negativa e  $\psi$  è positiva, si ha che la loro composizione è negativa, ovvero  $\varphi \circ \psi \in \text{Sym}^-(E)$ . Dunque segue che  $\text{Sym}^-(E)$  è una classe laterale di  $\text{Sym}^+(E)$  e, dato che ci sono solo due classi laterali, segue  $[\text{Sym}(E) : \text{Sym}^+(E)] = 2$ .  $\square$

Dalla Proposizione 1.5.2 segue immediatamente il fatto seguente.

**Proposizione 1.5.3.** *Sia  $E$  uno spazio euclideo e sia  $H$  un iperpiano affine di  $E$ . Fissata la riflessione  $s_H$  rispetto ad  $H$ , per ogni isometria inversa  $\varphi$  esiste una ed una sola isometria diretta  $\varphi^+$  tale che*

$$\varphi = \varphi^+ \circ s_H.$$

*Dimostrazione.* Dato che  $s_H$  è una riflessione rispetto all'iperpiano  $H$ , essa è un'isometria inversa. Sia ora  $\varphi$  una isometria inversa di  $E$ .

Consideriamo l'applicazione  $\varphi^+ = \varphi \circ s_H$ . Poiché  $\varphi$  e  $s_H$  sono entrambe isometrie inverse, e poiché le isometrie dirette formano un sottogruppo di

---

indice 2 nel gruppo delle isometrie, la composizione di due isometrie inverse è un'isometria diretta. Dunque  $\varphi^+$  è un'isometria diretta.

Inoltre, essendo  $s_H$  una riflessione, si ha che  $s_H^2 = \text{id}_E$ .

Ne segue che  $\varphi^+ \circ s_H = (\varphi \circ s_H) \circ s_H = \varphi \circ s_H^2 = \varphi$ , quindi esiste almeno un'isometria diretta con la proprietà richiesta.

Mostriamo ora l'unicità. Sia  $\psi^+$  un'altra isometria diretta tale che  $\varphi = \psi^+ \circ s_H$ . Allora  $\varphi \circ s_H = \psi^+ \circ s_H \circ s_H = \psi^+ \circ \text{id}_E = \psi^+$ .

Ma per definizione  $\varphi \circ s_H = \varphi^+$ , dunque  $\psi^+ = \varphi^+$ . Pertanto l'isometria diretta cercata è unica.  $\square$

Abbiamo quindi descritto le principali proprietà delle isometrie in uno spazio vettoriale euclideo di dimensione  $n$ .

Nel Capitolo 2 studieremo nel dettaglio cosa succede in dimensione 2 e in dimensione 3.



# Capitolo 2

## Isometrie vettoriali di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

Siamo ora interessati a studiare le isometrie vettoriali di  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$  rispetto al prodotto scalare standard.

Dopo aver classificato questi casi particolari di isometrie vettoriali ed aver elencato alcune loro proprietà, studieremo alcuni dei loro sottogruppi finiti, concentrandoci su quelli che stabilizzano poligoni e poliedri regolari.

Osserviamo che il caso 1-dimensionale è banale, in quanto ogni endomorfismo di  $\mathbb{R}$  in se stesso è diagonalizzabile con un unico autovalore. Quindi le uniche isometrie di  $\mathbb{R}$  sono  $\pm \text{Id}_{\mathbb{R}}$ .

### 2.1 Isometrie vettoriali di $\mathbb{R}^2$

Iniziamo studiando le isometrie vettoriali di  $\mathbb{R}^2$ .

Cominciamo classificando le matrici ortogonali  $2 \times 2$ .

**Lemma 2.1.1.** *Sia  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$  una base ortonormale di  $\mathbb{R}^2$ . Sia  $\varphi$  un'isometria vettoriale di  $\mathbb{R}^2$  e sia  $M = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ , con*

$$M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

*Allora si ha che  $ac + bd = 0$  e  $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$ . Inoltre valgono le seguenti:*

$$1. M \in SO_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ con } a^2 + b^2 = 1;$$

$$2. M \in O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \text{ con } a^2 + b^2 = 1.$$

*Dimostrazione.* Dato che  $\mathcal{B}$  è una base ortonormale e un'isometria manda basi ortonormali in basi ortonormali, si ha che  $ac + bd = \langle \varphi(e_1), \varphi(e_2) \rangle = 0$  e  $a^2 + b^2 = \|\varphi(e_1)\| = 1$  (analogamente per  $c^2 + d^2$  con  $\|\varphi(e_2)\|$ ).

Supponiamo che sia  $a = 0$ . Allora, dato che  $a^2 + b^2 = 1$ , ricaviamo  $b^2 = 1$ , ovvero  $b = \epsilon$  con  $\epsilon = \pm 1$ . Da  $ac + bd = 0$  segue che  $d = 0$  e da  $c^2 + d^2 = 1$  segue che  $c = \epsilon'$  con  $\epsilon' = \pm 1$ . Quindi, se  $a = 0$ ,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ \epsilon' & 0 \end{pmatrix}$$

e  $\det M = -\epsilon\epsilon'$ , che è quello che volevamo.

Guardiamo ora cosa succede nel caso di  $a \neq 0$ . Da  $ac + bd = 0$  ricaviamo  $c = -\frac{bd}{a}$ . Da  $c^2 + d^2 = 1$  invece ricaviamo che  $\frac{d^2(a^2+b^2)}{a^2} = 1$ . Ricordando che  $ac + bd = 0$ , otteniamo quindi  $d^2 = a^2$ , da cui segue  $d = \epsilon a$ , con  $\epsilon = \pm 1$ . Sostituendo per  $c$  ricaviamo  $c = -\epsilon b$ . In questo caso quindi abbiamo

$$M = \begin{pmatrix} a & -\epsilon b \\ b & \epsilon a \end{pmatrix}.$$

Quindi  $\det M = \epsilon(a^2 + b^2) = \epsilon$ . Ora,  $M \in SO_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \epsilon = 1$  e  $M \in O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \epsilon = -1$ . La tesi è così dimostrata.  $\square$

Grazie al Lemma 2.1.1, possiamo dimostrare la seguente proposizione, che ci dice che se abbiamo un'isometria vettoriale negativa di  $\mathbb{R}^2$ , cioè un elemento di  $O_2^-(\mathbb{R}) = O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R})$ , allora questa è una riflessione.

**Proposizione 2.1.1.** *Sia  $A \in O_2^-(\mathbb{R})$ . Allora,  $A$  è la matrice associata a una riflessione rispetto ad una retta.*

*Dimostrazione.* Sia  $\mathcal{B}$  una base ortonormale di  $\mathbb{R}^2$ . Per il Lemma 2.1.1, abbiamo che

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

con  $a^2 + b^2 = 1$ . Dato che  $A$  è simmetrica ortogonale, abbiamo  $A^2 = I_2$ , quindi  $A$  è diagonalizzabile con autovalori  $\pm 1$ . Sia  $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$  una base di autovettori di  $A$  per  $\mathbb{R}^2$ , con  $Av_1 = v_1$ ,  $Av_2 = -v_2$ . Vediamo che  $A$  è una riflessione rispetto alla retta  $\text{Span}(v_1)$  cioè  $A(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2$ . Per farlo, dobbiamo mostrare che  $v_1$  e  $v_2$  sono ortogonali. Abbiamo  $\langle Av_1, Av_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$ , perché l'isometria  $A$  preserva il prodotto scalare. Inoltre  $\langle Av_1, Av_2 \rangle = -\langle v_1, v_2 \rangle$  dato che  $v_1, v_2$  sono autovettori degli autovalori 1 e  $-1$  rispettivamente. Quindi  $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ .  $\square$

Possiamo quindi concludere che ogni isometria vettoriale di  $\mathbb{R}^2$  appartiene a uno e uno solo dei due casi seguenti: una rotazione o una riflessione rispetto ad una retta passante per l'origine.

**Osservazione 2.1.1.** Dal Lemma 2.1.1 segue che se  $A$  è una rotazione, ovvero una matrice di  $SO_2(\mathbb{R})$ , si ha che

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

con  $a^2 + b^2 = 1$ . Avremo quindi

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

con  $\theta \in [0, 2\pi[$ . Chiamiamo  $\theta$  l'**angolo di rotazione** di  $A$ .

**Osservazione 2.1.2.** Sia  $\varphi$  la riflessione rispetto alla retta  $L_\theta$  che forma un angolo  $\theta$  con l'asse  $x$ . Vogliamo determinare esplicitamente la matrice associata a  $\varphi$ .

Per farlo, consideriamo una base ortonormale adattata all'asse di riflessione:

$$u = (\cos \theta, \sin \theta), \quad v = (-\sin \theta, \cos \theta),$$

scelti in modo che  $u$  appartiene alla retta  $L_\theta$  e  $v$  è ortogonale a  $L_\theta$ , così da avere  $\varphi(u) = u$ ,  $\varphi(v) = -v$ .

La matrice associata a  $\varphi$  rispetto a questa base è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vogliamo ora scriverla nella base canonica. La matrice di cambiamento di base è

$$P = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

che per l'Osservazione 2.1.1 è una rotazione di angolo  $\theta$ . Da qui segue che la matrice della riflessione nella base canonica è

$$B = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = R_\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} R_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}.$$

**Osservazione 2.1.3.** Vediamo ora cosa succede se componiamo due riflessioni. Dalla Proposizione 2.1.1 segue che il prodotto di due riflessioni vettoriali è una rotazione vettoriale e dall'Osservazione 2.1.2 segue anche che una riflessione ha matrice associata

$$B = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

dove  $\theta$  è l'angolo che l'asse di riflessione forma con l'asse  $x$ .

Se abbiamo due riflessioni  $\varphi$  e  $\psi$  con rispettive matrici

$$B = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \cos 2\rho & \sin 2\rho \\ \sin 2\rho & -\cos 2\rho \end{pmatrix}$$

avremo che la loro composizione sarà un'isometria con matrice

$$BC = \begin{pmatrix} \cos 2(\theta - \rho) & \sin 2(\theta - \rho) \\ \sin 2(\theta - \rho) & -\cos 2(\theta - \rho) \end{pmatrix}.$$

Si ha quindi che la composizione di due riflessioni con assi che formano angolo  $\alpha$  è una rotazione di angolo  $2\alpha$ .

## 2.2 Alcuni sottogruppi finiti di $O_2(\mathbb{R})$

In questa sezione, definiremo il gruppo di simmetria di un insieme e daremo alcuni esempi di gruppi di simmetria di poligoni regolari.

**Definizione 2.2.1.** Dato un sottoinsieme  $X$  di uno spazio vettoriale  $V$ , chiamiamo **gruppo di simmetria di  $X$**  e lo indichiamo con  $\text{Sym}(X)$  l'insieme delle isometrie  $\varphi \in \text{Sym}(X)$  che stabilizzano  $X$ .

Indichiamo con  $\text{Sym}^+(X)$  il sottogruppo delle isometrie positive di  $\text{Sym}(X)$ .

**Osservazione 2.2.1.** La Definizione 2.2.1 è ben posta. Infatti, date  $\varphi, \psi \in \text{Sym}(X)$  abbiamo che  $\varphi(\psi(X)) = \varphi(X) = X \Rightarrow \varphi \circ \psi \in \text{Sym}(X)$ . Inoltre l'isometria identità stabilizza chiaramente  $X$  e, data  $\varphi \in \text{Sym}(X)$ , l'applicazione inversa  $\varphi^{-1}$  è sempre un'isometria e  $\varphi^{-1}(X) = \varphi^{-1}(\varphi(X)) = X$ .

Da questo e dal fatto che le isometrie positive formano un gruppo, segue anche che  $\text{Sym}^+(X)$  è un gruppo.

Per studiare come agiscono le isometrie sui poligoni, è fondamentale il seguente lemma. Per dimostrarlo, abbiamo bisogno di introdurre la definizione di circonferenza.

**Definizione 2.2.2.** Una **circonferenza** di centro  $O$  e raggio  $r$ , è l'insieme di vettori  $v \in \mathbb{R}^2$  tali che  $\|v - O\| = r$ .

**Lemma 2.2.1.** *Siano  $A, B, C$  tre punti non allineati e siano  $A', B', C'$  tre punti distinti. Se esiste un'isometria  $\varphi$  che manda  $A, B, C$  in  $A', B', C'$  rispettivamente, allora questa isometria è unica.*

*Dimostrazione.* Vogliamo mostrare che, fissate le immagini di  $A, B, C$  tramite  $\varphi$ , si determina automaticamente anche l'immagine di un punto  $D$  qualsiasi del piano.

Dato che  $\varphi$  è un'isometria, deve essere  $d(A, D) = d(A', D')$ , con  $D' = \varphi(D)$ . Questo vuol dire che  $D'$  appartiene alla circonferenza di centro  $A'$  e raggio  $d(A, D)$ .

Ragionando in modo analogo, otteniamo anche che  $D$  deve appartenere anche alla circonferenza di centro  $B'$  e raggio  $d(B, D)$  e a quella di centro  $C'$  e raggio  $d(C, D)$ .

Dato che, per ipotesi, l'isometria  $\varphi$  esiste, abbiamo che l'intersezione delle tre circonferenze è non vuota e consiste quindi di un unico punto, che è proprio  $D'^7$ . L'immagine di  $D$  tramite  $\varphi$  è quindi unicamente determinata dalle immagini di  $A, B, C$ , il che dimostra la tesi.  $\square$

Come primo esempio studiamo il gruppo di simmetria della circonferenza.

**Esempio 2.2.1. Gruppo di simmetria della circonferenza** Dato che le isometrie preservano le distanze, un'isometria appartenente al gruppo di simmetria di una circonferenza ne fissa il centro. Possiamo quindi ridurci a studiare il gruppo di simmetria di una circonferenza  $\Gamma$  centrata nell'origine: per una circonferenza generica di centro  $O$ , gli elementi del suo gruppo di simmetria saranno della forma  $\sigma(x - O) + O$  con  $\sigma \in \text{Sym}(\Gamma)$ .

Consideriamo quindi la circonferenza unitaria

$$\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

e indichiamo con  $\text{Sym}(\mathbb{S}^1)$  l'insieme di tutte le sue isometrie che, per quanto detto prima, saranno vettoriali.

Vogliamo dimostrare che  $\text{Sym}(\mathbb{S}^1)$  coincide con tutto il gruppo ortogonale  $O_2(\mathbb{R})$ .

Infatti, data  $A \in O_2(\mathbb{R})$ , questa preserva la norma e la distanza. Dunque,  $x \in \mathbb{S}^1 \Leftrightarrow \|x\| = 1$  e vale che  $\|Ax\| = 1$ , quindi anche  $Ax \in \mathbb{S}^1$ . Possiamo concludere che, se  $A \in O_2(\mathbb{R})$ , allora  $A \in \text{Sym}(\mathbb{S}^1)$ , da cui segue che  $\text{Sym}(\mathbb{S}^1) = O_2(\mathbb{R})$ .

Vogliamo ora studiare i gruppi di simmetria del triangolo equilatero e del quadrato. Per farlo, diamo prima le definizioni di segmento, angolo e poligono regolare.

<sup>7</sup>Qua stiamo usando il fatto che tre circonferenze con centri non allineati si intersecano in al più un punto. Una dimostrazione si trova nella Proposizione A.0.3 in Appendice.

**Definizione 2.2.3.** Siano  $A, B \in \mathbb{R}^2$ . Il **segmento di estremi**  $A$  e  $B$  è l'insieme

$$[A, B] = \{(1-t)A + tB \mid t \in [0, 1]\}.$$

**Definizione 2.2.4.** Siano  $A, B \in \mathbb{R}^2$ . La lunghezza del segmento  $[A, B]$  è

$$|AB| = \|B - A\|,$$

dove la norma è quella indotta dal prodotto scalare standard.

**Definizione 2.2.5.** Dati due vettori  $v, w \in \mathbb{R}^2$ , definiamo l'**angolo orientato**  $\theta$  tra  $v$  e  $w$  come l'unico  $\theta \in [0, 2\pi[$  tale che la rotazione di angolo  $\theta$  manda  $\frac{v}{\|v\|}$  in  $\frac{w}{\|w\|}$ .

Con queste definizioni possiamo dire cos'è un poligono.

**Definizione 2.2.6.** Siano  $A_1, \dots, A_n$  punti distinti di  $\mathbb{R}^2$ , senza tre punti consecutivi, presi ciclicamente, allineati. Il **poligono con vertici**  $A_1, \dots, A_n$  è l'unione dei segmenti

$$[A_1, A_2] \cup [A_2, A_3] \cup \dots \cup [A_{n-1}, A_n] \cup [A_n, A_1].$$

I segmenti  $[A_1, A_2], [A_2, A_3], \dots, [A_{n-1}, A_n], [A_n, A_1]$  sono chiamati **lati** del poligono.

**Definizione 2.2.7.** Dato un poligono  $P$  di vertici  $A_1, \dots, A_n$ , definiamo **angoli interni** di  $P$  gli angoli orientati tra i vettori  $A_{i+1} - A_i$  e  $A_{i-1} - A_i$  per  $i \in \{1, \dots, n\}$ , presi ciclicamente.

**Definizione 2.2.8.** Un poligono si dice **semplice** se i suoi lati si intersecano solamente nei vertici.

Un poligono si dice **convesso** se tutti i suoi angoli interni sono minori di  $\pi$ .

Un poligono si dice **regolare** se tutti i suoi lati hanno la stessa lunghezza e tutti gli angoli interni sono uguali.

Noi studieremo nel dettaglio i gruppi di simmetria del **triangolo equilatero** e del **quadrato**, ovvero dei poligoni regolari con tre e quattro lati rispettivamente.

**Lemma 2.2.2.** *Dato un poligono semplice  $P$  e un'isometria  $\varphi \in \text{Sym}(P)$ , allora  $\varphi$  manda vertici di  $P$  in vertici di  $P$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $A_i$  un vertice di  $P$  e consideriamo le due rette affini  $r, s$  contenenti i lati  $[A_{i-1}, A_i]$  e  $[A_i, A_{i+1}]$ . Dato che un'isometria manda rette affini in rette affini<sup>8</sup> e  $\varphi$  stabilizza  $P$ , allora  $\varphi(r)$  e  $\varphi(s)$  saranno ancora due rette affini contenenti due lati di  $P$ . Quindi,  $\varphi(A_i)$  andrà nell'intersezione di questi due lati, ovvero un vertice.  $\square$

Quindi, dato un poligono  $P$ , una qualsiasi isometria  $\varphi \in \text{Sym}(P)$ , genererà una permutazione<sup>9</sup> dei vertici di  $P$ .

Siamo ora pronti a descrivere i gruppi di simmetria del triangolo equilatero e del quadrato.

Osserviamo che, definendo il **centro** di questi poligoni regolari come il punto equidistante dai vertici, per il Lemma 2.2.1, questo punto verrà fissato dalle isometrie del gruppo di simmetria e possiamo quindi ridurci al caso in cui il centro dei poligoni studiati coincida con l'origine e le isometrie del gruppo di simmetria siano tutte vettoriali.

**Esempio 2.2.2. Il gruppo di simmetria del triangolo equilatero:** consideriamo un triangolo equilatero, che indicheremo con  $\Delta$ , e nominiamo i suoi vertici  $A, B, C$  in senso antiorario. Indichiamo con  $s_A, s_B, s_C$  le riflessioni con assi le rette che passano per il centro e  $A, B, C$  rispettivamente e con  $r_0, r_1, r_2$  le rotazioni di angolo  $0, 2\pi/3, 4\pi/3$  rispettivamente.

Definiamo

$$X = \{r_0, r_1, r_2, s_A, s_B, s_C\}$$

l'insieme formato dalle isometrie appena descritte.

Per il Lemma 2.2.2, sappiamo che ogni isometria in  $\text{Sym}(\Delta)$  induce una permutazione sui vertici.

Mostriamo ora che per ogni permutazione  $\sigma \in S_3$  esiste un'isometria del

<sup>8</sup>Questo perché un'isometria è composizione di un'applicazione lineare e una traslazione.

<sup>9</sup>Vedere la Definizione A.0.10 e l'Osservazione A.0.3 in Appendice.

triangolo che realizza  $\sigma$  sui vertici. Ovviamente, l'identità è realizzata da  $r_0$ . Il ciclo  $(ABC)$  è realizzato dall'isometria  $r_1$ , mentre  $(ACB)$  da  $r_2$ . Per quanto riguarda le trasposizioni, queste corrispondono alle riflessioni:  $(AB)$  fissa  $C$  e scambia gli altri vertici, proprio come  $s_C$ ; analogamente  $(AC)$  corrisponde a  $s_B$  e  $(BC)$  a  $s_A$ .

Ora possiamo vedere che  $X$  contiene tutte e sole le isometrie del triangolo. Dato che ogni isometria induce una permutazione dei vertici, abbiamo una mappa  $\psi : \{\varphi \mid \varphi(\Delta) = \Delta\} \longrightarrow S_3$ ,  $\psi(\varphi) = \varphi|_{\{A,B,C\}}$ .

Dal Lemma 2.2.1 segue direttamente che la mappa  $\psi$  è iniettiva, perché se due isometrie hanno la stessa immagine sui tre vertici, allora coincidono.

Quindi, sappiamo che  $|\text{Sym}(\Delta)| \leq |S_3| = 6$ . Ma sappiamo anche che ogni permutazione è realizzata da un'isometria, quindi la mappa è anche suriettiva e possiamo concludere che  $X = \text{Sym}(\Delta)$ .

**Esempio 2.2.3. Il gruppo di simmetria del quadrato:** Consideriamo un quadrato  $\mathcal{Q}$  centrato nell'origine e nominiamo i suoi vertici  $A, B, C, D$  in senso antiorario. Consideriamo le seguenti isometrie:

- le rotazioni  $r_0, r_1, r_2, r_3$  di angoli, rispettivamente  $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ ;
- le riflessioni  $s_{AC}$  e  $s_{BD}$  rispetto alle diagonali  $AC$  e  $BD$ ;
- le riflessioni  $s_{AB}$  e  $s_{BC}$  rispetto alle rette passanti per l'origine ed ortogonali ai lati  $AB$  e  $BC$ .

Definiamo  $X = \{r_0, r_1, r_2, r_3, s_{AC}, s_{BD}, s_{AB}, s_{BC}\}$ . Osserviamo che tutti gli elementi di  $X$  sono distinti tra loro: le rotazioni in quanto di angoli diversi e le riflessioni in quanto hanno punti fissi distinti.

Per il Lemma 2.2.2, ogni isometria del quadrato induce una permutazione dei suoi vertici.

Questo, analogamente a prima, ci permette di identificare  $\text{Sym}(\mathcal{Q})$  con un sottoinsieme di  $S_4$ . A differenza del caso precedente, in questo caso la funzione  $\psi : \text{Sym}(\mathcal{Q}) \longrightarrow S_4$  non è suriettiva: infatti, gli elementi di  $S_4$  che portano vertici adiacenti in vertici non adiacenti non sono immagine di nessuna isometria, in quanto non verrebbero preservate le distanze.

Mostriamo ora che non ci sono altre isometrie del quadrato oltre a quelle descritte in  $X$ .

Sia  $\varphi$  un'isometria di  $\mathcal{Q}$ ; sappiamo che  $\varphi$  manda vertici in vertici, quindi abbiamo 4 scelte per l'immagine di  $A$  tramite  $\varphi$ . Consideriamo ora il vertice  $B$ . Una volta scelta l'immagine di  $A$ ,  $\varphi(B)$  deve essere tale che  $d(A, B) = d(\varphi(A), \varphi(B))$ , quindi abbiamo solo due scelte per  $\varphi(B)$ , ovvero i due vertici adiacenti a  $\varphi(A)$ . Questo vuol dire che al massimo ci sono 8 isometrie del quadrato. Ma gli elementi di  $X$  sono isometrie di  $\mathcal{Q}$ , quindi possiamo concludere che  $X = \text{Sym}(\mathcal{Q})$ .

## 2.3 Isometrie vettoriali di $\mathbb{R}^3$

Per classificare le isometrie vettoriali di  $\mathbb{R}^3$ , abbiamo prima bisogno di dimostrare un risultato generale per gli spazi vettoriali di dimensione  $n$ . Richiamiamo la Definizione 1.3.2 di sottospazio stabile sotto un'isometria e il Lemma 1.3.2, che ci dice che se un sottospazio  $W$  di uno spazio vettoriale  $V$  è stabile sotto un'isometria  $\varphi$ , allora lo è anche il sottospazio  $W^\perp$ .

A questo punto, fissata un'isometria vettoriale  $\varphi$  di uno spazio vettoriale  $V$  di dimensione  $n$  definiamo:

$$V_+ = \{v \in V \mid \varphi(v) = v\}, \quad V_- = \{v \in V \mid \varphi(v) = -v\}.$$

Si vede facilmente che  $V_+$  e  $V_-$  sono sottospazi in somma diretta di  $V$  e che  $V_+ \oplus V_-$  è stabile sotto  $\varphi$ .

Definiamo  $W = (V_+ \oplus V_-)^\perp$ ; si ha che  $V = V_+ \oplus V_- \oplus W$  e che  $W$  è stabile sotto  $\varphi$ .

**Proposizione 2.3.1.** *Siano  $\varphi$ ,  $V_+$ ,  $V_-$  e  $W$  come sopra. Valgono le seguenti:*

1.  $W$  ha dimensione pari. Inoltre,  $\varphi|_W$  è un'isometria vettoriale positiva di  $W$ ;

- 
2. se  $\varphi$  è positiva e se  $\dim(V)$  è dispari, allora  $\dim(V_+) \geq 1$ , ovvero 1 è autovalore di  $\varphi$ ;
  3. se  $\varphi$  è negativa,  $\dim(V_-) \geq 1$ , ovvero  $-1$  è autovalore di  $\varphi$ ;
  4. se  $\varphi$  è negativa e  $\dim(V)$  è pari, allora  $\dim(V_+) \geq 1$ , ovvero sia 1 che  $-1$  sono autovalori di  $\varphi$ .

Per la dimostrazione, useremo il seguente lemma, la cui dimostrazione si può trovare nel Capitolo 24 di [16].

**Lemma 2.3.1.** 1. Sia  $P(x)$  un polinomio a coefficienti in  $\mathbb{R}$  di grado dispari. Allora,  $P(x)$  ha una radice reale.

2. Se un polinomio monico  $P(x)$  a coefficienti reali non ha radici reali, allora  $P(0) > 0$ .

*Dimostrazione.* 1: Dato che  $W$  è stabile sotto  $\varphi$ , si ha che  $\varphi|_W : W \rightarrow W$  è un'isometria di  $W$  che non ha autovalori. Infatti, un autovettore sarebbe  $w \in W \setminus \{0\}$  tale che  $\varphi(w) = \pm w$ , ma allora avremmo che  $w \in V_+ \oplus V_- = W^\perp$ , il che è un assurdo. Quindi il polinomio caratteristico della matrice associata a  $\varphi|_W$ , che indichiamo con  $P_{\varphi|_W}(x)$ , non ha radici reali. Per il Lemma 2.3.1 segue quindi che il grado di  $P_{\varphi|_W}(x)$  è pari, così come la dimensione di  $W$ . Poniamo  $\dim W = 2m$ . Segue dunque che  $P_{\varphi|_W}(0) = (-1)^{2m} \det(\varphi|_W) = \det(\varphi|_W)$ . Dal punto 2. del Lemma 2.3.1 segue che  $\det(\varphi|_W) > 0$ , cioè  $\det(\varphi|_W) = 1$  e  $\varphi$  è positiva.

Abbiamo quindi che esistono basi di  $V_+$ ,  $V_-$  e  $W$  tali che la matrice associata a  $\varphi$  è della forma

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & -I_p & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix},$$

dove  $r$  e  $p$  sono le dimensioni di  $V_+$  e  $V_-$  rispettivamente (utilizziamo anche la convenzione che, se  $V_+$ ,  $V_-$  o  $W$  sono banali, la matrice corrispondente non appare).

Abbiamo che, se  $\dim(W) > 1$ , allora  $\det(A) = 1$ .

2: Se  $\varphi$  è positiva, deve per forza essere  $\dim(V_-) = p$  con  $p$  pari (altrimenti avremmo che il determinante della matrice associata a  $\varphi$  sarebbe  $-1$ , il che è assurdo per  $\varphi$  positiva). Quindi, se  $\dim(V)$  è dispari, necessariamente  $\dim(V_+) = r$  è dispari e  $\dim(V_+) \geq 1$ .

3: Se  $\varphi$  è negativa, dato che  $\varphi|_{V_+}$  e  $\varphi|_W$  sono positivi, deve essere  $\dim(V_-)$  dispari, quindi  $\dim(V_-) \geq 1$ .

4: Se  $\varphi$  è negativa, necessariamente  $\dim(V_-)$  è dispari. Quindi, se  $\dim(V)$  è pari, dato che  $\dim(W)$  è pari, deve essere  $\dim(V_+)$  dispari.  $\square$

Abbiamo gli strumenti necessari per poter classificare le isometrie vettoriali di  $\mathbb{R}^3$ .

**Proposizione 2.3.2.** 1. Sia  $\varphi$  un'isometria vettoriale positiva di  $\mathbb{R}^3$ . Allora,  $\varphi = Id_{\mathbb{R}^3}$  o  $\varphi$  è una rotazione con asse una retta passante per l'origine.

2. Sia  $\varphi$  un'isometria vettoriale negativa di  $\mathbb{R}^3$ . Allora, esiste una retta  $D$  tale che  $\varphi|_D = -Id_D$  e  $\varphi|_{D^\perp}$  è una rotazione.

*Dimostrazione.* 1: Dalla Proposizione 2.3.1, l'autospazio  $V_+$  ha dimensione  $\geq 1$ . Inoltre,  $V_+$  è fisso sotto  $\varphi$ . Se  $\dim V_+ = 3$ , allora  $\varphi$  è l'identità.

Supponiamo quindi che  $\varphi$  non sia l'identità. Dal Lemma 1.3.2 segue che  $\varphi|_{V_+^\perp}$  è un'isometria di  $V_+^\perp$ .

Se  $\dim(V_+) = 2$ , allora  $\dim(V_+^\perp) = 1$  e  $\varphi|_{V_+^\perp} = \pm Id_{V_+^\perp}$ . Inoltre,  $\varphi|_{V_+^\perp}$  non può essere l'identità, altrimenti avrei  $\dim V_+ = 3$ . Quindi  $\varphi|_{V_+^\perp} = -Id_{V_+^\perp}$ . Prendendo una base di autovettori di  $\mathbb{R}^3$  otteniamo che la matrice associata a  $\varphi$  rispetto a questa base, che indichiamo con  $A$ , ha determinante  $-1$ , che contraddice l'ipotesi  $\varphi$  positiva.

L'unica possibilità che ci rimane è quindi  $\dim(V_+) = 1$ ,  $\dim(V_+^\perp) = 2$ . Dato che  $\det(A) = \det(A|_{V_+}) \det(A|_{V_+^\perp})$ , segue che  $\det(A|_{V_+^\perp}) = 1$ , il che implica che  $\varphi|_{V_+^\perp}$  è una rotazione. Quindi  $\varphi$  è una rotazione con asse  $V_+$ .

2: Dalla Proposizione 2.3.1, si ha che  $-1$  è un autovalore di  $\varphi$ ; quindi  $\dim V_- \geq 1$ . Se  $V_- = \mathbb{R}^3$ ,  $\varphi = -Id_{\mathbb{R}^3}$  (e quindi per qualsiasi retta  $D$  è

vero l'enunciato).

Se  $\dim(V_-) = 2$ , possiamo scrivere  $\mathbb{R}^3 = V_- \oplus V_-^\perp$  e, dato che  $V_-$  e  $V_-^\perp$  sono stabili sotto  $\varphi$ , esiste una base ortonormale tale che la matrice associata a  $\varphi$  è del tipo

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Il determinante di questa matrice è  $a = -1$ , ma questa è una contraddizione, perché avremmo  $\varphi = -Id_{\mathbb{R}^3}$  e  $\dim V_- = 2$ .

Supponiamo quindi  $\dim(V_-) = 1$ . Allora, esiste una base ortonormale tale che la matrice associata a  $\varphi$  sia della forma

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}.$$

Il determinante è  $-(ad - bc) = -1$ , quindi  $ad - bc = 1$  e  $\varphi|_{V_-^\perp}$  è una rotazione.  $\square$

**Proposizione 2.3.3.** *Dalla Proposizione 2.3.2 segue quindi che la composizione di due rotazioni vettoriali di  $\mathbb{R}^3$  è ancora una rotazione. In particolare:*

1. *la composizione di due rotazioni attorno allo stesso asse è ancora una rotazione rispetto allo stesso asse, di angolo uguale alla somma degli angoli di rotazione;*
2. *la composizione di due rotazioni attorno ad assi diversi sarà una rotazione intorno ad un terzo asse.*

*Dimostrazione.* Per quanto riguarda il punto 1), che la composizione fissi ancora lo stesso asse è ovvio, mentre che l'angolo di rotazione è la somma degli altri due si ottiene moltiplicando le rispettive matrici associate.

Dimostriamo ora il punto 2): siano  $R_\theta$ ,  $R_\sigma$  due rotazioni rispetto a due assi  $r \neq s$  rispettivamente tali che  $R_\theta \circ R_\sigma$  ha asse  $s$ , si avrebbe  $(R_\theta \circ R_\sigma)(s) = s = R_\theta(s)$ , il che sarebbe assurdo perché per la Proposizione 2.3.2, una rotazione

non può fissare un sottospazio di dimensione 2.

Inoltre,  $R_\theta \circ R_\sigma(r) = r$  implicherebbe  $R_\sigma(r) = R_\theta^{-1}(R_\theta \circ R_\sigma)(r) = R_\theta^{-1}(r) = r$ , il che sarebbe assurdo.  $\square$

Diamo un nome alle isometrie descritte al punto 2) della Proposizione 2.3.2.

**Definizione 2.3.1.** Una **rotoriflessione** di  $\mathbb{R}^3$  è un'isometria vettoriale negativa  $\varphi$  per cui esiste una retta  $D$  tale che  $\varphi|_D = -Id_D$  e  $\varphi|_{D^\perp}$  è una rotazione non banale.

**Osservazione 2.3.1.** Sia  $\varphi$  una rotoriflessione e sia  $D$  la retta della Definizione 2.3.1. Se definiamo  $\rho = \varphi|_{D^\perp}$ , indichiamo con  $s_{D^\perp}$  la riflessione rispetto al piano  $D^\perp$ , allora possiamo scrivere  $\varphi$  come  $\varphi = s_{D^\perp} \circ \tilde{\rho}$ , dove  $\tilde{\rho}$  è l'isometria vettoriale di  $\mathbb{R}^3$  che agisce come identità su  $D$  e come  $\rho$  su  $D^\perp$ .

Abbiamo quindi dimostrato il seguente corollario.

**Corollario 2.3.1.** *Ogni isometria vettoriale di  $\mathbb{R}^3$  è una tra:*

1.  $Id_{\mathbb{R}^3}$ ;
2. una rotazione attorno ad una retta;
3. una riflessione rispetto ad un piano passante per l'origine;
4.  $-Id_{\mathbb{R}^3}$ ;
5. una rotoriflessione.

**Nota:** la mappa  $-Id_{\mathbb{R}^3}$  è un caso speciale di rotoriflessione. Tuttavia li distinguiamo esplicitamente in quanto la dimensione dell'autospazio  $V_-$  è 3 nel caso di  $-Id_{\mathbb{R}^3}$  e 1 nel caso delle altre rotoriflessioni.

**Esempio 2.3.1. Il gruppo di simmetria della sfera:** consideriamo

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

e studiamo il suo gruppo di simmetria  $\text{Sym}(\mathbb{S}^2)$ .

Con un ragionamento analogo a quello dell'Esempio 2.2.1, otteniamo che  $\text{Sym}(\mathbb{S}^2)$  coincide con tutto il gruppo  $O_3(\mathbb{R})$ , in quanto tutti i suoi elementi preservano la norma.

## 2.4 Sottogruppi finiti di $O_3(\mathbb{R}^3)$

In questa sezione, dopo aver descritto i sottogruppi finiti del gruppo delle isometrie in dimensione tre, vedremo come questi giochino un ruolo fondamentale nel dimostrare che esistono solo cinque poliedri regolari nello spazio euclideo, chiamati anche solidi platonici.

Procediamo ora con la definizione di poliedro convesso.

Descriveremo un poliedro e i suoi elementi, ovvero vertici, spigoli e facce, utilizzando la nozione di involucro convesso.

**Definizione 2.4.1.** Dato un sottoinsieme finito  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  di  $\mathbb{R}^3$ , definiamo **involucro convesso** di  $X$  il seguente insieme:

$$\left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$

Dato un sottoinsieme qualsiasi  $Y$  di  $\mathbb{R}^3$ , definiamo involucro convesso di  $Y$  come l'unione degli involucri convessi di tutti i suoi sottoinsiemi finiti.

**Definizione 2.4.2.** Un **poliedro convesso**  $P$  è un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$  generato dall'involucro convesso di un insieme finito di punti  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  tali che ciascun  $x_i$  non appartiene all'involucro convesso di  $X \setminus \{x_i\}$ . Chiamiamo gli  $x_i$  **vertici** del poliedro.

Definiamo **spigoli** del poliedro le intersezioni  $S$  di  $P$  con una retta affine, diverse dal vuoto e da un punto del poliedro, tali che  $S$  non appartiene all'involucro convesso di  $P \setminus S$ .

Analogamente, definiamo le **facce** del poliedro come le intersezioni  $F$ , diverse

dal vuoto, da un vertice e da uno spigolo, del poliedro con un piano affine tali che  $F$  non appartiene all'involuppo convesso di  $P \setminus F$ .

In seguito ometteremo il termine convesso, ma sarà implicito ogni volta che tratteremo di un poliedro.

**Osservazione 2.4.1.** Per la Definizione 2.4.2, un poliedro è completamente determinato dall'insieme dei suoi vertici.

**Definizione 2.4.3.** Un poliedro si dice **regolare** se le sue facce sono poligoni regolari congruenti e se in ogni vertice si incontra lo stesso numero di facce. Il **centro** di un poliedro regolare è il punto equidistante da tutti i suoi vertici.

I Lemmi 2.2.2 e 2.2.1 possono essere facilmente generalizzati anche per poliedri in  $\mathbb{R}^3$ . Da questo segue che il centro di un poliedro regolare è fissato dalle isometrie che mandano il poliedro in se stesso.

Analogamente al caso bidimensionale, possiamo quindi ricondurci allo studio dei gruppi di simmetria dei poliedri regolari con centro nell'origine, che saranno quindi composti solamente da isometrie vettoriali.

**Esempio 2.4.1. Il gruppo di simmetria del cubo:** consideriamo il cubo

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}.$$

Vogliamo capire quali e quanti sono gli elementi di  $\text{Sym}(C)$ .

Indichiamo con  $V_i$ ,  $i : 1, \dots, 8$  i vertici del cubo.

Ragionando come per il quadrato, abbiamo che  $\text{Sym}(C) \subset S_8$ . Dimostriamo in particolare che abbiamo al massimo 48 possibili isometrie in  $\text{Sym}(C)$ . Infatti, data  $\varphi \in \text{Sym}(C)$  e fissato un vertice  $V_i$  abbiamo 8 scelte per la sua immagine tramite  $\varphi$ . Dato che le isometrie preservano le distanze, preso se  $V_j$  vertice adiacente a  $V_i$  e fissata  $\varphi(V_i)$ , abbiamo solo 3 scelte possibili per  $\varphi(V_j)$ . Analogamente, preso  $V_k \neq V_j$ ,  $V_k$  adiacente a  $V_i$  abbiamo due sole scelte possibili per  $\varphi(V_k)$ . Quindi in totale abbiamo al massimo  $8 \cdot 3 \cdot 2 = 48$  elementi in  $\text{Sym}(C)$ .

Elenchiamo ora le 48 isometrie.

Partiamo dalle rotazioni: per i tre assi di rotazione che uniscono i centri delle facce opposte abbiamo tre possibili rotazioni di angoli  $\pi/2, \pi, 3\pi/2$ . Per i quattro assi di rotazione che uniscono vertici opposti, ovvero due vertici che non appartengono alla stessa faccia, abbiamo due possibili rotazioni di angoli  $2\pi/3, 4\pi/3$ . Infine, per i sei assi di rotazione che uniscono i punti medi di spigoli opposti (dove per punto medio di uno spigolo si intende il punto equidistante dagli estremi di quello spigolo), un solo possibile angolo di rotazione di  $\pi$ . Abbiamo quindi un totale di 23 rotazioni con angolo diverso da 0, a cui aggiungiamo  $r_0$  come negli esempi precedenti. Abbiamo quindi un totale di 24 rotazioni.

Per quanto riguarda le riflessioni, in totale ne abbiamo 9, di cui 3 rispetto ai piani che passano per il centro del cubo e sono paralleli ad una coppia di facce opposte, e 6 rispetto a piani che contengono due spigoli opposti del cubo.

Studiamo ora le rotoriflessioni diverse da  $-Id_{\mathbb{R}^3}$ .

Sia  $r$  un asse che passa per il centro del cubo e unisce i centri di due facce opposte e sia  $s$  il piano perpendicolare ad  $r$  e passante per il centro; in totale abbiamo tre assi di questo tipo e per ogni asse abbiamo le rotazioni di  $\pi/2, 3\pi/2$  seguite dalla riflessione rispetto ad  $s$ . Notiamo che la rotazione di  $\pi$  genera  $-Id_{\mathbb{R}^3}$ . In totale abbiamo quindi 6 elementi di questo tipo: 3 assi per 2 versi di rotazione.

Consideriamo ora come asse  $r$  una delle 4 diagonali. In questo caso abbiamo le rotazioni di  $2\pi/3$  e  $4\pi/3$  intorno a questo asse seguite dalla riflessione per il piano perpendicolare ad  $r$ . Ragionando come prima, otteniamo 8 elementi totali di questo tipo.

Infine, abbiamo l'inversione centrale, ovvero  $-Id_{\mathbb{R}^3}$ .

In totale abbiamo quindi 9 riflessioni e 14 rotoriflessioni e l'inversione centrale. Abbiamo quindi elencato i 48 elementi di  $\text{Sym}(C)$ .

Descriviamo ora quei poliedri regolari che sono anche chiamati solidi platonici:

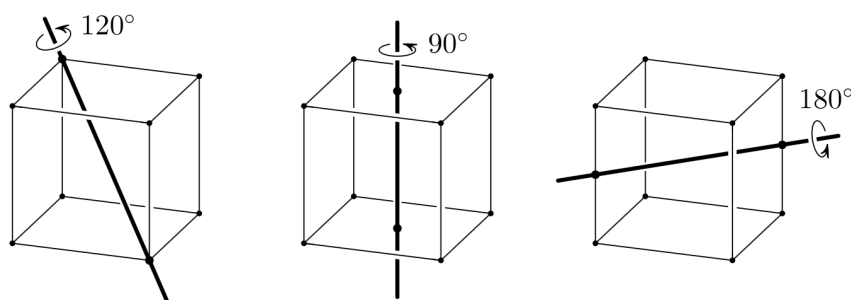


Figura 2.1: Le rotazioni del cubo (immagine presa da [21]).

1. **tetraedro regolare**: ha quattro facce, che sono triangoli equilateri, e quattro vertici; in ciascun vertice convergono tre facce;
2. **cubo**: ha sei facce quadrate e otto vertici; in ciascun vertice convergono tre facce;
3. **ottaedro regolare**: ha otto facce, che sono triangoli equilateri, e sei vertici; in ogni vertice convergono quattro facce;
4. **dodecaedro regolare**: ha dodici facce, che sono pentagoni regolari, e venti vertici; in ciascun vertice convergono tre facce;
5. **icosaedro regolare**: ha venti facce, che sono triangoli equilateri, e dodici vertici; in ogni vertice convergono cinque facce.

In realtà, dimostreremo che gli unici poliedri regolari, a meno di isometrie, sono proprio i solidi platonici.

Per farlo, classificheremo i sottogruppi finiti di  $O(\mathbb{R}^3)$ .

Iniziamo esaminandone alcuni esempi significativi, descrivendoli da un punto di vista geometrico.

**Esempio 2.4.2. Il gruppo ciclico  $\mathcal{C}_n$ :** consideriamo un poligono regolare di  $n$  lati,  $n > 2$ , centrato nell'origine nel piano  $Oxy$  di  $\mathbb{R}^3$ .

Per ogni  $k = 0, 1, \dots, n - 1$  definiamo  $\rho_k$  la rotazione di asse  $z$  e angolo

$2k\pi/n$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , e definiamo  $\mathcal{C}_n = \{\rho_k \mid k = 0, 1, \dots, n-1\}$ .

Mostriamo che  $\mathcal{C}_n$  è un sottogruppo di  $SO_3(\mathbb{R})$ : l'elemento neutro è  $\rho_0 = Id_{\mathbb{R}^3}$ , che appartiene a  $\mathcal{C}_n$ ; inoltre, per la Proposizione 2.3.3 si ha che  $\rho_k \circ \rho_h = \rho_{k+h}$ , dove l'indice va inteso modulo  $n$ . Infine, per ogni  $k$  l'inversa di  $\rho_k$  è la rotazione  $\rho_k^{-1} = \rho_{n-k}$ .

Ne segue che  $\mathcal{C}_n$  è un sottogruppo di  $SO_3(\mathbb{R})$ .

Tale gruppo ha esattamente  $n$  elementi, poiché le rotazioni di angoli  $0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \dots, \frac{2(n-1)\pi}{n}$  sono tutte distinte. Inoltre  $\mathcal{C}_n$  è un gruppo ciclico, generato dalla rotazione  $\rho_1$ , di angolo  $2\pi/n$  ed è il gruppo delle rotazioni che stabilizzano un poligono regolare di  $n$  lati centrato nell'origine.

**Esempio 2.4.3. Il gruppo diedrale  $D_n$ :** consideriamo un poligono regolare con  $n$  lati,  $n > 2$ , centrato nell'origine nel piano  $Oxy$  in  $\mathbb{R}^3$ . Indichiamo con  $D_n$  il gruppo delle isometrie di  $\mathbb{R}^3$  che stabilizzano questo poligono.

Vogliamo mostrare che queste isometrie sono di due tipi.

Innanzitutto, abbiamo le rotazioni attorno all'asse  $z$  di angolo  $\frac{2k\pi}{n}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , e sono in totale  $n$ .

Inoltre, abbiamo  $n$  riflessioni del piano  $Oxy$ , generate da delle rotazioni di  $\pi$  attorno ad assi appartenenti a questo piano. In seguito utilizzeremo il termine riflessioni per indicare le riflessioni del piano generate da questo tipo di rotazioni e indicheremo come asse di riflessione l'asse della rotazione di  $\pi$ .

Queste riflessioni sono diverse nei casi di  $n$  pari e  $n$  dispari.

Nel caso in cui  $n$  è pari, allora gli assi di riflessione sono di due tipi:  $n/2$  contengono due vertici opposti del poligono, mentre gli altri  $n/2$  contengono i punti medi di due lati opposti.

Nel caso di  $n$  dispari, invece, ogni asse di riflessione contiene un vertice del poligono e il punto medio del lato opposto.

Ragionando come nell'Esempio 2.2.2, abbiamo che una simmetria del poligono regolare è completamente determinata dall'immagine di un vertice e di uno dei suoi due vertici adiacenti. Infatti, scelto un vertice, ci sono  $n$  possibilità per scegliere la sua immagine tramite un'isometria; fissata la sua immagine, avremo solo 2 modi per scegliere l'immagine di un vertice a lui

adiacente tramite la stessa isometria. Quindi il numero totale delle isometrie che stabilizzano un poligono di  $n$  lati è al più  $2n$ . Poiché abbiamo già esibito  $2n$  rotazioni, otteniamo che  $D_n$  ha esattamente  $2n$  elementi.

**Esempio 2.4.4. Il gruppo di simmetria del tetraedro regolare:** consideriamo il tetraedro regolare  $T$  centrato nell'origine e definiamo

$V = \{A, B, C, D\}$  l'insieme dei suoi vertici. Sia  $\varphi$  un'isometria dello spazio che stabilizza il tetraedro. Ragionando come nell'Esempio 2.2.2, possiamo definire un omomorfismo  $\psi : \text{Sym}(T) \rightarrow S_4$ , la cui immagine sarà un sottoinsieme di  $S_4$ .

Concentriamoci sulle rotazioni di  $\text{Sym}(T)$ . Per i 4 assi che collegano ciascun vertice al centro della faccia opposta abbiamo due rotazioni non banali di angoli  $2\pi/3$  e  $4\pi/3$ . In totale ci sono quindi 8 rotazioni di questo tipo. Per i 3 assi che collegano il punto medio di uno spigolo del tetraedro al punto medio dello spigolo opposto abbiamo una rotazione di angolo  $\pi$ ; in totale ci sono tre rotazioni di questo tipo. In totale abbiamo quindi 12 rotazioni, considerando anche la rotazione di angolo 0.

Analizziamo ora le isometrie di  $\text{Sym}(T)$  che non sono rotazioni.

Notiamo che una riflessione, essendo inversa di sé stessa, se manda un vertice  $V_1$  in un vertice  $V_2$ , allora manderà  $V_2$  in  $V_1$ . Essendo i vertici quattro, una simmetria che stabilizza  $T$ , e quindi  $V$ , può o scambiare due coppie di vertici o scambiare una coppia e tenere fissa l'altra. Per scambiare una coppia, il piano di simmetria deve passare per il punto medio dello spigolo contenente quei due vertici. Ma essendo una simmetria vettoriale, il piano deve passare per l'origine e quindi passerà anche per i rimanenti due vertici, fissandoli. Abbiamo quindi 6 possibili piano di questo tipo, per un totale di 6 riflessioni che stabilizzano il tetraedro.

Studiamo ora le rotoriflessioni. Gli assi di rotazione possibili sono le tre rette che uniscono i punti medi di una coppia di spigoli opposti e i piani di riflessioni corrispondenti sono quelli ortogonali a questi assi e passanti per l'origine. Per ognuno di questi assi abbiamo due possibili rotazioni di angoli  $\pi/2$  e  $3\pi/2$  seguite dalla riflessione per il piano corrispondente. In totale

abbiamo quindi 6 rotoriflessioni.

In totale abbiamo quindi 24 isometrie in  $\text{Sym}(T)$ ; con lo stesso ragionamento usato nell'Esempio 2.2.2, si ottiene quindi che  $\text{Sym}(T)$  è un gruppo isomorfo a  $S_4$ .

**Esempio 2.4.5. Il gruppo di simmetria del cubo:** già analizzato nell'Esempio 2.4.1.

**Esempio 2.4.6. Il gruppo di simmetria del dodecaedro:** consideriamo un dodecaedro regolare  $D$  centrato nell'origine e definiamo  $V = \{V_1, \dots, V_{20}\}$  l'insieme dei suoi vertici. Sia  $\varphi$  un'isometria di  $\mathbb{R}^3$  che stabilizza il dodecaedro. Vogliamo elencare le isometrie presenti in  $\text{Sym}(D)$ .

Partiamo dalle rotazioni. Per i 6 assi che uniscono i centri di due facce opposte abbiamo rotazioni di angoli  $2k\pi/5$ , con  $k = 1, \dots, 4$ . In totale abbiamo 4 rotazioni non banali per asse, quindi ci sono 24 rotazioni di questo tipo.

Consideriamo ora le rette che collegano due vertici opposti. Abbiamo 10 assi di questo tipo, attorno ai quali possiamo ruotare di angoli  $2\pi/3$  e  $4\pi/3$ . Quindi in totale abbiamo altre 20 rotazioni non banali.

Prendiamo ora in esame le rette che uniscono i punti medi di due spigoli opposti. Attorno a questi assi abbiamo una sola rotazione di angolo  $\pi$ . Essendo gli spigoli trenta, abbiamo quindici assi di questo tipo con una rotazione ciascuno, quindi 15 rotazioni non banali.

In totale, considerando anche l'identità, abbiamo quindi 60 rotazioni.

Analizziamo ora le isometrie di  $\text{Sym}(D)$  che non sono rotazioni.

Per quanto riguarda le riflessioni, ogni piano di riflessione del dodecaedro passa per il suo centro e contiene due spigoli opposti. Ci sono 15 piani di questo tipo, quindi abbiamo 15 riflessioni totali.

Analizziamo ora le rotoriflessioni.

Ne abbiamo 24 che otteniamo componendo la rotazione di asse una delle sei rette passanti per i centri di due facce opposte e angolo  $\pi/5 + 2k\pi/5$ , con  $k = 0, 1, 3, 4$  con la riflessione per il piano ortogonale a ciascun asse e passante per il centro; se  $k = 2$ , otteniamo l'inversione centrale.

Inoltre, ne abbiamo altre 20 ottenute componendo una rotazione di asse

passante per due vertici opposti ed angolo  $\pi/3 + 2k\pi/3$ , con  $k = 0, 2$  e la riflessione per il piano ortogonale a ciascun asse e passante per il centro (per  $k = 1$  otteniamo l'inversione centrale, che abbiamo già elencato).

In totale abbiamo quindi trovato 120 isometrie che stabilizzano il dodecaedro.

Per mostrare che non ce ne sono altre, utilizziamo il fatto che un'isometria che stabilizza il dodecaedro manda vertici in vertici.

Fissato un vertice  $V_i$ , la sua immagine tramite un'isometria  $\varphi$  può essere un qualunque dei 20 vertici. Una volta fissata la sua immagine, fissiamo un vertice  $V_j$  adiacente a  $V_i$ . Dal momento che le isometrie preservano le distanze,  $\varphi(V_j)$  deve essere uno dei tre vertici adiacenti a  $\varphi(V_i)$ . Abbiamo quindi 3 scelte possibili per l'immagine di  $V_i$  tramite  $\varphi$ .

Sia ora  $V_k$  un altro vertice adiacente a  $V_i$ , con  $V_k \neq V_j$ . Anche in questo caso l'immagine  $\varphi(V_k)$  deve essere uno dei vertici adiacenti a  $\varphi(V_i)$ ; tuttavia, una volta fissata  $\varphi(V_j)$ , restano solo due possibilità per l'immagine di  $V_k$  tramite  $\varphi$ .

Ne segue quindi che abbiamo al massimo 120 elementi nel gruppo di simmetria del dodecaedro. Avendone già elencati 120, abbiamo quindi trovato tutte le isometrie in  $\text{Sym}(D)$ .

**Osservazione 2.4.2.** In tutti i gruppi di simmetria dei poliedri regolari visti finora, abbiamo osservato che è possibile mandare una qualsiasi terna di vertici adiacenti in un'altra terna di vertici adiacenti, conservando o invertendo l'ordine. Ciò implica banalmente che il gruppo di simmetria agisce in maniera transitiva sui vertici e, inoltre, agisce in maniera transitiva anche sulle facce, in quanto ogni faccia è univocamente determinata da tre vertici ad essa appartenenti.

Dato che le facce dei poliedri regolari sono per definizioni poligoni regolari, abbiamo che il gruppo di simmetria stabilizza i centri delle facce e, per quanto detto prima, agisce in maniera transitiva su di essi.<sup>10</sup>

---

<sup>10</sup>Una dimostrazione formale e dettagliata si può trovare in [8].

L'Osservazione 2.4.2 sarà utile per trattare i gruppi di simmetria dei solidi platonici rimanenti: l'ottaedro e l'icosaedro. Infatti mostreremo che questi sono i poliedri duali del cubo e del dodecaedro.

La definizione di poliedro duale qui presentata è specifica del caso che ci interessa, ovvero quello dei poliedri regolari, ed è finalizzata allo studio dei gruppi di simmetria di tali poliedri. Per una trattazione più approfondita dei poliedri duali si vedano [6] e [22].

**Definizione 2.4.4.** Dato un poliedro regolare  $P$ , definiamo **poliedro duale** di  $P$  il poliedro che ha per vertici i centri delle facce di  $P$ .

Dato un poliedro regolare  $P$ , indichiamo il suo poliedro duale con  $P^*$ .

**Osservazione 2.4.3.** Dato un poliedro regolare  $P$ , gli spigoli del poliedro duale  $P^*$  coincidono con i segmenti congiungenti centri di facce adiacenti. Per l'Osservazione 2.4.2, tali spigoli sono tutti congruenti tra loro e gli angoli interni delle facce sono anche congruenti tra loro. Inoltre, dato che il gruppo di simmetria agisce in maniera transitiva sui centri delle facce di  $P$ , abbiamo anche che in ogni vertice di  $P^*$  incidono lo stesso numero di spigoli. Quindi il duale di un poliedro regolare è a sua volta un poliedro regolare.

**Proposizione 2.4.1.** *Dato un poliedro regolare  $P$ , sia  $P^*$  il suo duale. Allora  $(P^*)^*$ , il duale del duale, è omotetico<sup>11</sup> al poliedro  $P$ .*

*Dimostrazione.* Per dimostrarlo è sufficiente dimostrare che i vertici di  $P$  sono allineati con i vertici di  $(P^*)^*$  e l'origine. Infatti, essendo  $(P^*)^*$  a sua volta regolare, i suoi vertici saranno tutti equidistanti dal centro.

Consideriamo un vertice  $V$  di  $P$  e siano  $F_1, \dots, F_l$  le facce a cui quel vertice appartiene. Consideriamo l'asse  $r$  passante per l'origine e il vertice  $V$ . Allora  $\text{Sym}(P)$  contiene una rotazione attorno ad  $r$  di angolo  $2\pi/l$ , che, per l'Osservazione 2.4.2, scambia i centri delle facce incidenti a  $V$ . Quei centri delle facce coincidono con i vertici della faccia di  $P^*$  corrispondente a  $V$ , che viene

<sup>11</sup>Vedere la Definizione A.0.11 in Appendice.

quindi stabilizzata da questa rotazione. Essendo la faccia di  $P^*$  un poligono regolare, allora il suo centro viene fissato dalla rotazione e appartiene quindi all'asse passante per  $V$  e l'origine.

Essendo i centri delle facce di  $P^*$  i vertici di  $(P^*)^*$ , ciò dimostra la tesi.  $\square$

**Osservazione 2.4.4.** Sia  $T$  un tetraedro regolare. Allora,  $T^* = T$ .

Infatti, un tetraedro regolare ha 4 facce e 4 vertici, e la dualità scambia per definizione facce e vertici preservando lo schema di adiacenza; la struttura del duale di un tetraedro regolare è quindi identica a quella del tetraedro di partenza.

**Osservazione 2.4.5.** Dalla Definizione 2.4.4 segue anche che l'ottaedro è il poliedro duale del cubo (e viceversa) e l'icosaedro è il poliedro duale del dodecaedro (e viceversa).

Il teorema seguente ci fa capire perché siamo interessati ai poliedri duali: ci dice infatti che due poliedri duali hanno lo stesso gruppo di isometrie (a meno di isomorfismo).

**Teorema 2.4.1.** *Sia  $P$  un poliedro regolare convesso in  $\mathbb{R}^3$  e sia  $P^*$  il suo poliedro duale. Allora, i gruppi di isometrie di  $P$  e  $P^*$  sono isomorfi.*

*Dimostrazione.* Sia  $\varphi \in \text{Sym}(P)$ . Per l'Osservazione 2.4.2,  $\varphi$  stabilizza i vertici di  $P^*$ , quindi, dato che un poliedro è univocamente identificato dai suoi vertici,  $\varphi \in \text{Sym}(P^*)$ .

Sia ora  $\psi \in \text{Sym}(P^*)$ . Sempre per l'Osservazione 2.4.2,  $\psi$  stabilizza i vertici di  $(P^*)^*$ , ovvero appartiene a  $\text{Sym}((P^*)^*)$ . Ma, per la Proposizione 2.4.1,  $P$  è omotetico a  $(P^*)^*$ , quindi  $\text{Sym}((P^*)^*) = \text{Sym}(P)$ . Ciò conclude la dimostrazione.  $\square$

Il nostro obiettivo è quello di classificare i sottogruppi finiti di  $SO_3(\mathbb{R})$ . Iniziamo con un lemma.

**Lemma 2.4.1.** *Sia  $G^+$  un sottogruppo finito di  $SO_3(\mathbb{R})$  che agisce sulla sfera  $\mathbb{S}^2$  e sia  $F$  l'insieme di tutti i punti di  $\mathbb{S}^2$  fissati da almeno un elemento di  $G^+$*

diverso dall'elemento neutro  $e_G$ . Allora,  $F$  è invariante rispetto all'azione di  $G^+$ , cioè  $G \cdot F = \{gf \mid g \in G, f \in F\} = F$ , e

$$|F| = |G^+| \cdot |A| - 2(|G^+| - 1),$$

dove  $A \subset F$  è un insieme che contiene esattamente un punto per ogni orbita dell'azione di  $G^+$  su  $F$ .

*Dimostrazione.* Per prima cosa, mostriamo che  $F$  è  $G$ -invariante.

Sia  $x \in F$ . Per ipotesi, esiste  $g \in G^+ \setminus \{e_G\}$  tale che  $gx = x$ . Sia  $h \in G^+ \setminus \{e_G\}$  e sia  $y = hx$ ; il nostro scopo è mostrare che  $y \in F$ , ovvero che esiste un elemento  $k$  di  $G^+$  tale che  $ky = y$ . Consideriamo l'elemento  $k = hgh^{-1} \in G^+$ . Si ha che  $ky = (hgh^{-1})(hx) = h(gx) = hx = y$ , cioè  $y \in F$ . Rimane da mostrare che  $k \neq e_G$ . Per assurdo, supponiamo  $k = e_G$ . Ma allora,  $hgh^{-1} = e_G \Leftrightarrow g = h^{-1}e_Gh = e_G$ , che è assurdo perché per ipotesi  $g \neq e_G$ . Dunque,  $F$  è  $G^+$ -invariante.

Mostriamo ora la seconda parte dell'enunciato, cioè che  $|F| = |G^+| \cdot |A| - 2(|G^+| - 1)$ . Indichiamo con  $O$  l'insieme delle orbite di  $G^+$  su  $F$ . Per ipotesi, l'insieme  $A$  contiene esattamente un punto per ognuna di queste orbite, quindi  $|O| = |A|$ . Definiamo anche  $\text{Fix}_F(g) = \{x \in F \mid gx = x\}$ .

Ora, per il Lemma di Burnside A.0.2, si ha che  $|O| = \frac{1}{|G^+|} \sum_{g \in G^+} |\text{Fix}_F(g)| = |A|$ .

A questo punto, siamo interessati a calcolare quanto vale  $|\text{Fix}_F(g)|$ . Ovviamente, se  $g = e_G$ , si ha  $|\text{Fix}_F(g)| = |F|$ .

Grazie alla Proposizione 2.3.2, possiamo quindi assumere  $g \neq e_G$ , cioè  $g$  è una rotazione non banale, ovvero fissa esattamente due punti di  $\mathbb{S}^2$ . Quindi, per ogni  $g \in G^+ \setminus \{e_G\}$ ,  $|\text{Fix}_F(g)| = 2$ .

Unendo questi ragionamenti otteniamo che

$$\sum_{g \in G^+} |\text{Fix}_F(g)| = |\text{Fix}_F(e_G)| + \sum_{g \neq e_G} |\text{Fix}_F(g)| = |F| + 2(|G^+| - 1).$$

Sostituendo nella formula di Burnside si ha quindi

$|A| = \frac{1}{|G^+|} (|F| + 2(|G^+| - 1))$ , cioè  $|F| = |G^+| \cdot |A| - 2(|G^+| - 1)$ , che è quello che volevamo.  $\square$

Ora siamo pronti per dimostrare il teorema che afferma che non ci sono sottogruppi finiti di  $SO_3(\mathbb{R})$  oltre a quelli elencati negli Esempi 2.4.1, 2.4.2, 2.4.3, 2.4.4, 2.4.6.

**Teorema 2.4.2.** *Ogni sottogruppo finito non banale  $G^+$  di  $SO_3(\mathbb{R})$  è isomorfo a uno dei seguenti gruppi:*

1.  $C_n$ ,  $n \geq 2$ ;
2.  $D_n$ ,  $n \geq 2$ ;
3.  $Sym^+(T)$ ;
4.  $Sym^+(C)$ ;
5.  $Sym^+(D)$ .

*Dimostrazione.* Per la Proposizione 2.3.2, sappiamo che ogni elemento di  $SO_3(\mathbb{R})$  è una rotazione rispetto ad una retta passante per l'origine, che quindi ha esattamente due punti fissi sulla sfera  $\mathbb{S}^2$ , che non sono altro che i punti di intersezione dell'asse di rotazione con la sfera. Consideriamo ora l'insieme dei punti fissi del gruppo  $G^+$ :

$$F = \{x \in \mathbb{S}^2 \mid \exists g \in G^+ \setminus \{e_G\}, gx = x\}.$$

Consideriamo la geometria  $(F : G)$  e sia  $A$  un insieme che contiene esattamente un punto per ogni orbita di  $G^+$  in  $F$ . Per il Lemma 2.4.1,  $|F| = |G^+| \cdot |A| - 2(|G^+| - 1)$  e, per il Teorema Orbita-Stabilizzatore A.0.3, si ha

$$|F| = \sum_{x \in A} \frac{|G^+|}{v(x)}, \quad \text{con } v(x) = |G_x|.$$

Notiamo che  $v(x)$  è l'ordine del sottogruppo di rotazioni di  $G^+$  generato dalle rotazioni rispetto all'asse che contiene  $x$  e il suo punto antipodale.

Sostituendo  $|F|$  nella prima formula e dividendo per la cardinalità di  $|G^+|$ , otteniamo

$$2 - \frac{2}{|G^+|} = \sum_{x \in A} \left(1 - \frac{1}{v(x)}\right), \quad (1)$$

da cui ricaviamo

$$|G^+| = \left[ 1 - \frac{1}{2} \cdot \sum_{x \in A} \left( 1 - \frac{1}{v(x)} \right) \right]^{-1}. \quad (2)$$

Dalla (1), sapendo che  $2 - \frac{2}{|G^+|}$  è compreso tra 1 e 2 (per ipotesi di  $G^+$  finito non banale), deduciamo che anche la sommatoria su  $A$  è limitata dagli stessi valori, quindi la somma su  $A$  può avere al massimo tre addendi (perché  $v(x) \geq 2$ ); quindi l'azione di  $G^+$  su  $F$  ha 2 o 3 orbite.

Analizziamo il caso in cui  $|F| = 2$ , ovvero tutte le rotazioni hanno lo stesso asse. In questo caso le uniche due orbite in  $F$  sono i punti di intersezione tra l'asse di rotazione e la sfera  $\mathbb{S}^2$ , che chiamiamo  $x_1$  e  $x_2$ . Questa situazione è possibile solo se in  $G^+$  tutte le rotazioni hanno come asse quello passante per  $x_1$  e  $x_2$ , da cui segue che  $G^+$  è isomorfo a  $\mathbb{Z}_n$  per un certo  $n \geq 2$ . In questo caso,  $v(x_1) = v(x_2) = n = |G^+|$ .

Abbiamo quindi provato il teorema per il caso  $|F| = 2$ .

È ovvio che se l'azione di  $G^+$  su  $F$  produce solo due orbite distinte, allora lo stabilizzatore dei punti di queste due orbite ha lo stesso numero di elementi e siamo quindi nel caso già studiato di  $|F| = 2$ .

Supponiamo quindi che ci siano tre orbite distinte, quindi avremo  $A = \{x_1, x_2, x_3\}$ . Per comodità, numeriamo gli elementi di  $A$  in modo che  $v_1 \leq v_2 \leq v_3$ , con  $v_i = v(x_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Possiamo assumere  $|F| > 2$  (altrimenti siamo nel caso precedente), da cui deduciamo che ci sono almeno due assi di rotazione distinti. Ma in questo caso, dalla Proposizione 2.3.3 la composizione di due rotazioni con assi distinti genera una rotazione rispetto ad un terzo asse, per cui  $|G^+| \geq 6$ . Se tutti i  $v_i$  fossero maggiori di 2, il membro di destra dell'equazione (1) sarebbe maggiore o uguale a 2, e abbiamo già visto che questo non è possibile. Ne deduciamo che c'è almeno un orbita che ha stabilizzatore con cardinalità 2. Procediamo quindi studiando il caso in cui  $v_1 = 2$  e ci sono tre orbite distinte date dall'azione di  $G^+$  su  $F$ , analizzando cosa succede per i possibili valori dei  $v_i$ , scelti in modo che soddisfino la (1), ovvero tali che

$$3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_3} \leq 2.$$

Nella tabella sottostante elenchiamo i casi possibili.

	$v_1$	$v_2$	$v_3$
caso 1	2	2	$n$
caso 2	2	3	3
caso 3	2	3	4
caso 4	2	3	5

Procediamo ora analizzando uno ad uno i quattro casi trovati. Consideriamo i punti distinti di  $F$  come vertici di un poliedro su cui  $G^+$  agisce. Vogliamo mostrare che questa azione è una di quelle elencate nell'enunciato del teorema, ovvero il poliedro trovato o è in realtà un poligono regolare o è il tetraedro, o il cubo, o il dodecaedro.

Caso 1: sia  $v_2 = 2$ ; abbiamo quindi due rotazioni di ordine due, ovvero di angolo  $\theta = \pi$ , con assi distinti  $l_1, l_2$ . Sia  $l_3$  la retta ortogonale ai due assi di rotazione e sia  $x_3$  uno dei suoi punti di intersezione con la sfera. Sia  $n$  l'ordine della rotazione di asse  $l_3$ . Dalla (2) ricaviamo che  $|G^+| = 2n$ . Possiamo ora esplicitare le tre orbite in  $F$ : abbiamo quella con  $n$  punti che contiene anche  $x_1$ , che sta nel piano ortogonale a  $l_3$  e che passa per il centro della sfera, quella con  $n$  punti che contiene anche  $x_2$ , che sta nello stesso piano della precedente, e quella di due punti, che contiene  $x_3$  e il suo antipodale. Possiamo quindi affermare che in questo caso  $|G^+|$  è isomorfo al gruppo diedrale  $\mathbb{D}_n$ .

Caso 2: in questo caso abbiamo  $v_2 = v_3 = 3$  e  $|G^+| = 12$ . Consideriamo l'asse  $l_2$ , che passa per il punto  $x_2$ , della rotazione di ordine 3. Siano  $x'_3, x''_3$  le immagini di  $x_3$  tramite le rotazioni di asse  $l_2$ . La rotazione di asse  $l_1$ , che passa per  $x_1$  è di ordine 2, dunque almeno uno tra  $x_3, x'_3, x''_3$  deve essere mandato in un punto  $x'''_3$  diverso dai precedenti. Otteniamo quindi un tetraedro  $x_3, x'_3, x''_3, x'''_3$ . Vogliamo mostrare che questo tetraedro è regolare. Consideriamo la composizione delle rotazioni di asse  $l_3$  e  $l_1$ , otteniamo un'altra rotazione di ordine 3; possiamo quindi concludere che una faccia del tetraedro è un triangolo equilatero, dunque il tetraedro è regolare. Considerando la composizione di due rotazioni di ordine tre, otteniamo una rotazione di ordine due e, iterando il ragionamento, possiamo descrivere tutte le 12 rota-

zioni di  $G^+$  e concludere che  $G^+$  è isomorfo a  $\text{Sym}^+(T)$ .

Caso 3: siano  $v_2 = 2$  e  $v_3 = 4$ . La strategia che vogliamo usare è simile a quella del caso precedente, solo che stavolta troviamo gli otto vertici di un cubo tra i punti di  $F$ . Per farlo, iniziamo con la rotazione di ordine 4, che ci permette di ottenere due quadrati inscritti nella sfera, poi utilizziamo le rotazioni per mostrare che questi quadrati sono in realtà le facce opposte di un cubo, e infine verifichiamo che i 24 elementi di  $G^+$  sono le simmetrie di questo cubo, per ottenere che  $G^+$  è isomorfo a  $\text{Sym}^+(C)$ .

Caso 4: siano  $v_2 = 3$  e  $v_3 = 5$ . Ripetendo il ragionamento usato nei casi precedenti, applicandolo in questo caso ad un dodecaedro costruito usando i punti di  $F$ , otteniamo un isomorfismo tra  $G^+$  e  $\text{Sym}^+(D)$ .

Abbiamo quindi mostrato che i cinque casi corrispondono, nell'ordine, ai gruppi elencati nell'enunciato del teorema.  $\square$

**Osservazione 2.4.6.** Consideriamo ora il sottogruppo di  $O_3(\mathbb{R})$  generato dagli elementi di  $D_n$  e dalla riflessione  $\rho$  per il piano passante per l'asse della rotazione di ordine  $n$  e uno degli assi di rotazione  $\pi$  in  $D_n$ . Denotiamo questo sottogruppo con  $\widetilde{D}_n$ . La composizione di  $\rho$  con ciascuna delle rotazioni crea  $n$  nuove isometrie, quindi l'ordine di  $\widetilde{D}_n$  è  $4n$ .

**Corollario 2.4.1.** *Ogni sottogruppo finito non banale  $G$  di  $O_3(\mathbb{R})$  è isomorfo ad un gruppo tra quelli elencati nel Teorema 2.4.2 o ad uno dei seguenti gruppi:*

1.  $\widetilde{D}_n$ ;
2.  $S_4$ ;
3.  $\text{Sym}(C)$ ;
4.  $\text{Sym}(D)$ .

*Dimostrazione.* Sia  $G$  un sottogruppo finito non banale di  $O_3(\mathbb{R})$  e sia  $G^+$  un suo sottogruppo di rotazioni. Dal Teorema 2.4.2, il sottogruppo  $G^+$  è uno dei cinque gruppi elencati nel suo enunciato. Per la Proposizione 1.5.3, il

gruppo  $G$  è generato dagli elementi di  $G^+$  e da una riflessione per un piano passante per l'origine, quindi deve essere uno di quelli elencati nell'enunciato del corollario.  $\square$

## 2.5 I cinque poliedri regolari

Per concludere il capitolo, come anticipato, utilizzeremo i risultati precedenti per dimostrare che gli unici poliedri regolari sono i solidi platonici. Prima di procedere con il teorema principale, enunciamo due lemmi che saranno alla base della dimostrazione.

**Lemma 2.5.1.** *Sia  $F$  un poligono regolare inscritto in  $\mathbb{S}^2$ . Allora esiste al più un poliedro regolare inscritto in  $\mathbb{S}^2$  che abbia  $F$  come faccia.*

*Dimostrazione.* Sia  $P$  un poliedro regolare che abbia  $F$  come faccia. Essendo  $P$  regolare, tutte le sue facce sono congruenti, quindi, se consideriamo una qualsiasi faccia  $F'$  adiacente ad  $F$ , questa può essere ottenuta come riflessione di  $F$  per un piano passante per l'origine e lo spigolo in comune ad  $F$  ed  $F'$ . Iterando questo processo otteniamo che tutte le facce di  $P$  sono univocamente determinate da  $F$ , il che dimostra la tesi.  $\square$

**Lemma 2.5.2.** *Sia  $P$  un poliedro regolare inscritto in  $\mathbb{S}^2$  che ha come facce degli  $n$ -agoni regolari. Allora il suo gruppo di simmetria è non banale e, in particolare, contiene il sottogruppo di rotazioni di angolo  $2k\pi/n$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , attorno agli assi passanti per l'origine e il centro delle facce.*

*Dimostrazione.* Sia  $r$  un asse passante per l'origine e il centro di una faccia  $F$  del poliedro. La faccia  $F$  è perpendicolare all'asse  $r$  e quindi il piano a cui appartiene è stabilizzato dalle rotazioni attorno ad  $r$ . Essendo  $F$  un poligono regolare di  $n$  lati, le rotazioni del piano a cui appartiene di angolo multiplo di  $2\pi/n$  lo stabilizzano. Questo conclude la dimostrazione.  $\square$

**Lemma 2.5.3.** *Sia  $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$  e siano  $r_1, \dots, r_k$  delle rette passanti per l'origine  $O$ . A meno di una simmetria centrale, ovvero dell'isometria*

– $Id_{\mathbb{R}^3}$ , esiste al più un poliedro regolare inscritto in  $\mathbb{S}^2$  che abbia come facce degli  $n$ -agoni regolari e le rette  $r_1, \dots, r_k$  come assi delle rotazioni delle facce appartenenti al suo gruppo di simmetria.

*Dimostrazione.* Sia  $P$  un poliedro regolare come nell'enunciato. Consideriamo la retta  $r_1$ : questa interseca  $\mathbb{S}^2$  in due punti opposti all'origine. Dato che stiamo considerando il risultato a meno di simmetria centrale, sia  $A$  uno qualsiasi di questi due punti e supponiamo che la semiretta partente da  $O$  e passante per  $A$  passi per il centro  $C_1$  di una faccia  $F_1$  di  $P$ . Dato che  $r_1$  appartiene al gruppo di simmetria di  $P$ , la faccia  $F_1$  è perpendicolare ad  $r_1$ . Supponiamo ora, senza perdita di generalità, che la retta  $r_2$  passi per il centro  $C_2$  di una faccia  $F_2$  adiacente ad  $F_1$ . Dato che  $F_1$  ed  $F_2$  sono  $n$ -agoni regolari congruenti, le distanze di  $C_1$  e di  $C_2$  dal segmento in comune ad  $F_1$  ed  $F_2$  sono uguali. Quindi questo segmento appartiene al piano che biseca l'angolo tra  $r_1$  ed  $r_2$ . Dati  $r_1$  ed  $r_2$ , questo piano è univocamente determinato<sup>12</sup> e la sua intersezione con  $\mathbb{S}^2$  identifica una circonferenza  $S$ . Vogliamo ora far vedere che esiste una sola possibilità per la faccia  $F_1$ . Infatti, come detto  $F_1$  appartiene ad un piano  $\Pi$  ortogonale ad  $r_1$ . L'intersezione di  $\Pi$  con  $\mathbb{S}^2$  è a sua volta una circonferenza  $\Omega$ , all'interno della quale è inscritta la faccia  $F_1$ . Inoltre, l'intersezione di  $\Pi$  con  $S$  identifica due punti su  $\Omega$  che, a seconda della posizione di  $\Pi$ , sono più o meno vicini. Quando  $\Pi$  passa per l'origine sono diametralmente opposti; più  $\Pi$  si allontana dall'origine più i punti sono vicini, fino a coincidere. Ma la distanza tra questi punti è determinata dal fatto che  $F_1$  è un  $n$ -agono regolare e quindi abbiamo una sola possibilità per la posizione del piano  $\Pi$ . Dato che  $\Omega$  è quindi determinata e anche un primo segmento di  $F_1$  è determinato, allora tutta la faccia  $F_1$  è determinata. A questo punto, per il Lemma 2.5.1, abbiamo che tutto il poliedro  $P$ , se esiste, è univocamente determinato.  $\square$

**Teorema 2.5.1.** *Ci sono esattamente cinque diversi poliedri regolari: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro.*

<sup>12</sup>Ci sono due piani possibili che bisecano i due angoli tra  $r_1$  ed  $r_2$ , ma solo uno di questi separa  $C_1$  e  $C_2$ .

*Dimostrazione.* Sia  $P$  un poliedro regolare inscritto in  $\mathbb{S}^2$  e supponiamo che le sue facce siano degli  $n$ -agoni regolari per un qualche  $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ . Chiamiamo  $G$  il suo gruppo di isometria. Per il Lemma 2.5.2,  $G$  è non banale e contiene le rotazioni di  $2k\pi/n$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$  per gli assi passanti per i centri delle facce. Quindi il suo sottogruppo delle rotazioni  $G^+$ , deve essere uno di quelli elencati nel Teorema 2.4.2. Osserviamo intanto che  $G^+$  non può essere  $\mathcal{C}_n$  o  $D_n$  in quanto questi hanno rotazioni (diverse da  $\pi$  nel caso di  $D_n$ ) attorno ad un solo asse, il che implicherebbe che  $P$  abbia solo 2 facce.

Valutiamo ora gli altri casi: se  $G^+$  è  $\text{Sym}^+(T)$ , abbiamo come possibili assi di rotazione o quelli da  $2k\pi/3$  o quelli da  $\pi$ . Le rotazioni da  $\pi$  non possono appartenere a rotazioni delle facce del poliedro, quindi l'unica possibilità è che le facce siano triangolari e gli assi di rotazioni esattamente quelli del tetraedro regolare. Quindi, per il Lemma 2.5.3  $P$  deve essere un tetraedro regolare.

Se  $G^+$  è  $\text{Sym}^+(C)$ , abbiamo come possibili assi di rotazione o quelli da  $2k\pi/3$  o quelli da  $k\pi/2$  o quelli da  $\pi$ . Ragionando come nel caso precedente ed utilizzando il Lemma 2.5.3, nel primo caso otteniamo l'ottaedro regolare e nel secondo caso il cubo, mentre il terzo è degenere.

Infine, se  $G^+$  è  $\text{Sym}^+(D)$ , abbiamo come possibili assi di rotazione quelli da  $2k\pi/5$ , quelli da  $2k\pi/3$  o quelli da  $\pi$ . Sempre con lo stesso ragionamento dei casi precedenti, nel primo caso otteniamo il dodecaedro e nel secondo l'icosaedro.

Poiché non abbiamo altre possibilità per  $G^+$ , questo conclude la dimostrazione.  $\square$

Abbiamo quindi dimostrato che gli unici solidi regolari di  $\mathbb{R}^3$  sono i solidi platonici.

# Capitolo 3

## Gruppi di Coxeter

L'obiettivo di questo capitolo è studiare i gruppi finiti generati da riflessioni, noti come gruppi di Coxeter, iniziando da una loro introduzione geometrica.

Successivamente, esamineremo questi gruppi dal punto di vista algebrico, con l'obiettivo di associare a ciascun gruppo finito di riflessioni un insieme di generatori il più piccolo possibile. Questi generatori sono chiamati radici semplici.

### 3.1 Una prospettiva geometrica

Storicamente, lo studio dei gruppi di Coxeter è legato anche a considerazioni di natura geometrica ed estetica. Un esempio concreto dell'azione di questo tipo di gruppi è quello che accade all'interno di un caleidoscopio.

Per darci quindi un'idea generale di come funzionano questi gruppi, vediamo cosa succede in un caleidoscopio: si tratta di uno strumento ottico in cui piccoli pezzi di vetro colorato vengono messi all'interno di un prisma regolare e vengono riflessi molteplici volte da tre specchi che formano le facce laterali del prisma. Guardando all'interno del caleidoscopio, si vede un motivo colorato ripetuto: l'immagine del triangolo e le sue immagini specu-

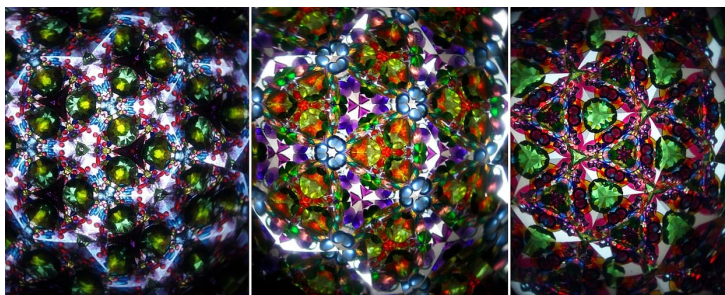


Figura 3.1: L'interno di un caleidoscopio

lari si alternano formando un esagono, circondato da altri triangoli equilateri all'infinito.

Dal punto di vista matematico, si tratta di un fenomeno bidimensionale: il triangolo equilatero che costituisce la base del prisma è un dominio fondamentale<sup>13</sup> di un gruppo discreto<sup>14</sup> che agisce sul piano della base, riflettendolo fino a formare l'esagono.

Se provassimo a modificare il caleidoscopio, ad esempio cambiando gli angoli tra le facce del prisma, l'immagine diventerebbe sfocata e non si riuscirebbe più a vedere nessun motivo. Quello che succederebbe è che le immagini del triangolo di base si sovrapporrebbero infinite volte, come mostrato in Figura 3.3: il gruppo di trasformazioni che agisce sul triangolo in tal caso non è discreto.

In quest'elaborato, ci interessa il caso in cui il caleidoscopio funzioni correttamente. Consideriamo quindi un angolo  $F$  di ampiezza  $\alpha$  formato da due specchi piani a due facce, che chiamiamo  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$ .

Guardando all'interno del caleidoscopio si vede che qualunque figura posta all'interno dell'angolo viene riflessa da  $\Pi_1$ ; la sua immagine viene poi riflessa dall'immagine dello specchio  $\Pi_1$  in  $\Pi_2$ , e il processo continua iterativamente. Contemporaneamente, la figura viene riflessa da  $\Pi_2$  e le immagini successive si ottengono alternando le riflessioni rispetto ai due specchi.

<sup>13</sup>Vedere la Definizione A.0.20 in Appendice.

<sup>14</sup>Vedere la Definizione A.0.19 in Appendice.

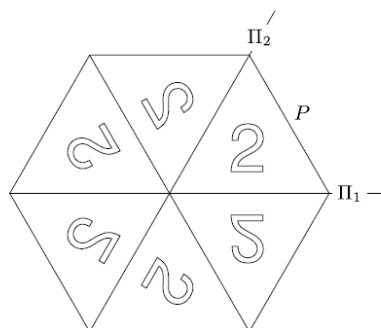


Figura 3.2: La geometria del caleidoscopio (immagine presa da [21]).

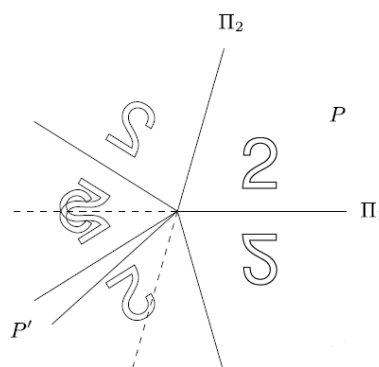


Figura 3.3: La geometria di un caleidoscopio modificato (immagine presa da [21]).

In generale, possono verificarsi due situazioni: le immagini riflesse dai due specchi si sovrappongono (Figura 3.3), oppure coincidono perfettamente, come nella Figura 3.2.

Affinché quest'ultimo caso si verifichi ci serve che l'angolo  $F$  abbia ampiezza  $\alpha = \pi/k$ , con  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ .

Per formalizzare questa situazione, consideriamo nel piano euclideo due rette che formano un angolo  $F$  di ampiezza  $\alpha$  e sia  $G$  il gruppo delle trasformazioni del piano generato dalle riflessioni rispetto a tali rette. Quando  $\alpha = k/\pi$ , le immagini  $g(F)$ , al variare di  $g \in G$ , non si sovrappongono e il gruppo  $G$  è il gruppo diedrale  $D_k$ .

Vediamo ora cosa vuol dire che un gruppo  $G$  agisce transitivamente su una figura  $F$  in termini geometrici:

**Definizione 3.1.1.** Sia  $F$  un poligono in  $\mathbb{R}^2$  con angoli al vertice minori o uguali di  $\pi/2$  e sia  $G_F$  il gruppo di trasformazioni generato dalle riflessioni rispetto alle rette contenenti i lati di  $F$ . Diciamo che  $G_F$  **agisce in maniera discreta** su  $F$  se le immagini  $g(F)$ ,  $g \in G_F$ , non si sovrappongono.

Osserviamo che una condizione necessaria affinché  $G$  agisca transitivamente su  $F$  è che tutti gli angoli di  $F$  siano della forma  $\pi/k$ ,  $k \geq 2$ . Questa

condizione, come vedremo nel Teorema 3.1.1a, non è però sufficiente.

A questo punto possiamo ora definire il poligono di Coxeter, che ci permetterà di passare alla geometria di Coxeter.

**Definizione 3.1.2.** Un poligono convesso  $F$  si chiama **poligono di Coxeter** se i suoi angoli sono tutti di  $\pi/k$ , con  $k \geq 2$ , e  $G_F$  agisce in maniera discreta su  $F$ .

Il seguente teorema ci dice che esistono solo quattro poligoni di Coxeter.

**Teorema 3.1.1.** *In  $\mathbb{R}^2$ , i poligoni di Coxeter sono i seguenti: il rettangolo, il triangolo equilatero, il triangolo rettangolo isoscele e il triangolo rettangolo con angoli  $\pi/3$  e  $\pi/6$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $F$  un poligono di Coxeter. Se  $F$  ha  $n$  lati, allora la somma dei suoi angoli è  $\pi(n - 2)$  e il valore medio dell'ampiezza degli angoli di  $F$  è  $\pi(1 - \frac{2}{n})$ . Se  $n$  fosse maggiore di 4, la figura  $F$  avrebbe almeno un angolo ottuso, ma questo è un assurdo in quanto  $F$  è un poligono di Coxeter.

Se  $n = 4$ , allora tutti gli angoli di  $F$  hanno ampiezza  $\pi/2$ , il che ci dice che  $F$  è un rettangolo.

Se  $n = 3$  e gli angoli del triangolo fondamentale sono  $\pi/k, \pi/l, \pi/m$ , allora (dato che sappiamo che la loro somma deve essere  $\pi$ ), otteniamo l'equazione

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} = 1$$

che ha tre soluzioni, ovvero  $(k, l, m) = (3, 3, 3), (2, 4, 4), (2, 3, 6)$ . Ciascuna di queste corrisponde ad uno dei tre triangoli elencati nell'enunciato del teorema, da cui la tesi.  $\square$

## 3.2 Una prospettiva algebrica

In questa sezione studieremo i gruppi di Coxeter concentrandoci sulla loro struttura interna; per poterla studiare al meglio, è utile introdurre il concetto di essenzialità.

**Definizione 3.2.1.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale euclideo e sia  $W$  un gruppo di riflessioni tale che non esiste un punto fisso non nullo comune a tutti gli elementi del gruppo. Allora, diciamo che  $W$  è **essenziale** rispetto a  $V$ .

Presentiamo ora alcuni esempi di gruppi di riflessioni.

**Esempio 3.2.1.**  $D_n$ ,  $n \geq 3$ : sia  $V = \mathbb{R}^2$ ; consideriamo  $D_n$  il gruppo diedrale descritto nell'Esempio 2.4.3.

Il gruppo  $D_n$  è generato da riflessioni: infatti, come abbiamo visto nell'Osservazione 2.1.3, una rotazione di angolo  $2\pi/n$  può essere ottenuta come prodotto di due riflessioni rispetto ad una coppia di diagonali<sup>15</sup> adiacenti che si incontrano ad un angolo di ampiezza  $\theta = \pi/n$ .

**Esempio 3.2.2.**  $A_{n-1}$ ,  $n \geq 2$ : facciamo agire un elemento di  $S_n$  su  $\mathbb{R}^n$  permutando gli indici dei vettori della base standard  $e_1, \dots, e_n$ . Abbiamo che la trasposizione  $(ij)$  agisce come una riflessione, mandando  $e_i - e_j$  nel suo opposto e fissando puntualmente il suo ortogonale, ovvero tutti i vettori  $(x_1, \dots, x_n)$  di  $\mathbb{R}^n$  tali che  $x_i = x_j$ . Dato che  $S_n$  è generato dalle trasposizioni, può essere visto come un gruppo di riflessioni.

Quando  $S_n$  agisce su  $\mathbb{R}^n$  nel modo appena descritto, fissa puntualmente il vettore  $e_1 + e_2 + \dots + e_n$  e quindi non è essenziale. Tuttavia, per il Lemma 1.3.2,  $S_n$  stabilizza l'iperpiano ortogonale, ovvero lo span dei vettori le cui coordinate sommano a 0. Dunque, possiamo dire che  $S_n$  agisce anche su uno spazio euclideo di dimensione  $n - 1$  come gruppo di riflessioni, fissando solo l'origine. Chiamiamo quindi  $A_{n-1}$  il sottogruppo di  $O_{n-1}(\mathbb{R})$  indotto da questa azione di  $S_n$ .

**Esempio 3.2.3.**  $B_n$ ,  $n > 2$ : consideriamo di nuovo  $V = \mathbb{R}^n$  con  $S_n$  che agisce su  $V$  come nell'Esempio 3.2.2. Inoltre, definiamo altre  $n$  riflessioni, che chiamiamo cambi di segno, ciascuna delle quali manda un vettore  $e_i$  nel suo opposto e fissa tutti gli altri vettori  $e_j$  della base canonica. Tali riflessioni generano un gruppo di ordine  $2^n$  isomorfo a  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ , che indichiamo con  $\Sigma_n$ , che interseca  $S_n$  trivialmente ed è normalizzato<sup>16</sup> da  $S_n$  in quanto, data  $\sigma$

<sup>15</sup>Vedere la Definizione A.0.17 in Appendice.

<sup>16</sup>Vedere la Definizione A.0.18 in Appendice.

permutazione, si ha che  $\sigma(e_i \mapsto -e_i)\sigma^{-1} = e_{\sigma(i)} \mapsto -e_{\sigma(i)}$ , che è ancora un cambio di segno, ma di indice  $\sigma(i)$ . Definiamo  $B_n$  come il prodotto semidiretto<sup>17</sup> di  $S_n$  e del gruppo dei cambi di segno;  $B_n$  è un gruppo di riflessioni di ordine  $n!2^n$ . È facile vedere che è essenziale.

**Esempio 3.2.4.**  $\mathcal{D}_n, n > 4$ : un altro gruppo di riflessioni che agisce su  $\mathbb{R}^n$  è un sottogruppo di indice 2 nel gruppo  $B_n$  descritto nell'Esempio 3.2.3:  $S_n$  normalizza chiaramente il sottogruppo di  $\Sigma_n$  costituito dai cambi di segno che coinvolgono un numero pari di indici, generato dalle riflessioni  $e_i + e_j \mapsto -(e_i + e_j)$ ,  $i \neq j$ . Quindi anche il prodotto semidiretto di  $S_n$  con tale sottogruppo è un gruppo di riflessioni, che indichiamo con  $\mathcal{D}_n$ , ed è essenziale.

Da questo momento in poi indichiamo con  $W$  un gruppo finito di riflessioni che agisce sullo spazio euclideo  $V$  di dimensione  $n$ .

Per capire meglio com'è fatta la struttura interna di un tale gruppo  $W$ , dobbiamo prima capire come  $W$  agisce su  $V$ . Ogni riflessione  $s_\alpha$  determina un iperpiano di riflessione  $H_\alpha$  e una retta  $l_\alpha = k\alpha$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , ortogonale ad  $H_\alpha$ . La proposizione seguente ci dice che  $W$  permuta tali rette.

**Proposizione 3.2.1.** *Sia  $\alpha \in V$  un vettore diverso dal vettore nullo e sia  $t \in O_n(V)$ . Allora,  $ts_\alpha t^{-1} = s_{t\alpha}$ <sup>18</sup>.*

*Dimostrazione.* Prima mostriamo che  $ts_\alpha t^{-1}$  manda  $t\alpha$  in  $-t\alpha$ :

$$(ts_\alpha t^{-1})(t\alpha) = (ts_\alpha)(\alpha) = t(-\alpha) = -t\alpha$$

Rimane ora da mostrare che  $ts_\alpha t^{-1}$  fissa puntualmente l'iperpiano  $H_{t\alpha}$ . Notiamo che  $\lambda$  appartiene ad  $H_\alpha$  se e solo se  $t\lambda$  appartiene a  $H_{t\alpha}$ , dato che  $t \in O_n(V)$  implica  $\langle \lambda, \alpha \rangle = \langle t\lambda, t\alpha \rangle$ . Quindi,  $(ts_\alpha t^{-1})(t\lambda) = ts_\alpha \lambda = t\lambda$  per ogni  $\lambda \in H_\alpha$ .  $\square$

Da questa proposizione segue che se  $w \in W$ , allora  $s_{w\alpha}$  appartiene a  $W$  se vi appartiene  $s_\alpha$ . Quindi deduciamo che  $W$  permuta le rette  $l_\alpha$ , con  $s_\alpha \in W$ ,

<sup>17</sup>Vedere la Definizione 1.4.1.

<sup>18</sup>Con  $s_{t\alpha}$  indichiamo  $s_{t(\alpha)}$ .

nel seguente modo:  $w(l_\alpha) = l_{w\alpha}$ .

Solo le rette  $l_\alpha$  sono determinate da  $W$ , non i vettori  $\alpha$ . Se però prendiamo le coppie di vettori unitari contenuti in ciascuna di queste rette, otteniamo un insieme di vettori stabile sotto l'azione di  $W$ . In realtà, non è necessario che i vettori fissati siano tutti di lunghezza unitaria, o della stessa lunghezza; siamo interessati solo alla stabilità sotto l'azione di  $W$ .

Introduciamo quindi una nuova definizione.

**Definizione 3.2.2.** Sia  $\phi$  un insieme finito di vettori non nulli dello spazio euclideo  $V$  che soddisfa le seguenti condizioni:

(R1)  $\phi \cap \mathbb{R}\alpha^{19} = \{\alpha, -\alpha\}$  per ogni  $\alpha \in \phi$

(R2)  $s_\alpha\phi = \phi$  per ogni  $\alpha \in \phi$

Sia  $W$  il gruppo generato da tutte le riflessioni  $s_\alpha$ , con  $\alpha$  che appartiene a  $\phi$ . Allora, chiamiamo  $\phi$  un **sistema di radici** associato al gruppo  $W$ . Gli elementi di  $\phi$  vengono chiamati **radici**.

**Proposizione 3.2.2.** Sia  $\Phi$  un insieme che soddisfa (R1) e (R2) della Definizione 3.2.2 e sia  $W$  il gruppo con sistema di radici  $\Phi$ . Allora,  $W$  è un gruppo finito di riflessioni.

Viceversa, se  $W$  è un gruppo finito di riflessioni, allora può essere realizzato come gruppo associato ad un opportuno sistema di radici  $\Phi$ .

*Dimostrazione.* Mostriamo che se  $W$  è associato al sistema di radici  $\Phi$  allora è un gruppo finito.

Sia  $\Phi \in V \setminus \{0\}$  un insieme che soddisfa (R1) ed (R2). Definiamo  $W = \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Phi \rangle \subseteq O_n(V)$ .

Per (R2), abbiamo che ogni  $s_\alpha$  manda  $\Phi$  in se stesso. Quindi anche ogni prodotto di generatori, ovvero ogni elemento  $w = s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}$ ,  $\alpha_1, \alpha_2 \in \Phi$  di  $W$ , manda  $\Phi$  in sé.

<sup>19</sup>Con  $\mathbb{R}\alpha$  indichiamo la retta  $\lambda\alpha$ , con  $\lambda \in \mathbb{R}$

Consideriamo ora l'insieme  $F(\Phi)$  di tutte le funzioni biunivoche da  $\Phi$  in se stesso. Possiamo quindi definire un omomorfismo

$$\rho : W \rightarrow F(\Phi), \quad \rho(w)(\beta) = w(\beta).$$

È un omomorfismo perché per definizione di prodotto nel gruppo si ha  $\rho(w_1 w_2) = \rho(w_1) \rho(w_2)$ .

Mostriamo ora che  $\rho$  così definito è iniettivo. Definiamo  $U = \text{Span}(\Phi) \subseteq V$ . Se  $w \in \ker(\rho)$ , allora  $w(\beta) = \beta$  per ogni  $\beta \in \Phi$ . Segue quindi che  $w$  è l'identità su  $U$ .

Inoltre, se  $x \in U^\perp$ , allora  $\langle x, \alpha \rangle = 0 \forall \alpha \in \Phi$ , quindi si ha che per ogni generatore  $s_\alpha$  vale che  $s_\alpha(x) = x$ . Abbiamo quindi che ogni  $w \in W$  fissa puntualmente  $U^\perp$ . In particolare, se  $w \in \ker(\rho)$ ,  $w$  è l'identità anche su  $U^\perp$ . Dato che possiamo scrivere  $V$  come  $V = U \oplus U^\perp$ , ne segue che  $w = \text{Id}_V$ . Quindi  $\ker(\rho) = \{1\}$  e  $\rho$  è iniettivo.

Da qui segue che  $W \cong \rho(W) \leq F(\Phi)$ . Essendo  $\Phi$  finito per definizione di sistema di radici, ne segue che  $F(\Phi)$  è finito, dunque lo è anche  $W$ .

Mostriamo ora che ogni gruppo finito di riflessioni può essere associato ad un sistema di radici.

Sia  $S$  l'insieme di tutte le riflessioni contenute in  $W$ . Dato che per ipotesi  $W$  è finito, anche  $S$  lo è. Ogni elemento di  $S$  è una riflessione  $s$  rispetto ad un iperpiano  $H_s$ . Esiste un vettore non nullo  $\alpha_s$  tale che possiamo esprimere  $H_s$  come  $H_s = \alpha_s^\perp$ . Scegliendo  $\alpha_s$  unitario abbiamo che  $\alpha_s$  è determinato a meno di cambio di segno.

Definiamo  $\Phi = \{\alpha_s \mid \|\alpha_s\| = 1 \text{ e } s \in S\}$ . Segue che  $\Phi$  è finito.

Per come abbiamo definito  $\Phi$ , vale che

$$\Phi \cap \mathbb{R}\alpha = \{\alpha, -\alpha\} \quad \text{per ogni } \alpha \in \Phi,$$

quindi vale (R1).

Mostriamo ora che  $\Phi$  soddisfa anche (R2). Sia  $\alpha \in \Phi$ , quindi  $s_\alpha \in S \subseteq W$ . Consideriamo  $\beta \in \Phi$ ,  $\beta = \pm \alpha_s$ ,  $s \in S$ . Vale che  $s_\alpha s s_\alpha^{-1} \in W$  ed è ancora una riflessione. Quindi  $s_\alpha s s_\alpha^{-1} \in S$  e il suo vettore normale unitario è  $\pm s_\alpha(\alpha_s)$ .

In particolare vale

$$s_\alpha(\beta) = s_\alpha(\pm\alpha_s) = \pm s_\alpha(\alpha_s) \in \Phi.$$

Quindi  $s_\alpha(\Phi) = \Phi$ , cioè vale (R2).

Per costruzione, per ogni riflessione  $s \in S$  abbiamo incluso un  $\alpha_s$  tale che  $s = s_{\alpha_s}$ . Quindi  $W$  è contenuto nel gruppo generato dalle  $s_\alpha$  con  $\alpha \in \Phi$ . Viceversa, tali  $s_\alpha$  sono tutte riflessioni appartenenti a  $W$  (per definizione di  $\Phi$ ). Dunque i due gruppi coincidono e la dimostrazione è conclusa.  $\square$

Abbiamo quindi mostrato che possiamo studiare un gruppo finito di riflessioni  $W \in O_n(V)$  associandolo al proprio sistema di radici  $\Phi \in V$ , soggetto solo alle condizioni (R1) e (R2) della Definizione 3.2.2. La scelta di  $\Phi$  è piuttosto flessibile: possiamo far sì che tutti i vettori di  $\Phi$  siano unitari, o che le riflessioni  $s_\alpha$ ,  $\alpha \in \Phi$  siano tutte e sole le riflessioni di  $W$ , o ancora che lo span dei vettori di  $\Phi$  coincida con tutto lo spazio  $V$ . Questo ci dice che, anche se  $W$  è determinato da  $\Phi$ , identificare  $W$  con il sistema di radici può presentare uno svantaggio:  $\Phi$ , infatti, potrebbe avere cardinalità maggiore della dimensione dello spazio  $V$ . Ci chiediamo quindi come trovare un sistema di radici con cui sia effettivamente vantaggioso lavorare.

Per rispondere a questa domanda, dobbiamo individuare un sottoinsieme di  $\Phi$  composto da vettori linearmente indipendenti, da cui possiamo in qualche modo ricavare  $\Phi$ . Più precisamente, vogliamo che ogni elemento di  $\Phi$  sia combinazione lineare con coefficienti tutti dello stesso segno di vettori linearmente indipendenti, che chiameremo radici semplici. In questo modo, oltre a diminuire la cardinalità di  $\Phi$ , questo sottoinsieme ci permetterà di separare gli elementi di  $\Phi$  in radici positive e negative, in modo che solo uno tra  $\{\alpha, -\alpha\}$  sia positivo. Per far sì che questo accada, dobbiamo prima trovare un ordine totale<sup>20</sup> su  $V$ .

---

<sup>20</sup>Vedere la Definizione A.0.21 in Appendice.

**Proposizione 3.2.3.** *Sia  $(v_1, \dots, v_n)$  una base fissata di  $V$  e siano  $v, w \in V$ ,  $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$  e  $w = \sum_{i=1}^n b_i v_i$ . Definiamo l'ordine lessicografico così:*

$$v <_{lex} w \quad \text{se } \exists k \mid a_i = b_i \quad \forall i < k \wedge a_k < b_k$$

e poniamo

$$v \leq_{lex} w \Leftrightarrow (v <_{lex} w \vee v = w).$$

Allora, l'ordine lessicografico così definito è una relazione di ordine totale su  $V$ .

*Dimostrazione.* Per prima cosa, mostriamo che l'ordine lessicografico così definito ha senso, ovvero mostriamo che, se  $v, w \in V$  tali che  $v \neq w$  e  $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ ,  $w = \sum_{i=1}^n b_i v_i$  allora esiste un indice  $k$  tale che  $a_k \neq b_k$ .

Dato che  $(v_1, \dots, v_n)$  è una base di  $V$ ,  $v$  e  $w$  si scrivono in modo unico come combinazione lineare dei vettori della base. Dato che  $v \neq w$ , esiste almeno un indice  $k$  tale che  $a_k \neq b_k$  e dato che  $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ , è vera una sola tra  $a_k < b_k$  e  $a_k > b_k$ .

Riflessività: per ogni  $v \in V$ , vale  $v = v$ , quindi  $v \leq_{lex} v$ .

Antisimmetria: supponiamo che valgano entrambe  $v \leq_{lex} w$  e  $w \leq_{lex} v$ . Se  $v = w$ , abbiamo finito.

Supponiamo quindi  $v \neq w$  e sia  $k$  il primo indice tale che  $a_k \neq b_k$  e  $a_i = b_i$   $\forall i < k$ .

Allora, dato che  $v \leq_{lex} w$ , abbiamo  $a_k < b_k$ , e dato che  $w \leq_{lex} v$  abbiamo  $b_k < a_k$ , ma  $\leq$  è un ordine totale su  $\mathbb{R}$ , quindi segue necessariamente che  $v = w$ .

Transitività: siano  $v, w, z \in V$  tali che  $v \leq_{lex} w$  e  $w \leq_{lex} z$ , con  $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ ,  $w = \sum_{i=1}^n b_i v_i$ ,  $z = \sum_{i=1}^n c_i v_i$ .

Se una delle due relazioni è un'uguaglianza la tesi è immediata; studiamo quindi il caso  $v <_{lex} w$  e  $w <_{lex} z$ . Siano  $k = \min\{i \mid a_i \neq b_i\}$  e  $h = \min\{i \mid b_i \neq c_i\}$ . Poniamo  $m = \min(k, h)$ . Allora, per ogni  $i < m$  abbiamo che  $a_i = b_i = c_i$ .

Caso  $k < h$ : vale che  $a_k < b_k$  e  $b_k = c_k$ , quindi  $a_k < c_k$  e  $v <_{lex} z$ .

Caso  $h < k$ : vale che  $b_h < c_h$  e  $a_h = b_h$ , quindi  $a_h < c_h$  e  $v <_{lex} z$ .

Caso  $h = k$ : valgono  $a_k < b_k$  e  $b_k < c_k$ , quindi  $a_k < c_k$  e  $v <_{lex} z$ .

Vediamo ora che l'ordine è totale: presi  $v, w \in V$ , se  $v = w$  abbiamo finito.

Se  $v \neq w$ , esiste un primo indice  $k$  con  $a_k \neq b_k$ . Siccome  $\mathbb{R}$  è totalmente ordinato, vale o  $a_k < b_k$  o  $b_k < a_k$ . Quindi  $v <_{lex} w$  o  $w <_{lex} v$ .  $\square$

**Definizione 3.2.3.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale ordinato. Diciamo che  $v \in V$  è un vettore **positivo** se  $0 < v$ .

Diciamo che  $v \in V$  è **negativo** se  $v < 0$ .

Per comodità, da questo punto in poi indicheremo con semplicemente con  $\leq$  la relazione di ordine lessicografico, nel caso in cui non ci sia ambiguità. A questo punto, possiamo dire cos'è un sistema positivo di radici (la definizione è esattamente quella che ci aspettiamo).

**Definizione 3.2.4.** Sia  $\Phi$  un sistema di radici e sia  $\Pi$  il sottoinsieme di  $\Phi$  che contiene tutte e sole le radici positive in  $V$ . Allora, diremo che  $\Pi$  è un **sistema positivo** di  $W$ . Inoltre, quando  $\Pi$  è fissato, scriveremo  $\alpha > 0$  per indicare  $\alpha \in \Pi$ .

**Osservazione 3.2.1.** È chiaro che tale sistema positivo esiste. Inoltre, dato che  $\Phi$  contiene le coppie  $\{\alpha, -\alpha\}$ , si ha che  $\Phi$  è l'unione disgiunta di  $\Pi$  e  $-\Pi$ , dove  $-\Pi$  è il sottoinsieme che contiene tutte e sole le radici negative di  $\Phi$  e viene chiamato **sistema negativo**. Infatti, è immediato mostrare che, se  $0 < v$ , allora  $-v < 0$ .

Introduciamo ora anche la nozione di sistema semplice, ancora più piccolo di  $\Pi$ .

**Definizione 3.2.5.** Chiamiamo **sistema semplice** un sottoinsieme  $\Delta$  di  $\Phi$  se  $\Delta$  è un sottoinsieme linearmente indipendente di  $V$  tale che ogni  $\alpha \in \Phi$  può essere scritto come combinazione lineare di elementi di  $\Delta$  con coefficienti tutti dello stesso segno.

A differenza dei sistemi positivi, non è affatto scontato che un sistema positivo  $\Delta$  così definito esista. Il teorema seguente ci assicura che tale sistema esiste.

**Teorema 3.2.1.** 1. *Se  $\Delta$  è un sistema semplice in  $\Phi$ , allora c'è un unico sistema positivo che contiene  $\Delta$ .*

2. *Ogni sistema positivo  $\Pi$  in  $\Phi$  contiene un unico sistema semplice. In particolare, esiste almeno un sistema semplice in  $\Phi$ .*

*Dimostrazione.* 1: supponiamo che il sistema semplice  $\Delta$  sia contenuto in un sistema positivo  $\Pi$ . Allora tutte le radici che sono combinazioni lineari non negative di elementi di  $\Delta$  sono anch'esse contenute in  $\Pi$ . Quindi  $\Pi$  è determinato come l'insieme di tutte queste radici. Per mostrare che tale sistema positivo esiste, estendiamo  $\Delta$  ad una base di  $V$  (possiamo farlo perché i vettori di  $\Delta$  sono linearmente indipendenti) e definiamo  $\Pi$  come l'insieme degli elementi positivi di  $\Phi$  secondo l'ordine lessicografico determinato da questa base. Per come lo abbiamo definito, si ha che  $\Delta \subset \Pi$ .

2: mostriamo prima l'unicità. Supponiamo che il sistema positivo  $\Pi$  contenga un sistema semplice  $\Delta$ . Allora possiamo caratterizzare  $\Delta$  come l'insieme di tutte le radici  $\alpha \in \Pi$  tali che  $\alpha$  non si esprime come una combinazione lineare di elementi di  $\Pi$  con coefficienti strettamente positivi. Quindi  $\Delta$  è l'unico sistema semplice contenuto in  $\Pi$ .

Per l'esistenza, consideriamo il più piccolo sottoinsieme  $\Delta \subset \Pi$  tale che ogni elemento di  $\Pi$  si ottiene come combinazione lineare non negativa di elementi di  $\Delta$ . Ovviamente, questo sottoinsieme esiste.

Ci rimane solo da dimostrare che gli elementi di  $\Delta$  così definiti sono linearmente indipendenti. Per farlo, assumiamo vera la seguente condizione, che dimostreremo alla fine:

$$\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0 \text{ per ogni } \alpha \neq \beta \in \Delta. \quad (1)$$

Assumendo vera la (1), guardiamo cosa succederebbe se fosse che gli elementi di  $\Delta$  non sono linearmente indipendenti, cioè se possiamo scrivere

$\sum_{\alpha \in \Delta} a_\alpha \alpha = 0$  con almeno uno tra gli  $a_\alpha$  diverso da 0. Riscriviamo come  $\sum b_\beta \beta = \sum c_\gamma \gamma$ , dove le somme sono fatte su sottoinsiemi disgiunti di  $\Delta$  e i coefficienti  $b_\beta$  e  $c_\gamma$  sono tutti positivi. Se indichiamo con  $\sigma$  la somma scritta sopra, avremo  $\sigma > 0$ . Ma, dalla (1) e dall'Osservazione 1.1.1, segue che

$$0 \neq \langle \sigma, \sigma \rangle = \langle \sum b_\beta \beta, \sum c_\gamma \gamma \rangle = \sum b_\beta c_\gamma \langle \beta, \gamma \rangle \leq 0.$$

Questo implica  $\sigma = 0$ , il che è assurdo.

Rimane solo da verificare che vale la (1). Supponiamo che esistano  $\alpha \neq \beta \in \Delta$  tale che la condizione non valga. Allora, dalla formula (1.1), segue che  $s_\alpha \beta = \beta - c\alpha$ , con  $c = 2(\beta, \alpha)/(\alpha, \alpha) > 0$ . Dato che  $s_\alpha \beta \in \Phi$ , o è negativo o sta in  $\Pi$ . Supponiamo che  $s_\alpha \beta = \sum_{\gamma \in \Delta} c_\gamma \gamma$ , con  $c_\gamma \leq 0$ . Nel caso in cui  $c_\beta < 1$ , abbiamo che  $s_\alpha \beta = c_\beta \beta + \sum_{\gamma \neq \beta} c_\gamma \gamma$ , o  $(1 - c_\beta)\beta$  è una combinazione lineare non negativa di elementi di  $\Delta \setminus \{\beta\}$ . Dato che  $1 - c_\beta > 0$ , possiamo scartare  $\beta$ , contraddicendo la minimalità di  $\Delta$ .

Nel caso in cui invece abbiamo  $c_\beta > 1$ , otteniamo  $0 = (c_\beta - 1)\beta + c\alpha + \sum_{\gamma \neq \beta} c_\gamma \gamma$ .

Ma una combinazione lineare non negativa di elementi di  $\Delta$  con almeno un coefficiente positivo non può essere uguale a 0, per definizione di ordine totale. Quindi  $s_\alpha \beta$  non può essere positivo. Ragionando in maniera analoga otteniamo che  $s_\alpha w$  non può nemmeno essere negativo (si procede come prima ma considerando i casi  $c + c_\alpha > 0$  e  $c + c_\alpha \leq 0$ ). Questa contraddizione implica che la (1) deve essere vera.

Il teorema è così dimostrato.  $\square$

Dalla dimostrazione del Teorema 3.2.1 segue subito il seguente corollario.

**Corollario 3.2.1.** *Se  $\Delta$  è un sistema semplice contenuto in  $\pi$ , allora  $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$  per ogni  $\alpha \neq \beta \in \Delta$ .*

**Definizione 3.2.6.** Sia  $W$  un gruppo con sistema di radici  $\Phi$  e sia  $\Delta$  un sistema semplice di  $\Phi$ . Definiamo il **rango** di  $W$  come la cardinalità di  $\Delta$ .

Osserviamo che la definizione è ben posta, in quanto la cardinalità di ogni sistema semplice è un invariante di  $\Phi$ , dato che misura la dimensione di  $\Phi$  in  $V$ .

Arrivati a questo punto, abbiamo dimostrato che i sistemi positivi e quelli semplici si determinano a vicenda in modo univoco. Tuttavia, non abbiamo escluso la possibilità che sistemi semplici diversi possano differire notevolmente nelle loro configurazioni geometriche. Siamo quindi interessati a studiare le relazioni tra i diversi sistemi per assicurarci che questo non accada.

Dalla Definizione 3.2.5 segue immediatamente che per ogni sistema semplice  $\Delta$  e per ogni  $w \in W$ ,  $w\Delta$  è ancora un sistema semplice, con corrispondente sistema positivo  $w\Pi$  (dove  $\Pi$  è il sistema positivo determinato da  $\Delta$ ). Per comprendere meglio il passaggio da  $\Pi$  a  $w\Pi$ , consideriamo il caso speciale in cui abbiamo  $w = s_\alpha$ ,  $\alpha \in \Delta$ . In questo caso, la seguente proposizione ci dice che  $\Pi$  e  $s_\alpha\Pi$  differiscono solo per una radice.

**Proposizione 3.2.4.** *Sia  $\Delta$  un sistema semplice contenuto nel sistema positivo  $\Pi$ . Allora, se  $\alpha \in \Delta$ , si ha che  $s_\alpha(\Pi \setminus \{\alpha\}) = \Pi \setminus \{\alpha\}$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\beta \in \Pi$ ,  $\beta \neq \alpha$  e scriviamo  $\beta$  come  $\beta = \sum_{\gamma \in \Delta} c_\gamma \gamma$ , con  $c_\gamma \geq 0 \forall \gamma$ . Dato che gli unici multipli di  $\alpha$  in  $\Phi$  sono  $\pm\alpha$ , ci sarà almeno un  $c_\gamma > 0$  con  $\gamma \neq \alpha$ .

Applichiamo ora  $s_\alpha$  ad entrambi i membri:  $s_\alpha\beta = \beta - c_\alpha\alpha$  è una combinazione lineare di  $\Delta$  con gli stessi coefficienti della precedente. Dato che tutti i coefficienti di questa combinazione hanno segno concorde,  $s_\alpha\beta$  deve essere positiva. Non può essere  $\alpha$ , perché altrimenti si avrebbe la contraddizione  $\beta = s_\alpha s_\alpha\beta = -\alpha$ , che non sta in  $\Pi$ , a differenza di  $\beta$ . Quindi  $s_\alpha$  è una funzione di  $\Pi \setminus \{\alpha\}$  in se stesso, che è quello che volevamo mostrare.  $\square$

La Proposizione 3.2.4 ci permette di riconoscere quando una radice è in realtà uguale ad una radice semplice  $\alpha$ . Infatti, ci dice che  $\alpha$  è l'unica radice positiva resa negativa da  $s_\alpha$ .

Inoltre, ci permette anche di dimostrare il seguente teorema.

**Teorema 3.2.2.** *Due sistemi positivi contenuti in  $\Phi$  sono coniugati tramite  $W$  (e di conseguenza lo sono anche i sistemi semplici contenuti in  $\Pi$  e  $\Pi'$ ).*

*Dimostrazione.* Siano  $\Pi$  e  $\Pi'$  due sistemi positivi tali che ognuno contenga esattamente metà delle radici. Procediamo per induzione su  $r = |\Pi \cap -\Pi'|$ . Passo base: se  $r = 0$ , allora  $\Pi = \Pi'$  e possiamo concludere.

Passo induttivo: sia  $r > 0$ ; questo implica che il sistema semplice  $\Delta$  contenuto in  $\Pi$  non può essere interamente contenuto in  $\Pi'$ . Prendiamo quindi  $\alpha \in \Delta$  tale che  $\alpha \in -\Pi'$ . Per la Proposizione 4.3.1 abbiamo che  $|\Pi \cap -\Pi'| = r - 1$ . Per induzione applicata ai sistemi positivi  $s_\alpha \Pi$  e  $\Pi'$  si ha che esiste  $w \in W$  tale che  $w(s_\alpha \Pi) = \Pi'$ , che è quello che volevamo dimostrare.  $\square$

Abbiamo quindi dimostrato che sistemi semplici contenuti nello stesso sistema di radici sono coniugati tramite  $W$ . Questo ci consente una certa libertà per quanto riguarda la scelta del sistema semplice con cui lavorare.

Arrivati a questo punto, il nostro obiettivo è quello di mostrare che il gruppo finito di riflessioni  $W$  con sistema di radici  $\Phi$  e sistema semplice  $\Delta$  è generato in realtà da riflessioni semplici, ovvero dalle riflessioni  $s_\alpha$  con  $\alpha \in \Delta$ .

Per procedere, introduciamo una nuova definizione.

**Definizione 3.2.7.** Sia  $\beta \in \Phi$ ,  $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \alpha$ . Chiamiamo  $\sum c_\alpha$  l'**altezza** di  $\beta$  relativa a  $\Delta$  e la indichiamo con  $\text{ht}(\beta)$ .

Osserviamo che l'altezza di  $\beta$  relativa ad un sistema semplice  $\Delta$  fissato è unica per definizione di  $\Delta$ . Inoltre,  $\text{ht}(\beta) = 1$  se  $\beta \in \Delta$ .

**Teorema 3.2.3.** *Sia  $\Delta$  un sistema semplice fissato contenuto in un sistema di radici  $\Phi$  di  $W$ . Allora,  $W$  è generato dalle riflessioni  $s_\alpha$  con  $\alpha \in \Delta$ .*

*Dimostrazione.* Indichiamo con  $w'$  il gruppo generato dalle riflessioni  $s_\alpha$  con  $\alpha \in \Delta$ . Ovviamente, si ha che  $W'$  è un sottogruppo di  $W$ . Il nostro obiettivo è mostrare che  $W' = W$ . Procediamo in tre diversi passaggi.

1. Per prima cosa, consideriamo  $\beta \in \Pi$ , con  $\Pi$  sistema positivo in  $\Phi$ . Consideriamo  $W'\beta \cap \Pi$ . Questo è un insieme di radici positive non vuoto

(contiene almeno  $\beta$ ). Prendiamo quindi  $\gamma \in W'\beta \cap \Pi$  con altezza minima. Vogliamo mostrare che  $\gamma \in \Delta$ . Scriviamo  $\gamma$  come  $\gamma = \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \alpha$ , e notiamo che  $0 < \langle \gamma, \gamma \rangle = \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha \langle \gamma, \alpha \rangle$ , imponendo così che  $\langle \gamma, \alpha \rangle > 0$  per un qualche  $\alpha \in \Delta$ . Se  $\gamma = \alpha$ , abbiamo finito.

Altrimenti, consideriamo la radice  $s_\alpha \gamma$ , che è positiva per la Proposizione 3.2.4. Dato che  $s_\alpha \gamma$  è ottenuto da  $\gamma$  sottraendo un multiplo positivo di  $\alpha$ , abbiamo che  $\text{ht}(s_\alpha \gamma) < \text{ht}(\gamma)$ . Ma, dato che  $s_\alpha \in W'$ , abbiamo che  $s_\alpha \gamma \in W'\beta$ , contraddicendo la scelta di  $\gamma$  che abbiamo fatto. Quindi si ha che  $\gamma = \alpha$  ed è una radice semplice.

2. Ora vogliamo mostrare che  $W'\Delta = \Phi$ . Abbiamo appena mostrato che l'orbita tramite  $W'$  di ogni radice positiva  $\beta$  interseca  $\Delta$ , quindi  $\Pi \subset W'\Delta$ . Viceversa, se  $\beta$  è negativa, allora  $-\beta \in \Pi$  è coniugata tramite un  $w \in W'$  a qualche  $\alpha \in \Delta$ . Quindi  $-\beta = w\alpha$  implica  $\beta = (ws_\alpha)\alpha$ , con  $ws_\alpha \in W'$ . Questo vuol dire che  $-\Pi \subset W'\Delta$ .
3. Per concludere, prendiamo un generatore di  $W$   $s_\beta$ . Usiamo quanto detto nel punto 2. per scrivere  $\beta = w\alpha$  con  $w \in W'$  e  $\alpha \in \Delta$ . Allora, per la Proposizione 3.2.1 abbiamo che  $s_\beta = ws_\alpha w^{-1} \in W'$ . Questo implica  $W = W'$ , che è quello che volevamo.

□

Un risultato utile che deriva da questa dimostrazione è che ogni radice può diventare una radice semplice rispetto ad un certo sistema positivo. Lo formalizziamo nel corollario seguente.

**Corollario 3.2.2.** *Dato  $\Delta$  sistema semplice in  $\Phi$ , si ha che per ogni  $\beta \in \Phi$  esiste  $w \in W$  tale che  $w\beta \in \Delta$ .*

Arrivati a questo punto, abbiamo dimostrato che, se  $W$  è un gruppo finito di riflessioni, è generato da relativamente pochi elementi, ovvero le riflessioni rispetto alle radici semplici. Ora possiamo quindi cercare una rappresentazione efficiente di  $W$  come gruppo astratto, usando questi generatori e

introducendo delle relazioni opportune.

Tra queste relazioni, abbiamo quelle della forma

$$(s_\alpha s_\beta)^{m(\alpha, \beta)} = 1,$$

dove  $m(\alpha, \beta)$  implica l'ordine del prodotto in  $W$ . Vedremo in seguito che queste relazioni determinano  $W$ .

Avendo dimostrato che  $W$  è generato da un sistema di radici semplici, siamo interessati a studiare qual è il modo più efficiente per esprimere un elemento  $w$  di  $W$  come prodotto di riflessioni semplici.

Per farlo, abbiamo bisogno di definire la lunghezza di un elemento  $w$  di  $W$ .

**Definizione 3.2.8.** Sia  $w \in W$ . Definiamo la **lunghezza**  $l(w)$  di  $w$  relativa a  $\Delta$  come il più piccolo  $n$  tale che possiamo scrivere  $w$  come  $w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_n}$  con  $\alpha_i \in \Delta \forall i$ . Chiamiamo questa scrittura **ridotta**.

Per convenzione, si ha  $l(1) = 0$ .

**Osservazione 3.2.2.** Chiaramente, si ha che  $l(w) = 1$  se e solo se  $w = s_\alpha$  con  $\alpha \in \Delta$ . Inoltre,  $l(w) = l(w^{-1})$ . Un'altra proprietà della lunghezza segue dal fatto che, come matrici, le riflessioni hanno determinante  $-1$ :  $\det(w) = (-1)^{l(w)}$ . Ovviamente, si ha che  $\det(w) = (-1)^n$  se  $w$  si scrive come prodotto di  $n$  riflessioni, quindi ogni  $n$  tale che posso scrivere  $w$  come prodotto di  $n$  riflessioni ha la stessa parità di  $l(w)$ .

Da qui segue anche che  $l(w w')$  ha la stessa parità di  $l(w) + l(w')$ . In particolare, se  $l(w) = n$  e  $\alpha \in \Delta$ , si ha che  $l(s_\alpha w) = n \pm 1$ .

Vogliamo mostrare che geometricamente  $l(w)$  non è altro che il numero di radici positive che vengono mandate in radici negative dalla riflessione  $w$ . Nel caso in cui  $w \in \Delta$ , questo non è altro che la Proposizione 3.2.4. Per dimostrarlo nel caso generale, ci servono altre nozioni.

**Definizione 3.2.9.** Sia  $\Delta$  un sistema semplice fissato con corrispondente sistema positivo  $\Pi$ . Dato  $w \in W$ , definiamo  $n(w) = |\Pi \cap w^{-1}(-\Pi)|$  come il numero di radici positive mandate in radici negative da  $w$ .

**Osservazione 3.2.3.** Si ha che  $n(w^{-1}) = n(w)$ , perché  $\Pi \cap w^{-1}(-\Pi) = w^{-1}(w\Pi \cap -\Pi) = -w^{-1}(\Pi \cap w(-\Pi))$ , che ha lo stesso numero di elementi di  $\Pi \cap w(-\Pi)$ .

**Lemma 3.2.1.** *Siano  $\alpha \in \Delta$  e  $w \in W$ . Valgono le seguenti:*

1.  $w\alpha > 0 \Rightarrow n(ws_\alpha) = n(w) + 1$ ;
2.  $w\alpha < 0 \Rightarrow n(ws_\alpha) = n(w) - 1$ ;
3.  $w^{-1}\alpha > 0 \Rightarrow n(s_\alpha w) = n(w) + 1$ ;
4.  $w^{-1}\alpha < 0 \Rightarrow n(s_\alpha w) = n(w) - 1$ ;

*Dimostrazione.* Poniamo  $\Pi(w) = \Pi \cap w^{-1}(-\Pi)$ , così che  $n(w) = |\Pi(w)|$ .

Se  $w\alpha > 0$ , osserviamo che  $\Pi(ws_\alpha)$  è l'unione disgiunta di  $s_\alpha\Pi$  e  $\{\alpha\}$ .

Se  $w\alpha < 0$ , la Proposizione 3.2.4 implica che  $s_\alpha\Pi(ws_\alpha) = \Pi(w) \setminus \{\alpha\}$ , dove  $\alpha \in \Pi(w)$ .

Da questo seguono quindi i punti 1 e 2. Per ottenere anche 3 e 4, basta ripetere il ragionamento con  $w^{-1}$  al posto di  $w$  e usare il fatto che  $n(w^{-1}s_\alpha) = n(s_\alpha w)$ .  $\square$

**Corollario 3.2.3.** *Sia  $w \in W$  tale che  $w = s_1 \cdots s_k$ . Allora  $n(w) \leq k$ . In particolare,  $n(w) \leq l(w)$ .*

*Dimostrazione.* Costruendo l'espressione per  $w$  in  $k$  passi, si ha che il valore di  $n(w)$  può aumentare al massimo di 1 ad ogni passo per il Lemma 3.2.1.  $\square$

Possiamo ora mostrare che, se abbiamo un  $w \in W$  espresso come prodotto di riflessioni semplici, questa espressione può essere riscritta in forma ridotta (se non lo è già).

**Teorema 3.2.4.** *Sia  $\Delta$  un sistema semplice fissato. Sia  $w \in W$ ,  $w = s_1 \cdots s_k$ , con  $s_i = s_{\alpha_i}$  con  $\alpha_i \in \Delta$ . Supponiamo che  $n(w) < k$ . Allora, esistono degli indici  $1 \leq i < j \leq k$  tali che:*

1.  $\alpha_1 = (s_{i+1} \cdots s_{j-1})\alpha_j$ ;

$$2. s_{i+1}s_{i+2}\cdots s_j = s_i s_{i+1}\cdots s_{j-1};$$

3.  $w = s_1 \cdots \hat{s}_i \cdots \hat{s}_j \cdots s_k$ , dove il simbolo  $\hat{\cdot}$  indica l'omissione delle riflessioni  $s_i$  e  $s_j$ .

*Dimostrazione.* 1: dato che  $n(w) < k$  per ipotesi, per il Lemma 3.2.1 si ha che esiste un  $j \leq k$  tale che  $(s_1 \cdots s_{j-1}) < 0$ . Ma, dato che  $\alpha_j > 0$ , esiste un indice  $i < j$  tale che  $s_i(s_{i+1} \cdots s_{j-1})\alpha_j < 0$  e  $(s_{i+1} \cdots s_{j-1})\alpha_j > 0$ . Nel caso in cui  $i = j - 1$ ,  $s_{i+1} \cdots s_{j-1}$  è 1.

Applichiamo ora la Proposizione 3.2.4 a  $s_i$  e otteniamo che la radice positiva  $(s_{i+1} \cdots s_{j-1})\alpha_j$ , resa negativa da  $s_i$ , deve essere  $\alpha_i$ .

2: Poniamo  $\alpha = \alpha_j$ ,  $w' = s_{i+1} \cdots s_{j-1}$ , così che  $w'\alpha = \alpha_i$  per il punto 1..

Dalla Proposizione 3.2.1 abbiamo che  $w's_\alpha w'^{-1} = s_{w'\alpha} = s_i$ , il che vuol dire che  $(s_{i+1} \cdots s_{j-1})s_j(s_{j-1} \cdots s_{i+1}) = s_i$ . Moltiplicando entrambi i lati per  $s_{i+1} \cdots s_{j-1}$  otteniamo la tesi.

3: questo non è che un altro modo per esprimere il punto 2: moltiplichiamo entrambi i lati dell'equazione ottenuta nel punto precedente per  $s_j$  e otteniamo  $s_{i+1} \cdots s_{j-1} = s_i \cdots s_j$ , e quindi sostituiamo nell'espressione iniziale di  $w$  per ottenere la tesi.  $\square$

**Corollario 3.2.4.** *Se  $w \in W$ , allora  $n(w) = l(w)$ .*

*Dimostrazione.* Dal Corollario 3.2.3, si ha che  $n(w) \leq l(w)$ . Supponiamo  $n(w) < l(w)$  e scriviamo  $w = s_1 \cdots s_k$  espressione ridotta. Allora il punto 3 del Teorema 3.2.4 ci permette di riscrivere  $w$  come il prodotto di  $k - 2$  riflessioni semplici, ma questo è un assurdo in quanto  $l(w) = k$ .  $\square$

Avendo definito le funzioni  $l$  e  $n$ , possiamo riformulare il Lemma 3.2.1: moltiplicare  $w$  a destra per  $s_\alpha$ , con  $\alpha \in \Delta$ , aumenta la lunghezza di 1 se  $w\alpha > 0$  e la diminuisce di 1 se  $w\alpha < 0$ .

Possiamo anche reinterpretare il punto 3 del Teorema 3.2.4, che chiamiamo **Condizione di cancellazione**: data un'espressione non ridotta  $w = s_1 \cdots s_r$ , esistono indici  $1 < i < j < r$  tali che  $w = s_1 \cdots \hat{s}_i \cdots \hat{s}_j \cdots s_r$ . In questo modo, iterando il processo omettendo ogni volta una coppia di fattori,

si ottiene un'espressione ridotta per  $w$ .

Per capire meglio ciò che dice il Corollario 3.2.4, è utile chiedersi come possiamo numerare l'insieme  $\Pi(w)$ , per un  $w$  fissato. Dato che  $|\Pi(w)| = n(w) = l(w)$ , ci immaginiamo che la risposta abbia qualcosa a che fare con un'espressione ridotta  $w = s_1 \cdots s_r$ , con  $s_i = s_{\alpha_i} \forall i$  e  $\alpha_i$  radici semplici.

Infatti, data una tale espressione, consideriamo le  $r$  radici

$$\beta_i = s_r s_{r-1} \cdots s_{i+1}(\alpha_i), \quad \text{con } \beta_r = \alpha_r.$$

Vogliamo mostrare che  $\Pi(w) = \{\beta_1, \dots, \beta_r\}$  dove le  $\beta_i$  sono distinte.

Consideriamo  $\beta \in \Pi(w)$ . Dato che per ipotesi  $\beta > 0$  e  $w\beta < 0$ , possiamo trovare un indice  $i < r$  tale che  $(s_{i+1} \cdots s_r)\beta > 0$  e  $(s_i s_{i+1} \cdots s_r)\beta < 0$  (se  $i = r$ ,  $s_{i+1} \cdots s_r = 1$ ).

Ma questo vuol dire che la radice positiva  $(s_{i+1} \cdots s_r)\beta$  è mandata da  $s_i$  in una radice negativa. Per la Proposizione 3.2.4 abbiamo quindi che  $(s_{i+1} \cdots s_r)\beta = \alpha_i$ , da cui segue che  $\beta = \beta_i$  e  $\Pi(w) \subseteq \{\beta_1, \dots, \beta_r\}$ . Ma, dato che  $|\Pi(w) = r|$ , deve valere l'uguaglianza, ovvero le radici  $\beta_i$  devono essere distinte.

Possiamo quindi riformulare il Teorema 3.2.4 nel seguente modo:

**Proposizione 3.2.5. Condizione di scambio:** *Sia  $w = s_1 \cdots s_k$  non necessariamente espressione ridotta, con  $s_i = s_{\alpha_i}$  con  $\alpha_i \in \Delta$ . Se esiste una riflessione semplice  $s = s_\alpha$  tale che  $l(ws) < l(w)$ , allora esiste un indice  $i$  tale che  $ws = s_1 \cdots \hat{s}_i \cdots s_k$ , ovvero  $w = s_1 \cdots \hat{s}_i \cdots s_k s$ . In particolare,  $w$  si scrive con un'espressione ridotta che termina in  $s$  se e solo se  $l(ws) < l(w)$ .*

*Dimostrazione.* Sappiamo che  $l(ws) < l(w)$  se e solo se  $w\alpha < 0$ . Ripetiamo la dimostrazione del Teorema 3.2.4 per  $ws = s_1 \cdots s_k s$ : nel punto 1. prendiamo  $j = k + 1$  e concludiamo grazie al punto 3. che  $ws = s_1 \cdots \hat{s}_i \cdots s_k$ , che è quello che volevamo.  $\square$

Il Teorema 3.2.2 ci dice che  $W$  permuta i vari sistemi positivi (o semplici) transitivamente. Dal Corollario 3.2.4 segue immediatamente il seguente risultato, che mostra che l'azione di  $W$  è in realtà semplicemente transitiva.

**Teorema 3.2.5.** *Sia  $\Delta$  un sistema semplice e sia  $\Pi$  il corrispondente sistema positivo. Le seguenti condizioni su  $w \in W$  sono equivalenti:*

1.  $w\Pi = \Pi$ ;
2.  $w\Delta = \Delta$ ;
3.  $n(w) = 0$ ;
4.  $l(w) = 0$ ;
5.  $w = 1$ .

È chiaro dalla definizione che  $-\Pi$  è un sistema positivo se  $\Pi$  lo è. Quindi, deve esistere unico un elemento  $w_0 \in W$  che manda  $-\Pi$  in  $\Pi$ . Inoltre,  $l(w_0) = n(w_0) = |\Pi|$  è massima, e nessun altro elemento di  $W$  ha tale lunghezza. In particolare, vale anche che  $w_0^{-1} = w_0$ . Usando il Lemma 3.2.1 possiamo caratterizzare  $w_0$  come l'unico elemento  $w \in W$  tale che  $l(ws_\alpha) < l(w)$  per ogni  $\alpha \in \Delta$ .

Data un'espressione ridotta di  $w = s_1 \cdots s_k$ , possiamo moltiplicare successivamente  $w$  a destra per riflessioni semplici (incrementando la lunghezza di 1 per ogni moltiplicazione), fino a che non si ottiene  $w_0$ . Avremo quindi che  $w_0 = ww'$  con  $l(w_0) = l(w) + l(w')$  con  $w' \in W$ . Questo si può riscrivere come

$$l(w_0w) = l(w_0) - l(w), \quad \forall w \in W. \quad (2)$$

Ora abbiamo tutti gli ingredienti per rappresentare  $W$  come avevamo anticipato. Ricordiamo che  $m(\alpha, \beta)$  indica l'ordine di  $s_\alpha s_\beta$  in  $W$  con  $\alpha$  e  $\beta$  radici di  $W$ .

**Teorema 3.2.6.** *Fissiamo un sistema semplice  $\Delta$  contenuto nel sistema di radici  $\Phi$ . Allora  $W$  ammette la presentazione*

$$\langle s_\alpha, \alpha \in \Delta \mid (s_\alpha s_\beta)^{m(\alpha, \beta)} = 1 \rangle. \quad (3)$$

*Dimostrazione.* In questa dimostrazione vogliamo far vedere che ogni relazione in  $W$  è conseguenza della relazione dell'enunciato, ovvero vogliamo mostrare che ogni relazione del tipo

$$s_1 \cdots s_k = 1 \quad (\text{con } s_i = s_{\alpha_i}, \alpha_i \in \Delta) \quad (4)$$

è una conseguenza di (3).

Notiamo subito che  $k$  deve essere pari, dato che  $\det(s_i) = -1 \forall i$ .

Se  $k = 2$ , l'equazione diventa  $s_1 s_2 = 1$ , imponendo che  $s_1 = s_2^{-1} = s_2$ . Quindi la (4) diventa  $s_2^2 = 1$ , che è quello che volevamo.

Procediamo ora per induzione su  $k = 2q$  con  $q > 1$ . Le relazioni  $s_i^2 = 1$ , cioè  $s_i = s_i^{-1}$ , saranno usate implicitamente quando necessario. Ad esempio, la (4) può essere riscritta come

$$s_{i+1} \cdots s_k s_1 \cdots s_i = 1. \quad (5)$$

Ora, applichiamo ripetutamente la Condizione di eliminazione: per prima cosa, la usiamo sull'elemento

$$s_1 \cdots s_{q+1} = s_k \cdots s_{q+2}.$$

Dato che la lunghezza del membro a destra è al massimo  $q - 1$ , il membro a sinistra non può essere ridotto. Il punto 2 del Teorema 3.2.4 (che è in realtà equivalente alla condizione di eliminazione) ci assicura l'esistenza di indici  $i, j$  tali che  $1 \leq i < j \leq q + 1$  per cui vale

$$s_{i+1} \cdots s_j = s_i \cdots s_{j-1}, \quad (6)$$

che è equivalente alla relazione

$$s_i \cdots s_{j-1} s_j \cdots s_{i+1} = 1. \quad (7)$$

Nel caso in cui il membro a sinistra di (7) sia il prodotto di meno di  $k$  riflessioni semplici, per induzione possiamo concludere che deriva da un'espressione del tipo (3). A questo punto possiamo sostituire  $s_{i+1} \cdots s_j$  con  $s_1 \cdots s_{j-1}$  nella (4) e riscrivere (4) come

$$s_1 \cdots s_i (s_1 \cdots s_{j-1}) s_{j+1} \cdots s_k = s_1 \cdots \hat{s}_i \cdots \hat{s}_j \cdots s_k = 1.$$

Applicando di nuovo l'ipotesi induttiva, otteniamo che anche questa relazione è una conseguenza della (3), quindi lo stesso vale per la (4).

L'unico problema ora è capire cosa succede quando (7) è il prodotto di  $k$  riflessioni semplici: in questo caso, abbiamo che  $i = 1$ ,  $j = q + 1$  e la (6) diventa

$$s_2 \cdots s_k s_1 = 1. \quad (8)$$

A questo punto il ragionamento usato in precedenza funziona a meno che

$$s_3 \cdots s_{q+2} = s_2 \cdots s_{q+1}. \quad (9)$$

Nel caso in cui valgano entrambe (8) e (9), dobbiamo applicare una strategia diversa. Se riuscissimo a mostrare che (9) è una conseguenza di (3), potremmo sostituirla nella (4) e avere così la tesi.

Riscriviamo la (9) come

$$s_3(s_2 s_3 \cdots s_{q+1}) s_{q+2} s_{q+1} \cdots s_4 = 1.$$

Il membro a destra è il prodotto di  $k$  riflessioni semplici, proprio come la (4), quindi possiamo mettere in pratica il nostro ragionamento iniziale. Questo funziona a meno che valga

$$s_2 \cdots s_{q+1} = s_3 s_2 s_3 \cdots s_q. \quad (10)$$

Ma se valgono entrambe la (8) e la (10) abbiamo che  $s_1 = s_3$ . Possiamo iterare il ragionamento permutando ciclicamente i fattori; così otteniamo la tesi tranne nel caso in cui  $s_2 = s_4$ . In questo caso, applicando un'altra induzione, otteniamo la tesi tranne nei casi in cui  $s_1 = s_3 = \dots = s_{k-1}$  e  $s_2 = s_4 = \dots = s_k$ . Ma in questi casi la (4) diventa

$$s_\alpha s_\beta s_\alpha s_\beta \cdots s_\alpha s_\beta = 1,$$

che è una conseguenza della (3). Abbiamo dunque dimostrato la tesi in tutti i casi possibili e il teorema è quindi vero.  $\square$

La presentazione di  $W$  così ottenuta è la più semplice possibile.

**Definizione 3.2.10.** Ogni gruppo (finito o infinito) per cui è possibile ottenere la rappresentazione del Teorema 3.2.6 relativa ad un sistema di generatori  $S$  si chiama **gruppo di Coxeter**.

La coppia  $(W, S)$  viene chiamata un **sistema di Coxeter**.

È sempre richiesto che  $m(\alpha, \alpha) = 1$ , una delle relazioni  $(s_\alpha s_\beta)^{m(\alpha, \beta)}$  potrebbe essere omessa per permettere al prodotto  $s_\alpha s_\beta$  di avere ordine infinito. In questa tesi, ci limitiamo a studiare i gruppi finiti.

### 3.3 Sottogruppi parabolici

Ora siamo interessati a studiare i sottogruppi di  $W$  generati da insiemi finiti di riflessioni semplici. Fissiamo quindi un sistema semplice  $\Delta$  e indichiamo con  $S$  l'insieme delle riflessioni semplici  $s_\alpha, \alpha \in \Delta$ . Per ogni sottoinsieme  $I \subseteq S$ , definiamo  $W_I$  come il sottogruppo di  $W$  generato dagli elementi  $s_\alpha \in I$  e  $\Delta_I = \{\alpha \in \Delta \mid s_\alpha \in I\}$ . Avremo che  $W_\emptyset = \{1\}$  e  $W_S = W$ .

Sostituire il sistema semplice  $\Delta$  con un altro sistema semplice  $w\Delta$  vorrebbe dire semplicemente sostituire  $W_I$  con il suo coniugato  $wW_Iw^{-1}$ .

Tutti i sottogruppi di  $W$  che possono essere ottenuti in questo modo si chiamano **sottogruppi parabolici**.

**Proposizione 3.3.1.** *Fissiamo un sistema semplice  $\Delta$  e il corrispondente insieme  $S$  di riflessioni semplici. Sia  $I \subseteq S$  e definiamo  $\Phi_I$  come l'intersezione di  $\Phi$  con lo span  $V_I$  di  $\Delta_I$  in  $V$ . Allora:*

1.  $\Phi_I$  è un sistema di radici in  $V$  (e quindi in  $V_I$  con sistema semplice  $\Delta_I$  e gruppo di riflessioni corrispondente  $W_I$ );
2. considerando  $W_I$  come gruppo di riflessioni, con funzione lunghezza  $l_I$  relativa al sistema semplice  $\Delta_I$ , abbiamo che  $l_I = l$  in  $W_I$ ;
3. definiamo  $W^I = \{w \in W \mid l(ws) > l(w) \quad \forall s \in I\}$ . Dato  $w \in W$ , esistono unici  $u \in W^I$  e  $v \in W_I$  tali che  $w = uv$ . La loro lunghezza soddisfa  $l(w) = l(u) + l(v)$ . Inoltre,  $u$  è l'unico elemento di lunghezza minima di  $wW_I$ .

*Dimostrazione.* 1: è chiaro che  $W_I$  stabilizza  $V_I$  e che le condizioni (R1) e (R2) della Definizione 3.2.2 sono soddisfatte da  $\Phi_I$ . È anche chiaro che  $\Delta_I$  è un sistema semplice. Quindi il gruppo  $W_I$  è il corrispondente gruppo di riflessioni, sia che agisca su  $V$  o su  $V_I$ .

2: usiamo la caratterizzazione della funzione lunghezza data dal Corollario 3.2.4:  $l(w)$  indica il numero di radici positive mandate in radici negative da  $w$ , e similmente per  $l_I$ , dove per radici positive in  $\Delta_I$  si intendono quelle che stanno in  $\Phi^+ \cap \Phi_I$ .

Supponiamo ora che  $\alpha \in \Phi^+ \setminus \Phi_I$ . Allora  $\alpha$  è multiplo di una certa radice semplice  $\gamma \notin \Delta_I$ , quindi, per ogni  $\beta \in \Delta_I$ ,  $s_\beta \alpha$  è ancora multiplo di  $\gamma$ , con coefficiente positivo. Segue quindi che  $s_\beta \alpha > 0$ . Inoltre, per ogni  $w \in W$ , si ha che  $w\alpha > 0$ . Allora le radici in  $\Phi^+$  mandate da  $w \in W_I$  in radici negative sono tutte le sole le radici in  $\Phi_I^+$  mandate da  $w$  in radici negative. Questo implica che  $l(w) = l_I(w)$ .

3: Dato  $w \in W$ , scegliamo  $u \in wW_I$  della minor lunghezza possibile e scriviamo  $w = uv$  con  $v \in W_I$ . Dato che  $us \in wW_I$  per ogni  $s \in I$ , è ovvio che  $u \in W^I$ . Ora scriviamo  $u$  e  $v$  con espressioni ridotte:  $u = s_1 \cdots s_q$  ( $s_i \in S$ ) e  $v = s'_1 \cdots s'_k$  (qui possiamo assumere  $s'_i \in I$  grazie al punto 2). Allora,  $l(w) \leq l(u) + l(v) = q + k$ . Se avessimo la disuguaglianza stretta, per la condizione di eliminazione potremmo omettere due dei fattori  $s_i$  e  $s'_i$  in  $uv$  senza modificare  $w$ . Ma omettere qualsiasi fattore da  $u$  implicherebbe trovare un elemento di  $wW'$  di lunghezza minore di  $u$ , il che sarebbe assurdo. Quindi i due fattori  $s'_i, s'_j$  possono essere omessi senza modificare  $v$ , ma anche questo è un assurdo perché l'espressione scelta per  $v$  è ridotta. Abbiamo quindi che  $l(w) = l(u) + l(v)$ .

L'unica ipotesi su  $w$  usata in questa dimostrazione è che  $w \in wW_I$ . Abbiamo quindi mostrato che ogni elemento di questo insieme può essere scritto nella forma  $w = uv$ , con  $l(w) = l(u) + l(v)$ . Qui  $u$  è fissato della minima lunghezza possibile (implicando  $u \in W^I$ ). In particolare,  $u$  è l'unico elemento di tale lunghezza. Infatti, supponiamo che ci sia un altro elemento  $u' \in W^I$  che sta anche in  $wW_I$  con  $u' \neq u$ . Potremmo quindi scrivere  $u' = uv$  con  $l(v) = r > 0$ ,

con  $v = s_1 \cdots s_r$ . Ma allora, avremmo  $l(u's_r) < l(u')$ , che è assurdo perché abbiamo supposto  $u' \in W^I$ .  $\square$

I vari rappresentanti di  $wW^I$ , (cioè dei laterali di  $W^I$ ), ovvero quelli di lunghezza minima, definiti nel punto 3 della dimostrazione si chiamano **rap-presentanti minimali**; vedremo che giocheranno un ruolo fondamentale.

Il punto 3 della Proposizione 3.3.1 permette di studiare la crescita di  $W$  in funzione di  $S$ . Questa crescita è misurata dalla successione

$$a_n = |\{w \in W \mid l(w) = n\}|,$$

che definisce un polinomio con indeterminata  $t$ :

$$W(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n = \sum_{w \in W} t^{l(w)}.$$

Chiamiamo questo polinomio  $W(t)$  il **polinomio di Poincaré**.

Generalizzando, prendendo un sottoinsieme  $X$  di  $W$ , possiamo definire

$$X(t) = \sum_{w \in X} t^{l(w)}.$$

Notiamo che se  $I \subset S$ , allora  $W_I(t)$  coincide con il polinomio di Poincaré del gruppo di riflessioni  $W_I$ , dato che  $l = l_I$ .

Dal punto 3 della Proposizione 3.3.1 segue anche che

$$W(t) = W_I(t)W^I(t).$$

Questo fatto può essere utilizzato per ricavare un algoritmo che permette di calcolare  $W(t)$  per induzione su  $|S|$ .

Per comodità, indichiamo  $(-1)^I = (-1)^{|I|}$ .

Per dimostrare la proposizione seguente, ricordiamo che esiste un unico elemento  $w_0 \in W$  di lunghezza massima  $N = |\Pi|$ .

**Proposizione 3.3.2.**

$$\sum_{I \subset S} (-1)^I \frac{W(t)}{W_I(t)} = \sum_{I \subset S} (-1)^I W^I(t) = t^N.$$

*Dimostrazione.* L'uguaglianza tra la prima e la seconda sommatoria segue dalle osservazioni fatte in precedenza.

Fissiamo ora  $w \in W$  e vediamo cosa succede nella seconda sommatoria.

Poniamo  $K = \{s \in S \mid l(ws) > l(w)\}$ . Abbiamo quindi che  $w \in W^I$  se  $I \subset K$ , quindi  $t^{l(w)}$  appare nella sommatoria con coefficiente  $\sum_{I \subset K} (-1)^I$ .

Se  $K \neq \emptyset$ , si vede facilmente che quella quantità è 0. Ma  $K = \emptyset$  se  $w = w_0$  e otteniamo quindi il termine  $t^N$ .  $\square$

### 3.4 Domini fondamentali

L'obiettivo di questa sezione è quello di rendere più dettagliata la descrizione dell'azione di  $W$  su  $V$ , ponendo l'accento sul ruolo che giocano gli iperpiani di riflessione. Nel farlo, otterremo anche un'interpretazione geometrica della transitività semplice di  $W$  su un sistema semplice e informazioni in più sui sottogruppi parabolici.

Fissiamo un sistema positivo  $\Pi$  che contiene il sistema semplice  $\Delta$ . Possiamo associare ad ogni iperpiano  $H_\alpha$  gli insiemi aperti  $A_\alpha$  e  $A'_\alpha$  definiti come

$$A_\alpha = \{\lambda \in V \mid \langle \lambda, \alpha \rangle > 0\}$$

e  $A'_\alpha = -A_\alpha$ .

Definiamo anche  $C = \bigcap_{\alpha \in \Delta} A_\alpha$ . Dato che  $C$  è intersezione di insiemi aperti convessi, è a sua volta aperto convesso; in particolare è un cono, ovvero è chiuso per prodotto per scalari reali positivi.

Sia ora  $D$  la chiusura di  $C$ , ovvero l'intersezione degli insiemi chiusi  $H_\alpha \cup A_\alpha$ .

Abbiamo

$$D = \{\lambda \in V \mid \langle \lambda, \alpha \rangle \geq 0 \forall \alpha \in \Delta\}.$$

Chiaramente  $D$  così definito è un cono chiuso convesso. Vogliamo mostrare che  $D$  è un dominio fondamentale per l'azione di  $W$  su  $V$ , ovvero che ogni  $\lambda \in V$  è coniugato tramite l'azione di  $W$  ad un unico punto di  $D$ .

**Lemma 3.4.1.** *Ogni  $\lambda \in V$  è  $W$ -coniugato ad un  $\mu \in D$ . Inoltre,  $\mu - \lambda$  è una combinazione lineare non negativa di elementi di  $\Delta$ .*

*Dimostrazione.* Introduciamo un ordine parziale su  $V$ , diverso dall'ordine totale introdotto in precedenza:  $\lambda \leq \mu$  se e solo se  $\mu - \lambda$  è una combinazione lineare di elementi di  $\Delta$  con coefficienti tutti non negativi. Si vede facilmente che questo è un ordine parziale.

Consideriamo l'insieme dei  $\mu$  che sono  $W$ -coniugati ad un certo  $\lambda \in V$  tali che  $\lambda \leq \mu$ . Questo insieme è non vuoto perché contiene almeno  $\lambda$ . Scegliamone un elemento massimale  $\mu$ . Se  $\alpha \in \Delta$ , allora  $s_\alpha \mu$  si ottiene da  $\mu$  sottraendo un multiplo di  $\alpha$ , cioè  $2\langle \mu, \alpha \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle$ . Dato che questo è un altro  $W$ -coniugato di  $\lambda$ , il fatto di aver preso  $\mu$  massimale impone  $\langle \mu, \alpha \rangle \geq 0$ . Dato che quanto appena detto vale per ogni  $\alpha \in \Delta$ , si ha che  $\mu \in D$  è della forma desiderata e possiamo concludere.  $\square$

Per far vedere che ogni  $\lambda$  è  $W$ -coniugato al massimo ad un elemento  $\mu \in D$ , è sufficiente mostrare che non esistono due elementi distinti di  $D$  che sono  $W$ -coniugati. Nel corso della dimostrazione, otteniamo anche ulteriori informazioni sul gruppo d'isotropia  $\{w \in W \mid w\mu = \mu\}$  con  $\mu \in V$ .

**Teorema 3.4.1.** *Fissiamo un sistema positivo  $\Pi$  che contiene un sistema semplice  $\Delta$  (notiamo che in questo modo stiamo anche fissando  $D$  definito come sopra). Valgono le seguenti:*

1. *se  $w\lambda = \mu$ , con  $\lambda, \mu \in D$ , allora  $\lambda = \mu$  e  $w$  è un prodotto di riflessioni semplici che fissano  $\lambda$ . In particolare, se  $\lambda \in C$ , allora il gruppo di isotropia di  $\lambda$  è banale;*
2.  *$D$  è un dominio fondamentale per l'azione di  $W$  su  $V$ ;*
3. *se  $\lambda \in V$ , il gruppo di isotropia di  $\lambda$  è generato dalle riflessioni  $s_\alpha, \alpha \in \Phi$  che contiene;*
4. *se  $U$  è un sottoinsieme di  $V$ , allora il sottogruppo di  $W$  che fissa puntualmente  $U$  è generato dalle riflessioni  $s_\alpha$  con  $\alpha \in \Phi$  che contiene.*

*Dimostrazione.* 1: procediamo per induzione su  $l = n(w)$ .

Passo base: se  $n(w) = 0$ , allora  $w = 1$  e non c'è niente da mostrare.

Passo induttivo: supponiamo quindi  $n(w) > 0$ . Allora  $w$  manda almeno una radice positiva  $\alpha$  in una radice negativa, altrimenti avremmo che  $w\Delta$  e di conseguenza  $w\Pi$  consistono solo di radici positive. Grazie al punto 2 del Lemma 3.2.1, abbiamo che  $n(ws_\alpha) = n(w) - 1$ . Inoltre, dato che per ipotesi  $\lambda, \mu \in D$ , con  $w\alpha < 0$ , abbiamo

$$0 \geq \langle \mu, w\alpha \rangle = \langle w^{-1}\mu, w^{-1}w\alpha \rangle = \langle \lambda, \alpha \rangle \geq 0,$$

da cui otteniamo che  $\langle \lambda, \alpha \rangle = 0$  e  $s_\alpha\lambda = \lambda$ . Di conseguenza abbiamo anche che  $ws_\alpha\lambda = \mu$ . Per ipotesi induttiva,  $\lambda = \mu$  e  $ws_\alpha$  è prodotto di riflessioni semplici che fissano  $\lambda$ , da cui segue che anche  $w$  è prodotto di riflessioni semplici.

2: questo segue dal punto 1. dell'enunciato e da Lemma 3.4.1.

3: dato  $\lambda \in V$ , usiamo il Lemma 3.4.1 per trovare  $w \in W$  per cui  $\mu = w\lambda$  sta in  $D$ . Dal punto 1. otteniamo che il gruppo di isotropia  $W'$  di  $\mu$  è generato dalle riflessioni semplice contenute nello stesso. È chiaro che  $w^{-1}W'w$  è il gruppo isotropo  $W'$  di  $\lambda$ . Dato che i coniugati di riflessioni semplici sono ancora riflessioni, segue che  $W'$  è generato dalle riflessioni del tipo  $s_\alpha$  che contiene. 4: il sottogruppo  $W^0$  che fissa puntualmente lo span di  $U$  è chiaramente lo stesso sottogruppo che fissa  $U$  puntualmente. Quindi,  $W^0$  non è altro che l'intersezione dei gruppo di isotropia dei  $\lambda_i$ .

Procediamo per induzione su  $t$ . Il passo base  $t = 1$  è dimostrato dal punto 3. Sappiamo che il gruppo isotropo  $W'$  di  $\lambda_1$  è generato dall'insieme di tutte le riflessioni  $s_\alpha$  che contiene, con  $\alpha$  che appartiene ad un sottoinsieme  $\Phi'$  di  $\Phi$  che contiene le coppie di radici  $\alpha, -\alpha$ . La Proposizione 3.2.1 implica che  $W'$  stabilizza  $\Phi'$ . Quindi questo gruppo di riflessioni, che ha come sistema di radici l'insieme  $\Phi'$ , può prendere il posto di  $W$ . Per ipotesi induttiva, il suo sottogruppo che fissa puntualmente  $\{\lambda_2, \dots, \lambda_t\}$  è generato da riflessioni del tipo  $s_\alpha$  con  $\alpha \in \Phi'$ . Ma questo sottogruppo non è altro che  $W^0$ .  $\square$

A questo punto, abbiamo associato ad ogni sistema semplice  $\Delta$  un cono aperto convesso  $C$  in  $V$ , i cui punti hanno tutti stabilizzatore banale in  $W$ . Osserviamo che se sostituiamo  $\Delta$  con  $w\Delta$  stiamo sostituendo  $C$  con  $wC$ .

Quindi l'azione semplicemente transitiva di  $W$  sui sistemi semplici si traduce in un'azione semplicemente transitiva sulla famiglia di tali insiemi, che chiamiamo **camere**. Le camere sono caratterizzate topologicamente come le componenti connesse del complementare di  $V$  in  $\bigcup_{\alpha} H_{\alpha}$ . Data una camera  $C$  corrispondente ad un sistema semplice  $\Delta$ , le sue **pareti** sono definite come gli iperpiani  $H_{\alpha}$ ,  $\alpha \in \Delta$ . Ogni parete ha un lato positivo e uno negativo, scelti in modo che  $C$  sta in quello positivo. Quindi le radici in  $\Delta$  possono essere caratterizzate come quelle radici che sono ortogonali ad una parete di  $C$  e con segno positivo. Osserviamo infine che l'angolo tra ogni coppia di pareti è della forma  $\pi/k$ , con  $k \geq 2$  intero. Questo segue dalla discussione che abbiamo fatto nella Sezione 3.1.

Il Teorema 3.4.1 ci permette di ottenere un'immagine più chiara dei sottogruppi parabolici della forma  $W_I$ , dove  $I$  è un sottoinsieme di  $S$  di riflessioni semplici relative ad un sistema semplice fissato  $\Delta$ .

**Proposizione 3.4.1.** *Tramite la mappa  $I \mapsto W_I$ , l'insieme dei sottogruppi parabolici  $W_I$ ,  $I \in S$  è isomorfo al reticolo di sottoinsiemi di  $S$ .*

*Dimostrazione.* È chiaro che  $W_{I \cup J}$  è il gruppo generato da  $W_I$  e  $W_J$  con  $I, J \subset S$ .

Diciamo che  $W_I \cap W_J = W_{I \cap J}$ , da cui seguirà immediatamente che la funzione  $I \mapsto W_I$  è iniettiva e definisce un isomorfismo di reticoli.

L'inclusione  $W_{I \cap J} \subseteq W_I \cap W_J$  è ovvia.

Per mostrare l'altra inclusione, riprendiamo dalla Proposizione 3.3.1 i sottospazi  $V_I$  e  $V_J$  di  $V$ . Dalle loro definizioni segue subito che  $V_i \cap V_j = V_{I \cap J}$ . Ora usiamo il fatto che, per ogni  $A, B$  sottospazio di  $V$  vale che  $(A \cap B)^{\perp} = A^{\perp} + B^{\perp}$ , per ottenere che

$$V_I^{\perp} + V_J^{\perp} = (V_i \cap V_j)^{\perp} = V_{I \cap J}^{\perp}.$$

Sia ora  $w \in W_I \cap W_J$ . Abbiamo che  $w$  fissa ogni vettore contenuto in  $V_I^{\perp} + V_J^{\perp}$ . Per il punto 4 del Teorema 3.4.1, si ha che  $w$  è un prodotto di riflessioni  $s_{\alpha}$ , che a loro volta fissano puntualmente questo spazio. Ma allora  $\alpha$  è ortogonale

allo spazio che fissa, ovvero  $\alpha \in \Phi \cap V_{I \cap J} = \Phi_{I \cap J}$ . Da qui segue  $w \in W_{I \cap J}$ , che è quello che volevamo.  $\square$

Questo teorema ci permette di eliminare possibili ambiguità riguardanti la presentazione di  $W$ . Ricordiamo che per ora abbiamo ricondotto lo studio di  $W$  allo studio di un sistema di radici  $\Phi$ , definendo  $W$  come il gruppo generato dalle riflessioni  $s_\alpha$ , con  $\alpha \in \Phi$ . Vediamo ora che le riflessioni in  $W$  sono tutte e sole quelle di questa forma.

**Proposizione 3.4.2.** *Ogni riflessione in  $W$  è della forma  $s_\alpha$ , con  $\alpha \in \Phi$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $s$  una riflessione di  $W$  e sia  $H$  l'iperpiano fissato puntualmente da  $s$ . Abbiamo che  $s$  sta nel gruppo isotropo di  $H$ , che è non banale e quindi, grazie al punto 4. del Teorema 3.4.1 è generato da alcune delle riflessioni del tipo  $s_\alpha$ ,  $\alpha \in \Phi$ . Ma  $s_\alpha$  fissa puntualmente  $H$  solo se  $H = H_\alpha$ , il che ci fa concludere che  $s = s_\alpha$ .  $\square$

Ora vogliamo dare una descrizione più dettagliata del dominio fondamentale  $D$  in termini di sottogruppi parabolici. Come in precedenza, fissiamo un sistema semplice  $\Delta$  e il corrispondente insieme  $S$  di riflessioni semplici. Per comodità, possiamo assumere che  $\Delta$  genera tutto lo spazio  $V$ . Per ogni sottoinsieme  $I$  di  $S$ , definiamo

$$C_I = \{\lambda \in D \mid \langle \lambda, \alpha \rangle = 0 \quad \forall \alpha \in \Delta_I, \langle \lambda, \alpha \rangle > 0 \quad \forall \alpha \in \Delta \setminus \Delta_I\}.$$

L'insieme  $C_I$  così definito è intersezione di alcuni iperpiani  $H_\alpha$  e insiemi aperti  $A_\alpha$  definiti in precedenza. Si vede facilmente che gli insiemi  $C_I$  costituiscono una partizione di  $D$ , con  $C_\emptyset = C$  e  $C_S = \{0\}$ . Inoltre, lo span di  $C_I$  ha dimensione  $n - |I|$ , dove  $n$  indica la dimensione di  $V$ .

Grazie al Teorema 3.4.1, abbiamo che gli insiemi  $wC_I$ ,  $w \in W$ ,  $I \subseteq S$  formano una partizione di  $V$ . Più precisamente, per ogni insieme  $I$  fissato, si ha che  $wC_I$  e  $w'C_I$  sono disgiunti a meno che  $w$  e  $w'$  stanno nella stessa classe in  $W/W_I$ ; in questo caso  $wC_I = w'C_I$ .

Invece, per ogni  $I, J$  sottoinsiemi di  $S$  distinti,  $wC_I$  e  $w'C_J$  sono disgiunti.

Definiamo  $\mathcal{C}$  la famiglia di tutti gli insiemi  $wC_I$  così definiti e chiamiamo  $\mathcal{C}$  il **complesso di Coxeter di  $W$** . Ogni elemento  $wC_I$  di  $\mathcal{C}$  si chiama **faccia** di tipo  $I$ .

**Proposizione 3.4.3.** *Per ogni sottoinsieme  $I$  di  $S$ , lo stabilizzatore della faccia  $C_I$  del complesso di Coxeter  $\mathcal{C}$  di  $W$  è esattamente  $W$ . Quindi i sottogruppi parabolici di  $W$  sono tutti e soli i gruppi isotropi degli elementi di  $\mathcal{C}$ .*

*Dimostrazione.* Dalla definizione di  $C_I$ , segue che  $W_I$  lo fissa puntualmente. Supponiamo ora di avere  $w \in W$  tale che  $wC_I = C_I$ . Dal punto 1. del Teorema 3.4.1 segue che  $w$  fissa puntualmente  $C_I$ .

Usando il punto 3. della Proposizione 3.3.1 possiamo scrivere  $w = uv$ , con  $v \in W_I$  e  $u$  tale che  $l(us_\alpha) > l(u)$  per ogni  $\alpha \in I$ . Grazie al Lemma 3.2.1, questo implica che  $u\Delta_I \subseteq \Phi^+$ . Se  $u \neq 1$ , ci deve essere un  $\alpha \in \Delta$  tale che  $u\alpha < 0$  e  $\alpha \notin \Delta_I$ . Prendiamo  $\lambda \in C_I$ , così che valga  $w\lambda = u\lambda = \lambda$ . Dato che  $\alpha \notin \Delta_I$ , per definizione segue che  $\langle \lambda, \alpha \rangle > 0$ . Abbiamo anche che  $u\alpha < 0$  impone  $\langle \lambda, \alpha \rangle = \langle u\lambda, u\alpha \rangle = \langle \lambda, u\alpha \rangle \leq 0$ , il che è assurdo.  $\square$

### 3.5 Classificazione dei gruppi finiti di riflessione

L'obiettivo di questa sezione è quello di determinare tutti i possibili gruppi di riflessione finiti e di rappresentarli in termini dei loro grafi di Coxeter. Descriveremo nel dettaglio come costruire ogni gruppo irriducibile<sup>21</sup> di riflessioni e calcoleremo i loro ordini.

In questa sezione, indichiamo con  $n$  il rango<sup>22</sup> di  $W$ .

La rappresentazione di  $W$  enunciata nel Teorema 3.2.6 ci dice che, come gruppo astratto,  $W$  è determinato a meno di isomorfismi dagli interi  $m(\alpha, \beta)$ , con  $\alpha, \beta \in \Delta$ . Un modo furbo di interpretare questa informazione è quello di

<sup>21</sup>Vedere la Definizione 3.5.1

<sup>22</sup>Vedere la Definizione 3.2.6.

costruire un grafo  $\Gamma$  i cui vertici sono in corrispondenza biunivoca con  $\Delta$ ; in questo grafo, uniamo le coppie di vertici corrispondenti a  $\alpha \neq \beta$  con una linea ogni volta che  $m(\alpha, \beta) \geq 3$  e etichettiamo questo lato con  $m(\alpha, \beta)$ . Segue quindi che per ogni coppia di vertici disgiunta nel grafo, possiamo dedurre  $m(\alpha, \beta) = 2$ . Questo grafo viene chiamato **grafo di Coxeter di  $W$** ; grazie alla Proposizione 3.5.1, vedremo che il grafo di Coxeter ci permetterà di rappresentare  $W$  a meno di isomorfismo. Abbiamo anche visto che i sistemi semplici sono coniugati, quindi il grafo non dipende dalla scelta di  $\Delta$ .

La classificazione dei gruppi finiti di riflessione si baserà sullo studio dei grafi di Coxeter possibili.

Diamo ora un criterio geometrico per capire quando due gruppi di riflessione sono isomorfi tra loro.

**Proposizione 3.5.1.** *Per  $i = 1, 2$ , sia  $W_i$  un gruppo finito di riflessioni che agisce sullo spazio euclideo  $V_i$ . Assumiamo che  $W_i$  sia essenziale<sup>23</sup>. Se  $W_1$  e  $W_2$  hanno lo stesso grafo di Coxeter, allora esiste un'isometria che manda  $V_1$  in  $V_2$  e che induce un isomorfismo di  $W_1$  e  $W_2$ . In particolare, se  $V_1 = V_2$ , i sottogruppi  $W_1$  e  $W_2$  sono coniugati in  $O(V)$ .*

*Dimostrazione.* Fissiamo un sistema semplice  $\Delta_i$  per  $W_i$ . Per ipotesi, abbiamo che  $\Delta_i$  è una base di  $V_i$ . Possiamo assumere che tutte le radici in  $\Delta$  abbiano lunghezza unitaria. Consideriamo la funzione  $\varphi$  che manda  $\Delta_1$  in  $\Delta_2$  in maniera compatibile con il grafo di Coxeter e estendiamo questa funzione in maniera lineare ad un isomorfismo di spazi vettoriali da  $V_1$  a  $V_2$ . Se  $\alpha \neq \beta$  sono due elementi di  $\Delta_1$ , l'angolo  $\theta$  compreso tra loro è  $\pi - \pi/m(\alpha, \beta)$ . Dato che le radici sono vettori unitari, abbiamo che  $\langle \alpha, \beta \rangle = \theta = -\cos(\pi - \pi/m(\alpha, \beta))$ . Lo stesso calcolo può essere applicato al prodotto delle radici in  $\Delta_2$  immagini di  $\alpha, \beta$ , dato che avranno lo stesso ordine delle loro preimmagini. Quindi abbiamo che la funzione  $\varphi$  definita all'inizio della dimostrazione è un'isometria che induce un isomorfismo tra  $W_1$  e  $W_2$ , che è quello che volevamo.  $\square$

---

<sup>23</sup>Vedere la Definizione 3.2.1

**Definizione 3.5.1.** Diciamo che un sistema di Coxeter  $(W, S)$  è **irriducibile** se il grafo di Coxeter corrispondente è connesso. In questo caso, diremo che anche il sistema di radici  $\Phi$  di  $W$  è irriducibile.

In generale, se  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_r$  sono le componenti connesse di  $\Gamma$ , consideriamo  $\Delta_i$  e  $S_i$  i rispettivi sistemi semplici e insiemi di riflessioni semplici. Abbiamo quindi che se  $\alpha \in \Delta_i$  e  $\beta \in \Delta_j$  con  $i \neq j$ , vale  $m(\alpha, \beta) = 2$  e quindi  $s_\alpha s_\beta = s_\beta s_\alpha$ . La seguente proposizione ci dice che lo studio dei gruppi finiti di riflessione si riduce in realtà a studiare quando  $\Gamma$  è connesso.

**Proposizione 3.5.2.** *Sia  $(W, S)$  un sistema di Coxeter con grafo  $\Gamma$  che ha componenti connesse  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_r$ . Siano  $S_1, \dots, S_r$  i rispettivi sottoinsiemi di  $S$ . Allora  $W$  è prodotto diretto dei sottogruppi parabolici  $W_{S_1}, \dots, W_{S_r}$  e ciascuno dei sistemi di Coxeter  $(W_{S_i}, S_i)$  è irriducibile.*

*Dimostrazione.* Procediamo per induzione su  $r$ . Dato che gli elementi di  $S_i$  commutano con gli elementi di  $S_j$  quando  $i \neq j$ , segue che ogni sottogruppo parabolico è normale in  $W$ . Inoltre, il prodotto di questi sottogruppi contiene  $S$  e quindi deve corrispondere a tutto  $W$ .

Per induzione,  $W_{S \setminus S_i}$  è il prodotto diretto dei rimanenti  $W_{S_j}$ , e per la Proposizione 3.4.1 segue che l'intersezione dei  $W_{S_i}$  è banale. Quindi il loro prodotto è diretto e corrisponde a tutto  $W$ , ovvero abbiamo ottenuto la tesi.  $\square$

**Definizione 3.5.2.** Un **grafo di Coxeter** è un grafo finito orientato, i cui archi sono etichettati con interi  $\geq 3$  o con il simbolo  $\infty$ .

Se  $S$  indica l'insieme dei nodi del grafo, indichiamo con  $m(s, s')$  l'etichetta dell'arco che unisce i nodi  $s \neq s'$ . Dato che l'etichetta 3 ricorre molto spesso, la omettiamo nel disegno del grafo. Utilizziamo anche la convenzione che  $m(s, s') = 2$  per i nodi  $s \neq s'$  che non sono uniti da un arco, mentre  $m(s, s) = 1$ .

Associamo ad un grafo di Coxeter  $\Gamma$  con insieme dei nodi  $S$  di cardinalità  $n$  una matrice simmetrica  $n \times n$   $A$  definendo

$$a(s, s') = -\cos\left(\frac{\pi}{m(s, s')}\right).$$

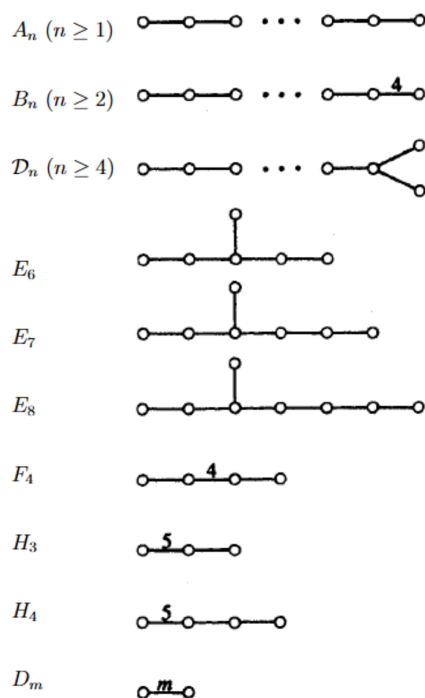


Figura 3.4: Alcuni grafi positivi (immagine presa da [13]).

Per comodità, diremo che  $\Gamma$  è definito positivo o semidefinito positivo quando lo è la corrispondente matrice  $A$  (notiamo che la matrice  $A$  è simmetrica per costruzione).

Quando  $\Gamma$  è il grafo di un gruppo di riflessioni  $W$ , la sua matrice  $A$  è definita positiva, perché rappresenta il prodotto scalare standard dello spazio  $V$  relativo alla base  $\Delta$ , in cui prendiamo tutti i vettori di lunghezza unitaria.

La strategia che adotteremo per classificare i possibili gruppi finiti di riflessioni è quella di costruire una lista di tutti i possibili grafi di Coxeter connessi definiti positivi, per poi mostrare che ognuno di questi corrisponde effettivamente ad un gruppo finito di riflessioni.

Consideriamo i grafi della Figura 3.4. Il nostro obiettivo sarà mostrare che sono tutti definiti positivi.

Per mostrare che sono effettivamente definiti positivi dobbiamo verificare che le matrici associate a ciascun grafo lo siano. Per farlo, calcoliamo i minori

di queste matrici  $A$ .

Considerando il corretto numero di nodi, si ha che ciascun minore è in realtà il determinante di una delle matrici che corrisponde ad uno dei grafi in figura. Procediamo quindi per induzione sul numero dei nodi  $n$ ; sarà sufficiente calcolare il determinante di  $A$  in ciascuno dei casi elencati. Dato che il denominatore 2 appare frequentemente, per praticità calcoliamo  $\det(2A)$ .

I casi  $n \leq 2$  possono essere verificati direttamente. Per esempio, la matrice  $A$  che corrisponde al grafo  $D_m$  è

$$\begin{pmatrix} 1 & -\cos\left(\frac{\pi}{m}\right) \\ -\cos\left(\frac{\pi}{m}\right) & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi  $\det(2A) = 4(1 - \cos^2(\pi/m)) = 4\sin^2(\pi/m) > 0$ .

Se  $n \geq 3$ , guardando la Figura 3.4 notiamo che è possibile numerare i nodi in modo che quello con etichetta  $n$  è unito con un arco ad un unico altro nodo, che sarà quello numerato  $n - 1$ ; l'arco che li unisce sarà etichettato  $m = 3$  o  $m = 4$ . Sia  $d_i$  il determinante della sottomatrice  $i \times i$  di  $2A$ . Allora, calcolando il determinante rispetto alle ultime due righe, si ha che

$$\det(2A) = 2d_{n-1} - cd_{n-2} \tag{1}$$

dove  $c$  vale rispettivamente 1 o 2 se  $m = 3$  o  $m = 4$ . Nella Tabella 3.1 sono inseriti i valori del determinante della matrice  $2A$  a seconda del grafo preso in considerazione.

Per poter dimostrare che i grafi di Coxeter nella Figura 3.4 sono gli unici connessi definiti positivi, usiamo alcuni grafi ausiliari nella Figura 3.5. Tutti i grafi rappresentati sono semidefiniti positivi.

Il modo in cui abbiamo etichettato ciascun grafo suggerisce che ognuno è ottenuto a partire da uno dei grafi della Figura 3.4 aggiungendo un nodo. Nella Figura 3.5 abbiamo quindi che ogni grafo in cui compare  $n$  come pedice ha  $n + 1$  nodi.

Dato che togliendo un nodo a ciascuno dei grafi in Figura 3.5 si ottiene un grafo della Figura 3.4, ovvero si ottiene un grafo definito positivo, dobbiamo controllare che il determinante delle matrici associate a ciascun grafo sia 0.

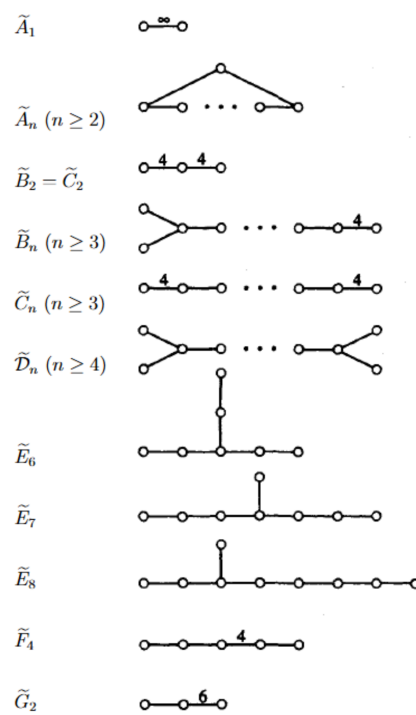


Figura 3.5: Alcuni grafi semidefiniti positivi (immagine presa da [13]).

Grafo di Coxeter	$\det(2A)$
$A_n$	$n + 1$
$B_n$	2
$\mathcal{D}_n$	4
$E_6$	3
$E_7$	2
$E_8$	1
$F_4$	1
$H_3$	$3 - \sqrt{5}$
$H_4$	$\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$
$D_m$	$4 \sin^2\left(\frac{\pi}{m}\right)$

Tabella 3.1: Tabella dei valori di  $\det(2A)$ .

Per  $\tilde{A}_n$  segue subito, dato che la somma di tutte le righe di  $A$  è 0 e quindi  $A$  è singolare.

Per i grafi rimanenti possiamo usare la formula (1) e i grafi in Figura 3.4.

Ad esempio, se consideriamo  $\tilde{F}_4$ , vediamo che i sottografi che ci interessano sono del tipo  $F_4$  e  $B_3$ , quindi la formula (1) diventa

$$\det(2A) = 2 - 2 = 0.$$

Ci sarà utile più tardi sapere che i grafi di Coxeter  $Z_4$  e  $Z_5$  mostrati di seguito non sono positivi. Infatti, i determinanti delle matrici associate ai grafi sono, rispettivamente,  $3 - 2\sqrt{5}$  e  $4 - 2\sqrt{5}$ , che sono numeri strettamente negativi.

Ora, vogliamo mostrare un fatto cruciale per raggiungere il nostro obiettivo: ogni sottografo (proprio) di un grafo connesso di tipo positivo è definito positivo.

Per **sottografo** di un grafo di Coxeter  $\Gamma$  intendiamo un grafo  $\Gamma'$  ottenuto omettendo alcuni nodi o diminuendo le etichette di uno o più archi, o entrambi. Diciamo anche che  $\Gamma$  contiene  $\Gamma'$  se  $\Gamma'$  è sottografo di  $\Gamma$ . Da qui in poi, con sottografo intendiamo dire sottografo proprio, ovvero che non coincide

con il grafo originale.

Per studiare i sottografi, abbiamo bisogno di alcuni fatti della teoria delle matrici.

**Definizione 3.5.3.** Una matrice reale  $A$  di dimensioni  $n \times n$  si dice **irriducibile** se non esiste una partizione dell'insieme degli indici in sottoinsiemi non vuoti  $I, J$  tali che  $a_{ij} = 0$  se  $i \in I, j \in J$ .

La definizione ci dice che, se  $A$  non è irriducibile, è possibile rinumerare gli indici in modo che  $A$  sia una matrice diagonale a blocchi. È chiaro che la matrice di un grafo di Coxeter è irriducibile se il grafo è connesso.

**Proposizione 3.5.3.** Sia  $A$  una matrice  $n \times n$  a coefficienti reali simmetrica semidefinita positiva e irriducibile. Supponiamo che  $a_{ij} \leq 0$  se  $i \neq j$ . Allora:

1.  $N = \{x \in \mathbb{R}^n \mid {}^t x A x = 0\}$  coincide con il nucleo di  $A$  e ha dimensione  $\leq 1$ ;
2. l'autovalore più piccolo di  $A$  ha molteplicità 1 e il suo autovettore ha componenti tutte strettamente positive.

*Dimostrazione.* 1: Si ha subito che il nucleo di  $A$  è contenuto in  $N$ . Per l'inclusione inversa, diagonalizziamo  $A$ . Dato che  $A$  è simmetrica, esiste una matrice ortogonale  $P$  tale che  $D = {}^t P A P = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ . Se  $0 = {}^t y D y = \sum d_i y_i^2$ , allora per ogni  $i$  o  $d_i = 0$  o  $y_i = 0$ . Quindi  $\sum d_i y_i = 0$  e  $y$  appartiene al nucleo di  $D$ .

Viceversa, se  $x = P y$  è tale che  ${}^t x A x = 0$ , si ha che  $x$  sta nel nucleo di  $A$ . Supponiamo che  $N$  abbia dimensione positiva, ovvero che esista almeno un vettore  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \neq 0$  tale che  $x \in N$ . Sia  $z \in \mathbb{R}^n$  il vettore che ha come componenti i valori assoluti delle componenti di  $x$ . Dato che per ipotesi  $a_{ij} \leq 0$  se  $i \neq j$ , segue che

$$0 \leq {}^t z A z \leq {}^t x A x = 0,$$

da cui segue che  $z$  appartiene ad  $N$ .

Ora vogliamo far vedere che tutte le componenti di  $z$  sono strettamente positive. Definiamo  $J$  l'insieme degli indici  $j$  tali che  $z_j \neq 0$ . Osserviamo che

$J \neq \emptyset$ . Chiamiamo  $I$  il complementare di  $J$ . Dato che  $N$  non è altro che il nucleo di  $A$ , segue che  $\sum_{j \in J} a_{ij} z_j = 0$  per ogni  $i$ . Dato che  $z_j > 0$  e  $a_{ij} \leq 0$ , nessun termine della sommatoria è strettamente positivo.

Supponiamo che  $I$  sia non vuoto. Allora, avremmo che  $a_{ij} = 0$  per ogni  $i \neq j$ , ovvero la matrice  $A$  è diagonale, ma questo è un assurdo per ipotesi di  $A$  irriducibile. Quindi abbiamo che  $N$  contiene almeno un vettore le cui componenti sono tutte strettamente positive.

Inoltre, segue anche che ogni elemento di  $N$  diverso da 0 ha tutte componenti diverse da 0.

Se la dimensione di  $N$  fosse maggiore di 1, sarebbe facile trovare una combinazione lineare di tali vettori con almeno una componente uguale a 0; segue quindi che  $N$  ha dimensione  $\leq 1$ .

2: Dato che  $A$  è semidefinita positiva, sappiamo che  $d_i \geq 0$  per ogni  $i$ . Chiamiamo  $d$  il più piccolo autovalore di  $A$ . Osserviamo che  $A - dI$  soddisfa tutte le ipotesi dell'enunciato. Inoltre, è singolare. Abbiamo quindi che il nucleo di  $A - dI$  ha dimensione 1 ed è generato da un vettore con componenti strettamente positive (segue dal punto 1). Abbiamo quindi che  $d$  è autovettore di molteplicità 1 con autovettore associato con tutte componenti positive, che è quello che volevamo dimostrare.  $\square$

**Corollario 3.5.1.** *Se  $\Gamma$  è un grafo di Coxeter connesso di tipo positivo, allora ogni suo sottografo proprio è definito positivo.*

*Dimostrazione.* Sia  $\Gamma'$  un sottografo proprio di  $\Gamma$  e siano  $A$  e  $A'$  le matrici associate a  $\Gamma$  e  $\Gamma'$  rispettivamente, con  $A$  di dimensione  $k \times k$ ,  $k \leq n$ . Le etichette degli archi di  $\Gamma'$  soddisfano  $m'_{ij} \leq m_{ij}$ , dove  $a'_{ij} = -\cos(\pi/m'_{ij}) \geq -\cos(\pi/m_{ij}) = a_{ij}$ . Supponiamo che  $A'$  non sia definita positiva. Allora, esiste un vettore  $x \in \mathbb{R}^k$  diverso da 0 tale che  ${}^t x A x \leq 0$ . Applicando la forma quadratica associata ad  $A$  al vettore di coordinate  $|x_1|, \dots, |x_k|, 0, \dots, 0$  in  $\mathbb{R}^n$ , otteniamo la disuguaglianza

$$0 \leq \sum_{i,j \leq k} a_{ij} |x_i| |x_j| \leq \sum_{i,j \leq k} a'_{ij} |x_i| |x_j| \leq \sum_{i,j \leq k} a'_{ij} x_i x_j \leq 0.$$

La prima disuguaglianza ci dice che abbiamo un vettore nullo per  $A$ , che è possibile solo se  $k = n$  e tutte le coordinate di  $x$  sono diverse da zero. Ma allora la seconda disuguaglianza impone che  $a_{ij} = a'_{ij}$  per ogni  $i, j$ , il che è assurdo per l'ipotesi che  $\Gamma'$  fosse un sottografo proprio di  $\Gamma$ .  $\square$

**Teorema 3.5.1.** *I grafi rappresentati nella Figura 3.4 e nella Figura 3.5 sono gli unici grafi di Coxeter connessi definiti positivi o semidefiniti positivi.*

*Dimostrazione.* In questa dimostrazione, con un abuso di notazione, diciamo che il grafo è di tipo positivo se è positivo o definito positivo.

Supponiamo che esista un grafo di Coxeter connesso di tipo positivo diverso da quelli rappresentati nella Figura 3.4 o nella Figura 3.5. Chiamiamo questo grafo  $\Gamma$ . Procediamo in 20 passaggi, con l'obiettivo di ottenere una contraddizione utilizzando il Corollario 3.5.1 per escludere dei possibili sottografi. Indichiamo con  $n$  il numero di nodi di  $\Gamma$  e con  $m$  l'etichetta massima degli archi di  $\Gamma$ .

1. Tutti i grafi di Coxeter di rango 1 e 2 sono di tipo positivo  $(A_1, D_m, \tilde{A}_1)$ , quindi ci serve  $n \geq 3$ .
2. Dato che  $\tilde{A}_1$  non può essere un sottografo di  $\Gamma$ , ci serve  $m < \infty$ .
3. Dato che  $\tilde{A}_n$ , ( $n \geq 2$ ) non può essere un sottografo di  $\Gamma$ ,  $\Gamma$  non contiene circuiti.

Guardiamo ora cosa succede se poniamo  $m = 3$

4.  $\Gamma$  deve avere un punto di ramificazione, ovvero un vertice da cui partono almeno tre archi, dato che  $\Gamma \neq A_n$ .
5.  $\Gamma$  non può contenere  $\tilde{D}_n$ ,  $n > 4$ , così che ha un unico punto di ramificazione.
6.  $\Gamma$  non contiene  $\tilde{D}_4$ , così che esattamente 3 archi si incontrano al punto di ramificazione (con  $a \leq b \leq c$  nodi più distanti che stanno nelle direzioni dei tre archi).

7. Dato che  $\tilde{E}_6$  non è un sottografo di  $\Gamma$ ,  $a = 1$ .
8. dato che  $\tilde{E}_7$  non è un sottografo di  $\Gamma$ ,  $b \leq 2$ .
9. Dato che  $\Gamma \neq \mathcal{D}_n$ ,  $b$  non può essere 1, quindi si ha che  $b = 2$ .
10. Dato che  $\tilde{E}_8$  non è un sottografo di  $\Gamma$ ,  $c \leq 4$ .
11. Dato che  $\Gamma \neq E_6, e_7, e_8$ , il caso  $m = 3$  è impossibile. Quindi ci serve  $m \geq 4$ .
12.  $\Gamma$  non contiene  $\tilde{C}_n$ , quindi solo un arco ha etichetta  $> 3$ .
13.  $\Gamma$  non contiene  $\tilde{B}_n$  come sottografo, quindi non ha punti di ramificazione.  
Vediamo ora cosa succede se  $m = 4$ .
14. Dato che  $\Gamma \neq B_n$ , i due archi agli estremi di  $\Gamma$  hanno etichetta 3.
15. Dato che  $\Gamma$  non contiene  $F_4$ ,  $n$  deve essere 4.
16. Ma  $\Gamma \neq F_4$ , quindi il caso  $m = 4$  è impossibile. Supponiamo quindi  $m \geq 5$ .
17. Dato che  $\Gamma$  non contiene  $\tilde{G}_2$ , deve essere  $m = 5$ .
18.  $\Gamma$  non contiene il grafo non positivo  $Z_4$ , quindi l'arco di  $\Gamma$  con etichetta 5 deve essere un arco all'estremo di  $\Gamma$ .
19.  $\Gamma$  non contiene il grafo non positivo  $Z_5$ , quindi  $n \leq 4$ .
20. Ora  $\Gamma$  deve essere per forza  $H_3$  o  $H_4$ , il che è assurdo. Abbiamo quindi eliminato tutte le possibilità.

□

Abbiamo quindi mostrato che esiste solo un numero finito di possibili gruppi di riflessione finiti. Infatti, esiste un gruppo per ogni grafo della Figura 3.4.

Vogliamo ora mostrare come costruire concretamente questi gruppi di riflessioni.

### 3.6 Gruppi cristallografici

**Definizione 3.6.1.** Un sottogruppo  $G$  di  $GL(V)$  si dice **cristallografico** se stabilizza un reticolo  $L$  in  $V$ , dove con reticolo intendiamo lo span in  $\mathbb{Z}$  dei vettori di una base di  $V$ . Se  $G$  è cristallografico vale quindi  $gL \subseteq L \forall g \in G$ .

Per prima cosa, vogliamo introdurre una condizione necessaria affinché  $W$  sia cristallografico. La cosa cruciale da notare è che, per ogni scelta di base in  $V$ , le tracce delle matrici di un gruppo cristallografico devono essere in  $\mathbb{Z}$ , perché potremmo calcolarle anche partendo da una matrice con coefficienti in  $\mathbb{Z}$ .

**Proposizione 3.6.1.** Sia  $W$  un gruppo cristallografico con sistema semplice  $\Delta$ . Allora, ogni intero  $m(\alpha, \beta)$ , con  $\alpha, \beta \in \Delta$ ,  $\alpha \neq \beta$ , è uguale a 2, 3, 4 o 6.

*Dimostrazione.* Dato che  $\alpha \neq \beta$ , sappiamo che  $s_\alpha s_\beta \neq 1$  e  $s_\alpha s_\beta$  agisce sul piano generato da  $\alpha$  e  $\beta$  come la rotazione di angolo  $\theta = 2\pi/m(\alpha, \beta)$  e fissa puntualmente il suo ortogonale. Quindi la traccia della matrice associata a  $s_\alpha s_\beta$  è  $(n-2) + 2\cos(\theta)$ , dove  $n$  indica la dimensione di  $V$ . Abbiamo quindi che  $\theta = -1, -1/2, 0, 1/2$ , e ciascuno di questi casi corrisponde rispettivamente ai casi  $m(\alpha, \beta) = 2, 3, 4, 6$ .  $\square$

Questo criterio esclude i gruppi di tipo  $H_3$  e  $H_4$ , così come tutti i gruppi diedrali al di fuori di quelli di ordine 2, 4, 6, 8, 12. Per tutti i casi rimanenti, costruiremo un reticolo stabile rispetto all'azione di  $W$ .

**Definizione 3.6.2.** Sia  $W$  un gruppo di riflessioni e sia  $\Phi$  un sistema di radici. Diciamo che  $\Phi$  è **cristallografico** se vale

$$\frac{2\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle} \in \mathbb{Z} \quad \forall \alpha, \beta \in \Phi. \quad (\text{R3})$$

Inoltre, chiamiamo **interi di Cartan** questi valori interi

In realtà, data la relazione che lega radici e radici semplici, è sufficiente richiedere che questi rapporti siano interi per ogni  $\alpha, \beta \in \Delta$  con  $\Delta$  sistema semplice contenuto in  $\Phi$ .

Il gruppo  $W$  generato da tali riflessioni  $s_\alpha$  con  $\alpha \in \Phi$  si chiama **gruppo di Weyl** di  $\Phi$ .

Il fatto che  $\Phi$  sia cristallografico ci assicura che  $s_\alpha\beta$  si ottiene a partire da  $\beta$  aggiungendo un multiplo intero di  $\alpha$ . Questo a sua volta implica che tutte le radici sono combinazioni di elementi di  $\Delta$  a coefficienti interi e che lo span in  $\mathbb{Z}$  degli elementi di  $\Delta$  è un reticolo  $W$ -stabile. Quindi  $W$  è cristallografico nel senso della Definizione 3.6.1.

Non daremo i dettagli della classificazione (a meno di isomorfismo) dei sistemi di radici cristallografici, in quanto è simile a quella fatta per la classificazione dei grafi di Coxeter definiti positivi. Se si è interessati ad una dimostrazione, si può vedere il Capitolo VI di [5] o il Capitolo III di [12]. La conclusione è che i gruppi di Weyl sono esattamente i gruppi di riflessione per i quali tutti gli  $m(\alpha, \beta)$ , con  $\alpha \neq \beta$ , appartengono a  $\{2, 3, 4, 6\}$ . Quindi i gruppi di Weyl coincidono con i gruppi di riflessione cristallografici, anche se, come vedremo nell'Esempio 3.7.3, esistono diversi sistemi di radici cristallografici con lo stesso gruppo di Weyl.

Si dimostra anche che quando il sistema di radici  $\Phi$  (o il gruppo  $W$ ) è irriducibile, sono possibili al più due lunghezze di radici. Se vi sono sia radici lunghe che corte, allora il rapporto tra i quadrati delle loro lunghezze può essere solo 2 o 3. Nel caso in cui ci sia una sola lunghezza possibile, diremo che tutte le radici sono lunghe. Questa informazione viene aggiunta al grafo di Coxeter orientando una freccia verso la radice corta quando due vertici adiacenti rappresentano una radice lunga e una corta. Per convenzione, le etichette 4 o 6 vengono sostituite con un doppio o triplo arco rispettivamente. L'obiettivo di questa sezione è quello di costruire i sistemi cristallografici di radici. Per poterlo fare, ci servono alcuni fatti che sintetizziamo di seguito:

**Osservazione 3.6.1.** 1. Ponendo  $\alpha^V = 2\alpha/\langle\alpha, \alpha\rangle$ , si ha che l'insieme  $\Phi^V$  di tutti gli elementi  $\alpha^V$ , che chiamiamo **coradici**, è un sistema di

radici cristallografico in  $V$ , con sistema semplice  $\Delta^V = \{\alpha^V \mid \alpha \in \Delta\}$ . Chiamiamo  $\Phi^V$  il sistema di radici **inverso**, o **duale**, di  $\Phi$ . Il gruppo di Weyl con sistema di radici  $\Phi^V$  è  $W$ , con  $w\alpha^V = w(\alpha)^V$ . Nella maggior parte dei casi si ha che  $\Phi^V$  è isomorfo a  $\Phi$ ; tuttavia, i sistemi di radici di tipo  $B_n$  e  $C_n$  sono duali tra loro (le radici corte  $\alpha$  in un sistema  $\Phi$  di tipo  $B_n$  generano radici lunghe  $\alpha^V$  nel sistema  $\Phi^V$  di tipo  $C_n$ , e viceversa).

2. Lo  $\mathbb{Z}$ -span  $L(\Phi)$  di  $\Phi$  in  $V$  è chiamato il **reticolo di radici**. È un reticolo nel sottospazio di  $V$  generato da  $\Pi$ , che possiamo assumere essere proprio  $V$ . Definiamo il reticolo di coradici come  $L(\Phi^V)$ . Entrambi questi reticolo sono stabili sotto l'azione di  $W$ .

Definiamo il **reticolo dei pesi**

$$\hat{L}(\Phi) = \{\lambda \in V \mid \langle \lambda, \alpha^V \rangle \in \mathbb{Z} \forall \alpha \in \Phi\},$$

e il **reticolo dei copesi**

$$\hat{L}(\Phi^V) = \{\lambda \in V \mid \langle \lambda, \alpha \rangle \in \mathbb{Z} \forall \alpha \in \Phi\},$$

Abbiamo che  $\hat{L}(\Phi^V)$  contiene  $L(\Phi)$  come sottogruppo di indice finito  $f$ , e allo stesso modo  $\hat{L}(\Phi)$  contiene  $L(\Phi^V)$  come sottogruppo di indice  $f$ . Qui  $f$  è il determinante della matrice degli interi di Cartan  $\langle \alpha, \beta^V \rangle$ , con  $\alpha, \beta \in \Delta$ .

3. Fissato  $\Delta$ , esiste un ordinamento parziale su  $V$ :  $\mu \leq \lambda \Leftrightarrow \lambda - \mu$  è una combinazione lineare non negativa a coefficienti in  $\mathbb{Z}$  di elementi di  $\Delta$ . Quando  $\Phi$  è irriducibile, esiste un'unica radice massima rispetto all'ordine (che è lunga), che indichiamo con  $\alpha_{max}$ , che sfrutteremo per calcolare l'ordine dei vari gruppi finiti di riflessioni. Inoltre, esiste anche un'unica radice minima.
4. Se  $W$  è irriducibile, le radici lunghe (risp. corte) formano un'unica orbita sotto l'azione di permutazione di  $W$  su  $\Phi$ . Se tutte le radici sono lunghe, per il Corollario 3.2.2, ogni radice è coniugata tramite  $W$  ad

una radice semplice, e, dato che il diagramma di Dynkin è connesso, basta vedere che le radici appartenenti a nodi adiacenti sono coniugate tramite  $W$ . Ma chiaramente queste sono nella stessa orbita del sottogruppo (isomorfo a  $\mathcal{D}_3$ ) generato dalle due riflessioni semplici coinvolte (più in generale, si verifica facilmente che tutte le radici sono coniugate in  $\mathcal{D}_m$  con  $m$  dispari). Se ci sono due lunghezze di radici, si ragiona in modo simile, perché le radici di ciascuna lunghezza corrispondono ad una parte connessa del diagramma di Dynkin nei casi  $B_n, C_n, F_4, G_2$ .

### 3.7 Costruzione dei sistemi di radici

Consideriamo la base standard  $(e_1, \dots, e_n)$  di  $\mathbb{R}^n$ .

Descriviamo brevemente la costruzione dei sistemi di radici cristallografici possibili. La strategia di base è abbastanza semplice: scelto opportunamente un reticolo  $L$  in  $\mathbb{R}^n$ , definiamo  $\Phi$  come l'insieme di tutti i vettori di una o due lunghezze fissate. Verifichiamo poi che gli scalari  $2\langle\alpha, \beta\rangle/\langle\beta, \beta\rangle$  stiano in  $\mathbb{Z}$ . Segue quindi che le riflessioni rispetto ai vettori in  $\Phi$  stabilizzano  $L$  e dunque permutano  $\Phi$  come volevamo.

Di fatto, abbiamo già studiato i gruppi  $A_n, B_n, \mathcal{D}_n$ . In questi casi,  $W$  ha una descrizione abbastanza semplice. Nei casi eccezionali  $E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$ , è più difficile dedurre dalla descrizione di  $\Phi$  una descrizione concreta di  $W$ .

Descriviamo qui sotto un metodo generale per farlo.

**Esempio 3.7.1.**  $A_n, n \geq 1$  (introdotto nell'Esempio 3.2.2): Sia  $V$  un iperpiano di  $\mathbb{R}^{n+1}$ , generato dai vettori le cui coordinate sommano a 0. Definiamo  $\Phi$  come l'insieme di tutti i vettori di lunghezza  $\sqrt{2}$  appartenenti all'intersezione di  $V$  con il reticolo standard  $\mathbb{Z}e_1 + \dots + \mathbb{Z}e_{n+1}$ . L'insieme  $\Phi$  è costituito quindi dai vettori

$$e_i - e_j, \quad 1 \leq i \neq j \leq n + 1.$$

Per definire  $\Delta$ , consideriamo

$$\alpha_1 = e_1 - e_2, \quad \alpha_2 = e_2 - e_3, \quad \dots, \quad \alpha_n = e_n - e_{n+1}.$$

Allora  $\alpha_{max} = e_1 - e_{n+1}$ . Il gruppo  $W$  è  $S_{n+1}$ , che agisce permutando gli  $e_i$ .

**Esempio 3.7.2.**  $B_n, n \geq 2$  (introdotto nell'Esempio 3.2.3): sia  $V = \mathbb{R}^n$  e sia  $\Phi$  l'insieme di tutti i vettori nel reticolo standard di norma 1 o  $\sqrt{2}$ . Avremo quindi che  $\Phi$  contiene le  $2n$  radici corte  $\pm e_i$  e le  $2n(n-1)$  radici lunghe  $(\pm e_i \pm e_j)$  con  $i < j$ , per un totale di  $2n^2$  elementi.

Per quanto riguarda  $\Delta$ , consideriamo

$$\alpha_1 = e_1 - e_2, \alpha_2 = e_2 - e_3, \dots, \alpha_{n-1} = e_{n-1} - e_n, \alpha_n = e_n.$$

Allora  $\alpha_{max} = e_1 + e_2$ . Il gruppo  $W$  è il prodotto semidiretto di  $S_n$  (che permuta gli  $e_i$ ) e di  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$  (che cambia segno agli  $e_i$ ), quest'ultimo normale in  $W$ .

**Esempio 3.7.3.**  $C_n, n > 2$ : partendo da  $B_n$ , possiamo definire  $C_n$  come il suo sistema di radici inverso<sup>24</sup>. Questo consiste delle  $2n$  radici lunghe  $\pm 2e_i$  e delle  $2n(n-1)$  radici corte  $(\pm e_i \pm e_j), i < j$ .

Per  $\Delta$ , consideriamo

$$\alpha_1 = e_1 - e_2, \dots, \alpha_{n-1} = e_{n-1} - e_n, \alpha_n = 2e_n.$$

Quindi  $\alpha_{max} = 2e_1$ .

**Esempio 3.7.4.**  $\mathcal{D}_n, n \geq 4$ : sia  $V = \mathbb{R}^n$  e sia  $\Phi$  l'insieme di tutti i vettori del reticolo standard di norma  $\sqrt{2}$ .  $\Phi$  è quindi l'insieme delle  $2n(n-1)$  radici  $(\pm e_i \pm e_j), 1 \leq i < j \leq n$ .

Per quanto riguarda  $\Delta$ , consideriamo

$$\alpha_1 = e_1 - e_2, \dots, \alpha_{n-1} = e_{n-1} - e_n, \alpha_n = e_{n-1} + e_n.$$

Allora  $\alpha_{max} = e_1 + e_2$ .  $W$  è il prodotto semidiretto di  $S_n$ , che permuta gli  $e_i$  e di  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n-1}$ , che agisce come un numero pari di cambi di segno, quest'ultimo normale in  $W$ .

<sup>24</sup>I gruppi  $C_n$  e  $B_n$  sono isomorfi, ma hanno diversi sistemi di radici

**Esempio 3.7.5.**  $G_2$ : sia  $V$  l'iperpiano di  $\mathbb{R}^3$  generato dai vettori le cui coordinate sommano a 0. Sia  $\Phi$  l'insieme dei vettori di norma  $\sqrt{2}$  o  $\sqrt{6}$  nell'intersezione di  $V$  con il reticolo standard. Abbiamo quindi che  $\Phi$  ha dodici elementi: le sei radici corte  $\pm(e_i - e_j), i < j$  e le sei radici lunghe  $\pm(2e_i - e_j - e_k)$ , con  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ .

Per quanto riguarda  $\Delta$ , consideriamo

$$\alpha_1 = e_1 - e_2, \quad \alpha_2 = -2e_1 + e_2 + e_3.$$

Allora  $\alpha_{max} = 2e_3 - e_1 - e_2$ .

**Esempio 3.7.6.**  $F_4$ : Sia  $V = \mathbb{R}^4$  e sia  $L'$  il reticolo standard. Definiamo

$$L = L' + \mathbb{Z}\left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 e_i\right).$$

Ovviamente anche  $L$  è un reticolo. Definiamo  $\Phi$  come l'insieme di tutti i vettori  $L$  di norma 1 o  $\sqrt{2}$ . Abbiamo quindi che  $\Phi$  consiste di 24 radici lunghe  $(\pm e_i \pm e_j)$ , con  $i < j$  e 24 radici corte  $\pm 8e_i$  e  $\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)$  con un numero pari di segni meno.

Per quanto riguarda  $\Delta$ , consideriamo

$$\alpha_1 = e_2 - e_3, \quad \alpha_2 = e_3 - e_4, \quad \alpha_3 = e_4, \quad \alpha_4 = -\frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4).$$

Allora  $\alpha_{max} = e_1 + e_2$ .

Ora, dato che un sistema di radici di tipo  $E_8$  deve contenere copie canoniche sia di  $E_7$  che di  $E_6$ , vogliamo vedere ora come costruire  $E_8$ .

**Esempio 3.7.7.**  $E_8$ : sia  $V = \mathbb{R}^8$ . Consideriamo il reticolo  $L'$  costituito dai vettori

$$\sum_{i=1}^8 a_i e_i, \quad \text{con } a_i \in \mathbb{Z} \text{ e } \sum a_i \text{ pari.}$$

Definiamo poi  $L = L' + \mathbb{Z}\left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 e_i\right)$ . Sia  $\Phi$  l'insieme dei vettori di  $L$  di norma  $\sqrt{2}$ . In questo caso  $\Phi$  consiste delle seguenti 240 radici

$$(\pm e_i \pm e_j), \quad i < j, \quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 \pm e_i \quad (\text{con un numero pari di segni } +).$$

Per quanto riguarda  $\Delta$ , consideriamo

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8)$$

$$\alpha_2 = e_1 + e_2$$

$$\alpha_i = e_{i-1} - e_{i-2}, \quad 3 \leq i \leq 8.$$

Abbiamo  $\alpha_{max} = e_7 + e_8$ .

**Esempio 3.7.8.**  $E_7$ : partendo dal sistema di radici di  $E_8$  costruito nell'esempio precedente, consideriamo  $V$  il sottospazio di  $\mathbb{R}^8$  generato dagli  $\alpha_i$ ,  $1 \leq i \leq 7$ . Sia  $\Phi$  l'insieme delle 128 radici di  $E_8$  che stanno in  $V$ :

$$\pm e_i \pm e_j, \quad 1 \leq i < j \leq 6$$

$$\pm(e_7 - e_8)$$

$$\pm \frac{1}{2}(e_7 - e_8 + \sum_{i=1}^6 \pm e_i),$$

con un numero dispari di segni  $-$  nella sommatoria. Le radici  $\alpha_i$ ,  $1 \leq i \leq 7$  formano un sistema semplice. Quindi  $\alpha_{max} = e_8 - e_7$ .

**Esempio 3.7.9.**  $E_6$ : di nuovo, iniziamo dal sistema di radici costruito per  $E_8$ . Sia  $V$  lo spazio generato dagli  $\alpha_i$  con  $1 \leq i \leq 6$  e sia  $\Phi$  l'insieme delle 72 radici di  $E_8$  che stanno in  $V$ :

$$(\pm e_i \pm e_j), \quad 1 \leq i < j \leq 5$$

$$\pm \frac{1}{2}(e_8 - e_7 - e_6 + \sum_{i=1}^5 \pm e_i),$$

con un numero dispari di segni  $-$  nella sommatoria. Le radici  $\alpha_i$  con  $1 \leq i \leq 6$  formano un sistema semplice. Abbiamo  $\alpha_{max} = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 - e_6 - e_7 + e_8)$ .

Nei casi di gruppi del tipo  $A_n, B_n, D_n$  si vede facilmente che l'ordine del gruppo è  $(n+1)!$ ,  $2^n n!$ , e  $2^{n-1} n!$  rispettivamente. Negli altri casi, invece, trovarne la cardinalità è un po' più complicato, anche dopo aver trovato un

sistema di radici  $\Phi$ .

Il metodo che permette di calcolare la cardinalità di  $W$  utilizza la formula del Teorema orbita-stabilizzatore (Teorema A.0.3), che dice che

$$|G| = |\text{Orb}(x)| \cdot |G_x|.$$

Nel nostro caso, consideriamo l'azione di  $W$  sull'insieme di radici  $\Phi$ . Per una radice opportunamente scelta, potremo esplicitare lo stabilizzatore. Per il momento, ci concentriamo sui gruppi  $E_6$ ,  $E_7$ ,  $E_8$  e  $F_4$ .

Il fatto chiave è che, se  $W$  è irriducibile, tutte le radici lunghe (risp. corte) formano una singola orbita sotto  $W$ . Consideriamo l'unica radice più alta  $\alpha_{max}$ , che è lunga. Se  $\alpha \in \Delta$ , affermiamo che  $\langle \alpha_{max}, \alpha \rangle \geq 0$ . Infatti, se fosse  $< 0$ , avremmo che  $s_\alpha \alpha_{max}$  sarebbe uguale a  $\alpha_{max}$  più un multiplo positivo di  $\alpha$ , quindi sarebbe più alta nell'ordinamento parziale, il che sarebbe assurdo. Dunque  $\alpha_{max}$  appartiene al dominio fondamentale  $D$  di  $W$  descritto nel Teorema 3.4.1. Secondo il punto 1. del Teorema 3.4.1, il sottogruppo di isotropia di  $\alpha_{max}$  è generato dalle riflessioni corrispondenti alle radici semplici ortogonali a  $\alpha_{max}$ . Queste si determinano facilmente grazie a quanto fatto negli esempi precedenti. Questo ragionamento ci dà un metodo induttivo per calcolare l'ordine di  $W$ . Lo useremo ora per i gruppi nominati in precedenza.

**Esempio 3.7.10.**  $F_4$ : ci sono 24 radici lunghe. La radice massima  $\alpha_{max}$  è ortogonale a tutte le radici semplici tranne  $\alpha_1$ , quindi il suo gruppo di isotropia è di tipo  $C_3$ , che ha ordine 48. Quindi abbiamo che  $|W| = 24 \cdot 48 = 1152 = 2^7 \cdot 3^2$ .

Il gruppo  $F_4$  può anche essere visto come il gruppo di simmetria di un poliedro regolare in  $\mathbb{R}^4$  avente 24 facce tridimensionali, che sono ottaedri<sup>25</sup>. Le 24 radici lunghe in  $\Phi$  formano un sistema di radici  $\Phi'$  del gruppo  $\mathcal{D}_4$ . Segue che il gruppo  $W$  è il gruppo di automorfismi di  $\Phi'$ , nel quale il gruppo di Weyl  $W'$  è un sottogruppo normale di ordine 192 (ricordiamo che  $W'$  è il prodotto semidiretto di  $S_4$  e di un gruppo abeliano elementare di ordine 8. Altri

<sup>25</sup>Se si ha difficoltà a visualizzare un tale solido, se ne può trovare una descrizione teorica in [5].

automorfismi di  $\Phi'$  sorgono naturalmente dalle simmetrie del diagramma di Dynkin: si possono scambiare tre vertici esterni tramite l'azione di  $S_3$ . Segue quindi che  $W/W' \cong S_3$ . In effetti,  $W$  è il prodotto semidiretto di  $W'$  e  $S_3$ .

Per quanto riguarda i gruppi  $E_6$ ,  $E_7$  ed  $E_8$ , che trattiamo di seguito, una loro descrizione come gruppi di simmetrie è piuttosto complicata. Se si è interessati alla loro descrizione come gruppi di Lie si può vedere la Sezione 2.12 di [13].

**Esempio 3.7.11.**  $E_6$ : le 72 radici formano un'unica orbita. La radice massima  $\alpha_{max}$  è ortogonale a tutte le radici semplici tranne  $\alpha_2$ , quindi il suo sottogruppo di isotropia è di tipo  $A_5$ , che ha ordine  $6!$ . Quindi  $|W| = 72 \cdot 6! = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$

**Esempio 3.7.12.**  $E_7$ : le 126 radici formano un'unica orbita. La radice massima  $\alpha_{max}$  è ortogonale a tutte le altre radici semplici tranne  $\alpha_1$ , quindi il suo sottogruppo di isotropia è di tipo  $D_6$ , che ha ordine  $2^5 \cdot 6!$ . Quindi  $|W| = 126 \cdot 2^5 \cdot 6! = 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$ .

**Esempio 3.7.13.**  $E_8$ : le 240 radici formano un'unica orbita. La radice massima  $\alpha_{max}$  è ortogonale a tutte le radici semplici tranne  $\alpha_8$ , quindi il suo sottogruppo d'isotropia è di tipo  $E_7$ . Quindi  $|W| = 2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$ .

Per concludere, consideriamo ora i gruppi di tipo  $H_3$  e  $H_4$ , che non sono cristallografici. Entrambi sorgono naturalmente come gruppi di simmetria di solidi regolare.

Infatti, il gruppo di tipo  $H_3$  è il gruppo di simmetria dell'icosaedro in  $\mathbb{R}^3$  oppure, dualmente, del dodecaedro (Esempio 2.4.6). Il gruppo  $W$  ha quindi ordine 120 e contiene 15 riflessioni.

Il gruppo di tipo  $H_4$  è il gruppo di simmetria di un solido regolare con 120 celle con facce dodecaedriche in  $\mathbb{R}^4$ , oppure, dualmente, di un solido regolare con 600 celle con facce tetraedriche. Il gruppo  $W$  ha ordine 14400 e contiene 60 riflessioni.

Anche per questi due gruppi, vogliamo trovare un opportuno sistema di radici. L'esistenza di un gruppo di tipo  $H_4$  implica l'esistenza di un sottogruppo

di tipo  $H_3$ ; ci concentriamo quindi sul primo.

Uno dei modi in cui possiamo costruire un sistema di radici di  $H_4$  in  $\mathbb{R}^4$  è identificare i vettori con elementi dell'anello  $\mathbb{H}$  dei quaternioni<sup>26</sup> reali: identificheremo il vettore  $\lambda = (c_1, c_2, c_3, c_4)$  con l'elemento  $\lambda = c_1 + c_2i + c_3j + c_4k$ , con  $(1, i, j, k)$  base di  $\mathbb{H}$ . A questo punto il prodotto interno  $\langle \lambda, \mu \rangle$  in  $\mathbb{R}^4$  diventa

$$\frac{1}{2}(\lambda\bar{\mu} + \mu\bar{\lambda}),$$

dove  $\bar{\lambda} = c_1 - c_2i - c_3j - c_4k$ . Definendo la norma dei quaternioni come  $\|\lambda\| = \sqrt{\lambda\bar{\lambda}}$ , possiamo definire l'inverso di  $\lambda$  in  $\mathbb{H}$  come  $\lambda^{-1} = \frac{\bar{\lambda}}{\|\lambda\|^2}$ . Se  $\alpha \in \mathbb{H}$  ha norma 1, si vede facilmente che la riflessione  $s_\alpha$  manda  $\lambda \in \mathbb{H}$  in  $-\alpha\lambda\alpha$ . Ci chiediamo ora come possiamo trovare un sottoinsieme di  $\mathbb{H}$  che sia un sistema di radici per  $H_4$ . Il seguente lemma ci aiuta.

**Lemma 3.7.1.** *Ogni sottogruppo finito  $G$  di ordine pari di  $\mathbb{H}$  è un sistema di radici se considerato come sottoinsieme di  $\mathbb{R}^4$ .*

*Dimostrazione.* Per prima cosa, osserviamo che ogni elemento  $\lambda \in G$  ha norma 1, dato che  $\lambda^r = 1$  implica  $\|\lambda\|^r = 1$ . Inoltre, dato che  $G$  è un gruppo (e quindi contiene l'inverso di ogni suo elemento), per definizione di inverso in  $\mathbb{H}$  segue che  $G$  è chiuso anche per il coniugio.

È facile vedere che nessun quaternionone tranne  $-1$  ha ordine 2. Dato che ogni gruppo di ordine pari contiene un elemento di ordine 2, segue che  $-1 \in G$ . Di conseguenza,  $G$  contiene gli opposti dei suoi elementi.

Inoltre, la formula per la riflessione  $s_\alpha$  ci dice che  $s_\alpha(G) = G$ , dato che  $G$  è chiuso rispetto al coniugio.

Abbiamo quindi mostrato che  $G$  soddisfa (R1) ed (R2) della Definizione 3.2.2 ed è quindi un sistema di radici.  $\square$

Ci limitiamo ora a specificare un particolare sottogruppo di ordine 120, senza motivarne la scelta. Si può verificare, sia direttamente che indirettamente attraverso la classificazione, che questo sarà un sistema di radici per

<sup>26</sup>Vedere Definizione A.0.22 in Appendice.

il gruppo di tipo  $H_4$ . Questo dimostrerà quindi l'esistenza di un gruppo di riflessioni di tipo  $H_4$  e di conseguenza di un sottogruppo di tipo  $H_3$ .

Come suggerisce il grafo di Coxeter (Figura 3.4), l'angolo  $\pi/5$  deve comparire nella costruzione.

Poniamo

$$a = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}, \quad b = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

Valgono le seguenti:

$$2a = 2b + 1; \quad 4ab = 1, \quad 4a^2 = 2a + 1, \quad 4b^2 = -2b + 1.$$

Definiamo  $\Phi$  come l'insieme dei vettori unitari in  $\mathbb{H}$  ottenuti a partire da  $1, \frac{1}{2}(1 + i + j + k), a + \frac{1}{2}i + bj$  tramite permutazioni pari delle coordinate e cambi di segno arbitrari.

Si verifica che  $\Phi$  è un gruppo di ordine 120, quindi è un sistema di radici. Consideriamo  $W$  il gruppo di riflessioni corrispondente.

Si verifica che  $W$  è irriducibile: è impossibile dividere  $\Phi$  in due sottoinsiemi non vuoti ortogonali tra loro. Dalla classificazione segue quindi che  $W$  deve essere di tipo  $H_4$ .

Possiamo esibirne un sistema semplice:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a - \frac{1}{2}i + bj \\ \alpha_2 &= -a + \frac{1}{2}i + bj \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2} + bi - aj \\ \alpha_4 &= -\frac{1}{2} - ai + bk. \end{aligned}$$

I prodotti scalari risultanti sono compatibili con il grafo di tipo  $H_4$ .

Per calcolare l'ordine di  $W$ , osserviamo per prima cosa che le 120 radici formano un'unica orbita sotto l'azione di  $W$ . Dato che ogni radice è  $W$ -coniugata ad una radice semplice, è sufficiente verificare che le radici semplici corrispondenti ai nodi adiacenti del grafo di Coxeter siano  $W$ -coniugate.

Sia che l'arco sia etichettato con 3 o con 5, possiamo richiamare il fatto che tutte le radici di un gruppo di tipo  $I_2(m)$  appartengono ad una sola orbita se  $m$  è dispari.

Notiamo che le radici  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  formano un sistema semplice per il sottogruppo di tipo  $H_3$ , le cui 30 radici sono le radici ortogonali alla radice  $k(0, 0, 0, 1)$ .

Per il punto 3. del Teorema 3.4.1, il sottogruppo di isotropia di questa radice ha ordine 120.

Abbiamo quindi che  $|W| = 120 \cdot 20 = 14400$ .

# Appendice A

## Nozioni di base

In questa appendice si trovano alcune definizioni e alcuni risultati utili per la comprensione della tesi.

### Capitolo 1

**Definizione A.0.1.** Una **norma** su uno spazio vettoriale reale  $E$  è una mappa  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $v \rightarrow \|v\|$ , tale che:

1.  $\forall v \in E$ ,  $\|v\| \geq 0$ , con l'uguaglianza che vale se e solo se  $v = 0$ ;
2.  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in E$ , si ha  $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ ;
3.  $\forall v, w \in E$ , vale  $\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$  (disuguaglianza triangolare).

**Definizione A.0.2.** Una **distanza** su un insieme  $E$  è una mappa  $d(\cdot, \cdot) : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  tale che per ogni  $v, w, z \in E$  valgono le seguenti:

1.  $d(v, w) \geq 0$ ;
2.  $d(v, w) = 0 \Leftrightarrow v = w$ ;
3.  $d(v, w) = d(w, v)$ ;
4.  $d(v, w) \leq d(v, z) + d(z, w)$ .

**Definizione A.0.3.** Una matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$  si dice **ortogonale** se  ${}^tAA = I_n$ , cioè se  $A$  è invertibile e  $A^{-1} = {}^tA$ , dove  ${}^tA$  indica la trasposta di  $A$ . L'insieme delle matrici ortogonali viene indicato con  $O_n(\mathbb{R})$ .

**Osservazione A.0.1.** Dal fatto che, data  $A$  ortogonale, vale  $\det({}^tAA) = \det({}^tA)\det(A) = \det(A)^2 = 1$  segue che, se  $A$  ortogonale,  $\det(A) = \pm 1$

**Definizione A.0.4.** L'insieme delle matrici ortogonali con determinante 1 viene indicato con  $SO_n(\mathbb{R})$ .

**Osservazione A.0.2.** Dalle proprietà del prodotto di matrici e dalla formula moltiplicativa del determinante segue immediatamente che  $SO_n(\mathbb{R})$  è un gruppo con operazione la moltiplicazione di matrici.

**Definizione A.0.5.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ . Una forma bilineare su  $V$  è un'applicazione  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  che associa ad ogni coppia di elementi  $(v, w) \in V \times V$  lo scalare  $\beta(v, w) \in \mathbb{R}$  e che è lineare su entrambe le componenti, ovvero tale che valgono le seguenti:

1.  $\beta(v_1 + v_2, w) = \beta(v_1, w) + \beta(v_2, w) \quad \forall v_1, v_2, w \in V$ ;
2.  $\beta(v, w_1 + w_2) = \beta(v, w_1) + \beta(v, w_2) \quad \forall v, w_1, w_2 \in V$ ;
3.  $\beta(\lambda v, w) = \beta(v, \lambda w) = \lambda\beta(v, w) \quad \forall v, w \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ .

Inoltre,  $\beta$  si dice **definita positiva** se, per ogni  $v, w \in V \setminus \{0\}$ , si ha  $\beta(v, w) > 0$  e si dice **simmetrica** se  $\beta(v, w) = \beta(w, v) \quad \forall v, w \in V$

**Definizione A.0.6.** Siano  $V$  e  $W$  due spazi vettoriali con base  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$  rispettivamente e sia  $f : V \rightarrow W$  un'applicazione lineare. Allora, indichiamo con  $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(f)$  la matrice che ha come colonne le coordinate delle immagini dei vettori della base  $\mathcal{B}$  espresse rispetto alla base  $\mathcal{B}'$ .

Se  $f : V \rightarrow V$ , per comodità definiamo  $M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ .

**Proposizione A.0.1.** *Sia  $\beta$  una forma bilineare simmetrica definita positiva su  $V$  spazio vettoriale di dimensione  $n$ . Allora esiste una base  $\mathcal{B} =$*

$(e_1, \dots, e_n)$  di  $V$  ortonormale, ovvero tale che

$$\beta(e_i, e_j) = \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

**Teorema A.0.1.** (*Teorema di Sylvester*). Sia  $\beta$  una forma bilineare simmetrica sullo spazio vettoriale reale  $V$ . Allora, esistono  $p, r$  naturali con  $0 \leq p \leq r \leq n$  e una base  $\mathcal{B}$  di  $V$  tale che

$$M_{\mathcal{B}}(\beta) = \begin{pmatrix} I_p & O & O \\ O & -I_{r-p} & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

**Definizione A.0.7.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n$ . Un **iperpiano vettoriale**  $H$  è un sottospazio vettoriale di  $V$  di dimensione  $n - 1$ .

**Definizione A.0.8.** Sia  $W$  un sottospazio dello spazio vettoriale  $V$ . Lo **spazio ortogonale** di  $W$  è

$$W^\perp = \{v \in V \mid \langle w, v \rangle = 0\}.$$

**Definizione A.0.9.** La **somma** di due sottospazi vettoriali  $W$  e  $U$  di uno spazio  $V$  è lo spazio vettoriale

$$W + U = \{w + u \mid w \in W, u \in U\}.$$

Se  $W \cap U = \{0\}$ , si dice che  $W$  e  $U$  sono in **somma diretta** e si indica la loro somma con  $W \oplus U$ .

**Proposizione A.0.2.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione  $n$ ,  $W$  un suo sottospazio vettoriale non banale. Allora,  $V = W \oplus W^\perp$

## Capitolo 2

**Definizione A.0.10.** Sia  $X$  un insieme. Una **permutazione** di  $X$  è una biiezione  $\sigma : X \rightarrow X$ .

**Osservazione A.0.3.** L'insieme delle permutazioni di un insieme  $X$  forma un gruppo con l'operazione di composizione delle funzioni. Se  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ , il gruppo si chiama **gruppo simmetrico** su  $n$  elementi e si indica con  $S_n$ .

**Proposizione A.0.3.** Siano  $C_1, C_2, C_3$  tre circonferenze del piano con centri  $O_1, O_2, O_3$  rispettivamente non allineati. Allora  $C_1 \cap C_2 \cap C_3$  contiene al massimo un punto.

*Dimostrazione.* Se l'intersezione è vuota o contiene un punto, la proposizione è valida.

Supponiamo quindi per assurdo che esistano due punti distinti  $P \neq Q$  all'interno di  $C_1 \cap C_2 \cap C_3$ . Dato che  $P$  e  $Q$  appartengono ad ognuna delle tre circonferenze, per ogni  $i = 1, 2, 3$  vale che  $\overline{O_i P} = \overline{O_i Q}$ . Ma allora, segue che per ogni  $i$ ,  $O_i$  appartiene all'asse perpendicolare del segmento  $\overline{PQ}$ , ovvero alla retta dei punti equidistanti da  $P$  e da  $Q$ . Ma questo è un assurdo, in quanto avevamo supposto che i tre centri non fossero allineati.  $\square$

**Definizione A.0.11.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale. Un'**omotetia** di fattore  $\lambda \neq 0$  è un'applicazione lineare  $f : V \rightarrow V$  tale che  $f(v) = \lambda v$  per ogni vettore  $v \in V$ .

Due sottoinsiemi di  $W_1, W_2$  di  $V$  si dicono **omotetici** se esiste un'omotetia  $f$  tale che  $f(W_1) = W_2$ .

**Definizione A.0.12.** Siano  $X$  un insieme e  $G$  un gruppo. Un'**azione** del gruppo  $G$  sull'insieme  $X$  è una funzione

$$G \times X \rightarrow X \quad (g, x) \mapsto gx$$

tale che  $\forall g, h \in G$  e  $\forall x \in X$  si ha:

1.  $(gh)x = g(hx)$ ;

2.  $e_G x = x$

dove  $e_G$  è l'elemento neutro di  $G$ .

**Definizione A.0.13.** Consideriamo la coppia  $(X, G)$  e  $x \in X$ . Definiamo l'**orbita di  $x$**  come

$$\text{Orb}(x) := \{gx \mid g \in G\}$$

e lo **stabilizzatore di  $x$**  come

$$G_x := \{g \in G \mid gx = x\}.$$

Inoltre, per ogni  $g \in G$ , definiamo

$$X^g = \{x \in X \mid gx = x\}$$

come l'insieme degli elementi fissati da  $g$

**Definizione A.0.14.** Sia  $G$  un gruppo e sia  $H \leq G$  un suo sottogruppo. Per ogni  $g \in G$  definiamo la **classe laterale sinistra** di  $H$  in  $G$  rispetto a  $g$  come l'insieme

$$gH = \{gh \mid h \in H\}.$$

Analogamente si definisce la **classe laterale destra** come l'insieme

$$Hg = \{hg \mid h \in H\}.$$

**Definizione A.0.15.** Sia  $G$  un gruppo e sia  $H \leq G$  un suo sottogruppo. L'**indice** di  $H$  in  $G$  è il numero delle classi laterali sinistre di  $H$  in  $G$  e si indica con

$$[G : H].$$

**Teorema A.0.2.** (*Teorema di Lagrange*). Sia  $G$  un gruppo finito e sia  $H$  un suo sottogruppo. Allora, l'ordine di  $H$  divide l'ordine di  $G$ , ovvero

$$|G| = |H| \cdot [G : H],$$

dove  $[G : H]$  indica l'indice di  $H$  in  $G$ .

*Dimostrazione.* Consideriamo gli insiemi  $gH = \{gh \mid h \in H\}$ , con  $g \in G$ . Posso vedere questi insiemi come le classi di equivalenza della relazione su  $G$  data da  $g \sim f$  se esiste  $h \in H$  tale che  $g = fh$ . Questi insiemi non sono altro che le classi di equivalenza della relazione  $\sim$  e formano una partizione di  $G$ . Ognuna di queste classi  $aH$  ha la stessa cardinalità, in quanto la funzione  $g \mapsto ag$  definisce una biiezione  $H \rightarrow aH$  con inversa  $y \mapsto a^{-1}y$ . Il numero di classi è quindi l'indice  $[G : H]$ . Da qui otteniamo  $|G| = [G : H] \cdot |H|$ .  $\square$

**Lemma A.0.1.** *Sia  $G$  un gruppo che agisce sull'insieme  $X$ . Allora, se  $g, h \in G$ ,*

$$gG_x = hG_x \Leftrightarrow h^{-1}g \in G_x$$

*Dimostrazione.*  $\Rightarrow$ : sia  $gG_x = hG_x$ . Ovviamente  $e_G \in G_x$ , con  $e_G$  elemento neutro di  $G$ , quindi si ha che  $ge_G = g \in gG_x = hG_x$ , cioè  $\exists s \in G_x$  tale che  $g = hs$ . Ma questo implica  $h^{-1}g \in G_x$ .

$\Leftarrow$ : sia  $s = h^{-1}g \in G_x$ . Allora  $g = hs$  e moltiplicando  $G_x$  a destra otteniamo  $gG_x = (hs)G_x = h(sG_x) = hG_x$ .  $\square$

**Definizione A.0.16.** Definiamo  $G/G_x$  come l'insieme delle classi laterali di  $G_x$  in  $G$ , ovvero l'insieme  $G/G_x = \{gG_x \mid g \in G\}$

**Teorema A.0.3.** (*Teorema orbita-stabilizzatore*). *Sia  $G$  un gruppo che agisce su un insieme  $X$  e sia  $x \in X$ . Allora, esiste una biiezione  $G/G_x \longleftrightarrow \text{Orb}(x)$ . In particolare, se  $G$  è finito, vale che*

$$|\text{Orb}(x)||G_x| = |G|.$$

*Dimostrazione.* Per prima cosa, dimostriamo l'esistenza della mappa  $G/G_x \longleftrightarrow \text{Orb}(x)$ .

Consideriamo l'insieme  $G/G_x = \{gG_x \mid g \in G\}$  e definiamo

$$\phi : G/G_x \rightarrow \text{Orb}(x), \quad \phi(gG_x) = gx.$$

Per vedere che la funzione  $\phi$  è ben definita, dobbiamo mostrare che  $gG_x = hG_x \Rightarrow gx = hx$ . Ma  $gG_x = hG_x \Leftrightarrow h^{-1}g \in G_x \Leftrightarrow (h^{-1}g)x = x$ .

Moltiplicando a sinistra per  $h$  otteniamo che  $h((h^{-1}g)x) = hx$  ma anche  $(hh^{-1}g)(x) = gx$ , quindi  $hx = gx$  e  $\phi$  è ben definita.

Mostriamo ora che  $\phi$  è iniettiva: supponiamo  $\phi(gG_x) = \phi(hG_x)$ . Questo vuol dire che  $gx = hx$ , ma ciò accade se e solo se  $h^{-1}gx = x$  cioè se e solo se  $h^{-1}g \in G_x$ . Per il Lemma A.0.1 possiamo concludere che  $\phi$  è iniettiva.

Mostriamo che  $\phi$  è suriettiva: sia  $y \in \text{Orb}(x)$ . Dobbiamo trovare  $gG_x$  tale che  $y = \phi(gG_x)$ . Ma  $y \in \text{Orb}(x)$  vuol dire che  $\exists g \in G$  tale che  $y = gx$ , quindi  $y = gx = \phi(gG_x)$ , cioè  $\phi$  è suriettiva.

Abbiamo quindi mostrato che  $\phi$  è ben definita e biiettiva. Ora ci resta solo da mostrare la formula per la cardinalità di  $G$  finito.

Dato che  $\phi$  è una biiezione, si ha che  $|\text{Orb}(x)| = |G/G_x|$ . Inoltre,  $|G/G_x| = [G : G_x]$  e per il Teorema di Lagrange  $[G : G_x] = \frac{|G|}{|G_x|}$ , da cui otteniamo  $|G| = |G_x| |\text{Orb}(x)|$ , che è quello che volevamo dimostrare.  $\square$

**Lemma A.0.2.** (*Lemma di Burnside*). *Sia  $G$  un gruppo finito che agisce su un insieme  $X$ . Allora, l'insieme delle orbite di  $G$ , che indichiamo con  $O$ , ha cardinalità  $|O| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$ .*

*Dimostrazione.* Per prima cosa, osserviamo che

$$\sum_{g \in G} |X^g| = \#\{(g, x) \in G \times X \mid gx = x\} = \sum_{x \in X} |G_x|.$$

Per il Teorema orbita-stabilizzatore A.0.3, si ha che per ogni  $x \in X$  c'è una biiezione naturale tra l'orbita  $\text{Orb}(x) = \{gx \mid g \in G\}$  e l'insieme delle classi sinistre  $G/G_x$ . Inoltre, per il Teorema di Lagrange,  $|G \cdot x| = |G|/|G_x|$ .

Possiamo quindi riscrivere la sommatoria come:

$$\sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|G \cdot x|} = |G| \sum_{x \in X} \frac{1}{|G \cdot x|}.$$

Se consideriamo l'insieme  $X$  come unione disgiunta delle orbite in  $O$ , otteniamo che  $|G| \sum_{x \in X} \frac{1}{|G \cdot x|} = |G| \sum_{A \in O} \sum_{x \in A} \frac{1}{|A|} = |G| \sum_{A \in O} 1 = |G| \cdot |O|$ .

Unendo i risultati ottenuti otteniamo quindi che  $\sum_{g \in G} |X^g| = |G| \cdot |O|$ , cioè

$$|O| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|, \text{ che è quello che volevamo dimostrare. } \square$$

## Capitolo 3

**Definizione A.0.17.** Sia  $P$  un poligono. Una **diagonale** di  $P$  è un segmento che congiunge due qualsiasi suoi vertici non adiacenti.

Due diagonali si dicono **adiacenti** se lo sono due loro estremi.

**Definizione A.0.18.** Sia  $G$  un gruppo e  $H$  un suo sottogruppo. Diciamo che  $H$  è un sottogruppo **normale** di  $G$ , o che  $G$  **normalizza**  $H$ , se per ogni  $g \in G$  e per ogni  $h \in H$  vale che  $g^{-1}hg \in H$ .

**Definizione A.0.19.** Sia  $G$  un gruppo che agisce su un insieme  $X$ . Diciamo che  $G$  **agisce discretamente** su  $X$  se nessuna delle orbite  $\text{Orb}(x)$ , con  $x \in X$ , ha punti di accumulazione, ovvero se per ogni  $x \in X$ , non esiste nessun intorno di  $X$  che contiene infiniti punti di  $\text{Orb}(x)$ .

Se  $G$  agisce in maniera discreta su  $X$  diremo che  $G$  è un **gruppo discreto**.

**Definizione A.0.20.** Sia  $G$  un gruppo che agisce su un insieme  $X$ . Un sottoinsieme  $P$  di  $X$  si chiama **dominio fondamentale** se valgono le seguenti:

1.  $G$  agisce discretamente su  $X$ ;
2.  $\bigcup_{g \in G} g(P) = X$ ;
3. l'azione di  $G$  è transitiva, ovvero per ogni  $g, h \in G$  si ha che  $g(P) = h(P) \Leftrightarrow g = h$ .

**Definizione A.0.21.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale reale. Una **relazione d'ordine totale** su  $V$  è una relazione transitiva, che indichiamo con  $<$ , tale che per ogni  $v, w, z \in V$  valgano le seguenti:

1. esattamente una tra queste è vera:  $v < w$ ,  $v = w$ ,  $w < v$ ;
2. se  $v < w$ , allora  $v + z < w + z$ ;
3. se  $v < w$  e  $k \in \mathbb{R}$ ,  $k \neq 0$ , allora  $kv < kw$  se  $k > 0$  e  $kv > kw$  se  $k < 0$ .

---

Diremo che  $v \in V$  è **positivo** se  $0 < v$ . Si avrà quindi che la somma di vettori positivi è ancora un vettore positivo, così come il prodotto di un vettore positivo per uno scalare positivo.

**Definizione A.0.22.** Definiamo un **quaternione** come un elemento della forma  $a + b\hat{i} + c\hat{j} + d\hat{k}$  dove  $a, b, c, d$  sono numeri reali e  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  sono simboli letterali tali che  $\hat{i}^2 = \hat{j}^2 = \hat{k}^2 = \hat{i}\hat{j}\hat{k} = -1$ .

Il **coniugato** di un quaternione  $q = a + b\hat{i} + c\hat{j} + d\hat{k}$  è il quaternione  $\bar{q} = a - b\hat{i} - c\hat{j} - d\hat{k}$ .

La **norma** di un quaternione  $q$  è il numero  $|q| = \sqrt{q\bar{q}}$ .

L'**inverso** di un quaternione  $q$  è  $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$ .

Si dimostra facilmente che l'insieme dei quaternioni così definiti è un anello.



# Bibliografia

- [1] A. Borovik A. V. Borovik. *Mirrors and Reflections: The Geometry of Finite Reflection Groups*. Springer, 2009.
- [2] M. A. Armstrong. *Groups and Symmetry*. Springer, 1988.
- [3] M. Artin. *Algebra*. Prentice Hall Inc., 1991.
- [4] M. Berger. *Geometry I*. Springer, 2009.
- [5] N. Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie, Ch. 4-6*. Masson, 1981.
- [6] A. Brøndsted. *Introduction to Convex Polytopes*. Springer Science + Business Media, LCC, 1983.
- [7] H. S. M. Coxeter. *Projective Geometry*. Springer-Verlag, 1987.
- [8] H. S. M. Coxeter. *Regular Polytopes*. Dover Publications Inc, 1973.
- [9] R. M. Foote D. S. Dummit. *Abstract Algebra*. John Wiley & Sons, 2004.
- [10] R. Hartshorne. *Geometry: Euclid and Beyond*. Springer, 2000.
- [11] J. E. Humphreys. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. Springer, 1972.
- [12] J. E. Humphreys. *Linear Algebraic groups*. Springer, 1975.
- [13] J. E. Humphreys. *Reflection groups and Coxeter groups*. Cambridge University Press, 1990.
- [14] A. Machì. *Gruppi: Una introduzione a idee e metodi della teoria dei gruppi*. Springer, 2007.
- [15] M. Manetti. *Algebra lineare, per matematici*. Springer, 2025.

- [16] A. Massarenti P. Ellia. *Algebra lineare e geometria*. Società Editrice Esculapio, 2024.
- [17] C. C. Pinter. *A Book of Abstract Algebra*. Dover Publications, 1982.
- [18] J. J. Rotman. *An Introduction to the Theory of Groups*. Springer, 1995.
- [19] E. Sernesi. *Geometria 1*. Bollati Boringhieri, 1989.
- [20] E. Sernesi. *Geometria 2*. Bollati Boringhieri, 1994.
- [21] A. B. Sossinsky. *Geometries*. American Mathematical Society, 2010.
- [22] M. J. Wenninger. *Dual models*. Cambridge University Press, 2003.