

**Alma Mater Studiorum - Università di Bologna**

---

Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Astronomia

**Dinamica delle Galassie a Spirale e  
delle Galassie Ellittiche**

Tesi di Laurea

Presentata da:  
**Fabio Monorchio**

Relatrice:  
**Prof.ssa Marcella Brusa**

---

Sessione di Laurea IV  
Anno Accademico 2024-2025

# Abstract

Nelle prossime pagine si parlerà delle galassie ellittiche e a spirale, con particolare riguardo per le loro caratteristiche dinamiche. Dopo un'introduzione generale su caratteristiche, classificazione e qualche principio dinamico alla base di tutte le trattazioni seguenti, si verterà ad un'analisi più specifica e legata alle due classi di galassie al centro di questo testo. In particolare, per quanto concerne le galassie ellittiche, verranno approfonditi il legame tra morfologia e moti stellari e le leggi empiriche che le legano al cosiddetto piano fondamentale mentre, per le galassie a spirale, verranno trattati principalmente il moto delle stelle nel disco e la formazione dei bracci a spirale, ma saranno anche discussi brevemente il bulge, l'alone con i suoi ammassi globulari e la legge empirica di Tully-Fisher.

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
1.1	Caratteristiche delle Galassie . . . . .	1
1.2	Classificazione di Hubble . . . . .	1
1.3	Problema degli N-corpi e $t_{2b}$ . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Dinamica delle Galassie Ellittiche</b>	<b>6</b>
2.1	Morfologia . . . . .	6
2.2	Orbite stellari . . . . .	8
2.3	Leggi empiriche . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Dinamica delle Galassie a Spirale</b>	<b>10</b>
3.1	Bulge e Alone . . . . .	10
3.2	Orbite nel disco . . . . .	12
3.3	Problema dell'avvolgimento . . . . .	13
3.4	Spirale . . . . .	14
3.5	Legge di Tully-Fisher . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Appendice</b>	<b>16</b>
4.1	Momenti delle velocità . . . . .	16
4.2	Potenziale del disco . . . . .	16
	<b>Bibliografia</b>	<b>17</b>

# 1 Introduzione

## 1.1 Caratteristiche delle Galassie

Le galassie sono sistemi legati gravitazionalmente, molto estesi e formati da componenti di varia natura: stelle, gas, polveri e materia oscura. Queste componenti sono presenti in quantità variabile di galassia in galassia.

Solitamente il numero di stelle assume valori compresi tra  $10^6 \leq N_* \leq 10^{12}$  con distribuzioni di velocità  $50 \text{ km/s} \leq \sigma \leq 400 \text{ km/s}$ . Anche le dimensioni delle galassie sono molto variegata, con raggi compresi tra:  $50 \text{ pc} \leq R_G \leq 50 \text{ kpc}$ .

È importante menzionare che attorno a tutte le galassie conosciute si trova un alone di materia oscura, il quale ha avuto un ruolo di grande importanza nella formazione delle galassie e tuttora ha effetti gravitazionali non trascurabili.

## 1.2 Classificazione di Hubble

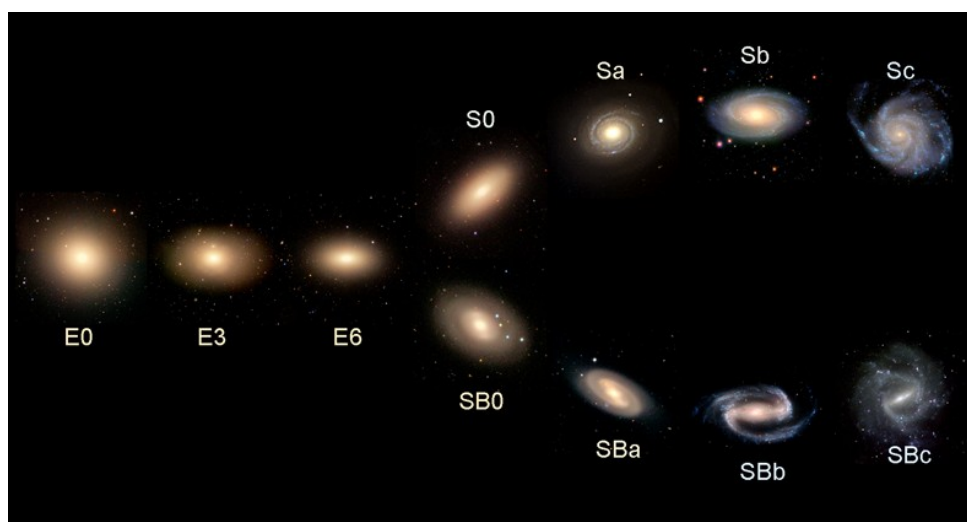


Figura 1: Diagramma della classificazione di Hubble.

Le componenti di cui sono fatte le galassie e le varie forme e strutture che possono assumere (per cause legate non solo alle componenti ma anche alla formazione ed evoluzione nel tempo) sono molte e questo comporta che le galassie non siano facilmente incasellabili in categorie ben definite. Ciò detto, la cosiddetta classificazione di Hubble è probabilmente uno dei metodi più utili e più usati per distinguere le galassie su basi principalmente morfologiche.

Le galassie vengono distinte in quattro macro-categorie: galassie ellittiche, galassie a spirale, galassie lenticolari e galassie irregolari. Ognuna di queste può poi essere ulteriormente suddivisa in varie sottoclassi dipendenti dalle caratteristiche fondamentali della categoria a cui appartengono.

**Le galassie ellittiche**, come dice il nome, hanno forma ellissoidale e quando proiettate mostrano isofote, ovvero contorni di luminosità superficiale costante di forma ellittica; hanno inoltre una quantità relativamente scarsa di gas (gas caldo rarefatto e

quasi totale assenza di gas freddo) e polvere. Le stelle che le formano sono principalmente vecchie (e quindi rosse) e ad alta metallicità. Si suppone che in queste galassie le stelle si siano formate molto presto e in grande quantità e che questo abbia consumato la maggior parte del gas presente al tempo della formazione delle galassie stesse, scaldando poi il poco gas rimanente.

Vengono etichettate in base alla loro ellitticità  $\varepsilon = 1 - \frac{b}{a}$ , dove  $a$  e  $b$  sono gli assi della loro proiezione ellittica (con  $b < a$ ), e non mostrano ellitticità superiori a 0.7 per questioni di stabilità del sistema (E0, E1, ..., E6, E7).

**Le galassie a spirale**, anche dette a disco, hanno una struttura più complessa che consta di un bulge centrale (con proprietà simili ad una galassia ellittica) che può presentarsi in forma di ellissoide o di barra, di un disco con molto gas (anche freddo), molta polvere e stelle di popolazione I e di un alone composto da materia molto rarefatta che avvolge tutta la galassia. Nel disco possono essere presenti bracci a spirale, dove può avvenire formazione stellare, motivo per cui nelle galassie a spirale si osservano anche stelle giovani blu. Queste galassie vengono etichettate in base all'avvolgimento dei bracci di spirale e al loro rapporto con l'estensione del bulge (Sa, Sb, Sc). Le Sa hanno bracci strettamente avvolti e un bulge molto grande, mentre Sb ed Sc presentano bulge sempre più piccoli e bracci meno avvolti. Possono poi essere ulteriormente distinte in base alla presenza o meno di un bulge a forma di barra (SBa, SBb, SBc).

**Le galassie lenticolari** sono galassie con proprietà comuni sia alle galassie ellittiche sia alle galassie a spirale: la popolazione stellare e il contenuto di gas sono simili a quelli delle galassie ellittiche, ma presentano un disco (seppur senza bracci) che rimanda alle galassie a spirale. Vengono etichettate come S0 (Fig. 2(a)).

**Le galassie irregolari**, infine, sono una categoria molto ampia e occupata principalmente da galassie solitamente di piccole dimensioni e che non rientrano in nessuna delle categorie precedenti. Alcune di esse sono semplicemente galassie a spirale o ellittiche che sono state distorte a causa di incontri con altre galassie ma la maggior parte di questi corpi sono sistemi ricchi di gas e a bassa luminosità. Hanno caratteristiche simili alle galassie a spirale, tanto che molte delle irregolari presentano una barra centrale.

Anche queste galassie possono essere suddivise in due sottoclassi: Irr I e Irr II o, alternativamente, Im e IBm a seconda che siano barrate (Irr II/IBm) o meno (Irr I/Im) (Fig. 2(b)).

### 1.3 Problema degli N-corpi e $t_{2b}$

Per trattare la dinamica delle galassie si può, in prima approssimazione, prendere in considerazione quella delle stelle che le compongono.

Si considera il moto delle stelle come dominato solamente dalle interazioni gravitazionali reciproche. Inoltre, si può assumere l'assenza di collisioni geometriche poiché, supponendo una distribuzione uniforme di stelle in una galassia sferica, dovrà valere che

$$N_* \lambda_g \sigma_* = \frac{4\pi}{3} R_G^3 \quad (1)$$



(a) NGC 6861, galassia lenticolare S0. Immagini di ESA/Hubble & NASA, riconoscimento: J. Barrington. (b) NGC 7292, galassia irregolare Irr. Immagine di ESA/Hubble & NASA, C. Kilpatrick.

Figura 2: Esempi di galassie lenticolari e irregolari.

con  $\sigma_*$  sezione d'urto e da cui si può facilmente ricavare il libero cammino medio  $\lambda_g$ . Andando a confrontare questo valore con la velocità tipica delle stelle si ottengono tempi tra collisioni superiori all'età dell'universo, il che rende tali collisioni sufficientemente improbabili da essere trascurabili e permette quindi di trattare le stelle che compongono il sistema come masse puntiformi.

Questo rende trattabile il problema come un problema a N-corpi per un sistema autogravitante.

Il problema degli N-corpi non ha però soluzioni generali conosciute. Fortunatamente, il grande numero di stelle del sistema permette di semplificare il problema passando da una descrizione nel discreto a una nel continuo: considerando la galassia non più come composta da tante stelle distinte ma come un unico corpo omogeneo, si può introdurre il concetto di tempo di rilassamento a due corpi  $t_{2b}$ .

Il tempo di rilassamento a due corpi è un tempo scala che permette di capire se un sistema sia collisionale ( $t > t_{2b}$ ) o non collisionale ( $t < t_{2b}$ ) in base al tempo di vita  $t$  del sistema. Nello specifico, il  $t_{2b}$  è una stima del tempo necessario al sistema per causare una variazione di energia su un suo elemento confrontabile con l'energia iniziale di quest'ultimo.

Il  $t_{2b}$  può essere stimato tramite un approccio cinetico al problema: presa una stella di test che entra in un sistema di  $N - 1$  stelle, se ne considerano le singole interazioni come problemi dei 2 corpi. Così facendo, si otterranno  $N - 1$  orbite da cui si potrà ricavare una soluzione asintotica del problema a N-corpi.

Scegliendo un sistema di riferimento inerziale  $S_0$  si studia, quindi, l'interazione gravitazionale tra una stella di test con massa  $m_t$  e velocità iniziale  $\vec{v}_t$  e una stella di campo con massa  $m_f$  e velocità iniziale  $\vec{v}_f$ . L'energia totale del sistema sarà determinata dalle

energie cinetiche delle due stelle e dall'energia potenziale gravitazionale tra le due:

$$E = \frac{m_t \|\vec{v}_t(t)\|^2}{2} + \frac{m_f \|\vec{v}_f(t)\|^2}{2} + U(r(t)) \quad (2)$$

dove con  $r(t)$  si intende il modulo della distanza relativa tra le due stelle:

$$\vec{r}(t) = \vec{x}_t(t) - \vec{x}_f(t) \quad (3)$$

Se si considerassero le stelle all'inizio e al termine dell'interazione come infinitamente distanti, l'energia potenziale in quei casi risulterebbe nulla  $U(\infty) = 0$  e quindi, dato che l'energia totale si conserva ( $E_1 = E_2$ ), si avrebbe che

$$\frac{m_t \|\vec{v}_{t1}\|^2}{2} + \frac{m_f \|\vec{v}_{f1}\|^2}{2} = \frac{m_t \|\vec{v}_{t2}\|^2}{2} + \frac{m_f \|\vec{v}_{f2}\|^2}{2} \quad (4)$$

A questo punto si può studiare il problema rispetto ad un sistema di riferimento solidale con la stella di campo, così che  $v_f = 0$  e si consideri solo l'orbita relativa tra le due stelle. L'orbita relativa può essere descritta da un'equazione differenziale:

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -\nabla U \quad (5)$$

dove si è usata la massa ridotta  $\mu = \frac{m_t m_f}{m_t + m_f}$ .  $\ddot{\vec{r}}$  e  $\dot{\vec{r}}$  sono rispettivamente accelerazione relativa  $\vec{a}$  e velocità relativa  $\vec{v}$ . Di conseguenza l'energia relativa sarà:

$$E_r = \frac{\mu}{2} \|\vec{v}\|^2 + U \quad (6)$$

A questo punto, applicando le stesse condizioni iniziali e finali usate in  $S_0$  ( $U(\infty) = 0$ ), si ricava che la velocità relativa iniziale e finale sono uguali:

$$\frac{\mu}{2} \|\vec{v}_1\|^2 = \frac{\mu}{2} \|\vec{v}_2\|^2 \implies \|\vec{v}_1\| = \|\vec{v}_2\| \quad (7)$$

Cambia però la direzione del vettore: se si considera la velocità relativa iniziale come  $\vec{v}_1 = (v_{1//} = v_1, v_{1\perp} = 0)$ , dopo l'interazione la stella di test sarà più lenta lungo la direzione iniziale ( $v_{2//} < v_{1//}$ ) e più veloce lungo la direzione perpendicolare alla velocità iniziale ( $v_{2\perp} \neq 0$ ) (Figura 3). Unendo le interazioni con tutte le stelle di campo, ad un certo punto la variazione di velocità della stella di test lungo la direzione perpendicolare sarà confrontabile con la sua velocità iniziale. Il tempo di rilassamento a due corpi può quindi essere definito come il tempo scala necessario perché ciò avvenga.

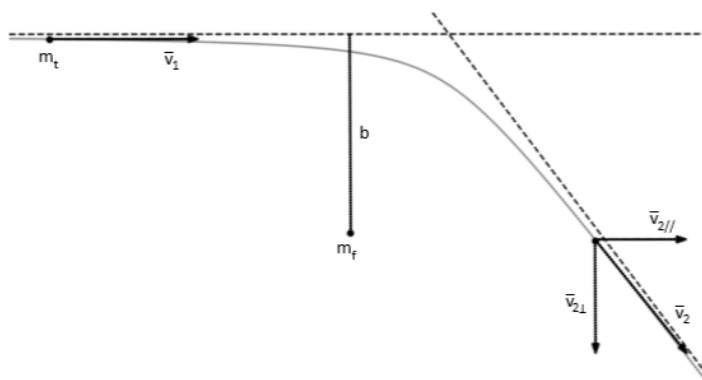


Figura 3: Traiettoria dell'orbita relativa.

Per studiare l'effetto di un numero molto grande di interazioni si sfrutta la funzione di distribuzione assumendo un campo di stelle con distribuzione spaziale omogenea (densità  $n_f$  costante) e distribuzione di velocità isotropa ( $4\pi \int_0^\infty g(v_f) v_f^2 dv_f = 1$ ), così da avere  $f(\vec{x}_f, \vec{v}_f) = n_f g(v_f)$ . A questo punto, si può introdurre il coefficiente di diffusione, che per una proprietà orbitale qualsiasi  $P$  ne quantifica il tasso di variazione nel tempo e si può esprimere come segue:

$$D(P) \equiv 2\pi n_f \int_{\mathbb{R}^3} g(v_f) \|\vec{v}_t - \vec{v}_f\| d^3\vec{v}_f \int_0^\infty \langle P \rangle b db \quad (8)$$

dove con  $\langle P \rangle$  si intende la media angolare della proprietà  $P$  e con  $b$  il parametro di impatto. Da questo segue che il tempo di rilassamento sarà definibile come:

$$t_{2b} = \frac{\|\vec{v}_t\|^2}{D(\|\Delta\vec{v}_{t\perp}\|^2)} \quad (9)$$

Il calcolo di  $D(\|\Delta\vec{v}_{t\perp}\|^2)$  può essere semplificato con l'utilizzo dell'approssimazione impulsiva. Il calcolo esatto dovrebbe considerare un'interazione di durata teoricamente infinita e con una forza di gravità che varia nel tempo mentre, con l'approssimazione impulsiva lo si riduce ad un'interazione limitata nel tempo e con una forza costante. In particolare, si definiscono l'intervallo di tempo  $\Delta t$  e la forza  $\vec{F}_\perp$  come:

$$\Delta t = \frac{2b}{\|\vec{v}\|} \quad \|\vec{F}_\perp\| = \frac{Gm_t m_f}{b^2} \quad (10)$$

Da cui si può scrivere l'impulso relativo:

$$\mu \|\Delta\vec{v}_\perp\| \sim \frac{2Gm_t m_f}{b \|\vec{v}\|} \quad \|\Delta\vec{v}_{t\perp}\|^2 = \frac{\mu^2}{m_t^2} \|\Delta\vec{v}_\perp\|^2 \quad (11)$$

$$\|\Delta\vec{v}_{t\perp}\|^2 \sim \frac{4G^2 m_f^2}{b^2 \|\vec{v}\|^2} \quad (12)$$

Quindi, il coefficiente di diffusione sarà:

$$D(\|\Delta\vec{v}_{t\perp}\|^2) \sim 8\pi n_f G^2 m_f^2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g(v_f)}{\|\vec{v}_t - \vec{v}_f\|} d^3\vec{v}_f \int_0^\infty \frac{db}{b} \quad (13)$$

Di per sé l'integrale in  $db$  diverge ad entrambi gli estremi, perciò si assume un limite superiore e un limite inferiore e con queste condizioni si ha:

$$\int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{db}{b} = \ln \left( \frac{b_{max}}{b_{min}} \right) \equiv \ln \Lambda \quad (14)$$

definito come logaritmo di Coulomb.

L'integrale in  $d^3\vec{v}_f$  è invece definito come il potenziale di Rosenbluth:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{g(v_f)}{\|\vec{v}_t - \vec{v}_f\|} d^3\vec{v}_f \equiv \Psi(\|\vec{v}_t\|) \quad (15)$$

Con queste premesse il tempo di rilassamento a due corpi può essere espresso come segue:

$$t_{2b} = \frac{||\vec{v}_t||^2}{8\pi G^2 m_f^2 n_f \ln \Lambda \Psi(||\vec{v}_t||)} \quad (16)$$

Introducendo il concetto di tempo dinamico, ovvero il tempo impiegato da una stella ad attraversare la galassia,

$$t_{dyn} \equiv \frac{2R_G}{\sigma} \quad (17)$$

con  $\sigma$  distribuzione di velocità delle stelle e  $R_G$  raggio della galassia, si può ottenere un'ulteriore approssimazione per il  $t_{2b}$ .

Considerando  $||\vec{v}_t|| = ||\vec{v}_f|| = \sigma$  e dato che il potenziale di Rosenbluth è inversamente proporzionale a  $||\vec{v}_t||$ , si potrà riscrivere  $t_{2b}$  come segue:

$$t_{2b} = \frac{\sigma^3}{8\pi G^2 m_f^2 n \ln(\Lambda)} \quad (18)$$

e, tramite il teorema del viriale,

$$2T = -U \quad \implies \quad \sigma^2 = \frac{GM_G}{R_G} \quad (19)$$

dove con  $M_G$  si intende la massa totale della galassia; confrontandolo con il  $t_{dyn}$  si otterrà:

$$\frac{t_{2b}}{t_{dyn}} = \frac{0.1 N_*}{\ln(N_*)} \quad (20)$$

con  $N_*$  numero di stelle della galassia.

Andando a calcolare per un valore tipico di  $N_*$ :

$$N_* = 10^{11} \quad \implies \quad \frac{t_{2b}}{t_{dyn}} \approx 10^8 \quad (21)$$

Inoltre, per valori medi di  $\sigma$  e  $R_G$  anche il tempo dinamico è dell'ordine di  $t_{dyn} \approx 10^8 \text{ yr}$ , da cui si avrà  $t_{2b} \approx 10^{16} \text{ yr}$ , che è molto maggiore dell'età dell'universo  $t_H \approx 10^{10} \text{ yr}$ .

Questo risultato mostra che le galassie possono essere considerate tranquillamente come sistemi non collisionali, al contrario di sistemi più piccoli come gli ammassi globulari e gli ammassi aperti, dove i contributi gravitazionali degli urti non possono più essere trascurati.

## 2 Dinamica delle Galassie Ellittiche

### 2.1 Morfologia

Le galassie ellittiche sono sistemi considerati dinamicamente caldi dove le stelle hanno orbite prevalentemente caotiche. Sebbene la struttura quasi sferica possa far pensare ad un sistema termalizzato e le cui deviazioni da una sfera perfetta siano dovute unicamente alla rotazione del sistema stesso, bisogna ricordare che, come mostrato dalla stima del tempo di rilassamento a due corpi, si tratta di sistemi non collisionali e che, di conseguenza, non

hanno ancora avuto abbastanza tempo per mitigare le anisotropie termiche. Infatti, nelle galassie ellittiche, il tensore di dispersione delle velocità risulta anisotropo (App. 4.1). Questo comporta che, mediamente, le velocità delle stelle siano diverse a seconda della linea di vista: lungo l'asse maggiore la distribuzione di velocità sarà maggiore e quindi il sistema dinamicamente più caldo, mentre lungo l'asse minore la distribuzione di velocità sarà minore e quindi il sistema più freddo.

È importante sottolineare che, al contrario delle galassie a spirale, dove la presenza del disco rende più facile capirne l'inclinazione rispetto a noi, le galassie ellittiche non hanno punti di riferimento che ci permettano di distinguere quale sia l'effettiva forma delle galassie osservate. Infatti, anche le ellitticità che gli vengono assegnate sono in realtà quelle delle loro proiezioni sulla sfera celeste, in particolare delle loro isofote; quindi, è molto probabile che le ellitticità assegnategli non siano coerenti con le loro forme effettive. Questo causa complicazioni nello studio della dinamica di questi sistemi perché rende più difficile collegare i moti stellari alla morfologia della galassia in cui si trovano. Inoltre, le isofote osservate non sono sempre coassiali il che implica che alcune galassie ellittiche siano ellissoidi triassiali, complicando ulteriormente la trattazione.

A differenza delle galassie a disco, le galassie ellittiche non hanno neanche un bordo facilmente delineabile, infatti, viene definito un raggio effettivo  $R_e$  legato al profilo di luminosità superficiale della galassia:

$$L(R_e) \equiv \frac{L_{tot}}{2} \quad (22)$$

dove  $R_e$  è definito come il raggio che contiene la metà della luminosità totale della galassia.

Questa definizione è utile in quanto tutte le galassie ellittiche hanno un profilo di luminosità superficiale che segue la legge di Sérsic:

$$I(R) = I(0) e^{-b\left(\frac{R}{R_e}\right)^{\frac{1}{n}}} \quad (23)$$

dove  $I(R)$  e  $I(0)$  sono rispettivamente la luminosità superficiale al raggio  $R$  e al centro della galassia. I parametri  $b$  e  $n$  possono assumere diversi valori a seconda della galassia a cui è applicato il profilo ma, solitamente, valgono  $b \approx 7.67$  e  $n \approx 4$ . Applicando questi due valori al profilo di Sérsic si ottiene la meno generale legge di de Vaucouleurs:

$$I(R) = I(0) e^{-7.67\left(\frac{R}{R_e}\right)^{\frac{1}{4}}} \quad (24)$$

spesso espressa in funzione di  $I(R_e)$ :

$$I(R_e) = I(0) e^{-7.67} \implies I(R) = I(R_e) e^{-7.67\left[\left(\frac{R}{R_e}\right)^{\frac{1}{4}} - 1\right]} \quad (25)$$



Figura 4: NGC 4621, galassia ellittica E5. Immagine di ESA/Hubble & NASA, P. Cote.

## 2.2 Orbite stellari

Per quanto le stelle non seguano orbite ordinate ma caotiche, sono tutte soggette al potenziale gravitazionale causato dalla galassia in cui si trovano e la struttura ellissoidale del sistema permette di applicare un teorema di grande importanza, ovvero il terzo teorema di Newton.

Questo teorema afferma che, dato un guscio ellissoidale compreso tra due superfici ellissoidali  $S_1$  e  $S_2$  (con  $S_1 < S_2$ ) e omogeneo (ovvero con densità  $\rho$  costante), il campo gravitazionale generato nello spazio compreso dalla superficie  $S_1$  è nullo.

Quindi, dato che un guscio ellissoidale eterogeneo può essere considerato come l'unione di tanti gusci omogenei, scelto un punto arbitrario in un ellissoide, il campo gravitazionale che agisce su di esso è unicamente quello dovuto all'ellissoide contenuto dalla superficie a cui appartiene il punto stesso.

Questo permette di semplificare molto lo studio del potenziale che governa il moto delle stelle, ma nonostante ciò è molto comune cercare di approssimare il potenziale ad un potenziale a simmetria sferica per semplificare ulteriormente la trattazione. È quindi importante sottolineare che questo tipo di approssimazione può essere affidabile solo nel caso delle galassie ellittiche dalla forma più facilmente approssimabile ad una sfera (solitamente è considerato valido per E0, E1 ed E2), ma si discosta molto dalle osservazioni se applicato a galassie con ellitticità superiore.

In ogni caso, la forma del potenziale è fortemente dipendente dalla distribuzione di materia nella galassia. Per esempio, anche nel caso più semplice di un potenziale Kepleriano si avrà:

$$\Phi(R) = -\frac{GM(R)}{R} \quad M(R) = \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r) dr \quad (26)$$

che dipende dalla distribuzione di densità.

Un modo di ricavare modelli per la densità è quello di estrapolarne l'andamento tramite i profili di luminosità, tenendo a mente che l'immagine osservata renderà in primo luogo solo una densità  $\Sigma(R)$  integrata lungo la linea di vista (qui trattata come asse  $z$  e considerando di conseguenza la proiezione della galassia come se fosse sul piano  $xy$ ):

$$\Sigma(R_g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(r) dz \quad (27)$$

dove con  $R_g$  si intende il raggio della galassia sul piano  $xy$ . In generale, per un raggio  $R$  e per questioni di simmetria dovute all'approssimazione sferica del sistema, si può riscrivere come

$$\Sigma(R) = 2 \int_0^{\infty} \rho(\sqrt{R^2 + z^2}) dz \quad (28)$$

Si può togliere la dipendenza esplicita da  $z$  applicando una sostituzione

$$r = \sqrt{R^2 + z^2} \quad \implies \quad z = \sqrt{r^2 - R^2} \quad , \quad dz = \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - R^2}} \quad (29)$$

e, di conseguenza, si avrà:

$$\Sigma(R) = 2 \int_R^{\infty} \frac{\rho(r)r}{\sqrt{r^2 - R^2}} dr \quad (30)$$

I possibili modelli usati per descrivere l'andamento della densità  $\rho(r)$  dovranno quindi prendere in considerazione le alterazioni al profilo di densità legate alla proiezione della galassia sul piano dell'immagine.

### 2.3 Leggi empiriche

Alle galassie ellittiche sono applicabili alcune leggi empiriche di grande importanza: la legge di Faber-Jackson, la legge di Kormendy e la legge  $D_n - \sigma$ .

**La legge di Faber-Jackson:** lega la luminosità assoluta  $L$  di una galassia alla sua dispersione di velocità osservata  $\sigma_{obs}$ :

$$L \propto \sigma_{obs}^\alpha \quad \text{con} \quad \alpha \simeq 4 \quad (31)$$

(La costante di proporzionalità di questa relazione dipende dalla banda di osservazione.)

Questo permette di stimare la distanza  $d$  di galassie ellittiche confrontando la dispersione di velocità e la luminosità osservata  $l$ , dato che vale la relazione

$$l = \frac{L}{4\pi d^2} \quad (32)$$

**La legge di Kormendy:** mette in relazione la luminosità assoluta  $L$  e il raggio effettivo  $R_e$  di una galassia:

$$L \propto R_e^\beta \quad \text{con} \quad \beta \lesssim 1 \quad (33)$$

**La legge  $D_n - \sigma$ :** mette in relazione la dispersione di velocità  $\sigma$  con un diametro  $D_n$  definito come il diametro di una sfera contenente una luminosità superficiale  $\Sigma = 20.75 \text{ mag/arcsec}^2$ .

$$D_n \propto \sigma^\gamma \quad \text{con} \quad \gamma \simeq \frac{4}{3} \quad (34)$$

Queste tre relazioni non sono esatte ma, anzi, hanno tutte una dispersione intrinseca più o meno grande. Ciò è dovuto all'esistenza del cosiddetto piano fondamentale. Le galassie ellittiche si troverebbero, infatti, distribuite lungo un piano logaritmico definito come segue:

$$\log R_e = \alpha \log \sigma + \beta \log I_e + \gamma \quad (35)$$

dove  $R_e$  è il raggio effettivo,  $I_e$  è la luminosità superficiale al raggio effettivo e  $\sigma$  la dispersione di velocità della galassia. Infine  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  sono coefficienti debolmente dipendenti dalla banda di osservazione. Il piano fondamentale permette di giustificare le dispersioni intrinseche delle tre relazioni sopra citate in quanto non sarebbero altro che proiezioni del piano fondamentale stesso lungo i tre piani  $L - \sigma$ ,  $L - R_e$  e  $R_e - \sigma$ . Detto ciò, anche il piano fondamentale non è di per sé una distribuzione di galassie perfettamente piatta, in quanto ha una dispersione intrinseca seppur minore del 15%, che è meno di tutte le tre relazioni che lo descrivono.

**Massa dei buchi neri supermassicci:** è anche importante citare l'esistenza di una relazione empirica che lega la massa totale di una galassia ellittica alla massa del buco nero supermassiccio che si trova al suo centro:

$$M_{SMBH} \approx 10^{-3} M_g \quad (36)$$

### 3 Dinamica delle Galassie a Spirale

#### 3.1 Bulge e Alone



(a) NGC 2008, galassia a spirale Sc. Immagine di ESA/Hubble & NASA, A. Bellini. (b) UGC 12158, galassia a spirale barrata SBb. Immagine di ESA/Hubble & NASA.

Figura 5: Due esempi di galassie a spirale.

Il bulge occupa la zona centrale delle galassie a spirale e, come menzionato nella sezione 1.2, può assumere sia una forma ellittica sia una forma allungata a barra. Questa struttura presenta proprietà molto simili a quelle delle galassie ellittiche: al contrario del disco, nel bulge c'è quasi totale assenza di gas freddo e le stelle sono tendenzialmente vecchie e quindi rosse. Anche per quanto riguarda le orbite delle stelle, nel bulge i moti sono paragonabili a quelli caotici osservati nelle galassie ellittiche. Rimane valida anche la relazione riguardante la massa del buco nero supermassiccio al centro delle galassie (Eq. 36) con la differenza che in questo caso, al posto della massa di tutta la galassia, deve essere presa in considerazione solo quella del bulge:

$$M_{SMBH} \approx 10^{-3} M_{bulge} \quad (37)$$

Il numero di galassie con un bulge barrato è molto alto, circa il 50%, e questa struttura è un perfetto esempio di sistema stellare triassiale. Solitamente, la barra assume una forma molto piatta, probabilmente di spessore simile a quello del disco, in quanto è particolarmente raro osservare barre in galassie edge-on. Per quanto riguarda gli assi sul piano del

disco si hanno rapporti tra l'asse maggiore e quello minore che possono andare da 2.5 : 1 fino a 5 : 1, rendendo così la barra una struttura molto lunga e sottile. Inoltre, dato che le barre osservate sono solitamente dritte, ci si aspetta che la loro rotazione attorno al centro galattico sia rigida poiché, in caso contrario, la forma a barra andrebbe persa nel tempo. Al contrario dei bulge ellittici, la dinamica delle barre, per via del loro spessore molto sottile, non può essere studiata con gli stessi modelli delle galassie ellittiche ma vanno applicati modelli più piatti.

Le regioni più esterne delle galassie a spirale sono invece occupate dall'alone, anche il quale, come il bulge, ha componenti simili a quelle delle galassie ellittiche. Sebbene sia tendenzialmente poco denso, la maggior parte della sua massa si trova negli ammassi globulari: ammassi di stelle molto numerosi ( $N_* \approx 10^{5\sim 6}$ ) e composti da stelle vecchie. Va sottolineato che gli ammassi globulari, per via del numero di stelle ovviamente molto minore di quello di una tipica galassia (benché comunque confrontabile con quello delle galassie irregolari più piccole), hanno un tempo di rilassamento a due corpi paragonabile alla loro età e, di conseguenza, non possono essere considerati totalmente non collisionali:

$$t_{dyn} \approx 10^6 \text{ yr} \quad , \quad t_{2b} \approx 10^9 \text{ yr} \quad (38)$$

Infatti, è possibile osservare ammassi globulari che hanno già iniziato a perdere stelle a causa di urti a distanza, cosa che non avverrebbe in sistemi non collisionali.

Questo processo di perdita stellare è strettamente legato al fenomeno della catastrofe gravotermica. Gli ammassi globulari, così come le galassie, si possono considerare come sistemi inizialmente in equilibrio e autogravitanti e sono quindi considerabili virializzati. Se un sistema è virializzato deve valere la seguente relazione tra energia cinetica  $T$  e potenziale  $U$  del sistema:

$$T = -\frac{U}{2} \quad (39)$$

Dato che, in generale, vale che l'energia totale di un sistema è

$$E = T + U \quad (40)$$

si possono confrontare queste energie con quelle necessarie affinché un sistema sia virializzato. Come mostrato in figura (Fig. 6) solo sistemi con energia totale negativa possono raggiungere l'equilibrio e quindi essere virializzati (solo rette con  $E < 0$  intersecano la retta  $T = \frac{|U|}{2}$ ). Inoltre, il fatto che la retta  $T = \frac{|U|}{2}$  non sia parallela a quelle dell'energia non è da trascurare; è, infatti, ciò che causa il fenomeno della catastrofe gravotermica. Dato che l'energia totale si conserva all'interno di un sistema, se questa energia venisse alterata dalla perdita di un componente

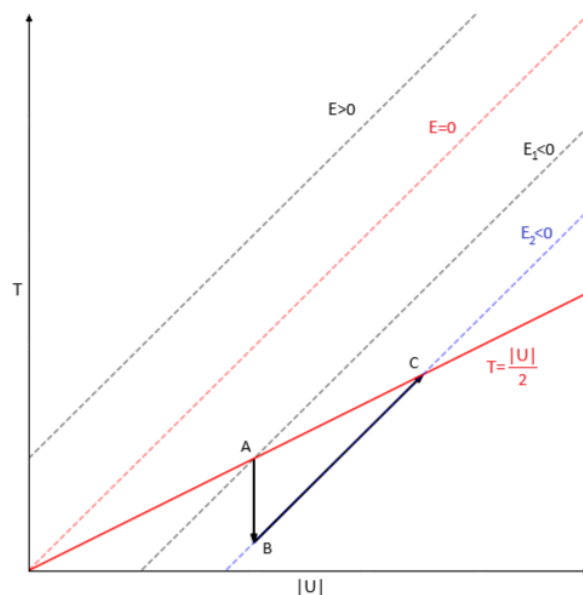


Figura 6: Piano del Viriale. È evidente che se un sistema che si trova nel punto A perde energia cinetica e arriva ad un punto B, per tornare all'equilibrio dovrà compensare la perdita di energia totale posizionandosi in C.

del sistema, cambierebbero anche i valori dell'energia cinetica  $T$  e potenziale  $U$  necessari per mantenere il sistema all'equilibrio.

È infatti questo che succede negli ammassi globulari: dato che è passato abbastanza tempo dalla formazione del sistema da non poterlo più considerare un sistema non collisionale, i contributi energetici dovuti agli urti gravitazionali iniziano ad essere importanti a livello dinamico e alcune stelle riescono ad ottenere abbastanza energia da fuggire dall'ammasso, facendo così perdere al sistema parte della sua energia cinetica  $T$ . A questo punto, se il sistema torna all'equilibrio, si ritroverà con una maggiore energia cinetica totale (sarà quindi dinamicamente più caldo) ma al prezzo dell'energia potenziale del sistema (sarà quindi più contratto).

### 3.2 Orbite nel disco

Il disco delle galassie a spirale ha solitamente uno spessore molto sottile se paragonato alla sua espansione, questo perché le stelle che lo compongono hanno orbite che deviano di poco dal piano galattico. Ciò ci permette di trattarlo quasi come un disco piatto quando si cerca di ricavare la forma del potenziale gravitazionale che provoca. Questa approssimazione, unita al fatto che il disco è prevalentemente simmetrico rispetto all'asse di rotazione della galassia, permette di trattare le orbite delle stelle che lo compongono come sotto l'influenza di un potenziale  $\Phi$  indipendente dall'angolo azimutale  $\phi$  e dovuto ad una distribuzione di materia piatta e descritta dalla densità di superficie  $\Sigma(R)$ . Definiti  $\vec{x}'(R', \phi', 0)$  e  $\vec{x}(R, \phi, z)$  rispettivamente un punto del disco e un qualsiasi altro punto, il potenziale nel punto  $\vec{x}$  può essere espresso come segue:

$$\Phi(\vec{x}) = -G \int_0^\infty \Sigma(R') R' dR' \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (41)$$

Dato che si stanno considerando stelle appartenenti al disco ( $z = 0$ ), si può semplificare la trattazione introducendo un potenziale effettivo:

$$\Phi_{eff}(R, J) = \Phi(R) + \frac{J^2}{2R^2} \quad (42)$$

dove con  $J$  si indica il momento angolare  $J = R^2\Omega(R)$ .

Questo potenziale effettivo ha un minimo per un raggio  $R_0$  e, di conseguenza, le energie

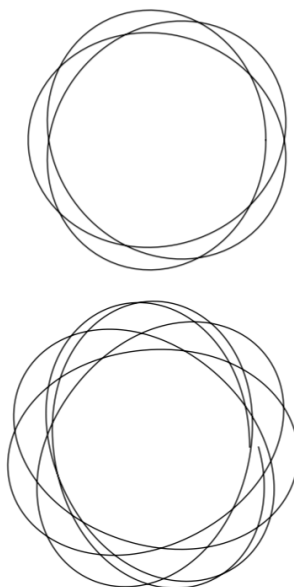


Figura 7: Due orbite a rosetta. L'orbita più in alto è chiusa (il rapporto tra le frequenze è razionale) mentre quella sotto è aperta (il rapporto è irrazionale). In entrambi i casi le orbite sono esagerate per fini di lettura dell'immagine.

$E$  possibili per orbite legate dovranno essere comprese tra  $E_0 \leq E < 0$ , con

$$E_0 = \Phi_{eff}(R_0) = \Phi(R_0) + \frac{R_0^2 \Omega^2(R_0)}{2} \quad (43)$$

Stelle con energie pari a  $E_0$  avranno orbite perfettamente circolari ma se dovessero avere energie  $E > E_0$  allora si troverebbero a seguire orbite che oscillano tra due raggi:  $R_{in} \leq R_0 \leq R_{out}$ . Le orbite di stelle che seguono un potenziale con questa forma possono essere descritte tramite orbite epicycliche, le quali si basano su due frequenze: una frequenza azimutale  $\Omega_a = \frac{\Delta\phi}{T}$  e una frequenza radiale  $\Omega_r = \frac{2\pi}{T}$ .

Orbite di questo tipo hanno una forma cosiddetta a rosetta e risultano chiuse se il rapporto tra le due frequenze è razionale (Fig. 7). Nella maggior parte dei casi reali il rapporto è irrazionale e quindi le orbite sono solitamente aperte. Ciò detto, orbite aperte osservate in un sistema di riferimento in rotazione potrebbero chiudersi comunque. Considerando un sistema di riferimento in rotazione con velocità angolare  $\Omega_p$  si avrà che, in un periodo, l'angolo azimutale varierà di

$$\Delta\phi_p = \Delta\phi - \Omega_p T \quad (44)$$

Considerando  $\Delta\phi_p = \frac{2n\pi}{m}$  si potrà esprimere la velocità angolare del sistema di riferimento come:

$$\Omega_p = \Omega_a - \frac{\Omega_r n}{m} \quad (45)$$

Poiché le stelle nel disco hanno orbite quasi circolari, le due frequenze  $\Omega_a$  e  $\Omega_r$  possono essere approximate:  $\Omega_a = \Omega(R)$ , ovvero la frequenza circolare di un punto con orbita di raggio  $R_0$ , e  $\Omega_r = \kappa$ , ovvero la frequenza con cui la stella oscilla attorno al raggio di equilibrio, ottenendo così:

$$\Omega_p = \Omega - \frac{\kappa n}{m} \quad (46)$$

In particolare, va sottolineata l'importanza di quest'ultima espressione per  $n = 1$  e  $m = 2$ . Infatti, per questi valori,  $\Omega_p$  rimane particolarmente stabile ed è di grande aiuto nella risoluzione del problema dell'avvolgimento dei bracci a spirale delle galassie.

### 3.3 Problema dell'avvolgimento

Le osservazioni mostrano che le velocità  $\vec{v}$  delle stelle nei dischi delle galassie sono più o meno costanti rispetto alla distanza  $R$  dal centro galattico, quindi, dato che stelle più lontane dal centro hanno la stessa velocità di quelle più vicine, la maggiore distanza che le prime devono percorrere per compiere un'orbita comporta che il disco abbia una rotazione differenziale, ovvero una velocità angolare  $\vec{\Omega}$  non indipendente dal raggio di rotazione:

$$v(R) = cost \implies \Omega(R) = \frac{v(R)}{R} \propto \frac{1}{R} \quad (47)$$

Considerando ora il materiale che compone i bracci a spirale, se dovesse rimanere sempre lo stesso, la sua posizione cambierebbe nel tempo in maniera diversa in base alla distanza dal centro di rotazione: definito  $\phi_0$  l'angolo azimutale di una stella componente dei bracci al tempo  $t = 0$ , si avrà che l'angolo azimutale di una qualsiasi stella facente parte dei bracci si evolverà nel tempo come segue:

$$\phi(t) = \phi_0 + \Omega(R)t \quad (48)$$

In un tempo molto minore dell'età delle galassie, la rotazione non rigida del disco causerebbe un avvolgimento eccessivo per poter ancora osservare i bracci; di conseguenza, le stelle che compongono i bracci a spirale non possono essere sempre le stesse e ciò vuol dire che avviene un qualche tipo di ricambio.

L'ipotesi attualmente più gettonata è quella delle onde di densità: le orbite epicycliche delle stelle nel disco non riuscirebbero a chiudersi perfettamente per via di piccole variazioni della velocità angolare  $\Omega_p$  (Eq. 46) e questo porterebbe ad una variazione delle orbite sul piano del disco formando picchi di densità periodici.

Le orbite delle stelle avranno una forma approssimativamente ellittica e si potrà associare alla direzione dell'asse maggiore un angolo azimutale  $\phi_p(R, t)$ . Questo angolo varierà nel tempo, come detto, a causa di piccole differenze tra  $\Omega_p$  e  $\Omega - \frac{1}{2}\kappa$ :

$$\frac{\partial \phi_p}{\partial t} = \Omega(R) - \frac{1}{2}\kappa(R) - \Omega_p \quad (49)$$

Se ad un tempo iniziale  $t = 0$  si considerassero le orbite con asse maggiore allineato su un angolo azimutale  $\phi_p(R, 0) = \phi_0$  (Fig. 8), la direzione dell'asse maggiore cambierà nel tempo seguendo l'espressione

$$\phi_p(R, t) = \phi_0 + \left[ \Omega(R) - \frac{1}{2}\kappa(R) - \Omega_p \right] t \quad (50)$$

Con questa relazione il fenomeno di avvolgimento è più lento di quello ottenuto dalla relazione (Eq. 48) e quindi giustifica meglio le evidenze osservative.

È però da menzionare il fatto che anche questa spiegazione non è del tutto veritiera, infatti, l'avvolgimento causato in tempi paragonabili all'età delle galassie è comunque maggiore di quello osservato e trattazioni più accurate dovrebbero prendere in considerazione anche le perturbazioni gravitazionali al potenziale causate proprio dalla maggiore densità dei bracci che si vanno a formare, le quali non sono simmetriche.

### 3.4 Spirale

L'estremità esterna dei bracci a spirale può essere sia in accordo sia in disaccordo con la rotazione del disco galattico ed è quindi possibile distinguere i bracci in due categorie: bracci "leading", le cui estremità precedono la rotazione del disco, e bracci "trailing", le cui estremità seguono la rotazione. Ogni galassia avrà solo un tipo di bracci.

Dato che i bracci a spirale sono zone a densità più alta rispetto al resto della galassia

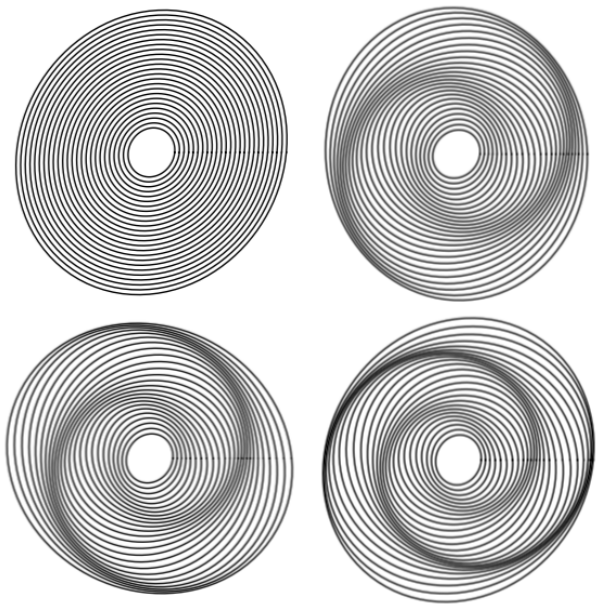


Figura 8: Il cambiamento non rigido dell'angolo azimutale dell'asse maggiore delle orbite causa figure spiraleggianti che con il tempo si avvolgono sempre di più. Il centro è stato lasciato vuoto per via della presenza del bulge nelle galassie reali.

è qui dove avviene la formazione stellare: in queste regioni le nubi di gas freddo sono abbastanza dense da poter collassare sotto la propria gravità. Questo è anche il motivo per cui la maggior parte della luce blu delle galassie a spirale, ovvero la luce emessa da stelle giovani, si osserva provenire dai bracci. Infatti, le stelle formate nei bracci, con il passare del tempo, ne usciranno, dato che le stelle e i bracci della spirale si muovono con velocità differenti.

### 3.5 Legge di Tully-Fisher

La legge di Tully-Fisher è una legge empirica applicabile alle galassie a spirale che lega la luminosità  $L$  del disco alla velocità di rotazione  $v_{HI}$  del disco di gas HI:

$$L \propto v_{HI}^4 \quad (51)$$

Similmente alla legge di Faber-Jackson, anche questa può essere usata per stimare le distanze di galassie a spirale confrontando la luminosità emessa e quella osservata (Eq. 32).

La velocità delle nubi di gas HI nel disco è molto simile a quella delle stelle ma il disco di gas si estende molto di più di quanto faccia quello stellare; osservando il disco di gas HI nelle galassie a spirale si è anche notata una caratteristica molto importante per lo studio delle galassie, sia per quanto riguarda la loro dinamica, sia per quanto riguarda la loro evoluzione e formazione: la curva di rotazione del disco di gas rimane piatta anche molto dopo la fine del disco stellare (Fig. 9). La curva di rotazione del disco delle galassie, data la distribuzione di massa osservata, dovrebbe rimanere piatta solo fino ad un certo punto, per poi calare. Questo non è però l'andamento osservato e ciò implica la presenza di una distribuzione di materia non ancora osservata e la cui influenza gravitazionale domina a grandi distanze dal centro galattico. Questa materia sarebbe la cosiddetta materia oscura, la cui esistenza è principalmente sostenuta non solo da evidenze legate alle curve di rotazione delle galassie ma anche dal confronto tra massa osservata e massa misurata tramite effetti gravitazionali quali il lensing gravitazionale.

Questo discorso potrebbe essere approfondito sotto numerosi aspetti ma fare ciò va oltre lo scopo di questo testo.

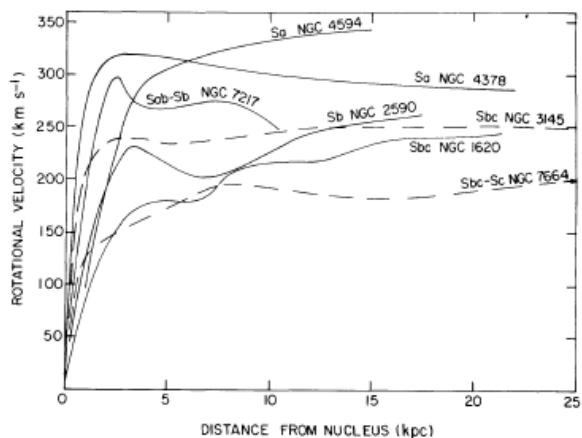


Figura 9: Curve di rotazione misurate di alcune galassie a spirale. Immagine da [5]

## 4 Appendice

### 4.1 Momenti delle velocità

Si considera la cosiddetta funzione di distribuzione  $f = f(\vec{x}, \vec{v}, t) : \mathfrak{R}^7 \rightarrow \mathfrak{R}$ .

Questa funzione racchiude tutte le informazioni dinamiche necessarie a studiare il sistema e da essa si possono estrarre dei momenti delle velocità.

Momento di ordine zero:

$$\rho(\vec{x}, t) = \int_{\mathfrak{R}^3} f d^3\vec{v} \quad (52)$$

Momenti di ordine uno:

$$\bar{v}_i(\vec{x}, t) = \frac{1}{\rho(\vec{x}, t)} \int_{\mathfrak{R}^3} v_i f d^3\vec{v} \quad i = 1, 2, 3 \quad (53)$$

Momenti di ordine due:

$$\sigma_{ij}^2(\vec{x}, t) = \frac{1}{\rho(\vec{x}, t)} \int_{\mathfrak{R}^3} (v_i - \bar{v}_i)(v_j - \bar{v}_j) f d^3\vec{v} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (54)$$

Nei quali  $\rho$  è una densità di velocità,  $v_i$  e  $\bar{v}_i$  sono le componenti delle velocità e delle velocità medie in  $\mathfrak{R}^3$  e  $\sigma_{ij}$  sono gli elementi del tensore di dispersione delle velocità  $\sigma$ .

Il tensore  $\sigma$  viene considerato isotropo solo se tutte le sue entrate sono uguali, descrivendo quindi una dispersione di velocità sferica. Nel caso di anisotropia, il volume di dispersione di velocità sarà un ellissoide. [1]

### 4.2 Potenziale del disco

Il potenziale espresso nell'equazione (Eq. 41) è valido per un punto qualsiasi  $\vec{x}(R, \phi, z)$  ma dato che nella situazione trattata  $\Phi$  è indipendente dall'angolo azimutale  $\phi$ , si può raggiungere un'espressione più specifica [4]. Si considera quindi un punto con  $\phi = 0$ , da cui si potrà dire che:

$$|\vec{x} - \vec{x}'| = R^2 + R'^2 - 2RR' \cos\phi' + z^2 = [(R + R')^2 + z^2][1 - k^2 \cos^2(\frac{1}{2}\phi')] \quad (55)$$

dove

$$k^2 \equiv \frac{4RR'}{(R + R')^2 + z^2} \quad (56)$$

A questo punto, applicando la sostituzione  $x = \cos(\frac{1}{2}\phi')$ , il potenziale può essere espresso come:

$$\Phi(R, z) = -4G \int_0^\infty \frac{\Sigma(R')R' dR'}{\sqrt{(R + R')^2 + z^2}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}} \quad (57)$$

Poiché il secondo integrale è un integrale ellittico completo e tabulato  $F(\frac{\pi}{2}, k) \equiv K(k)$ , il potenziale potrà essere riscritto in maniera compatta come:

$$\Phi(R, z) = -4G \int_0^\infty K(k) \frac{\Sigma(R')R' dR'}{\sqrt{(R + R')^2 + z^2}} \quad (58)$$

## Bibliografia

- [1] Luca Ciotti. “Introduction to Stella Dynamics.” In: *Cambridge University Press* (2021).
- [2] Luca Ciotti. “Alcune questioni matematiche riguardanti la dinamica stellare.” In: *Bollettino della Unione Matematica Italiana* (2002).
- [3] Giuseppe Bertin. “Dynamics of Galaxies.” In: *Cambridge University Press* (2000).
- [4] James Binney e Scott Tremaine. “Galactic dynamics”. In: *Princeton University Press* (1994).
- [5] Vera C. Rubin. “EXTENDED ROTATION CURVES OF HIGH-LUMINOSITY SPIRAL GALAXIES. IV. SYSTEMATIC DYNAMICAL PROPERTIES, Sa→Sc”. In: *The Astronomical Journal* (1978).
- [6] Alan Dressler. “THE  $D_n$ - $\sigma$  RELATION FOR BULGES OF DISK GALAXIES: A NEW, INDEPENDENT MEASURE OF THE HUBBLE CONSTANT”. In: *The Astronomical Journal* (1986).
- [7] Hamed Pour-Imani et al. “STRONG EVIDENCE FOR THE DENSITY-WAVE THEORY OF SPIRAL STRUCTURE IN DISK GALAXIES”. In: *The Astrophysical Journal Letters* (2016).