ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

LA SOLUZIONE FONDAMENTALE PER I SUB-LAPLACIANI SUI GRUPPI NILPOTENTI DI PASSO DUE

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Dott.
ANDREA BONFIGLIOLI

Presentata da:
ANDREA TAMAGNINI

Sessione I
Anno Accademico 2011/2012

Questa Tesi è dedicata alla mia Famiglia:
Angela e Davide.

Grazie, Andrea

Indice

Introduzione

Lo scopo di questa Tesi di Laurea è di fornire un nuovo approccio alla dimostrazione di un notevole risultato di R. Beals, B. Gaveau e P. Greiner [3] (del 1996), che fornisce una rappresentazione integrale per la soluzione fondamentale Γ dei sub-Laplaciani su *tutti i gruppi di Carnot di passo due*.

Il problema di ottenere formule esplicite per la soluzione fondamentale di operatori sub-ellittici come i sub-Laplaciani è un problema di notevole difficoltà, e solo alcune soluzioni fondamentali esplicite sono note in letteratura: ciò è ad esempio vero nel caso dei gruppi di Heisenberg (si veda Folland, [12], 1973), nei gruppi di tipo H (si veda Kaplan, [15], 1980) e, proprio utilizzando la formula integrale di cui ci occuperemo noi, Balogh e Tyson hanno ottenuto una soluzione fondamentale esplicita per un gruppo di passo 2 che non è di tipo H (si veda [1], 2002).

Con lo stesso metodo in [3], Beals, Gaveau, Greiner e Kannai hanno ottenuto soluzioni fondamentali esplicite per alcuni esempi particolari di operatori simili a sub-Laplaciani, ma non invarianti su gruppi di Lie (si veda [5], 1999). Di più, seguendo lo stesso metodo, Beals, Gaveau e Greiner hanno costruito delle parametrici per ampie classi di operatori nella forma $\sum_{j=1}^{n} X_j^2$, ove gli X_j sono campi vettoriali analitici (si vedano la serie di articoli [4], 1997). Con metodi basati sull'uso della trasformata di Fourier, si possono altresì trovare formule esplicite per la soluzione fondamentale associata ad alcune classi di operatori (Beals, [2]; Beals e Greiner [6]; Gaveau, [13]; Hulanicki, [14]).

Disporre di soluzioni fondamentali esplicite costituisce un notevole strumento per l'analisi degli operatori sub-ellittici, ad esempio per fare congetture o per fornire controesempi: nel citato articolo di Balogh e Tyson viene usata la forma esplicita di Γ per ottenere un esempio di gruppo di Carnot non polarizzabile (si veda [1] per tale nozione); nell'articolo [7] di Bonfiglioli la funzione gauge associata a tale soluzione fondamentale viene utilizzata per rispondere negativamente ad un problema posto in [10] sulla convessità delle funzioni gauge nei gruppi di Carnot di passo 2.

Passiamo ora a descrivere i contenuti principali di questa Tesi. Indichiamo con $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ le coordinate canoniche dei due strati del gruppo di Carnot di passo due $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, *)$; l'associata operazione di gruppo $*$ assume la forma seguente:

$$(x,t) * (x',t') = \begin{pmatrix} x + x' \\ t_\alpha + t'_\alpha + \langle A^\alpha x, x' \rangle \end{pmatrix} \qquad (\alpha = 1, \ldots, p),$$

ove $A^1, \ldots, A^n$ sono matrici reali antisimmetriche fornite dalle costanti di struttura dell'algebra di $\mathbb{G}$.

Il sub-Laplaciano canonico di $\mathbb{G}$ è l'operatore

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2,$$

ove (per $i = 1, \ldots, n$) si ha $Z_i = \partial_{x_i} + \sum_{\alpha=1}^{p} (A^\alpha\, x)_i\, \partial_{t_\alpha}$. Poniamo

$$\Omega(\tau) := -\iota \sum_{\alpha=1}^{p} \tau_\alpha\, A^\alpha, \qquad \tau \in \mathbb{R}^p,$$

ove ι denota l'unità immaginaria. La matrice Ω è hermitiana (quindi unitariamente diagonalizzabile e con autovalori reali).

La forma integrale in cui viene trovata la soluzione fondamentale di $\mathcal{L}$ in [3] è $\Gamma = \mathbf{c}\, G$, ove (fuori dall'insieme in cui $x = 0$),

$$G(x,t) = \int_{\mathbb{R}^p} \frac{V(\tau)}{f(x,t,\tau)^{n/2+p-1}}\, \mathrm{d}\tau, \tag{1}$$

e $\mathbf{c} > 0$ è una costante dimensionale. Le funzioni $V(\tau)$ e $f(x,t,\tau)$ hanno la seguente forma esplicita

$$\begin{aligned} V(\tau) &= \sqrt{\det\big(\mathrm{sinhc}(\Omega(\tau))\big)^{-1}}, \\ f(x,t,\tau) &= \frac{1}{2}\Big\langle \big(\mathrm{tanhc}\big(\Omega(\tau)\big)\big)^{-1} x, x\Big\rangle - \iota\,\langle t,\tau\rangle, \end{aligned} \tag{2}$$

ove $\mathrm{sinhc}(z) = \dfrac{\sinh z}{z}$, $\mathrm{tanhc}(z) = \dfrac{\tanh z}{z}$ (definite 1 per $z = 0$).

Di fatto, $G(x,t)$ è a valori reali ed è non negativa. La buona positura delle funzioni V e f (in altri termini la buona positura e regolarità delle funzioni di matrice $\mathrm{sinhc}(\Omega(\tau))$ e $\mathrm{tanhc}(\Omega(\tau))$) non è ovvia e viene provata nel Capitolo 2.

In [3] viene provato che G è (a meno di una costante di proporzionalità) la soluzione fondamentale di $\mathcal{L}$, e ciò viene fatto per mezzo di un argomento di regolarizzazione su G e dopo aver verificato che f e V verificano le equazioni differenziali (del primo ordine)

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(Z_i f)^2 + \sum_{\alpha=1}^{p}\tau_\alpha\,\frac{\partial f}{\partial \tau_\alpha} = f, \qquad \sum_{\alpha=1}^{p}\tau_\alpha\,\frac{\partial V}{\partial \tau_\alpha} + (\mathcal{L}f - \tfrac{n}{2})\,V = 0,$$

dette rispettivamente *l'equazione generalizzata di Hamilton-Jacobi* (GHJE) e *l'equazione generalizzata di trasporto* (GTE). Ovviamente, un punto profondissimo dell'articolo [3] è di aver determinato queste equazioni (seguendo il formalismo della Meccanica Hamiltoniana complessa) e di averle integrate esplicitamente (mediante il metodo delle caratteristiche) ottenendo (2). Un altro punto delicatissimo dell'articolo [3] è di aver dimostrato (con un argomento di "complessificazione", ed un uso di forme differenziali in più variabili complesse e di metodi di perturbazione di autovalori) che *$G(x,t)$ si prolunga in modo $\mathbf{C}^\infty$ anche per $x = 0$.*

Il nostro approccio è di provare direttamente che le funzioni V e f in (2) verificano (GTE) e (GHJE), con calcoli espliciti basati sul seguente Lemma, che generalizza il ben noto Teorema di Liouville (per i sistemi lineari e omogenei di O.D.E.):

Consideriamo il campo vettoriale $T = \sum_{\alpha=1}^{p} \tau_\alpha \, \partial_{\tau_\alpha}$. *Sia* $A(\tau)$ *un'assegnata funzione a valori nello spazio delle matrici* $n \times n$, *e sia* $\tau \mapsto W(\tau)$ *una soluzione (a valori nel medesimo spazio di matrici) del sistema (di P.D.E.) del primo ordine*

$$T\big(W(\tau)\big) = A(\tau) \cdot W(\tau).$$

Allora la funzione $\det W(\tau)$ *risolve la P.D.E. scalare del primo ordine*

$$T\big(\det W(\tau)\big) = \mathrm{Tr}\big(A(\tau)\big) \det W(\tau).$$

Una volta provate (GTE) e (GHJE) è banale dimostrare che

$$\mathcal{L}\bigg(\frac{V(\tau)}{f(x,t,\tau)^{n/2+p-1}}\bigg) = q \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\partial}{\partial \tau_\alpha}\Big(\tau_\alpha \, V \, f^{-q-1}\Big),$$

ove $q = n/2 + p - 1$. Si noti che il secondo membro di cui sopra è *la divergenza di un campo di funzioni in* $\mathbb{R}^p$. Mediante il Teorema della Divergenza, non è quindi difficile provare che *la funzione integrale che definisce* G *in* (1) *è* $\mathcal{L}$*-armonica.* (Grazie alla ipoellitticità di $\mathcal{L}$ la prova di questo fatto è assai semplice, una volta che sia noto l'andamento asintotico di V e f come funzioni di τ; questo andamento viene provato nel Capitolo 5.)

Diversamente da quanto fatto in [3], noi dimostriamo che (a meno di una costante di normalizzazione $\mathbf{c}$) la funzione $G(x,t)$ è la soluzione fondamentale di $\mathcal{L}$ mediante il seguente utile risultato, che riconduce la verifica dell'equazione distribuzionale $\mathcal{L}G = -\mathbf{c}\,\mathrm{Dir}_0$ a una verifica di alcune semplici proprietà:

Sia $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, *, \delta_\lambda)$ *un gruppo omogeneo di Carnot di dimensione omogenea* $Q > 2$, *e sia* $\mathcal{L}$ *un sub-Laplaciano di* $\mathbb{G}$. *Supponiamo che esista una funzione* $u : \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *soddisfacente le seguenti proprietà:*

i) $u \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \mathbb{R})$;

ii) $u(x) > 0$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$;

iii) $\mathcal{L}u = 0$ *in* $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$;

iv) *u è δ_λ-omogenea di grado $2-Q$.*

Allora esiste una costante positiva $\mathbf{c}$ tale che $\Gamma = \mathbf{c}^{-1}\, u$ è la soluzione fondamentale di $\mathcal{L}$ (con polo nell'origine).

Dimostriamo questo risultato (che ha un interesse autonomo) nel Capitolo 4, mediante integrazione per parti e utilizzando in modo cruciale la Formula di Coarea.

Mediante questo risultato siamo infine in grado di provare che $G(x,t)$ in (1) è (a meno di un fattore) la soluzione fondamentale di $\mathcal{L}$, a patto di prendere a prestito da [3] il (profondo) risultato di prolungabilità $\mathbf{C}^\infty$ di $G(x,t)$. Il nostro argomento utilizza in modo cruciale i Principi del Massimo Debole e Forte per $\mathcal{L}$, ma può essere considerato a buon diritto un argomento semplice e "naturale".

L'ultima parte della Tesi (Capitolo 6) è dedicata al calcolo esplicito di alcune soluzioni fondamentali, utilizzando la formula di rappresentazione (1). Sfortunatamente, a parte il caso dei gruppi di Heisenberg, l'utilizzo di questa formula richiede l'aiuto di qualche software di calcolo, come ad esempio Mathemathica$^{\mathrm{TM}}$.

Tematiche di ricerca originale che possono scaturire da questo lavoro di Tesi sono i seguenti:

- Calcolo esplicito di soluzioni fondamentali non note in letteratura.

- Studio della ipoellitticità analitica per i cosiddetti gruppi di Métivier (si veda [8, §3.7]); in questo caso infatti l'integrale in (1) può essere riscritto come esteso ad un insieme di matrici dalle notevoli proprietà algebriche.

- Studio del problema aperto di trovare gruppi polarizzabili (secondo [1]) che non siano di tipo Heisenberg.

Capitolo 1

Gruppi Nilpotenti di Passo Due

Lo scopo di questo capitolo introduttivo è quello di mostrare come, dato un gruppo di Lie $\mathbf{G}$ nilpotente di passo 2, sia possibile fissare un sistema di coordinate con notevoli proprietà: sarà sufficiente l'uso di un'unica carta coordinata e la legge di composizione sarà espressa da funzioni polinomiali rispetto a queste coordinate. In particolare, potremo identificare $\mathbf{G}$ con $\mathbb{R}^N$ e introdurre una famiglia di "dilatazioni" su $\mathbf{G}$ di notevole utilità nel passaggio "locale–globale".

In particolare questo ci sarà utile per studiare il generico sub-Laplaciano su $\mathbf{G}$

$$\sum_{j=1}^{n} X_j^2,$$

riconduncendolo sempre al cosiddetto sub-Laplaciano canonico.

1.1 Preliminari sui Gruppi di Carnot astratti

Incominciamo ricordando le seguenti definizioni (si veda [8]):

Definizione 1.1 (Gruppo di Carnot (astratto))**.** Un **gruppo di Carnot**, è un gruppo di Lie $\mathbf{G}$ connesso e semplicemente connesso la cui algebra di Lie

$\mathfrak{g}$ ammette una stratificazione, ovvero

$$\mathfrak{g} = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_r \qquad \text{ove} \quad \begin{cases} [V_1, V_{i-1}] = V_i & \text{se } 2 \leq i \leq r, \\ [V_1, V_r] = \{0\}. \end{cases}$$

Si noti che **G** è necessariamente nilpotente di passo r; si usa dire che $\dim(V_1)$ è il **numero di generatori** di **G** e

$$Q := \sum_{i=1}^{r} i \cdot \dim(V_i)$$

si chiama **dimensione omogenea** di **G**.

Più propriamente, quando ci si riferisce a un gruppo di Carnot, si intende un *coppia* $(\mathbf{G}, V_1)$ come in Definizione 1.1; in altre parole la stratificazione (infatti V_1 determina univocamente $V_2, \ldots, V_r$) è un dato del gruppo di Carnot.

Definizione 1.2 (Sub-Laplaciano su un gruppo di Carnot)**.** Sia **G** un gruppo di Carnot di associata stratificazione $\mathfrak{g} = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_r$. Si dice che l'operatore differenziale del secondo ordine

$$\sum_{j=1}^{n} X_j^2$$

è un **sub-Laplaciano** su **G** se $\{X_1, \ldots, X_n\}$ è una base di V_1.

Osservazione 1.3. Ogni gruppo di Lie **G** nilpotente di passo 2 è un gruppo di Carnot.

Dimostrazione. Poniamo $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathbf{G})$; essendo **G** nilpotente di passo 2, si ha $\mathfrak{b} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq \{0\}$.

Consideriamo $\{b_1, \ldots, b_p\}$ base di $\mathfrak{b}$ e completiamola ad una base di $\mathfrak{g}$

$$(v_1, \ldots, v_n; b_1, \ldots, b_p).$$

Ne segue $\mathfrak{g} = V_1 \oplus V_2$, ove

$$V_1 = \mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_n\}, \quad V_2 = \mathrm{span}\{b_1 \ldots, b_p\}.$$

Questo segue dal fatto che $(v_1, \ldots, v_n; b_1, \ldots, b_p)$ è una base di $\mathfrak{g}$. Risulta inoltre (il che terminerà la dimostrazione):

i) $[V_1, V_1] = V_2$;

ii) $[V_1, V_2] = \{0\}$.

Infatti, per provare (i) osserviamo che

$$[V_1, V_1] = \mathrm{span}\{[v_i, v_j] \mid i, j = 1, \ldots, n\} \subseteq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{b} = V_2.$$

Viceversa, per provare l'altra inclusione si nota che

$$\begin{aligned} V_2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] &= \mathrm{span}\{[v + b, \widetilde{v} + \widetilde{b}] \ : \ v, \widetilde{v} \in V_1; b, \widetilde{b} \in V_2\} \\ &= \mathrm{span}\{[v, \widetilde{v}] + [v, \widetilde{b}] + [b, \widetilde{v}] + [b, \widetilde{b}] \ : \ v, \widetilde{v} \in V_1; b, \widetilde{b} \in V_2\}; \end{aligned}$$

essendo $[v, \widetilde{b}], [b, \widetilde{v}], [b, \widetilde{b}]$ commutatori di altezza maggiore o uguale a 3 (ed essendo **G** di passo 2) si ottiene $V_2 = \mathrm{span}\{[v, \widetilde{v}] \ : \ v, \widetilde{v} \in V_1\} \subseteq [V_1, V_1]$, da cui segue la proprietà (i).

Infine la prova di (ii) segue da

$$[V_1, V_2] = \mathrm{span}\{[v_i, b_j] \mid i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, p\} = \{0\},$$

in quanto $[v_i, b_j]$ è un commutatore di altezza maggiore o uguale a 3, per ogni $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, p$. □

Definizione 1.4. Sia **G** un gruppo di Carnot di passo 2 con assegnata stratificazione $\mathfrak{g} = V_1 \oplus V_2$, e sia $\{X_1, \ldots, X_n\}$ una qualunque base di V_1.

Si dice che $\mathcal{B} = \{X_1, \ldots, X_n; T_1, \ldots, T_p\}$ è una base di $\mathfrak{g}$ **adattata alla stratificazione** se $(T_1, \ldots, T_p)$ è una base qualunque di V_2.

1.2 Isomorfismo tra Gruppo di Carnot astratto e omogeneo

Il seguente teorema, la cui dimostrazione è piuttosto laboriosa, mostra come scegliere in modo assai conveniente una carta globale su un gruppo di Carnot **G** nilpotente di passo 2 in modo da ricondurlo ad un gruppo $\mathbb{G}$ di Carnot la cui varietà è $\mathbb{R}^N$ con l'usuale struttura differenziale. Ciò può essere fatto col preciso scopo di ridurre un dato sub-Laplaciano di $\mathbf{G}$ ad un operatore differenziale del secondo ordine su $\mathbb{R}^N$ dalla struttura "più standard".

Teorema 1.5. *Sia* $\mathbf{G}$ *un gruppo di Carnot di passo* 2 *con associata moltiplicazione* $\star$ *e sia* $\mathcal{B}$ *una base di* $\mathfrak{g}$ *adattata alla stratificazione di* $\mathbf{G}$*. Sia infine* $\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{n} X_j^2$ *un fissato sub-Laplaciano su* $\mathbf{G}$*.*

Allora è possibile trovare un gruppo di Carnot $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, *)$ *e un isomorfismo di gruppi di Lie* $\varphi : \mathbf{G} \to \mathbb{R}^N$ *con le seguenti proprietà:*

1) φ *è una carta globale, iniettiva e suriettiva, per la varietà di* $\mathbf{G}$*;*

2) i campi $X_1, \dots, X_n$ *sono* φ*-associati*[1] *ai campi vettoriali* $Z_1, \dots, Z_n$*, ove* Z_i *è l'unico elemento di* $\mathrm{Lie}(\mathbb{G})$ *che, nel punto* $0 \in \mathbb{R}^N$*, coincide con la derivata parziale rispetto alla* i*-esima coordinata;*

3) il sub-Laplaciano $\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{n} X_j^2$ *è* φ*-associato al cosiddetto sub-Laplaciano canonico* $\Delta_{\mathbb{G}} = \sum_{j=1}^{n} Z_j^2$ *di* $\mathbb{G}$*, ossia*

$$(\Delta_{\mathbb{G}} u)(\varphi(g)) = \mathcal{L}(u \circ \varphi)(g) \qquad \forall\, u \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}), \quad \forall\, g \in \mathbf{G}.$$

Dimostrazione. Proviamo 1). Sia $\mathcal{B} = \{X_1, \dots, X_n; T_1, \dots, T_p\}$ una base di $\mathfrak{g}$ adattata alla stratificazione, ove $\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{n} X_j^2$ è un fissato sub-Laplaciano su $\mathbf{G}$. Consideriamo le usuali mappe esponenziale e logaritmica[2] di $\mathbf{G}$

$$\mathrm{Exp} : \mathfrak{g} \to \mathbf{G}, \quad \mathrm{Log} : \mathbf{G} \to \mathfrak{g},$$

[1]Con questo si intende che

$$X_i(u \circ \varphi)(g) = Z_i(u)(\varphi(g)) \qquad \forall\, u \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}), \quad \forall\, g \in \mathbf{G}.$$

[2]Essendo $\mathbf{G}$ un gruppo di Lie nilpotente, da noti teoremi strutturali si ha che la funzione $\mathrm{Exp} : \mathfrak{g} \to \mathbf{G}$ è un diffeomorfismo iniettivo e suriettivo; si veda [9] per esempio.

e definiamo l'applicazione $\pi_{\mathcal{B}} : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}^N$ come

$$\pi_{\mathcal{B}}(x_1 X_1 + \cdots + x_n X_n + t_1 T_1 + \cdots + t_p T_p) := (x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_p).$$

Si noti che $\pi_{\mathcal{B}}$ è una mappa lineare, iniettiva e suriettiva. Definiamo

$$\varphi : \mathbf{G} \to \mathbb{R}^N, \quad \varphi = \pi_{\mathcal{B}} \circ \mathrm{Log}.$$

Allora φ è un isomorfismo di $(\mathbf{G}, \star)$ su $(\mathbb{R}^N, *)$, se si pone

$$x * y := \varphi\Big(\varphi^{-1}(x) \star \varphi^{-1}(y)\Big), \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^N. \tag{1.1}$$

Essendo $\pi_{\mathcal{B}}$ e Log due mappe invertibili e $\mathbf{C}^\infty$, ne segue che φ è una carta globale per $\mathbf{G}$, biettiva, dunque la legge $*$ è di classe $\mathbf{C}^\infty$.

È ovvio che $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, *)$ è un gruppo di Lie nilpotente di passo due (poiché isomorofo a $\mathbf{G}$), come mostreremo a breve e inoltre esso è anche un gruppo di Carnot. Ora proviamo che per $\mathbb{G}$ valgono anche altre utili proprietà.

i) $0 \in \mathbb{R}^N$ è l'elemento neutro di $\mathbb{G}$,

ii) $(x,t)^{-1} = (-x, -t)$ è l'inverso di gruppo su $\mathbb{G}$.

Infatti indicando con $e_{\mathbf{G}}$ e y gli elementi neutri di $\mathbf{G}$ e $\mathbb{G}$ rispettivamente,

$$y = \varphi(e_{\mathbf{G}}) = \pi_{\mathcal{B}}\Big(\mathrm{Log}(e_{\mathbf{G}})\Big) = \pi_{\mathcal{B}}(0) = 0.$$

Analogamente da $(x,t)^{-1} = \varphi\Big(\big(\varphi^{-1}(x,t)\big)^{-1}\Big)$, e

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}((x,t)) &= (\mathrm{Exp} \circ (\pi_{\mathcal{B}})^{-1})(x,t) \\ &= \mathrm{Exp}\Big(x_1 X_1 + \cdots + x_n X_n + t_1 T_1 + \cdots + t_p T_p\Big),\end{aligned}$$

e dal noto fatto che $(\mathrm{Exp}(X))^{-1} = \mathrm{Exp}(-X)$ (per ogni $X \in \mathfrak{g}$) segue

$$(x,t)^{-1} = \pi_{\mathcal{B}} \circ \mathrm{Log} \circ \mathrm{Exp}(-x_1 X_1 - \cdots - x_n X_n - t_1 T_1 - \cdots - t_p T_p) = (-x, -t).$$

Essendo φ un isomorfismo di gruppi di Lie ne segue che

$$\mathrm{d}\varphi : \mathfrak{g} \to \mathrm{Lie}(\mathbb{G}),$$

è un isomorfismo di algebre di Lie quindi

$$\mathrm{d}\varphi[X,Y] = [\mathrm{d}\varphi(X), \mathrm{d}\varphi(Y)] \quad \forall\ X, Y \in \mathfrak{g}.$$

In quanto isomorfismo si ha che $\{\mathrm{d}\varphi(X_1), \dots, \mathrm{d}\varphi(X_n); \mathrm{d}\varphi(T_1), \dots, \mathrm{d}\varphi(T_p)\}$ è una base di $\mathrm{Lie}(\mathbb{G})$ dunque, posto

$$W_1 = \mathrm{d}\varphi(V_1), \quad W_2 = \mathrm{d}\varphi(V_2),$$

si ottiene $\mathrm{Lie}(\mathbb{G}) = W_1 \oplus W_2$. Inoltre valgono le relazioni

$$\begin{aligned}
[W_1, W_1] &= [\mathrm{d}\varphi(V_1), \mathrm{d}\varphi(V_1)] = \mathrm{d}\varphi([V_1, V_1]) = \mathrm{d}\varphi(V_2) = W_2,\\
[W_1, W_2] &= [\mathrm{d}\varphi(V_1), \mathrm{d}\varphi(V_2)] = \mathrm{d}\varphi([V_1, V_2]) = \mathrm{d}\varphi(0) = 0.
\end{aligned}$$

Questo prova quindi 1).

Proviamo ora invece 2) e 3). Fissiamo $i \in \{1, \dots, n\}$ e $u \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$; essendo X_i e Z_i rispettivamente invarianti a sinistra su $\mathbf{G}$ e $\mathbb{G}$, allora è sufficiente provare

$$X_i(u \circ \varphi)(e) = Z_i(u)(0) \tag{1.2}$$

al fine di verificare che X_i è φ-associato a Z_i. Infatti si supponga di aver dimostrato (1.2); chiamando $\tau^{\mathbf{G}}$ e $\tau^{\mathbb{G}}$ rispettivamente le traslazioni a sinistra in $\mathbf{G}$ e $\mathbb{G}$, fissato $x \in \mathbf{G}$ per l'invarianza a sinistra di X_i si ha:

$$\begin{aligned}
X_i(u \circ \varphi)(x) &= X_i(u \circ \varphi)\big(\tau_x^{\mathbf{G}}(e_{\mathbf{G}})\big) = X_i\big((u \circ \varphi) \circ \tau_x^{\mathbf{G}}\big)(e_{\mathbf{G}})\\
&= X_i\big((u \circ \varphi \circ \tau_x^{\mathbf{G}} \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi\big)(e_{\mathbf{G}}) \overset{(1.2)}{=} Z_i(u \circ \varphi \circ \tau_x^{\mathbf{G}} \circ \varphi^{-1})(0)\\
&= \nabla(u \circ \varphi \circ \tau_x^{\mathbf{G}} \circ \varphi^{-1})(0) \cdot Z_i I(0),
\end{aligned}$$

ma per ogni $x \in \mathbf{G}$ e per ogni $y \in \mathbb{R}^N$

$$\tau^{\mathbb{G}}_{\varphi(x)}(y) = \varphi(x) * y = \varphi\big(x \star \varphi^{-1}(y)\big) = (\varphi \circ \tau_x^{\mathbf{G}} \circ \varphi^{-1})(y)$$

e inoltre

$$\begin{aligned}
&\nabla(u\circ\varphi\circ\tau_x^{\mathbf{G}}\circ\varphi^{-1})(y)=\nabla\big(u\circ(\varphi\circ\tau_x^{\mathbf{G}}\circ\varphi^{-1})\big)(y)\\
&=\nabla u\big((\varphi\circ\tau_x^{\mathbf{G}}\circ\varphi^{-1})(y)\big)\cdot\mathfrak{I}_{\varphi\circ\tau_x^{\mathbf{G}}\circ\varphi^{-1}}(y)\\
&=\nabla u\big(\tau^{\mathbb{G}}_{\varphi(x)}(y)\big)\cdot\mathfrak{I}_{\tau^{\mathbb{G}}_{\varphi(x)}}(y).
\end{aligned}$$

Perciò per l'invarianza a sinistra di Z_i

$$\begin{aligned}
&X_i(u\circ\varphi)(x)=\nabla(u\circ\varphi\circ\tau_x^{\mathbf{G}}\circ\varphi^{-1})(0)\cdot Z_iI(0)\\
&=\nabla u\big(\varphi(x)\big)\cdot\mathfrak{I}_{\tau^{\mathbb{G}}_{\varphi(x)}}(0)\cdot Z_iI(0)=\nabla u\big(\varphi(x)\big)\cdot Z_iI\big(\varphi(x)\big)\\
&=Z_i(u)\big(\varphi(x)\big).
\end{aligned}$$

Non ci rimane che dimostrare che vale (1.2):

$$\begin{aligned}
&Z_i\Big|_{x=0}u(x)=\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{x=0}u(x)=\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{x=0}(u\circ\varphi\circ\varphi^{-1})(x)\\
&=\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{x=0}\Big(\big(u\circ\varphi\big)\circ\big(\mathrm{Exp}\circ\pi_{\mathcal{B}}^{-1}\big)\Big)(x)\\
&=\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{x=0}\Big(\big(u\circ\varphi\big)\circ\mathrm{Exp}\big(x_1X_1+\cdots+x_nX_n+t_1T_1+\cdots+t_pT_p\big)\Big)\\
&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0}\Big(\big(u\circ\varphi\big)\circ\mathrm{Exp}\big(sX_i\big)\Big)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0}(u\circ\varphi)\big(\gamma_{X_i}(s,e_{\mathbf{G}})\big)\\
&=X_i(u\circ\varphi)(e_{\mathbf{G}}),
\end{aligned}$$

in quanto γ_{X_i} è curva integrale di X_i.

Così per ogni $x\in\mathbf{G}$ e per ogni $u\in\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{R})$ si ha

$$\begin{aligned}
X_i^2(u\circ\varphi)(x)&=X_i\big(X_i(u\circ\varphi)(x)\big)=X_i\big(Z_iu(\varphi(x))\big)\\
&=X_i\big(Z_iu\circ\varphi\big)(x)=Z_i(Z_iu)\big(\varphi(x)\big)=Z_i^2(u)\big(\varphi(x)\big),
\end{aligned}$$

dunque segue che

$$\sum_{j=1}^n X_j^2\big(u\circ\varphi\big)(x)=(\Delta_{\mathbb{G}}u)\big(\varphi(x)\big).$$

Il teorema risulta così dimostrato. $\square$

Osservazione 1.6. Dal precedente teorema si evince come, anziché considerare l'operatore $\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{n} X_j^2$, è sufficiente utilizzare l'operatore canonico $\Delta_{\mathbb{G}} = \sum_{j=1}^{n} Z_j^2$, il quale identifica completamente $\mathcal{L}$.

1.2.1 Proprietà della legge di gruppo $*$ su $\mathbb{G}$

Il Lettore avrà riconosciuto che l'operazione $*$ introdotta nel Teorema 1.5 è intimamente legata all'operazione di Campbell-Baker-Hausdorff relativa al gruppo $\mathbf{G}$. È dunque lecito supporre che $*$ goda di proprietà selezionate.

Osservazione 1.7 (Composizione su $\mathbb{G}$). Vediamo alcune utili proprietà della legge di gruppo $*$ su $\mathbb{G}$ introdotta in (1.1):

i) 0 è l'elemento neutro,

ii) $(x,t)^{-1} = (-x,-t)$ per ogni $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$,

iii) per ogni $(x,t),(x',t') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ e per ogni $i = 1,\dots,n$ e $j = 1,\dots p$

$$(x,t) * (x',t') = \begin{pmatrix} x_i + x_i' \\ t_j + t_j' + \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^{n} x_r x_s' c_{r,s}^j \end{pmatrix}$$

ove, per ogni $r,s = 1,\dots,n$,

$$\sum_{j=1}^{p} c_{r,s}^j T_j = [X_r, X_s],$$

essendo $c_{r,s}^j \in \mathbb{R}$ le cosiddette *costanti di struttura* dell'algebra $\mathrm{Lie}(\mathbf{G})$.

iv) La famiglia $\{\delta_\lambda\}_{\lambda>0}$ di applicazioni $\delta_\lambda : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ definita da

$$\delta_\lambda(x,t) = (\lambda\, x, \lambda^2\, t), \qquad (x,t) \in \mathbb{G}$$

è una famiglia di automorfismi del gruppo $\mathbb{G}$ che rende $\mathbb{G}$ *un gruppo omogeneo di Carnot* (secondo la definizione in [8]).

Dimostrazione. La i) e ii) sono state già provate nel teorema precedente; verifichiamo che vale iii), dalla quale segue immediatamente iv). Sappiamo che Exp è un isomorfismo di gruppi di Lie tra $(\mathfrak{g}, \diamond)$ e $(\mathbf{G}, \star)$, ove (per la famosa formula di Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin applicata ad un gruppo nilpotente di passo 2)

$$X \diamond Y = \mathrm{Log}\big((\mathrm{Exp}X) \star (\mathrm{Exp}Y)\big) = X + Y + \frac{1}{2}\,[X,Y], \qquad \forall\ X, Y \in \mathrm{Lie}(\mathbf{G});$$

essendo inoltre $[X_i, T_j] = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, p$ (poiché $T_j \in V_2$), si ha

$$\begin{aligned}
&(x,t) * (x',t') = \varphi\Big(\varphi^{-1}\big((x,t)\big) \star \varphi^{-1}\big((x',t')\big)\Big)\\
&= \varphi\left(\mathrm{Exp}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i X_i + \sum_{j=1}^{p} t_j T_j\right) \star \mathrm{Exp}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i' X_i + \sum_{j=1}^{p} t_j' T_j\right)\right)\\
&= \varphi\left(\mathrm{Exp}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i X_i + \sum_{j=1}^{p} t_j T_j\right) \diamond \left(\sum_{i=1}^{n} x_i' X_i + \sum_{j=1}^{p} t_j' T_j\right)\right)\right)\\
&= \varphi\left(\mathrm{Exp}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + x_i')X_i + \sum_{j=1}^{p}(t_j + t_j')T_j + \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i X_i, \sum_{i=1}^{n} x_i' X_i\right]\right)\right)\\
&= \pi_{\mathcal{B}}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + x_i')X_i + \sum_{j=1}^{p}(t_j + t_j')T_j + \frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{n} x_r x_s' [X_r, X_s]\right).
\end{aligned}$$

Ma $[X_r, X_s] \in [V_1, V_1] = V_2$ per ogni $r, s = 1, \ldots, n$, perciò esistono (univocamente determinate) delle costanti reali $c_{r,s}^j$ tali che

$$[X_r, X_s] = \sum_{j=1}^{p} c_{r,s}^j T_j \quad \forall\ r, s = 1, \ldots, n.$$

Dunque si evince che

$$\begin{aligned}
&(x,t) * (x',t')\\
&= \pi_{\mathcal{B}}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + x_i')X_i + \sum_{j=1}^{p}(t_j + t_j')T_j + \frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{n} x_r x_s' \left(\sum_{j=1}^{p} c_{r,s}^j T_j\right)\right)\\
&= \begin{pmatrix} x_i + x_i' \\ t_j + t_j' + \frac{1}{2}\displaystyle\sum_{r,s=1}^{n} x_r x_s' c_{r,s}^j \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Questo conclude la prova. $\square$

Osservazione 1.8. Indicando con

$$B^j := (c^j_{r,s})_{r,s=1,\dots,n} \quad j = 1, \dots, p,$$

proviamo che:

i) B^j è antisimmetrica per ogni $j = 1, \dots, p$,

ii) $B^1, \dots, B^p$ sono matrici *linearmente indipendenti* in $\mathfrak{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Dimostrazione. Per provare la i), verifichiamo che $c^j_{r,s} = -c^j_{s,r}$ per ogni $r, s = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, p$:

$$\sum_{j=1}^{p} c^j_{r,s} T_j = [X_r, X_s] = -[X_s, X_r] = -\sum_{j=1}^{p} c^j_{r,s} T_j = \sum_{j=1}^{p} (-c^j_{s,r})\, T_j;$$

essendo $\{T_1, \dots, T_p\}$ una base di V_2 ne segue $c^j_{r,s} = -c^j_{s,r}$.

Ora proviamo ii): sia $\phi : V_2 \to \mathbb{R}^p$ l'applicazione lineare definita da

$$\phi(T_j) = e_j, \quad \text{con } e_j \text{ il j-esimo elemento della base canonica di } \mathbb{R}^p;$$

essendo $V_2 = \operatorname{span}\{T_j : \ j = 1, \dots, p\}$ e $(T_1, T_2, \dots, T_p)$, $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ basi rispettivamente di V_2 e $\mathbb{R}^p$, segue che ϕ è un isomorfismo di spazi vettoriali. Quindi sapendo che

$$\begin{aligned} V_2 = [V_1, V_1] &= \operatorname{span}\{[X_r, X_s] \ : \ r, s = 1, \dots, n\} \\ &= \operatorname{span}\Big\{ \sum_{j=1}^{p} c^j_{r,s} T_j \ : \ r, s = 1, \dots, n \Big\}, \end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^p = \phi(V_2) &= \operatorname{span}\Big\{ \sum_{j=1}^{p} c^j_{r,s} e_j \ : \ r, s = 1, \dots, n \Big\} \\ &= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} c^1_{r,s} \\ \vdots \\ c^p_{r,s} \end{pmatrix} \ : \ r, s = 1, \dots, n \right\}. \end{aligned}$$

Dunque segue che

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{j=1}^{p} \alpha_j B^j = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j (c^j_{r,s})_{r,s=1,\dots,n} = \left(\sum_{j=1}^{p} \alpha_j c^j_{r,s} \right)_{r,s=1,\dots,n} \\
&\iff \sum_{j=1}^{p} \alpha_j c^j_{r,s} = 0 \quad \forall\, r,s = 1,\dots,n \\
&\iff \left\langle \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c^1_{r,s} \\ \vdots \\ c^p_{r,s} \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \quad \forall\, r,s = 1,\dots,n \\
&\iff \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} \perp \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} c^1_{r,s} \\ \vdots \\ c^p_{r,s} \end{pmatrix} \,:\, r,s = 1,\dots,n \right\} \qquad (= \mathbb{R}^p) \\
&\iff (\alpha_1,\dots,\alpha_p) = 0.
\end{aligned}
$$

Questo prova la proprietà ii). □

Osservazione 1.9. La legge $*$ su $\mathbb{G}$ si può quindi riscrivere nel modo seguente: per ogni $x, x' \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$
(x,t) * (x',t') = \begin{pmatrix} x + x' \\ t_j + t'_j + \frac{1}{2}\langle x, B^j x' \rangle \end{pmatrix} \qquad (j = 1,\dots,p).
$$

Ne segue

$$
\mathfrak{I}_{\tau_{(x,t)}}(0,0) = \left(\begin{array}{ccc|c} & \mathbb{I}_{n\times n} & & 0_{n\times p} \\ \hline \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n} x_r c^1_{r,1} & \dots & \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n} x_r c^1_{r,n} & \\ \vdots & \dots & \vdots & \mathbb{I}_{p\times p} \\ \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n} x_r c^p_{r,1} & \dots & \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n} x_r c^p_{r,n} & \end{array} \right),
$$

quindi gli elementi della base Jacobiana di $\mathrm{Lie}(\mathbb{G})$ sono:

$$
\begin{aligned}
Z_i &= \partial_{x_i} + \sum_{j=1}^{p} \Big(\sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{2}\, c^j_{k,i}\, x_k \Big) \partial_{t_j}, && i = 1,\dots,n, \\
T_j &= \partial_{t_j}, && j = 1,\dots,p.
\end{aligned}
$$

Per convenzione, al fine di ritrovare le notazioni utilizzate nell'articolo [3], poniamo, per ogni $\alpha = 1, \dots, p$

$$A^\alpha = \left(a^\alpha_{i,k}\right)_{i,k\le n}, \qquad \text{ove } a^\alpha_{i,k} = \tfrac{1}{2}\, c^\alpha_{k,i},$$

cosicché segue che

$$\begin{aligned} Z_i &= \partial_{x_i} + \sum_{\alpha=1}^{p} \Big(\sum_{k=1}^{n} a^\alpha_{i,k} x_k \Big) \partial_{t_\alpha}, & i &= 1, \dots, n, \\ T_\alpha &= \partial_{t_\alpha}, & \alpha &= 1, \dots, p. \end{aligned}$$

Consistentemente, per ogni $x, x' \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha = 1, \dots, p$, si ha

$$\begin{aligned} (x,t) * (x',t') &= \begin{pmatrix} x + x' \\ t_\alpha + t'_\alpha + \displaystyle\sum_{r,s=1}^{n} a^\alpha_{s,r} x_r\, x'_s \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x + x' \\ t_\alpha + t'_\alpha + \langle A^\alpha x, x' \rangle \end{pmatrix} \qquad (\alpha = 1, \dots, p). \end{aligned}$$

Capitolo 2

Le funzioni V e f

L'obiettivo della Tesi è quello di ricavare, seguendo il notevole lavoro di Beals, Gaveau, Greiner [3], una *formula integrale esplicita* per la soluzione fondamentale di operatori differenziali lineari del secondo ordine

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} X_j^2,$$

in cui $X_1, \dots, X_n$ sono campi vettoriali invarianti a sinistra su un gruppo di Lie $\mathbb{G}$ nilpotente di passo 2, la cui algebra di Lie $\mathfrak{g}$ ammette una stratificazione

$$\mathfrak{g} = V_1 \oplus V_2 \quad \text{tale che} \begin{cases} [V_1, V_1] = V_2 \\ [V_1, V_2] = \{0\}. \end{cases}$$

e dove $\{X_1, \dots, X_n\}$ è una base di V_1. Poniamo $p := \dim(V_2)$.

Come visto nel primo capitolo si può studiare l'operatore $\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} X_j^2$ riconducendosi all'analisi dell'operatore canonico

$$\mathcal{L} := \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} Z_j^2, \tag{2.1}$$

ove i campi vettoriali

$$Z_j = \partial_{x_j} + \sum_{\alpha=1}^{p} \Big(\sum_{k=1}^{n} a_{j,k}^{\alpha} x_k \Big) \partial_{t_\alpha} \quad (j = 1, \dots, n)$$

sono i primi n elementi della base Jacobiana[1] di $\mathrm{Lie}(\mathbb{G})$, essendo $\mathbb{G}$ un opportuno gruppo omogeneo su $\mathbb{R}^N$ isomorfo a $\mathbf{G}$. Osserviamo che

$$Q = n + 2\,p$$

è la dimensione omogenea di $\mathbb{G}$.

Da ora in avanti, dunque, si converrà di lavorare sul *gruppo omogeneo di Carnot* $\mathbb{G}$, a cui è associato l'operatore in (2.1); si troverà che la soluzione fondamentale (a meno di una costante moltiplicativa opportuna) di $\mathcal{L}$ ha la seguente forma integrale

$$G(x,t) = \int_{\mathbb{R}^p} \frac{V(\tau)}{f(x,t,\tau)^{\frac{Q}{2}-1}}\,\mathrm{d}\tau, \quad \text{(per } x \neq 0),$$

dove (seguendo il formalismo Hamiltoniano in [3]) f risolve la cosiddetta *equazione di Hamilton-Jacobi generalizzata (GHJE)*, mentre V risolve la cosiddetta *equazione di trasporto generalizzata (GTE)*.

2.1 La soluzione fondamentale, date V ed f

Il problema a cui ci si dedicherà inizialmente è quello di definire tali funzioni f e V in modo da soddisfare (GHJE) e (GTE), verificandone altresì la buona positura. Prima si premettono alcuni lemmi che risulteranno utili nel seguito.

Lemma 2.1. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+p}_{(x,t)}$ un aperto e siano $u, v \in \mathbf{C}^2(\Omega \times \mathbb{R}^p_\tau, \mathbb{C})$. Allora*

$$\mathcal{L}(u \cdot v) = \mathcal{L}u \cdot v + \langle \nabla_{\mathcal{L}} u, \nabla_{\mathcal{L}} v \rangle + u \cdot \mathcal{L}v,$$

dove $\nabla_{\mathcal{L}} u := (Z_1 u, \dots, Z_n u)$.

In particolare, dato $q > 0$, se $V, f \in \mathbf{C}^2(\Omega \times \mathbb{R}^p_\tau, \mathbb{C})$ e $f(x,t) \neq 0$ per ogni $(x,t) \in \Omega$,

$$\mathcal{L}(V \cdot f^{-q}) = f^{-q} \cdot \mathcal{L}V - q \cdot f^{-q-1} \Big\{ V \cdot \mathcal{L}f + \langle \nabla_{\mathcal{L}} f, \nabla_{\mathcal{L}} V \rangle \Big\} +$$

[1] Rimandiamo il Lettore direttamente a [8, Chapter 1] per le nozioni di base Jacobiana, sub-Laplaciano canonico e gruppo omogeneo di Carnot.

$$+\frac{q(q+1)}{2}\cdot f^{-q-2}\cdot V\cdot\langle\nabla_{\mathcal{L}}f,\nabla_{\mathcal{L}}f\rangle. \tag{2.2}$$

[Osserviamo esplicitamente che la costante di normalizzazione $\frac{1}{2}$ in (2.1) si giustifica per ottenere la formula $\mathcal{L}(u\,v)=v\,\mathcal{L}u+\langle\nabla_{\mathcal{L}}u,\nabla_{\mathcal{L}}v\rangle+u\,\mathcal{L}v$.]

Dimostrazione. Per la regola di Leibniz, fissato $j\in\{1,2,\dots,n\}$, si ha

$$\begin{aligned}
&Z_j(u\cdot v)=Z_ju\cdot v+u\cdot Z_jv\\
&Z_j\big(Z_j\big(u\cdot v\big)\big)=Z_j^2u\cdot v+2\cdot Z_ju\cdot Z_jv+Z_j^2v\cdot u,
\end{aligned}$$

dunque si ottiene che

$$\mathcal{L}(u\cdot v)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}Z_j\Big(Z_j\big(u\cdot v\big)\Big)=\mathcal{L}u\cdot v+\langle\nabla_{\mathcal{L}}u,\nabla_{\mathcal{L}}v\rangle+u\cdot\mathcal{L}v.$$

Inoltre $\nabla_{\mathcal{L}}(f^{-q})=-q\cdot f^{-q-1}\cdot\nabla_{\mathcal{L}}f$ e

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f^{-q})&=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}Z_j\Big(-q\cdot f^{-q-1}\cdot Z_jf\Big)\\
&=-\frac{q}{2}\sum_{j=1}^{n}\Big\{(-q-1)\cdot f^{-q-2}\cdot Z_jf\cdot Z_jf+f^{-q-1}\cdot Z_j^2f\Big\}\\
&=-q\cdot f^{-q-1}\mathcal{L}f+\frac{q(q+1)}{2}\cdot f^{-q-2}\langle\nabla_{\mathcal{L}}f,\nabla_{\mathcal{L}}f\rangle.
\end{aligned}$$

Quindi segue che

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(V\cdot f^{-q})&=f^{-q}\cdot\mathcal{L}V-q\cdot f^{-q-1}\langle\nabla_{\mathcal{L}}V,\nabla_{\mathcal{L}}f\rangle+\\
&\qquad-q\cdot f^{-q-1}\cdot V\cdot\mathcal{L}f+\frac{q(q+1)}{2}\cdot V\cdot f^{-q-2}\langle\nabla_{\mathcal{L}}f,\nabla_{\mathcal{L}}f\rangle\\
&=f^{-q}\cdot\mathcal{L}V-q\cdot f^{-q-1}\Big\{V\cdot\mathcal{L}f+\langle\nabla_{\mathcal{L}}f,\nabla_{\mathcal{L}}V\rangle\Big\}+\\
&\qquad+\frac{q(q+1)}{2}\cdot f^{-q-2}\cdot V\cdot\langle\nabla_{\mathcal{L}}f,\nabla_{\mathcal{L}}f\rangle.
\end{aligned}$$

Questo conclude la prova. $\square$

Lemma 2.2. *Siano $V(\tau) = V(\tau_1, \ldots, \tau_p)$ e $f(x,t,\tau)$ due funzioni soddisfacenti le medesime ipotesi del Lemma 2.1 e supponiamo inoltre che la funzione f verifichi* ***l'equazione generalizzata di Hamilton-Jacobi (GHJE)***

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(Z_j f)^2 + \sum_{\alpha=1}^{p}\tau_\alpha \cdot \frac{\partial f}{\partial \tau_\alpha} = f.$$

Allora

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(V \cdot f^{-q}) = -q \cdot f^{-q-1}\Big\{V \cdot (\mathcal{L}f - q - 1) + \sum_{\alpha=1}^{p}\frac{\partial}{\partial \tau_\alpha}(\tau_\alpha \cdot V)\Big\}\\ + q\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{\partial}{\partial \tau_\alpha}(\tau_\alpha \cdot V \cdot f^{-q-1}).\end{aligned} \tag{2.3}$$

In più se V risolve ***l'equazione generalizzata di trasporto (GTE)***

$$\sum_{\alpha=1}^{p}\tau_\alpha \cdot \frac{\partial V}{\partial \tau_\alpha} + (\mathcal{L}f - \frac{n}{2})V = 0$$

e $q = \frac{n}{2} + p - 1 = \frac{Q}{2} - 1$, allora

$$\mathcal{L}(V \cdot f^{-q}) = q\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{\partial}{\partial \tau_\alpha}(\tau_\alpha \cdot V \cdot f^{-q-1}). \tag{2.4}$$

Dimostrazione. Dall'equazione (GHJE) si ricava

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(Z_j f)^2 = f - \sum_{\alpha=1}^{p}\tau_\alpha \cdot \frac{\partial f}{\partial \tau_\alpha},$$

quindi per l'equazione (2.2) si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\Big(V(\tau) \cdot f(x,t,\tau)^{-q}\Big) &= -q \cdot f^{-q-1} \cdot V \cdot \mathcal{L}f\\ &\qquad + q(q+1) \cdot f^{-q-2} \cdot V \cdot (f - \sum_{\alpha=1}^{p}\tau_\alpha \cdot \frac{\partial f}{\partial \tau_\alpha})\\ &= -q \cdot f^{-q-1}\Big\{V \cdot (\mathcal{L}f - q - 1)\Big\} +\\ &\qquad - q(q+1) \cdot f^{-q-2} \cdot V \cdot \sum_{\alpha=1}^{p}\tau_\alpha \cdot \frac{\partial f}{\partial \tau_\alpha};\end{aligned}$$

ma d'altra parte

$$
\begin{aligned}
&q\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{\partial}{\partial\tau_\alpha}(\tau_\alpha\,V\,f^{-q-1}) - q\,f^{-q-1}\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{\partial}{\partial\tau_\alpha}(\tau_\alpha\,V)\\
&= q\,f^{-q-1}\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{\partial}{\partial\tau_\alpha}(\tau_\alpha\,V) + q\sum_{\alpha=1}^{p}\tau_\alpha\,V\,\frac{\partial}{\partial\tau_\alpha}(f^{-q-1}) - q\,f^{-q-1}\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{\partial}{\partial\tau_\alpha}(\tau_\alpha\,V)\\
&= q(-q-1)\,f^{-q-2}\,V\sum_{\alpha=1}^{p}\tau_\alpha\,\frac{\partial f}{\partial\tau_\alpha}.
\end{aligned}
$$

Perciò si è ricavato (2.3).

In particolare se V risolve (GTE) si ottiene

$$
V\cdot\mathcal{L}f = \frac{n}{2}\cdot V - \sum_{\alpha=1}^{p}\tau_\alpha\cdot\frac{\partial V}{\partial\tau_\alpha},
$$

e, scelto $q=\frac{n}{2}+p-1$, giacché $p+\frac{n}{2}-q-1=p+\frac{n}{2}-\frac{n}{2}-p+1-1=0$, ne segue

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(V\,f^{-q}) = -q\,f^{-q-1}\Big\{\frac{n}{2}V - \sum_{\alpha=1}^{p}\tau_\alpha\frac{\partial V}{\partial\tau_\alpha} - (q+1)V + pV + \sum_{\alpha=1}^{p}\tau_\alpha\,\frac{\partial V}{\partial\tau_\alpha}\Big\}\\
+\,q\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{\partial}{\partial\tau_\alpha}(\tau_\alpha\,V\,f^{-q-1}) = q\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{\partial}{\partial\tau_\alpha}(\tau_\alpha\,V\,f^{-q-1}).
\end{aligned}
$$

Da qui si ha (2.4) e la prova è conclusa. $\square$

Il seguente risultato prova la $\mathcal{L}$-armonicità di quella che sarà la nostra soluzione fondamentale a meno di un fattore moltiplicativo (opportuno prolungamento della funzione integrale $G(x,t)$ di cui sotto) sull'insieme complementare dello spazio vettoriale p-dimensionale

$$
\{x=0\} := \big\{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+p}\,\big|\,x=0\big\}.
$$

[Si noti che questo insieme ha misura di Lebesgue nulla e *non* sconnette $\mathbb{R}^{n+p}$ poiché $n\geq 2$, essendo n la dimensione del primo strato di un gruppo di Carnot di passo due il cui secondo strato è non nullo. Si veda anche la nota.[2]] La validità delle ipotesi tecniche in esso contenute verrà provata nei capitoli successivi.

Osservazione 2.3 (*Centro di* $\mathbb{G}$). Dimostriamo che il centro del gruppo $\mathbb{G}$, ossia l'insieme

$$Z(\mathbb{G}) := \{(x,t) \in \mathbb{G} : (x,t) * (x',t') = (x',t') * (x,t), \quad \forall\, (x',t') \in \mathbb{G}\},$$

verifica la seguente identità:

$$Z(\mathbb{G}) = \left\{ (x,t) \in \mathbb{G} \,\middle|\, t \in \mathbb{R},\ x \in \bigcap_{\alpha=1}^{p} \ker(A^\alpha) \right\}. \tag{2.5}$$

Dimostrazione. Ricordando che $A^\alpha = \left(a^\alpha_{i,k}\right)_{i,k \le n}$ (ove $a^\alpha_{i,k} = \frac{1}{2}\, c^\alpha_{k,i}$), segue che A^α è antisimmetrica per ogni $\alpha = 1, \dots, p$ (si veda l'Osservazione 2.5) e inoltre, tenendo a mente che l'operazione del gruppo di Carnot $\mathbb{G}$ è

$$(x,t) * (x',t') = \begin{pmatrix} x + x' \\ t_\alpha + t'_\alpha + \langle A^\alpha x, x' \rangle \end{pmatrix} \qquad (\alpha = 1, \dots, p),$$

si ha

$$\begin{aligned}(x,t) * (x',t') = (x',t') * (x,t) \quad \forall (x',t') \in \mathbb{G} \\ \iff \langle A^\alpha\, x, x' \rangle = \langle A^\alpha\, x', x \rangle \quad \forall\, \alpha = 1, \dots, p, \forall\, x' \in \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

[2]Dal momento che $\mathbb{G}$ è un gruppo di Carnot di passo 2 il cui secondo strato è non nullo, segue che $n \ge 2$, quindi $\{x = 0\} \subseteq A := \{(0,0,x_3,\dots,x_N) : x_3,\dots,x_N \in \mathbb{R}\}$. Dunque se dimostriamo che A non sconnette $\mathbb{R}^N$, segue anche che $\{x = 0\}$ non sconnette $\mathbb{R}^N$. Consideriamo pertanto due punti $\overline{x} = (\overline{x_1}, \dots, \overline{x_N})$, $\overline{\overline{x}} = (\overline{\overline{x_1}}, \dots, \overline{\overline{x_N}})$ tali che $(\overline{x_1}, \overline{x_2}) \neq (0,0)$ e $(\overline{\overline{x_1}}, \overline{\overline{x_2}}) \neq (0,0)$ e mostriamo che esiste una curva continua che congiunge i due punti e che non intersechi l'insieme A. Sia $\gamma : [0,1] \mapsto \mathbb{R}^N \smallsetminus A$ tale che $\gamma(t) = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, t\,\overline{x_3}, \dots, t\,\overline{x_N})$; evidentemente γ è continua, contenuta in $\mathbb{R}^N \smallsetminus A$ e congiunge i punti $(\overline{x_1}, \overline{x_2}, 0, \dots, 0)$, $\overline{x}$. Analogamente si possono collegare con una curva continua contenuta in $\mathbb{R}^N \smallsetminus A$ i punti $(\overline{\overline{x_1}}, \overline{\overline{x_2}}, 0, \dots, 0)$, $\overline{\overline{x}}$. Dunque ci siamo ricondotti a dimostrare l'esistenza di una curva continua contenuta in $\mathbb{R}^N \smallsetminus A$ che colleghi i punti $(\overline{\overline{x_1}}, \overline{\overline{x_2}}, 0, \dots, 0)$ $(\overline{x_1}, \overline{x_2}, 0, \dots, 0)$. Essendo però $\{(x_1, x_2, 0, \dots, 0) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ uno spazio vettoriale isomorfo a $\mathbb{R}^2$, questo equivale a dimostrare che esiste una curva continua in $\mathbb{R}^2$ che collega due punti distinti dall'origine senza passare per $(0,0)$, il che è ovvio.

$$
\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow -\langle x, A^\alpha x' \rangle = \langle x, A^\alpha x' \rangle \quad \forall\, \alpha = 1, \dots, p,\, \forall\, x' \in \mathbb{R}^n \\
&\Longleftrightarrow \langle A^\alpha x', x \rangle = 0 \quad \forall\, \alpha = 1, \dots, p,\, \forall\, x' \in \mathbb{R}^n \\
&\Longleftrightarrow \langle x', A^\alpha x \rangle = 0 \quad \forall\, \alpha = 1, \dots, p,\, \forall\, x' \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}
$$

Quindi risulta che $\mathbb{R}^n$ è ortogonale a $A^\alpha x$ per ogni $\alpha = 1, \dots, p$; da ciò segue che $A^\alpha x = 0$ per ogni $\alpha = 1, \dots, p$ e quindi si ha (2.5).

In particolare, poiché $0 \in \bigcap_{\alpha=1}^p \ker(A^\alpha)$, risulta

$$\{x = 0\} \subseteq Z(\mathbb{G}).$$

Per esempio nel gruppo avente $p = 1$, $n = 3$ e associata matrice

$$A^1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

allora $\{(0, 0, 0, t) : t \in \mathbb{R}\} \subsetneqq Z(\mathbb{G}) = \{(0, 0, x_3, t) : x_3, t \in \mathbb{R}\}$.

Osserviamo anche che nei gruppi in cui almeno una delle associate matrici A^α è invertibile si ha

$$Z(\mathbb{G}) = \{x = 0\}.$$

Per esempio questo si verifica nei gruppi di tipo H (e quindi in quelli di Heisenberg). Inoltre $Z(\mathbb{G}) = \{x = 0\}$ anche nel gruppo libero in quanto le matrici A^α sono una base delle matrici antisimmetriche $n \times n$; precisamente esse sono date dalla famiglia $\left\{A^{(i,j)} \;:\; 1 \le i < j \le n\right\}$, ove $A^{(i,j)}$ è la matrice avente entrata 1 nel posto (i, j), entrata -1 nel posto (j, i) e 0 altrove. $\square$

2.1.1 Teorema di $\mathcal{L}$-armonicità della funzione G

Teorema 2.4. *Si supponga che le funzioni f e V soddisfino le ipotesi del Lemma 2.1 e supponiamo inoltre che siano verificate anche le seguenti ipotesi tecniche:*

i) *f risolve (GHJE);*

ii) *V risolve (GTE);*

iii) *per ogni fissato (x,t) tale che $x \neq 0$, la funzione* $\tau \mapsto \dfrac{V(\tau)}{f(x,t,\tau)^{\frac{n}{2}+p-1}}$ *è sommabile su $\mathbb{R}^p$;*

iv) *si ha $|f(x,t,\tau)| \geq \frac{1}{2} \|x\|^2$ per ogni $x \neq 0$ e per ogni $t, \tau \in \mathbb{R}^p$;*

v) *la funzione* $(x,t) \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}^p} \frac{V(\tau)}{f(x,t,\tau)^{\frac{n}{2}+p-1}}\, \mathrm{d}\tau$ *è continua su $\mathbb{R}^{n+p} \smallsetminus \{x=0\}$;*

vi) *$V(\tau)$ è positiva per ogni $\tau \in \mathbb{R}^p$;*

vii) *esistono due costanti $\widehat{\mathbf{c}}, \mathbf{c} > 0$ tali che se $\|\tau\| \geq 1$ si ha*

$$V(\tau) \leq \widehat{\mathbf{c}}\, \|\tau\|^{1/2} \exp(-\mathbf{c}\, \|\tau\|).$$

Allora posto

$$G(x,t) := \int_{\mathbb{R}^p} \frac{V(\tau)}{f(x,t,\tau)^{\frac{n}{2}+p-1}}\, \mathrm{d}\tau, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{n+p} \smallsetminus \{x=0\},$$

si ha

$$\mathcal{L}G(x,t) = 0 \quad \textit{per ogni } x \neq 0, \tag{2.6}$$

cioè $G(x,t)$ è $\mathcal{L}$-armonica fuori dall'insieme p-dimensionale $\{x=0\}$.

Dimostrazione. Osserviamo che per l'ipotesi iii) $G(x,t)$ è ben definita sul suo dominio. Essendo $\mathrm{Lie}\{Z_1, \ldots, Z_n\} = \mathrm{Lie}(\mathbb{G})$ allora $\mathcal{L}$ è un operatore somma di quadrati di campi di Hörmander in $\mathbb{R}^{n+p}$, dunque $\mathcal{L}$ è un operatore $\mathbf{C}^\infty$-ipoellittico; ne segue che per provare (2.6) è sufficiente dimostrarla nel senso debole delle distribuzioni sull'aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+p}$ complementare di $\{x=0\}$. Infatti, supponiamo di aver dimostrato la citata $\mathcal{L}$-armonicità in senso debole su Ω; allora esiste $g \in \mathbf{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ tale che

$$G(x,t) = g(x,t) \quad \text{q.d in } \Omega;$$

grazie alla ipotesi v) si ha allora $G = g$ su Ω e quindi $G \in \mathbf{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. Ne segue che, per ogni $\varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$,

$$0 = \int_\Omega G(x,t) \cdot \mathcal{L}\big(\varphi(x,t)\big)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t = \int_\Omega g(x,t) \cdot \mathcal{L}\big(\varphi(x,t)\big)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t$$

$$= \int_\Omega \mathcal{L}\big(g(x,t)\big) \cdot \varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_\Omega \mathcal{L}\big(G(x,t)\big) \cdot \varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,$$

dunque si ha (2.6) (poiché $G \in \mathbf{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$).

Il resto della prova consiste nel dimostrare (2.6) in senso debole. Da qui in avanti scegliamo

$$q = \frac{n}{2} + p - 1,$$

e fissiamo f, V come in i) e ii) dell'asserto del lemma: ne segue la validità dell'identità (2.4). Sia $\varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ e sia $K_\varphi = \mathrm{supp}\varphi$, allora

$$\begin{aligned}
&\int_{K_\varphi} G(x,t) \cdot \mathcal{L}\big(\varphi(x,t)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{K_\varphi} \left(\int_{\mathbb{R}^p} V(\tau) \cdot f^{-q}(x,t,\tau)\,\mathrm{d}\tau \right) \cdot \mathcal{L}\big(\varphi(x,t)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{(Fubini)}}{=} \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{K_\varphi} V(\tau) \cdot f^{-q}(x,t,\tau) \cdot \mathcal{L}\big(\varphi(x,t)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}\tau \\
&= \lim_{R\to+\infty} \int_{||\,\tau\,||\le R} \left(\int_{K_\varphi} \mathcal{L}\big(V(\tau) \cdot f^{-q}(x,t,\tau)\big) \cdot \varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}\tau \\
&\overset{(2.4)}{=} \lim_{R\to+\infty} \int_{||\,\tau\,||\le R} \left(\int_{K_\varphi} q \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\partial}{\partial \tau_\alpha} (\tau_\alpha \cdot V \cdot f^{-q-1}) \cdot \varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}\tau \\
&\overset{\text{(Fubini)}}{=} \lim_{R\to+\infty} \int_{K_\varphi} \left(\int_{||\,\tau\,||\le R} q \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\partial}{\partial \tau_\alpha} (\tau_\alpha \cdot V \cdot f^{-q-1})\,\mathrm{d}\tau \right) \varphi(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

dove nel secondo uguale si è applicato il teorema di Fubini vista l'ipotesi iii) e visto che K_φ è un compatto, mentre nella terza uguaglianza si è integrato per parti due volte (viste le ipotesi di regolarità delle funzioni V e f) e si è usato il fatto che K_φ è un compatto lontano dall'insieme $\{x = 0\}$.

Ma utilizzando il teorema della divergenza per il campo di vettori

$$F(\tau) := q\,V(\tau) \cdot f(x,t,\tau)^{-q-1} \cdot (\tau_1, \dots, \tau_\alpha, \dots, \tau_p),$$

si ha, indicando con $\nu(\tau)$ la normale esterna a $\{\tau \in \mathbb{R}^p \,:\, ||\,\tau\,|| \le R\}$ in τ,

$$\int_{||\,\tau\,||\le R} q \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\partial}{\partial \tau_\alpha} (\tau_\alpha \cdot V \cdot f^{-q-1})\,\mathrm{d}\tau$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\|\,\tau\,\|\le R} \mathrm{div} F \,\mathrm{d}\tau = \int_{\|\,\tau\,\|=R} \langle F(\tau), \nu(\tau)\rangle \,\mathrm{d}\sigma(\tau) \\
&= \int_{\|\,\tau\,\|=R} q\, V(\tau)\cdot f(x,t,\tau)^{-q-1}\cdot \langle \tau, \nu(\tau)\rangle \,\mathrm{d}\sigma(\tau).
\end{aligned}
$$

Perciò, essendo $(x,t)\in K_\varphi$ si può applicare la stima nell'ipotesi iv), e si ottiene

$$
\begin{aligned}
&\Big| \int_{\|\,\tau\,\|\le R} q \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\partial}{\partial \tau_\alpha}(\tau_\alpha \cdot V \cdot f^{-q-1})\,\mathrm{d}\tau \Big| \\
&= \Big| \int_{\|\,\tau\,\|=R} q\, V(\tau)\cdot f(x,t,\tau)^{-q-1}\cdot \langle \tau, \nu(\tau)\rangle \,\mathrm{d}\sigma(\tau) \Big| \\
&\overset{\text{(vi)}}{\le} \int_{\|\,\tau\,\|=R} q\, V(\tau)\cdot |f(x,t,\tau)|^{-q-1}\cdot \|\tau\| \,\mathrm{d}\sigma(\tau) \\
&\overset{\text{(iv)}}{\le} q\, 2^{q+1} \int_{\|\,\tau\,\|=R} R\cdot V(\tau)\cdot \|x\|^{-2q-2}\,\mathrm{d}\sigma(\tau) =: (\star).
\end{aligned}
$$

Parametrizzando la sfera $\{\tau\in\mathbb{R}^p \,:\, \|\,\tau\,\| = R\}$ con le coordinate sferiche usuali, si ha $\tau = R\cdot N(\theta)$ dove $\theta \in N$ (opportuno compatto di $\mathbb{R}^{p-1}$) e $\mathrm{d}\sigma(\tau) = \widetilde{N}(\theta)\,\mathrm{d}\theta$ (per un'opportuna densità $\widetilde{N}$ di classe $\mathbf{C}^\infty$ e limitata); ne segue la stima ($\mathbf{c}$ denota una qualche costante dimensionale)

$$
(\star) \le q\, 2^{q+1}\cdot \|x\|^{-2q-2}\cdot \int_N R\cdot V\big(R\cdot N(\theta)\big)\cdot R^{p-1}\cdot \widetilde{N}(\theta)\,\mathrm{d}\theta =: (2\star).
$$

Visto che dobbiamo performare il limite per $R\to+\infty$, è lecito utilizzare l'ipotesi vii) che dà

$$
(2\star) \le \widetilde{\mathbf{c}}\, \|\, x\,\|^{-2q-2}\cdot \frac{R^{\frac{1}{2}+p}}{e^{\mathbf{c}\cdot R}}, \quad \text{per } R\ge 1,
$$

dove $\mathbf{c}$ è come in vii) e

$$
\widetilde{\mathbf{c}} := q\, 2^{q+1}\, \widehat{\mathbf{c}}\cdot \int_N \widetilde{N}(\theta)\,\mathrm{d}\theta < \infty.
$$

Tutto ciò premesso, abbiamo finalmente la stima

$$
\Big| \int_{K_\varphi} G(x,t)\cdot \mathcal{L}\big(\varphi(x,t)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \Big|
$$

$$\leq \lim_{R\to+\infty} \int_{K_\varphi} \left| \int_{||\,\tau\,|| \leq R} q \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\partial}{\partial \tau_\alpha} (\tau_\alpha \cdot V \cdot f^{-q-1})\, \mathrm{d}\tau \right| \big|\varphi(x,t)\big|\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t$$
$$\leq \lim_{R\to+\infty} \widetilde{\mathbf{c}} \cdot \frac{R^{\frac{1}{2}+p}}{e^{\mathbf{c}\cdot R}} \cdot \int_{K_\varphi} \big|\varphi(x,t)\big| \cdot ||\; x \;||^{-2q-2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t = 0$$

in quanto K_φ è un compatto contenuto in Ω e $||\; x \;||^{-2q-2} \cdot \big|\varphi(x,t)\big|$ è continua su K_φ. Da qui segue

$$\int_\Omega G(x,t) \cdot \mathcal{L}\big(\varphi(x,t)\big)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t = 0,$$

che è quanto volevamo provare. $\square$

2.2 La scelta delle funzioni V e f

Poniamo

$$\Omega(\tau) := -i \sum_{\alpha=1}^{p} \tau_\alpha \cdot A^\alpha, \qquad A(\tau) := \sum_{\alpha=1}^{p} \tau_\alpha \cdot A^\alpha, \tag{2.7}$$

ove

$$A^\alpha = \big(a^\alpha_{j,k}\big)_{j,k=1,\ldots,n}$$

sono le matrici (antisimmetriche e linearmente indipendenti) tali che l'operazione del gruppo di Carnot $\mathbb{G}$ è

$$(x,t) * (x',t') = \begin{pmatrix} x + x' \\ t_\alpha + t'_\alpha + \langle A^\alpha x, x' \rangle \end{pmatrix} \qquad (\alpha = 1, \ldots, p),$$

come visto nell'Osservazione 1.9.

Osservazione 2.5. Fissato $\alpha \in \{1, \ldots, p\}$, essendo $a^\alpha_{j,k} = \frac{1}{2} c^\alpha_{k,j}$, allora si ha l'identità $A^\alpha = \frac{1}{2} \left(B^\alpha\right)^T$ da cui segue che A^α è antisimmetrica poiché ogni B^α è antisimmetrica.

Inoltre per il fatto che $B^1, \ldots, B^p$ sono matrici linearmente indipendenti, allora risulta che ciò è vero anche per le matrici $A^1, \ldots, A^p$. In più $A(\tau)$ è una matrice antisimmetrica per ogni $\tau \in \mathbb{C}^p$.

Osservazione 2.6 (*$\Omega(\tau)$ è hermitiana per τ reale*). Per l'osservazione 2.5

$$\Omega(\tau)^T = -i\sum_{\alpha=1}^{p}\tau_\alpha\cdot(A^\alpha)^T = +i\sum_{\alpha=1}^{p}\tau_\alpha\cdot A^\alpha = -\Omega(\tau) \quad \forall\tau\in\mathbb{C}^p,$$

perciò, fissato $\tau\in\mathbb{R}^p$,

$$\Omega(\tau)^* = \overline{\Omega(\tau)^T} = \overline{-\Omega(\tau)} = -\overline{\big(-i\sum_{\alpha=1}^{p}\tau_\alpha\cdot A^\alpha\big)} = -i\sum_{\alpha=1}^{p}\tau_\alpha\cdot A^\alpha = \Omega(\tau).$$

Quindi $\Omega(\tau)$ è una matrice antisimmetrica per ogni $\tau\in\mathbb{C}^p$ e *hermitiana per ogni $\tau\in\mathbb{R}^p$*. Ne segue in particolare che, per $\tau\in\mathbb{R}^p$ (condizione che avremo sempre nel seguito), $\Omega(\tau)$ (matrice ad entrate immaginarie pure) ha tutti gli autovalori reali ed è diagonalizzabile (in campo complesso).

Definizione 2.7 (Definizione delle funzioni V e f). Si definiscono le funzioni $V(\tau)$ e $f(x,t,\tau)$ per $\tau\in\mathbb{R}^p$ e $(x,t)\in\mathbb{G}$, nel modo seguente:

$$V(\tau) := \sqrt{\det\left(\Big(\operatorname{sinhc}\big(\Omega(\tau)\big)\Big)^{-1}\right)},$$

$$f(x,t,\tau) := \frac{1}{2}\left\langle\Big(\operatorname{sinhc}\big(\Omega(\tau)\big)\Big)^{-1}\cdot\cosh\big(\Omega(\tau)\big)\cdot x, x\right\rangle_{\mathbb{C}^n} - i\,\langle t,\tau\rangle,$$

$$\text{con } \operatorname{sinhc}(z) := \begin{cases}\dfrac{\sinh(z)}{z} & \text{se } z\neq 0\\[2ex] 1 & \text{se } z=0,\end{cases} \qquad z\in\mathbb{C}.$$

Abbiamo convenuto di porre $\langle z,w\rangle_{\mathbb{C}^n} := \sum_{j=1}^{n} z_j\,\overline{w_j}$ per ogni $z,w\in\mathbb{C}^n$ (prodotto hermitiano standard). [Vedremo in seguito che per x,τ a componenti reali si può sostituire nella definizione di f il prodotto hermitiano standard con quello euclideo di $\mathbb{R}^n$.]

Occorre mostrare che la matrice $\operatorname{sinhc}\big(\Omega(\tau)\big)$ è invertibile ed ha determinante positivo per ogni $\tau\in\mathbb{R}^p$, il che verrà fatto nella prossima sezione.

2.2.1 Buona positura della funzione V

Mostriamo che *la Definizione 2.7 di V è ben posta per ogni* $\tau \in \mathbb{R}^p$.

Poiché $\operatorname{sinhc}(z)$ è una funzione intera su $\mathbb{C}$, $\operatorname{sinhc}(\Omega(\tau))$ è ben posta e olomorfa come funzione di $\tau \in \mathbb{C}^p$; quindi $\det(\operatorname{sinhc}(\Omega(\tau)))$ è ben data e olomorfa per ogni $\tau \in \mathbb{C}^p$. Mostriamo che

$$\det\Big(\operatorname{sinhc}\big(\Omega(\tau)\big)\Big) > 0 \quad \forall\, \tau \in \mathbb{R}^p. \tag{2.8}$$

Questo dimostrerà che $\operatorname{sinhc}(\Omega(\tau))$ è invertibile per ogni $\tau \in \mathbb{R}^p$.

Fissato τ in $\mathbb{C}^p$, per la forma canonica di Jordan complessa di $\Omega(\tau)$,

$$\Omega(\tau) = U(\tau) \cdot D(\tau) \cdot U^{-1}(\tau),$$

ove $U(\tau)$ è unitaria e $D(\tau)$ è diagonale, e denotando con

$$\operatorname{sinhc}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cdot z^k \quad (z \in \mathbb{C})$$

lo sviluppo in serie di potenze di $\operatorname{sinhc}(z)$, si ha

$$\begin{aligned}
\operatorname{sinhc}\Big(\Omega(\tau)\Big) &= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cdot \Omega^k(\tau) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cdot U(\tau) \cdot D^k(\tau) \cdot U^{-1}(\tau) \\
&= U(\tau) \cdot \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cdot D^k(\tau)\Big) \cdot U^{-1}(\tau) \\
&= U(\tau) \cdot \operatorname{sinhc}\Big(D(\tau)\Big) \cdot U^{-1}(\tau).
\end{aligned}$$

Da qui segue

$$\det\Big(\operatorname{sinhc}\big(\Omega(\tau)\big)\Big) = \det\Big(\operatorname{sinhc}\Big(D(\tau)\Big)\Big) = \prod_{k=1}^{n} \operatorname{sinhc}\big(\lambda_k(\tau)\big), \tag{2.9}$$

dove $\lambda_1(\tau), \ldots, \lambda_n(\tau)$ indicano gli autovalori della matrice $\Omega(\tau)$. Ora

$$\begin{aligned}
\operatorname{sinhc}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2z} = 0 &\iff e^{2z} = 1 \ \wedge\ z \neq 0 \\
&\iff 2z = 2k\pi \cdot i, \quad k \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}
\end{aligned}$$

$$\iff z = k\pi \cdot i, \quad k \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}.$$

Quindi $\operatorname{sinhc}(z) \neq 0$ su $S := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |\operatorname{Im}(z)| < \pi\}$. Dunque

$$\det\Big(\operatorname{sinhc}\big(\Omega(\tau)\big)\Big) \neq 0 \quad \forall \tau \in \mathbb{C}^p, \ ||\tau||_{\mathbb{C}^p} \ll 1, \tag{2.10}$$

in quanto gli autovalori $\lambda_j(\tau)$ sono funzioni continue di $\tau \in \mathbb{C}^p$.

In particolare, per tali τ, esiste $(\operatorname{sinhc}(\Omega(\tau)))^{-1}$ e vale che

$$\det\left(\Big(\operatorname{sinhc}\big(\Omega(\tau)\big)\Big)^{-1}\right) = \frac{1}{\det\Big(\operatorname{sinhc}\big(\Omega(\tau)\big)\Big)}, \quad \forall \tau \in \mathbb{C}^p, \ ||\tau||_{\mathbb{C}^p} \ll 1.$$

Se invece $\tau \in \mathbb{R}^p$ (con norma possibilmente grande), si ha che $\Omega(\tau)$ è una matrice hermitiana e quindi essa ha autovalori reali[3]; dunque, per (2.9), segue che $\det(\operatorname{sinhc}(\Omega(\tau))) \neq 0$. Essendo

$$\operatorname{sinhc}(-z) = \frac{e^{-z} - e^{z}}{-2z} = \frac{-(e^{z} - e^{-z})}{-2z} = \operatorname{sinhc}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\text{e } \operatorname{sinhc}(z) > 0 \quad \forall z \in \mathbb{R},$$

allora $\det\Big(\operatorname{sinhc}\big(\Omega(\tau)\big)\Big) > 0$ per ogni $\tau \in \mathbb{R}^p$. Questo prova (2.8).

Osservazione 2.8. Si noti che $\mathbb{C}^p \ni \tau \mapsto \det(\operatorname{sinhc}(\Omega(\tau)))$ è una funzione olomorfa, e (stante (2.8) e mediante un semplice argomento di continuità) essa ha valori (eventualmente complessi) *non nulli su un aperto di $\mathbb{C}^p$ che contiene $\mathbb{R}^p$*; ne segue che la funzione definita da $\mathbb{R}^p \ni \tau \mapsto \det((\operatorname{sinhc}(\Omega(\tau)))^{-1})$ è real-analitica e a valori reali e positivi.

Ne segue che la funzione

$$\mathbb{R}^p \ni \tau \mapsto V(\tau) = \sqrt{\det((\operatorname{sinhc}(\Omega(\tau)))^{-1})}$$

[3] *Sia $A \in \mathfrak{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ hermitiana, allora A ha solo autovalori reali.* Infatti siano $\lambda \in \mathbb{C}$ e $v \in \mathbb{C}^n$, $v \neq 0$, rispettivamente un autovalore e un autovettore di A relativo all'autovalore λ; allora $A \cdot v = \lambda \cdot v$, quindi $v^* \cdot A^* = \overline{\lambda} \cdot v^*$, ma A è hermitiana per ipotesi, perciò $v^* \cdot A = \overline{\lambda} \cdot v^*$. Pertanto $\lambda \cdot ||v||^2 = \lambda \cdot v^* \cdot v = v^* \cdot A \cdot v = \overline{\lambda} \cdot v^* \cdot v = \overline{\lambda} \cdot ||v||^2$, quindi (cancellando $||v||^2$ che è non nullo) $\lambda = \overline{\lambda}$.

è ben posta, real-analitica e a valori reali positivi. Si ha ovviamente

$$V(\tau) = \sqrt{\det\left(\left(\mathrm{sinhc}\big(\Omega(\tau)\big)\right)^{-1}\right)} = \sqrt{\frac{1}{\det\left(\mathrm{sinhc}\big(\Omega(\tau)\big)\right)}}, \quad \tau \in \mathbb{R}^p.$$

Inoltre, posto

$$(\mathrm{sinhc})^{-1}(z) := \begin{cases} \dfrac{z}{\sinh(z)} & \text{se } z \in S \\ 1 & \text{se } z = 0, \end{cases}$$

si ha che $(\mathrm{sinhc})^{-1}(z) = \frac{1}{\mathrm{sinhc}(z)} = \frac{1}{\frac{\sinh(z)}{z}}$ per $z \in S$. In particolare, si ottiene che $(\mathrm{sinhc})^{-1}(z)$ è olomorfa su S. Quindi segue che

$$(\mathrm{sinhc})^{-1}\big(\Omega(\tau)\big), \quad \det\left((\mathrm{sinhc})^{-1}\big(\Omega(\tau)\big)\right)$$

sono ben poste e olomorfe per ogni $\tau \in \mathbb{C}^p$ con $\|\tau\|_{\mathbb{C}^p} \ll 1$: infatti, considerando la norma matriciale di Frobenius

$$||(h_{i,j})||_F := \sqrt{\sum_{i,j} |h_{i,j}|^2},$$

si ha $||\Omega(\tau)||_F \ll \pi$ per $\|\tau\|_{\mathbb{C}^p} \ll 1$. Pertanto per $\tau \in \mathbb{C}^p$ tale che $\|\tau\|_{\mathbb{C}^p} \ll 1$, si ottiene che

$$\begin{aligned} &\det \mathrm{sinhc}\big(\Omega(\tau)\big) \neq 0 \text{ e} \\ &\det\left((\mathrm{sinhc})^{-1}\big(\Omega(\tau)\big)\right) = \det\left(\frac{1}{\mathrm{sinhc}\big(\Omega(\tau)\big)}\right) = \frac{1}{\det\left(\mathrm{sinhc}\big(\Omega(\tau)\big)\right)}. \end{aligned}$$

Infine per $\tau \in \mathbb{R}^p$ con $\|\tau\| \ll 1$ vale dunque

$$V(\tau) = \sqrt{\det\left((\mathrm{sinhc})^{-1}\big(\Omega(\tau)\big)\right)}. \tag{2.11}$$

Osservazione 2.9 (*Il calcolo di V per diagonalizzazione*). Grazie a (2.9) segue

$$V(\tau) = \sqrt{\left(\prod_{k=1}^{n} \mathrm{sinhc}\big(\lambda_k(\tau)\big)\right)^{-1}}, \tag{2.12}$$

ove $\lambda_1(\tau), \ldots, \lambda_n(\tau)$ sono gli autovalori della matrice $\Omega(\tau)$ in (2.7) contati con molteplicità.

2.2.2 Buona positura della funzione f

Ora discutiamo la buona positura della funzione f. Di certo non ci sono problemi di positura per quanto riguarda le variabili $(x, t) \in \mathbb{G}$; dunque non ci rimane che affrontare il problema per la variabile $\tau \in \mathbb{R}^p$. A tal fine, possiamo utilizzare (2.10) della sezione precedente. Essendo $\cosh\big(\Omega(\tau)\big)$ una funzione olomorfa per $\tau \in \mathbb{C}^p$, allora $f(x, t, \tau)$ è perlomeno ben posta e olomorfa per ogni $\tau \in \mathbb{C}^p$ con $||\tau||_{\mathbb{C}^p} \ll 1$ (in realtà essa è olomorfa anche su un aperto di $\mathbb{C}^p$ contenente $\mathbb{R}^p$; si veda l'Osservazione 2.8).

Per quanto riguarda i τ a entrate reali, possiamo sfruttare (2.8) per ottenere che f è real-analitica per ogni $\tau \in \mathbb{R}^p$ e per ogni $(x, t) \in \mathbb{G}$.

Di più, posto

$$(\tanh\mathrm{c})^{-1}(z) := \begin{cases} \dfrac{z}{\tanh(z)} & \text{se } z \in S_1 = \{z \in \mathbb{C}\ :\ |\,\mathbb{I}\mathrm{m}\,(z)\,| < \frac{\pi}{2}\} \\ 1 & \text{se } z = 0, \end{cases}$$

e valendo che $\tanh(z) = 0 \iff \sinh(z) = 0$, allora $(\tanh\mathrm{c})^{-1}(z)$ risulta olomorfa su S_1 (si vedano anche i calcoli nella sezione precedente). Perciò, per $\tau \in \mathbb{C}^p$ con $\|\tau\|_{\mathbb{C}^p} \ll 1$, valgono le seguenti identità:

$$\begin{aligned} f(x, t, \tau) &= \tfrac{1}{2}\,\langle(\tanh\mathrm{c})^{-1}\big(\Omega(\tau)\big)\cdot x, x\rangle_{\mathbb{C}^n} - i\langle t, \tau\rangle \\ &= \tfrac{1}{2}\,\langle\Omega(\tau)\cdot\coth\big(\Omega(\tau)\big)\cdot x, x\rangle_{\mathbb{C}^n} - i\langle t, \tau\rangle \\ &= \tfrac{1}{2}\,\big\langle(\sinh\mathrm{c})^{-1}(\Omega(\tau))\cdot\cosh\big(\Omega(\tau)\big)\cdot x, x\big\rangle_{\mathbb{C}^n} - i\langle t, \tau\rangle, \end{aligned}$$

in quanto

$$\coth(z)\cdot z = \frac{\cosh(z)}{\sinh(z)}\cdot z = \frac{z}{\frac{\sinh(z)}{\cosh(z)}} = \frac{z}{\tanh(z)}, \quad z \in S_1.$$

Per futuri riferimenti, scriviamo esplicitamente la formula di cui sopra:

$$f(x, t, \tau) = \tfrac{1}{2}\,\big\langle(\sinh\mathrm{c})^{-1}(\Omega(\tau))\cdot\cosh\big(\Omega(\tau)\big)\cdot x, x\big\rangle_{\mathbb{C}^n} - i\langle t, \tau\rangle. \tag{2.13}$$

Osservazione 2.10. Per quanto dimostrato nelle Sezioni 2.2.1 e 2.2.2 si può dunque cercare di verificare inizialmente le equazioni (GTE) e (GHJE) utilizzando rispettivamente le identità "in piccolo" (2.11) e (2.13), per poi ottenerle per ogni $\tau \in \mathbb{R}^p$ per prolungamento analitico.

Osservazione 2.11 (*Il calcolo di f per diagonalizzazione*). Se $\lambda_1(\tau), \dots, \lambda_n(\tau)$ sono gli autovalori della matrice hermitiana $\Omega(\tau)$ in (2.7) contati con molteplicità e se $u_1(\tau), \dots, u_n(\tau)$ sono degli associati autovettori, scelti in modo da formare una base ortonormale di $\mathbb{C}^n$, si ha la formula

$$f(x,t,\tau) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\cosh(\lambda_i(\tau))}{\operatorname{sinhc}(\lambda_i(\tau))} \cdot \Big| \langle u_i(\tau), x \rangle_{\mathbb{C}^n} \Big|^2 - i \langle t, \tau \rangle. \tag{2.14}$$

Questo segue dalla identità (3.3) nella Proposizione 3.2 contenuta nel prossimo capitolo.

Capitolo 3

Risoluzione di (GHJE) e (GTE)

Nel presente capitolo ci proponiamo di dimostrare che le funzioni f e V, introdotte nel Capitolo 2, verificano le equazioni differenziali (GHJE) e (GTE) rispettivamente (si veda il Lemma 2.2 a pagina 22 per il significato di (GHJE) e (GTE)). Si vedrà come questo fatto dipende fortemente da alcune particolari proprietà della matrice $\Lambda(\tau) := (\mathrm{sinhc}(\Omega(\tau)))^{-1} \cosh(\Omega(\tau))$; in più, la dimostrazione del fatto che V verifica (GTE) discende anche dall'azione del campo vettoriale $T := \sum_{\alpha=1}^{p} \tau_\alpha \cdot \partial_{\tau_\alpha}$ sulla funzione $\det \mathrm{sinhc}(\Omega(\tau))$. Si farà inoltre ricorso ad alcuni lemmi di algebra delle matrici che presentiamo in un'appendice a fine capitolo.

3.1 Proprietà della matrice $\Lambda(\tau)$

Definizione 3.1 (La matrice $\Lambda(\tau)$)**.** Per ogni $\tau \in \mathbb{R}^p$ sia $\Omega(\tau)$ la matrice hermitiana introdotta in (2.7) a pagina 30. Poniamo

$$\Lambda(\tau) := \big(\mathrm{sinhc}(\Omega(\tau))\big)^{-1} \cdot \cosh\big(\Omega(\tau)\big). \tag{3.1}$$

La definizione è ben posta in forza di (2.8), la quale garantisce che la matrice $\mathrm{sinhc}(\Omega(\tau))$ è invertibile.

$$\text{Si ricordi anche che } \operatorname{sinhc}(z) =: \begin{cases} \dfrac{\sinh(z)}{z} & \text{se } z \neq 0 \\ \\ 1 & \text{se } z = 0, \end{cases} \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Si noti che, con questa definizione, possiamo riscrivere la funzione f introdotta nella Definizione 2.7 a pagina 31 nel modo seguente:

$$f(x,t,\tau) = \frac{1}{2} \langle \Lambda(\tau)\, x, x \rangle_{\mathbb{C}^n} - i \langle t, \tau \rangle. \tag{3.2}$$

Come vedremo tra poco, il prodotto hermitiano standard di cui sopra si può sostituire col prodotto scalare standard.

Utilizzando l'Osservazione 2.8 a pagina 33 segue che $\Lambda(\tau)$ è ben posta anche per $\tau \in \mathbb{C}^p$ appartenente ad un aperto contenente $\mathbb{R}^p$. La matrice $\Lambda(\tau)$ ha anche altre notevoli proprietà, alcune delle quali sono raccolte nella seguente proposizione.

Proposizione 3.2. *Se $\Lambda(\tau)$ è come nella Definizione 3.1 si ha:*

i) *$\tau \mapsto \Lambda(\tau)$ si estende ad una funzione olomorfa di τ appartenente ad un aperto di $\mathbb{C}^p$ contenente $\mathbb{R}^p$; in particolare $\mathbb{R}^p \ni \tau \mapsto \Lambda(\tau)$ è real-analitica;*

ii) *per il medesimo aperto di $\mathbb{C}^p$ di cui sopra, $\Lambda(\tau)$ è una matrice simmetrica; per $\tau \in \mathbb{R}^p$ si ha, di più, che $\Lambda(\tau)$ è una matrice reale, simmetrica e definita positiva;*

iii) *Se $\lambda_1(\tau), \dots, \lambda_n(\tau)$ sono gli autovalori della matrice hermitiana $\Omega(\tau)$ contati con molteplicità, e se $u_1(\tau), \dots, u_n(\tau)$ sono degli associati autovettori, scelti in modo da formare una base ortonormale di $\mathbb{C}^n$, si ha la formula*

$$\langle \Lambda(\tau)\, x, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\cosh(\lambda_i(\tau))}{\operatorname{sinhc}(\lambda_i(\tau))} \cdot \left| \langle u_i(\tau), x \rangle_{\mathbb{C}^n} \right|^2 \quad , \tau \in \mathbb{R}^p. \tag{3.3}$$

Dimostrazione. Per quanto riguarda la proprietà i), essa è immediata conseguenza della citata Osservazione 2.8 a pagina 33.

Proviamo dunque la proprietà ii). Fissiamo $\tau \in \mathbb{C}^p$ per cui $\mathrm{sinhc}(\Omega(\tau))$ è invertibile. Utilizzando i Lemmi 3.7, 3.8, (si veda l'Appendice a questo capitolo) e posto per brevità $\Lambda(\tau) = \Lambda$, $\Omega(\tau) = \Omega$, si ottiene

$$\begin{aligned}\Lambda^T &= \Big(\big(\mathrm{sinhc}(\Omega)\big)^T\Big)^{-1} \cdot \Big(\cosh(\Omega)\Big)^T = \Big(\mathrm{sinhc}(\Omega^T)\Big)^{-1} \cdot \Big(\cosh(\Omega^T)\Big)\\ &= \Big(\mathrm{sinhc}(-\Omega)\Big)^{-1} \cdot \cosh(-\Omega) = \Big(\mathrm{sinhc}(\Omega)\Big)^{-1} \cdot \cosh(\Omega) = \Lambda,\end{aligned}$$

sfruttando anche il fatto che Ω è antisimmetrica e la parità delle funzioni $\mathrm{sinhc}(z)$ e $\cosh(z)$. Dunque Λ è simmetrica.

Fissiamo $\tau \in \mathbb{R}^p$; poiché Ω è una matrice hermitiana (quindi normale e dunque unitariamente diagonalizzabile in campo complesso), esiste una matrice unitaria U (le cui colonne sono una base ortonormale di autovettori per gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ di Ω contati con molteplicità), si ha

$$\begin{aligned}\Lambda &= \Big(U \cdot \mathrm{diag}\big(\mathrm{sinhc}(\lambda_1), \dots, \mathrm{sinhc}(\lambda_n)\big) \cdot U^*\Big)^{-1} \cdot\\ &\quad \cdot \Big(U \cdot \mathrm{diag}\big(\cosh(\lambda_1), \dots, \cosh(\lambda_n)\big) \cdot U^*\Big)\\ &= U \cdot \mathrm{diag}\Big(\frac{1}{\mathrm{sinhc}(\lambda_1)}, \dots, \frac{1}{\mathrm{sinhc}(\lambda_n)}\Big) \cdot U^* \cdot\\ &\quad \cdot U \cdot \mathrm{diag}\big(\cosh(\lambda_1), \dots, \cosh(\lambda_n)\big) \cdot U^*\\ &= U \cdot \mathrm{diag}\Big(\frac{\cosh(\lambda_1)}{\mathrm{sinhc}(\lambda_1)}, \dots, \frac{\cosh(\lambda_n)}{\mathrm{sinhc}(\lambda_n)}\Big) \cdot U^*.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Essendo i λ_i tutti reali (poiché Ω è hermitiana), e per il fatto che le funzioni $\mathrm{sinhc}(z), \cosh(z)$ sono positive per ogni $z \in \mathbb{R}$, allora

$$\frac{\cosh(\lambda_i)}{\mathrm{sinhc}(\lambda_i)} > 0 \quad \forall\, i = 1 \dots, n.$$

L'identità (3.4) prova direttamente che gli autovalori di Λ sono reali e positivi. Per dimostrare che Λ è definita positiva ci resta da provare che essa è simmetrica e reale (il che non è ovvio poiché Ω ha entrate complesse). A tal fine, posto $D := \mathrm{diag}\big(\frac{\cosh(\lambda_1)}{\mathrm{sinhc}(\lambda_1)}, \dots, \frac{\cosh(\lambda_n)}{\mathrm{sinhc}(\lambda_n)}\big)$ si ha

$$\Lambda^* = \Big(U \cdot D \cdot U^*\Big)^* = U \cdot D^* \cdot U^* = U \cdot D \cdot U^* = \Lambda,$$

quindi Λ è hermitiana. Ci resta da provare che Λ è reale. Notando che $\sinh(iz) = i\sin(z)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$, posto

$$\mathrm{sinc}(z) := \begin{cases} \frac{\sin(z)}{z} & \text{se } z \neq 0 \\ \\ 1 & \text{se } z = 0 \end{cases} \qquad z \in \mathbb{C},$$

si ha

$$\mathrm{sinhc}(iz) = \frac{\sinh(iz)}{iz} = \frac{i\sin(z)}{iz} = \frac{\sin(z)}{z} = \mathrm{sinc}(z), \quad \forall\, z \in \mathbb{C},\, z \neq 0.$$

Ne segue che $\mathrm{sinhc}(iz) = \mathrm{sinc}(z)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$; si prova analogamente che $\cosh(iz) = \cos(z)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Quindi, ricordando che $A(\tau) = \sum_{\alpha=1}^{p} \tau_\alpha \cdot A^\alpha$ (e denotando brevemente $A(\tau)$ con A), dalla identità $\Omega = -i\,A$ si ottiene

$$\begin{aligned} \Lambda &= \Big(\mathrm{sinhc}(-iA)\Big)^{-1} \cdot \cosh(-iA) = \Big(\mathrm{sinhc}(iA)\Big)^{-1} \cdot \cosh(iA) \\ &= \Big(\mathrm{sinc}(A)\Big)^{-1} \cdot \cos(A) \in \mathfrak{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

essendo A reale giacché $\tau \in \mathbb{R}^p$.

Passiamo ora a provare iii). Come nel punto precedente sia $\tau \in \mathbb{R}^p$; siano i $\lambda_i(\tau)$ e gli $u_i(\tau)$ come nell'asserto della proposizione (abbreviati con λ_i, u_i). Sia U la matrice le cui colonne sono date dai vettori colonna $u_1, \dots, u_n$. È ovvio che U è unitaria e si hanno contemporaneamente le seguenti decomposizioni (si veda la prova del punto precedente):

$$\begin{aligned} &\Omega = U \cdot \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot U^*, \\ &\Lambda = U \cdot D \cdot U^*, \quad \text{ove } D = \mathrm{diag}\Big(\frac{\cosh(\lambda_1)}{\mathrm{sinhc}(\lambda_1)}, \dots, \frac{\cosh(\lambda_n)}{\mathrm{sinhc}(\lambda_n)}\Big). \end{aligned}$$

Ne discende il seguente calcolo:

$$\begin{aligned} &\langle \Lambda \cdot x, x \rangle_{\mathbb{C}^n} = x^* \cdot \Lambda \cdot x = (x^* \cdot U) \cdot D \cdot (U^* \cdot x) \\ &= (U^* \cdot x)^* \cdot D \cdot (U^* \cdot x) = \sum_{i=1}^{n} (U^* \cdot x)_i^* \cdot \sum_{j=1}^{n} d_{i,j} \cdot (U^* \cdot x)_j \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} (U^* \cdot x)_i^* \cdot d_{i,i} \cdot (U^* \cdot x)_i = \sum_{i=1}^{n} d_{i,i} \cdot \Big|(U^* \cdot x)_i\Big|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} d_{i,i} \cdot \Big|\sum_{k=1}^{n} \overline{U_{k,i}} \cdot x_k\Big|^2 = \sum_{i=1}^{n} d_{i,i} \cdot \Big|\sum_{k=1}^{n} U_{k,i} \cdot \overline{x_k}\Big|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} d_{i,i}\Big|\Big\langle (U_{1,i}, \dots, U_{n,i}), x\Big\rangle_{\mathbb{C}^n}\Big|^2 = \sum_{i=1}^{n} d_{i,i} |\langle u_i, x\rangle_{\mathbb{C}^n}|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\cosh(\lambda_i)}{\mathrm{sinhc}(\lambda_i)} \, |\langle u_i, x\rangle_{\mathbb{C}^n}|^2.
\end{aligned}
$$

Questo conclude la prova. □

Osservazione 3.3. Sia

$$
(\mathrm{sinhc})^{-1}(z) := \begin{cases} \dfrac{z}{\sinh(z)} & \text{se } z \in S := \{z \in \mathbb{C} : |\mathbb{I}\mathrm{m}\, z| < \pi\} \\ 1 & \text{se } z = 0. \end{cases}
$$

Ricordando che

$$
\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} \, x^n, \qquad \text{per } |x| < 2\pi,
$$

dove i B_n sono i noti *numeri di Bernoulli*, definiti per ricorrenza nel modo seguente:

i) $B_0 := 1$;

ii) $B_n := -n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k!\,(n+1-k)!}, \qquad n \geq 1,$

(si sa che $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_{2k+1} = 0$ e $B_{2k} = (-1)^{k+1}|B_{2k}|$ per ogni $k \geq 1$) allora si ottiene per $|z| < \pi$ (si noti che così $z \in S$)

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{sinhc})^{-1}(z) \cdot \cosh(z) &= \frac{z}{\sinh(z)} \cdot \cosh(z) = z \cdot \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} \\
&= z \cdot \frac{e^{2z} + 1}{e^{2z} - 1} = z \cdot \frac{e^{2z} - 1 + 2}{e^{2z} - 1} \\
&= z \cdot \left(1 + \frac{2}{e^{2z} - 1}\right) = z + \frac{2z}{e^{2z} - 1} = z + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} (2z)^n
\end{aligned}
$$

$$= z + 1 - \frac{1}{2}\,2z + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!}(2z)^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\,4^k\,z^{2k}.$$

Come si vede dalla formula (2.13), per $\tau \in \mathbb{C}^p$ con $\|\tau\|_{\mathbb{C}^p} \ll 1$, vale

$$\Lambda(\tau) = (\mathrm{sinhc})^{-1}\big(\Omega(\tau)\big)\ \cosh\big(\Omega(\tau)\big);$$

perciò, poiché i $\tau \in \mathbb{C}^p$ tali che $\|\tau\|_{\mathbb{C}^p} \ll 1$ rendono la norma matriciale $\|\Omega(\tau)\|_F$ opportunamente piccola (ad esempio $< \pi$), si ha che (si ricordi l'identità $\Omega(\tau) = -i\,A(\tau)$)

$$\begin{aligned}\Lambda(\tau) &= (\mathrm{sinhc})^{-1}\big(\Omega(\tau)\big) \cdot \cosh\big(\Omega(\tau)\big)\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4^k}{(2k)!}\,(-1)^{k+1}|B_{2k}|\,(-i \cdot A(\tau))^{2k}\\ &= -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4^k}{(2k)!}\,|B_{2k}|\,(A(\tau))^{2k}.\end{aligned}$$

Da questa uguaglianza, dal momento che $A(\tau)$ è antisimmetrica e reale, risulta facilmente che $\Lambda(\tau)$ è simmetrica e reale (almeno per i τ piccoli).

3.1.1 f soddisfa l'equazione (GHJE)

Verifichiamo ora che f soddisfa l'equazione differenziale (GHJE). Vista l'Osservazione 2.10, possiamo utilizzare (2.13) e richiamando (3.1) basta perciò verificare che per ogni $(x,t) \in \mathbb{G}$ e per ogni $\tau \in \mathbb{R}^p$ con $\|\tau\| \ll 1$ vale

$$\begin{aligned}f(x,t,\tau) &= \sum_{\alpha=1}^{p} \tau_\alpha \cdot \partial_{\tau_\alpha} f + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} (Z_j\,f)^2\\ &= \sum_{\alpha=1}^{p} \tau_\alpha \cdot \partial_{\tau_\alpha} f + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\Big(\partial_{x_j} f + \sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} a^\alpha_{j,k} \cdot x_k \cdot \partial_{t_\alpha} f\Big)^2.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Grazie alla realtà della matrice $\Lambda(\tau)$ (si veda la Proposizione 3.2) si ha

$$f(x,t,\tau) = \frac{1}{2}\langle \Lambda(\tau)\,x, x\rangle - i\langle t, \tau\rangle.$$

Dal momento che

$$\langle \Lambda(\tau)\, x, x\rangle = \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{h=1}^{n} \Lambda_{k,h}(\tau) \cdot x_h \Big) \cdot x_k,$$

allora per la Proposizione 3.2 si ha

$$\begin{aligned}\partial_{x_j} \langle \Lambda(\tau)\, x, x\rangle &= \Big(\sum_{h=1}^{n} \Lambda_{j,h}(\tau) \cdot x_h + \sum_{k=1}^{n} \Lambda_{k,j}(\tau) \cdot x_k \Big)\\ &= 2 \sum_{h=1}^{n} \Lambda_{j,h}(\tau) \cdot x_h.\end{aligned}$$

Ne segue che

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha=1}^{p} \tau_\alpha \cdot \partial_{\tau_\alpha} f + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (Z_j\, f)^2\\ &= \sum_{\alpha=1}^{p} \tau_\alpha \cdot \partial_{\tau_\alpha} f + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \Big(\partial_{x_j} f + \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} a^{\alpha}_{j,k} \cdot x_k \cdot \partial_{t_\alpha} f \Big)^2\\ &= \sum_{\alpha=1}^{p} \tau_\alpha \Big(-i \cdot t_\alpha + \frac{1}{2}\, \partial_{\tau_\alpha} \big(\langle \Lambda(\tau)\, x, x\rangle \big) \Big)\\ &\qquad + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{1}{2} \partial_{x_j} \big(\langle \Lambda(\tau) \cdot x, x\rangle \big) + \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} a^{\alpha}_{j,k} \cdot x_k \cdot (-i \cdot \tau_\alpha) \Big)^2\\ &= -i \sum_{\alpha=1}^{p} \tau_\alpha \cdot t_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{p} \tau_\alpha \cdot \partial_{\tau_\alpha} \big(\langle \Lambda(\tau)\, x, x\rangle \big)\\ &\qquad + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{h=1}^{n} x_h \cdot \Lambda_{j,h}(\tau) - i \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} a^{\alpha}_{j,k} \cdot x_k \cdot \tau_\alpha \Big)^2\\ &= -i \sum_{\alpha=1}^{p} \tau_\alpha \cdot t_\alpha + \frac{1}{2} \Big\langle \sum_{\alpha=1}^{p} \tau_\alpha \cdot \partial_{\tau_\alpha} \big(\Lambda(\tau) \big) \cdot x, x \Big\rangle\\ &\qquad + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{h=1}^{n} x_h \cdot \Lambda_{j,h}(\tau) - i \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} a^{\alpha}_{j,k} \cdot x_k \cdot \tau_\alpha \Big)^2 := (\star).\end{aligned} \tag{3.6}$$

Ma valendo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} (\tanh(z)) = 1 - \tanh^2(z), \quad \forall\, z \in \mathbb{C},$$

per il Lemma 3.6 e poiché per ogni $z \in S_1 = \{z \in \mathbb{C} : |\mathbb{Im}\,(z)| < \frac{\pi}{2}\}$ risulta

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\tanh\mathrm{c})^{-1}(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\Big(\frac{z}{\tanh(z)}\Big) &= \frac{\tanh(z) - z \cdot \Big(1 - \tanh^2(z)\Big)}{\tanh^2(z)} \\ &= \frac{1}{\tanh(z)} - z \cdot \Big(\frac{1}{\tanh^2(z)} - 1\Big),\end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{p} \tau_\alpha \cdot \partial_{\tau_\alpha}\big(\Lambda(\tau)\big) &= \sum_{\alpha=1}^{p} \tau_\alpha \cdot \partial_{\tau_\alpha}\Big((\tanh\mathrm{c})^{-1}\big(\Omega(\tau)\big)\Big) \\ &\overset{(3.12)}{=} \Big(\frac{1}{\tanh(\Omega(\tau))} - \Omega(\tau) \cdot \Big(\frac{1}{\tanh^2(\Omega(\tau))} - \mathbb{I}_n\Big)\Big) \cdot \Omega(\tau) \\ &= \Lambda(\tau) - \Lambda^2(\tau) + \Omega^2(\tau).\end{aligned}$$

Quindi, per quanto fatto, segue

$$\begin{aligned}(\star) = &-i \sum_{\alpha=1}^{p} \tau_\alpha \cdot t_\alpha + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{h=1}^{n} x_h \cdot \Lambda_{j,h}(\tau) - i \sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} a^\alpha_{j,k} \cdot x_k \cdot \tau_\alpha\Big)^2 \\ &+ \frac{1}{2}\langle\big(\Lambda(\tau) - \Lambda^2(\tau) + \Omega^2(\tau)\big) \cdot x, x\rangle.\end{aligned}$$

Perciò, per provare (3.5), basta mostrare

$$\begin{aligned}0 = \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{h=1}^{n} x_h \cdot \Lambda_{j,h}(\tau) - i \sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} a^\alpha_{j,k} \cdot x_k \cdot \tau_\alpha\Big)^2 \\ + \Big\langle\big(\Omega^2(\tau) - \Lambda^2(\tau)\big) \cdot x, x\Big\rangle := (\star\star).\end{aligned}$$

Utilizzando la Proposizione 3.2 e richiamando le identità soddisfatte da $\Omega(\tau)$ e $A(\tau)$, $\Omega(\tau) = -i\,A(\tau) = -i \sum_{\alpha=1}^{p} \tau_\alpha \cdot A^\alpha$, ove $A^\alpha = \big(a^\alpha_{j,k}\big)_{j,k\leq n}$, si ha (ricordiamo che $A(\tau)$ è antisimmetrica)

$$\begin{aligned}(\star\star) &= \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{h=1}^{n} \Lambda_{j,h}(\tau) \cdot x_h - i \sum_{k=1}^{n} A_{j,k}(\tau) \cdot x_k\Big)^2 \\ &\quad + \langle -A(\tau)^2 \cdot x, x\rangle - \langle \Lambda(\tau)^2 \cdot x, x\rangle \\ &= ||\, A(\tau) \cdot x \,||^2 - ||\, \Lambda(\tau)\, x \,||^2 + \sum_{j=1}^{n}\Big(\big(\Lambda(\tau)\, x\big)_j\Big)^2 +\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- 2i \sum_{j=1}^{n} \big(\Lambda(\tau)\, x\big)_j \cdot \big(A(\tau) \cdot x\big)_j - \sum_{j=1}^{n} \Big(\big(A(\tau) \cdot x\big)_j\Big)^2 \\
&= -2i \sum_{j=1}^{n} \big(\Lambda(\tau)\, x\big)_j \cdot \big(A(\tau) \cdot x\big)_j = -2i\langle \Lambda(\tau)\, x, A(\tau) \cdot x\rangle \\
&= -2i\langle x, \Lambda(\tau)\, A(\tau) \cdot x\rangle.
\end{aligned}
$$

Quindi basta dimostrare che

$$\langle x, \Lambda(\tau)\, A(\tau) \cdot x\rangle = 0.$$

Sfruttando la simmetria di $\Lambda(\tau)$ e l'antisimmetria di $A(\tau)$ e ricordando che $\Lambda(\tau) = (\mathrm{sinc}(A))^{-1} \cdot \cos(A)$, ne segue, per i Lemmi 3.7 e 3.8, che

$$\Big(\Lambda(\tau)\, A(\tau)\Big)^T = A(\tau)^T \cdot \Lambda(\tau)^T = -A(\tau) \cdot \Lambda(\tau) = -\Lambda(\tau)\, A(\tau),$$

ossia $\Lambda(\tau)\, A(\tau)$ è antisimmetrica. Ne segue $\langle x, \Lambda(\tau)\, A(\tau) \cdot x\rangle = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, e questo conclude la prova.

3.1.2 V soddisfa l'equazione (GTE)

Ora dimostriamo che V soddisfa l'equazione differenziale (GTE) per ogni $(x, t) \in \mathbb{G}$ e per ogni $\tau \in \mathbb{R}^p$, ovvero

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \tau_\alpha \cdot \frac{\partial V}{\partial \tau_\alpha} + \Big(\mathcal{L}f - \frac{n}{2}\Big)V = 0. \tag{3.7}$$

Premettiamo alcuni lemmi propedeutici alla dimostrazione.

Lemma 3.4. *Sia*

$$T := \sum_{\alpha=1}^{p} \tau_\alpha \cdot \partial_{\tau_\alpha}$$

allora per ogni $\tau \in \mathbb{R}^p$ *vale*

$$T\Big(\mathrm{sinhc}\big(\Omega(\tau)\big)\Big) = \Big(\Lambda(\tau) - \mathbb{I}_n\Big) \cdot \mathrm{sinhc}\big(\Omega(\tau)\big).$$

Dimostrazione. Innanzitutto vale

$$\operatorname{sinhc}'(z) = \Big(\frac{\sinh(z)}{z}\Big)' = \frac{z \cdot \cosh(z) - \sinh(z)}{z^2} \quad \forall\, z \in \mathbb{R},$$

quindi si ottiene, per ogni $z \in S := \{z \in \mathbb{C} : |\mathbb{Im}\,(z)| < \pi\}$ (perciò in particolare per $z \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned}
\operatorname{sinhc}'(z) \cdot z &= \frac{z \cdot \cosh(z) - \sinh(z)}{z} \\
&= \cosh(z) - \operatorname{sinhc}(z) = \Big(\frac{\cosh(z)}{\operatorname{sinhc}(z)} - 1\Big) \cdot \operatorname{sinhc}(z) \\
&= \Big(\frac{\cosh z \cdot z}{\sinh(z)} - 1\Big) \cdot \operatorname{sinhc}(z) \\
&= \big((\operatorname{sinhc})^{-1}(z) \cdot \cosh z - 1\big) \cdot \operatorname{sinhc}(z).
\end{aligned}$$

Perciò, dal Lemma 3.6, segue che, per ogni $\tau \in \mathbb{R}^p$

$$\begin{aligned}
T\Big(\operatorname{sinhc}\big(\Omega(\tau)\big)\Big) &\overset{(3.12)}{=} (\operatorname{sinhc})'\big(\Omega(\tau)\big) \cdot \Omega(\tau) \\
&= \Big((\operatorname{sinhc})^{-1}\big(\Omega(\tau)\big) \cdot \cosh\big(\Omega(\tau)\big) - \mathbb{I}_n\Big) \cdot \operatorname{sinhc}\big(\Omega(\tau)\big) \\
&= \Big(\Lambda(\tau) - \mathbb{I}_n\Big) \cdot \operatorname{sinhc}\big(\Omega(\tau)\big).
\end{aligned}$$

Questo termina la dimostrazione del lemma. □

3.1.3 Un Lemma di tipo Liouville

In questa sezione conveniamo di porre

$$T := \sum_{\alpha=1}^{p} \tau_\alpha \cdot \partial_{\tau_\alpha}. \tag{3.8}$$

Lemma 3.5 (Di tipo Liouville). *Sia $A(\tau)$ un'assegnata funzione a valori in $\mathfrak{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ (lo spazio vettoriale delle matrici reali $n \times n$) per ogni $\tau \in \mathbb{R}^p$; sia $\tau \mapsto W(\tau) \in \mathfrak{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ una soluzione del sistema di P.D.E del primo ordine*

$$T\big(W(\tau)\big) = A(\tau) \cdot W(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}^p. \tag{3.9}$$

Allora ne segue che la funzione $\det W(\tau)$ *risolve l'equazione del primo ordine*

$$T\big(\det W(\tau)\big) = \operatorname{Tr}\big(A(\tau)\big) \det W(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}^p. \tag{3.10}$$

Dimostrazione. Inizialmente osserviamo che da (3.9), indicando con $W_i(\tau)$ la riga i-esima di $W(\tau)$, si ha

$$\begin{aligned}
T\big(W_i(\tau)\big) &= \Big[\sum_{k=1}^{n} A_{i,k}(\tau)\cdot W_{k,1}(\tau),\dots,\sum_{k=1}^{n} A_{i,k}(\tau)\cdot W_{k,n}(\tau)\Big] \\
&= \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}(\tau)\Big[W_{k,1}(\tau),\dots,W_{k,n}(\tau)\Big] = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}(\tau)\cdot W_k(\tau).
\end{aligned}$$

Inoltre, fissato $\alpha \in \{1,2,\dots,p\}$ (indichiamo con $\mathfrak{S}_n$ il gruppo delle permutazioni di n elementi),

$$\begin{aligned}
\partial_{\tau_\alpha}\Big(\det W(\tau)\Big) &= \partial_{\tau_\alpha}\Big(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sign}(\sigma)\cdot\prod_{i=1}^{n} W_{i,\sigma(i)}(\tau)\Big) \\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sign}(\sigma)\cdot\Big(\sum_{j=1}^{n}\Big(\partial_{\tau_\alpha}(W_{j,\sigma(j)}(\tau))\cdot\prod_{i=1,i\neq j}^{n} W_{i,\sigma(i)}(\tau)\Big)\Big) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sign}(\sigma)\Big(\partial_{\tau_\alpha}(W_{j,\sigma(j)}(\tau))\cdot\prod_{i=1,i\neq j}^{n} W_{i,\sigma(i)}(\tau)\Big)\Big) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\det\begin{pmatrix} W_{1,1}(\tau) & \dots & W_{1,n}(\tau) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \partial_{\tau_\alpha}W_{j,1}(\tau) & \dots & \partial_{\tau_\alpha}W_{j,n}(\tau) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ W_{n,1}(\tau) & \dots & W_{n,n}(\tau)\end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n}\det\begin{pmatrix} W_1(\tau) \\ \vdots \\ \partial_{\tau_\alpha}W_j(\tau) \\ \vdots \\ W_n(\tau)\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Perciò, per la linearità del determinante su una delle sue righe, si ottiene

$$T\Big(\det W(\tau)\Big) = \sum_{\alpha=1}^{p}\tau_\alpha\cdot\partial_{\tau_\alpha}\left(\det\begin{pmatrix} W_1(\tau) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ W_n(\tau)\end{pmatrix}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha=1}^{p} \tau_\alpha \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \det \begin{pmatrix} W_1(\tau) \\ \vdots \\ \partial_{\tau_\alpha} W_j(\tau) \\ \vdots \\ W_n(\tau) \end{pmatrix} \right) = \sum_{j=1}^{n} \det \begin{pmatrix} W_1(\tau) \\ \vdots \\ \sum_{\alpha=1}^{p} \tau_\alpha \cdot \partial_{\tau_\alpha} W_j(\tau) \\ \vdots \\ W_n(\tau) \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \det \begin{pmatrix} W_1(\tau) \\ \vdots \\ T\Big(W_j(\tau)\Big) \\ \vdots \\ W_n(\tau) \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \det \begin{pmatrix} W_1(\tau) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} A_{j,k}(\tau) \cdot W_k(\tau) \\ \vdots \\ W_n(\tau) \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} A_{j,k}(\tau) \cdot \det \begin{pmatrix} W_1(\tau) \\ \vdots \\ W_k(\tau) \\ \vdots \\ W_n(\tau) \end{pmatrix} = \sum_{j,k=1}^{n} A_{j,k}(\tau) \cdot \delta_{j,k} \cdot \det W(\tau) \\
&= \mathrm{Tr}(A(\tau)) \det W(\tau).
\end{aligned}
$$

Questo termina la dimostrazione. $\square$

Ricordiamo che, per definizione,

$$V(\tau) = \Big(\det \operatorname{sinhc}\big(\Omega(\tau)\big)\Big)^{-\frac{1}{2}}, \quad \forall\, \tau \in \mathbb{R}^p.$$

Poniamo $W(\tau) := \operatorname{sinhc}\big(\Omega(\tau)\big)$ e $A(\tau) := \Lambda(\tau) - \mathbb{I}_n$, e osserviamo che, per il Lemma 3.4, $W(\tau)$ risolve

$$T(W(\tau)) = A(\tau) \cdot W(\tau).$$

Dal Lemma 3.5 di tipo Liouville si ha quindi

$$T(\det(W(\tau))) = \mathrm{Tr}(A(\tau)) \cdot \det(W(\tau)) = \big(\mathrm{Tr}(\Lambda(\tau)) - n\big) \cdot \det(W(\tau)). \quad (3.11)$$

Si ha quindi il seguente calcolo:

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha=1}^{p} \tau_\alpha \cdot \partial_{\tau_\alpha} V(\tau) &= -\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{p} \Big(\det W(\tau) \Big)^{-\frac{3}{2}} \cdot \tau_\alpha \cdot \partial_{\tau_\alpha} \Big(\det W(\tau) \Big) \\
&= -\frac{1}{2} \Big(\det W(\tau) \Big)^{-\frac{3}{2}} \cdot \sum_{\alpha=1}^{p} \tau_\alpha \cdot \partial_{\tau_\alpha} \Big(\det W(\tau) \Big) \\
&\overset{(3.11)}{=} -\frac{1}{2} \Big(\det W(\tau) \Big)^{-\frac{3}{2}} \cdot \big(\mathrm{Tr}(\Lambda(\tau)) - n \big) \cdot \det W(\tau) \\
&= -\frac{1}{2} \Big(\det W(\tau) \Big)^{-\frac{1}{2}} \cdot \big(\mathrm{Tr}(\Lambda(\tau)) - n \big) = -\frac{1}{2} V(\tau) \cdot \big(\mathrm{Tr}(\Lambda(\tau)) - n \big).
\end{aligned}$$

Dunque per verificare che V soddisfa (3.7), basta mostrare che

$$\begin{aligned}
0 &= \Big(\mathcal{L}f - \frac{n}{2} \Big) \cdot V(\tau) - \frac{1}{2} V(\tau) \cdot \big(\mathrm{Tr}\Lambda(\tau) - n \big) \\
&= \Big(\mathcal{L}f - \frac{1}{2} \mathrm{Tr}\big(\Lambda(\tau)\big) \Big) \cdot V(\tau),
\end{aligned}$$

ossia f risolve l'equazione differenziale

$$\mathcal{L}f = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}(\Lambda(\tau)).$$

A tal fine, ricordando che

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} Z_j^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \Big(\partial_{x_j} + \sum_{\alpha=1}^{p} (A^\alpha \cdot x)_j \, \partial_{t_\alpha} \Big)^2, \\
Z_j f &= \Big(\sum_{k=1}^{n} \Lambda_{j,k}(\tau) \cdot x_k - i \sum_{k=1}^{n} A_{j,k}(\tau) \cdot x_k \Big),
\end{aligned}$$

(si veda anche (3.6)) si ottiene, dal momento che $A(\tau) = \sum_{\alpha=1}^{p} \tau_\alpha \cdot A^\alpha$ è antisimmetrica e $Z_j = \partial_{x_j} + \sum_{\alpha=1}^{p} \Big(\sum_{k=1}^{n} a_{j,k}^\alpha x_k \Big) \partial_{t_\alpha}$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}f &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} Z_j(Z_j f) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} Z_j \Big(\sum_{k=1}^{n} \Lambda_{j,k}(\tau) \cdot x_k - i \sum_{k=1}^{n} A_{j,k}(\tau) \cdot x_k \Big) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \Big(\Lambda_{j,j}(\tau) - i A_{j,j}(\tau) \Big) = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}\big(\Lambda(\tau)\big).
\end{aligned}$$

3.2 Appendice

Ricordiamo alcuni lemmi di algebra delle matrici, utilizzati nel corso del Capitolo 3.

Lemma 3.6. *Sia φ una funzione olomorfa su un disco $D \subseteq \mathbb{C}$ centrato nell'origine. Allora, per ogni $\tau \in \mathbb{C}^p$ per cui è ben posto $\varphi(\Omega(\tau))$ (nel senso usuale che utilizza lo sviluppo in serie di φ), si ha*

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \tau_\alpha \cdot \partial_{\tau_\alpha}\Big(\varphi\big(\Omega(\tau)\big)\Big) = \varphi'\big(\Omega(\tau)\big) \cdot \Omega(\tau). \tag{3.12}$$

Dimostrazione. Visto che $\Omega(\tau) = -i\sum_{\alpha=1}^{p} \tau_\alpha \cdot A^\alpha$ allora, ricordando la definizione di T in (3.8), si ha

$$T\big(\Omega(\tau)\big) = \sum_{\alpha=1}^{p} \tau_\alpha \cdot (-i \cdot A^\alpha) = \Omega(\tau). \tag{3.13}$$

Inoltre, per la regola di Leibniz (non commutativa),

$$\begin{aligned} T(\Omega^k(\tau)) = \sum_{\alpha=1}^{p} \tau_\alpha \cdot \Big(&\partial_{\tau_\alpha}\big(\Omega(\tau)\big) \cdot \Omega(\tau) \cdots \Omega(\tau) + \\ &+ \Omega(\tau) \cdot \partial_{\tau_\alpha}\big(\Omega(\tau)\big) \cdots \Omega(\tau) + \cdots + \Omega(\tau) \cdot \Omega(\tau) \cdots \partial_{\tau_\alpha}\big(\Omega(\tau)\big)\Big) \\ = T\big(&\Omega(\tau)\big) \cdot \Omega(\tau) \cdots \Omega(\tau) + \Omega(\tau) \cdot T\big(\Omega(\tau)\big) \cdots \Omega(\tau) + \cdots \\ &+ \Omega(\tau) \cdot \Omega(\tau) \cdots T\big(\Omega(\tau)\big) \overset{(3.13)}{=} k \cdot \Omega^k(\tau). \end{aligned}$$

Dunque, se $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, z^k$ per $z \in D$, si ha

$$\begin{aligned} T\big(\varphi(\Omega(\tau))\big) &= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, T\big(\Omega^k(\tau)\big) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k\, k\, \Omega^k(\tau) \\ &= \Big(\sum_{k=1}^{+\infty} a_k\, k\, \Omega^{k-1}(\tau)\Big) \cdot \Omega(\tau) = \varphi'\big(\Omega(\tau)\big) \cdot \Omega(\tau). \end{aligned}$$

Questo conclude la prova. $\square$

Lemma 3.7. *Sia $A \in \mathfrak{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Se φ e ψ sono due funzioni olomorfe su un disco $D \subseteq \mathbb{C}$ centrato nell'origine, e se $\varphi(A)$ e $\psi(A)$ sono ben poste (nel senso usuale che utilizza lo sviluppo in serie di potenze), allora queste due matrici commutano.*

Infine si ha $\big(\varphi(A)\big)^T = \varphi(A^T)$.

La prova è un semplice esercizio sul prodotto alla Cauchy di serie uniformemente convergenti (in $\mathbb{C}$ o nello spazio $\mathfrak{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$).

Lemma 3.8. *Siano $A, B \in \mathfrak{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ matrici che commutano, con A invertibile; allora A^{-1} e B commutano e A^T e B^T commutano*

La prova è una semplicissima verifica.

Capitolo 4

Caratterizzazione della Soluzione Fondamentale

Questo capitolo rappresenta un capitolo essenziale per tutta la Tesi in quanto contiene due risultati notevoli: il primo, un lemma (propedeutico al secondo risultato), fornisce condizioni sufficienti (di verifica potenzialmente diretta) che garantiscono l'esistenza di una coppia $(u, \mathbf{c})$ ove $\mathbf{c}$ è una costante reale (eventualmente nulla) e u è una soluzione distribuzionale dell'equazione $\mathcal{L}u = -\mathbf{c}\,\mathrm{Dir}_0$; il secondo, il teorema principale, garantisce che, stanti le condizioni introdotte nel lemma, se u è positiva allora anche $\mathbf{c}$ lo è: questo teorema fornisce quindi semplici condizioni sufficienti per la determinazione di una soluzione fondamentale di $\mathcal{L}$.

4.1 Un lemma cruciale

Per cominciare, premettiamo una definizione.

Definizione 4.1. Sia $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, *, \delta_\lambda)$ un gruppo omogeneo. Diciamo che $d : \mathbb{G} \to [0, +\infty)$ è una **norma omogenea** se:

i) $d \in \mathbf{C}(\mathbb{G}, [0, +\infty))$;

ii) $d(\delta_\lambda(x)) = \lambda\, d(x)$ per ogni $\lambda > 0$ e per ogni $x \in \mathbb{G}$;

iii) $d(x) = 0 \iff x = 0$.

Osservazione 4.2. Una norma omogenea su un gruppo omogeneo $\mathbb{G}$ esiste sempre; supponiamo infatti che il gruppo delle dilatazioni abbia la forma

$$\delta_\lambda(x) = (\lambda^{\sigma_1} x_1, \dots, \lambda^{\sigma_N} x_N), \qquad \lambda > 0,$$

ove $\sigma_1 \leq \cdots \leq \sigma_N$ sono interi. Allora la funzione

$$d(x) := \left(\sum_{j=1}^{N} |\, x_j|^{\,2\,(\sigma_N!)/\sigma_j} \right)^{\dfrac{1}{2(\sigma_N!)}}, \quad x \in \mathbb{G},$$

soddisfa tutte le proprietà richieste nella definizione precedente.

Infatti evidentemente $d \in \mathbf{C}(\mathbb{G}, [0, \infty))$ (inoltre $d \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{G} \setminus \{0\}, \mathbb{R})$) e $d(x) = 0$ se e solo se $x = 0$; infine per ogni $\lambda > 0$ e per ogni $x \in \mathbb{G}$ vale

$$d(\delta_\lambda(x)) = \Big(\sum_{j=1}^{N} (\lambda^{\sigma_j} |x_j|)^{\frac{2(\sigma_N!)}{\sigma_j}} \Big)^{\frac{1}{2(\sigma_N!)}} = \lambda \Big(\sum_{j=1}^{N} |x_j|^{\frac{2(\sigma_N!)}{\sigma_j}} \Big)^{\frac{1}{2(\sigma_N!)}} = \lambda\, d(x).$$

Lemma 4.3. *Sia $u \in \mathbf{C}(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ una funzione δ_λ-omogenea di grado α. Allora u è localmente sommabile se e solo se $\alpha > -Q$.*

Dimostrazione. Essendo $u \in \mathbf{C}(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ è sufficiente provare che u è integrabile sull'insieme $D := \{x : d(x) < 1\}$. Sfruttando le ipotesi di δ_λ omogeneità di u e d, utilizzando il teorema di completa addittività dell'integrale e operando la sostituzione $x = \delta_{\frac{1}{2^k}}(y)$, si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_D |u(x)|\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\frac{1}{2^{k+1}} \leq d(x) < \frac{1}{2^k}} |u(x)|\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\frac{1}{2} \leq d(x) < 1} \left(\frac{1}{2^k}\right)^{\alpha} |u(x)| \left(\frac{1}{2^k}\right)^{Q} \mathrm{d}x \\
&= \mathbf{C} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k}\right)^{\alpha+Q}.
\end{aligned}$$

Notiamo che $\mathbf{C} := \int\limits_{\frac{1}{2} \leq d(x) < 1} |u(x)|\,\mathrm{d}x$ è finita, poiché u è continua fuori dall'origine e perchè, dalla definizione di norma omogenea, segue

$$\overline{\left\{\tfrac{1}{2} \leq d(x) < 1\right\}} \subset \mathbb{R}^N \setminus \{0\}.$$

Si ha dunque la locale sommabilità di u se e solo se la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}\right)^{\alpha+Q}$ converge, il che avviene precisamente se $\alpha > -Q$. $\square$

Siamo pronti per il lemma centrale di questo capitolo.

Lemma 4.4. *Sia $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, *, \delta_\lambda)$ un gruppo omogeneo di Carnot di dimensione omogenea $Q > 2$, e sia $\mathcal{L}$ un sub-Laplaciano di $\mathbb{G}$. Supponiamo che esista*

$$u : \mathbb{R}^N \smallsetminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R},$$

soddisfacente le seguenti proprietà:

i) $u \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^N \smallsetminus \{0\}, \mathbb{R})$*;*

ii) $\mathcal{L}u = 0$ *in* $\mathbb{R}^N \smallsetminus \{0\}$*;*

iii) u *è una funzione* δ_λ*-omogena di grado* $2 - Q$*.*

Allora esiste $\mathbf{c}_u \in \mathbb{R}$ *(eventualmente nulla) tale che*

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x) \cdot \mathcal{L}\varphi \,\mathrm{d}x = -\mathbf{c}_u\, \varphi(0) \qquad \forall\ \varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}).$$

In altre parole, u è una soluzione dell'equazione $\mathcal{L}u = -\mathbf{c}_u\,\mathrm{Dir}_0$ nel senso delle distribuzioni, ove Dir_0 è la massa di Dirac concentrata nell'origine.

Dimostrazione. Sia $d : \mathbb{G} \to [0, \infty)$ una *qualunque* norma omogenea di classe $\mathbf{C}^\infty$ su $\mathbb{G} \smallsetminus \{0\}$. [La parte cruciale della prova del Teorema 4.5 consisterà nello scegliere opportunamente d, nel caso in cui u sia positiva.] Ne esiste almeno una grazie all'Osservazione 4.2. Inoltre sia

$$\mathcal{L} := \sum_{j=1}^{n} {Z_j}^2, \tag{4.1}$$

un sub-Laplaciano di $\mathbb{G}$, ossia $\{Z_1, \ldots, Z_n\}$ è una base di V_1, il primo strato dell'assocciata stratificazione $\mathfrak{g} = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_r$ dell'algebra del gruppo di Carnot $\mathbb{G}$ (ricordiamo che r è il passo di nilpotenza di $\mathbb{G}$ e che i campi vettoriali Z_j sono δ_λ-omogenei di grado 1 per ogni $j = 1, \ldots, n$).

Prima di tutto osserviamo che dall'ipotesi iii) segue che u è localmente sommabile su $\mathbb{R}^N$; questa è una conseguenza del Lemma 4.3.

Fissata $\varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ esiste $R = R_\varphi > 0$ tale che

$$\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^N |\; d(x) < R\};$$

basta scegliere $R > \max\{d(x) \,:\, x \in \mathrm{supp}(\varphi)\}$. Se $0 < \varepsilon < R$, poniamo

$$\begin{aligned} d_{\varepsilon,R} &= \{x \in \mathbb{R}^N : \varepsilon < d(x) < R\}, \\ \partial_\varepsilon &= \{x \in \mathbb{R}^N : d(x) = \varepsilon\} \\ \partial_R &= \{x \in \mathbb{R}^N : d(x) = R\}. \end{aligned}$$

Con queste notazioni, essendo $\varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, si ha

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x) \cdot \mathcal{L}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{d_{\varepsilon,R}} u(x) \cdot \sum_{j=1}^n Z_j(Z_j\varphi(x))\,\mathrm{d}x := (\star).$$

Integrando per parti, il che è possibile in quanto $\varphi, u \in \mathbf{C}^2(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$, e ricordando il fatto che ogni Z_j ha divergenza nulla poiché è un campo omogeneo di grado 1, si ha (indichiamo con $\mathrm{d}\sigma$ la misura di Hausdorff $N-1$ dimensionale in $\mathbb{R}^N$ e con $\nu(x)$ il vettore normale su ∂_R o ∂_ε, *esterno rispetto al dominio* $d_{\varepsilon,R}$):

$$\begin{aligned} (\star) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \Bigg(&-\int_{d_{\varepsilon,R}} \sum_{j=1}^n Z_j u(x)\, Z_j\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &+ \int_{\partial_R} \sum_{j=1}^n u(x)\, Z_j\varphi(x)\, \langle \nu(x), Z_j I(x)\rangle\,\mathrm{d}\sigma(x) \\ &+ \int_{\partial_\varepsilon} \sum_{j=1}^n u(x)\, Z_j\varphi(x)\, \langle \nu(x), Z_j I(x)\rangle\,\mathrm{d}\sigma(x)\Bigg) \\ = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \Bigg(&\int_{d_{\varepsilon,R}} \mathcal{L}u\, \varphi(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\partial_R} \sum_{j=1}^n Z_j u(x)\, \varphi(x)\, \langle \nu(x), Z_j I(x)\rangle\,\mathrm{d}\sigma(x) \\ &- \int_{\partial_\varepsilon} \sum_{j=1}^n Z_j u(x)\, \varphi(x)\, \langle \nu(x), Z_j I(x)\rangle\,\mathrm{d}\sigma(x) \\ &+ \int_{\partial_R} \sum_{j=1}^n u(x)\, Z_j\varphi(x)\, \langle \nu(x), Z_j I(x)\rangle\,\mathrm{d}\sigma(x) \end{aligned}$$

$$+\int_{\partial_\varepsilon}\sum_{j=1}^{n} u(x)\, Z_j\varphi(x)\,\langle \nu(x), Z_j I(x)\rangle\,\mathrm{d}\sigma(x)\Bigg)$$

(usiamo il fatto che $\varphi \equiv 0$ su un intorno di ∂_R)

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\Bigg(\int_{d_{\varepsilon,R}} \mathcal{L}u\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\partial_\varepsilon}\sum_{j=1}^{n} Z_j u(x)\,\varphi(x)\,\langle \nu(x), Z_j I(x)\rangle\,\mathrm{d}\sigma(x)$$

$$+\int_{\partial_\varepsilon}\sum_{j=1}^{n} u(x)\, Z_j\varphi(x)\,\langle \nu(x), Z_j I(x)\rangle\,\mathrm{d}\sigma(x)\Bigg)$$

(usiamo l'ipotesi ii) di $\mathcal{L}$-armonicità di u)

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\Bigg(-\int_{\partial_\varepsilon}\sum_{j=1}^{n} Z_j u(x)\,\varphi(x)\,\langle \nu(x), Z_j I(x)\rangle\,\mathrm{d}\sigma(x)$$

$$+\int_{\partial_\varepsilon}\sum_{j=1}^{n} u(x)\, Z_j\varphi(x)\,\langle \nu(x), Z_j I(x)\rangle\,\mathrm{d}\sigma(x)\Bigg).$$

Si ponga

$$J(\varepsilon) := \int_{\partial_\varepsilon}\sum_{j=1}^{n} Z_j u(x)\cdot \varphi(x)\,\langle \nu(x), Z_j I(x)\rangle\,\mathrm{d}\sigma(x),$$

$$I(\varepsilon) := \int_{\partial_\varepsilon}\sum_{j=1}^{n} u(x)\cdot Z_j\varphi(x)\,\langle \nu(x), Z_j I(x)\rangle\,\mathrm{d}\sigma(x).$$

Mostriamo che

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} I(\varepsilon) = 0 \tag{4.2}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} J(\varepsilon) = \mathbf{c}\,\varphi(0), \tag{4.3}$$

per una opportuna costante $\mathbf{c}$.

Proviamo dapprima (4.2). A tal fine, cominciamo con l'osservare che il versore ν su ∂_ε è dato da[1] $\nu(x) = -\dfrac{\nabla d(x)}{|| \nabla d(x) ||}$, dunque vale

$$
\begin{aligned}
I(\varepsilon) &= -\int_{\partial_\varepsilon} \sum_{j=1}^{n} u(x) \cdot Z_j\varphi(x) \left\langle \frac{\nabla d(x)}{|| \nabla d(x) ||}, Z_j I(x) \right\rangle \mathrm{d}\sigma(x) \\
&= -\int_{\partial_\varepsilon} \sum_{j=1}^{n} u(x) \cdot Z_j\varphi(x) \cdot Z_j d(x) \, \frac{\mathrm{d}\sigma(x)}{|| \nabla d(x) ||}.
\end{aligned}
$$

Visto che $\varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ allora (si noti che ∂_ε è un compatto di $\mathbb{R}^N$)

$$
\Big| Z_j\varphi(x) \Big| \leq \max_{j=1}^{n} \Big(\max_{x \in \partial_\varepsilon} |Z_j\varphi(x)| \Big) \leq \mathbf{c}_\varphi < \infty \quad \forall\, j = 1, \ldots, n,
$$

e quindi

$$
\Big| I(\varepsilon) \Big| \leq \int_{\partial_\varepsilon} |u(x)| \cdot \mathbf{c}_\varphi \left| \sum_{j=1}^{n} Z_j d(x) \right| \frac{\mathrm{d}\sigma(x)}{|| \nabla d(x) ||} := \widetilde{I}(\varepsilon).
$$

Inoltre per il fatto che gli Z_j sono δ_λ-omogenei di grado 1 e per l'ipotesi ii) della definizione di norma omogenea, si ottiene

$$
R \cdot (Z_j d)(x) = Z_j(R \cdot d(x)) = Z_j((d \circ \delta_R)(x)) = R \cdot (Z_j d)(\delta_R(x)),
$$

e quindi $(Z_j d)(x) = (Z_j d)(\delta_R(x))$, ossia

$$
Z_j d \textit{ è una funzione } \delta_R\textit{-omogenea di grado } 0. \tag{4.4}
$$

Premesso ciò, per la formula di Coarea di Federer [11] e operando il cambiamento di variabile $x = \delta_R(y)$ risulta

$$
\int_0^R \widetilde{I}(\varepsilon)\, \mathrm{d}\varepsilon = \mathbf{c}_\varphi \int_0^R \left(\int_{\partial_\varepsilon} \left| u(x) \cdot \sum_{j=1}^{n} Z_j d(x) \right| \frac{\mathrm{d}\sigma(x)}{|| \nabla d(x) ||} \right) \mathrm{d}\varepsilon
$$

[1]Per il lemma di Sard si ha che $d^{-1}(\{t\}) = \{x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\} |\ d(x) = t\}$ è una varietà $(N-1)$-dimensionale per quasi ogni $t \in \mathbb{R}$, perciò (per tali t)

$$
\nabla d(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in d^{-1}(\{t\}).
$$

$$= \mathbf{c}_\varphi \int_{d(x)\le R} \left| u(x) \cdot \sum_{j=1}^{n} Z_j d(x) \right| \mathrm{d}x$$

(usiamo l'ipotesi di omogeneità di u congiuntamente a (4.4))

$$= \mathbf{c}_\varphi \int_{d(y)\le 1} R^{2-Q} \cdot \left| u(y) \cdot \sum_{j=1}^{n} Z_j d(y) \right| \cdot R^Q \, \mathrm{d}y$$

$$= \mathbf{c}_\varphi \, R^2 \int_{d(y)\le 1} \left| u(y) \cdot \sum_{j=1}^{n} Z_j d(y) \right| \mathrm{d}y.$$

Derivando rispetto a R si ha immediatamente

$$\widetilde{I}(\varepsilon) = 2\,\varepsilon\,\mathbf{c}_\varphi \int_{d(y)\le 1} \left| u(y) \cdot \sum_{j=1}^{n} Z_j d(y) \right| \mathrm{d}y.$$

Dalla (4.4) segue che la funzione $u(y) \cdot \sum_{j=1}^{n} Z_j d(y)$ è δ_λ-omogenea di grado $2-Q$, dunque per il Lemma 4.3 si ha $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \widetilde{I}(\varepsilon) = 0$, da cui (4.2).

Passiamo ora a dimostrare (4.3). A tal fine proviamo che, posto

$$A(\varepsilon) := \int_{\partial_\varepsilon} \sum_{j=1}^{n} Z_j u(x) \, \langle \nu(x), Z_j I(x) \rangle \, \mathrm{d}\sigma(x),$$

esiste una costante $\mathbf{c}_u$, dipendente da u ma indipendente da ε, tale che

$$A(\varepsilon) = \mathbf{c}_u. \tag{4.5}$$

Utilizzando la notazione

$$\nabla_Z f = (Z_1 f, \dots, Z_n f), \quad \forall f \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \mathbb{R}),$$

e procedendo in completa analogia a prima, sfruttando altresì le proprietà di δ_λ-omogeneità di d e u (che garantiscono (4.4) e la δ_λ-omogeneità di grado $1-Q$ di $Z_j u$), si ottiene

$$\int_0^R A(\varepsilon) \, \mathrm{d}\varepsilon = \int_0^R \left(\int_{\partial_\varepsilon} \sum_{j=1}^{n} Z_j u(x) \cdot \langle \nu(x), Z_j I(x) \rangle \, \mathrm{d}\sigma(x) \right) \mathrm{d}\varepsilon$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_0^R \left(\int_{\partial_\varepsilon} \sum_{j=1}^n Z_j u(x) \cdot Z_j d(x) \, \frac{\mathrm{d}\sigma(x)}{||\ \nabla d(x)\ ||} \right) \mathrm{d}\varepsilon \\
&= -\int_0^R \left(\int_{\partial_\varepsilon} \langle \nabla_Z u(x), \nabla_Z d(x) \rangle \, \frac{\mathrm{d}\sigma(x)}{||\ \nabla d(x)\ ||} \right) \mathrm{d}\varepsilon \\
&= -\int_{d(x)\le R} \langle \nabla_Z u(x), \nabla_Z d(x) \rangle \, \mathrm{d}x \\
&= -\int_{d(y)\le 1} R^{1-Q} \cdot \langle \nabla_Z u(y), \nabla_Z d(y) \rangle \cdot R^Q \, \mathrm{d}x \\
&= -R \int_{d(y)\le 1} \langle \nabla_Z u(y), \nabla_Z d(y) \rangle \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Ancora per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha

$$
A(\varepsilon) = -\int_{d(y)\le 1} \langle \nabla_Z u(y), \nabla_Z d(y) \rangle \, \mathrm{d}x =: \mathbf{c}_u, \tag{4.6}
$$

con $\mathbf{c}_u$ evidentemente indipendene da ε; il fatto che $\mathbf{c}_u$ è finita segue dalla δ_λ-omogeneità di grado $1-Q$ dell'integranda $\langle \nabla_Z u(y), \nabla_Z d(y) \rangle$ e dal Lemma 4.3. Da qui segue (4.5).

Analogamente a quanto fatto per $A(\varepsilon)$, posto

$$
\widetilde{A}(\varepsilon) := \int_{\partial_\varepsilon} \left| \sum_{j=1}^n Z_j u(x) \cdot \langle \nu(x), Z_j I(x) \rangle \right| \mathrm{d}\sigma(x),
$$

si ottiene

$$
\widetilde{A}(\varepsilon) = \widetilde{\mathbf{c}}_u, \tag{4.7}
$$

con $0 \le \widetilde{\mathbf{c}}_u < \infty$ e $\widetilde{\mathbf{c}}_u$ indipendente da ε.

Ora si è pronti a dimostrare (4.3). Per (4.5) segue

$$
J(\varepsilon) - \mathbf{c}_u \cdot \varphi(0) = \int_{\partial_\varepsilon} \sum_{j=1}^n Z_j u(x) \cdot \Big(\varphi(x) - \varphi(0) \Big) \cdot \langle \nu(x), Z_j I(x) \rangle \, \mathrm{d}\sigma(x),
$$

dunque per la continuità di φ

$$
\begin{aligned}
\Big| J(\varepsilon) - \mathbf{c} \cdot \varphi(0) \Big| &\le \int_{\partial_\varepsilon} \Big| \varphi(x) - \varphi(0) \Big| \cdot \left| \sum_{j=1}^n Z_j u(x) \cdot \langle \nu(x), Z_j I(x) \rangle \right| \mathrm{d}\sigma(x) \\
&\le \mathrm{o}(1) \cdot \widetilde{A}(\varepsilon) = \mathrm{o}(1) \cdot \widetilde{\mathbf{c}}_u \longrightarrow 0 \text{ per } \varepsilon \to 0^+.
\end{aligned}
$$

Questo prova completamente il teorema. □

4.2 Caratterizzazione della soluzione fondamentale di $\mathcal{L}$

Teorema 4.5. *Sia* $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, *, \delta_\lambda)$ *un gruppo omogeneo di Carnot di dimensione omogenea* $Q > 2$, *e sia* $\mathcal{L}$ *un sub-Laplaciano di* $\mathbb{G}$. *Supponiamo che esista una funzione* $u : \mathbb{R}^N \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *soddisfacente le seguenti proprietà:*

i) $u \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^N \smallsetminus \{0\}, \mathbb{R})$;

ii) $u(x) > 0$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}^N \smallsetminus \{0\}$;

iii) $\mathcal{L}u = 0$ *in* $\mathbb{R}^N \smallsetminus \{0\}$;

iv) u *è* δ_λ*-omogenea di grado* $2 - Q$.

Allora esiste una costante positiva $\mathbf{c}$ *tale che* $\Gamma := \mathbf{c}^{-1}\, u$ *è la soluzione fondamentale di* $\mathcal{L}$ *con polo nell'origine, ossia:*

1. $\Gamma \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^N \smallsetminus \{0\}, \mathbb{R})$,
2. $\lim_{|x|\to\infty} \Gamma(x) = 0$,
3. $\Gamma \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ *e* $\mathcal{L}\Gamma = -\mathrm{Dir}_0$ *nel senso delle distribuzioni.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{L}$ come in (4.1) e scegliamo

$$d : \mathbb{R}^N \to [0, +\infty), \quad d(x) = \begin{cases} \big(u(x)\big)^{\frac{1}{2-Q}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Ne segue facilmente che d è una norma omogenea. Infatti, per cominciare si ha $d(x) = 0$ se e solo se $x = 0$, in quanto $u > 0$ in $\mathbb{R}^N \smallsetminus \{0\}$ per l'ipotesi ii); inoltre, per ogni $\lambda > 0$ e per ogni $x \in \mathbb{R}^N$, si ha

$$\begin{aligned} d(\delta_\lambda(x)) &= \begin{cases} \big(u(\delta_\lambda(x))\big)^{\frac{1}{2-Q}} & \text{se } \delta_\lambda(x) \neq 0 \\ 0 & \text{se } \delta_\lambda(x) = 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \big(\lambda^{2-Q} \cdot u(x)\big)^{\frac{1}{2-Q}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{cases} \lambda \cdot \big(u(x)\big)^{\frac{1}{2-Q}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \\
&= \lambda \cdot d(x).
\end{aligned}
$$

Da qui segue anche la continuità di d. Inoltre d è di classe $\mathbb{C}^\infty$ in $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ in quanto lo è anche u.

A questo punto ripercorriamo interamente la prova del Lemma 4.4 (e utilizziamo senza ulteriore commento le notazioni in essa contenute) *con una tale scelta della norma omogenea* d. La funzione integranda che interviene nella definizione (4.6) di $\mathbf{c}_u$ è:

$$
\begin{aligned}
\Psi(x) &:= -\sum_{j=1}^{n} Z_j u(x) \cdot Z_j d(x) = -\sum_{j=1}^{n} Z_j u(x) \cdot \frac{1}{2-Q} \cdot u(x)^{\frac{Q-1}{2-Q}} \cdot Z_j u(x) \\
&= \frac{1}{Q-2} \cdot u(x)^{\frac{Q-1}{2-Q}} \cdot \sum_{j=1}^{n} \Big| Z_j u(x) \Big|^2.
\end{aligned}
$$

Si noti che $\Psi \geq 0$. Vogliamo dimostrare che l'integrale su $\{d(x) \leq 1\}$ di questa funzione è positivo, ossia $\mathbf{c}_u > 0$.

A tal fine, consideriamo l'insieme

$$
B := \Big\{ x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\} : \; Z_j u(x) = 0 \quad \forall\, j = 1, \dots, N \Big\}.
$$

È precisamente sull'insieme B che la funzione Ψ si annulla. Ora, B è un insieme relativamente chiuso in $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ in quanto $u \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$. Dunque se dimostriamo che l'insieme *aperto* B^C (complementare di B) è denso in $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, risulterà che

$$
\mathbf{c}_u = \int_{d(x) \leq 1} \Psi(x)\, \mathrm{d}x \geq \int_{B^C \cap \{d(x) \leq 1\}} \Psi(x)\, \mathrm{d}x > 0, \tag{4.8}
$$

poiché $B^C \cap \{d(x) \leq 1\}$ è un aperto non vuoto su cui $\Psi > 0$ (si ricordi che B^C è un aperto denso in $\mathbb{R}^N$ e che $\Psi > 0$ su B^C).

Se per assurdo B^C non fosse denso in $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, esisterebbe una palla $D := \{x \in \mathbb{R}^N : ||x - y|| \leq r\}$ tale che $D \subseteq B$. Essendo l'algebra di Lie

$\mathrm{Lie}(\mathbb{G}) = \mathrm{Lie}\{Z_1, \ldots, Z_n\}$ (poiché $\sum_{j=1}^{n} Z_j^2$ è un sub-Laplaciano sul gruppo di Carnot $\mathbb{G}$) e $Z_j u(x) = 0$ per ogni $j = 1, \ldots, n$ e per ogni $x \in D$ allora

$$Zu(x) = 0 \quad \forall\, x \in D\ , \forall\, Z \in \mathrm{Lie}(\mathbb{G}).$$

In particolare, dunque, indicati con $J_1, \ldots, J_n$ gli elementi della base Jacobiana di $\mathbb{G}$, si avrebbe

$$J_i u(x) = 0 \quad \forall\, x \in D\ , \forall\ i = 1, \ldots, n.$$

Ma ora, indicando con $\mathfrak{J}_{\tau_x}(y)$ la matrice Jacobiana della traslazione a sinistra τ_x calcolata in y, è ben noto che

$$\nabla u(x) \cdot \mathfrak{J}_{\tau_x}(0) = (J_1 u(x), \ldots, J_N u(x)),$$

quindi, per ogni $x \in D$, si ottiene

$$\nabla u(x) = \underbrace{(J_1 u(x), \ldots, J_N u(x))}_{=(0,\ldots,0)} \cdot \Big(\mathfrak{J}_{\tau_x}(0)\Big)^{-1} = 0.$$

Essendo D un insieme connesso, risulterebbe $u(x) = \mathbf{c}_1$ (costante) su D. Fissato $x \in D$, per la continuità della mappa

$$(0, \infty) \ni \lambda \mapsto \delta_\lambda(x) \in \mathbb{R}^N,$$

esistono certamente $a, b \in \mathbb{R}^+$ tali che $\delta_\lambda(x) \in D$ per ogni $\lambda \in]a, b[$ e quindi $u(\delta_\lambda(x)) = \mathbf{c}_1$ per gli stessi λ; ma per la δ_λ-omogeneità di u segue

$$\mathbf{c}_1 = u(\delta_\lambda(x)) = \lambda^{2-Q} \cdot u(x) = \lambda^{2-Q} \cdot \mathbf{c}_1 \quad \forall\ \lambda \in]a, b[.$$

Perciò derivando in λ l'identità $\mathbf{c}_1 = \lambda^{2-Q} \cdot \mathbf{c}_1$ si ha

$$0 = (2 - Q)\, \lambda^{1-Q}\, \mathbf{c}_1;$$

essendo $Q > 2$ e $\lambda > 0$ ne segue che $\mathbf{c}_1 = 0$. Per l'arbitrarietà di $x \in D$ allora $u \equiv 0$ in D, ma ciò contraddice l'ipotesi di positività di u. Questo assurdo prova che B^C è denso e quindi risulta dimostrata la (4.8).

Perciò, considerando la funzione $\Gamma := \mathbf{c}_u{}^{-1}\, u$, per il Lemma 4.4 e per l'ipotesi i) del presente teorema si ha che $\Gamma \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N) \cap \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^N \smallsetminus \{0\}, \mathbb{R})$ e vale anche che

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma \cdot \mathcal{L}\varphi \, \mathrm{d}x = \mathbf{c}_u{}^{-1} \cdot \big(- \mathbf{c}_u \varphi(0) \big) = -\varphi(0), \quad \forall\, \varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}).$$

Infine proviamo che

$$\lim_{x \to +\infty} \Gamma(x) = 0.$$

Infatti, fissato $x \neq 0$, se d è la norma omogenea dell' Osservazione 4.2, per la positività di u su $\mathbb{R}^N \smallsetminus \{0\}$ e per la δ_λ-omogeneità di u si ha

$$0 < u(x) = u\left(\delta_{d(x)}\left(\delta_{\frac{1}{d(x)}}(x)\right)\right) = d(x)^{2-Q} \cdot u\left(\delta_{\frac{1}{d(x)}}(x)\right) \leq d(x)^{2-Q} \cdot M,$$

dove $0 < M := \max\{u(y) \,:\, d(y) = 1\} < \infty$, perchè l'insieme $\{d(y) = 1\}$ è un compatto lontano dall'origine di $\mathbb{R}^N$ (su cui u è continua e positiva). Essendo $2 - Q < 0$ e

$$\lim_{x \to +\infty} d(x) = +\infty,$$

allora si ha

$$\lim_{x \to +\infty} u(x) = 0.$$

Questo conclude la prova. $\square$

Capitolo 5

Proprietà della funzione G(x,t)

In questo capitolo dimostreremo che $G(x,t)$ è la soluzione fondamentale di $\mathcal{L}$, come in (2.1) a pagina 20 (a meno di una costante moltiplicativa opportuna); per provarlo si utilizzerà il Teorema 4.5 del Capitolo 4 e il Teorema 2.4 del Capitolo 2. Relativamente a quest'ultimo, ci resta da verificare la validità delle ipotesi tecniche in esso assunte: alcune sono già state dimostrate, ad esempio la positività della funzione $V(\tau)$ (si veda il Capitolo 2), e il fatto che le funzioni f e V soddisfano rispettivamente le equazioni differenziali (GHJE) e (GTE) (si veda il Capitolo 3).

Nel resto del capitolo, si procederà alla dimostrazione di ulteriori proprietà della funzione $G(x,t)$, importanti al fine di utilizzare il Teorema 4.5 col quale saremo in grado di provare che $G(x,t)$ è la soluzione fondamentale di $\mathcal{L}$. Anche in questo capitolo faremo riferimento ad alcuni lemmi di analisi matriciale che presentiamo nell'appendice a fine capitolo.

Da qui in avanti utilizzeremo la notazione

$$\Omega := \Big\{(x,t) \in \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{n+p} : x \neq 0\Big\},$$

già incontrata nella dimostrazione del Teorema 2.4 a pagina 26.

5.1 Validità delle ipotesi del Teorema 2.4

Per poter invocare il Teorema 2.4 a pagina 26 dobbiamo dimostrare che le ipotesi in esso contenute sono tutte verificate; a tal fine ci resta da provare i seguenti fatti:

a) Per ogni fissato $(x,t) \in \Omega$ la funzione $\tau \mapsto \dfrac{V(\tau)}{f(x,t,\tau)^{\frac{n}{2}+p-1}}$ è sommabile su $\mathbb{R}^p$;

b) la funzione $(x,t) \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}^p} \frac{V(\tau)}{f(x,t,\tau)^{\frac{n}{2}+p-1}}\, \mathrm{d}\tau$ è continua su Ω;

c) si ha $|f(x,t,\tau)| \geq \frac{1}{2}\,||\,x\,||^2$ per ogni $x \neq 0$ e per ogni $t, \tau \in \mathbb{R}^p$;

d) esistono due costanti $\widehat{\mathbf{c}}, \mathbf{c} > 0$ tali che se $\|\tau\| \geq 1$ si ha

$$V(\tau) \leq \widehat{\mathbf{c}}\,\|\tau\|^{1/2} \exp(-\mathbf{c}\,\|\tau\|).$$

Ricordiamo che, tramite appunto il Teorema 2.4, questo ci permette di dedurre che, posto

$$G(x,t) := \int_{\mathbb{R}^p} \frac{V(\tau)}{f(x,t,\tau)^{\frac{n}{2}+p-1}}\, \mathrm{d}\tau, \qquad (x,t) \in \Omega,$$

la funzione integrale $G(x,t)$ è $\mathcal{L}$-armonica su Ω.

Iniziamo col provare le proprietà (a), (b) e (c).

Proposizione 5.1. *Siano f e V come nella Definizione 2.7 a pagina 31. Allora la funzione $\mathbb{R}^p \ni \tau \longmapsto \dfrac{V(\tau)}{f(x,t,\tau)^q}$ è sommabile in $\mathbb{R}^p$ per ogni $(x,t) \in \Omega$.*

In particolare, per ogni $(x,t) \in \Omega$, è convergente l'integrale

$$G(x,t) = \int_{\mathbb{R}^p} \frac{V(\tau)}{f(x,t,\tau)^q}\, \mathrm{d}\tau,$$

e la funzione $\Omega \ni (x,t) \mapsto G(x,t)$ è continua. Infine si ha $|f(x,t,\tau)| \geq \frac{1}{2}\,||\,x\,||^2$ per ogni $x \neq 0$ e per ogni $t, \tau \in \mathbb{R}^p$.

Dimostrazione. Fissiamo $(x,t) \in \Omega$. Richiamando la Proposizione 3.2 e il Lemma 5.12 e ricordando che $\dfrac{z}{\tanh(z)} \geq 1$ per ogni $z \in \mathbb{R}$, si ha

$$\begin{aligned} \Big|f(x,t,\tau)\Big| &= \Big|\frac{1}{2}\,\langle \Lambda(\tau)\,x, x\rangle - i\langle t, \tau\rangle\Big| \geq \frac{1}{2}\Big|\langle \Lambda(\tau)\,x, x\rangle\Big| \\ &= \frac{1}{2}\,\langle \Lambda(\tau)\,x, x\rangle \geq \frac{1}{2}\min_{1\leq i\leq n}\left(\frac{\lambda_i}{\tanh\lambda_i}\right)\cdot \|x\|^2 \geq \frac{1}{2}\|x\|^2 > 0. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Questo prova (c). Inoltre ciò prova anche che la funzione $\tau \mapsto \dfrac{V(\tau)}{f(x,t,\tau)^q}$ è continua da $\mathbb{R}^p$ a $\mathbb{C}$, per ogni fissato $(x,t) \in \Omega$. Ricordando che $V(\tau) > 0$ per ogni $\tau \in \mathbb{R}^p$, si ha

$$\int_{\mathbb{R}^p}\Big|\frac{V(\tau)}{f(x,t,\tau)^q}\Big|\,\mathrm{d}\tau = \int_{\mathbb{R}^p}\frac{V(\tau)}{|f(x,t,\tau)|^q} \leq \frac{2^q}{\|x\|^{2\,q}}\cdot\int_{\mathbb{R}^p} V(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{5.2}$$

Dalla stima precedente segue che per dimostrare la sommabilità della funzione $\tau \mapsto \dfrac{V(\tau)}{f(x,t,\tau)^q}$ è sufficiente provare quella di $V(\tau)$ per $||\tau|| \geq 1$ (si ricordi che V è una funzione continua).

Sfruttando la parità di $\operatorname{sinhc}(z)$ e il fatto che $\operatorname{sinhc}(z) \geq 1$ per ogni $z \in \mathbb{R}$, applicando il Lemma 5.11 alla matrice hermitiana $\Omega(\tau)$, e infine procedendo come nella Sezione 2.2.1 si ottiene

$$\begin{aligned} \det\operatorname{sinhc}\big(\Omega(\tau)\big) &= \prod_{k=1}^{n}\operatorname{sinhc}\big(\lambda_k(\tau)\big) = \prod_{k=1}^{n}\operatorname{sinhc}\big|\lambda_k(\tau)\big| \\ &\geq \operatorname{sinhc}\Big(\max_{k\leq n}|\lambda_k(\tau)|\Big) = \operatorname{sinhc}\big(|||\Omega(\tau)|||_2\big), \end{aligned}$$

dove $\lambda_1(\tau),\dots,\lambda_n(\tau)$ indicano gli autovalori della matrice $\Omega(\tau)$. Quindi

$$\begin{aligned} V(\tau) &= \sqrt{\det\Big(\operatorname{sinhc}\big(\Omega(\tau)\big)\Big)^{-1}} = \sqrt{\Big(\det\operatorname{sinhc}\big(\Omega(\tau)\big)\Big)^{-1}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{\det\operatorname{sinhc}\big(\Omega(\tau)\big)}} \leq \sqrt{\frac{1}{\operatorname{sinhc}\big(|||\Omega(\tau)|||_2\big)}} \\ &= \sqrt{\Big(\operatorname{sinhc}(|||\Omega(\tau)|||_2)\Big)^{-1}}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Ora, per $\tau \neq 0$, risulta

$$\Omega(\tau) = -i\sum_{j=1}^{p}\tau_j\cdot A^j = ||\tau||\cdot\left(-i\sum_{j=1}^{p}\frac{\tau_j}{||\tau||}\cdot A^j\right) = ||\tau||\cdot\Omega\left(\frac{\tau}{\|\tau\|}\right);$$

perciò segue che

$$||| \,\Omega(\tau)\, |||_2 = ||\tau|| \cdot \Big|\Big|\Big| \,\Omega\Big(\frac{\tau}{||\tau||}\Big)\, \Big|\Big|\Big|_2.$$

Dunque, usando la notazione $\widehat{\tau} := \tau/\|\tau\|$ (quando $\tau \neq 0$), risulta

$$\begin{aligned}\int_{||\tau||\geq 1} V(\tau)\,\mathrm{d}\tau &\overset{(5.3)}{\leq} \int_{||\tau||\geq 1} \sqrt{\frac{|||\,\Omega(\tau)\,|||_2}{\sinh |||\,\Omega(\tau)\,|||_2}}\,\mathrm{d}\tau \\ &\leq \int_{||\tau||\geq 1} \sqrt{\frac{||\tau||\cdot |||\,\Omega(\widehat{\tau})\,|||_2}{\sinh\Big(||\tau||\cdot |||\,\Omega(\widehat{\tau})\,|||_2\Big)}}\,\mathrm{d}\tau := (\star).\end{aligned}$$

Parametrizzando l'insieme $\{\tau \in \mathbb{R}^p \,:\, ||\,\tau\,|| \geq 1\}$ con le coordinate sferiche usuali, $\tau = \rho \cdot \nu(\theta)$ dove $\rho \in [1, +\infty[$ e $\theta \in N$ (opportuno compatto di $\mathbb{R}^{p-1}$) e $\mathrm{d}\tau = \widetilde{N}(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho$ (per un'opportuna densità $\widetilde{N} \geq 0$ continua e globalmente limitata) ne segue l'uguaglianza

$$(\star) = \int_1^{+\infty} \left(\int_N \sqrt{\frac{\rho \cdot |||\,\Omega(\nu(\theta))\,|||_2}{\sinh\Big(\rho\cdot |||\,\Omega(\nu(\theta))\,|||_2\Big)}} \cdot \rho^{p-1}\widetilde{N}(\theta)\,\mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}\rho := (2\star).$$

Ora, per il Lemma 5.13 si ha la stima

$$\widetilde{N}(\theta) \cdot \sqrt{|||\Omega(\nu(\theta))|||_2} \leq \mathbf{c}, \qquad \forall\, \theta \in N$$

(si ricordi l'identità $\Omega(\tau) = -i \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \tau_j\, A^j$ e $\|\nu(\theta)\| = 1$ per ogni $\theta \in N$), quindi risulta la prima delle seguenti disuguaglianze (le altre essendo commentate in parentesi):

$$(2\star) \leq \mathbf{c} \int_1^{+\infty} \rho^{\frac{1}{2}+p-1} \left(\int_N \frac{1}{\sqrt{\sinh\big(\rho\cdot |||\,\Omega(\nu(\theta))\,|||_2\big)}}\,\mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}\rho$$

(usiamo il fatto che $|||\Omega(\nu(\theta))|||_2 \geq \mathbf{c}_1$; si veda il Lemma 5.13)

$$\begin{aligned}&\leq \mathbf{c} \int_1^{+\infty} \rho^{\frac{1}{2}+p-1} \left(\int_N \frac{1}{\sqrt{\sinh(\mathbf{c}_1\,\rho)}}\,\mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}\rho \\ &= \mathbf{c}' \int_1^{+\infty} \rho^{\frac{1}{2}+p-1} \frac{1}{\sqrt{\sinh(\mathbf{c}_1\,\rho)}}\,\mathrm{d}\rho\end{aligned}$$

$$\left(\text{usiamo il fatto che } \mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{\sinh x}{e^x} \text{ è crescente e } \rho\, \mathbf{c}_1 \geq \mathbf{c}_1 > 0\right)$$

$$\leq \mathbf{c}'' \int_1^{+\infty} \rho^{\frac{1}{2}+p-1} \frac{1}{\sqrt{e^{\mathbf{c}_1 \rho}}}\, \mathrm{d}\rho < \infty.$$

Infine dalla stima (5.1) si ottiene che

$$\frac{V(\tau)}{f(x,t,\tau)^q} \leq 2^q \frac{V(\tau)}{||\, x\, ||^{2q}}, \qquad \forall\ (x,t,\tau) \in \Omega \times \mathbb{R}^p,$$

e anche che la funzione $\Omega \times \mathbb{R}^p \ni (x,t,\tau) \longmapsto \dfrac{V(\tau)}{f(x,t,\tau)^q}$ è continua. Inoltre, da quanto fatto in precedenza risulta che V è sommabile in $\mathbb{R}^p$, dunque la funzione $\mathbb{R}^p \ni \tau \mapsto \dfrac{V(\tau)}{||\, x\, ||^{2q}}$ è sommabile su $\mathbb{R}^p$, per ogni $(x,t) \in \Omega$. Pertanto, con un argomento di convergenza dominata, si ottiene la continuità di $G(x,t)$ su Ω. Questo conclude quindi la prova. $\square$

Osservazione 5.2. Osserviamo che la funzione

$$G(x,t) := \int_{\mathbb{R}^p} \frac{V(\tau)}{f(x,t,\tau)^{\frac{n}{2}+p-1}}\, \mathrm{d}\tau$$

non risulta ben definita sullo spazio vettoriale p-dimensionale $\{x = 0\}$, in quanto, per $x = 0$, la funzione integranda $\dfrac{V(\tau)}{f(0,t,\tau)^q}$ non è sommabile nemmeno localmente; infatti, posto $m := \min\limits_{||\tau|| \leq 1} V(\tau)$ si ha

$$\Big|\frac{V(\tau)}{f(0,t,\tau)^q}\Big| = \Big|\frac{V(\tau)}{\big(-i\langle t,\tau\rangle\big)^q}\Big| = \frac{V(\tau)}{\big|\langle t,\tau\rangle\big|^q} \geq \frac{V(\tau)}{||\, t\, ||^q \cdot ||\, \tau\, ||^q} \geq \frac{m}{||\, t\, ||^q \cdot ||\, \tau\, ||^q}.$$

[Si noti che $m > 0$ per la positività di V.] Quindi $\frac{1}{||\, t\, ||^q} \cdot \frac{m}{||\, \tau\, ||^q}$ è localmente sommabile se e solo se

$$\frac{n}{2} + p - 1 = q < p \Longleftrightarrow \frac{n}{2} - 1 < 0 \Longleftrightarrow n < 2,$$

il che è assurdo essendo $\mathbb{G}$ un gruppo di Lie di passo 2 (il secondo strato dell'associata stratificazione $\mathfrak{g} = V_1 \oplus V_2$ è non nullo).

Osservazione 5.3. Per mezzo dello studio di opportune forme differenziali in più variabili complesse, nonché mediante una sofisticata analisi della perturbazione delle proprietà spettrali della matrice hermitiana $\Omega(\tau)$

(quando τ è a coordinate complesse con parte reale piccola), Beals, Gaveau e Greiner [3] dimostrano che la funzione integrale $G(x,t)$ di cui sopra (di per sè definita per $x \neq 0$) è prolungabile su tutto $\mathbb{R}^{n+p} \smallsetminus \{(0,0)\}$ mediante la funzione seguente:

$$\widetilde{G}(x,t) := \int_{\mathbb{R}^p} \frac{V(\tau + i\,\varepsilon\,\widehat{t})}{f(x,t,\tau + i\,\varepsilon\,\widehat{t})^q}\,\mathrm{d}\tau, \qquad \text{per } 0 < \varepsilon \ll 1, \tag{5.4}$$

e, fatto fondamentale, si ha che $\widetilde{G}(x,t)$ *è di classe* $\mathbf{C}^\infty$ *su* $\mathbb{R}^{n+p} \smallsetminus \{(0,0)\}$. Qui si è usata la notazione

$$\widehat{t} := \begin{cases} \frac{t}{\|t\|} & \text{se } t \neq 0 \\ 0 & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

Di fatto i citati autori provano la regolarità di $\widetilde{G}$ dimostrando che essa è la soluzione fondamentale di $\mathcal{L}$ (e sfruttando l'ipoellitticità di $\mathcal{L}$). Noi ipotizzeremo la regolarità $\mathbf{C}^\infty$ di $\widetilde{G}$, ma dimostreremo che $\mathcal{L}\widetilde{G} = -\mathrm{Dir}_0$ in maniera completamente diversa rispetto alle tecniche utilizzate in [3].

Resta da provare la proprietà (d) enunciata all'inizio del Capitolo.

Proposizione 5.4. *Sia V come nella Definizione 2.7. Allora esistono due costanti* $\widehat{\mathbf{c}}, \mathbf{c} > 0$ *tali che se* $\|\tau\| \geq 1$ *si ha*

$$V(\tau) \leq \widehat{\mathbf{c}}\,\|\tau\|^{1/2} \exp(-\mathbf{c}\,\|\tau\|).$$

Dimostrazione. Richiamiamo dalla dimostrazione della Proposizione 5.1 la stima (5.3) sulla funzione V:

$$V(\tau) \leq \sqrt{\frac{1}{\mathrm{sinhc}\big(|||\,\Omega(\tau)\,|||_2\big)}} := (\bullet).$$

Inoltre, essendo $\Omega(\tau) = ||\tau|| \cdot \Omega\left(\frac{\tau}{||\tau||}\right)$ per $\tau \neq 0$, risulta

$$|||\,\Omega(\tau)\,|||_2 = ||\tau|| \cdot \left|\left|\left|\,\Omega\left(\frac{\tau}{||\tau||}\right)\,\right|\right|\right|_2.$$

Sia $\|\tau\| \geq 1$; posto $\widehat{\tau} = \frac{\tau}{\|\tau\|}$, si ha

$$(\bullet) = \sqrt{\frac{|||\Omega(\tau)|||_2}{\sinh\big(|||\Omega(\tau)|||_2\big)}} = \sqrt{\frac{||\tau|| \cdot |||\,\Omega(\widehat{\tau})\,|||_2}{\sinh\big(||\tau|| \cdot |||\,\Omega(\widehat{\tau})\,|||_2\big)}}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{\text{(i)}}{\leq} \sqrt{\|\tau\|} \cdot \sqrt{\frac{\mathbf{c}_2}{\sinh\big(\|\tau\| \cdot |||\, \Omega(\widehat{\tau})\, |||_2\big)}} \\
&\overset{\text{(ii)}}{\leq} \sqrt{\|\tau\|} \cdot \sqrt{\frac{\mathbf{c}_2}{\sinh\big(\|\tau\| \cdot \mathbf{c}_1\big)}} \\
&= \sqrt{\|\tau\|} \cdot \sqrt{\frac{\mathbf{c}_2}{\exp(\|\tau\|\, \mathbf{c}_1) \cdot \dfrac{\sinh\big(\|\tau\|\, \mathbf{c}_1\big)}{\exp(\|\tau\|\, \mathbf{c}_1)}}} \\
&\overset{\text{(ii)}}{\leq} \mathbf{c}_3 \sqrt{\|\tau\|} \cdot \sqrt{\frac{\mathbf{c}_2}{\exp(\|\tau\|\, \mathbf{c}_1)}}.
\end{aligned}
$$

Abbiamo qui usato i seguenti fatti:

i) $|||\, \Omega(\widehat{\tau})\, |||_2 \leq \mathbf{c}_2$ grazie al Lemma 5.13;

ii) $|||\, \Omega(\widehat{\tau})\, |||_2 \geq \mathbf{c}_1$ sempre grazie al Lemma 5.13;

iii) la funzione $\dfrac{\sinh x}{\exp x}$ è crescente per $x \in \mathbb{R}$ e si ha $\|\tau\|\, \mathbf{c}_1 \geq \mathbf{c}_1 > 0$, poiché $\|\tau\| \geq 1$ (si veda il Lemma 5.13 per la positività di $\mathbf{c}_1$).

Posto $\widehat{\mathbf{c}} := \mathbf{c}_3 \sqrt{\mathbf{c}_2}$ e $\mathbf{c} := \dfrac{\mathbf{c}_1}{2}$ si ha la tesi. Questo conclude la prova. □

5.2 Ulteriori proprietà della funzione G

In questa sezione, con $\widetilde{G}$ si denota la funzione introddotta nell'Osservazione 5.3. Rimandiamo all'articolo [3] per la buona positura di questa funzione, per la sua regolarità $\mathbf{C}^\infty$ e per la prova del fatto che

$$G(x,t) = \widetilde{G}(x,t), \quad \text{per ogni } (x,t) \in \Omega. \tag{5.5}$$

Proposizione 5.5. *Le funzioni*

$$\Omega \ni (x,t) \mapsto G(x,t) \quad e \quad (x,t) \ni \mathbb{R}^{n+p} \smallsetminus \{(0,0)\} \mapsto \widetilde{G}(x,t)$$

sono δ_λ-omogenee di grado $2-Q$.

[Si noti che ha senso parlare della δ_λ-omogeneità di G poiché Ω è chiuso rispetto a ogni dilatazione.]

Dimostrazione. Inizialmente notiamo che, essendo $\mathbb{G}$ un gruppo di Carnot omogeneo di passo 2, il primo strato dell'algebra associata, $\mathfrak{g} = V_1 \oplus V_2$, è generato da campi vettoriali δ_λ-omogenei di grado 1, mentre il secondo strato da campi vettoriali δ_λ-omogenei di grado 2. Inoltre osserviamo che per ogni $\lambda > 0$

$$\widehat{\lambda^2 t} = \begin{cases} \dfrac{\lambda^2 t}{\lambda^2 ||t||} = \dfrac{t}{||t||} & \text{se } t \neq 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \end{cases} \qquad = \widehat{t}.$$

Perciò per ogni $\lambda > 0$ si ha

$$\begin{aligned}
\widetilde{G}(\lambda\, x, \lambda^2\, t) &= \int_{\mathbb{R}^p} \frac{V(\tau + i\varepsilon\,\widehat{t}\,)}{f(\lambda\, x, \lambda^2\, t, \tau + i\varepsilon\,\widehat{t}\,)^q}\, \mathrm{d}\tau \\
&= \int_{\mathbb{R}^p} \frac{V(\tau + i\varepsilon\,\widehat{t}\,)}{\Big(\frac{1}{2}\langle \Lambda(\tau + i\varepsilon\,\widehat{t}\,)\,\lambda\, x, \lambda\, x\rangle - i\langle \lambda^2\, t, \tau + i\varepsilon\,\widehat{t}\,\rangle\Big)^q}\, \mathrm{d}\tau \\
&= \lambda^{-2q} \int_{\mathbb{R}^p} \frac{V(\tau + i\varepsilon\,\widehat{t}\,)}{\big(\frac{1}{2}\langle \Lambda(\tau + i\varepsilon\,\widehat{t}\,)\, x, x\rangle - i\langle t, \tau + i\varepsilon\,\widehat{t}\,\rangle\big)^q}\, \mathrm{d}\tau \\
&= \lambda^{-2q} \int_{\mathbb{R}^p} \frac{V(\tau + i\varepsilon\,\widehat{t}\,)}{f(x, t, \tau + i\varepsilon\,\widehat{t}\,)^q}\, \mathrm{d}\tau = \lambda^{-2q}\, \widetilde{G}(x, t).
\end{aligned}$$

Ma $-2q = -2\big(\frac{n}{2} + p - 1\big) = -n - 2p + 2 = 2 - (n + 2p) = 2 - Q$ e quindi

$$\widetilde{G}(\lambda\, x, \lambda^2\, t) = \lambda^{2-Q}\, \widetilde{G}(x, t), \qquad \forall\, \lambda > 0\,, \forall\, (x, t) \neq (0, 0).$$

Analogamente si prova che

$$G(\lambda\, x, \lambda^2\, t) = \lambda^{2-Q}\, G(x, t), \qquad \forall\, \lambda > 0\,, \forall\, (x, t) \neq (0, 0),$$

ripetendo i medesimi calcoli precedenti con $\varepsilon = 0$. □

Proposizione 5.6. *La funzione* $\Omega \ni (x, t) \mapsto G(x, t)$ *è a valori reali. Ne segue che ciò è vero anche per la funzione* $\widetilde{G}$ *definita fuori da* $(0, 0)$.

Inoltre G *e* $\widetilde{G}$ *sono pari su* $\mathbb{G}$*, ossia*[1]

$$\begin{aligned}
G(-x, -t) &= G(x, t) \quad \forall\ (x, t) \in \Omega; \\
\widetilde{G}(-x, -t) &= \widetilde{G}(x, t) \quad \forall\ (x, t) \neq (0, 0).
\end{aligned}$$

[1] Si ricordi che l'inverso nel gruppo $\mathbb{G}$ è dato da $(x, t) \mapsto (-x, -t)$.

Dimostrazione. Sfruttando la Proposizione 3.2 a pagina 38 si ha

$$
\begin{aligned}
f(x,t,\tau)^{-q} &= \left(\tfrac{1}{2}\langle\Lambda(\tau)\,x,x\rangle - i\langle t,\tau\rangle\right)^{-q} \\
&= |f(x,t,\tau)|^{-q}\cdot\exp\left(-q\,i\cdot\arctan\left(\frac{-\langle t,\tau\rangle}{\frac{1}{2}\langle\Lambda(\tau)\,x,x\rangle}\right)\right) \\
&= |f(x,t,\tau)|^{-q}\cdot\left\{\cos\left(q\cdot\arctan\left(\frac{\langle t,\tau\rangle}{\frac{1}{2}\langle\Lambda(\tau)\,x,x\rangle}\right)\right)+\right. \\
&\left.\quad + i\sin\left(q\cdot\arctan\left(\frac{\langle t,\tau\rangle}{\frac{1}{2}\langle\Lambda(\tau)\,x,x\rangle}\right)\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

Per la Proposizione 5.1 allora

$$
\begin{aligned}
G(x,t) &= \int_{\mathbb{R}^p}\frac{V(\tau)}{\left(\frac{1}{2}\langle\Lambda(\tau)\,x,x\rangle - i\langle t,\tau\rangle\right)^q}\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{\mathbb{R}^p} V(\tau)\cdot\left(\tfrac{1}{2}\langle\Lambda(\tau)\,x,x\rangle - i\langle t,\tau\rangle\right)^{-q}\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{\mathbb{R}^p} V(\tau)\cdot|f(x,t,\tau)|^{-q}\cos\left(q\cdot\arctan\left(\frac{\langle t,\tau\rangle}{\frac{1}{2}\langle\Lambda(\tau)\,x,x\rangle}\right)\right)\mathrm{d}\tau+ \\
&\quad + i\int_{\mathbb{R}^p} V(\tau)\cdot|f(x,t,\tau)|^{-q}\sin\left(q\cdot\arctan\left(\frac{\langle t,\tau\rangle}{\frac{1}{2}\langle\Lambda(\tau)\,x,x\rangle}\right)\right)\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}
$$

Dunque per mostrare che $G(x,t)$ è reale per ogni $(x,t)\in\Omega$ basta dimostrare che si annulla l'integrale

$$
\int_{\mathbb{R}^p} V(\tau)\cdot|f(x,t,\tau)|^{-q}\sin\left(q\cdot\arctan\left(\frac{\langle t,\tau\rangle}{\frac{1}{2}\langle\Lambda(\tau)\,x,x\rangle}\right)\right)\mathrm{d}\tau.
$$

Dalla parità della funzione $\mathrm{sinhc}(z)$ e della funzione $\cosh(z)$ e per il fatto che $\Omega(-\tau) = -i\cdot\sum_{j=1}^{p}(-\tau_j)\cdot A^j = -\Omega(\tau)$ per ogni $\tau\in\mathbb{R}^p$, si ottiene

$$
\Lambda(\tau) = \Lambda(-\tau), \quad \forall\,\tau\in\mathbb{R}^p,
$$

essendo $\Lambda(\tau) = (\mathrm{sinhc}(\Omega(\tau)))^{-1}\cdot\cosh(\Omega(\tau))$. Pertanto per ogni $\tau\in\mathbb{R}^p$

$$
\begin{aligned}
f(x,t,-\tau) &= \tfrac{1}{2}\,\langle\Lambda(-\tau)\,x,x\rangle - i\langle t,-\tau\rangle \\
&= \tfrac{1}{2}\,\langle\Lambda(\tau)\,x,x\rangle + i\langle t,\tau\rangle = \overline{f(x,t,\tau)}.
\end{aligned}
$$

Inoltre per ogni $\tau \in \mathbb{R}^p$ vale

$$V(-\tau) = \sqrt{\det\Big(\mathrm{sinhc}(\Omega(-\tau))\Big)^{-1}} = \sqrt{\det\Big(\mathrm{sinhc}(\Omega(\tau))\Big)^{-1}} = V(\tau).$$

Dunque per $(x,t) \in \Omega$, operando il cambiamento di variabile $\tau = -s$ e ricordando che $\arctan(x)$ è una funzione dispari, si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathbb{Im}\big(G(x,t)\big) &= \int_{\mathbb{R}^p} V(\tau)\,|f(x,t,\tau)|^{-q} \sin\left(q\,\arctan\left(\frac{\langle t,\tau\rangle}{\frac{1}{2}\langle\Lambda(\tau)\,x,x\rangle}\right)\right)\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{\mathbb{R}^p} V(-s)|f(x,t,-s)|^{-q} \sin\left(q\arctan\left(\frac{\langle t,-s\rangle}{\frac{1}{2}\langle\Lambda(-s)\,x,x\rangle}\right)\right)\mathrm{d}\tau \\
&= -\int_{\mathbb{R}^p} V(s)\,|\overline{f(x,t,s)}|^{-q} \sin\left(q\,\arctan\left(\frac{\langle t,s\rangle}{\frac{1}{2}\langle\Lambda(s)\,x,x\rangle}\right)\right)\mathrm{d}\tau \\
&= -\int_{\mathbb{R}^p} V(s)\,|f(x,t,s)|^{-q} \sin\left(q\,\arctan\left(\frac{\langle t,s\rangle}{\frac{1}{2}\langle\Lambda(s)\,x,x\rangle}\right)\right)\mathrm{d}\tau \\
&= -\mathbb{Im}\big(G(x,t)\big).
\end{aligned}$$

Da cui $\mathbb{Im}\big(G(x,t)\big) = 0$ per ogni $(x,t) \in \Omega$.

Si noti che abbiamo provato che, per ogni $(x,t) \in \Omega$, vale

$$\begin{aligned}
G(x,t) &= \int_{\mathbb{R}^p} \mathbb{Re}\left\{\frac{V(\tau)}{\Big(\frac{1}{2}\langle\Lambda(\tau)\,x,x\rangle - i\langle t,\tau\rangle\Big)^q}\right\}\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{\mathbb{R}^p} V(\tau)\cdot|f(x,t,\tau)|^{-q}\cos\left(q\cdot\arctan\left(\frac{\langle t,\tau\rangle}{\frac{1}{2}\langle\Lambda(\tau)\,x,x\rangle}\right)\right)\mathrm{d}\tau.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Da qui segue la parità di G (si ricordi che $f(-x,-t,\tau) = \overline{f(x,t,\tau)}$), e quindi la parità di $\widetilde{G}$ per un argomento di continuità. □

Osservazione 5.7. Come abbiamo già osservato nell'introduzione al Capitolo, nel Capitolo 2 si era mostrata la positività della funzione $V(\tau)$, mentre nel Capitolo 3 avevamo visto che le funzioni f e V risolvevano rispettivamente le equazioni differenziali (GHJE) e (GTE); per cui, richiamando inoltre le Proposizioni 5.1 e 5.4 otteniamo che $G(x,t)$ soddisfa le ipotesi del Teorema 2.4; dunque

$$G(x,t) \textit{ è } \mathcal{L}\textit{-armonica su } \Omega.$$

Infine sfruttando il fatto che $\widetilde{G}$ è $\mathbf{C}^\infty$ e coincide con la funzione $\mathcal{L}$-armonica G su un aperto denso di $\mathbb{R}^{n+p} \setminus \{(0,0)\}$, un semplicissimo argomento di continuità prova che

$$\widetilde{G}(x,t) \text{ è } \mathcal{L}\text{-armonica su } \mathbb{R}^{n+p} \setminus \{(0,0)\}.$$

Proposizione 5.8. *Sia $\widetilde{G}$ l'estensione $\mathbf{C}^\infty$ di G in $\mathbb{R}^{n+p} \setminus \{(0,0)\}$ come in* (5.4). *Allora seguono le proprietà:*

i) $\lim_{(x,t)\to\infty} \widetilde{G}(x,t) = 0$;

ii) $\mathbf{c}^{-1}\,\widetilde{G}$ *è positiva su $\mathbb{R}^{n+p} \setminus \{(0,0)\}$, ove $\mathbf{c} = \frac{1}{2}\mathbf{c}_u$ con $\mathbf{c}_u$ come in* (4.6), *$u = \widetilde{G}$ e d è una qualsiasi norma omogenea di classe $\mathbf{C}^\infty$ fuori dall'origine.*

Dimostrazione. Proviamo i). Sia $(x,t) \neq (0,0)$. Sia d la norma omogenea su $\mathbb{G}$ come nell'Osservazione 4.2; per la δ_λ-omogeneità di $\widetilde{G}$, si ha

$$\begin{aligned} 0 \le \left|\widetilde{G}(x,t)\right| &= \left|\widetilde{G}\Big(\delta_{d(x,t)}\Big(\delta_{\frac{1}{d(x,t)}}(x,t)\Big)\Big)\right| \\ &= d(x,t)^{2-Q} \cdot \left|\widetilde{G}\Big(\delta_{\frac{1}{d(x,t)}}(x,t)\Big)\right| \le d(x,t)^{2-Q} \cdot M, \end{aligned}$$

con $M := \max_{(x,t)\in S} |\,\widetilde{G}(x,t)|$, essendo S l'insieme $\{(x,t) \in \mathbb{R}^N : d(x,t) = 1\}$ (si noti che $M < \infty$ poiché S è un compatto lontano dall'origine di $\mathbb{R}^N$ e $\widetilde{G}$ è continua su S). Essendo $2 - Q < 0$ e poiché

$$\lim_{(x,t)\to\infty} d(x,t) = \infty,$$

allora si ha $\lim_{(x,t)\to\infty} |\,\widetilde{G}(x,t)| = 0$. Dunque vale i).

Ora proviamo ii); per farlo procediamo a passi, provando prima alcune proprietà notevoli utili alla dimostrazione di ii). Essendo

a) $\widetilde{G} \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ (segue dai risultati in [3], come discusso nella Osservazione 5.3),

b) $\mathcal{L}\widetilde{G} = 0$ in $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ (si veda l'Osservazione 5.7),

c) $\widetilde{G}$ è δ_λ-omogenea di grado $2-Q$ (si veda la Proposizione 5.5),

possiamo applicare il Lemma 4.4 a pagina 54 e dedurre che

$$\int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{G}(z) \cdot \mathcal{L}\varphi(z)\,\mathrm{d}z = -\mathbf{c}\,\varphi(0), \qquad \forall\ \varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}), \tag{5.7}$$

in cui $\mathbf{c} = \dfrac{1}{2}\,\mathbf{c}_u$, con $\mathbf{c}_u$ come in (4.6), ove $u = \widetilde{G}$ e d è ad esempio la norma omogenea nell'Osservazione 4.2.

Distinguiamo due casi: $\mathbf{c} \neq 0$ e $\mathbf{c} = 0$ (vedremo che quest'ultimo caso conduce ad un assurdo).

• Per cominciare, sia $\mathbf{c} = 0$. Da (5.7) segue che, se $\mathbf{c} = 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{G}(x) \cdot \mathcal{L}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall\,\varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}),$$

ossia $\mathcal{L}\widetilde{G} = 0$ nel senso delle distribuzioni su $\mathbb{R}^N$. Per l'ipoellitticità di $\mathcal{L}$ si può allora prolungare $\widetilde{G}$ ad una funzione $\mathcal{L}$-armonica su $\mathbb{R}^N$. Denotiamo tale prolungamento ancora con $\widetilde{G}$. Da

$$\widetilde{G}(\delta_\lambda(x)) = \lambda^{2-Q} \cdot \widetilde{G}(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \quad \forall\,\lambda > 0,$$

facendo tendere λ a 0^+, per la continuità (del prolungamento) di $\widetilde{G}$ e per il fatto che $Q > 2$, si dovrebbe avere

$$\widetilde{G}(0) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \widetilde{G}(x) > 0 \\ -\infty & \text{se } \widetilde{G}(x) < 0 \\ 0 & \text{se } \widetilde{G}(x) = 0. \end{cases}$$

Essendo $\widetilde{G}(0) \in \mathbb{R}$, ne risulterebbe $\widetilde{G}(x) = 0$ per ogni $x \neq 0$; ciò è però assurdo, infatti per $t = 0$ e $x \neq 0$ si ha

$$\widetilde{G}(x,t) = G(x,t) = \int_{\mathbb{R}^p} \frac{V(\tau)}{f(x,0,\tau)^q}\,\mathrm{d}\tau = \int_{\mathbb{R}^p} \frac{V(\tau)}{\left(\frac{1}{2}\langle \Lambda(\tau)\,x, x\rangle\right)^q}\,\mathrm{d}\tau > 0,$$

in quanto la funzione $\dfrac{V(\tau)}{\left(\frac{1}{2}\langle \Lambda(\tau)\,x, x\rangle\right)^q}$ è continua e positiva per la Proposizione 3.2.

• Resta da considerare il caso in cui $\mathbf{c} \neq 0$. In tal caso è ben posta $\mathbf{c}^{-1}\,\widetilde{G}$. Supponiamo di aver dimostrato il seguente asserto:

$$\mathbf{c}^{-1}\,\widetilde{G}(z) \geq 0, \quad \forall\, z \in \mathbb{R}^N \smallsetminus \{0\}. \tag{5.8}$$

Se ciò è vero, la proprietà ii) della Proposizione è completamente dimostrata: infatti, applicando il Principio del Massimo Forte alla funzione $\mathcal{L}$-armonica $\mathbf{c}^{-1}\,\widetilde{G}$ sull'aperto connesso $\mathbb{R}^N \smallsetminus \{0\}$, risulta che $\mathbf{c}^{-1}\,\widetilde{G}$ è positiva oppure identicamente nulla su $\mathbb{R}^N \smallsetminus \{0\}$. Quest'ultima eventualità è però da escludersi, in quanto, per $z = (x, 0)$, con $x \neq 0$, si ha

$$\mathbf{c}^{-1}\,\widetilde{G}(x,0) = \mathbf{c}^{-1}\,G(x,0) = \mathbf{c}^{-1}\,\underbrace{\int_{\mathbb{R}^p} \frac{V(\tau)}{\left(\frac{1}{2}\langle \Lambda(\tau)\,x, x\rangle\right)^q}\,\mathrm{d}\tau}_{>0} \neq 0,$$

in quanto la funzione $\dfrac{V(\tau)}{\langle \Lambda(\tau)\,x, x\rangle^q}$ è positiva e continua (Proposizione 3.2).

Resta quindi da provare (5.8). A tal fine, come ben noto, basta dimostrare (5.8) "in senso debole", ossia basta provare che

$$\int_{\mathbb{R}^N \smallsetminus \{0\}} \mathbf{c}^{-1}\,\widetilde{G}(z)\,\varphi(z)\,\mathrm{d}z \geq 0, \qquad \forall\, \varphi \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N \smallsetminus \{0\}, \mathbb{R}), \varphi \geq 0. \tag{5.9}$$

Per provare questo, fissata φ come sopra, poniamo

$$v(z) := -\int_{\mathbb{R}^N \smallsetminus \{0\}} \mathbf{c}^{-1}\,\widetilde{G}(z^{-1} * \zeta)\,\varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta, \qquad z \in \mathbb{R}^N.$$

Se proviamo che $v \leq 0$ in $\mathbb{R}^N$, risulterà in particolare

$$0 \geq v(0) = -\int_{\mathbb{R}^N \smallsetminus \{0\}} \mathbf{c}^{-1}\,\widetilde{G}(\zeta)\,\varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta,$$

da cui segue immediatamente (5.9).

Cominciamo con il dimostrare che v è ben posta e continua in $\mathbb{R}^N$. Per provarlo, osserviamo che, fissati $y \in \mathbb{R}^N$ e un compatto K di $\mathbb{R}^N$, si ha che

$$y * K := \{y * x \mid x \in K\} \text{ è un compatto di } \mathbb{R}^N.$$

Per questo semplice risultato topologico rimandiamo ad una nota.[2]

Ora, $\widetilde{G}$ è localmente sommabile poiché è δ_λ-omogenea di grado $2-Q$ (si veda poi il Lemma 4.3); dunque, operando il cambiamento di variabile $y = z^{-1} * \zeta$ si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \{0\}} \left| \mathbf{c}^{-1}\, \widetilde{G}(z^{-1} * \zeta) \right| \cdot \left| \varphi(\zeta) \right| \mathrm{d}\zeta = \int_{\mathrm{supp}(\varphi)} \left| \mathbf{c}^{-1}\, \widetilde{G}(z^{-1} * \zeta) \right| \cdot \left| \varphi(\zeta) \right| \mathrm{d}\zeta$$
$$= \int_{z^{-1} * \mathrm{supp}(\varphi)} \left| \mathbf{c}^{-1}\, \widetilde{G}(y) \right| \cdot \left| \varphi(z * y) \right| \mathrm{d}y$$
$$\leq |\mathbf{c}|^{-1}\, \|\varphi\|_{L^\infty} \int_{z^{-1} * \mathrm{supp}(\varphi)} \left| \widetilde{G}(y) \right| \mathrm{d}y < \infty.$$

Ne segue che v è ben posta. Inoltre, come sopra, si ha

$$v(z) = -\int_{z^{-1} * \mathrm{supp}(\varphi)} \mathbf{c}^{-1}\, \widetilde{G}(y)\, \varphi(z * y)\, \mathrm{d}y,$$

e quindi, per il teorema di convergenza dominata di Lebesgue, segue facilmente che v è continua su $\mathbb{R}^N$.

Proviamo che

$$\mathcal{L}v = \varphi \text{ in } \mathbb{R}^N;$$

a tal fine basta mostrarlo in senso debole, ossia

$$\int_{\mathbb{R}^N} v\, \mathcal{L}\Psi = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi\, \Psi, \quad \forall\ \Psi \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N), \tag{5.10}$$

e utilizzare l'ipoellitticità di $\mathcal{L}$.

Per dimostrare (5.10), utilizziamo i seguenti calcoli:

$$\int_{\mathbb{R}^N} v(x)\, \mathcal{L}\Psi(x)\, \mathrm{d}x$$

[2] Infatti, consideriamo $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in $y * K$, allora

$$z_n = y * x_n, \quad x_n \in K,\ \forall\, n \in \mathbb{N};$$

dunque per la compattezza di K esiste $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ sottosuccessione di $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tale che

$$x_{k_n} \to x \in K, \text{ per } n \to +\infty.$$

Quindi per la continuità della legge di gruppo $*$, si ha $z_{k_n} \to y * x \in y * K,$ per $n \to +\infty$.

$$
\begin{aligned}
&= -\int_{\mathbb{R}^N} \Big(\int_{\mathbb{R}^N \setminus \{0\}} \mathbf{c}^{-1}\, \widetilde{G}(x^{-1} * y)\, \varphi(y)\, \mathrm{d}y \Big)\, \mathcal{L}\Psi(x)\, \mathrm{d}x \\
&\overset{\text{(Fubini)}}{=} -\int_{\mathbb{R}^N \setminus \{0\}} \Big(\int_{\mathbb{R}^N} \mathbf{c}^{-1}\, \widetilde{G}(x^{-1} * y)\, \mathcal{L}\Psi(x)\, \mathrm{d}x \Big)\, \varphi(y)\, \mathrm{d}y \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N \setminus \{0\}} \Big(\int_{\mathbb{R}^N} \mathbf{c}^{-1}\, \widetilde{G}((y^{-1} * x)^{-1})\, \mathcal{L}\Psi(x)\, \mathrm{d}x \Big)\, \varphi(y)\, \mathrm{d}y \\
&\overset{(x^{-1} = -x)}{=} -\int_{\mathbb{R}^N \setminus \{0\}} \Big(\int_{\mathbb{R}^N} \mathbf{c}^{-1}\, \widetilde{G}(-(y^{-1} * x))\, \mathcal{L}\Psi(x)\, \mathrm{d}x \Big)\, \varphi(y)\, \mathrm{d}y \\
&\text{($\widetilde{G}(z)$ è pari per ogni $z \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$)} \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N \setminus \{0\}} \Big(\int_{\mathbb{R}^N} \mathbf{c}^{-1}\, \widetilde{G}(y^{-1} * x)\, \mathcal{L}\Psi(x)\, \mathrm{d}x \Big)\, \varphi(y)\, \mathrm{d}y \\
&\overset{(y^{-1} * x = z)}{=} -\int_{\mathbb{R}^N \setminus \{0\}} \Big(\int_{\mathbb{R}^N} \mathbf{c}^{-1}\, \widetilde{G}(z)\, \mathcal{L}\Psi(y * z)\, \mathrm{d}z \Big)\, \varphi(y)\, \mathrm{d}y \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N \setminus \{0\}} \Big(\int_{\mathbb{R}^N} \mathbf{c}^{-1}\, \widetilde{G}(z)\, \mathcal{L}\Psi\big(\tau_y(z)\big)\, \mathrm{d}z \Big)\, \varphi(y)\, \mathrm{d}y \\
&\text{(per l'invarianza a sinistra di $\mathcal{L}$)} \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N \setminus \{0\}} \Big(\int_{\mathbb{R}^N} \mathbf{c}^{-1}\, \widetilde{G}(z)\, \mathcal{L}(\Psi \circ \tau_y)(z)\, \mathrm{d}z \Big)\, \varphi(y)\, \mathrm{d}y := (\star).
\end{aligned}
$$

Ora, ovviamente $\Psi \circ \tau_y \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, poiché Ψ e τ_y sono funzioni entrambe $\mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ e si ha $\operatorname{supp}(\Psi \circ \tau_y) \subseteq y^{-1} * \operatorname{supp}(\Psi)$ e quest'ultimo insieme è compatto per ogni fissato y (si veda la nota precedente). Dunque è applicabile (5.7) e perciò

$$
(\star) = -\mathbf{c}^{-1} \int_{\mathbb{R}^N \setminus \{0\}} \Big(-\mathbf{c}(\Psi \circ \tau_y)(0) \Big) \cdot \varphi(y)\, \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^N} \Psi(y) \cdot \varphi(y)\, \mathrm{d}y.
$$

Ne segue (5.10).

Dall'asserto i) della presente proposizione, e da semplici ragionamenti topologici segue senza difficoltà che

$$
\lim_{|z| \to \infty} v(z) = 0.
$$

Dunque, poiché risulta anche $\mathcal{L}v = \varphi \geq 0$, per il Principio del Massimo Debole applicato alla funzione v e all'aperto illimitato $\mathbb{R}^N$, segue che $v \leq 0$ in $\mathbb{R}^N$, che è quanto volevamo dimostrare.

Questo conclude la prova. $\square$

Osservazione 5.9. Dalla Proposizione 5.8 si ha che $\mathbf{c}^{-1}\,\widetilde{G}(x,t)$ è positiva per ogni $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+p} \smallsetminus \{(0,0)\}$, ma come abbiamo già osservato in precedenza si ha che, per $(x,t) = (x,0)$ con $x \neq 0$

$$\widetilde{G}(x,0) = G(x,0) > 0.$$

Ne risulta che la costante $\mathbf{c}$ è positiva e quindi, sempre da (ii) della Proposizione 5.8, $\widetilde{G}(x,t)$ *è positiva in* $\mathbb{R}^{n+p} \smallsetminus \{(0,0)\}$. In particolare risulta che $G(x,t)$ *è positiva in* Ω, fatto a priori non ovvio.

Siamo ora in grado di dedurre che $\widetilde{G}(x,t)$ *è la soluzione fondamentale di* $\mathcal{L}$.

Osservazione 5.10. Riassumendo quanto dimostrato finora, si ha:

i) $\widetilde{G} \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^N \smallsetminus \{0\}, \mathbb{R})$ (segue dai risultati in [3], come discusso nella Osservazione 5.3);

ii) $\widetilde{G}$ è $\mathcal{L}$-armonica in $\mathbb{R}^N \smallsetminus \{0\}$ (si veda l'Osservazione 5.7);

iii) $\widetilde{G}$ è δ_λ-omogenea di grado $2 - Q$ (si veda la Proposizione 5.5);

iv) $\widetilde{G}$ è positiva in $\mathbb{R}^N \smallsetminus \{0\}$ (si veda la Osservazione 5.9).

Siamo quindi nelle condizioni di poter applicare il Teorema 4.5 a pagina 60 e concludere che, a meno di una opportuna costante positiva moltiplicativa, $\widetilde{G}(x,t)$ *è la soluzione fondamentale di* $\mathcal{L}$ *con polo in* $(0,0)$. Di fatto, dai risultati in [3] si ha che la citata costante è data da

$$\frac{\Gamma\big(\frac{Q}{2} - 1\big)}{(2\pi)^{Q/2}}, \qquad \text{ove } \Gamma \text{ denota la funzione Gamma di Eulero.}$$

Non faremo alcun uso di questo risultato nella presente Tesi.

5.3 Appendice

Riportiamo in questa breve appendice alcuni lemmi di algebra delle matrici usati in questo capitolo.

Lemma 5.11. *Sia $A \in \mathfrak{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ una matrice normale, e usiamo le notazioni*

$$\rho(A) := \max\{|\lambda| : \lambda \text{ autovalore di } A\},$$
$$|||\, A\,|||_2 := \max\{||\, Ax \,|| : ||x|| = 1\},$$

per denotare rispettivamente il raggio spettrale di A e la norma operatoriale di A. Allora si ha $\rho(A) = |||\, A\,|||_2$.

Dimostrazione. La disuguaglianza $|||\, A\,|||_2 \geq \rho(A)$ è vera in generale. Infatti, se $u_1, \dots, u_n$ sono autovettori per A (non necessariamente indipendenti, ma di norma unitaria) relativi agli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ di A (contati con molteplicità), segue che

$$|||\, A\,|||_2 = \max_{||x||=1} ||\, Ax\,|| \geq \max_{1\leq i\leq n} ||\, Au_i\,|| = \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i| = \rho(A).$$

Per dimostrare la disuguaglianza opposta, utilizziamo l'ipotesi di normalità di A: questa ipotesi, come noto, è equivalente al fatto che A è unitariamente diagonalizzabile, ovvero esiste una matrice unitaria U tale che $A = U \cdot D \cdot U^*$ con $D := \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, dove $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono gli autovalori di A (contati con molteplicità). La tesi seguirà se proviamo che vale $|||\, A\,|||_2^2 \leq \rho(A)^2$. Questo deriva dal seguente calcolo:

$$\begin{aligned}
|||\, A\,|||_2^2 &= \max_{||x||=1} \|\, Ax\,\|^2 = \max_{||x||=1} \langle A\,x, A\,x\rangle_{\mathbb{C}^n} = \max_{||x||=1} \langle U\,D\,U^*\,x, U\,D\,U^*\,x\rangle_{\mathbb{C}^n} \\
&= \max_{||x||=1} \langle D^*\,D\,U^*\,x, U^*\,x\rangle_{\mathbb{C}^n} = \max_{\|x\|=1} \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \cdot |(U^*\,x)_i|^2 \\
&\leq \rho(A)^2 \max_{||\,U^*\,x\,||=1} \sum_{i=1}^{n} |(U^*\,x)_i|^2 = \rho(A)^2 \max_{||\,U^*\,x\,||=1} ||\,U^* x\,||^2 = \rho(A)^2.
\end{aligned}$$

Perciò vale anche $|||\, A\,|||_2 \leq \rho(A)$; dunque si ottiene la tesi. □

Lemma 5.12. *Se $A \in \mathfrak{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ è hermitiana allora*

$$\langle A \cdot x, x\rangle_{\mathbb{C}^n} \geq \min_{i=1,\dots,n} \lambda_i \cdot ||x||^2,$$

ove $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono gli autovalori di A contati con molteplicità. In particolare

$$\min_{x\neq 0} \frac{\langle A \cdot x, x\rangle_{\mathbb{C}^n}}{||x||^2} = \min_{i=1,\dots,n} \lambda_i.$$

Dimostrazione. Ricordando che i λ_i sono tutti reali, in quanto A è hermitiana, segue che (si vedano le notazioni nella dimostrazione precedente, ricordando che una matrice hermitiana è normale)

$$\begin{aligned}\langle A\cdot x, x\rangle_{\mathbb{C}^n} &= \langle U\cdot D\cdot U^*\cdot x, x\rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle D\cdot U^*\cdot x, U^*\cdot x\rangle_{\mathbb{C}^n}\\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i\cdot|(U^*\cdot x)_i|^2 \geq \min_{i=1,\dots,n}\lambda_i\cdot||U^*\cdot x||^2 = \min_{i=1,\dots,n}\lambda_i\cdot||x||^2.\end{aligned}$$

Ne segue

$$\min_{x\neq 0}\frac{\langle A\cdot x, x\rangle_{\mathbb{C}^n}}{||x||^2} \geq \min_{i=1,\dots,n}\lambda_i =: \lambda_0.$$

D'altra parte, se scegliamo $x = u_0$ (autovettore relativo a λ_0), si ha

$$\min_{x\neq 0}\frac{\langle A\cdot x, x\rangle_{\mathbb{C}^n}}{||x||^2} \leq \frac{\langle A\cdot u_0, u_0\rangle_{\mathbb{C}^n}}{||u_0||^2} = \frac{\langle \lambda_0\, u_0, u_0\rangle_{\mathbb{C}^n}}{||u_0||^2} = \lambda_0.$$

Ne segue

$$\min_{x\neq 0}\frac{\langle A\cdot x, x\rangle_{\mathbb{C}^n}}{||x||^2} = \lambda_0 = \min_{i=1,\dots,n}\lambda_i,$$

che è quanto volevamo dimostrare. □

Lemma 5.13. *Siano $A^j \in \mathfrak{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ (con $j = 1,\dots,p$). Allora la funzione*[3]

$$\Psi(t) := \max_{||x||=1}\left|\left|\sum_{j=1}^p \frac{t_j}{||t||}\,A^j\cdot x\right|\right|, \qquad t\in\mathbb{R}^p\setminus\{0\}$$

è continua e positiva in $\mathbb{R}^p\setminus\{0\}$.

Di più, se le matrici A^j sono linearmenti indipendenti, esistono due costanti positive $\mathbf{c}_1$ e $\mathbf{c}_2$ tali che

$$\mathbf{c}_1 \leq \Psi(t) \leq \mathbf{c}_2, \quad \forall\ t\in\mathbb{R}^p\setminus\{0\}.$$

Dimostrazione. Usando la notazione $\widehat{t} = \dfrac{t}{\|t\|}$ per $t\neq 0$, osserviamo esplicitamente che (essendo $|||\cdot|||_2$ la norma operatoriale in $\mathfrak{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$)

$$\Psi(t) = \left|\left|\left|\sum_{j=1}^p \widehat{t}_j\,A^j\right|\right|\right|_2, \quad \forall\ t\in\mathbb{R}^p\setminus\{0\}. \tag{5.11}$$

[3]Tranne la norma $\|t\|$, che è l'usuale norma euclidea in $\mathbb{R}^p$, conveniamo che le altre norme coinvolte sono date dalla norma hermitiana standard di $\mathbb{C}^n$.

Poniam

$$g(t) := \left|\left|\left| \sum_{j=1}^{p} t_j \, A^j \right|\right|\right|_2, \quad t \in \mathbb{R}^p,$$

e notiamo che $\Psi(t) = g(\,\widehat{t}\,) = g\left(\dfrac{t}{\|t\|}\right)$ per ogni $t \neq 0$. Questo prova anche che Ψ *è una funzione omogenea di grado* 0 *su* $\mathbb{R}^p \smallsetminus \{0\}$ *rispetto alla usuale dilatazione euclidea di* $\mathbb{R}^p$.

Se mostriamo che $g \in \mathbf{C}(\mathbb{R}^p)$, essendo la funzione $t \mapsto \widehat{t} = \frac{t}{\|t\|}$ continua su $\mathbb{R}^p \smallsetminus \{0\}$, ne seguirà la continuità di Ψ. Ora, la continuità di g è ovvia, poiché l'applicazione $t \mapsto \displaystyle\sum_{j=1}^{p} t_j \, A^j$ è continua da $\mathbb{R}^p$ in $\mathfrak{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, e la norma $|||\cdot|||_2$ è continua da $\mathfrak{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ in $\mathbb{R}$.

Proviamo la positività di Ψ; richiamando (5.11), segue che

$$\Psi(t) = 0 \iff \sum_{j=1}^{p} \widehat{t}_j \cdot A^j = 0,$$

ma essendo le matrici A^j linearmente indipendenti, si ottiene che $\widehat{t}_j = 0$ per ogni $j = 1, \ldots, p$. Questo è tuttavia un assurdo poiché $\widehat{t}$ è un versore di $\mathbb{R}^p$. In particolare, posto

$$\mathbf{c}_1 := \min_{\|t\|=1} \Psi(t) \;\text{ e }\; \mathbf{c}_2 := \max_{\|t\|=1} \Psi(t),$$

segue che $\mathbf{c}_1$ e $\mathbf{c}_2$ sono finiti e positivi, grazie alla continuità e positività di Ψ (e al fatto che $\{t \in \mathbb{R}^p : \|t\| = 1\}$ è compatto). Data l'omogeneità di Ψ segue immediatamente l'ultimo asserto del lemma. $\square$

Capitolo 6

Applicazioni

Nel Capitolo 5 abbiamo dimostrato che la soluzione fondamentale di $\mathcal{L}$, sub-Laplaciano come in (2.1) a pagina 20, associato al gruppo omogeneo di Carnot di passo due $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^{n+p}, *, \delta_\lambda)$ (la cui algebra di Lie ammette una stratificazione $\mathfrak{g} = W_1 \oplus W_2$, dove $\dim(W_1) = n$, $\dim(W_2) = p$) è data, a meno di una costante moltiplicativa, dalla seguente funzione integrale

$$G(x,t) = \int_{\mathbb{R}^p} \frac{V(\tau)}{f(x,t,\tau)^{Q/2-1}} \, \mathrm{d}\tau, \tag{6.1}$$

almeno quando $(x,t) \in \mathbb{G}$ è tale che $x \neq 0$, dove $Q = n + 2p$ è la dimensione omogena di $\mathbb{G}$. Osserviamo che la costante $\frac{1}{2}$ in (2.1) non è di alcun rilievo, e possiamo considerare (a patto di moltiplicare per $\frac{1}{2}$ la costante moltiplicativa di fronte a $G(x,t)$) il sub-Laplaciano canonico $\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{n} Z_j^2$.

Nella maggior parte dei casi l'integrale (6.1) non si può calcolare esplicitamente. Nel caso però risulti $p = 1$ e n pari, l'integranda di (6.1) è una funzione polinomiale-fratta di tipo trigonometrico-iperbolico e, in linea di principio, l'integrale può essere calcolato esplicitamente.

In questo capitolo conclusivo ci proponiamo di fornire esplicitamente la soluzione fondamentale di gruppi con notevoli proprietà, in alcuni casi particolari in cui n è pari e $p = 1$ e infine mostriamo anche un esempio di gruppo per il quale non è possibile ricavare direttamente la soluzione fondamentale.

6.1 I gruppi di Heisenberg

In questa sezione consideriamo $\mathbb{G} = \mathbb{H}^k = (\mathbb{R}^{2k+1}, *)$, dove $\mathbb{H}^k$ è il gruppo di Heisenberg su $\mathbb{R}^{2k+1}$ e l'operazione $*$ è, come noto,

$$(x,t) * (x',t') = \Big(x + x', t + t' + 2\sum_{j=1}^{k} x_{n+j}x'_j - 2\sum_{j=1}^{k} x_j x'_{n+j}\Big).$$

Seguendo le notazioni dell'Osservazione 1.9 a pagina 18 la legge di gruppo $*$ deve essere denotata nel modo seguente

$$\begin{aligned}(x,t) * (x',t') &= \begin{pmatrix} x + x' \\ t + t' + \displaystyle\sum_{r,s=1}^{2k} a^1_{s,r} x_r\, x'_s \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x + x' \\ t + t' + \langle A^1\, x, x' \rangle \end{pmatrix},\end{aligned}$$

e quindi la matrice A^1 è necessariamante data da

$$A^1 = (a^1_{s,r})_{1 \le s,r \le 2k} = \left(\begin{array}{c|c} 0_{k\times k} & 2\,\mathbb{I}_{k\times k} \\ \hline -2\,\mathbb{I}_{k\times k} & 0_{k\times k} \end{array}\right).$$

Dunque, richiamando (2.7) pagina a 30, si ha che:

$$\Omega(\tau) = -i\,\tau\,A^1, \quad \forall\ \tau \in \mathbb{R}. \tag{6.2}$$

6.1.1 Il primo gruppo di Heisenberg

In questa sezione, mediante la tecnica descritta in questa Tesi, ci proponiamo di calcolare esplicitamente (a meno di un fattore moltiplicativo) la ben nota soluzione fondamentale di

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{2} Z_j^2, \tag{6.3}$$

(ove gli Z_j sono come in (6.4)), il noto Laplaciano di Kohn, associato al primo gruppo di Heisenberg $(\mathbb{H}^1, *) = (\mathbb{R}^3, *)$.

Dalla Sezione 6.1 si ha che la legge di gruppo $*$ è

$$(x,t) * (x',t') = \begin{pmatrix} x + x' \\ t + t' + \langle A^1\, x, x' \rangle \end{pmatrix},$$

ove la matrice A^1 è fornita da

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Inoltre segue che:

$$\Omega(\tau) = -i\,\tau\,A^1 = \begin{pmatrix} 0 & -2i\tau \\ 2i\,\tau & 0 \end{pmatrix}, \quad \forall\, \tau \in \mathbb{R}.$$

I primi due campi vettoriali della base Jacobiana sono dati da

$$\begin{aligned} Z_1 &= \partial_{x_1} + 2\,x_2\,\partial_t, \\ Z_2 &= \partial_{x_2} - 2\,x_1\,\partial_t. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Per determinare la soluzione fondamentale ci rifacciamo alle formule (2.9) a pagina 34 e (2.11) a pagina 36, che determinano per diagonalizzazione rispettivamente $V(\tau)$ e $f(x,t,\tau)$ in funzione degli autovalori e degli autovettori di $\Omega(\tau)$. Richiamiamo tali formule, con $n = 2$, ovvero

$$V(\tau) = \sqrt{\left(\prod_{k=1}^{2} \operatorname{sinhc}\big(\lambda_k(\tau)\big)\right)^{-1}},$$

$$f(x,t,\tau) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} \frac{\cosh(\lambda_i(\tau))}{\operatorname{sinhc}(\lambda_i(\tau))} \cdot \Big|\langle e_i(\tau), x\rangle_{\mathbb{C}^2}\Big|^2 - i\,\langle t, \tau\rangle,$$

ove $\lambda_1(\tau), \lambda_2(\tau)$ sono gli autovalori della matrice $\Omega(\tau)$ contati con molteplicità e $e_1(\tau), e_2(\tau)$ sono degli associati autovettori, scelti in modo da formare una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$. Gli autovalori di $\Omega(\tau)$ sono:

i) $\lambda_1(\tau) = -2\tau$,

ii) $\lambda_2(\tau) = 2\tau$,

mentre i rispettivi autovettori di una base ortonormale sono

i) $e_1(\tau) = \left(\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

ii) $e_2(\tau) = \left(-\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Perciò le funzioni $V(\tau)$ e $f(x,t,\tau)$ sono:

$$\begin{aligned} V(\tau) &= \frac{2\tau}{\sinh(2\tau)}, \\ f(x,t,\tau) &= \tfrac{1}{2}\,(x_1^2+x_2^2)\,\frac{2\tau}{\tanh(2\tau)} - i\,\tau\,t. \end{aligned}$$

Osserviamo che la dimensione omogenea di $\mathbb{H}^1$ è $Q = 2+2 = 4$, essendo $n = 2$ e $p = 1$.

Dunque, per le formule (5.6) e (6.1), abbiamo che (a meno di un fattore moltiplicativo) la soluzione fondamentale di $\mathcal{L}$ è, per $(x_1, x_2) \neq (0,0)$,

$$\begin{aligned} G(x,t) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{R}\mathrm{e}\left\{ \frac{\frac{2\tau}{\sinh(2\tau)}}{\frac{1}{2}\,(x_1^2+x_2^2)\,\frac{2\tau}{\tanh(2\tau)} - i\,\tau\,t} \right\} \mathrm{d}\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{R}\mathrm{e}\left\{ \frac{2\tau}{\frac{1}{2}\,(x_1^2+x_2^2)\,2\tau\,\cosh(2\tau) - i\,\tau\,t\sinh(2\tau)} \right\} \mathrm{d}\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{R}\mathrm{e}\left\{ \frac{2}{(x_1^2+x_2^2)\,\cosh(2\tau) - i\,t\,\tau\sinh(2\tau)} \right\} \mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

Riconoscendo che

$$\mathbb{R}\mathrm{e}\left(\frac{1}{x-iy}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad \forall\ (x,y) \neq (0,0),$$

risulta (si noti che $x = (x_1, x_2) \neq (0,0)$ per ipotesi)

$$G(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{2\,(x_1^2+x_2^2)\,\cosh(2\tau)}{t^2\,\sinh^2(2\tau) + (x_1^2+x_2^2)^2\,\cosh^2(2\tau)}\,\mathrm{d}\tau.$$

Scrivendo $\cosh^2(2\tau) = 1 + \sinh^2(2\tau)$ e facendo il cambiamento di variabile $\sinh(2\tau) = z$, si ottiene

$$G(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x_1^2+x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^2\,(1+z^2) + t^2\,z^2}\,\mathrm{d}z$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{(x_1^2+x_2^2)} \int_0^{+\infty} \frac{1}{z^2\left(1+\frac{t^2}{(x_1^2+x_2^2)^2}\right)+1}\,\mathrm{d}z \\
&= \lim_{m\to+\infty}\left[\frac{2}{(x_1^2+x_2^2)}\,\frac{\arctan\left(z\sqrt{1+\frac{t^2}{(x_1^2+x_2^2)^2}}\right)}{\sqrt{1+\frac{t^2}{(x_1^2+x_2^2)^2}}}\right]_{z=0}^{z=m} \\
&= \frac{\pi}{(x_1^2+x_2^2)\sqrt{1+\frac{t^2}{(x_1^2+x_2^2)^2}}} \\
&= \pi\left(\frac{1}{t^2+(x_1^2+x_2^2)^2}\right)^{1/2} \\
&= \pi\left(t^2+(x_1^2+x_2^2)^2\right)^{-1/2} \\
&= \pi\left(t^2+(x_1^2+x_2^2)^2\right)^{\frac{2-Q}{4}}.
\end{aligned}
$$

6.1.2 Il secondo gruppo di Heisenberg

In questa sezione, seguendo le idee precedenti, vogliamo calcolare la soluzione fondamentale di

$$
\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{4} Z_j^2, \tag{6.5}
$$

(ove gli Z_j sono come in (6.6)), il Laplaciano di Kohn associato al secondo gruppo di Heisenberg $(\mathbb{H}^2, *) = (\mathbb{R}^5, *)$.

Dalla Sezione 6.1 si ha che la legge di gruppo $*$ è

$$
(x,t)*(x',t') = \begin{pmatrix} x+x' \\ t+t'+\langle A^1\,x, x'\rangle \end{pmatrix},
$$

ove la matrice A^1 è data da

$$
A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Dunque segue che:

$$\Omega(\tau) = -i\,\tau\,A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2i\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2i\tau \\ 2i\tau & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i\tau & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \forall\ \tau \in \mathbb{R}.$$

I primi quattro campi della base Jacobiana sono

$$\begin{aligned} Z_1 &= \partial_{x_1} + 2\,x_3\,\partial_t, \\ Z_2 &= \partial_{x_2} + 2\,x_4\,\partial_t, \\ Z_3 &= \partial_{x_3} - 2\,x_1\,\partial_t, \\ Z_4 &= \partial_{x_4} - 2\,x_2\,\partial_t. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Richiamiamo, come in precedenza, le formule (2.9) e (2.11), che danno rispettivamente $V(\tau)$ e $f(x,t,\tau)$ in funzione degli autovalori e degli autovettori di $\Omega(\tau)$. Considerando tali formule con $n = 4$, si ha

$$V(\tau) = \sqrt{\left(\prod_{k=1}^{4} \operatorname{sinhc}\big(\lambda_k(\tau)\big)\right)^{-1}},$$

$$f(x,t,\tau) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} \frac{\cosh(\lambda_i(\tau))}{\operatorname{sinhc}(\lambda_i(\tau))} \cdot \Big|\langle e_i(\tau), x\rangle_{\mathbb{C}^4}\Big|^2 - i\langle t, \tau\rangle,$$

ove $\lambda_1(\tau), \ldots, \lambda_4(\tau)$ sono gli autovalori della matrice $\Omega(\tau)$ contati con molteplicità e $e_1(\tau), \ldots, e_4(\tau)$ sono degli associati autovettori, scelti in modo da formare una base ortonormale di $\mathbb{C}^4$. Gli autovalori di $\Omega(\tau)$ sono:

i) $\lambda_1(\tau) = -2\tau$,

ii) $\lambda_2(\tau) = -2\tau$,

iii) $\lambda_3(\tau) = 2\tau$,

iv) $\lambda_4(\tau) = 2\tau$,

mentre una base ortonormale di autovettori è data da

i) $e_1(\tau) = \left(0, \frac{i}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

ii) $e_2(\tau) = \left(\frac{i}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$,

iii) $e_3(\tau) = \left(0, -\frac{i}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

iv) $e_4(\tau) = \left(-\frac{i}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

Perciò le funzioni $V(\tau)$ e $f(x,t,\tau)$ sono:

$$
\begin{aligned}
&V(\tau) = 4\tau^2 \operatorname{csch}^2(2\tau),\\
&f(x,t,\tau) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)\, \tau\, \coth(2\tau) - i\, \tau\, t.
\end{aligned}
$$

Osserviamo che la dimensione omogenea di $\mathbb{H}^2$ è $Q = 4 + 2 = 6$, essendo $n = 4$ e $p = 1$. Dunque, per le formule (5.6) e (6.1), abbiamo che la soluzione fondamentale di $\mathcal{L}$ (a meno di un fattore moltiplicativo) è, per ogni $(x,t) \in \mathbb{H}^2$ con $x \neq 0$, data da

$$
G(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{R}\mathrm{e} \left\{ \frac{4\tau^2 \operatorname{csch}^2(2\tau)}{\tau^2 \Big((x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)\, \coth(2\tau) - i\, t \Big)^2} \right\} \mathrm{d}\tau.
$$

Posto $B := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ (si noti che $B > 0$ in quanto $x \neq 0$) e riconoscendo che

$$
\mathbb{R}\mathrm{e} \left(\frac{1}{(x - iy)^2} \right) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \forall\ (x,y) \neq (0,0),
$$

si ottiene che

$$
G(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{4\,(\coth^2(2\tau)\, B^2 - t^2) \operatorname{csch}^2(2\tau)}{\big(t^2 + B^2\, \coth^2(2\tau)\big)^2}\, \mathrm{d}\tau.
$$

Essendo la funzione integranda pari in τ, risulta

$$
G(x,t) = 8 \int_0^{+\infty} \frac{(\coth^2(2\tau)\, B^2 - t^2) \operatorname{csch}^2(2\tau)}{\big(t^2 + B^2\, \coth^2(2\tau)\big)^2}\, \mathrm{d}\tau
$$

$$= 4 \int_0^{+\infty} \frac{(B^2\,\coth^2 y - t^2)\,\mathrm{csch}^2(y)}{\left(t^2 + B^2\,\coth^2 y\right)^2}\,\mathrm{d}y.$$

Facendo la sostituzione $z = \coth y$ si ottiene

$$u(x,t) = 4 \int_1^{+\infty} \frac{z^2\,B^2 - t^2}{\left(t^2 + B^2\,z^2\right)^2}\,\mathrm{d}z. \tag{6.7}$$

Esprimiamo la funzione integranda in fratti semplici nel seguente modo

$$\frac{z^2\,B^2 - t^2}{\left(t^2 + B^2\,z^2\right)^2} = \frac{1}{t^2 + B^2\,z^2} + \frac{-2t^2}{\left(t^2 + B^2\,z^2\right)^2}.$$

Inoltre vale che, per $a \neq 0$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\left(a^2\,y^2 + 1\right)^2}\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{2(a^2+1)} + \frac{1}{2\,|a|}\Big(\frac{\pi}{2} - \arctan|a|\Big).$$

Quindi per $t \neq 0$, si ha che (a meno di un fattore moltiplicativo)

$$\begin{aligned}
G(x,t) &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2 + B^2\,z^2}\,\mathrm{d}z + \int_1^{+\infty} \frac{-2t^2}{\left(t^2 + B^2\,z^2\right)^2}\,\mathrm{d}z \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2 + B^2\,z^2}\,\mathrm{d}z - \frac{2}{t^2}\int_1^{+\infty} \frac{1}{\left((B/t)^2\,z^2 + 1\right)^2}\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{t\,B}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{B}{t}\right)\right) + \\
&\qquad\qquad - \frac{2}{t^2}\left[-\frac{t^2}{2(B^2+t^2)} + \frac{t}{2\,B}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{B}{t}\right)\right)\right] \\
&= \frac{1}{(B^2+t^2)} = \left(\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\right)^2 + t^2\right)^{-1} \\
&= \left(\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\right)^2 + t^2\right)^{(2-Q)/4}.
\end{aligned}$$

6.2 Il gruppo di Heisenberg anisotropo $\mathbb{H}^2(a,b)$

In questa sezione presentiamo inizialmente, seguendo la nomenclatura introdotta nell'articolo [1] da Balogh e Tyson, il cosiddetto *gruppo di Heisenberg anisotropo* di parametri reali a e b positivi, che indichiamo con

$\mathbb{H}^2(a,b) = (\mathbb{R}^5, \circ)$. Ricaviamo poi, ricorrendo ancora all'articolo [1], la forma integrale (a meno di un fattore moltiplicativo) per la soluzione fondamentale di

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{4} Z_j^2, \tag{6.8}$$

ove gli Z_j sono come in in (6.9), associato al gruppo di Heisenberg anisotropo $\mathbb{H}^2(a,b)$.Il gruppo anisotropo di Heisenberg $\mathbb{H}^2(a,b)$ è caratterizzato dalla seguente legge di gruppo $\circ$:

$$(x,t) \circ (x',t') = \begin{pmatrix} x + x' \\ t + t' + \langle A^1\, x, x' \rangle \end{pmatrix}, \quad \forall\ x, x' \in \mathbb{R}^4, t, t' \in \mathbb{R},$$

ove la matrice A^1 è data da

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 2a & 0 & 0 \\ -2a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2b \\ 0 & 0 & -2b & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque, richiamando (2.7) a pagina 30, ne segue che:

$$\Omega(\tau) = -i\,\tau\, A^1 = \begin{pmatrix} 0 & -2ai\tau & 0 & 0 \\ 2ai\tau & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2bi\tau \\ 0 & 0 & 2bi\tau & 0 \end{pmatrix}, \quad \forall\ \tau \in \mathbb{R}.$$

I primi quattro campi della base Jacobiana sono:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \partial_{x_1} + 2ax_2\partial_t, \\ Z_2 &= \partial_{x_2} - 2ax_1\partial_t, \\ Z_3 &= \partial_{x_3} + 2bx_4\partial_t, \\ Z_4 &= \partial_{x_4} - 2bx_3\partial_t. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Notiamo che $\mathbb{H}^2(1,1) \cong \mathbb{H}^2$, secondo gruppo di Heisenberg incontrato nella Sezione 6.1.2 (si veda la nota[1]). Gli autovalori di $\Omega(\tau)$ sono:

[1]Osserviamo esplicitamente che $\mathbb{H}^2(1,1)$ e $\mathbb{H}^2$ sono isomorfi; basta considerare l'isomorfismo di gruppi di Lie

$$\Phi : (\mathbb{H}^2, *) \to (\mathbb{H}^2(1,1), \circ), \quad (x_1,x_2,x_3,x_4,t) \mapsto (x_1,x_3,x_2,x_4,t).$$

i) $\lambda_1(\tau) = -2a\tau$,

ii) $\lambda_2(\tau) = 2a\tau$,

iii) $\lambda_3(\tau) = -2b\tau$,

iv) $\lambda_4(\tau) = 2b\tau$,

mentre una base ortonormale di autovettori è

i) $e_1(\tau) = \left(\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$,

ii) $e_2(\tau) = \left(-\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$,

iii) $e_3(\tau) = \left(0, 0, \frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

iv) $e_4(\tau) = \left(0, 0, -\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Richiamiamo, come abbiamo fatto nelle precedenti sezioni, le formule (2.9) e (2.11), rispettivamente di $V(\tau)$ e $f(x,t,\tau)$, in funzione degli autovalori e degli autovettori di $\Omega(\tau)$. Consideriamo tali formule con $n = 4$, ovvero

$$V(\tau) = \sqrt{\left(\prod_{k=1}^{4} \operatorname{sinhc}\big(\lambda_k(\tau)\big)\right)^{-1}},$$

$$f(x,t,\tau) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} \frac{\cosh(\lambda_i(\tau))}{\operatorname{sinhc}(\lambda_i(\tau))} \cdot \Big|\langle e_i(\tau), x\rangle_{\mathbb{C}^n}\Big|^2 - i\langle t, \tau\rangle,$$

ove $\lambda_1(\tau), \ldots, \lambda_4(\tau)$ ed $e_1(\tau), \ldots, e_4(\tau)$ sono come sopra. Perciò $V(\tau)$ e $f(x,t,\tau)$ sono:

$$\begin{aligned} V(\tau) &= 4ab\tau^2 \operatorname{csch}(2a\tau)\operatorname{csch}(2b\tau), \\ f(x,t,\tau) &= \tau\, a(x_1^2 + x_2^2)\coth(2a\tau) + \tau\, b(x_3^2 + x_4^2)\ \coth(2b\tau) - i\tau\, t, \\ &= \tau\,(A - B)\coth(2a\tau) + \tau\,(2B - A)\ \coth(2b\tau) - i\tau\, t. \end{aligned}$$

In tal modo, quello che si è ottenuto nella Sezione 6.1.2 potrà essere ritrovato in questa sezione sostituendo ad a e b il valore 1.

dove poniamo

$$A := 2a\,x_1^2 + 2a\,x_2^2 + b\,x_3^2 + b\,x_4^2, \qquad B := a\,x_1^2 + a\,x_2^2 + b\,x_3^2 + b\,x_4^2 \tag{6.10}$$

e $x\operatorname{csch}(x) = x\coth(x) = 1$ per $x = 0$. Osserviamo che la dimensione omogenea di $\mathbb{H}^2(a,b)$ è $Q = 4+2 = 6$, essendo $n = 4$ e $p = 1$.

Quindi la soluzione fondamentale (a meno di un fattore moltiplicativo) di $\mathcal{L}$, come in (6.8), è data da (per ogni $(x,t) \in \mathbb{H}^2(a,b)$ con $x \neq 0$)

$$G(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{R}\mathrm{e} \left\{ \frac{4ab\tau^2 \operatorname{csch}(2a\tau)\operatorname{csch}(2b\tau)}{\Big(\tau\,(A-B)\coth(2a\tau) + \tau\,(2B-A)\,\coth(2b\tau) - i\tau\,t\Big)^2} \right\} \mathrm{d}\tau.$$

Riconoscendo che

$$\mathbb{R}\mathrm{e}\left(\frac{1}{(x-iy)^2}\right) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \forall\ (x,y) \neq (0,0),$$

la soluzione fondamentale è data da

$$\begin{aligned} G(x,t) = {} & \int_{\mathbb{R}} 4ab\operatorname{csch}(2a\tau)\operatorname{csch}(2b\tau)\cdot \\ & \cdot \frac{\big((A-B)\coth(2a\tau) + (2B-A)\,\coth(2b\tau)\big)^2 - t^2}{\Big(\big((A-B)\coth(2a\tau) + (2B-A)\,\coth(2b\tau)\big)^2 + t^2\Big)^2}\,\mathrm{d}\tau \\ & \text{(per la parità dell'integranda nella variabile } \tau) \\ = {} & \int_0^{+\infty} 8ab\operatorname{csch}(2a\tau)\operatorname{csch}(2b\tau)\cdot \\ & \cdot \frac{\big((A-B)\coth(2a\tau) + (2B-A)\,\coth(2b\tau)\big)^2 - t^2}{\Big(\big((A-B)\coth(2a\tau) + (2B-A)\,\coth(2b\tau)\big)^2 + t^2\Big)^2}\,\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{6.11}$$

6.2.1 Il gruppo di Heisenberg anisotropo $\mathbb{H}^2(1/2,1)$

In questa sezione calcoliamo esplicitamente la soluzione fondamentale dell'operatore

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{4} Z_j^2, \tag{6.12}$$

associato al gruppo di Heisenberg anisotropo $\mathbb{H}^2(1/2,1)$, ove i campi vettoriali Z_j sono come in (6.9) in cui $a = \dfrac{1}{2}$ e $b = 1$.

Dalla formula (6.11), ponendo $a = \dfrac{1}{2}$ e $b = 1$, si ha che la soluzione fondamentale di $\mathcal{L}$ in (6.12), è (per $x \neq 0$)

$$\begin{aligned} G(x,t) = &\int_0^{+\infty} 4\mathrm{csch}(\tau)\,\mathrm{csch}(2\tau)\cdot \\ &\cdot \frac{\big((A-B)\coth(\tau) + (2B-A)\,\coth(2\tau)\big)^2 - t^2}{\Big(\big((A-B)\coth(\tau) + (2B-A)\,\coth(2\tau)\big)^2 + t^2\Big)^2}\,\mathrm{d}\tau, \end{aligned} \tag{6.13}$$

in cui A e B sono come in (6.10) dove $a = \dfrac{1}{2}$ e $b = 1$. Facendo la sostituzione $y = \mathrm{csch}(\tau)$ si trova che

$$G(x,t) = 4\int_0^{+\infty} \frac{(Ay^2+2B)^2\,y^2 - 4t^2\,(1+y^2)\,y^2}{\Big(\big((Ay^2+2B)^2\,y^2 + 4t^2\,(1+y^2)\,y^2\big)\Big)^2}\,\mathrm{d}y.$$

Esprimendo l'integranda in fratti semplici e usando l'identità

$$\int_0^{+\infty} \frac{au^2+b}{cu^2+d}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{4}\,\frac{ad+bc}{(cd)^{3/2}}, \qquad cd > 0,$$

si trova, utilizzando il software Mathemathica$^{\mathrm{TM}}$, che

$$\begin{aligned} G(x,t) &= \pi \frac{(B+\sqrt{B^2+t^2})^{1/2}}{\sqrt{B^2+t^2}\,(A-B+\sqrt{B^2+t^2})^{3/2}} \\ &= \pi \left(\tfrac{1}{2}\,x_1^2 + \tfrac{1}{2}\,x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + \sqrt{(\tfrac{1}{2}\,x_1^2 + \tfrac{1}{2}\,x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2 + t^2} \right)^{1/2} \\ &\quad\cdot \left((\tfrac{1}{2}\,x_1^2 + \tfrac{1}{2}\,x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2 + t^2 \right)^{-1/2} \cdot \\ &\quad\cdot \left(\tfrac{1}{2}\,x_1^2 + \tfrac{1}{2}\,x_2^2 + \sqrt{(\tfrac{1}{2}\,x_1^2 + \tfrac{1}{2}\,x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2 + t^2} \right)^{-3/2}. \end{aligned}$$

6.3 Il gruppo $\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{H}^1$

In questa ultima sezione mostriamo un esempio di gruppo per il quale non è possibile fornire una formula esplicita per la soluzione fondamentale dell'associato sub-Laplaciano canonico.

Questo gruppo lo indicheremo con $\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{H}^1 = (\mathbb{R}^5, *)$, dal momento che la legge $*$ è la "somma diretta" di quella euclidea su $\mathbb{R}^2$ con quella del primo gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^1$: esplicitamente, per ogni $x, x' \in \mathbb{R}^4$ e per ogni $t, t' \in \mathbb{R}$, (indicheremo $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, dove x_1, x_2 rappresentano le menzionate coordinate aggiuntive)

$$(x,t) * (x', t') = \begin{pmatrix} x + x' \\ t + t' + \langle A^1\, x, x' \rangle \end{pmatrix},$$

ove la matrice A^1 è data da

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Inoltre segue che:

$$\Omega(\tau) = -i\,\tau\, A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2i\tau \\ 0 & 0 & 2i\tau & 0 \end{pmatrix}, \quad \forall\, \tau \in \mathbb{R}.$$

I primi quattro campi della base Jacobiana sono:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \partial_{x_1} \\ Z_2 &= \partial_{x_2} \\ Z_3 &= \partial_{x_3} + 2\, x_4 \partial_t, \\ Z_4 &= \partial_{x_4} - 2\, x_3 \partial_t. \end{aligned} \tag{6.14}$$

In questo caso perciò, l'operatore $\mathcal{L}$ è

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{4} Z_j^2, \tag{6.15}$$

ove gli Z_j sono come in (6.14).

Anche in questo caso per fornire l'espressione integrale della soluzione fondamentale (a meno di un fattore moltiplicativo) ci rifacciamo alle formule (2.9) e (2.11), rispettivamente di $V(\tau)$ e $f(x,t,\tau)$, in funzione degli autovalori e degli autovettori di $\Omega(\tau)$. Richiamiamo tali formule, sostituendo a n il valore 4, ovvero

$$V(\tau) = \sqrt{\left(\prod_{k=1}^{4} \operatorname{sinhc}\big(\lambda_k(\tau)\big)\right)^{-1}},$$

$$f(x,t,\tau) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} \frac{\cosh(\lambda_i(\tau))}{\operatorname{sinhc}(\lambda_i(\tau))} \cdot \left|\langle e_i(\tau), x\rangle_{\mathbb{C}^n}\right|^2 - i\langle t,\tau\rangle,$$

ove $\lambda_1(\tau),\ldots,\lambda_4(\tau)$ sono gli autovalori della matrice $\Omega(\tau)$ contati con molteplicità e $e_1(\tau),\ldots,e_4(\tau)$ sono degli associati autovettori, scelti in modo da formare una base ortonormale di $\mathbb{C}^4$. Gli autovalori di $\Omega(\tau)$ sono:

i) $\lambda_1(\tau) = 0$,

ii) $\lambda_2(\tau) = 0$

iii) $\lambda_3(\tau) = -2\tau$,

iv) $\lambda_4(\tau) = 2\tau$,

mentre una base ortonormale di autovettori è

i) $e_1(\tau) = (0,1,0,0)$,

i) $e_2(\tau) = (1,0,0,0)$,

iii) $e_3(\tau) = \left(0,0,\frac{i}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)$,

iv) $e_4(\tau) = \left(0,0,-\frac{i}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)$.

Si pongono

$$A := 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \text{ e } B := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2; \tag{6.16}$$

dunque segue che le funzioni $V(\tau)$ e $f(x,t,\tau)$ sono:

$$\begin{aligned} V(\tau) &= 2\tau\,\mathrm{csch}(2\tau), \\ f(x,t,\tau) &= \left(\frac{1}{2}\,(x_1^2+x_2^2)+(x_3^2+x_4^2)\,\tau\coth(2\tau)\right)-it\tau \\ &= \left(\frac{1}{2}\,(A-B)+(2B-A)\,\tau\coth(2\tau)\right)-it\tau, \end{aligned}$$

dove poniamo $x\,\mathrm{csch}(x) = x\coth(x) = 1$ per $x = 0$. Osserviamo che la dimensione omogenea di $\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{H}^1$ è $Q = 4+2 = 6$, essendo $n = 4$ e $p = 1$. Dunque, per le formule (5.6) e (6.1), abbiamo che la soluzione fondamentale di $\mathcal{L}$ è (per $x \neq 0$)

$$G(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{R}\mathrm{e}\left\{\frac{2\tau\,\mathrm{csch}(2\tau)}{\left(\left(\frac{1}{2}\,(A-B)+(2B-A)\,\tau\coth(2\tau)\right)-it\tau\right)^2}\right\}\mathrm{d}\tau.$$

Sfruttando il software Mathemathica$^{\mathrm{TM}}$ si è trovato che

$$\mathbb{R}\mathrm{e}\left\{\frac{2\tau\,\mathrm{csch}(2\tau)}{\left(\left(\frac{1}{2}\,(A-B)+(2B-A)\,\tau\coth(2\tau)\right)-it\tau\right)^2}\right\}$$

$$= \frac{8\tau\left(\big(2(2B-A)\tau\,\coth(2\tau)+(A-B)\big)^2-4t^2\,\tau^2\right)}{\sinh(2\tau)\left(\big(2(2B-A)\tau\,\coth(2\tau)+(A-B)\big)^2+4t^2\,\tau^2\right)^2}.$$

Osservando che la funzione

$$\mathbb{R}\ni\tau\mapsto\frac{8\tau\left(\big(2(2B-A)\tau\,\coth(2\tau)+(A-B)\big)^2-4t^2\,\tau^2\right)}{\sinh(2\tau)\left(\big(2(2B-A)\tau\,\coth(2\tau)+(A-B)\big)^2+4t^2\,\tau^2\right)^2}$$

è pari si conclude che la soluzione fondamentale di $\mathcal{L}$ è

$$G(x,t) = \int_0^{+\infty}\frac{8\tau\left(\big(2(2B-A)\tau\,\coth(2\tau)+(A-B)\big)^2-4t^2\,\tau^2\right)}{\sinh(2\tau)\left(\big(2(2B-A)\tau\,\coth(2\tau)+(A-B)\big)^2+4t^2\,\tau^2\right)^2}\,\mathrm{d}\tau,$$

ove le costanti A e B sono come in (6.16).

Si può osservare che il gruppo in questione *non è un gruppo di Métivier* (nel senso di [8, §3.7]), ossia non è un gruppo in cui i sub-Laplaciani sono analitico-ipoellittici (ma solo $\mathbf{C}^\infty$-ipoellittici). Questo dipende dal fatto che la matrice A^1 *non è invertibile*. Ne segue che $G(x,t)$ non è una funzione real-analitica e quindi non può essere espressa come composizione di funzioni elementari. Questo mostra una certa limitatezza dell'applicabilità della formula integrale di Beals, Gaveau e Greiner, insita nella natura stessa della geometria non-ellittica dei gruppi di Carnot.

Bibliografia

[1] Balogh, Z.M., Tyson, J.T.: *Polar coordinates in Carnot groups*, Math. Z., **241**, 697–730 (2002).

[2] Beals, R.: *A note on fundamental solutions*, Comm. Partial Differential Equations, **24**, 369–376 (1999).

[3] Beals, R., Gaveau, B., Greiner, P.: *The Green function of model step two hypoelliptic operators and the analysis of certain tangential Cauchy Riemann complexes*, Adv. Math., **121**, 288–345 (1996).

[4] Beals, R., Gaveau, B., Greiner, P.: *Complex Hamiltonian mechanics and parametrices for subelliptic Laplacians. I, II, III.*, Bull. Sci. Math., **121**, 1–36, 97–149, 195–259 (1997).

[5] Beals, R., Gaveau, B., Greiner, P., Kannai, Y.: *Exact fundamental solutions for a class of degenerate elliptic operators*, Comm. Partial Differential Equations, **24**, 719–742 (1999).

[6] Beals, R., Greiner, P.: *Calculus on Heisenberg manifolds*, Annals of Mathematics Studies, **119**, Princeton Univ. Press, Princeton, 1988.

[7] Bonfiglioli, A.: *Lifting of convex functions on Carnot groups and lack of convexity for a gauge function*, Arch. Math.,**93**, 277–286 (2009).

[8] Bonfiglioli, A., Lanconelli, E., Uguzzoni, F.: *Stratified Lie Groups and Potential Theory for their sub-Laplacians*, Springer Monographs in Mathematics, New York, NY, Springer 2007.

[9] Corwin, L.J., Greenleaf, F.P.: *Representations of nilpotent Lie groups and their applications (Part I: Basic theory and examples)*, Cambridge University Press, **18**, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge 1990.

[10] Danielli, D., Garofalo, N., Nhieu, D.-M.: *Notion of convexity in Carnot groups*, Commun. Anal. Geom., **11**, 263–341 (2003).

[11] Federer, H.: *Geometric measure theory*, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **153**, Springer-Verlag, New York 1969.

[12] Folland, G.B.: *A fundamental solution for a subelliptic operator*, Bull. Amer. Math. Soc., **79**, 373–376 (1973).

[13] Gaveau, B.: *Principe de moindre action, propagation de la chaleur et estimées sous elliptiques sur certains groupes nilpotents*, Acta Math., **139**, 95–153 (1977).

[14] Hulanicki, A: *The distribution of energy in the Brownian motion in the Gaussian field and analytic-hypoellipticity of certain subelliptic operators on the Heisenberg group*, Studia Math., **56**, 165–173 (1976).

[15] Kaplan, A.: *Fundamental solutions for a class of hypoelliptic PDE generated by composition of quadratic forms*, Trans. Am. Math. Soc. **258**, 147–153 (1980).

Ringraziamenti

Passa il tempo, passano le lezioni, passano gli esami e, in men che non si dica, si arriva all'ultimo step: la tesi di laurea. La tesi passa e si approda ai ringraziamenti. Grazie alla mia famiglia. Due componenti indispensabili per me. Nel vostro grazie ci sta tutto, qualsiasi cosa che possiate immaginare: grazie per la possibilità di studiare, grazie per l'incoraggiamento continuo, grazie per la comprensione, grazie per l'affetto che mi riservate, grazie per la sincerità, grazie per il sostegno continuo, grazie per sopportarmi tutti i giorni (mi rendo conto di essere una spina nel fianco, ogni tanto).

Ringrazio, poi, i miei amici e coinquilini di questi fantastici cinque anni, Federico, Francesco e Riccardo e anche Lorenzo, amico matematico come me: sono sempre stati troppo gentili e disponibili verso di me. Sempre mi hanno rispettato, consigliato e, soprattutto ascoltato. Apprezzo molto quello che avete fatto per me.

Infine, non per minore importanza ma tutt'altro, va un ringraziamento speciale al mio relatore, il Dott. Bonfiglioli. La ringrazio, Professore, per il suo tempo, per la sua massima e totale disponibilità e perchè mi ha permesso di scrivere questa tesi in un clima di rispetto, condivisione, allegria, divertimento, sfida e tensione. Sono davvero contento di aver concluso la mia carriera universitaria con Lei: mi ha spinto a mettermi in gioco e a crederci sempre.